Комплексный интеграл

Пусть $\gamma = \{z(t) = x(t) + iy(t), t \in [t_1 t_2]\}$ — кусочно-гладкая кривая в комплексной плоскости и задана функция f, непрерывная на кривой γ. Тогда при этих условиях интегралом от функции f по кривой γ называют следующий интеграл:

$$\int\limits_{\gamma} f(z)dz := \int\limits_{t_1}^{t_2} f(z(t))z'(t)dt.$$

Можно выразить через два криволинейных интеграла II рода:

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} f(z(t))z'(t)dt = \int\limits_{\gamma}(udx - vdy) + i\int\limits_{\gamma}(vdx + udy),$$

Свойства комплексного интеграла

Свойства интеграла комплекснозначной функции по кривой:

1. Линейность: если $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ и функции f_1, f_2 непрерывны на кривой γ, то
$$\int\limits_{\gamma}(c_1 f_1(z) + c_2 f_2(z))dz = c_1\int\limits_{\gamma} f_1(z)dz + c_2\int\limits_{\gamma} f_2(z)dz.$$
2. Аддитивность по кривой интегрирования: если кривая γ разбита на две части γ_1 и γ_2 и $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$, то
$$\int\limits_{\gamma} f(z)dz = \int\limits_{\gamma_1} f(z)dz + \int\limits_{\gamma_2} f(z)dz.$$
3. Не зависит от параметризации кривой.
4. При изменении ориентации кривой знак интеграла меняется на противоположный:
$$\int\limits_{-\gamma} f(z)dz = -\int\limits_{\gamma} f(z)dz.$$
5. Оценка модуля интеграла:
$$\left|\int\limits_{\gamma} f(z)dz\right| \leq \int\limits_{t_1}^{t_2} |f(z(t))| \cdot \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt := \int\limits_{\gamma} |f(z)||dz|.$$
    1. Пусть $\ell(\gamma)$ — длина кривой. Если $\forall z \in \gamma : |f(z)| \leq M < \infty$, то
    $$\left|\int\limits_{\gamma} f(z)dz\right| \leq M \cdot \ell(\gamma).$$

Пример. Пусть $a \in \mathbb{C}$. Рассмотрим кривую $\gamma_r = \{z : |z - a| = r\}$, где $r > 0$, ориентированную против часовой стрелки. Вычислим интеграл

$$\int\limits_{\gamma_r} (z - a)^k dz.$$

Параметризуем кривую: $z(t) = a + re^{i\varphi}$, $\varphi \in [0, 2\pi]$. Тогда

$$\int\limits_{\gamma_r} (z-a)^k dz = \int\limits_0^{2\pi} \left(re^{i\varphi}\right)^k ire^{i\varphi} d\varphi = ir^{k+1} \int\limits_0^{2\pi} e^{i(k+1)\varphi} d\varphi =$$
$$= \begin{cases} 0, \text{если } k \neq -1 \\ 2\pi i, \text{если } k = -1. \end{cases}$$

то есть

$$\int\limits_{\gamma_r} \frac{dz}{z-a} = 2\pi i.$$

Теорема о почленном интегрировании

Теорема. Пусть $f_n : \gamma \to \mathbb{C}$ и f_n непрерывны на кусночно-гладкой кривой γ и ряд $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}$ сходится на γ равномерно к $s(z)$. Тогда его можно почленно интегрировать, то есть

$$\int\limits_\gamma s(z) dz = \sum_{n=0}^{+\infty} \int\limits_\gamma f_n(z) dz.$$

Доказательство. □ Так как f_n непрерывны, и ряд сходится равномерно, то f непрерывна на $\gamma \Rightarrow$ интеграл $\int\limits_\gamma f(z)dz$ определён. По определению равномерной сходимости, $\forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_\varepsilon \forall z \in \gamma$:

$$\left| s(z) - \sum_{n=0}^{N} f_n(z) \right| < \varepsilon$$

Напишем разницу между интегралом и частичной суммой интегралов:

$$\left| \int\limits_\gamma s(z)dz - \sum_{n=0}^{N} \int\limits_\gamma f_n(z)dz \right| = \left| \int\limits_\gamma \left(s(z) - \sum_{n=0}^{N} f_n(z) \right) dz \right| \leq \int\limits_\gamma \left| s(z) - \sum_{n=0}^{N} f_n(z) \right| |dz| < \varepsilon \ell(\gamma).$$

■

Определение. Область $G \subset \mathbb{C}$ называется односвязной, если любая замкнутая кривая, лежащая в G, может быть стянута до точки внутри G.Ещё можно определить так: если есть ограниченная область D и кусочно-гладкий контур γ такой, что $\partial D = \gamma$ и $\gamma \subset G$, то $D \subset G$.

Интегральная теорема Коши

Теорема. Пусть $f : G \to \mathbb{C}$ регулярна в односвязной области G и $\gamma \subset G$ — простой кусочно-гладкий контур(замкнутая кривая). Тогда

$$\int\limits_\gamma f(z) dz = 0.$$

Доказательство. □ Пусть $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, где $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Тогда по определению комплексного интеграла

$$\int\limits_{\gamma} f(z)dz = \int\limits_{\gamma} (udx - vdy) + i \int\limits_{\gamma} (vdx + udy).$$

Так как $f(z)$ регулярна, то u, v имеют непрерывные частные производные. По формуле Грина:

$$\int\limits_{\gamma} (udx - vdy) = \iint\limits_{D} \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dxdy = 0,$$

$$\int\limits_{\gamma} (vdx + udy) = \iint\limits_{D} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) dxdy = 0.$$

Следовательно, из условий Коши-Римана, $\int\limits_{\gamma} f(z)dz = 0$. Здесь использовнана непрерывная дифференцируемость u и v, которая включается в регулярность f. ■

Определение. Область $G \subset \mathbb{C}$ называется областью с кусочно-гладкой границей, если границу можно представить в виде конечного объединения кусочно-гладких кривых, которые могут иметь общие точки только на концах.

Определение. Кривая γ_k называется разрезом, если $\forall z \in \mathring{\gamma}(\gamma_k$ без концевых точек$)\exists \varepsilon > 0 :$ $B_\varepsilon(z) \setminus \gamma_k \subset G$.

Обобщённая теорема Коши и интегральная формула Коши

📕 *Теорема (б/д).* Пусть G — ограниченная область с кусочно-гладкой положительно ориентированной границей γ, а функция f регулярна в G и непрерывна на $\overline{G}$. Тогда

$$\int\limits_{\gamma} f(z)dz = 0.$$

Используя эту теорему, можно вывести интегральную формулу Коши.

📕 *Теорема.* Пусть G — ограниченная область с кусочно-гладкой положительно ориентированной границей γ, а функция f регулярна в G и непрерывна на $\overline{G}$. Тогда $\forall z \in G$ выполняется формула Коши:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}.$$

Доказательство. □ Если $z \in G$, то существует такой радиус $r_0 > 0$, что круг $\overline{B}_{r_0}(z) \subset G$. Рассмотрим контур $\gamma_r = \{\zeta : |\zeta - z| = r\}$, ориентированный против часовой стрелки. По обобщённой теореме Коши интеграл по замкнутому контуру γ равен сумме интегралов по контурам γ и $-\gamma_r$:

Пусть $0 < r < r_0$ и $G_r = G \setminus \overline{B}_r(z)$. Тогда $\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ регулярна в $\overline{G_r}$, и по интегральной теореме Коши:

$$\int\limits_{\partial\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int\limits_{\Gamma} \frac{f(z)}{\zeta - z} d\zeta + \int\limits_{\gamma_r -} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Итак,

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_r}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta.$$

■