ШАД. Хэндбук поступающего

Автор: Даниил Скороходов

@neuralspeedster

19.09.2025

Содержание

A. Алгебра

Здесь много базы!

A.1. Подстановки

Пусть Ω - конечное множество из n элементов. Удобно считать, что $\Omega = \{1, 2, ..., n\}$. Зададим множество всех биективных преобразований $\Omega \to \Omega$:

$$S = S_n(\Omega) = \{\sigma : \Omega \to \Omega \mid \sigma - \text{биективно}\} \tag{1}$$

Элементы множества S называются *подстановками*(или *перестановками*) множества Ω.

Развёрнутая запись подстановки $\pi : i \to \pi(i)\ \forall i = 1, 2, ..., n$ имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ \pi(1) & \pi(2) & ... & \pi(n) \end{pmatrix} \tag{2}$$

Подстановка $e = e_\Omega = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ 1 & 2 & ... & n \end{pmatrix}$ называется *единичной подстановкой.*

A.1.1. Умножение подстановок

Пусть $\pi, \sigma \in S$. Тогда их произведение $\pi\sigma$ находится из общего определения композиции преобразований:

$$(\pi\sigma)(i) = \pi(\sigma(i)) \tag{3}$$

Пусть, например, $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ и $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Тогда:

$$(\pi\sigma)(1) = \pi(\sigma(1)) = \pi(4) = 1 \tag{4}$$

$$(\pi\sigma)(2) = \pi(\sigma(2)) = \pi(3) = 4 \tag{5}$$

$$(\pi\sigma)(3) = \pi(\sigma(3)) = \pi(2) = 3 \tag{6}$$

$$(\pi\sigma)(4) = \pi(\sigma(4)) = \pi(1) = 2 \tag{7}$$

Таким образом, $\pi\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. Заметим, что вообще говоря, $\pi\sigma \neq \sigma\pi$. Имеем:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \tag{8}$$

Свойства произведения подстановок:

1. Ассоциативность: $\forall \alpha, \beta, \gamma \in S_n : \alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$.
2. Единичный элемент: $\exists e \in S_n : \forall \alpha \in S_n \alpha e = e\alpha$.
3. Обратная подстановка: $\forall \alpha \in S_n \exists \alpha^{-1} \in S_n : \alpha\alpha^{-1} = \alpha^{-1}\alpha = e$.

Порядок группы подстановок или же попросту мощность множества подстановок равна факториалу количества элементов Ω. Действительно, для каждого из n элементов множества Ω можно выбрать одно из n мест, затем для оставшихся $n-1$ элементов — одно из $n-1$ мест и так далее. В итоге получаем:

$$\mathrm{Card}\, S_n = n(n-1)(n-2)...1 = n! \tag{9}$$

A.1.2. Циклы и транспозиции

Циклом длины $m \le n$ множества Ω называется такая подстановка $\sigma \in S_n$, что $\sigma(i) = (i+1)\ \forall i = 1, 2, ..., (m-1)$ и $\sigma(m) = 1$, а все элементы Ω, не указанные перечислением, остаются на своих местах. Т. е. $\forall k \notin \{1, ..., m\} : \sigma(k) = k$.

Примечание: элементы цикла приведены *условно* как $\{1, ..., m\}$.

Транспозицией называется цикл длины 2. Записывается как $\tau = \begin{pmatrix} i & j \end{pmatrix}$, где i и j — элементы, которые меняются местами.

Исходя из общего определения цикла, очевидно, что транспозиция оставляет неподвижными все элементы, кроме двух указанных.

Th. 1 (О разложении перестановок). Любая подстановка $\pi \in S_n \setminus \{e\}$ может быть представлена в виде произведения циклов.

Доказательство: Пусть $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ \pi(1) & \pi(2) & ... & \pi(n) \end{pmatrix}$. Разобьём множество Ω на непересекающиеся циклы. Для этого будем рассматривать последовательности элементов, которые переходят друг в друга под действием подстановки π.

Следствие 1. Любая подстановка может быть разложена в произведение транспозиций.

Доказательство: Разложим подстановку $\pi = \pi_1\pi_2...\pi_k$, где $\pi_1, \pi_2, ..., \pi_k$ — циклы. Каждый цикл π_j можно представить в виде произведения транспозиций, например, так: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & l \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & l-1 \end{pmatrix}...\begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$. ■

Индуктивное определение степени подстановки. Пусть $\pi \in S_n$. Тогда:

$$\pi^s = \begin{cases} \pi(\pi^{s-1}), & \text{если} \quad s > 0 \\ e, & \text{если} \quad s = 0 \\ \pi^{-1}\left(\left(\pi^{-1}\right)^{-s-1}\right), & \text{если} \quad s < 0 \end{cases} \tag{10}$$

Вернёмся к примеру $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ и $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Здесь π — цикл длины 4, а σ раскладывается в произведение двух транспозиций: $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}$.

$\sigma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix}, \sigma^4 = \left(\sigma^2\right)^2 = e, \pi^2 = e$

A.1.3. Чётность подстановки

Пусть подстановка $\pi \in S_n$ раскладывается на множители $\pi = \tau_1 \tau_2 ... \tau_k$, где τ_j — транспозиции.

Знаком(или *чётностью*) подстановки называется число

$$\varepsilon_\pi = (-1)^k \tag{11}$$

Th. 2: Чётность подстановки не зависит от выбора разложения на транспозиции.

Th. 2.1 (О знаке произведения):

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta \tag{12}$$

Th. 3: Количество чётных подстановок равно количеству нечётных и равно $\frac{n!}{2}$.

A.2. Комплексные числа

Комплексным числом называется пара действительных чисел (a, b).

$$\mathbb{C} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\} \tag{13}$$

Если $z = (a, b)$, то

$$a = \Re(z) \tag{14}$$

$$b = \Im(z) \tag{15}$$

a называется действительной частью комплексного числа z, b — мнимой частью.

Для комплексных чисел операции сложения и умножения определяются так:

1. $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$
2. $(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$

Заметим, что $(a, 0) = a\ \forall a \in \mathbb{R}$. Так что $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Мнимая единица. $(0, 1)^2 = (0, 1)(0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0) = -1$. Число $(0, 1)$ принято обозначать i и называть мнимой единицей. Итак,

$$i^2 = -1 \tag{16}$$

Стандартное обозначение для комплексного числа $z = (a, b)$:

$$z = a + bi \tag{17}$$

Для произвольных комплексных чисел нельзя корректно ввести бинарное отношение порядка(<).

A.2.1. Геометрическая интерпретация

Комплексному числу можно сопоставить точку в двумерном пространстве с декартовыми координатами (a, b). По оси абсцисс откладывается действительная часть, по оси ординат — мнимая.

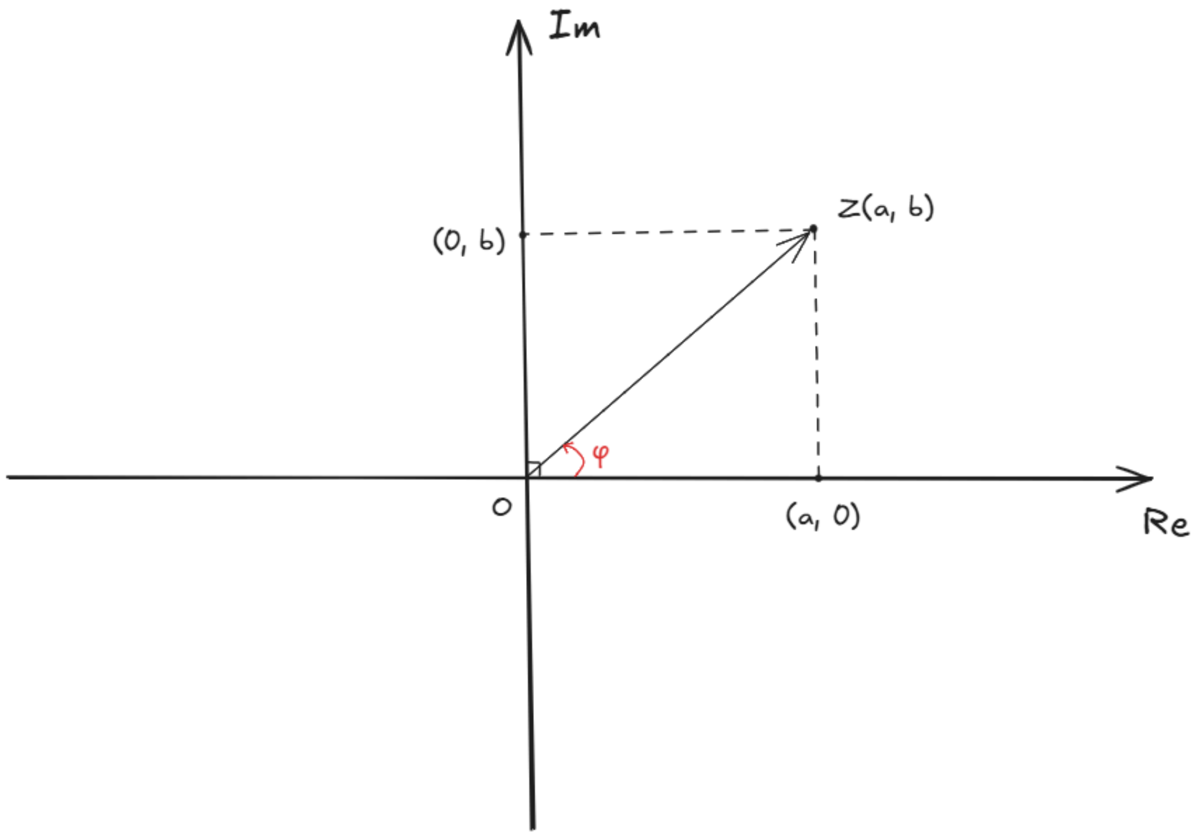

Рис. 1 - комплексная плоскость

Операция сопряжения. Число $\overline{z} = a - bi$ называется *сопряжённым* числу $z = a + bi$. Операция сопряжения соотвествует симметрии $S_{\mathfrak{R}}$ относительно действительной оси.

Заметим, что $\mathfrak{I}(z\overline{z}) = 0 \Leftrightarrow z\overline{z} \in \mathbb{R}$

Модуль комплексного числа. Величина $|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$ называется *модулем* z.

Аргумент комплексного числа. Величина $\arg(z) = \varphi$, где $\varphi \in (-\pi; \pi]$ — ориентированный угол между радиус-вектором z и положительным направлением оси абсцисс называется *аргументом комплексного числа.* Аргумент числа $(0, 0)$ не определён.

Неравенство треугольника в комплексных числах. $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$:

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \tag{18}$$

(Доказывается алгебраическими преобразованиями или использованием неравенства Коши-Буняковского-Шварца)

Переход в полярные координаты. Сделав замену

$$\begin{cases} r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \varphi = \arg(z) \end{cases} \tag{19}$$

Мы перейдем в полярные координаты, получив тем самым *тригонометрическую форму записи комплексного числа.*

Оказывается, есть всего 8 принципиальных случаев расположения комплексного числа $z = a + bi$ на комплексной плоскости.

Расположение точки (a, b)	Главное значение аргумента
$a > 0, b = 0$	0
$a > 0, b > 0$	$\operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right)$
$a = 0, b > 0$	$\frac{\pi}{2}$
$a < 0, b > 0$	$\pi + \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right)$
$a < 0, b = 0$	π
$a < 0, b < 0$	$-\pi + \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right)$
$a = 0, b < 0$	$-\frac{\pi}{2}$
$a > 0, b < 0$	$\operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right)$

На самом деле, главными называются значения аргумента из полуинтервала $(-\pi; \pi]$, но, вообще говоря, аргументом можно считать и главный аргумент с добавкой $2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$. Ввиду этого, главное значение аргумента обозначается $\operatorname{Arg}(z)$, а в целом значение аргумента $\arg(z)$.

A.2.2. Формы записи

1. Алгебраическая:

$$z = a + bi \tag{20}$$

2. Тригонометрическая:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \tag{21}$$

3. Показательная:

$$z = re^{i\varphi} \tag{22}$$

Показательная форма есть просто следствие формулы Эйлера:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \tag{23}$$

Доказательство самой формулы Эйлера вытекает из следующих трёх разложений. $\forall z \in \mathbb{C}$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - ... = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \tag{24}$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - ... = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \tag{25}$$

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \tag{26}$$

Подставим в разложение экспоненты $z = i\varphi$, где $\varphi \in \mathbb{R}$ и учтем следующие тождества: $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i$. Вообще говоря, $i^n = i^{n-4}$. Отсюда и следует требуемое. ■

A.2.3. Об умножении комплексных чисел

Алгебраическое умножение комплексных чисел не столь удобно, особенно при возведении в степень.

Пусть даны два комплексных числа $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$. Тогда их произведение можно записать в виде:

$$\begin{gathered} z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = \\ = r_1 r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2)) = \\ = r_1 r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)) \end{gathered} \tag{27}$$

Итак,

$$\begin{cases} |z_1 z_2| = |z_1||z_2| \\ \arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) \end{cases} \tag{28}$$

Исходя из этого, можно быстро возводить комплексные числа в произвольную натуральную степень.

Формула Муавра. $\forall z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$:

$$z^n = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)) \tag{29}$$

Доказательство: докажем по индукции.

1. База: $n = 1$. Тогда $z^1 = z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Это уже получено. Для уверенности можем проверить случай $n = 2$. Легко видеть, что это следствие (28) для $z = z_1 = z_2$.
2. Предположение индукции. Пусть верно для $n \in \mathbb{N}$: $z^n = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$

3. Шаг индукции. Докажем для $n+1$. Тогда

$$\begin{aligned} z^{n+1} &= z^n z = r^n r(\cos(n\varphi+\varphi) + i\sin(n\varphi+\varphi)) = \\ &= r^{n+1}(\cos((n+1)\varphi) + i\sin((n+1)\varphi)) \end{aligned} \tag{30}$$

■

Здесь мы снова использовали (28). Таким образом, формула верна для $n+1 \Rightarrow$ она верна $\forall n \in \mathbb{N}$.

Дополнительно. Легко видеть, что умножение $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ на $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ задаёт композицию поворота $R_O^{\varphi_2}$ и гомотетии $H_O^{r_2}$ точки z_1 на плоскости $\mathbb{C}$. Полученное преобразование $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ называется *поворотной гомотетией:* $H_O^{r_2,\varphi_2} = H_O^{r_2} \circ R_O^{\varphi_2}$.

A.2.4. Извлечение корней

Алгебраическим корнем степени $n > 1$ числа $z \in \mathbb{C}$ называется множество $\Omega = \{w \mid w^n = z \mid w \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}\}$ и обозначается $\sqrt[n]{z}$.

$\forall z \in \mathbb{C} : \mathrm{Card}(\sqrt[n]{z}) = n$.

Выведем формулу для корней из комплексного числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Пусть $\sqrt[n]{z} = \{w_k \mid w_k^n = z \mid k = 0, 1, ..., n-1\}$.

1. Очевидно, что $|w_k| = \sqrt{r}$, где $\sqrt{r}$ — *арифметический квадратный корень* из действительного числа r. И правда, по формуле Муавра $|z| = |w_k|^n$.
2. Пусть $\varphi_k = \arg(w_k)$. Тогда по формуле Муавра: $n\varphi_k = \varphi + 2\pi k$. Для всех $k \in \{k_0 + i \mid i = 0, 1, ...(n-1)\}$ будут получаться все n корней. Поэтому для удобства полагают $k_0 = 0$. ■

Итак, доказана формула корней числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ $\forall k \in \{0, 1, ..., n-1\}$:

$$w_k = \sqrt{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + 2\pi\frac{k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + 2\pi\frac{k}{n}\right)\right) \tag{31}$$

Все корни из числа z лежат на вершинах правильного n-угольника, вписанного в окружность с центром в начале координат и радиусом $\sqrt{r}$.

Это легко видеть, исходя из того, что у всех корней одинаковый модуль, и каждый следующий получается из предыдущего поворотом на один и тот же угол $\frac{2\pi}{n}$.

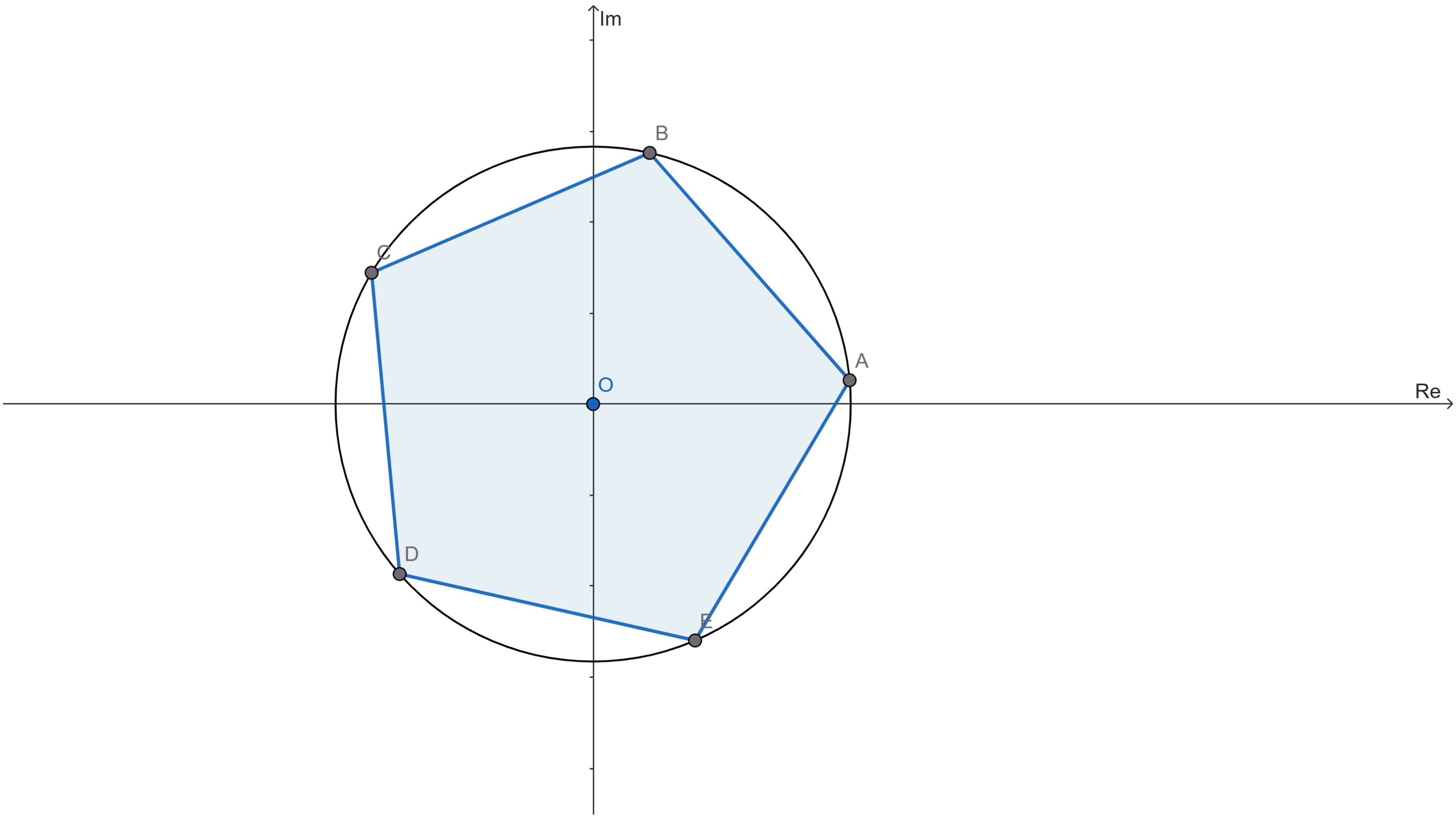

Рис. 2 — корни 5 степени из $z = 4 + 4i$

A.2.5. Корни из единицы

Положим $z = 1$. Тогда корни степени n выражаются так:

$$\sqrt[n]{1} = \varepsilon_k = \cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right) \tag{32}$$

$\forall k \in \{0, 1, ..., n - 1\}$.

Все корни есть вершины правильного n-угольника, вписанного в окружность единичного радиуса. Её уравнение $z\overline{z} = 1$.

А.3. Системы линейных уравнений

А.4. Линейная зависимость и ранг

В. Математический анализ

C. Комбинаторика

В этом разделе рассматриваются основные понятия и тождества комбинаторики, а так же основы теории множеств и теории графов.

C.1. Основные правила комбинаторики

C.1.1. Првила суммы и произведения

Правило суммы. Если элемент множества A можно выбрать m способами, а элемент множества B n способами, то выбор «либо A, либо B» может быть сделан $m + n$ способами, при условии, что множества A и B *не пересекаются*.

Доказательство: Количество способов выбрать «либо A, либо B» равно мощности множества $A \cup B$. По условию $A \cap B = \varnothing$, поэтому надо доказать лемму:

$$A \cap B = \varnothing \Rightarrow |A \cup B| = |A| + |B| \tag{33}$$

Доказательство леммы: пусть $A = \{a_1, ..., a_m\}$ и $B = \{b_1, ..., b_n\}$ Тогда

$$A \cup B = \{a_1, ..., a_m, b_1, ..., b_n\} \tag{34}$$

Здесь существенно использовано то, что $A \cap B = \varnothing$, так как тогда $\forall a \in A,\ \ \forall b \in B :\ \ a \neq b$. Следовательно, $|A \cup B| = m + n$.■

По лемме, $|A \cup B| = |A| + |B|$, что и требовалось доказать. ■

Правило произведения. Если объект A можно выбрать m способами и для каждого выбора A объект B можно выбрать n способами, то количество способов выбрать <u>упорядоченные</u> пары (A, B) равно $m \cdot n$.

Доказательство: Переформулируем доказываемое утверждение так: пусть $|A| = m,\ \ |B| = n$. Тогда надо доказать, что мощность декартова произведения множеств равна произвдению мощностей сомножителей:

$$|A \times B| = m \cdot n \tag{35}$$

. Перед доказательством сформулируем важную лемму, которая доказана в разделе, связанном с теорией множеств. Лемма о дистрибутивности декартова произведения относительно объединения множеств:

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C) \tag{36}$$

. Докажем исходное утверждение индукцией по мощности второго сомножителя:

1. База индукции.

1.1. $n = 0 : A \times B = A \times \varnothing = \varnothing$. Но $|\varnothing| = 0 = m \cdot n$.

1.2. $n = 1 : A \times B = A \times \{b_1\} = \{(a_1, b_1), ..., (a_m, b_1)\}$. Легко видеть, что $|\{(a_1, b_1), ..., (a_m, b_1)\}| = m = m \cdot 1$.

2. Предположение индукции. Пусть верно для некоторого $n \in \mathbb{N}$, что $\forall A, B : \ |A \times B| = m \cdot n$.

3. Шаг. Докажем для $n + 1$ на основе предположения индукции. Пусть множество $B_{n+1} = B_n \cup \{b_{n+1}\}$ и $|B_n| = n$.

$$A \times B_{n+1} = A \times (B_n \cup \{b_{n+1}\}) = A \times B_n \cup A \times \{b_{n+1}\} \tag{37}$$

Тогда

$$|A \times B_{n+1}| = |A \times B_n| + |A \times \{b_{n+1}\}| = m \cdot n + m \cdot 1 = m \cdot (n + 1) \tag{38}$$

Шаг индукции верен, поэтому утверждение доказано. ■

Обобщённые правила суммы и произведения:

1. Обобщённое правило суммы. Пусть даны попарно непересекающиеся множества $A_1, A_2, ...A_n$. Число способов сделать выбор «A_1 или A_2 ...или A_n» равно $\sum_{i=1}^{n} |A_i|$. Доказывается по индукции.
2. Обобщённное правило произведения. Пусть даны множества $A_1, A_2, ...A_n$. Число способов выбрать упорядоченный кортеж $(a_1, ..., a_n) \mid a_i \in A_i$ из n элементов равно $\prod_{i=1}^{n} |A_i|$. Доказывается по индукции.

Пример использования обобщённого правила произведения. Докажем, что порядок группы перестановок $S_n = S(\Omega)$ равен $n!$, где $n = |\Omega|$. Для первой позиции образа мы можем выбрать любой из n прообразов. Далее для второй позиции уже $(n - 1)$ прообраз и т. д. На последнюю позицию можно выбрать единственный элемент множества Ω. Имеем: $P_n = n \cdot (n - 1) \cdot ... \cdot 1$ ■.

C.1.2. Принцип Дирихле

Обозначим $\lceil x \rceil = \min\{a \mid a \geq x, \ a \in \mathbb{Z}\}$

Принцип Дирихле. Если n объектов разместить в m ящиках и $n > m$, то существует хотя бы один ящик, в котором находится не менее $\lceil \frac{n}{m} \rceil$ объектов.

Доказательство. Обозначим $k = \lceil \frac{n}{m} \rceil$ и предположим противное: во всех ящиках лежит меньше k объектов. Тогда для любого ящика, в нем находится не более $k - 1$ объектов. Общее число объектов тогда не превосходит $m \cdot (k - 1)$, т. е. имеет место неравенство $n \leq m \cdot (k-1)$. Но по свойству округления вверх: $k-1 = \lceil \frac{n}{m} \rceil - 1 < \frac{n}{m}$. Имеем:

$$\begin{cases} n \leq m \cdot (k-1) \\ n > m \cdot (k-1) \end{cases} \tag{39}$$

Получили противоречие, значит противное неверно и исходное утверждение доказано. ■

C.1.3. Примеры

C.2. Множества

«Элемент a принадлежит множеству A» обозначают $a \in A$. Отрицание этого утверждения обозначается $a \notin A$.

Множество B называется подмножеством A, если $\forall x \in B : \ x \in A$. Обозначают $B \subset A$.

Множества A и B называаются равными, если $A \subset B \land B \subset A$. Обозначают $A = B$.

Пустым множеством называется множество, не содержащее ни одного элемента. Оно является подмножеством любого множества. Обозначается $\varnothing$. $\forall A : \ \varnothing \subset A$

Мощностью конечного множесвва $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ называется количество элементов в нём: $|A| = n$.

C.2.1. Операции на множествах

Основные бинарные операции над множествами определены так:

1. Объединение. $A \cup B = \{x \mid x \in A \lor x \in B\}$
2. Пересечение. $A \cap B = \{x \mid x \in A \land x \in B\}$
3. Разность. $A \setminus B = \{x \mid x \in A \land x \notin B\}$
4. Симметрическая разность. $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

C.2.2. Свойства бинарных операций над множествами

1. Коммутативность объедиения и пересечения:
    - $A \cup B = B \cup A$
    - $A \cap B = B \cap A$.
2. Ассоциативность объедиения и пересечения:
    - $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
    - $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.
3. Дистрибутивность объедиения и пересечения:
    - $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
    - $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

C.2.3. Кортеж

Кортежем называется упорядоченная n-ка элементов. Обозначается как

$$(a_1, a_2, ..., a_n) \text{ или } \langle a_1, a_2, ..., a_n \rangle \quad (40)$$

.

Более строго, можно индуктивно сопоставить кортежи множествам:

- $\varnothing \leftrightarrow \langle\rangle$
- $\{a_1\} \leftrightarrow \langle a_1\rangle$
- $\{a_1, \{a_1, a_2\}\} \leftrightarrow \langle a_1, a_2\rangle$

Тогда:

- $\{a_1, a_2, ..., a_n\} \leftrightarrow \langle a_1, a_2, ..., a_n\rangle \underset{\text{def}}{=} \langle\langle a_1, a_2, ..., a_{n-1}\rangle, a_n\rangle$

Альтернативно, можно дать такое определение:

$$\langle a_1, a_2, ..., a_n\rangle = f : [n] \to \{a_1, a_2, ..., a_n\} \tag{41}$$

C.2.4. Декартово произведение двух множеств

C.2.5. Круги Эйлера и формула включений и исключений

C.3. Перестановки, сочетания и размещения

Существуют две схемы выбора m элементов из множества мощности n: $0 < m \leq n$: с повторениями и без повторений.

В первой схеме выбранный элемент не возвращается в множество, а во второй схеме на каждом шаге элемент должен быть возвращён в множество.

Перестановка. Определение перестановки было дано в разделе 1.1.

Число всех перестановок длины n равно:

$$P_n = n! \tag{42}$$

Размещением из n элементов по m называют любое упорядоченное подмножество данного множества, содержащего n элементов.

Из определения вытекает, что размещения это комбинации, состоящие из m элементов, которые отличаются друг от друга либо составом, либо порядком расположения элементов.

Число всех размещений из n по m:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} \tag{43}$$

D. Теория вероятностей

D.1. Основные понятия

Случайное событие — событие, про которое нельзя точно сказать, произойдёт оно или нет. Обозначают буквами латинского алфавита: $A, B, C\ldots$

Достоверным называется событие, которое происходит всегда. Обозначается Ω.

Невозможным называется событие, которое не может произойти. Обозначается $\varnothing$.

Вероятность случайного события это численная мера объективной возможности наступления данного события. Обозначение: $P(A)$ — вероятность события А.

D.1.1. Операции над событиями

$\overline{A}$ — событие, противоположное А. Заключается в том, что событие A не произошло.

$A \cap B$ — произведение событий. Это событие, которое заключается в совместном происхождении событий A, B.

Если $A \cap B = \varnothing$, то события A, B называются несовместными.

Вместо $A \cap B$ иногда пишут AB.

$A \cup B$ — объединение или сумма событий. Заключается в том, что хотя бы одно из $\{A, B\}$ верно.

Закон де Моргана в терминах событий:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \tag{44}$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \tag{45}$$

Диаграммы Венна

Свойства противоположного события:

1. $\overline{\overline{A}} = A$

2. $A \cap \overline{A} = \varnothing$

3. $A \cup \overline{A} = \Omega$

Свойства бинарных операций над событиями.

1. Коммутативность:
   - $A \cap B = B \cap A$;
   - $A \cup B = B \cup A$.

2. Ассоциативность:

- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;
- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.

3. Дистрибутивность.

- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap B)$;
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Операция включения

$A \subset B$ – событие, которое заключается в том, что происхождение B влечёт A.

Разность и симметрическая разность.

Разность событий A и B определяется как:

$$A \setminus B = A \cap \overline{B} \tag{46}$$

Симметрической разностью называется бинарная операция над событиями, такая, что

$$A \triangle B = (A \cup B) \cap \left(\overline{A} \cup \overline{B}\right) \tag{47}$$

Отрицание симметрической разности:

$$\overline{A \triangle B} = \overline{A} \triangle B = A \triangle \overline{B} = \overline{A} \triangle \overline{B} \tag{48}$$

Поглощение.

1. $A \cup (A \cap B) = A$
2. $A \cap (A \cup B) = A$
3. $\overline{A} \cup (A \cap B) = \overline{A} \cup B$
4. $\overline{A} \cap (A \cup B) = \overline{A} \cap B$

Декомпозиция бинарных операций.

1. $A \cup B = A \triangle B \triangle AB$
2. $A \setminus B = A \setminus (AB)$

D.1.2. Аксиомы вероятности

1. $\forall A\ P(A) \geq 0$ (неотрицательность);
2. $P(\Omega) = 1$ (Вероятность достоверного события);
3. $\forall A, B : A \cap B = \varnothing :\ P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. (Аддитивное свойство вероятности).

D.1.3. Следствия из Аксиом

Теорема о вероятности противоположных событий.

$$P(A) + P\left(\overline{A}\right) = 1 \quad (49)$$

.

Доказательство: так как

$$\begin{cases} A \cup \overline{A} = \Omega \\ A \cap \overline{A} = \varnothing \end{cases} \quad (50)$$

то из аксиом 2 и 3: $P\left(A \cup \overline{A}\right) = P(\Omega) = 1$. ■

Следствие из теоремы.

Вероятность объединения n попарно независимых событий.

$$\forall A_1, A_2, ...A_n : \forall i, j : \; i \neq j : A_i \cap A_j = \varnothing :$$
$$P\left(\bigcup_{1 \leq i \leq n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \quad (51)$$

Доказательство: по индукции. $n = 2$: это аксиома 3.

Пусть верно для $n \in \mathbb{N}$. Тогда $P\left(\bigcup_{1 \leq i \leq n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$ Докажем для $n + 1$:

$$P\left(\bigcup_{1 \leq i \leq n+1} A_i\right) = P\left(\left[\bigcup_{1 \leq i \leq n} A_i\right] \cup A_{n+1}\right) = P\left(\bigcup_{1 \leq i \leq n} A_i\right) +$$
$$+ P(A_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) + P(A_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} P(A_i) \; ■ \quad (52)$$

E. Алгоритмы и структуры данных && программирование

E.1. Основные понятия

Алгоритм — точное или формализованное описание вычислительного процесса, ведущее от входных данных к искомому результату.

Структуры данных — множество элементов данных и связи между ними.

Физические данные существуют в памяти машины, а теоретические нет.

Элементарные данные не могут быть разделены на более мелкие части. Если же данные могут быть разделены на логически более мелкие части, то они называются *сложными.*

E.2. Анализ сложности и эффективности структур данных

Должны быть некие критерии *хорошего алгоритма.*

Два основных критерия, используемых на практике:

1. Быстродействие;
2. Объём потребляемой памяти.

Прямое измерение времени работы программной реализации измеряет далеко не только быстродействие алгоритма. На время выполнения влияют так же способ реализации, умения программиста, среда разработки и мощность компъютера.

Измеренеия скорости и памяти носят теоретический характер.

$T(n)$ — функция теоретического времени работы алгоритма.

$V(n)$ — функция теоретической пространственной сложности алгоритма.

Получить точную формулу нельзя, можно только получить скорость и порядок скорости изменения времени выполнения.

E.2.1. O-символика

$$f(n) = O(g(n)) \Leftrightarrow \exists N, C > 0 : \forall n > N : |g(n)| \leq C \cdot |f(n)| \qquad (53)$$

E.3. Дополнительные сведения

E.3.1. Метод двух указателей

Задача на массиве $a[n]$ решаема методом двух указателей $\Leftrightarrow$ (Предикат из условия $P(x) \equiv 1 : \ \forall x \in [L, R] \Rightarrow P(X) \equiv 1 \forall x \in [L', R'] \subset [L, R]$)

F. Анализ данных