ШАД. Хэндбук поступающего

Автор: Даниил Скороходов

@neuralspeedster

26.08.2025

Содержание

1. Алгебра

Здесь много базы!

1.1. Подстановки

Пусть Ω - конечное множество из n элементов. Удобно считать, что $\Omega = \{1, 2, ..., n\}$. Зададим множество всех биективных преобразований $\Omega \to \Omega$:

$$S = S_n(\Omega) = \{\sigma : \Omega \to \Omega \mid \sigma - \text{биективно}\} \tag{1}$$

Элементы множества S называются *подстановками*(или *перестановками*) множества Ω.

Развёрнутая запись подстановки $\pi : i \to \pi(i) \forall i = 1, 2, ..., n$ имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ \pi(1) & \pi(2) & ... & \pi(n) \end{pmatrix} \tag{2}$$

Подстановка $e = e_\Omega = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ 1 & 2 & ... & n \end{pmatrix}$ называется *единичной подстановкой.*

1.1.1. Умножение подстановок

Пусть $\pi, \sigma \in S$. Тогда их произведение $\pi\sigma$ находится из общего определения композиции преобразований:

$$(\pi\sigma)(i) = \pi(\sigma(i)) \tag{3}$$

Пусть, например, $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ и $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Тогда:

$$(\pi\sigma)(1) = \pi(\sigma(1)) = \pi(4) = 1 \tag{4}$$

$$(\pi\sigma)(2) = \pi(\sigma(2)) = \pi(3) = 4 \tag{5}$$

$$(\pi\sigma)(3) = \pi(\sigma(3)) = \pi(2) = 3 \tag{6}$$

$$(\pi\sigma)(4) = \pi(\sigma(4)) = \pi(1) = 2 \tag{7}$$

Таким образом, $\pi\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. Заметим, что вообще говоря, $\pi\sigma \neq \sigma\pi$. Имеем:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \tag{8}$$

Свойства произведения подстановок:

1. Ассоциативность: $\forall \alpha, \beta, \gamma \in S_n : \alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$.

2. Единичный элемент: $\exists e \in S_n : \forall \alpha \in S_n \alpha e = e\alpha$.

3. Обратная подстановка: $\forall \alpha \in S_n \exists \alpha^{-1} \in S_n : \alpha\alpha^{-1} = \alpha^{-1}\alpha = e$.

Порядок группы подстановок или же попросту мощность множества подстановок равна факториалу количества элементов Ω. Действительно, для каждого из n элементов множества Ω можно выбрать одно из n мест, затем для оставшихся $n-1$ элементов — одно из $n-1$ мест и так далее. В итоге получаем:

$$\operatorname{Card} S_n = n(n-1)(n-2)...1 = n! \tag{9}$$

1.1.2. Циклы и транспозиции

Циклом длины $m \leq n$ множества Ω называется такая подстановка $\sigma \in S_n$, что $\sigma(i) = (i+1)\ \forall i = 1, 2, ..., (m-1)$ и $\sigma(m) = 1$, а все элементы Ω, не указанные перечислением, остаются на своих местах. Т. е. $\forall k \notin \{1, ..., m\} : \sigma(k) = k$.

Примечание: элементы цикла приведены *условно* как $\{1, ..., m\}$.

Транспозицией называется цикл длины 2. Записывается как $\tau = \begin{pmatrix} i & j \end{pmatrix}$, где i и j — элементы, которые меняются местами.

Исходя из общего определения цикла, очевидно, что транспозиция оставляет неподвижными все элементы, кроме двух указанных.

Th. 1 (О разложении перестановок). Любая подстановка $\pi \in S_n \setminus \{e\}$ может быть представлена в виде произведения циклов.

Доказательство: Пусть $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ \pi(1) & \pi(2) & ... & \pi(n) \end{pmatrix}$. Разобьём множество Ω на непересекающиеся циклы. Для этого будем рассматривать последовательности элементов, которые переходят друг в друга под действием подстановки π.

Следствие 1. Любая подстановка может быть разложена в произведение транспозиций.

Доказательство: Разложим подстановку $\pi = \pi_1 \pi_2 ... \pi_k$, где $\pi_1, \pi_2, ..., \pi_k$ — циклы. Каждый цикл π_j можно представить в виде произведения транспозиций, например, так: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & l \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & l-1 \end{pmatrix}...\begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$. ■

Индуктивное определение степени подстановки. Пусть $\pi \in S_n$. Тогда:

$$\pi^s = \begin{cases} \pi(\pi^{s-1}), & \text{если} \quad s > 0 \\ e, & \text{если} \quad s = 0 \\ \pi^{-1}\left(\left(\pi^{-1}\right)^{-s-1}\right), & \text{если} \quad s < 0 \end{cases} \tag{10}$$

Вернёмся к примеру $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ и $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Здесь π — цикл длины 4, а σ раскладывается в произведение двух транспозиций: $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}$.

$\sigma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix}, \sigma^4 = \left(\sigma^2\right)^2 = e, \pi^2 = e$

1.1.3. Чётность подстановки

Пусть подстановка $\pi \in S_n$ раскладывается на множители $\pi = \tau_1 \tau_2 ... \tau_k$, где τ_j — транспозиции.

Знаком(или *чётностью*) подстановки называется число

$$\varepsilon_\pi = (-1)^k \tag{11}$$

Th. 2: Чётность подстановки не зависит от выбора разложения на транспозиции.

Th. 2.1 (О знаке произведения):

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta \tag{12}$$

Th. 3: Количество чётных подстановок равно количеству нечётных и равно $\frac{n!}{2}$.

1.2. Комплексные числа

Комплексным числом называется пара действительных чисел (a, b).

$$\mathbb{C} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\} \tag{13}$$

Если $z = (a, b)$, то

$$a = \Re(z) \tag{14}$$

$$b = \Im(z) \tag{15}$$

a называется действительной частью комплексного числа z, b — мнимой частью.

Для комплексных чисел операции сложения и умножения определяются так:

1. $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$
2. $(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$

Заметим, что $(a, 0) = a \ \forall a \in \mathbb{R}$. Так что $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Мнимая единица. $(0, 1)^2 = (0, 1)(0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0) = -1$. Число $(0, 1)$ принято обозначать i и называть мнимой единицей. Итак,

$$i^2 = -1 \tag{16}$$

Стандартное обозначение для комплексного числа $z = (a, b)$:

$$z = a + bi \tag{17}$$

Для произвольных комплексных чисел нельзя корректно ввести бинарное отношение порядка(<).

1.2.1. Геометрическая интерпретация

Комплексному числу можно сопоставить точку в двумерном пространстве с декартовыми координатами (a, b). По оси абсцисс откладывается действительная часть, по оси ординат — мнимая.

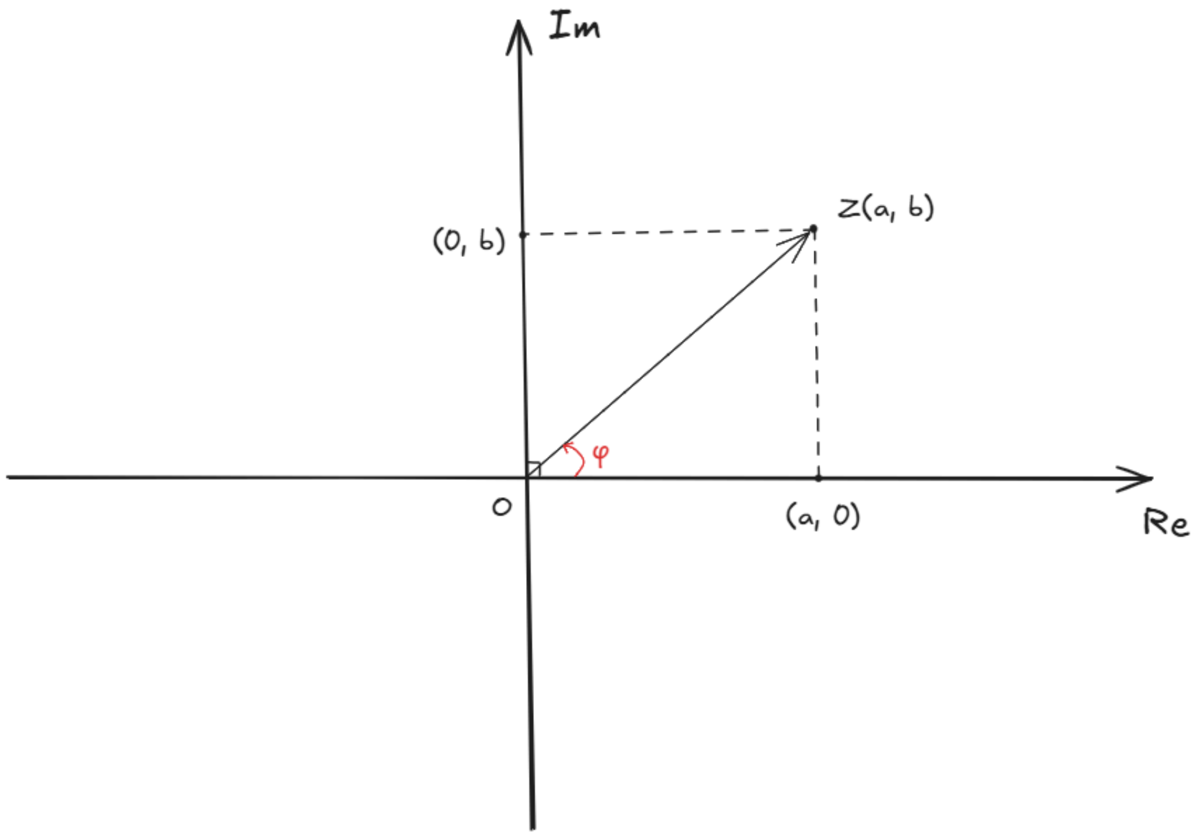

Рис. 1 - комплексная плоскость

Операция сопряжения. Число $\overline{z} = a - bi$ называется *сопряжённым* числу $z = a + bi$. Операция сопряжения соотвествует симметрии $S_{\mathfrak{R}}$ относительно действительной оси.

Заметим, что $\mathfrak{I}(z\overline{z}) = 0 \Leftrightarrow z\overline{z} \in \mathbb{R}$

Модуль комплексного числа. Величина $|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$ называется *модулем* z.

Аргумент комплексного числа. Величина $\arg(z) = \varphi$, где $\varphi \in (-\pi; \pi]$ — ориентированный угол между радиус-вектором z и положительным направлением оси абсцисс называется *аргументом комплексного числа.* Аргумент числа $(0, 0)$ не определён.

Переход в полярные координаты. Сделав замену

$$\begin{cases} r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \varphi = \arg(z) \end{cases} \tag{18}$$

Мы перейдем в полярные координаты, получив тем самым *тригонометрическую форму записи комплексного числа.*

Оказывается, есть всего 8 принципиальных случаев расположения комплексного числа $z = a + bi$ на комплексной плоскости.

Расположение точки (a, b)	Главное значение аргумента
$a > 0, b = 0$	0
$a > 0, b > 0$	$\operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right)$
$a = 0, b > 0$	$\frac{\pi}{2}$
$a < 0, b > 0$	$\pi + \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right)$
$a < 0, b = 0$	π
$a < 0, b < 0$	$-\pi + \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right)$
$a = 0, b < 0$	$-\frac{\pi}{2}$
$a > 0, b < 0$	$\operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right)$

На самом деле, главными называются значения аргумента из полуинтервала $(-\pi; \pi]$, но, вообще говоря, аргументом можно считать и главный аргумент с добавкой $2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$. Ввиду этого, главное значение аргумента обозначается $\operatorname{Arg}(z)$, а в целом значение аргумента $\arg(z)$.

1.2.2. Формы записи

1. Алгебраическая:

$$z = a + bi \tag{19}$$

2. Тригонометрическая:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \tag{20}$$

3. Показательная:

$$z = re^{i\varphi} \tag{21}$$

Показательная форма есть просто следствие формулы Эйлера:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \tag{22}$$

Доказательство самой формулы Эйлера вытекает из следующих трёх разложений. $\forall z \in \mathbb{C}$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - ... = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \tag{23}$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - ... = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \tag{24}$$

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \tag{25}$$

Подставим в разложение экспоненты $z = i\varphi$, где $\varphi \in \mathbb{R}$ и учтем следующие тождества: $i^2 = -1,\ i^3 = -i,\ i^4 = 1,\ i^5 = i$. Вообще говоря, $i^n = i^{n-4}$. Отсюда и следует требуемое. ■

1.2.3. Об умножении комплексных чисел

Алгебраическое умножение комплексных чисел не столь удобно, особенно при возведении в степень.

Пусть даны два комплексных числа $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$. Тогда их произведение можно записать в виде:

$$\begin{gathered} z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = \\ = r_1 r_2 (\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2)) = \\ = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)) \end{gathered} \tag{26}$$

Итак,

$$\begin{cases} |z_1 z_2| = |z_1||z_2| \\ \arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) \end{cases} \tag{27}$$

Исходя из этого, можно быстро возводить комплексные числа в произвольную натуральную степень.

Формула Муавра. $\forall z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$:

$$z^n = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)) \tag{28}$$

Доказательство: докажем по индукции.

1. База: $n = 1$. Тогда $z^1 = z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Это уже получено. Для уверенности можем проверить случай $n = 2$. Легко видеть, что это следствие (27) для $z = z_1 = z_2$.
2. Предположение индукции. Пусть верно для $n \in \mathbb{N}$: $z^n = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$
3. Шаг индукции. Докажем для $n + 1$. Тогда

$$\begin{gathered} z^{n+1} = z^n z = r^n r(\cos(n\varphi + \varphi) + i\sin(n\varphi + \varphi)) = \\ = r^{n+1}(\cos((n+1)\varphi) + i\sin((n+1)\varphi)) \end{gathered} \tag{29}$$

■

Здесь мы снова использовали (27). Таким образом, формула верна для $n+1 \Rightarrow$ она верна $\forall n \in \mathbb{N}$.

Дополнительно. Легко видеть, что умножение $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ на $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ задаёт композицию поворота $R_O^{\varphi_2}$ и гомотетии $H_O^{r_2}$ точки z_1 на плоскости $\mathbb{C}$. Полученное преобразование $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ называется *поворотной гомотетией:* $H_O^{r_2,\varphi_2} = H_O^{r_2} \circ R_O^{\varphi_2}$.

1.2.4. Извлечение корней

Алгебраическим корнем степени $n > 1$ числа $z \in \mathbb{C}$ называется множество $\Omega = \{w \mid w^n = z \mid w \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}\}$ и обозначается $\sqrt[n]{z}$.

$\forall z \in \mathbb{C} : \operatorname{Card}(\sqrt[n]{z}) = n$.

Выведем формулу для корней из комплексного числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Пусть $\sqrt[n]{z} = \{w_k \mid w_k^n = z \mid k = 0, 1, ..., n-1\}$.

1. Очевидно, что $|w_k| = \sqrt{r}$, где $\sqrt{r}$ – *арифметический квадратный корень* из действительного числа r. И правда, по формуле Муавра $|z| = |w_k|^n$.
2. Пусть $\varphi_k = \arg(w_k)$. Тогда по формуле Муавра: $n\varphi_k = \varphi + 2\pi k$. Для всех $k \in \{k_0 + i \mid i = 0, 1, ...(n-1)\}$ будут получаться все n корней. Поэтому для удобства полагают $k_0 = 0$. ■

Итак, доказана формула корней числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ $\forall k \in \{0, 1, ..., n-1\}$:

$$w_k = \sqrt{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + 2\pi\frac{k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + 2\pi\frac{k}{n}\right)\right) \tag{30}$$

Все корни из числа z лежат на вершинах правильного n-угольника, вписанного в окружность с центром в начале координат и радиусом $\sqrt{r}$.

Это легко видеть, исходя из того, что у всех корней одинаковый модуль, и каждый следующий получается из предыдущего поворотом на один и тот же угол $\frac{2\pi}{n}$.

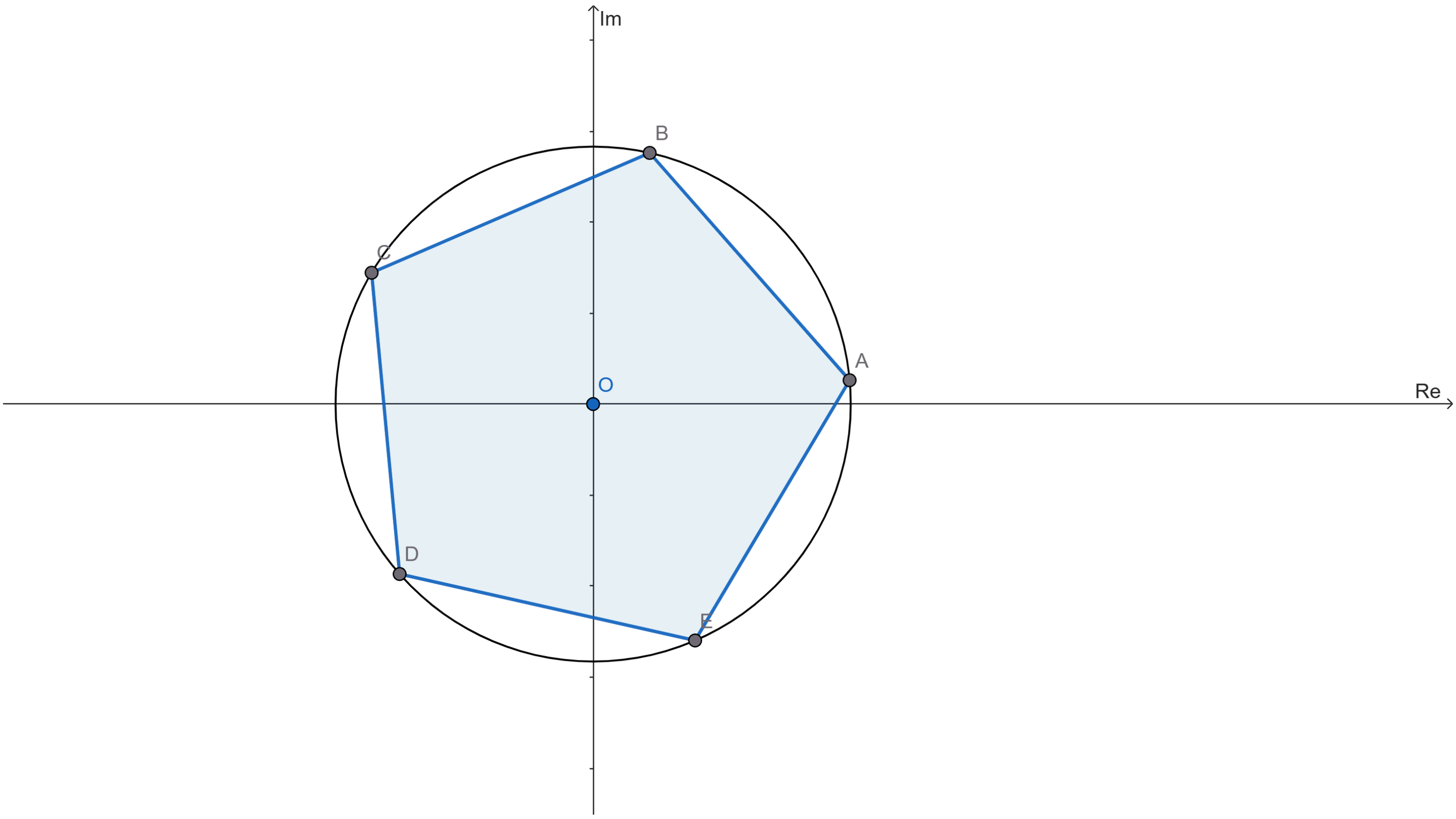

Рис. 2 — корни 5 степени из $z = 4 + 4i$

1.2.5. Корни из единицы

Положим $z = 1$. Тогда корни степени n выражаются так:

$$\sqrt[n]{1} = \varepsilon_k = \cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right) \tag{31}$$

$\forall k \in \{0, 1, ..., n - 1\}$.

Все корни есть вершины правильного n-угольника, вписанного в окружность единичного радиуса. Её уравнение $z\overline{z} = 1$.

1.3. Системы линейных уравнений

1.4. Линейная зависимость и ранг

2. Математический анализ

3. Комбинаторика

4. Теория вероятностей

5. Алгоритмы и структуры данных && программирование

5.1. Дополнительные сведения

5.1.1. Метод двух указателей

Задача на массиве $a[n]$ решаема методом двух указателей $\Leftrightarrow$ (Предикат из условия $P(x) \equiv 1 \forall x \in [L, R] \Rightarrow P(X) \equiv 1 \forall x \in [L', R'] \subset [L, R]$)

6. Анализ данных