

# ШАД. Хэндбук поступающего

Автор: Даниил Скороходов

@neuralspeedster

05.11.2025

# Содержание

A. Алгебра .....	6
A.1. Перестановки .....	6
A.1.1. Умножение перестановок .....	6
A.1.1.1. Свойства произведения перестановок .....	7
A.1.2. Количество перестановок .....	7
A.1.3. Циклы .....	7
A.1.4. Степень перестановки .....	7
A.1.5. Орбита элемента .....	8
A.1.5.1. Свойства орбит элементов .....	8
A.1.6. Теорема о разложении перестановки в произведение независимых циклов .....	9
A.1.7. Транспозиции .....	10
A.1.8. Инверсии и знак перестановки .....	11
A.2. Комплексные числа .....	14
A.2.1. Геометрическая интерпретация .....	14
A.2.2. Формы записи .....	16
A.2.3. Об умножении комплексных чисел .....	17
A.2.4. Извлечение корней .....	18
A.2.5. Корни из единицы .....	19
A.3. Системы линейных алгебраических уравнений .....	20
A.3.1. Сложение и умножение строк .....	20
A.3.2. Элементарные преобразования систем линейных уравнений и их матриц .....	21
A.3.3. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений .....	22
A.3.4. Ранг ступенчатой матрицы .....	23
A.3.5. Критерий совместности и определённости системы .....	24
A.3.6. Однородные системы линейных уравнений .....	24
A.4. Векторные пространства .....	25
A.4.1. Примеры векторных пространств .....	25
A.4.2. Простейшие следствия из аксиом векторного пространства .....	26
A.4.3. Линейные комбинации .....	26
A.4.3.1. Примеры линейных комбинаций .....	27
A.4.4. Свойства линейной зависимости .....	27
A.5. Определители .....	31

A.5.1.	Свойства определителя .....	31
A.5.2.	Вычисление определителя через приведение матрицы к треугольному виду .....	34
A.5.3.	Определитель треугольной матрицы .....	34
B.	Математический анализ .....	36
B.1.	Числовые последовательности .....	36
B.1.1.	Предел последовательности .....	36
B.1.2.	Ограниченнность .....	37
B.1.3.	Единственность предела .....	37
B.1.4.	Свойства пределов, связанные с неравенствами .....	38
B.1.5.	Бесконечно малые последовательности .....	39
B.1.6.	Арифметические свойства пределов .....	40
B.1.7.	Монотонные последовательности .....	42
B.1.7.1.	Теорема Вейерштрасса .....	42
B.1.8.	Кто растёт быстрее? .....	43
B.1.9.	Число $e$ .....	45
B.1.9.1.	Первое доказательство существования $e$ .....	45
B.1.9.2.	Второе доказательство существования $e$ .....	46
B.1.10.	Подпоследовательность .....	47
B.1.10.1.	Теорема Больцано-Вейерштрасса .....	48
B.1.11.	Критерий Коши сходимости числовых последовательностей .....	49
B.2.	Предел функции .....	51
B.2.1.	Определение предела по Коши .....	51
B.2.2.	Определение предела по Гейне .....	51
B.2.3.	Эквивалентность определений Коши и Гейне .....	51
B.2.4.	Теорема о промежуточной функции .....	52
B.2.5.	Арифметические свойства пределов функции .....	53
B.2.6.	Критерий Коши существования предела функции .....	54
B.3.	Кратные интегралы .....	56
B.3.1.	Двойные интегралы .....	56
B.3.1.1.	Определение двойного интеграла .....	56
B.3.1.2.	Суммы Дарбу .....	56
B.3.1.3.	Свойства двойного интеграла .....	57
B.4.	Гамма-функция и бета-функция .....	59
B.4.1.	Гамма-функция .....	59

B.4.1.1. Свойства гамма-функции .....	59
B.4.2. Бета-функция .....	62
B.4.2.1. Свойства бета-функции .....	62
B.4.3. Связь гамма-функции и бета-функции .....	63
B.5. Числовые ряды .....	65
B.5.1. Необходимый признак сходимости ряда .....	66
B.5.2. Признаки сходимости положительных рядов .....	66
B.5.2.1. Теоремы сравнения .....	66
B.5.2.2. Радикальный признак Коши .....	68
B.5.2.3. Признак Даламбера .....	69
B.5.2.4. Признак Раабе .....	70
B.5.2.5. Интегральный признак Маклорена-Коши .....	71
B.5.3. Сходимость произвольных рядов .....	73
B.5.3.1. Абсолютная сходимость .....	73
B.5.3.2. Знакопеременные ряды и признак Лейбница .....	74
C. Комбинаторика .....	75
C.1. Основные правила комбинаторики .....	75
C.1.1. Правила суммы и произведения .....	75
C.1.2. Принцип Дирихле .....	76
C.1.3. Примеры .....	77
C.2. Множества .....	78
C.2.1. Операции на множествах .....	78
C.2.2. Свойства бинарных операций над множествами .....	78
C.2.3. Кортеж .....	78
C.2.4. Декартово произведение .....	79
C.2.5. Мощность множества .....	79
C.2.6. Круги Эйлера .....	80
C.2.7. Формула включений и исключений .....	80
C.3. Перестановки, сочетания и размещения .....	81
C.3.1. Выбор без повторений .....	81
C.3.2. Выбор с повторениями .....	82
C.4. Производящие функции .....	83
D. Теория вероятностей .....	84
D.1. Основные понятия .....	84
D.1.1. Операции над событиями .....	84

D.1.2. Аксиомы вероятности .....	85
D.1.3. Следствия из Аксиом .....	86
D.2. Случайная величина .....	87
D.2.1. Свойства функции распределения случайной величины .....	87
E. Алгоритмы и структуры данных && программирование .....	88
E.1. Основные понятия .....	88
E.1.1. Анализ сложности и эффективности алгоритмов .....	88
E.2. Асимптотические оценки функций .....	89
E.2.1. Свойства сравнений функций .....	89
E.3. Бинарный поиск .....	91
E.3.1. Вариант с поиском границ .....	91
E.4. Динамическое программирование .....	92
E.4.1. Простые примеры ДП .....	92
E.4.1.1. Ступеньки .....	92
E.4.1.2. Ступеньки с сертификатом .....	92
E.4.1.3. Наибольшая возрастающая подпоследовательность .....	93
E.4.1.4. Покупка билетов .....	94
E.4.1.5. Представление числа минимальной последовательностью операций .....	94
E.4.2. Двумерное динамическое программирование .....	94
E.4.2.1. Наибольшая общая подпоследовательность .....	94
E.4.2.2. Расстояние Левенштейна .....	95
F. Анализ данных .....	96

# А. Алгебра

## А.1. Перестановки

*Определение.* Пусть  $\Omega$  - конечное множество из  $n$  элементов. Удобно считать, что  $\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$ . Зададим множество всех биективных преобразований  $\Omega \rightarrow \Omega$ :

$$S = S_n(\Omega) = \{\sigma : \Omega \rightarrow \Omega \mid \sigma \text{ - биективно}\} \quad (1)$$

Элементы множества  $S$  называются *перестановками*(или *подстановками*) множества  $\Omega$ .

Развёрнутая запись перестановки  $\pi : i \rightarrow \pi(i) \forall i = 1, 2, \dots, n$  имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \dots & \pi(n) \end{pmatrix} \quad (2)$$

Её также называют стандартной двухрядной.

*Определение.* Перестановка

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix} \quad (3)$$

называется *единичной перестановкой*.

### А.1.1. Умножение перестановок

Пусть  $\pi, \sigma \in S$ . Тогда их произведение  $\pi\sigma$  находится из общего определения композиции преобразований.  $\forall i = 1, \dots, n$ :

$$(\pi\sigma)(i) = \pi(\sigma(i)) \quad (4)$$

Пусть, например,  $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$  и  $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ . Тогда:

$$(\pi\sigma)(1) = \pi(\sigma(1)) = \pi(4) = 1 \quad (5)$$

$$(\pi\sigma)(2) = \pi(\sigma(2)) = \pi(3) = 4 \quad (6)$$

$$(\pi\sigma)(3) = \pi(\sigma(3)) = \pi(2) = 3 \quad (7)$$

$$(\pi\sigma)(4) = \pi(\sigma(4)) = \pi(1) = 2 \quad (8)$$

Таким образом,  $\pi\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ . Имеем:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad (9)$$

### A.1.1.1. Свойства произведения перестановок

Свойства произведения перестановок.

1. Ассоциативность:  $\forall \alpha, \beta, \gamma \in S_n : \alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$ .
2. Единичный элемент:  $\exists e \in S_n : \forall \alpha \in S_n \alpha e = e\alpha$ .
3. Обратная перестановка:  $\forall \alpha \in S_n \exists \alpha^{-1} \in S_n : \alpha\alpha^{-1} = \alpha^{-1}\alpha = e$ .

Действительно, можно для  $\alpha$  поменять местами строки:

$$\alpha = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_n \\ j_1 & j_2 & \dots & j_n \end{pmatrix} \quad (10)$$

$$\alpha^{-1} = \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \dots & j_n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}. \quad (11)$$

4. Некоммутативность. Вообще говоря, для  $\alpha, \beta \in S_n$ :  $\alpha\beta \neq \beta\alpha$ .

### A.1.2. Количество перестановок

Мощность множества перестановок равна факториалу количества элементов  $\Omega$ . Действительно, для каждого из  $n$  элементов множества  $\Omega$  можно выбрать одно из  $n$  мест, затем для оставшихся  $n - 1$  элементов — одно из  $n - 1$  мест и так далее(согласно правилу произведения). В итоге получаем:

$$|S_n| = n(n - 1)(n - 2)\dots1 = n! \quad (12)$$

### A.1.3. Циклы

*Определение.* Циклом длины  $l \leq n$  называется такая перестановка  $\sigma \in S_n$ , что  $\sigma(i_j) = (i_{j+1}) \forall j = 1, 2, \dots, (l - 1)$  и  $\sigma(l) = i_1$ , а все элементы, не указанные перечислением, остаются на своих местах.

Однорядная запись цикла:

$$(i_1, i_2, \dots, i_l) \quad (13)$$

*Определение.* Орбитой цикла называется множество элементов, которые участвуют в цикле:  $\{i_1, i_2, \dots, i_l\}$ .

*Определение.* Два цикла  $\sigma = (i_1, i_2, \dots, i_l)$  и  $\tau = (j_1, j_2, \dots, j_m)$  называются независимыми, если  $\{i_1, i_2, \dots, i_l\} \cap \{j_1, j_2, \dots, j_m\} = \emptyset$ .

Независимые циклы коммутативны:  $\sigma\pi = \pi\sigma$ .

### A.1.4. Степень перестановки

Пусть  $\pi \in S_n$ . Тогда перестановка, равная  $\pi$  в степени  $s \in \mathbb{Z}$  определяется так:

$$\pi^s = \begin{cases} \pi(\pi^{s-1}), & \text{если } s > 0 \\ e, & \text{если } s = 0 \\ (\pi^{-1})^{-s}, & \text{если } s < 0 \end{cases} \quad (14)$$

Свойства возвведения в степень перестановок:

1.  $\forall \sigma \in S_n, \forall k, l \in \mathbb{Z} : \sigma^k \sigma^l = \sigma^{k+l}$
2.  $(\sigma^k)^l = \sigma^{k \cdot l}$

### A.1.5. Орбита элемента

*Определение.* Орбитой числа  $i \in \{1, \dots, n\}$  под действием  $\sigma$  называется множество

$$O(i) \underset{\text{def}}{=} \{\sigma^k \mid k \in \mathbb{Z}\} \quad (15)$$

Среди элементов орбиты числа обязаны быть повторения:

$$\exists k, l \in \mathbb{Z}, k > l : \sigma^k(i) = \sigma^l(i) \quad (16)$$

Применим  $\sigma^{-l}$ :

$$\sigma^{k-l}(i) = \sigma^0(i) = i \quad (17)$$

Итак, существует положительная степень  $k - l > 0$ , такая, что перестановка  $\sigma$  в степени  $k - l$  возвращает элемент на место. Тогда среди показателей положительных степеней можно выбрать наименьший.

$$m = \min_{p \in \mathbb{N}} \{p \mid \sigma^p(i) = i\} \quad (18)$$

Тогда для всех степеней, меньших  $m$ , орбита зацикливается и состоит всего из  $m$  чисел:

$$O(i) = \{i, \sigma(i), \sigma^2(i), \dots, \sigma^{m-1}(i)\}. \quad (19)$$

#### A.1.5.1. Свойства орбит элементов

1. Разные орбиты не пересекаются:  $O(i) \cap O(j) = \emptyset$ , если  $i \neq j$ .

*Доказательство:*  $\square$  Пусть  $O(i) \cap O(j) \neq \emptyset$ , тогда в пересечении этих орбит есть некоторое число  $k$ :  $k \in O(i) \cap O(j)$ , получим:

$$k = \sigma^p(i) = \sigma^q(j) \quad (20)$$

Если к левой и правой части равенства применить  $\sigma^{-p}$ , то получим:

$$i = \sigma^{q-p}(j) \quad (21)$$

Теперь мы можем получить, что любой элемент орбиты  $i$  лежит в  $O(j)$ , а именно  $\forall l \in \mathbb{Z}$ :

$$\sigma^l(i) = \sigma^{l+q-p}(j) \in O(j) \quad (22)$$

Итак,

$$O(i) \subseteq O(j) \quad (23)$$

Аналогично, меняя  $i$  и  $j$ , местами, получаем:

$$O(j) \subseteq O(i) \quad (24)$$

Но это в точности означает, что  $O(i) = O(j)$ . Значит, если две орбиты пересекаются, то они совпадают. ■

- Орбиты образуют разбиение множества чисел  $\{1, \dots, n\}$  на попарно непересекающиеся подмножества.

*Доказательство:* □ Действительно, каждое число лежит в какой-то орбите, например, в своей. ■

#### A.1.6. Теорема о разложении перестановки в произведение независимых циклов

*Теорема.* Любая перестановка  $\sigma \in S_n$  может быть представлена в виде произведения попарно независимых циклов:

$$\sigma = \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \dots \cdot \sigma_s, \quad (25)$$

Причём это разложение единственно с точностью до порядка множителей.

*Доказательство:* □ Запишем разбиение множества  $\Omega = \{1, \dots, n\}$  на непересекающиеся орбиты:

$$\Omega = \underbrace{O_1 \cup O_2 \cup \dots \cup O_s}_{\begin{array}{c} \text{орбиты, в которых} \\ > 1 \text{ элемента} \end{array}} \cup \underbrace{O_{s+1} \cup \dots \cup O_t}_{\begin{array}{c} \text{единичные орбиты} \\ (\text{если есть}) \end{array}}, \quad (26)$$

При действии перестановки  $\sigma \in S_n$  элементы обязательно перемещаются внутри своих орбит.

Каждой орбите соответствует цикл, причём эти циклы независимы в силу того, что орбиты непересекающиеся. Тогда перестановка  $\sigma$  записывается в виде произведения:

$$\sigma = (i_1, i_2, \dots, i_l) \cdot (j_1, j_2, \dots, j_m) \cdot \dots \cdot (k_1, k_2, \dots, k_p) \quad (27)$$

Мы доказали существование разложения на независимые циклы. Докажем единственность. Пусть перестановка  $\sigma$  разложена в произведение попарно независимых циклов:

$$\sigma = \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \dots \cdot \sigma_s, \quad (28)$$

где  $\sigma_1 = (i_1, i_2, \dots, i_l), \sigma_2 = (j_1, j_2, \dots, j_m), \dots, \sigma_s = (k_1, k_2, \dots, k_p)$ . Из схемы действия  $\sigma$  видно, что орбиты перестановки  $\sigma$  на  $\Omega$  это орбиты  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_s$  и оставшиеся неподвижные точки.

Таким образом, по  $\sigma$  можно однозначно восстановить орбиты циклов  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_s$ . А из них можно восстановить и сами циклы  $\sigma_i$ , потому что на своей орбите  $\sigma_i$  действует так же, как и сама  $\sigma$ . Что и требовалось доказать. ■

#### A.1.7. Транспозиции

*Определение.* Транспозицией называется цикл длины 2. Записывается как  $\tau = (i \ j)$ , где  $i$  и  $j$  — элементы, которые меняются местами.

*Предложение.* Любая перестановка может быть разложена в произведение транспозиций.

*Доказательство:*  $\square$  Разложим перестановку  $\sigma \in S_n$  в произведение попарно независимых циклов:

$$\sigma = \sigma_1 \cdot \sigma_2 \dots \cdot \sigma_s \quad (29)$$

Достаточно показать, что любой цикл можно разложить в произведение транспозиций. Пусть цикл  $\sigma_i$  выглядит так:

$$\sigma_i = (i_1, i_2, \dots, i_l) \quad (30)$$

Тогда такой цикл можно записать как произведение цикла длины  $(l - 1)$  и транспозиции двух последних номеров в орбите этого цикла:

$$\sigma_i = (i_1, i_2, \dots, i_{l-1}) \cdot (i_{l-1}, i_l) \quad (31)$$

Аналогично, можно разложить цикл длины  $(l - 1)$  в произведение цикла длины  $(l - 2)$  и транспозиции двух последних элементов. Продолжая далее этот алгоритм, мы дойдём до того, что в произведении останутся только транспозиции. Что и требовалось доказать. ■

### A.1.8. Инверсии и знак перестановки

*Определение.* Назовём инверсией(беспорядком) в перестановке  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$  пару  $(i_k, i_l)$ , где  $k < l$ , но  $i_k > i_l$ .

*Определение.* Перестановка чётна, если количество инверсий в ней чётно.

*Определение.* Перестановка нечётна, если количество инверсий в ней нечётно.

*Определение.* Знаком перестановки  $\sigma$  называется число

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = \begin{cases} 1, & \text{если } \sigma \text{ чётна} \\ -1, & \text{если } \sigma \text{ нечётна} \end{cases} \quad (32)$$

*Предложение.* При транспозиции двух элементов перестановки её чётность меняется.

*Доказательство.*  $\square$  Пусть мы поменяли местами  $i_k$  и  $i_l$ .

1. Среди пар  $(i_p, i_q)$ , где  $p, q \notin \{k, l\}$ , количество инверсий не меняется.
2. Среди пар  $(i_p, i_k)$ , где  $p < k \vee p > l$  не меняется.
3. Среди пар  $(i_p, i_l)$ , где  $p < k \vee p > l$  тоже не меняется.
4. Среди пар  $(i_q, i_k)$ , где  $k < q < l$ , количество инверсий меняется на  $\pm 1 \pm 1 \pm \dots \pm 1$ , таких пар  $l - k - 1$ .
5. Среди пар  $(i_q, i_l)$ , где  $k < q < l$ , количество инверсий меняется на  $\pm 1 \pm 1 \pm \dots \pm 1$ , таких пар  $l - k - 1$ .
6. В паре  $(i_k, i_l)$  инверсия либо появляется, либо исчезает.

Общее изменение количества инверсий равно  $2(l - k - 1) + 1 \equiv 1 \pmod{2}$ , поэтому чётность перестановки изменилась. ■

*Следствие.* Количество чётных и нечётных перестановок в  $S_n$  одинаково и равно  $\frac{n!}{2}$ .

*Доказательство.*  $\square$  Установим взаимно однозначное соответствие между чётными и нечётными перестановками. Для этого рассмотрим чётную перестановку  $\sigma \in S_n$ :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix} \xrightarrow{i_1 \leftrightarrow i_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_2 & i_1 & \dots & i_n \end{pmatrix} \quad (33)$$

Следовательно, чётных и нечётных поровну. ■

*Предложение.* Если перестановка  $\sigma$  разложена в произведение  $N$  транспозиций, то можно найти её знак.

$$\sigma = \tau_1 \cdot \tau_2 \cdots \cdot \tau_N \Rightarrow \operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^N \quad (34)$$

*Доказательство.*  $\square$  Проведём индукцию по числу множителей.

1. База:  $N = 0$ .  $\sigma = e \Rightarrow \operatorname{sgn}(\sigma) = 1$  — верно.
2. Шаг. Пусть

$$\sigma = \tau_1 \cdot \tau_2 \cdots \cdot \tau_{N-1} \cdot \tau_N \quad (35)$$

Обозначим  $\sigma' = \tau_1 \cdot \tau_2 \cdots \cdot \tau_{N-1}$ . Пусть  $\tau_N = (k, l)$ . Действие  $\sigma'$  на все числа, кроме  $k$  и  $l$ , такое же, как у  $\sigma$ . Для  $k$  и  $l$  под действием  $\sigma$  получаем:

$$k \rightarrow l \rightarrow i_l \quad (36)$$

$$l \rightarrow k \rightarrow i_K \quad (37)$$

Но  $\sigma'$  действует так:  $k \rightarrow i_k$ ,  $l \rightarrow i_l$ , значит перестановки  $\sigma$  и  $\sigma'$  отличаются транспозицией  $i_k$  и  $i_l$ , а значит их знаки различны по доказанному выше предложению.

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = -\operatorname{sgn}(\sigma') \stackrel{\substack{\text{предп.} \\ \text{инд.}}}{=} -(-1)^{N-1} = (-1)^N. \quad (38)$$

Переход доказан и вместе с ним и утверждение  $\forall N \in \mathbb{N}$ . ■

*Предложение.* Мультипликативное свойство знака:

$$\operatorname{sgn}(\sigma \cdot \sigma') = \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \operatorname{sgn}(\sigma') \quad (39)$$

*Доказательство.*  $\square$  Пусть перестановки  $\sigma$  и  $\sigma'$  разложены на транспозиции:

$$\sigma = \tau_1 \cdot \tau_2 \cdot \cdots \cdot \tau_k \quad (40)$$

$$\sigma' = \pi_1 \cdot \pi_2 \cdot \cdots \cdot \pi_s. \quad (41)$$

Тогда, напрямую умножив их, получим

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn}(\sigma \sigma') &= \operatorname{sgn}(\tau_1 \cdot \tau_2 \cdot \cdots \cdot \tau_k \cdot \pi_1 \cdot \pi_2 \cdot \cdots \cdot \pi_s) = \\ &= (-1)^{k+s} = (-1)^k \cdot (-1)^s = \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \operatorname{sgn}(\sigma'). \end{aligned} \quad (42)$$

■

*Предложение.* Знак обратной перестановки:

$$\operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) = \operatorname{sgn}(\sigma) \quad (43)$$

*Доказательство.*  $\square$  Согласно мультипликативности знака перестановки получаем:

$$\operatorname{sgn}(e) = \operatorname{sgn}(\sigma \cdot \sigma') = \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \operatorname{sgn}(\sigma') \quad (44)$$

Но  $\operatorname{sgn}(e) = 1$ , поэтому

$$\operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \operatorname{sgn}(\sigma') = 1 \Rightarrow \operatorname{sgn}(\sigma) = \operatorname{sgn}(\sigma'). \quad (45)$$

Что и требовалось доказать. ■

## A.2. Комплексные числа

Комплексным числом называется пара действительных чисел  $(a, b)$ .

$$\mathbb{C} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\} \quad (46)$$

Если  $z = (a, b)$ , то

$$a = \Re(z) \quad (47)$$

$$b = \Im(z) \quad (48)$$

$a$  называется действительной частью комплексного числа  $z$ ,  $b$  — мнимой частью.

Для комплексных чисел операции сложения и умножения определяются так:

1.  $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$
2.  $(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$

Заметим, что  $(a, 0) = a \ \forall a \in \mathbb{R}$ . Так что  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ .

**Мнимая единица.**  $(0, 1)^2 = (0, 1)(0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0) = -1$ .

Число  $(0, 1)$  принято обозначать  $i$  и называть мнимой единицей. Итак,

$$i^2 = -1 \quad (49)$$

Стандартное обозначение для комплексного числа  $z = (a, b)$ :

$$z = a + bi \quad (50)$$

Для произвольных комплексных чисел нельзя корректно ввести бинарное отношение порядка( $<$ ).

### A.2.1. Геометрическая интерпретация

Комплексному числу можно сопоставить точку в двумерном пространстве с декартовыми координатами  $(a, b)$ . По оси абсцисс откладывается действительная часть, по оси ординат — мнимая.

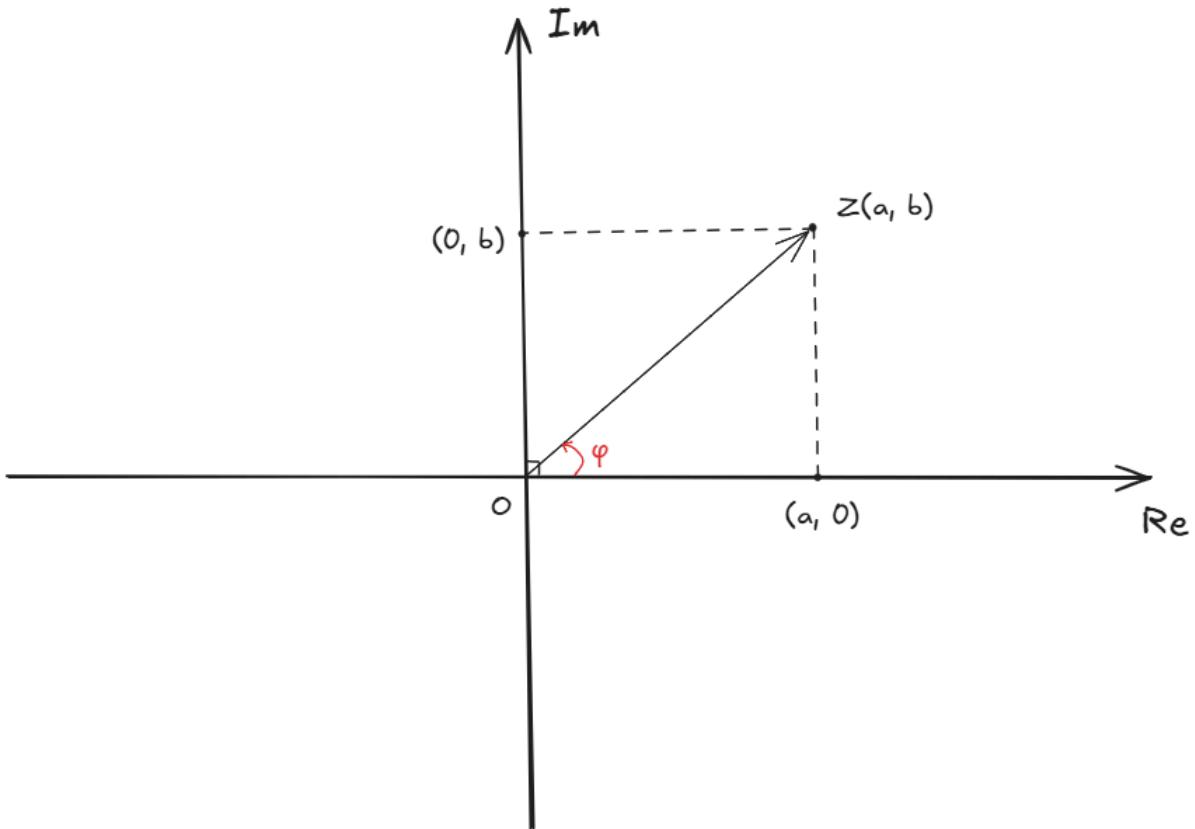


Рис. 1 - комплексная плоскость

**Операция сопряжения.** Число  $\bar{z} = a - bi$  называется *сопряжённым* числу  $z = a + bi$ . Операция сопряжения соответствует симметрии  $S_{\Re}$  относительно действительной оси.

Заметим, что  $\Im(z\bar{z}) = 0 \Leftrightarrow z\bar{z} \in \mathbb{R}$

**Модуль комплексного числа.** Величина  $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$  называется *модулем*  $z$ .

**Аргумент комплексного числа.** Величина  $\arg(z) = \varphi$ , где  $\varphi \in (-\pi; \pi]$  — ориентированный угол между радиус-вектором  $z$  и положительным направлением оси абсцисс называется *аргументом комплексного числа*. Аргумент числа  $(0, 0)$  не определён.

**Неравенство треугольника в комплексных числах.**  $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} :$

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \quad (51)$$

(Доказывается алгебраическими преобразованиями или использованием неравенства Коши-Буняковского-Шварца)

**Переход в полярные координаты.** Пусть  $z = x + yi$  Сделаем замену:

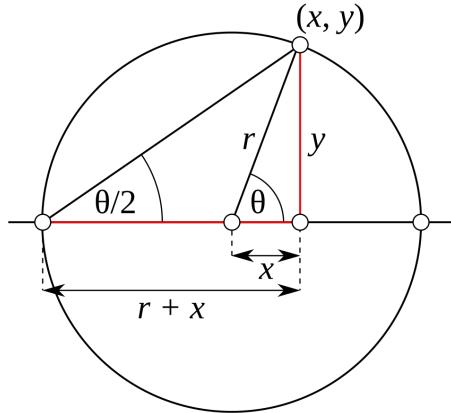
$$\begin{cases} r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arg(z) \end{cases} \quad (52)$$

Главными называются значения аргумента из полуинтервала  $(-\pi; \pi]$ .

**Явное выражение для главного значения аргумента.**

$$\operatorname{Arg}(z) = 2 \operatorname{arctg} \left( \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} \right) \quad (53)$$

**Доказательство:** Пусть комплексное число  $(x, y)$  имеет аргумент  $\theta$ . Вписанный угол, опирающийся на дугу меры  $\theta$ , равен половине центрального угла  $\theta$ . Тогда из прямоугольного треугольника(см. рисунок).



$$\operatorname{tg} \left( \frac{\theta}{2} \right) = \frac{y}{x + r} \quad (54)$$

Это и эквивалентно  $\theta = 2 \operatorname{arctg} \left( \frac{y}{x+r} \right)$ . ■

### A.2.2. Формы записи

1. Алгебраическая:

$$z = x + yi \quad (55)$$

2. Тригонометрическая:

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad (56)$$

3. Показательная:

$$z = re^{i\varphi} \quad (57)$$

Показательная форма есть просто следствие формулы Эйлера:

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi \quad (58)$$

Доказательство самой формулы Эйлера вытекает из следующих трёх разложений.  
 $\forall z \in \mathbb{C}$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (59)$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad (60)$$

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad (61)$$

Подставим в разложение экспоненты  $z = i\varphi$ , где  $\varphi \in \mathbb{R}$  и учтем следующие тождества:  $i^2 = -1$ ,  $i^3 = -i$ ,  $i^4 = 1$ ,  $i^5 = i$ . Вообще говоря,  $i^n = i^{n-4}$ . Отсюда и следует требуемое. ■

### A.2.3. Об умножении комплексных чисел

Алгебраическое умножение комплексных чисел не столь удобно, особенно при возведении в степень.

Пусть даны два комплексных числа  $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$  и  $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$ . Тогда их произведение можно записать в виде:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = \\ &= r_1 r_2 (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + i(\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2)) = \\ &= r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)) \end{aligned} \quad (62)$$

Итак,

$$\begin{cases} |z_1 z_2| = |z_1| |z_2| \\ \arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) \end{cases} \quad (63)$$

Исходя из этого, можно быстро возводить комплексные числа в произвольную натуральную степень.

**Формула Муавра.**  $\forall z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$ :

$$z^n = r^n (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)) \quad (64)$$

**Доказательство:** докажем по индукции.

1. База:  $n = 1$ . Тогда  $z^1 = z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ . Это уже получено. Для уверенности можем проверить случай  $n = 2$ . Легко видеть, что это следствие (63) для  $z = z_1 = z_2$ .
2. Предположение индукции. Пусть верно для  $n \in \mathbb{N}$ :  $z^n = r^n(\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi))$
3. Шаг индукции. Докажем для  $n + 1$ . Тогда

$$\begin{aligned} z^{n+1} &= z^n z = r^n r(\cos(n\varphi + \varphi) + i \sin(n\varphi + \varphi)) = \\ &= r^{n+1}(\cos((n+1)\varphi) + i \sin((n+1)\varphi)) \end{aligned} \tag{65}$$

■

Здесь мы снова использовали (63). Таким образом, формула верна для  $n + 1 \Rightarrow$  она верна  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

**Дополнительно.** Легко видеть, что умножение  $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$  на  $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$  задаёт композицию поворота  $R_O^{\varphi_2}$  и гомотетии  $H_O^{r_2}$  точки  $z_1$  на плоскости  $\mathbb{C}$ . Полученное преобразование  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  называется *поворотной гомотетией*:  $H_O^{r_2, \varphi_2} = H_O^{r_2} \circ R_O^{\varphi_2}$ .

#### A.2.4. Извлечение корней

**Алгебраическим корнем степени  $n > 1$**  числа  $z \in \mathbb{C}$  называется множество  $\Omega = \{w \mid w^n = z \mid w \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}\}$  и обозначается  $\sqrt[n]{z}$ .

$$\forall z \in \mathbb{C} : \text{Card}(\sqrt[n]{z}) = n.$$

Выведем формулу для корней из комплексного числа  $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ .

$$\text{Пусть } \sqrt[n]{z} = \{w_k \mid w_k^n = z \mid k = 0, 1, \dots, n - 1\}.$$

1. Очевидно, что  $|w_k| = \sqrt[n]{r}$ , где  $\sqrt[n]{r}$  – арифметический квадратный корень из действительного числа  $r$ . И правда, по формуле Муавра  $|z| = |w_k|^n$ .
2. Пусть  $\varphi_k = \arg(w_k)$ . Тогда по формуле Муавра:  $n\varphi_k = \varphi + 2\pi k$ . Для всех  $k \in \{k_0 + i \mid i = 0, 1, \dots, (n-1)\}$  будут получаться все  $n$  корней. Поэтому для удобства полагают  $k_0 = 0$ . ■

Итак, доказана формула корней числа  $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad \forall k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ :

$$w_k = \sqrt[n]{r} \left( \cos \left( \frac{\varphi}{n} + 2\pi \frac{k}{n} \right) + i \sin \left( \frac{\varphi}{n} + 2\pi \frac{k}{n} \right) \right) \tag{66}$$

Все корни из числа  $z$  лежат на вершинах правильного  $n$ -угольника, вписанного в окружность с центром в начале координат и радиусом  $\sqrt[n]{r}$ .

Это легко видеть, исходя из того, что у всех корней одинаковый модуль, и каждый следующий получается из предыдущего поворотом на один и тот же угол  $\frac{2\pi}{n}$ .

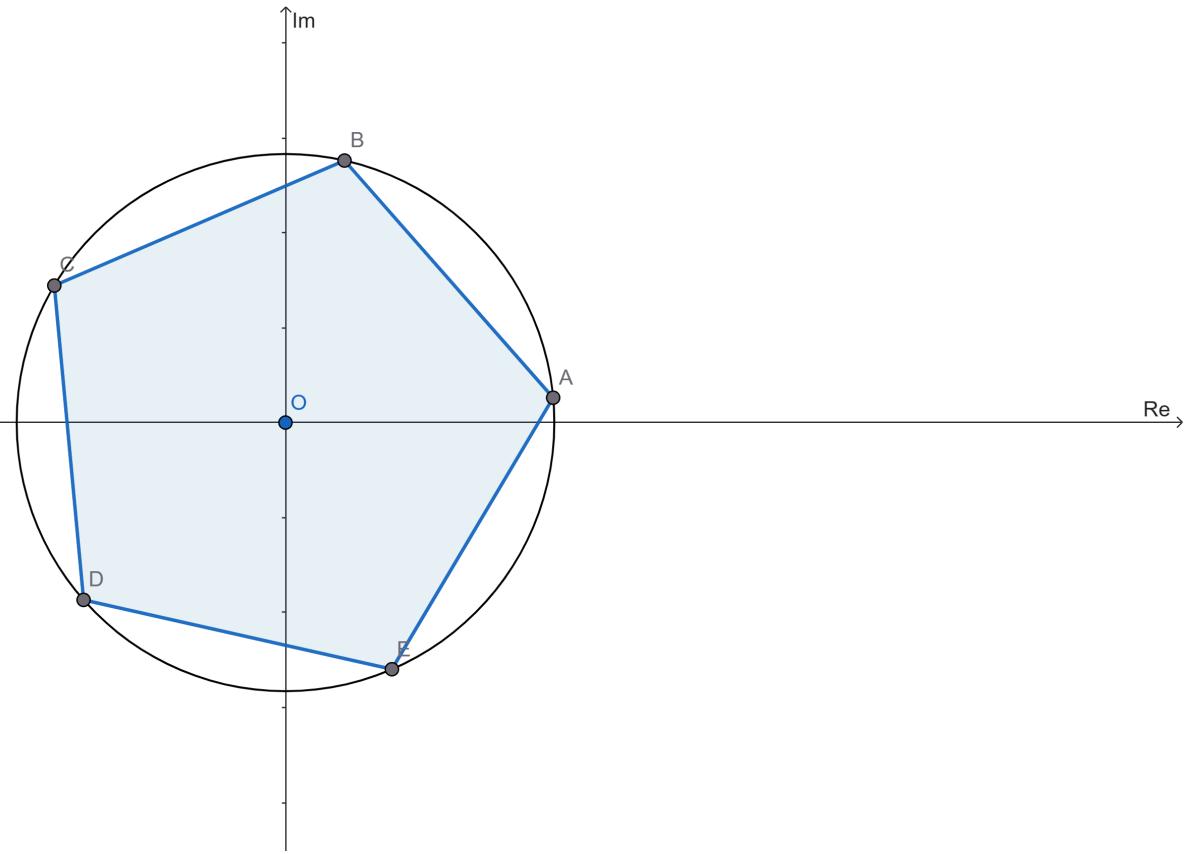


Рис. 2 – корни 5 степени из  $z = 4 + 4i$

#### A.2.5. Корни из единицы

Положим  $z = 1$ . Тогда корни степени  $n$  выражаются так:

$$\sqrt[n]{1} = \varepsilon_k = \cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right) \quad (67)$$

$$\forall k \in \{0, 1, \dots, n - 1\}.$$

Все корни есть вершины правильного  $n$ -угольника, вписанного в окружность единичного радиуса. Её уравнение  $z\bar{z} = 1$ .

### A.3. Системы линейных алгебраических уравнений

*Определение.* Система линейных (алгебраических) уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (68)$$

где  $x_1, x_2, \dots, x_n$  - неизвестные,  $a_{ij}$  - коэффициенты для  $i = 1, \dots, m$  и  $j = 1, \dots, n$ . И, наконец,  $b_i$  - свободные члены ( $i = 1, \dots, n$ ).

*Определение.* Решением СЛУ называется упорядоченный набор чисел  $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ , при подстановке которого вместо неизвестных, все уравнения обращаются в равенства.

*Определение.* СЛУ называется совместной, если у неё  $\exists$  решение.

*Определение.* СЛУ называется несовместной, если у неё  $\nexists$  решений.

*Определение.* СЛУ называется определённой, если у неё  $\exists!$  решение.

*Определение.* СЛУ называется неопределённой, если у неё  $\exists > 1$  решения.

*Определение.* Матрицей коэффициентов системы линейных уравнений называется прямоугольная таблица, составленная из всех коэффициентов при неизвестных в уравнениях системы.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 & a_{12}x_2 & \dots & a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 & a_{22}x_2 & \dots & a_{2n}x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}x_1 & a_{m2}x_2 & \dots & a_{mn}x_n \end{pmatrix} \quad (69)$$

*Определение.* Расширенной матрицей системы линейных уравнений называется матрица, полученная из матрицы коэффициентов добавлением столбца свободных членов.

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 & a_{12}x_2 & \dots & a_{1n}x_n & b_1 \\ a_{21}x_1 & a_{22}x_2 & \dots & a_{2n}x_n & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}x_1 & a_{m2}x_2 & \dots & a_{mn}x_n & b_m \end{pmatrix} \quad (70)$$

#### A.3.1. Сложение и умножение строк

- Сложение двух строк:

$$(c_1, c_2, \dots, c_n) + (d_1, d_2, \dots, d_n) = (c_1 + d_1, c_2 + d_2, \dots, c_n + d_n) \quad (71)$$

- Умножение строки на число:

$$\lambda(c_1, c_2, \dots, c_n) = (\lambda c_1, \lambda c_2, \dots, \lambda c_n) \quad (72)$$

### A.3.2. Элементарные преобразования систем линейных уравнений и их матриц

*Определение.* Элементарными преобразованиями системы линейных уравнений называются следующие операции:

1. Элементарные преобразования I типа. Прибавляем к одному уравнению другое, умноженное на некоторое число.

Символически:

$$(i)' = (i) + \lambda(j). \quad (73)$$

В терминах матриц:

$$\tilde{A}'_i = \tilde{A}_i + \lambda \cdot \tilde{A}_j \quad (74)$$

$$\tilde{A}'_k = \tilde{A}_k, \quad \forall k \neq i. \quad (75)$$

2. Элементарные преобразования II типа. Умножаем одно уравнение на некоторое число.

Символически:

$$(i) \leftrightarrow (j). \quad (76)$$

В терминах матриц:

$$\tilde{A}'_i = \tilde{A}_j \quad (77)$$

$$\tilde{A}'_j = \tilde{A}_i \quad (78)$$

$$\tilde{A}'_k = \tilde{A}_k, \quad \forall k \neq i, j. \quad (79)$$

3. Элементарные преобразования III типа. Умножение строки на ненулевое число.

Символически:

$$(i)' = \lambda \cdot (i), \quad \lambda \neq 0. \quad (80)$$

В терминах матриц:

$$\tilde{A}'_i = \lambda \cdot \tilde{A}_i, \quad \lambda \neq 0 \quad (81)$$

$$\tilde{A}'_k = \tilde{A}_k, \quad \forall k \neq i. \quad (82)$$

**Предложение.** Элементарные преобразования системы линейных уравнений не изменяют множество её решений.

**Доказательство.**  $\square$  Если из сходной СЛУ мы получили новую систему с помощью элементарных преобразований, то уравнения новой системы следуют из уравнений исходной системы:

- преобразования I типа для решения системы сохраняют верное равенство;
- преобразования II типа меняют только порядок записи;
- преобразования III типа не изменяют верное равенство.

Отсюда любое решение исходной системы является решением и новой системы. Теперь докажем, что любое решение новой системы является решением и исходной системы. Это происходит ввиду того, что  $\forall$  элементарного преобразования  $\exists$  обратное элементарное преобразование.

- Для I типа:  $(i)' = (i) + \lambda(j) \Rightarrow (i) = (i)' - \lambda(j)$
- Для II типа:  $(i)' = (j) \Rightarrow (i) = (j)'$
- Для III типа  $(i)' = \lambda(i) \Rightarrow (i) = \frac{1}{\lambda}(i)'$

Применяя к обратным преобразованиям то же самое рассуждение, что и выше, мы и получим, что любое решение новой системы является решением и исходной системы. Следовательно, две системы эквивалентны. ■

### A.3.3. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений

**Определение.** Назовём *ведущим элементом* или же *лидером* числовые строки первый слева ненулевой элемент:

$$a_i : a_j = 0, \quad \forall j < i. \quad (83)$$

Метод Гаусса заключается в следующих шагах:

1. Выберем строку, лидер которой стоит на самой левой позиции.
2. Переставим эту строку с первой строкой с помощью элементарного преобразования II типа.
3. Обнулим коэффициент под лидером первой строки с помощью элементарного преобразования I типа.
4. Рассмотрим матрицу из всех строк, кроме первой:  $\bar{A}$ .
  - $\bar{A} = 0 \Rightarrow$  алгоритм завершается.
  - $\bar{A} \neq 0 \Rightarrow$  повторить шаги 1-4.

В итоге мы получим так называемую *ступенчатую матрицу*.

*Определение.* Ступенчатая матрица — это матрица, в которой:

- все ненулевые строки идут в начале
- все нулевые строки идут в конце
- лидер каждой ненулевой строки находится правее лидера предыдущей строки.

В качестве дополнительного шага, с помощью элементарных преобразований III типа мы можем сделать так, чтобы на местах лидеров всех строк были единицы.

Получим так называемый *улучшенный ступенчатый вид матрицы*.

#### A.3.4. Ранг ступенчатой матрицы

*Определение.* Ранг ступенчатой матрицы — это количество ненулевых строк в ней.

Пусть  $A^*$  — ступенчатая матрица,  $r = \text{rank}(A^*)$  и  $\tilde{r} = \text{rank}(\widetilde{A}^*)$ . Рассмотрим 2 случая:

1.  $r < \tilde{r} \Rightarrow \tilde{r} = r + 1$ . В  $(r+1)$ -м уравнении системы в левой части только нулевые коэффициенты, а в правой части лидер  $(r+1)$ -й строки матрицы  $\widetilde{A}^*$ . Выходит:  $0 = b_{r+1}^*$  — противоречивое уравнение. Итак, если ранг матрицы меньше ранга расширенной матрицы, то СЛУ несовместна.

2.  $r = \tilde{r}$ . Пусть номера столбцов, содержащих лидеров столбцов равны  $j_1, j_2, \dots, j_r$ .

Назовём

- $x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_r}$  — главные неизвестные,
- $(x_j), j \neq j_1, j_2, \dots, j_r$  — свободные неизвестные.

*Обратный ход метода Гаусса.* Рассмотрим  $r$ -е уравнение системы:

$$(r) \quad a_{r,j_r}^* + \dots = b_r^* \quad (84)$$

$$x_{j_r} = \frac{b_r^* - \sum_{j>j_r} a_{r,j}^* x_j}{a_{r,j_r}} \quad (85)$$

Выразили неизвестную  $x_{j_r}$  через свободные неизвестные. Поднимемся на  $(r-1)$ -е уравнение.

$$(r-1) \Rightarrow x_{j_{r-1}} \text{ выражается через } x_j, j > j_{r-1}. \quad (86)$$

И так далее, поднимаясь до первого уравнения. В итоге мы выражаем главные неизвестные через свободные, получая общее решение.

$$x_{j_k} = \sum_{j \neq j_1, \dots, j_k} c_{kj} x_j + c_k, \quad \forall k = 1, \dots, r. \quad (87)$$

Подставляя конкретные значения для свободных неизвестных, мы получаем частное решение системы  $\Rightarrow$  СЛУ совместна.

### A.3.5. Критерий совместности и определённости системы

*Теорема Кронекера-Капелли.* Пусть матрица СЛУ имеет ранг  $r$ , расширенная матрица имеет ранг  $\tilde{r}$ , а число неизвестных равно  $n$ . Тогда СЛУ:

- совместна  $\Leftrightarrow r = \tilde{r}$
- несовместна  $\Leftrightarrow r < \tilde{r}$
- определена  $\Leftrightarrow r = \tilde{r} = n$
- неопределенна  $\Leftrightarrow r = \tilde{r} < n$ .

*Доказательство.*  $\square$  Осталось доказать критерии определённости и неопределённости. Пусть СЛУ совместна. Количество свободных неизвестных равно количеству неизвестных минус количество главных неизвестных:  $(n - r)$ .

- Если  $n = r$ , то свободных неизвестных нет, и тогда система определена. Если свободных неизвестных нет, то  $r = n$ .
- Если  $n > r$ , то свободные неизвестные есть, и тогда система неопределена.

■

### A.3.6. Однородные системы линейных уравнений

*Определение.* Однородная система линейных уравнений — это система вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \dots \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \quad (88)$$

Однородная система линейных уравнений всегда совместна: нулевое решение  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ .

*Предложение.* Однородная система линейных уравнений, в которой количество уравнений меньше количества неизвестных, всегда имеет ненулевое решение.

*Доказательство.*  $\square$  Приведём однородную систему к ступенчатому виду. Тогда  $r = \tilde{r}$ , поскольку система всегда совместна. Ранг не превосходит количества строк системы:  $r \leq m < n$ . По теореме Кронекера-Капелли, такая система неопределена, а значит кроме нулевого решения  $\exists$  ненулевое. ■

## A.4. Векторные пространства

*Определение.* Векторным пространством называется множество  $V$ , на котором заданы две алгебраические операции – сложение векторов и умножение векторов на числа – которые удовлетворяют следующим аксиомам векторного пространства.

1. Коммутативность сложения:  $\forall u, v \in V: u + v = v + u$ .
2. Ассоциативность сложения:  $\forall u, v, w \in V: (u + v) + w = u + (v + w)$ .
3. Нулевой вектор:  $\exists 0 \in V: \forall v \in V: v + 0 = v$ . (иногда обозначается  $\vec{0}$ )
4. Противоположный вектор:  $\forall v \in V: \exists w \in V: v + w = 0$ .
5. Ассоциативность умножения:  $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, v \in V: \lambda \cdot (\mu \cdot v) = (\lambda\mu) \cdot v$ .
6. Дистрибутивность умножения относительно сложения векторов:  $\forall \lambda \in \mathbb{R}, u, v \in V: \lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$ .
7. Дистрибутивность умножения относительно сложения чисел:  $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, v \in V: (\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v$ .
8. Аксиома нормировки:  $\forall v \in V: 1 \cdot v = v$ .

### A.4.1. Примеры векторных пространств

1.  $V = \{\text{все свободные геометрические векторы пространства}\}$ . На этом множестве геометрически определяются операции сложения и умножения на числа.
  - Сложение по правилу параллелограмма.
  - Умножение на число:  $\forall \lambda \in \mathbb{R}, v \in V :$

$$|\lambda v| = |\lambda| |v| \quad (89)$$

$$\begin{cases} (\lambda v) \uparrow\uparrow v, & \text{если } \lambda > 0 \\ (\lambda v) \uparrow\downarrow v, & \text{если } \lambda < 0 \end{cases} \quad (90)$$

- Противоположный вектор:  $\forall v \in V: v + (-v) = \vec{0}$ .
2. Арифметическое векторное пространство:  $V = \mathbb{R}^n$ . Элементы этого множества это упорядоченные наборы  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $x_i \in \mathbb{R}$  ( $i = 1, \dots, n$ ).
    - Сложение:  $\forall u, v \in V: u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n)$ .
    - Умножение на число:  $\forall \lambda \in \mathbb{R}, v \in V: \lambda \cdot v = (\lambda v_1, \lambda v_2, \dots, \lambda v_n)$ .
    - Нулевой вектор:  $(0, 0, \dots, 0)$ .
    - Противоположный вектор:  $\forall v = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in V: -v = (-v_1, -v_2, \dots, -v_n)$ .
  3. Пространство функций на множестве  $X$ :  $V = \mathcal{F}(X, \mathbb{R}) = \{f: X \rightarrow \mathbb{R}\}$ .

- сумма:  $\forall f, g \in V, \forall x \in X : (f + g)(x) = f(x) + g(x)$ .
- умножение на число:  $\forall \lambda \in \mathbb{R}, f \in V, \forall x \in X : (\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot (f(x))$ .

#### A.4.2. Простейшие следствия из аксиом векторного пространства

1. Единственность нулевого вектора:  $\exists!0 \in V$ .

*Доказательство.*  $\square$  Пусть  $0'$  – другой нулевой вектор. Рассмотрим их сумму:  $0 + 0' = 0$  (так как  $0'$  – нулевой вектор). Но  $0 + 0' = 0'$  (так как  $0$  – нулевой вектор). Следовательно,  $0 = 0'$ . ■

2. Единственность противоположного вектора:  $\forall v \in V : \exists!w \in V : v + w = 0$ .

*Доказательство.*  $\square$  Пусть  $w' \neq w$  – другой вектор, противоположный  $v$ . Рассмотрим  $w + v + w'$ :

$$(w + v) + w' = 0 + w' = w' \quad (91)$$

$$w + (v + w') = w + 0 = w \quad (92)$$

Следовательно,  $w = w'$ . Значит, противоположный вектор для данного только один. ■

- 2.1. Поэтому противоположный вектор для  $v \in V$  можно обозначить:  $(-v)$ .
3.  $\forall v \in V : 0 \cdot v = \vec{0}$ .

*Доказательство.*  $\square$   $0 \cdot v = (0 + 0) \cdot v = 0 \cdot v + 0 \cdot v$ . Добавим к обеим частям равенства  $-(0 \cdot v)$ , тогда получим:  $\vec{0} = 0 \cdot v$  ■

4.  $\forall \lambda \in \mathbb{R} : \lambda \cdot \vec{0} = 0$ .

*Доказательство.*  $\square$   $\lambda \cdot \vec{0} = \lambda \cdot (\vec{0} + \vec{0}) = \lambda \cdot \vec{0} + \lambda \cdot \vec{0} \Rightarrow \lambda \cdot \vec{0} = 0$ . ■

5.  $\forall v \in V : (-1) \cdot v = -v$ .

*Доказательство.*  $\square$   $v + (-1) \cdot v = 1 \cdot v + (-1) \cdot v = (1 + (-1)) \cdot v = 0 \cdot v = \vec{0}$ .

■

#### A.4.3. Линейные комбинации

*Определение.* Линейной комбинацией векторов  $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$  с коэффициентами  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$  называется выражение вида:

$$\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \dots + \lambda_n \cdot v_n \quad (93)$$

Её значение тоже вектор из  $V$ .

*Определение.* Тривиальной линейной комбинацией называется линейная комбинация, в которой все коэффициенты равны нулю:  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ . Её значение равно нулю.

*Определение.* Система векторов  $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  называется *зависимой*, если  $\exists$  нетривиальная линейная комбинация этих векторов, равная нулю.

#### A.4.3.1. Примеры линейных комбинаций

1.  $S = \{v\}$  линейно зависима  $\Leftrightarrow v = 0$ .

*Доказательство.*  $\square$

- $\lambda \cdot v = \vec{0} \Rightarrow v = \frac{1}{\lambda} \cdot \vec{0} = \vec{0}$ .
- Обратно,  $v = 0 \Rightarrow 1 \cdot v = \vec{0}$ . ■

2.  $S = \{v_1, v_2\}$  линейно зависима  $\Leftrightarrow \exists \mu \in \mathbb{R} : v_1 = \mu \cdot v_2$ .

*Доказательство.*  $\square$

1)  $\Rightarrow$  Пусть  $\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 = 0$  – нетривиальная линейная комбинация. Тогда  $v_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \cdot v_2$  – векторы пропорциональны.

2)  $\Leftarrow$  Пусть  $v_1 = \mu \cdot v_2$  для некоторого  $\mu \in \mathbb{R}$ . Тогда  $v_1 + (-\mu) \cdot v_2 = 0$ , что и означает зависимость векторов. ■

#### A.4.4. Свойства линейной зависимости

1. Если система векторов  $S$  линейно зависима и  $S \subset S'$ , то  $S'$  тоже линейно зависима.

*Доказательство.*  $\square$  Пусть  $S = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ ,  $S' = \{v_1, \dots, v_m, v_{m+1}, \dots, v_n\}$ .

Тогда  $\exists$  нетривиальная линейная комбинация векторов из  $S$ , равная нулю:

$$\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \dots + \lambda_m \cdot v_m = 0 \quad (94)$$

Добавим к ней векторы из  $S' \setminus S$  с нулевыми коэффициентами:

$$\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \dots + \lambda_m \cdot v_m + 0 \cdot v_{m+1} + \dots + 0 \cdot v_n = 0 \quad (95)$$

Нетривиальная линейная комбинация векторов из  $S'$  равна нулю  $\Rightarrow S'$  линейно зависима. ■

2. Если система векторов  $S$  линейно независима и  $S' \subset S$ , то  $S'$  тоже линейно независима.

*Доказательство.*  $\square$  Если бы  $S'$  была линейно зависима, то по свойству 1  $S$  тоже была бы линейно зависима, что противоречит условию, поэтому  $S'$  линейно независима. ■

3. Система векторов  $S$  линейно зависима  $\Leftrightarrow \exists v \in S: v$  равен линейной комбинации векторов из  $S \setminus \{v\}$ .

*Доказательство.*  $\square$

1)  $\Rightarrow$ . Пусть  $S = \{v_1, \dots, v_n\}$  и  $\exists \lambda_i (i = 1, \dots, n)$ :

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0, \quad \exists \lambda_j \neq 0. \quad (96)$$

Отсюда получим:

$$v_i = -\frac{\lambda_1}{\lambda_i} v_1 + \dots + \left(-\frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i} v_{i-1}\right) + \left(-\frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i} v_{i+1}\right) + \dots + \left(-\frac{\lambda_n}{\lambda_i} v_n\right) \quad (97)$$

2)  $\Leftarrow$ . Пусть  $v_i = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_{i-1} v_{i-1} + \mu_{i+1} v_{i+1} + \dots + \mu_n v_n$ . Перенесём всё в правую часть:

$$\mu_1 v_1 + \dots + \mu_{i-1} v_{i-1} + (-1) \cdot v_i + \mu_{i+1} v_{i+1} + \dots + \mu_n v_n = 0. \quad (98)$$

■

4. Пусть  $S$  линейно независима, но  $S \cup \{v\}$  линейно зависима  $\Rightarrow v$  линейно выражается через  $S$  единственным способом.

*Доказательство.*  $\square$  Обозначим  $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ . При добавлении  $v$   $\exists$  нетривиальная ЛК, равная нулю:

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n + \lambda v = 0. \quad (99)$$

Тогда  $\lambda \neq 0$ . Иначе, если бы  $\lambda = 0$ , мы получили бы

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0 \quad (100)$$

Но это противоречит линейной независимости  $S$ . Отсюда мы можем выразить  $v$ :

$$v = -\frac{\lambda_1}{\lambda} v_1 + \dots + \left(-\frac{\lambda_n}{\lambda} v_n\right) \quad (101)$$

Докажем единственность выражения через систему  $S$ . Пусть вектор  $v$  представляется двумя способами:

$$v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n \quad (102)$$

$$v = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n \quad (103)$$

Отсюда, вычитая эти два равенства, получим

$$(\alpha_1 - \beta_1)v_1 + \dots + (\alpha_n - \beta_n)v_n = 0 \quad (104)$$

Система  $S$  линейно независима  $\Rightarrow$  в этой ЛК все коэффициенты равны нулю:  $\alpha_i - \beta_i = 0 \Rightarrow \alpha_i = \beta_i, i = 1, \dots, n$ . Значит вектор  $v$  выражается единственным способом. ■

5. Основная лемма о линейной зависимости. Пусть  $S = \{v_1, \dots, v_n\}$  и  $T = \{w_1, \dots, w_m\}$ , причём система  $S$  линейно выражается через систему  $T$  и  $n > m$ .

*Доказательство.* □ Если  $S$  линейно выражается через  $T$ , то  $\forall j = 1, \dots, n$ :

$$v_j = a_{1j}w_1 + \dots + a_{mj}w_j \quad (105)$$

Рассмотрим произвольную ЛК векторов системы  $S$ :

$$\begin{aligned} \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n &= \sum_{i=j}^n \lambda_i v_j = \sum_{j=1}^n \left( \lambda_j \cdot \sum_{i=1}^m a_{ij} w_i \right) = \\ &= \sum_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}} a_{ij} \lambda_j \cdot w_i = \sum_{i=1}^m \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} \lambda_j \right) w_i. \end{aligned} \quad (106)$$

Рассмотрим однородную систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \quad (107)$$

Здесь  $m < n$ , то есть число неизвестных больше числа уравнений. Мы знаем, что [такая система всегда имеет ненулевое решение](#).  $\exists(x_1^0, \dots, x_n^0) = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ , где хотя бы один из  $\lambda_i$  не равен нулю, такие, что  $\forall i = 1, \dots, m$ :

$$\sum_{j=1}^m a_{ij} \lambda_j = 0 \quad (108)$$

Но  $a_{ij} \lambda_j$  это коэффициенты ЛК в (106), значит эта ЛК равна нулю.

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n = 0 \quad (109)$$

И решение  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  ненулевое!  $\Rightarrow$  система  $S$  линейно зависима! ■

## A.5. Определители

*Определение.* Пусть задана квадратная матрица  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ . Её определитель это число, которое обозначают

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (110)$$

По определению оно равно

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} a_{1,\sigma(1)} \cdot a_{2,\sigma(2)} \cdot \dots \cdot a_{n,\sigma(n)} \cdot \operatorname{sgn}(\sigma) \quad (111)$$

Где сумма ведётся по всем перестановкам  $\sigma \in S_n$ .

### A.5.1. Свойства определителя

Каждая квадратная  $n \times n$ -матрица может рассматриваться как набор из  $n$   $n$ -мерных векторов:

$$\det A = \det(A_1, A_2, \dots, A_n) \quad (112)$$

Определитель обладает свойствами:

1. Аддитивность:

$$\begin{aligned} \det(A_1, \dots, A'_k + A''_k, \dots, A_n) &= \det(A_1, \dots, A'_k, \dots, A_n) + \\ &\quad + \det(A_1, \dots, A''_k, \dots, A_n) \end{aligned} \quad (113)$$

*Доказательство.*  $\square$  Согласно определению определителя,

$$\det A = \sum_{(i_1, \dots, i_n)} a_{1,i_1} \cdot \dots \cdot a_{k,i_k} \cdot \dots \cdot a_{n,i_n} \cdot \operatorname{sgn}(i_1, \dots, i_n) \quad (114)$$

Но  $k$ -я строка распадается на сумму двух, поэтому  $a_{k,i_k} = a'_{k,i_k} + a''_{k,i_k}$ , рак- скрыв скобки, получим две суммы:

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{(i_1, \dots, i_n)} a_{1,i_1} \cdot \dots \cdot a'_{k,i_k} \cdot \dots \cdot a_{n,i_n} \cdot \operatorname{sgn}(i_1, \dots, i_n) + \\ &\quad + \sum_{(i_1, \dots, i_n)} a_{1,i_1} \cdot \dots \cdot a''_{k,i_k} \cdot \dots \cdot a_{n,i_n} \cdot \operatorname{sgn}(i_1, \dots, i_n) = \\ &= \det(A_1, \dots, A'_k, \dots, A_n) + \det(A_1, \dots, A''_k, \dots, A_n). \blacksquare \end{aligned} \quad (115)$$

2. Однородность:

$$\det(A_1, \dots, \lambda \cdot A_k, \dots, A_n) = \lambda \det(A_1, \dots, A_k, \dots, A_n) \quad (116)$$

*Доказательство*  $\square$  Левая часть равна:

$$\begin{aligned} & \sum_{(i_1, \dots, i_n)} a_{1,i_1} \cdot \dots \cdot (\lambda \cdot a_{k,i_k}) \cdot \dots \cdot a_{n,i_n} \cdot \operatorname{sgn}(i_1, \dots, i_n) = \\ & = \lambda \sum_{(i_1, \dots, i_n)} a_{1,i_1} \cdot \dots \cdot a_{k,i_k} \cdot \dots \cdot a_{n,i_n} \cdot \operatorname{sgn}(i_1, \dots, i_n) = \lambda \det A. \blacksquare \end{aligned} \quad (117)$$

3. Кососимметричность:

$$\det(A_1, \dots, A_k, \dots, A_l, \dots, A_n) = -\det(A_1, \dots, A_l, \dots, A_k, \dots, A_n) \quad (118)$$

*Доказательство.*  $\square$  Пусть матрица  $A'$  получена из матрицы  $A$  транспозицией двух строк с номерами  $k$  и  $l$ . Переставим в произведениях  $k$ -е и  $k$ -е элементы:

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{\sigma \in S_n} a_{1,\sigma(1)} \cdot \dots \cdot a_{k,\sigma(k)} \cdot \dots \cdot a_{l,\sigma(l)} \cdots a_{n,\sigma(n)} \cdot \operatorname{sgn}(\sigma) = \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} a_{1,\sigma(1)} \cdot \dots \cdot a_{l,\sigma(l)} \cdot \dots \cdot a_{k,\sigma(k)} \cdots a_{n,\sigma(n)} \cdot \operatorname{sgn}(\sigma) \end{aligned} \quad (119)$$

Рассмотрим перестановку  $\pi = \sigma \cdot \tau$ , где  $\tau = (k, l)$  — транспозиция  $k$  и  $l$ . Она действует на все номера, кроме  $k$  и  $l$  так же, как и  $\sigma$ , кроме того,  $\pi \in S_n$ , если  $\sigma \in S_n$ .

$$\det A = \sum_{\pi \in S_n} a'_{1,\pi(1)} \cdot \dots \cdot a'_{k,\pi(k)} \cdot \dots \cdot a'_{l,\pi(l)} \cdots a'_{n,\pi(n)} \cdot \underbrace{\operatorname{sgn}(\sigma)}_{-\operatorname{sgn}(\pi)} = -\det A' \quad (120)$$

$\blacksquare$

4. Определитель матрицы с нулевой строкой равен нулю:

$$\exists k : A_k = 0 \Rightarrow \det A = 0. \quad (121)$$

*Доказательство.*  $\square$

$$\begin{aligned} \det A &= \det(A_1, \dots, A_k, \dots, A_n) = \det(A_1, \dots, 0 \cdot A_k, \dots, A_n) = \\ &\stackrel{\text{св. 2}}{=} 0 \cdot \det(A_1, \dots, A_k, \dots, A_n) = 0. \blacksquare \end{aligned} \quad (122)$$

5. Если в определителе 2 строки совпадают, то определитель равен нулю:

$$\exists k \neq l : A_k = A_l \Rightarrow \det A = 0. \quad (123)$$

*Доказательство.*  $\square$  Переставим строки с местами  $k$  и  $l$  и воспользуемся косо-симметричностью:

$$\begin{aligned}\det A &= \det(A_1, \dots, A_k, \dots, A_l, \dots, A_n) = -\det(A_1, \dots, A_l, \dots, A_k, \dots, A_n) = \\ &= -\det A\end{aligned}\tag{124}$$

Но  $\det A = -\det A \Rightarrow \det A = 0$ . ■

6. Если в определителе две строки пропорциональны, то он равен нулю:

$$\exists k, l : k \neq l : A_l = \lambda \cdot A_k \Rightarrow \det A = 0\tag{125}$$

*Доказательство.*  $\square$

$$\begin{aligned}\det(A_1, \dots, A_k, \dots, A_l, \dots, A_n) &= \det(A_1, \dots, A_k, \dots, \lambda \cdot A_k, \dots, A_n) = \\ &= \lambda \det(A_1, \dots, A_k, \dots, A_k, \dots, A_n) = 0.\end{aligned}\tag{126}$$

7. Элементарные преобразования строк I типа не меняют определитель матрицы.

*Доказательство.*  $\square$  Пусть матрица  $A'$  получена прибавлением  $l$ -й строки с коэффициентом  $\lambda$  к  $k$ -й строке матрицы  $A$ :

$$\begin{aligned}\det A' &= \det(A_1, \dots, A_k + \lambda \cdot A_l, \dots, A_l, \dots, A_n) = \\ &= \det(A_1, \dots, A_k, \dots, A_l, \dots, A_n) + \underbrace{\det(A_1, \dots, \lambda \cdot A_l, \dots, A_l, \dots, A_n)}_{=0 \text{ по свойству 6}} = \\ &= \det A.\end{aligned}\tag{127}$$

8. При транспонировании определитель матрицы не меняется:

$$\det A = \det A^T\tag{128}$$

*Доказательство.*  $\square$  Запишем по определению определитель транспонированной матрицы:

$$\det A^T = \sum_{\sigma \in S_n} a_{\sigma(1),1} \cdot \dots \cdot a_{\sigma(n),n} \operatorname{sgn}(\sigma).\tag{129}$$

Пусть  $\pi = \sigma^{-1}$ . Тогда  $\sigma(j) = i \Rightarrow \pi(i) = j$ . Если  $\sigma$  пробегает все перестановки  $S_n$  по одному разу, то и  $\pi$  пробегает все перестановки  $S_n$  по одному разу. Кроме того,  $\operatorname{sgn}(\pi) = \operatorname{sgn}(\sigma)$ .

$$\det A^T = \sum_{\pi \in S_n} a_{1,\pi(1)} \cdot \dots \cdot a_{n,\pi(n)} \cdot \underbrace{\operatorname{sgn}}_{\operatorname{sgn}(\pi)}(\sigma) = \det A.\blacksquare\tag{130}$$

9. Свойства 1-7 верны, если рассматривать определитель как функцию набора столбцов матрицы.

Из 1 и 2 свойства следует линейность определителя по любой строке, то есть определитель — полилинейная кососимметрическая функция строк матрицы. А из свойства 9 следует, что и от столбцов.

### A.5.2. Вычисление определителя через приведение матрицы к треугольному виду

Мы можем привести элементарными преобразованиями строк любую квадратную матрицу  $A$  к ступенчатому виду, получив матрицу  $A^*$ , у которой ниже главной диагонали будут только нули:

$$A \xrightarrow[\text{ЭП строк}]{} A^* = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \lambda_2 & \dots & \dots \\ \vdots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \quad (131)$$

Если по пути было сделано  $p$  перестановок строк и умножения строк производились на числа  $\mu_1, \dots, \mu_N$ , то определитель исходной матрицы так связан с определителем ступенчатой матрицы:

$$\det A = \det A^* \cdot (-1)^p \cdot \mu_1 \cdot \dots \cdot \mu_N \quad (132)$$

### A.5.3. Определитель треугольной матрицы

*Предложение.* Определитель треугольной матрицы равен произведению элементов, стоящих на диагонали этой матрицы.

*Доказательство.*  $\square$  Пусть у нас есть треугольная квадратная матрица  $B$  с диагональю  $(\lambda_1 \dots \lambda_n)$ .

$$\det B = \lambda_n \cdot \begin{vmatrix} \lambda_1 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \lambda_2 & \dots & \dots \\ \vdots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} \quad (133)$$

Применим элементарное преобразование I типа: обнулим все элементы в  $n$ -м столбце выше единицы.

$$\det B = \lambda_n \cdot \begin{vmatrix} \lambda_1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} \quad (134)$$

Теперь вынесем множитель  $\lambda_{n-1}$  из предпоследней строки.

$$\det B = \lambda_n \cdot \lambda_{n-1} \begin{vmatrix} \lambda_1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & \dots \\ \vdots & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} \quad (135)$$

Теперь с помощью элементарных преобразований I типа обнулим все элементы  $(n-1)$ -го столбца выше единицы. Повторим эту процедуру до тех пор, пока на главной диагонали не останутся только единицы. Полученная матрица есть единичная.

$$\det B = \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n \cdot \begin{vmatrix} 1 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 1 \end{vmatrix} \quad (136)$$

Но в разложении определителя единичной матрицы только одно ненулевое произведение:  $1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1 = 1$ . Поэтому  $\det B = \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n$ . ■

## B. Математический анализ

### B.1. Числовые последовательности

Отображение  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  называется числовой последовательностью. Последовательность можно записать как  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ , где  $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \in \mathbb{R}$  или же

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \quad (137)$$

Членом последовательности с номером  $n$  называется пара  $(n, a_n)$ .

#### B.1.1. Предел последовательности

Число  $a \in \mathbb{R}$  называется пределом последовательности  $\{a_n\}$ , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : |a_n - a| < \varepsilon \quad (138)$$

Если  $a$  — предел последовательности  $\{a_n\}$ , то пишут

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a. \quad (139)$$

Можно дать более общее определение, если ввести следующие обозначения.

1.  $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$
2.  $\hat{\mathbb{R}} = \bar{\mathbb{R}} \cup \{\infty\}$
3. Понятие эпсилон-окрестности элемента  $a \in \hat{\mathbb{R}}$ .

3.1. Если  $a \in \mathbb{R}$ , то

$$u_{\varepsilon}(a) \stackrel{\text{def}}{=} (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \quad (140)$$

3.1. Если  $a = -\infty$ , то

$$u_{\varepsilon}(a) \stackrel{\text{def}}{=} \left( -\infty, -\frac{1}{\varepsilon} \right) \quad (141)$$

3.2. Если  $a = +\infty$ , то

$$u_{\varepsilon}(a) \stackrel{\text{def}}{=} \left( \frac{1}{\varepsilon}, +\infty \right) \quad (142)$$

3.3. Если  $a = \infty$ , то

$$u_{\varepsilon}(a) \stackrel{\text{def}}{=} \left( -\infty, -\frac{1}{\varepsilon} \right) \cup \left( \frac{1}{\varepsilon}, +\infty \right) \quad (143)$$

Тогда  $a \in \hat{\mathbb{R}}$  называется пределом последовательности  $\{a_n\}$ , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : a_n \in u_{\varepsilon}(a) \quad (144)$$

### B.1.2. Ограниченнность

Последовательность  $\{a_n\}$  называется *ограниченной сверху*, если  $\exists M \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq M$ .

Последовательность  $\{a_n\}$  называется *ограниченной снизу*, если  $\exists m \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq m$ .

Последовательность  $\{a_n\}$  называется *ограниченной*, если она ограничена сверху и снизу.

*Теорема.* Если последовательность  $\{a_n\}$  сходится, то она ограничена.

*Доказательство.*  $\square$  Пусть  $a_n \rightarrow a$ . По определению сходимости  $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : |a_n - a| < \varepsilon$ . В частности, для  $\varepsilon = 1$ :

$$\exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : |a_n - a| < 1. \quad (145)$$

Тогда вне 1-окрестности числа  $a$  лежит конечное число членов  $a_n$ , поэтому мы можем явно предъявить ограничивающие сверху и снизу константы  $M$  и  $m$  соответственно:

$$M = \max(\{a_n \mid n \leq N\} \cup \{a + 1\}) \quad (146)$$

$$m = \min(\{a_n \mid n \leq N\} \cup \{a - 1\}) \quad (147)$$

Поэтому последовательность ограничена сверху и снизу, и поэтому она ограничена.  $\blacksquare$

*Контрпример* для обратного утверждения(ограничена  $\Rightarrow$  сходится?): последовательность  $a_n = (-1)^n$  не сходится, но ограничена.

### B.1.3. Единственность предела

*Лемма.* Если  $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$  и  $a \neq b$ , то

$$\exists \varepsilon > 0 : u_\varepsilon(a) \cap u_\varepsilon(b) = \emptyset \quad (148)$$

*Доказательство:*  $\square$  Не умаляя общности рассуждений, предположим, что  $a < b$ .

1. Пусть  $a, b \in \mathbb{R}$ . Возьмём  $\varepsilon = \frac{b-a}{3} \Rightarrow \forall x \in u_\varepsilon(a), y \in u_\varepsilon(b) :$

$$x < a + \varepsilon < b - \varepsilon < y \quad (149)$$

2.  $a = -\infty, b \in \mathbb{R}$ .

$$b - \varepsilon > -\frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow b > -\varepsilon^2 + b\varepsilon > -1 \quad (150)$$

$$\varepsilon^2 - b\varepsilon - 1 < 0 \quad (151)$$

Это неравенство всегда имеет *положительное* решение относительно  $\varepsilon$ , поскольку дискриминант квадратного трёхчлена в левой части всегда положителен, а по теореме Виета, произведение корней отрицательно, а значит больший корень положителен.

3.  $b = +\infty, a \in \mathbb{R}$ .

$$a + \varepsilon < \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow a < \varepsilon^2 + a\varepsilon < 1 \quad (152)$$

$$\varepsilon^2 + a\varepsilon - 1 > 0 \quad (153)$$

Это неравенство всегда имеет *положительное* решение относительно  $\varepsilon$ .

4.  $a = -\infty, b = +\infty$ . В этом случае  $\forall \varepsilon > 0$

$$-\frac{1}{\varepsilon} < 0 < \frac{1}{\varepsilon} \quad (154)$$

Поэтому  $\forall x \in u_\varepsilon(a), y \in u_\varepsilon(b) : x < 0 < y$ .

В случаях 2 и 3 показано, что для любого действительного числа существует подходящее значение  $\varepsilon$ , при котором любое число из его окрестности заведомо больше или меньше соответственно любого числа из окрестности  $-\infty$  или  $+\infty$ . ■

Из вышепоказанной леммы можно получить такую теорему.

*Теорема.* У любой последовательности  $\{a_n\}$ , сходящейся в  $\overline{\mathbb{R}}$  может быть только один предел.

#### B.1.4. Свойства пределов, связанные с неравенствами

Выведем некоторые свойства пределов.

1. Пусть  $a, b \in \mathbb{R}$ . Тогда верно следующее (знак  $<$  можно заменить на  $>$ ).

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a < b \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : a_n < b. \quad (155)$$

*Доказательство.* □ Пусть  $\lim a_n = a < b$ . По определению предела  $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : |a_n - a| < \varepsilon$ . В частности, для  $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$ :

$$\exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : |a_n - a| < \varepsilon. \quad (156)$$

Следовательно,  $\forall n > N : a_n < a + \varepsilon = a + \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2} < b$ . ■

2. Пусть  $\lim a_n = a$ .

$$\exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : a_n \leq b \Rightarrow a \leq b. \quad (157)$$

Доказательство.  $\square$  Предположим, что

$$[\exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : a_n \leq b] \wedge \neg(a \leq b) \quad (158)$$

Поскольку тогда  $a > b$ , то по свойству 1, начиная с некоторого номера,  $a_n > b$ , но по предположению  $a_n \leq b$ . Это противоречие. ■

### 3. Теорема о промежуточной последовательности(о двух милиционерах).

Пусть даны три последовательности  $a_n, b_n, c_n$ , такие что  $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : a_n \leq b_n \leq c_n$ . Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a \in \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a \quad (159)$$

Доказательство.  $\square$  Пусть  $\lim a_n = a, \lim c_n = a$ . Тогда по определению предела

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_1 \in \mathbb{N} : \forall n > N_1 : a_n \in u_\varepsilon(a) \quad (160)$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_2 \in \mathbb{N} : \forall n > N_2 : c_n \in u_\varepsilon(a). \quad (161)$$

Тогда  $\exists N_3 = \max\{N_1, N_2, N\}$  ( $N$  из условия теоремы, то есть тот номер, начиная с которого верно неравенство). Имеем  $\forall n > N_3$ :

$$u_\varepsilon(a) \ni a_n \leq b_n \leq c_n \in u_\varepsilon(a) \quad (162)$$

Поэтому  $\forall n > N_3 : b_n \in u_\varepsilon(a)$ , а это и есть определение предела  $\lim b_n = a$ . ■

#### B.1.5. Бесконечно малые последовательности

*Определение.* Последовательность  $\alpha_n$  называется бесконечно малой(БМ), если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0 \quad (163)$$

Свойства бесконечно малых последовательностей:

- Если  $\alpha_n$  и  $\beta_n$  - бесконечно малые последовательности, то  $\alpha_n + \beta_n$  - бесконечно малая последовательность.

Доказательство.  $\square$  Пусть  $\lim \alpha_n = 0, \lim \beta_n = 0$ . Тогда по определению предела

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_1 \in \mathbb{N} : \forall n > N_1 : |\alpha_n| < \varepsilon \quad (164)$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_2 \in \mathbb{N} : \forall n > N_2 : |\beta_n| < \varepsilon. \quad (165)$$

Обозначим  $N = \max\{N_1, N_2\}$ . Тогда  $\forall n > N : |\alpha_n + \beta_n| \leq |\alpha_n| + |\beta_n| < 2\varepsilon$ , что и означает, что  $\lim(\alpha_n + \beta_n) = 0$ . ■

2. Если  $\alpha_n$  - бесконечно малая последовательность, а  $a_n$  - ограничена, то  $\alpha_n \cdot a_n$  – бесконечно малая последовательность.

*Доказательство.* □ Пусть  $\lim \alpha_n = 0$ ,  $a_n$  ограничена, то есть  $\exists M > 0 : \forall n \in \mathbb{N} : |a_n| < M$ . Тогда для последовательности  $\beta_n = \alpha_n \cdot a_n$  имеем

$$|\beta_n| = |\alpha_n| \cdot |a_n| \underset{(n>N)}{<} \varepsilon \cdot M. \quad (166)$$

Тогда  $b_n$  – бесконечно малая последовательность. ■

*Утверждение.* Если  $\alpha_n$  – бесконечно малая последовательность, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Leftrightarrow \exists \alpha_n = a_n - a \quad (167)$$

*Доказательство.* □

1.  $\Rightarrow$ . По определению предела

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : |a_n - a| < \varepsilon. \quad (168)$$

Обозначим  $\alpha_n = a_n - a$ . Тогда  $\forall n > N : |\alpha_n| < \varepsilon$ , следовательно,  $\lim \alpha_n = 0$ .

2.  $\Leftarrow$ . По определению бесконечно малой последовательности,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : |\alpha_n| < \varepsilon. \quad (169)$$

Подставляя сюда  $\alpha_n = a_n - a$ , получаем, что  $a_n \rightarrow a$ .

■

### B.1.6. Арифметические свойства пределов

Сначала докажем лемму о сохранении знака.

*Лемма о сохранении знака.* Пусть  $\lim b_n = b \neq 0$ . Тогда  $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N :$

$$\left[ |b_n| > \frac{|b|}{2} \right] \wedge [\text{sign}(b_n) = \text{sign}(b)] \quad (170)$$

*Доказательство.* □ В определении предела для  $b_n$  мы возьмём  $\varepsilon = \frac{|b|}{2}$ . Для  $b > 0$  получим  $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : |b_n - b| < \frac{|b|}{2}$ , что эквивалентно

$$-\frac{b}{2} < b_n - b < \frac{b}{2} \Rightarrow b_n > \frac{b}{2} > 0 \quad (171)$$

Отсюда следует требуемое. Если  $b < 0$ , то аналогично получаем  $b_n < -\frac{b}{2} < 0$ . ■

После доказательства леммы о сохранении знака можно перейти к теореме об арифметических свойствах пределов.

*Теорема.* Пусть  $\lim a_n = a$ ,  $\lim b_n = b$ , тогда

$$1. \quad \exists \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b \quad (172)$$

$$2. \quad \exists \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = a - b \quad (173)$$

$$3. \quad \exists \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b \quad (174)$$

4. Если  $b \neq 0$  и  $\forall n \in \mathbb{N} : b_n \neq 0$ , то

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{a_n}{b_n} \right) = \frac{a}{b} \quad (175)$$

*Доказательство.*  $\square$  Докажем последовательно все 4 утверждения. Общий план состоит в том, чтобы доказывать, что разность последовательности и её предполагаемого предела — бесконечно малая последовательность. Обозначим  $\alpha_n = a_n - a$ , а также  $\beta_n = b_n - b$ .

1.  $a_n + b_n - (a + b) = (a_n - a) + (b_n - b) = \alpha_n + \beta_n$  — это сумма двух бесконечно малых последовательностей, следовательно, такая последовательность сама БМ, следовательно  $\lim(a_n + b_n) = a + b$ .
2.  $a_n - b_n - (a - b) = (a_n - a) - (b_n - b) = \alpha_n - \beta_n$ . Разность двух БМ также бесконечно малая: легко установить, что если  $b_n$  — бесконечно малая последовательность, то  $(-b_n)$  — тоже БМ. Итак, мы получили разность двух бесконечно малых последовательностей, следовательно, такая последовательность сама БМ, следовательно  $\lim(a_n - b_n) = a - b$ .
3.  $a_n \cdot b_n - a \cdot b = a_n \cdot b_n - (a \cdot b) \underbrace{+ a_n \cdot b - a_n \cdot b}_{\text{добавили } 0} = b \cdot (a_n - a) + a_n \cdot (b_n - b) = b \cdot \alpha_n + a_n \cdot \beta_n$ . Получили сумму двух бесконечно малых, поскольку каждое слагаемое это произведение ограниченной на бесконечно малую ( $a_n$  ограничена, так как сходится!). Значит  $a_n \cdot b_n - a \cdot b$  — бесконечно малая последовательность, следовательно  $\lim(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$ .
4. Для частного оценим модуль разности последовательности и значения предела.

$$\begin{aligned}
\left| \frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b} \right| &= \left| \frac{a_n \cdot b - a \cdot b_n}{b_n \cdot b} \right| = \left| \frac{a_n \cdot b - a \cdot b + a \cdot b - a \cdot b_n}{b_n \cdot b} \right| = \\
&= \left| \frac{b \cdot \alpha_n - a \cdot \beta_n}{b_n \cdot b} \right| \underset{\substack{\text{лемма о} \\ \text{согр. знака}}}{<} \frac{|b \cdot \alpha_n - a \cdot \beta_n|}{\frac{|b|^2}{2}}
\end{aligned} \tag{176}$$

Для наглядности напишем полученное выражение и посмотрим, что вышло:

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b} \right| < \underbrace{\frac{2}{b^2}}_{\text{огр.}} \cdot \underbrace{(b \cdot \alpha_n - a \cdot \beta_n)}_{\text{бесконечно малая}} \tag{177}$$

Последовательность, которая по модулю асимптотически меньше бесконечно малой, сама является бесконечно малой, следовательно  $\lim\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b}$ .

Таким образом, теорема доказана. ■

### B.1.7. Монотонные последовательности

Последовательность  $\{a_n\}$  называется *возрастающей*, если  $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} \geq a_n$ .

Последовательность  $\{a_n\}$  называется *строго возрастающей*, если  $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} > a_n$ .

Последовательность  $\{a_n\}$  называется *убывающей*, если  $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} \leq a_n$ .

Последовательность  $\{a_n\}$  называется *строго убывающей*, если  $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} < a_n$ .

Для обозначения возрастания последовательности  $\{a_n\}$  будем писать  $a_n \uparrow$ , а для убывания  $a_n \downarrow$ .

#### B.1.7.1. Теорема Вейерштрасса

*Теорема.* Если последовательность возрастает, то у неё есть предел в  $\bar{\mathbb{R}}$ , а точнее

1. Если последовательность возрастает и ограничена сверху, то у неё есть предел  $\mathbb{R}$ .
2. Если последовательность возрастает и не ограничена сверху, то она сходится к  $+\infty$ .

*Доказательство.* □ Рассмотрим последовательность  $x_n \uparrow$  и положим  $a = \sup(x_n)$ .

Тогда мы можем записать, что

$$\forall n \in \mathbb{N} : x_n \leq a \tag{178}$$

(по определению точной верхней грани). А также

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon : x_{n_\varepsilon} \in u_\varepsilon(a) \tag{179}$$

Теперь по определению возрастающей последовательности  $\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} :$

$$\forall n > n_\varepsilon : x_n \geq x_{n_\varepsilon} \quad (180)$$

Получили двойное неравенство  $\forall n > n_\varepsilon :$

$$x_{n_\varepsilon} \leq x_n \leq a \quad (181)$$

Значит, начиная с некоторого номера, все  $x_n$  лежат в  $\varepsilon$ -окрестности  $a$ . Что и требовалось доказать. ■

Абсолютно аналогично можно доказать, что если последовательность убывает и ограничена снизу, то у неё есть предел.

### B.1.8. Кто растёт быстрее?

Пусть  $k \in \mathbb{N}$  и  $q > 1$ . Рассмотрим 4 последовательности:

$$n^k, q^n, n!, n^n \quad (182)$$

- Сравнение степенной и показательной последовательности. Рассмотрим последовательность

$$x_n = \frac{n^k}{q^n} \quad (183)$$

$$x_{n+1} = \frac{(n+1)^k}{q^{n+1}} \quad (184)$$

Рассмотрим отношение соседних членов:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^k}{q} \quad (185)$$

Поскольку  $\left(\frac{n+1}{n}\right)^k \underset{n \rightarrow \infty}{\rightarrow} 1 < q$ , то начиная с некоторого номера  $N$ ,  $\forall n > N$ :  $\left(\frac{n+1}{n}\right)^k < q$ , поэтому начиная с этого номера  $\frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$ , а значит последовательность  $\{x_n\}$  убывает, начиная с этого номера.

Кроме того, последовательность  $\{x_n\}$  ограничена снизу нулём:  $x_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}$ . По теореме Вейерштрасса, последовательность  $x_n$  имеет предел.

Пусть  $\lim x_n = a$ . Тогда  $\lim x_{n+1} = a$ . Предположим, что  $a \neq 0$ . Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{x_{n+1}}{x_n} \right) = \frac{a}{a} = 1 \quad (186)$$

Но с другой стороны

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{x_{n+1}}{x_n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} = \frac{\left( \frac{n+1}{n} \right)^k}{q} = \frac{1}{q} \neq 1 \quad (187)$$

Получили противоречие  $\Rightarrow a = 0$ . Итак,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{q^n} = 0$$

2. Сравним  $n!$  и  $q^n$ . Рассмотрим последовательность  $x_n = \frac{q^n}{n!}$ . Тогда следующий член равен

$$x_{n+1} = \frac{q^{n+1}}{(n+1)!} \quad (188)$$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{q}{n+1} < \underset{\substack{\uparrow \\ \text{с некоторого} \\ \text{номера}}}{1} \quad (189)$$

Поэтому последовательность  $x_n$ , начиная с некоторого номера, убывает. Кроме того, она ограничена снизу нулём. Поэтому пусть  $a = \lim x_n = \lim x_{n+1}$ . Предположим, что  $a \neq 0$ . Тогда  $\lim \left( \frac{x_{n+1}}{x_n} \right) = 1$ , но это противоречит тому, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{x_{n+1}}{x_n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{q}{n+1} \right) = 0. \quad (190)$$

В силу противоречия,  $a = 0$ , поэтому доказано, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q^n}{n!} = 0$$

3. Сравним  $n!$  и  $n^n$ . Рассмотрим последовательность  $x_n = \frac{n!}{n^n}$ . Найдем отношение соседних членов:

$$x_{n+1} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \quad (191)$$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{n+1}{\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \leq 1 \quad (192)$$

Значит последовательность  $x_n$  убывает и ограничена снизу нулём. Пусть  $a = \lim x_n = \lim x_{n+1}$ . Предположив, что  $a \neq 0$  получим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1 \quad (193)$$

С другой стороны,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1. \quad (194)$$

В силу противоречия получаем  $a = 0$  и доказываем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0$$

Получили «иерархию роста»:  $x^k \rightarrow q^n \rightarrow n! \rightarrow n^n$ . В последнем утверждении было использовано число  $e$ .

### B.1.9. Число $e$

*Определение.* Числом  $e$  называется следующий предел последовательности

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad (195)$$

#### B.1.9.1. Первое доказательство существования $e$

□ Рассмотрим последовательность  $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ . Согласно неравенству Бернулли:

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \geq 1 + \frac{n+1}{n} > 2 \quad (196)$$

То есть последовательность  $x_n$  ограничена снизу. Теперь посмотрим на отношение соседних членов:

$$\begin{aligned} \frac{x_{n+1}}{x_n} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}} = \\ &= \frac{n+2}{n+1} \cdot \left(\frac{n^2 + 2n}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \end{aligned} \quad (197)$$

Оценим величину, обратную ко второму множителю по неравенству Бернулли:

$$\left(\frac{n^2 + 2n + 1}{n^2 + 2n}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n^2 + 2n}\right)^{n+1} \geq 1 + \frac{n+1}{n^2 + 2n} \quad (198)$$

То есть

$$\left(\frac{n^2 + 2n + 1}{n^2 + 2n}\right)^{n+1} \geq \frac{n^2 + 3n + 1}{n^2 + 2n} \quad (199)$$

Перевернём это неравенство:

$$\left( \frac{n^2 + 2n}{n^2 + 2n + 1} \right)^{n+1} \leq \frac{n^2 + 2n}{n^2 + 3n + 1} \quad (200)$$

Получаем оценку для отношения соседних членов:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{n^2 + 2n}{n^2 + 3n + 1} = \frac{n^3 + 4n^2 + 4n}{n^3 + 4n^2 + 4n + 1} < 1 \quad (201)$$

Итак, мы доказали, что последовательность  $x_n$  убывает и ограничена снизу числом 2, поэтому по теореме Вейерштрасса у неё есть предел

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad (202)$$

И в силу последнего равенства, этот же предел есть у исходной последовательности из определения числа  $e$ . ■

### B.1.9.2. Второе доказательство существования $e$

□ Будем исследовать последовательность  $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  напрямую. Согласно биномию Ньютона:

$$a_n = \sum_{k=0}^n C_n^k \left(\frac{1}{n}\right)^k = 1 + C_n^1 \cdot \frac{1}{n} + \dots + C_n^n \cdot \frac{1}{n^n} \quad (203)$$

$$a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k \left(\frac{1}{n+1}\right)^k = 1 + C_{n+1}^1 \cdot \frac{1}{n+1} + \dots + C_{n+1}^{n+1} \cdot \frac{1}{(n+1)^{n+1}} \quad (204)$$

Сравним  $k$  — е слагаемые в этих двух суммах, имея в виду, что

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{(n-k+1) \cdot \dots \cdot n}{k!}. \quad (205)$$

$$\begin{aligned} C_n^k \cdot \frac{1}{n^k} &= \frac{1}{k!} \cdot \frac{n-k+1}{n} \cdot \frac{n-k+2}{n} \cdot \dots \cdot \frac{n}{n} \leq \\ &\leq \frac{1}{k!} \cdot \frac{n-k+2}{n+1} \cdot \frac{n-k+3}{n+1} \cdot \dots \cdot \frac{n+1}{n+1} = C_{n+1}^k \cdot \frac{1}{(n+1)^k} \end{aligned} \quad (206)$$

Следовательно,  $a_{n+1} \geq a_n$ , так как каждое слагаемое в  $a_{n+1}$  не меньше соответствующего слагаемого в  $a_n$ . Таким образом, последовательность  $a_n$  возрастает. Теперь докажем, что она ограничена сверху:

$$a_n = \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot \frac{1}{n^k} = 1 + 1 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \cdot \frac{1}{n^3} + \dots$$

$$+ \frac{1}{n^n} \leq 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots + \frac{1}{n!} \leq 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}$$
(207)

Мы смогли оценить  $a_n$  сверху суммой двойки и геометрической прогрессии, которая точно меньше 1. Поэтому получаем:

$$a_n < 3 \quad (208)$$

По теореме Вейерштрасса, возрастающая ограниченная сверху последовательность имеет предел. Обозначим его  $e$ . ■

Из этих двух доказательств мы установили, что

$$2 < e < 3 \quad (209)$$

### B.1.10. Подпоследовательность

*Определение 1.* Пусть задана последовательность  $\{x_n\}$ . Возьмём возрастающую последовательность натуральных чисел:  $\{n_k\} \uparrow$  и  $n_k \in \mathbb{N} \forall k \in \mathbb{N}$ . Тогда последовательность  $\{x_{n_k}\}$  называется подпоследовательностью последовательности  $\{x_n\}$ .

*Определение 2.* Число  $a$  называется частичным пределом последовательности  $\{x_n\}$ , если существует такая подпоследовательность  $\{x_{n_k}\}$ , что

$$a = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} \quad (210)$$

*Определение 2'.* Число  $a$  называется частичным пределом последовательности  $\{x_n\}$ , если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \forall M \in \mathbb{N} : |\{x_n \mid x_n \in u_\varepsilon(a)\}| > M \quad (211)$$

*Утверждение.* Определения 2 и 2' эквивалентны.

*Доказательство.* □

1.  $2 \Rightarrow 2'$ . По определению предела последовательности,  $\forall \varepsilon > 0$ , начиная с некоторого номера  $n_k$ , все члены последовательности будут лежать в  $\varepsilon$ -окрестности  $a$ . Значит, за пределами  $\varepsilon$ -окрестности лежит только конечное число членов исходной последовательности  $\{x_n\}$ , что и утверждает  $2'$ .
2.  $2' \Rightarrow 2$ . Рассмотрим окрестность точки  $a$  с  $\varepsilon = 1$ . Возьмём произвольный член последовательности  $x_n$  с номером  $n_1$ , такой, что  $x_{n_1} \in u_\varepsilon(a)$ . Теперь рассмотрим более малую окрестность,  $\varepsilon = \frac{1}{2}$ . Выберем в ней такой  $x_{n_2}$ , что  $n_2 > n_1$ . Далее

аналогично выбираем  $x_{n_3}$  в  $\frac{1}{3}$ -окрестности  $a$  такой, что  $n_3 > n_2$ , и так далее. То есть, мы строим подпоследовательность

$\{x_{n_k}\}$ , такую что

$$a - \frac{1}{k} < x_{n_k} < a + \frac{1}{k} \quad (212)$$

При  $k \rightarrow \infty$  получаем по теореме о двух милиционерах, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a. \quad (213)$$

Что и требовалось доказать. ■

#### B.1.10.1. Теорема Больцано-Вейерштрасса

*Теорема Больцано-Вейерштрасса.* Каждая ограниченная последовательность имеет сходящуюся подпоследовательность.

*Доказательство.* □ Пусть последовательность  $\{x_n\}$  ограничена, тогда все члены последовательности лежат на отрезке  $[m_1, M_1]$ . Если разбить данный отрезок пополам, то хотя бы на одном из них будет бесконечное количество членов  $\{x_n\}$ . Действительно, если это не так, то на обоих подотрезках лежит конечное число членов, что противоречит ограниченности  $\{x_n\}$ . Поделим пополам отрезок  $[m, M]$  и выберем тот отрезок  $[m_2, M_2] \subset [m_1, M_1]$ , на котором лежит бесконечное число членов. И так далее, каждый следующий отрезок  $[m_k, M_k]$  вложен в предыдущий и имеет в два раза меньшую длину.

Полученная конструкция есть *система стягивающихся отрезков*. По теореме Кантора, у всех этих отрезков есть только одна общая точка. Обозначим её  $a$ . Пусть  $x_{n_k} \in [m_k, M_k]$ , так как на каждом отрезке бесконечно много членов, то последовательность  $\{n_k\}$  можно сделать возрастающей.

Для каждого члена подпоследовательности  $x_{n_k}$  выполняется неравенство:

$$|x_{n_k} - a| < \frac{M_1 - m_1}{2^{k-1}} \quad (214)$$

Что равносильно двойному неравенству:

$$a - \frac{M_1 - m_1}{2^{k-1}} < x_{n_k} < a + \frac{M_1 - m_1}{2^{k-1}} \quad (215)$$

При стремлении  $k \rightarrow \infty$  получаем по теореме о промежуточной последовательности, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a. \quad (216)$$

Таким образом, мы явно построили сходящуюся подпоследовательность ограниченной последовательности и теорема доказана. ■

### B.1.11. Критерий Коши сходимости числовых последовательностей

*Определение.* Последовательность  $\{x_n\}$  называется *фундаментальной*, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall m, n > N : |x_n - x_m| < \varepsilon \quad (217)$$

*Критерий Коши.* Последовательность  $\{x_n\}$  сходится тогда и только тогда, когда она является фундаментальной.

*Доказательство.* □ Докажем каждое утверждение по отдельности.

1. сход.  $\Rightarrow$  фунд. По определению предела,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : |x_n - a| < \varepsilon \quad (218)$$

Но тогда, начиная с  $N$ , для всех  $m, n \geq N$ , поскольку  $x_n, x_m \in u_\varepsilon(a)$ , выполняется неравенство

$$|x_n - x_m| < 2\varepsilon, \quad (219)$$

что и означает, что последовательность является фундаментальной.

2. фунд.  $\Rightarrow$  сход. Сначала докажем, что из фундаментальности следует ограниченность. Пусть  $\{x_n\}$  фундаментальна, тогда для фиксированного  $\varepsilon > 0$ , и любого фиксированного номера  $m \geq N$ , все члены с номерами  $n \geq N$  лежат в интервале  $(x_m - \varepsilon, x_m + \varepsilon)$ . Поскольку вне интервала лежит только конечное число членов, то последовательность  $\{x_n\}$  ограничена.

По теореме Больцано-Вейерштрасса, существует сходящаяся подпоследовательность  $\{x_{n_k}\}$ , пусть её предел равен  $a$ . Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall k \geq n_\varepsilon : |x_{n_k} - a| < \varepsilon \quad (220)$$

Возьмём любой член  $x_m$  такой, что  $m \geq n_\varepsilon$ . Мы знаем, что  $\forall n \geq \max\{n_\varepsilon, N\}$ :

$$|x_n - x_m| < \varepsilon \quad (221)$$

В частности и для  $n = n_k$ . Тогда получаем

$$|x_m - a| \leq |x_{n_k} - a| + |x_{n_k} - x_m| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon \quad (222)$$

И это выполняется для любого  $\varepsilon > 0$ , начиная с некоторого номера для любых  $m$ , поэтому последовательность  $\{x_n\}$  сходится к  $a$ .

■

## B.2. Предел функции

*Определение.* Проколотой  $\varepsilon$ -окрестностью точки  $x$  называется множество

$$\dot{u}_\varepsilon(x) = (x - \varepsilon, x) \cup (x, x + \varepsilon) \quad (223)$$

### B.2.1. Определение предела по Коши

Пусть функция  $f$  определена в некоторой проколотой окрестности точки  $x$ :  $\dot{u}(x)$ .

*Определение.* Число  $A$  называется пределом функции  $f$  в точке  $a$ , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in \dot{u}_\delta(a) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon \quad (224)$$

### B.2.2. Определение предела по Гейне

Пусть функция  $f$  определена в некоторой проколотой окрестности точки  $x$ :  $\dot{u}(x)$ .

*Определение.* Число  $A$  называется пределом функции  $f$  в точке  $a$ , если

$$\forall \{x_n\} : x_n \in \dot{u}(a) : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A \quad (225)$$

### B.2.3. Эквивалентность определений Коши и Гейне

*Утверждение.* Определения предела по Коши и по Гейне эквивалентны.

*Доказательство.*  $\square$  Докажем две импликации:

1. [Коши  $\Rightarrow$  Гейне]. Пусть мы знаем, что существует предел по Коши, тогда

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \quad (226)$$

есть то же самое, что и

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in \dot{u}_\delta(a) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon \quad (227)$$

Запишем, что  $x_n \rightarrow a$ , если  $x_n \in \dot{u}(a)$ :

$$\forall \delta > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : 0 < |x_n - a| < \delta \quad (228)$$

Объединяя эти два утверждения, получим, что

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : |f(x_n) - A| < \varepsilon \quad (229)$$

Итак, мы получили, что если  $x_n \in \dot{u}(a)$  и  $x_n \rightarrow a$ , то  $f(x_n) \rightarrow A$ , что и требовалось доказать.

2. [Гейне  $\Rightarrow$  Коши]. Предположим, что определение по Гейне выполнено, а определение по Коши – нет. Запишем отрицание определения по Коши:

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 : \exists x \in \dot{u}_\delta(a) \Rightarrow |f(x) - A| \geq \varepsilon \quad (230)$$

Возьмём  $\delta = \frac{1}{n}$ :

$$\exists \varepsilon > 0 : \exists x_n : 0 < |x_n - a| < \frac{1}{n} \Rightarrow |f(x_n) - A| \geq \frac{1}{n} \quad (231)$$

Из  $0 < |x_n - a| < \frac{1}{n}$  по теореме о промежуточной последовательности следует, что  $\lim x_n = a$  и  $x_n \neq a$ . Тогда по определению предела по Гейне получаем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A. \quad (232)$$

Но, из (231) мы знаем, что  $\exists \varepsilon > 0$ , что  $|f(x_n) - A| \geq \varepsilon$ , что противоречит тому, что  $A = \lim f(x_n)$ . Следовательно, если верно определение по Коши, то верно определение по Гейне.

Что и требовалось доказать. ■

#### B.2.4. Теорема о промежуточной функции

*Теорема.* Пусть функции  $f, g, h$  определены в  $\dot{U}_\varepsilon(a)$  и  $\forall x \in \dot{U}_\varepsilon(a)$  :

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \quad (233)$$

и существуют пределы:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = A. \quad (234)$$

Тогда

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = A \quad (235)$$

*Доказательство.* □ Рассмотрим любую последовательность  $\{x_n\}$ , такую что

$$\forall \{x_n\} : x_n \in \dot{U}_\varepsilon(a) : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a. \quad (236)$$

Определим для неё последовательности:

$$f_n = f(x_n), g_n = g(x_n), h_n = h(x_n). \quad (237)$$

Так как функции  $f$  и  $h$  стремятся к  $A$  при стремлении  $x$  к  $a$ , то по определению предела по Гейне имеем:

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n \quad (238)$$

В силу неравенства (233) получаем, что

$$f_n \leq g_n \leq h_n \quad (239)$$

И, наконец, по теореме о промежуточной последовательности, получаем, что  $g_n \rightarrow A$ , что согласно определению предела функции по Гейне, означает

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = A \quad (240)$$

Что и требовалось доказать. ■

### B.2.5. Арифметические свойства пределов функции

*Теорема.* Пусть для функций  $f$  и  $g$  выполняются условия

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \text{ и } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = B \quad (241)$$

Тогда

- Предел суммы равен сумме пределов

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = A + B \quad (242)$$

- Предел произведения равен произведению пределов

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B \quad (243)$$

- Если  $\forall x \in \dot{U}(a) : g(x) \neq 0$  и  $B \neq 0$ , то предел частного равен частному пределов

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B} \quad (244)$$

*Доказательство:*  $\square \forall \{x_n\} : x_n \in \dot{U}(a) :$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A \quad (245)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = B \quad (246)$$

Введём последовательности  $f_n = f(x_n)$ ,  $g_n = g(x_n)$  и разберёмся с каждым пунктом.

- Пользуясь тем, что предел суммы последовательностей равен сумме пределов, получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f_n + g_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n + \lim_{n \rightarrow \infty} g_n = A + B \quad (247)$$

Но по определению предела по Гейне отсюда получаем, что

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = A + B \quad (248)$$

- Пользуясь тем, что предел произведения последовательностей равен произведению пределов, получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f_n \cdot g_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} g_n = A \cdot B \quad (249)$$

Но по определению предела по Гейне отсюда получаем, что

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B \quad (250)$$

3. Пользуясь тем, что предел частного последовательностей равен частному пределов и  $B \neq 0$ , получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{f_n}{g_n} \right) = \frac{\lim f_n}{\lim g_n} = \frac{A}{B} \quad (251)$$

Но по определению предела по Гейне отсюда получаем, что

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}. \quad (252)$$

Что и требовалось доказать. ■

*Примечание.* Свойство предела разности, аналогичное свойству предела суммы, можно получить либо аналогично, либо применив пункты 1 и 2 теоремы об арифметических свойствах пределов функции.

#### B.2.6. Критерий Коши существования предела функции

*Теорема (критерий Коши).* Пусть функция  $f$  определена в  $\dot{U}(x_0)$ ,  $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ . Предел функции  $f$  в точке  $x_0$  существует тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x', x'' \in \dot{U}_\delta(x_0) : |f(x') - f(x'')| < \varepsilon. \quad (253)$$

*Доказательство.* □

1.  $\Rightarrow$ . Пусть  $f(x) \rightarrow A$  при  $x \rightarrow x_0$ . Запишем дважды определение предела по Коши:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x', x'' \in \dot{U}_\delta(x_0) :$$

$$|f(x') - A| < \varepsilon \quad (254)$$

$$|f(x'') - A| < \varepsilon \quad (255)$$

Отсюда получаем, что

$$|f(x') - f(x'')| \leq |f(x') - A| + |f(x'') - A| < 2\varepsilon \quad (256)$$

что и есть условие Коши.

2.  $\Leftarrow$ . Пусть мы знаем, что

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x', x'' \in \dot{U}_\delta(x_0) : |f(x') - f(x'')| < \varepsilon. \quad (257)$$

Возьмём произвольную последовательность  $x_n$  такую, что  $\lim x_n = x_0$  и  $x_n \in \dot{U}(x_0)$ . Тогда по определению предела последовательности

$$\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : x_n \in \dot{U}_\delta(x_0) \quad (258)$$

Согласно условию Коши, получаем, что

$$\forall m, n \geq N : |f(x_m) - f(x_n)| < \varepsilon. \quad (259)$$

Значит, согласно [критерию Коши сходимости числовых последовательностей](#), мы получаем, что  $\{f(x_n)\}$  сходится, пусть

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \quad (260)$$

Теперь докажем, что для любой последовательности  $\{x_n\} : f(x_n) \rightarrow A$ . Предположим противное: пусть для некоторой последовательности  $\{x'_n\} : x'_n \in \dot{U}(x_0)$  и  $f(x'_n) \rightarrow B \neq A$ . Тогда для последовательности  $\{x_1, x'_1, x_2, x'_2, \dots\}$  мы получим, что она сходится к  $x_0$ . Рассмотрим последовательность

$$\{f(x_1), f(x'_1), f(x_2), f(x'_2), \dots\} \quad (261)$$

Она расходится, поскольку у неё есть два частичных предела  $A$  и  $B$ , которые не равны друг другу. Но она должна сходиться, поскольку мы доказали выше, что любая такая последовательность сходится. Получили противоречие, значит все последовательности  $\{x_n\}$ , сходящиеся к  $x_0$ , все члены которых лежат в прошлой окрестности  $x_0$ , имеют один и тот же предел  $A$ . Согласно определению предела по Гейне,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \quad (262)$$

Что и требовалось доказать. ■

## B.3. Кратные интегралы

### B.3.1. Двойные интегралы

#### B.3.1.1. Определение двойного интеграла

Пусть тело ( $V$ ) в  $\mathbb{R}^3$  ограничено сверху поверхностью  $z = f(x, y)$ . С боков ограничено цилиндрической поверхностью с образующей, параллельной оси  $z$ , а снизу плоской фигурой  $D$  на плоскости  $z = 0$ . Требуется найти объём тела  $V$ .

Разобьём  $D$  на малые фигуры  $(\sigma_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Внутри каждой фигуры рассмотрим точку  $(\xi_i, \eta_i) \in \sigma_i$ . Тогда объём  $i$ -того столбика равен

$$|V_i| = f(\xi_i, \eta_i) \cdot |\sigma_i| \quad (263)$$

Приближённо можно написать, что

$$|V| \approx S_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \cdot |\sigma_i| \quad (264)$$

Полученная сумма называется интегральной. Будем неограниченно увеличивать мощность разбиения:  $n \rightarrow \infty$ . При стремлении максимального диаметра фигуры  $\sigma_i$  к нулю:

$$\lambda = \max_{i=1, \dots, n} d(\sigma_i) \quad (265)$$

получим, что объём  $|V|$  равен пределу

$$|V| = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \lambda \rightarrow 0}} \left[ \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \cdot |\sigma_i| \right] \quad (266)$$

*Определение.* Число  $I$  называется двойным интегралом функции  $f(x, y)$  по области  $D$ , если  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall$  разбиений  $D$ , таких, что максимальный диаметр фигур  $\sigma_i$  меньше  $\delta$ , выполняется  $|I - S_n| < \varepsilon$ , где  $S_n$  - интегральная сумма. Обозначается

$$I = \iint_D f(x, y) dx dy \quad (267)$$

*Условие существования двойного интеграла.* Если функция  $f$  непрерывна на ограниченной замкнутой области  $D$ , то она интегрируема на  $D$ .

#### B.3.1.2. Суммы Дарбу

Пусть область  $D$  разбита на конечное число подмножеств  $\sigma_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Обозначим

$$M_i = \sup_{\sigma_i} f(x, y) \quad (268)$$

$$m_i = \inf_{\sigma_i} f(x, y) \quad (269)$$

1. Верхняя сумма Дарбу:

$$S = \sum_{i=1}^n M_i \cdot |\sigma_i| \quad (270)$$

2. Нижняя сумма Дарбу:

$$s = \sum_{i=1}^n m_i \cdot |\sigma_i| \quad (271)$$

Для любого разбиения справедливо, что

$$s \leq S_n \leq S \quad (272)$$

Свойства сумм Дарбу:

1. При добавлении новых фигур  $\sigma_i$  и линий в разбиение  $D$  нижняя сумма Дарбу не убывает, а верхняя — не возрастает.
2. Любая нижняя сумма Дарбу не превосходит любой верхней суммы Дарбу, даже для разных разбиений.

*Определение.* Колебанием функции  $f(x, y)$  на области  $D$  называется число

$$S - s = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \cdot |\sigma_i| \quad (273)$$

**Критерий интегрируемости Римана.** Для того, чтобы ограниченная функция  $f$  была интегрируема по области  $D$  необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} S - s = 0 \quad (274)$$

### B.3.1.3. Свойства двойного интеграла

Пусть функции  $f(x, y)$  и  $g(x, y)$  интегрируемы в  $D$ .

1. Линейность.  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$  :

$$\iint_D (\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)) d\sigma = \alpha \iint_D f(x, y) d\sigma + \beta \iint_D g(x, y) d\sigma \quad (275)$$

2. Аддитивность по области.  $\forall D_1, D_2 : (D_1 \cup D_2 = D) \wedge (\text{int}(D_1) \cap \text{int}(D_2) = \emptyset) :$

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma + \iint_{D_2} f(x, y) d\sigma \quad (276)$$

3. Интегрирование неравенств. Если  $f(x, y) \leq g(x, y)$ , то

$$\iint_D f(x, y) d\sigma \leq \iint_D g(x, y) d\sigma \quad (277)$$

3.1. Следствие. Если  $m \leq f(x, y) \leq M$ , то

$$m \cdot |D| \leq \iint_D f(x, y) d\sigma \leq M \cdot |D| \quad (278)$$

3.1. Следствие.

$$\left| \iint_D f(x, y) d\sigma \right| \leq \iint_D |f(x, y)| d\sigma \quad (279)$$

4. Теорема о среднем. Если функция  $f(x, y)$  непрерывна в замкнутой связной области  $D$ , то  $\exists(\xi, \eta) \in D$  :

$$f(\xi, \eta) = \frac{1}{|D|} \iint_D f(x, y) d\sigma \quad (280)$$

*Доказательство.* По теореме Вейерштрасса, на связной замкнутой области  $D$  функция  $f$  ограничена, поэтому  $\exists m, M \in \mathbb{R} : \forall (x, y) \in D : m \leq f(x, y) \leq M$ . Используя следствие (3.1), можно написать, что

$$m \leq \frac{1}{|D|} \iint_D f(x, y) d\sigma \leq M \quad (281)$$

По теореме Больцано-Коши (о промежуточном значении), непрерывная функция  $f$  принимает на  $D$  все значения между  $m$  и  $M$ , в частности  $\exists(\xi, \eta) \in D$ , для которой выполнено требуемое. ■

5. Интеграл от единицы.

$$\iint_D dx dy = |D| \quad (282)$$

## B.4. Гамма-функция и бета-функция

### B.4.1. Гамма-функция

*Определение.* Гамма-функция  $\Gamma(x)$  определяется для всех положительных вещественных чисел  $x > 0$  интегралом

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \quad (283)$$

#### B.4.1.1. Свойства гамма-функции

1. Основное свойство гамма-функции.

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \quad (284)$$

*Доказательство.*  $\square$  Подставим  $(x+1)$  в гамма-функцию:

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty t^x e^{-t} dt \quad (285)$$

Интегрируем по частям:

$$u = t^x \Rightarrow du = xt^{x-1} dt \quad (286)$$

$$dv = e^{-t} dt \Rightarrow v = -e^{-t} \quad (287)$$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty t^x e^{-t} dt &= -t^x e^{-t} \Big|_0^\infty + x \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt = \\ &= -\lim_{t \rightarrow \infty} t^x e^{-t} + x \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt = 0 + x\Gamma(x) = x\Gamma(x) \end{aligned} \quad (288)$$

■

2. Значение гамма-функции в натуральных числах.  $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\Gamma(n) = (n-1)! \quad (289)$$

*Доказательство.*  $\square$  Сначала найдём  $\Gamma(1)$ :

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty t^{1-1} e^{-t} dt = \int_0^\infty e^{-t} dt = -e^{-t} \Big|_0^\infty = 1 \quad (290)$$

Используя основное свойство гамма-функции, находим:

$$\Gamma(2) = 1 \cdot \Gamma(1) = 1 = 1! \quad (291)$$

$$\Gamma(3) = 2 \cdot \Gamma(2) = 2 = 2! \quad (292)$$

Теперь строго обобщим по индукции: пусть верно, что  $\Gamma(n) = (n - 1)!$ . Докажем, что верно  $\Gamma(n + 1) = n!$ . По основному свойству гамма-функции:  $\Gamma(n + 1) = n\Gamma(n) = n(n - 1)! = n!$ . Поскольку база индукции проверена, то требуемое доказано. ■

3. Ещё одно интегральное представление.

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty 2t^{2x-1}e^{-t^2}dt \quad (293)$$

*Доказательство.* □ Сделаем в интеграле  $\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$  замену:

$$u = \sqrt{t} \Rightarrow \begin{cases} t \rightarrow 0 \Rightarrow u \rightarrow 0 \\ t \rightarrow \infty \Rightarrow u \rightarrow \infty \end{cases} \quad (294)$$

$$t = u^2 \Rightarrow dt = 2udu \quad (295)$$

$$\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt = \int_0^\infty (u^2)^{x-1}e^{-u^2} \cdot 2udu = \int_0^\infty 2u^{2x-1}e^{-u^2}du \quad (296)$$

Поскольку  $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$ , то требуемое доказано. ■

4. Значения в положительных полуцелых аргументах.  $\forall n \in \mathbb{N}_0$ :

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{4^n n!} \sqrt{\pi} \quad (297)$$

*Доказательство.* □ Используем факт (325) о том, что  $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ . Теперь, используя основное свойство гамма-функции, найдём значение в произвольной полуцелой точке:

$$\begin{aligned} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{2n - 1}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \\ &= \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n - 1)}{2^n} \cdot \sqrt{\pi} = \frac{(2n - 1)!!}{2^n} \sqrt{\pi} = \frac{(2n)!}{4^n n!} \sqrt{\pi}. \blacksquare \end{aligned} \quad (298)$$

5. Свойство дополнения.  $\forall x \in (0, 1)$ :

$$\Gamma(x) \cdot \Gamma(1 - x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)} \quad (299)$$

6. Логарифмическая выпуклость гамма-функции.  $\forall x_1, \dots, x_n > 0, \forall \alpha_1, \dots, \alpha_n \in [0, 1], \sum \alpha_i = 1$ :

$$\Gamma\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right) \leq \prod_{i=1}^n [\Gamma(x_i)]^{\alpha_i} \quad (300)$$

*Доказательство.*  $\square$

$$\ln(\Gamma(x)) = \ln\left(\int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt\right) = \ln\left(\int_0^\infty f(t; x) dt\right) \quad (301)$$

$$\frac{d \ln(\Gamma(x))}{dx} = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} \quad (302)$$

$$\frac{d^2 \ln(\Gamma(x))}{dx^2} = \frac{\Gamma''(x) \cdot \Gamma(x) - [\Gamma'(x)]^2}{(\Gamma(x))^2} \quad (303)$$

Сейчас мы будем доказывать, что числитель этого выражения положителен для всех  $x > 0$ .

$$\Gamma'(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} (\ln t) dt \quad (304)$$

$$\Gamma''(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} (\ln t)^2 dt \quad (305)$$

Введём линейно независимые функции  $f$  и  $g$  на  $(0, \infty)$ :

$$f(t) = t^{\frac{x-1}{2}} e^{-\frac{t}{2}} \quad (306)$$

$$g(t) = t^{\frac{x-1}{2}} e^{-\frac{t}{2}} \ln t \quad (307)$$

Запишем неравенство Коши-Буняковского для интегралов:

$$\left[ \int_0^\infty f(t)g(t) dt \right]^2 \leq \left( \int_0^\infty f(t)^2 dt \right) \cdot \left( \int_0^\infty g(t)^2 dt \right) \quad (308)$$

$$\left[ \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} (\ln t) dt \right]^2 \leq \left( \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \right) \cdot \left( \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} (\ln t)^2 dt \right) \quad (309)$$

Остаётся заметить, что слева стоит квадрат производной гамма-функции, а справа произведение гамма-функции и её второй производной. Итак, верно неравенство

$$\Gamma''(x) \cdot \Gamma(x) - [\Gamma'(x)]^2 > 0 \quad (310)$$

Следовательно, вторая производная логарифма гамма-функции положительна, значит логарифм гамма-функции выпуклая функция, а значит для неё верно неравенство Йенсена.  $\forall x_1, \dots, x_n > 0, \forall \alpha_1, \dots, \alpha_n \in [0, 1], \sum \alpha_i = 1$ :

$$\ln \left( \Gamma \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \right) \right) \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i \ln(\Gamma(x_i)) \quad (311)$$

Пользуясь монотонностью экспоненты, получаем исходное неравенство, потенцируя обе части.

$$\Gamma \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \right) \leq \prod_{i=1}^n [\Gamma(x_i)]^{\alpha_i} \quad (312)$$

Что и требовалось доказать. ■

#### B.4.2. Бета-функция

*Определение.* Бета-функция  $B(x, y)$  определяется для всех положительных вещественных чисел  $x > 0, y > 0$  интегралом

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt \quad (313)$$

##### B.4.2.1. Свойства бета-функции

Альтернативное интегральное представление можно получить, если сделать замену  $t = \sin^2 u$ . Тогда  $(1-t) = \cos^2 u$  и  $dt = 2 \sin u \cos u$ . При  $t = 0 \Rightarrow u = 0$  и  $t = 1 \Rightarrow u = \frac{\pi}{2}$ .

Итак,

$$B(x, y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \cdot (\sin u)^{2x-1} (\cos u)^{2y-1} du \quad (314)$$

Ясно, что бета-функция обладает симметричностью относительно перестановки аргументов, поскольку на  $[0, 1]$  графики функций  $t$  и  $(1-t)$  симметричны относительно  $t = \frac{1}{2}$ , и значит при транспозиции аргументов значение интеграла не меняется. Ана-

логичный вывод можно получить при анализе тригонометрической интегральной формы.

$$B(x, y) = B(y, x) \quad (315)$$

Найдем значение  $B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ :

$$B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \cdot (\sin t)^{2 \cdot \frac{1}{2} - 1} (\cos t)^{2 \cdot \frac{1}{2} - 1} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 dt = \pi \quad (316)$$

#### B.4.3. Связь гамма-функции и бета-функции

*Теорема.* Для любых  $a, b > 0$  справедливо

$$B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} \quad (317)$$

*Доказательство.*  $\square$

$$\Gamma(a) = \int_0^{\infty} 2x^{2a-1} e^{-x^2} dx \quad (318)$$

$$\Gamma(b) = \int_0^{\infty} 2y^{2b-1} e^{-y^2} dy \quad (319)$$

$$\Gamma(a) \cdot \Gamma(b) = \int_0^{\infty} y^{b-1} e^{-y} dy \int_0^{\infty} x^{a-1} e^{-x} dx \quad (320)$$

Произведение этих интегралов можно воспринимать как повторный, поэтому запишем теперь его как двойной по области  $D = \{(x, y) \mid x, y \geq 0\}$ .

$$\Gamma(a) \cdot \Gamma(b) = \iint_D 4x^{2a-1} y^{2b-1} e^{-x^2-y^2} dx dy \quad (321)$$

Перейдём в полярные координаты:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ dx dy = r dr d\varphi \end{cases} \quad (322)$$

$$\begin{aligned}\Gamma(a) \cdot \Gamma(b) &= \iint_D 4r^{2a+2b-1} (\cos \varphi)^{2a-1} (\sin \varphi)^{2b-1} e^{-r^2} dr d\varphi = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2(\cos \varphi)^{2a-1} (\sin \varphi)^{2b-1} d\varphi \int_0^{\infty} 2r^{2(a+b)-1} e^{-r^2} dr\end{aligned}\tag{323}$$

Поскольку границы внутреннего интеграла не зависят от  $\varphi$ , то можно считать данную запись произведением двух отдельных интегралов! Но интеграл по  $\varphi$ , согласно (314), есть бета-функция, а интеграл по  $r$  — гамма-функция. Окончательно имеем:

$$\Gamma(a) \cdot \Gamma(b) = B(b, a) \cdot \Gamma(a+b) \Rightarrow B(b, a) = \frac{\Gamma(a) \cdot \Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}\tag{324}$$

■

*Следствие 1.* Из этого соотношения так же видно, что  $B(a, b) = B(b, a)$ .

*Следствие 2.* Гамма-функция в  $\frac{1}{2}$  и интеграл Эйлера-Пуассона.

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}\tag{325}$$

*Доказательство.* □ Запишем, используя связь (317):

$$B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)}\tag{326}$$

Учитывая, что  $B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \pi$  и  $\Gamma(1) = 1$ , получим:

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = \pi\tag{327}$$

Следовательно,  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ . Но с другой стороны,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx\tag{328}$$

■

## B.5. Числовые ряды

*Определение.* Выражение  $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$  называют **рядом с общим членом**  $a_n$  и обозначают

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (329)$$

*Определение.* Элементы последовательности  $\{a_n\}$  называются членами ряда.

*Определение.*  $n$ -ой частичной суммой ряда с общим членом  $\{a_i\}$  называется сумма

$$s_n = \sum_{i=1}^n a_i \quad (330)$$

*Определение.* Если последовательность частичных сумм  $\{s_n\}$  для ряда с общим членом  $\{a_n\}$  имеет предел, то ряд называется **сходящимся**. Если последовательность частичных сумм предела не имеет, то ряд называется **расходящимся**.

*Определение.* Суммой ряда называется предел последовательности его частичных сумм.

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n \quad (331)$$

Если ряд сходится, то найдя его сумму, пишут

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s \quad (332)$$

Остатком ряда называется разность между  $n$ -й частичной суммой и суммой ряда.

$$r_n = s - s_n \quad (333)$$

Свойства рядов:

1. Отбрасывание конечного количества членов ряда не влияет на его сходимость.
2. Для сходящегося ряда остаток стремится к нулю при  $n \rightarrow \infty$ .
3. Если все члены сходящегося ряда умножить на константу  $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , то ряд из умноженных членов так же сходится, а его сумма равна  $c \cdot s$ .
4. Если ряды  $A = (a_1 + a_2 + \dots)$  и  $B = (b_1 + b_2 + \dots)$  сходятся, то ряд, для которого  $c_n = a_n + b_n$

$$C = c_1 + c_2 + \dots \quad (334)$$

тоже сходится, причём  $C = A + B$ .

### B.5.1. Необходимый признак сходимости ряда

*Теорема(необходимый признак сходимости ряда).* Если ряд сходится, то его общий член стремится к нулю при неограниченном возрастании  $n$ .

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ сходится} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \quad (335)$$

*Доказательство.*  $\square$  Пусть для сходящегося ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (336)$$

определенна последовательность частичных сумм  $\{s_n\}$ . Пусть

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n \quad (337)$$

Заметим, что  $a_n = s_n - s_{n-1}$ . Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n - s_{n-1}) = s - s = 0 \quad (338)$$

Что и требовалось доказать. ■

### B.5.2. Признаки сходимости положительных рядов

Пусть, начиная с некоторого номера  $N$ ,  $\forall n \geq N : a_n \geq 0$ . Тогда ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  назовём *положительным*.

*Основная теорема сходимости.* Положительный ряд всегда имеет сумму. Если последовательность частичных сумм ограничена сверху, то ряд сходится, иначе расходится.

*Доказательство.*  $\square$  Поскольку  $a_n \geq 0$  начиная с некоторого номера  $N$ , то  $\forall n \geq N : s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geq s_n$ . Следовательно последовательность  $\{s_n\}$  монотонно не убывает. Так как по условию теоремы  $\{s_n\}$  ограничена сверху, то у неё есть предел  $\Rightarrow$  ряд из членов  $\{a_n\}$  сходится. Если же последовательность  $\{s_n\}$  не ограничена сверху, то у неё нет предела и ряд расходится. ■

#### B.5.2.1. Теоремы сравнения

*Теорема 1.* Пусть даны два положительных ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (339)$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad (340)$$

Если  $\forall n \geq N : a_n \leq b_n$ , то

- Из сходимости ряда  $\{b_n\}$  следует сходимость ряда  $\{a_n\}$ .
- Из расходимости ряда  $\{a_n\}$  следует расходимость ряда  $\{b_n\}$ .

*Доказательство.*  $\square$  Не умаляя общности рассуждений считаем  $0 \leq a_n \leq b_n \forall n \in \mathbb{N}$ , так как конечное число слагаемых ряда можно отбросить. Пусть  $A_n, B_n$  - частичные суммы рядов  $\{a_n\}$  и  $\{b_n\}$ . Если ряд  $\{b_n\}$  сходится, то по основной теореме о сходимости существует такая константа  $L$ , что

$$B_n \leq L \quad (341)$$

учитывая, что  $A_n \leq B_n$ , получаем  $A_n \leq L$ . Это и означает что ряд  $\{a_n\}$  сходится. ■

*Теорема 2.* Если существует предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{a_n}{b_n} \right) = K$  и при этом ( $0 \leq K \leq +\infty$ ), то

1. Если  $K < +\infty$ , то из сходимости  $\{b_n\}$  следует сходимость  $\{a_n\}$
2. Если  $K > 0$ , то из расходимости  $\{b_n\}$  следует расходимость  $\{a_n\}$
3. Если  $0 < K < +\infty$ , то ряды  $\{a_n\}$  и  $\{b_n\}$  сходятся и расходятся одновременно.

*Доказательство.*  $\square$

1. Пусть  $\sum b_n$  сходится и  $K < +\infty$ . Тогда по определению предела последовательности, для всех достаточно больших  $n \exists \varepsilon > 0$ , такой, что

$$\frac{a_n}{b_n} - K < \varepsilon \quad (342)$$

Следовательно,  $a_n < (K + \varepsilon)b_n$ . По первой теореме сравнения, из сходимости  $b_n$  следует сходимость  $a_n$ .

2. Пусть  $\sum b_n$  расходится и  $K > 0$ . Тогда  $\lim \frac{b_n}{a_n}$  обязательно конечен. Предположим, что ряд  $\sum a_n$  сходится, тогда по только что доказанному п. 1 ряд  $\sum b_n$  должен сходиться. Получили противоречие, и значит при расходимости  $\sum b_n$  ряд  $\sum a_n$  расходится.

Пересекая оба случая, получаем истинность пункта 3. ■

*Теорема 3.* Если для положительных рядов, начиная с некоторого номера, верно, что

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n} \quad (343)$$

,

то их сходимости  $\sum b_n$  следует сходимость  $\sum a_n$ , а из расходимости  $\sum a_n$  следует расходимость  $b_n$ .

*Доказательство.*  $\square$  Не умаляя общности можно сказать, что неравенство из условия теоремы верно для всех  $n \in \mathbb{N}$ . Тогда

$$\frac{a_2}{a_1} \leq \frac{b_2}{b_1}; \frac{a_3}{a_2} \leq \frac{b_3}{b_2}; \dots \frac{a_n}{a_{n-1}} \leq \frac{b_n}{b_{n-1}}. \quad (344)$$

Перемножим все эти неравенства и получим

$$\frac{a_n}{a_1} \leq \frac{b_n}{b_1} \Leftrightarrow a_n \leq \left( \frac{a_1}{b_1} \right) b_n \quad (345)$$

Это означает по первой теореме, что из сходимости  $b_n$  следует сходимость  $a_n$ , а из расходимости  $a_n$  следует расходимость  $b_n$ . ■

### B.5.2.2. Радикальный признак Коши

*Радикальный признак Коши.* Пусть  $0 < q < 1$ . Составим для ряда  $\sum a_n$  выражение

$$b_n = \sqrt[n]{a_n} \quad (346)$$

Если для достаточно больших  $n$  выполняется  $b_n < q$ , где постоянная  $q < 1$ , то ряд  $\sum a_n$  сходится. Если же  $b_n \geq 1$ , то ряд расходится.

*Доказательство.*  $\square$  геометрическая прогрессия  $\sum q^n$  сходится при  $q < 1$ . Сравним ряд  $\sum a_n$  с геометрической прогрессией. Если  $\sqrt[n]{a_n} < q$  для достаточно больших  $n$ , то

$$a_n < q^n \quad (347)$$

По первой теореме сравнения, ряд  $\sum a_n$  сходится. Если же, начиная с некоторого номера,  $a_n \geq 1$ , то либо из сравнения с расходящимся рядом  $(1 + 1 + 1 + \dots)$ , либо из нарушения необходимого признака сходимости, получаем, что ряд  $\sum a_n$  расходится.

*Радикальный признак Коши в предельной форме.* Пусть для положительного ряда  $\sum a_n$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l \quad (348)$$

1. Если  $l < 1$ , то ряд  $\sum a_n$  сходится.
2. Если  $l > 1$ , то ряд  $\sum a_n$  расходится.
3. Если  $l = 1$ , то ряд может как сходиться, так и расходиться.

*Доказательство.* □

1. Пусть  $l < 1$ . Возьмём такое  $\varepsilon > 0$ , что  $l + \varepsilon < 1$ . Тогда по определению предела, для достаточно больших  $n$  будет верно, что

$$\sqrt[n]{a_n} < l + \varepsilon < 1 \quad (349)$$

По радикальному признаку Коши ряд  $\sum a_n$  сходится.

2. Пусть теперь  $l > 1$ . Тогда существует такое  $q$ , что  $1 < q < l$ . По определению предела, для достаточно больших  $n$  будет верно, что

$$\sqrt[n]{a_n} \geq q \geq 1 \quad (350)$$

По радикальному признаку Коши ряд  $\sum a_n$  расходится. ■

#### B.5.2.3. Признак Даламбера

*Признак Даламбера.* Для положительного ряда  $\sum a_n$  определим величину

$$D_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} \quad (351)$$

Если для достаточно больших  $n$  выполнено  $D_n \leq q < 1$ , где  $q$  - постоянное число, то ряд сходится. Если же  $D_n \geq 1$ , то ряд расходится.

*Доказательство.* □

1. Пусть  $D_n \leq q < 1$  для достаточно больших  $n$ . Рассмотрим геометрическую прогрессию  $\sum q^n$ . Она сходится при  $q < 1$ . Сравним ряд  $\sum a_n$  с ней, имея в виду, что  $\frac{q^{n+1}}{q^n} = q$ .

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q = \frac{q^{n+1}}{q^n} \quad (352)$$

По третьей теореме сравнения, из сходимости ряда  $\sum q^n$  следует сходимость ряда  $\sum a_n$ .

2. Пусть теперь  $D_n \geq 1$  для достаточно больших  $n$ . Тогда либо из сравнения с расходящимся рядом  $(1 + 1 + 1 + \dots)$ , либо из нарушения необходимого признака сходимости, получаем, что ряд  $\sum a_n$  расходится. ■

*Признак Даламбера в предельной форме.* Пусть для положительного ряда  $\sum a_n$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{a_{n+1}}{a_n} \right) = D \quad (353)$$

1. Если  $D < 1$ , то ряд  $\sum a_n$  сходится.
2. Если  $D > 1$ , то ряд  $\sum a_n$  расходится.
3. Если  $D = 1$ , то ряд может как сходиться, так и расходиться.

*Доказательство.*  $\square$

1. Пусть  $D < 1$ . Возьмём такое  $\varepsilon > 0$ , что  $D + \varepsilon < 1$ . Тогда по определению предела, для достаточно больших  $n$  будет верно, что

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < D + \varepsilon < 1 \quad (354)$$

По признаку Даламбера ряд  $\sum a_n$  сходится.

2. Пусть теперь  $D > 1$ . Тогда существует такое  $q$ , что  $1 < q < D$ . По определению предела, для достаточно больших  $n$  будет верно, что

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq q \geq 1 \quad (355)$$

По признаку Даламбера ряд  $\sum a_n$  расходится. ■

#### B.5.2.4. Признак Раабе

*Признак Раабе.* Для положительного ряда  $\sum a_n$  определим величину

$$R_n = n \left( 1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} \right) \quad (356)$$

Если для достаточно больших  $n$  выполнено  $R_n \geq r > 1$ , где  $r$  - постоянное число, то ряд сходится. Если же  $R_n \leq 1$ , то ряд расходится.

*Доказательство.*  $\square$

1. Пусть  $R_n \geq r > 1$  для достаточно больших  $n$ . Это эквивалентно тому, что

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1 - \frac{r}{n} \quad (357)$$

Используем лемму:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^s - 1}{-\frac{1}{n}} = s \quad (358)$$

Мозьмём такое число  $s$ , что  $1 < s < r$ . Тогда для достаточно больших  $n$  будет верно, что

$$\frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^s - 1}{-\frac{1}{n}} < r \Leftrightarrow 1 - \frac{r}{n} < \left(1 - \frac{1}{n}\right)^s \quad (359)$$

Полученное неравенство эквивалентно такому:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \left(\frac{n-1}{n}\right)^s = \frac{\frac{1}{n^s}}{\frac{1}{(n-1)^s}} \quad (360)$$

Справа стоит отношение следующего члена *сходящегося* обобщённого гармонического ряда  $H_s$  ( $s > 1$ ), поэтому по третьей теореме сравнения из сходимости ряда  $H_s$  следует сходимость ряда  $\sum a_n$ .

2. Пусть теперь  $R_n \leq 1$  для достаточно больших  $n$ . Имеем:

$$n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \leq 1 \Leftrightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} \quad (361)$$

Справа стоит отношение следующего члена *расходящегося* гармонического ряда  $H_1$ . Поэтому по третьей теореме сравнения из расходимости ряда  $H_1$  следует расходимость ряда  $\sum a_n$ . ■

*Признак Раабе в предельной форме.* Пусть для положительного ряда  $\sum a_n$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = R \quad (362)$$

1. Если  $R > 1$ , то ряд  $\sum a_n$  сходится.
2. Если  $R < 1$ , то ряд  $\sum a_n$  расходится.
3. Если  $R = 1$ , то ряд может как сходиться, так и расходиться.

Признак Раабе существенно сильнее признака Даламбера.

#### B.5.2.5. Интегральный признак Маклорена-Коши

*Интегральный признак Маклорена-Коши.* Пусть ряд можно представить в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \equiv \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \quad (363)$$

где  $f(n)$  – значение при  $x = n$  непрерывной положительной монотонно убывающей функции  $f(x)$  на полуинтервале  $[1, +\infty)$ .

Тогда ряд  $\sum a_n$  сходится тогда и только тогда, когда сходится интеграл

$$\int_1^\infty f(x)dx \text{ сходится} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^\infty a_n \text{ сходится} \quad (364)$$

*Доказательство.*  $\square$  Рассмотрим произвольную первообразную функцию  $F(x)$  для  $f(x)$  на полуинтервале  $[1, +\infty)$ :

$$F(x) = \int_1^x f(t)dt \quad (365)$$

Ясно, что  $0 < f(x) = F'(x)$ , поэтому  $F(x) \nearrow$ . Поскольку  $f(x)$  монотонно убывает, то для  $x : n \leq x \leq n+1$ :

$$a_{n+1} = f(n+1) \leq f(x) \leq f(n) = a_n \quad (366)$$

$$a_{n+1} \leq \int_n^{n+1} f(t)dt \leq a_n \quad (367)$$

Мы получили оценку для общего члена такого ряда:

$$\sum_{n=1}^\infty \int_n^{n+1} f(t)dt \quad (368)$$

Его  $n$ -я частичная сумма равна

$$s_n = \int_1^{n+1} f(t)dt = F(n+1) - F(1) \underset{\text{сход.}}{\sim} F(n+1) \quad (369)$$

Итак, проанализируем предел

$$L = \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) \quad (370)$$

- Если  $L < \infty$ , то ряд  $\sum a_{n+1}$  сходится по первой теореме сравнения как меньший либо равный сходящемуся ряду. И из сходимости  $\sum a_{n+1}$  следует сходимость  $\sum a_n$ .
- Если  $L = \infty$ , то ряд  $\sum a_n$  расходится по первой теореме сравнения как больший либо равный расходящемуся ряду.

Таким образом, ряд  $\sum a_n$  сходится тогда и только тогда, когда сходится интеграл  $\int_1^\infty f(x)dx$ . ■

### B.5.3. Сходимость произвольных рядов

Пусть задан ряд  $\sum a_n$ , где члены  $a_n$  имеют произвольные знаки. Вопрос его сходимости сводится к сходимости последовательности частичных сумм  $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ :

$$s_1, s_2, \dots, s_n, s_{n+1}, \dots, s_{n+m}, \dots \quad (371)$$

Ряд  $\sum a_n$  сходится тогда и только тогда, когда последовательность  $\{s_n\}$  фундаментальна, то есть

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N, \forall m \in \mathbb{N} : |s_{n+m} - s_n| < \varepsilon \quad (372)$$

#### B.5.3.1. Абсолютная сходимость

*Абсолютная сходимость.* Ряд  $\sum a_n$  называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд  $\sum |a_n|$ .

*Теорема Коши.* Если ряд  $\sum a_n$  сходится абсолютно, то он сходится.

*Доказательство.*  $\square$  Из абсолютной сходимости мы знаем, что начиная с некоторого номера и для всех  $m \in \mathbb{N}$ :

$$\forall \varepsilon > 0 : \left| \sum_{i=0}^m |a_{n+i}| \right| < \varepsilon \quad (373)$$

Поскольку подмодульное выражение неотрицательно, то отбрасываем модуль:

$$\sum_{i=0}^m |a_{n+i}| < \varepsilon \quad (374)$$

Но с другой стороны, используем неравенство треугольника:

$$\left| \sum_{i=0}^m a_{n+i} \right| \leq \sum_{i=0}^m |a_{n+i}| < \varepsilon \quad (375)$$

Значит, ряд  $\sum a_n$  сходится. ■

Кроме того, если ряд  $\sum a_n$  сходится абсолютно, то ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \quad \text{и} \quad \sum_{m=1}^{\infty} c_m, \quad (376)$$

где  $b_k$  - положительные члены ряда  $\sum a_n$  в порядке следования, а  $c_m$  - модули отрицательных членов ряда  $\sum a_n$  в порядке следования, *сходятся*. И имеет место

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{k=1}^{\infty} b_k - \sum_{m=1}^{\infty} c_m \quad (377)$$

### B.5.3.2. Знакопеременные ряды и признак Лейбница

Ряд  $\sum a_n$  называется знакопеременным, если  $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \cdot a_{n+1} < 0$ .

Не умаляя общности, можно давать такое определение для всех  $n \in \mathbb{N}$ , так как конечное число членов ряда можно отбросить и перенумеровать оставшиеся с сохранением сходимости.

То же самое можно написать и так:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n c_n, \quad (378)$$

где  $c_n > 0$ .

*Признак Лейбница.* Пусть ряд  $\sum a_n$  является знакопеременным. Если все члены ряда убывают по абсолютной величине и стремятся к нулю, то ряд  $\sum a_n$  сходится.

*Доказательство.*  $\square$  Пусть  $c_n = |a_n|$ , и  $S_{2m}$  - частичная сумма чётного порядка:

$$S_{2m} = c_1 - c_2 + c_3 - \dots + c_{2m-1} - c_{2m} \quad (379)$$

$$S_{2m} = (c_1 - c_2) + (c_3 - c_4) + \dots + (c_{2m-1} - c_{2m}) \quad (380)$$

Поскольку  $c_i > c_{i+1}$ , то  $S_{2m}$  с ростом  $m$  возрастает.

$$S_{2m} = c_1 - (c_2 - c_3) - \dots - (c_{2m-2} - c_{2m-1}) - c_{2m} \quad (381)$$

Выходит, что  $S_{2m}$  ограничена сверху  $c_1$ . Тогда последовательность  $S_{2m}$  сходится как возрастающая и ограниченная сверху.

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S_{2m} = S \quad (382)$$

Для суммы нечётного порядка имеем  $S_{2m-1} = S_{2m} + c_{2m}$ .

Поэтому, используя, что  $c_{2m} \rightarrow 0$ :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S_{2m-1} = S \quad (383)$$

Последовательности как чётных, так и нечётных сумм данного ряда сходятся к одному числу, следовательно, ряд сходится. ■

## C. Комбинаторика

В этом разделе рассматриваются основные понятия и тождества комбинаторики, а так же основы теории множеств и теории графов.

### C.1. Основные правила комбинаторики

#### C.1.1. Правила суммы и произведения

**Правило суммы.** Если элемент множества  $A$  можно выбрать  $m$  способами, а элемент множества  $B$   $n$  способами, то выбор «либо  $A$ , либо  $B$ » может быть сделан  $m + n$  способами, при условии, что множества  $A$  и  $B$  не пересекаются.

*Доказательство:* Количество способов выбрать «либо  $A$ , либо  $B$ » равно мощности множества  $A \cup B$ . По условию  $A \cap B = \emptyset$ , поэтому надо доказать лемму:

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow |A \cup B| = |A| + |B| \quad (384)$$

*Доказательство леммы:* пусть  $A = \{a_1, \dots, a_m\}$  и  $B = \{b_1, \dots, b_n\}$  Тогда

$$A \cup B = \{a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n\} \quad (385)$$

Здесь существенно использовано то, что  $A \cap B = \emptyset$ , так как тогда  $\forall a \in A, \forall b \in B : a \neq b$ . Следовательно,  $|A \cup B| = m + n$ . ■

По лемме,  $|A \cup B| = |A| + |B|$ , что и требовалось доказать. ■

**Правило произведения.** Если объект  $A$  можно выбрать  $m$  способами и для каждого выбора  $A$  объект  $B$  можно выбрать  $n$  способами, то количество способов выбрать упорядоченные пары  $(A, B)$  равно  $m \cdot n$ .

*Доказательство:* Переформулируем доказываемое утверждение так: пусть  $|A| = m$ ,  $|B| = n$ . Тогда надо доказать, что мощность декартова произведения множеств равна произведению мощностей сомножителей:

$$|A \times B| = m \cdot n \quad (386)$$

. Перед доказательством сформулируем важную лемму, которая доказана в разделе, связанном с теорией множеств. Лемма о дистрибутивности декартова произведения относительно объединения множеств:

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C) \quad (387)$$

. Докажем исходное утверждение индукцией по мощности второго сомножителя:

1. База индукции.

- 1.1.  $n = 0 : A \times B = A \times \emptyset = \emptyset$ . Но  $|\emptyset| = 0 = m \cdot n$ .
- 1.2.  $n = 1 : A \times B = A \times \{b_1\} = \{(a_1, b_1), \dots, (a_m, b_1)\}$ . Легко видеть, что  $|\{(a_1, b_1), \dots, (a_m, b_1)\}| = m = m \cdot 1$ .
2. Предположение индукции. Пусть верно для некоторого  $n \in \mathbb{N}$ , что  $\forall A, B : |A \times B| = m \cdot n$ .
3. Шаг. Докажем для  $n + 1$  на основе предположения индукции. Пусть множество  $B_{n+1} = B_n \cup \{b_{n+1}\}$  и  $|B_n| = n$ .

$$A \times B_{n+1} = A \times (B_n \cup \{b_{n+1}\}) = A \times B_n \cup A \times \{b_{n+1}\} \quad (388)$$

Тогда

$$|A \times B_{n+1}| = |A \times B_n| + |A \times \{b_{n+1}\}| = m \cdot n + m \cdot 1 = m \cdot (n + 1) \quad (389)$$

Шаг индукции верен, поэтому утверждение доказано. ■

#### **Обобщённые правила суммы и произведения:**

1. Обобщённое правило суммы. Пусть даны попарно непересекающиеся множества  $A_1, A_2, \dots, A_n$ . Число способов сделать выбор « $A_1$  или  $A_2 \dots$  или  $A_n$ » равно  $\sum_{i=1}^n |A_i|$ . Доказывается по индукции.
2. Обобщённое правило произведения. Пусть даны множества  $A_1, A_2, \dots, A_n$ . Число способов выбрать упорядоченный кортеж  $(a_1, \dots, a_n) \mid a_i \in A_i$  из  $n$  элементов равно  $\prod_{i=1}^n |A_i|$ . Доказывается по индукции.

**Пример использования обобщённого правила произведения.** Докажем, что порядок группы перестановок  $S_n = S(\Omega)$  равен  $n!$ , где  $n = |\Omega|$ . Для первой позиции образа мы можем выбрать любой из  $n$  прообразов. Далее для второй позиции уже  $(n - 1)$  прообраз и т. д. На последнюю позицию можно выбрать единственный элемент множества  $\Omega$ . Имеем:  $P_n = n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot 1$  ■.

#### **C.1.2. Принцип Дирихле**

Обозначим  $\lceil x \rceil = \min\{a \mid a \geq x, a \in \mathbb{Z}\}$

**Принцип Дирихле.** Если  $n$  объектов разместить в  $m$  ящиках и  $n > m$ , то существует хотя бы один ящик, в котором находится не менее  $\lceil \frac{n}{m} \rceil$  объектов.

**Доказательство.** Обозначим  $k = \lceil \frac{n}{m} \rceil$  и предположим противное: во всех ящиках лежит меньше  $k$  объектов. Тогда для любого ящика, в нем находится не более  $k - 1$  объектов. Общее число объектов тогда не превосходит  $m \cdot (k - 1)$ , т. е. имеет место

неравенство  $n \leq m \cdot (k - 1)$ . Но по свойству округления вверх:  $k - 1 = \lceil \frac{n}{m} \rceil - 1 < \frac{n}{m}$ .

Имеем:

$$\begin{cases} n \leq m \cdot (k - 1) \\ n > m \cdot (k - 1) \end{cases} \quad (390)$$

Получили противоречие, значит противное неверно и исходное утверждение доказано. ■

### C.1.3. Примеры

## C.2. Множества

«Элемент  $a$  принадлежит множеству  $A$ » обозначают  $a \in A$ . Отрицание этого утверждения обозначается  $a \notin A$ .

Множество  $B$  называется подмножеством  $A$ , если  $\forall x \in B : x \in A$ . Обозначают  $B \subset A$ .

Множества  $A$  и  $B$  называются равными, если  $A \subset B \wedge B \subset A$ . Обозначают  $A = B$ .

Пустым множеством называется множество, не содержащее ни одного элемента. Оно является подмножеством любого множества. Обозначается  $\emptyset$ .  $\forall A : \emptyset \subset A$

### C.2.1. Операции на множествах

Основные бинарные операции над множествами определены так:

1. Объединение.  $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$
2. Пересечение.  $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$
3. Разность.  $A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$
4. Симметрическая разность.  $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

### C.2.2. Свойства бинарных операций над множествами

1. Коммутативность объединения и пересечения:

- $A \cup B = B \cup A$
- $A \cap B = B \cap A$ .

2. Ассоциативность объединения и пересечения:

- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ .

3. Дистрибутивность объединения и пересечения:

- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ .

### C.2.3. Кортеж

Кортежем называется упорядоченная п-ка элементов. Обозначается как

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \text{ или } \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle \quad (391)$$

Более строго, можно индуктивно сопоставить кортежи множествам:

- $\emptyset \leftrightarrow \langle \rangle$
- $\{a_1\} \leftrightarrow \langle a_1 \rangle$
- $\{a_1, \{a_1, a_2\}\} \leftrightarrow \langle a_1, a_2 \rangle$

Тогда:

$$\bullet \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \leftrightarrow \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle \langle a_1, a_2, \dots, a_{n-1} \rangle, a_n \rangle$$

Альтернативно, можно дать такое определение:

$$\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle = f : [n] \rightarrow \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \quad (392)$$

#### C.2.4. Декартово произведение

Декартовым произведением двух множеств  $A$  и  $B$  называется множество всех упорядоченных пар элементов из  $A$  и  $B$ .

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\} \quad (393)$$

Свойства декартова произведения:

1. Некоммутативность. Вообще говоря,  $A \times B \neq B \times A$ , если  $A \neq B$
2. Ассоциативность.  $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$
3. Дистрибутивность относительно объединения и пересечения(по левому и по правому множителю):

- $A \times (B \cup C) = A \times B \cup A \times C$
- $A \times (B \cap C) = A \times B \cap A \times C$
- $(B \cup C) \times A = B \times A \cup C \times A$
- $(B \cap C) \times A = B \times A \cap C \times A$

#### C.2.5. Мощность множества

Мощностью конечного множества  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  называется количество элементов в нём:  $|A| = n$ .

**Утверждение 1.**  $A \cap B = \emptyset \Rightarrow |A \cup B| = |A| + |B|$

([Уже доказано, см.](#) 384)

**Утверждение 2.**  $|A \times B| = |A| \cdot |B|$

([Уже доказано, см.](#) 386)

### C.2.6. Круги Эйлера

Отношения между множествами можно визуально представить с помощью кругов Эйлера.

### C.2.7. Формула включений и исключений

Пусть  $A_1, A_2, \dots, A_n$  - конечные множества. Тогда

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_i |A_i| - \sum_{i < j} |A_i \cap A_j| + \\ + \dots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n| \quad (394)$$

### C.3. Перестановки, сочетания и размещения

Существуют две схемы выбора элементов из множества  $\Omega$  мощности  $n$ : с повторениями и без повторений.

В первой схеме выбранный элемент не возвращается в множество, а во второй схеме на каждом шаге элемент должен быть возвращён в множество.

#### C.3.1. Выбор без повторений

**Перестановка.** Определение перестановки было дано в разделе A.1.

**Теорема.** Число всех перестановок без повторений длины  $n$  равно

$$P_n = n! \quad (395)$$

[Доказательство приведено здесь.](#)

**Размещением из  $n$  элементов по  $m$**  называют кортеж, содержащий  $m$  различных элементов  $\Omega$ .

**Теорема.** Число всех размещений из  $n$  по  $m$  равно

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} \quad (396)$$

**Доказательство:** Постоим размещение: для первой позиции элемента можно выбрать любой из  $n$  элементов исходного множества, для второго любой из  $n - 1$  оставшихся, ... для  $m$ -ой позиции  $(n - m + 1)$  из оставшихся. По правилу произведения на  $m$  позиций имеем:

$$A_n^m = n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot (n - m + 1) = \frac{n!}{(n - m)!} \quad (397)$$

Что и требовалось доказать ■.

**Сочетанием из  $n$  элементов по  $m$**  называется подмножество мощности  $m$  множества  $\Omega$ .

**Теорема.** Число сочетаний из  $n$  по  $m$  равно

$$C_n^m = \frac{n!}{(n - m)! \cdot m!} \quad (398)$$

**Доказательство.** Заметим, что подмножеств мощности  $m$  ровно в  $m!$  раз меньше, чем кортежей длины  $m$  из элементов исходного множества. Действительно, каждому подмножеству мощности  $m$  соответствует  $m!$  кортежей (как перестановок элементов данного подмножества). Поэтому искомое число сочетаний равно

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n!}{(n-m)! \cdot m!} \quad (399)$$

что и требовалось доказать ■.

### C.3.2. Выбор с повторениями

## **C.4. Производящие функции**

## D. Теория вероятностей

### D.1. Основные понятия

**Случайное событие** — событие, про которое нельзя точно сказать, произойдёт оно или нет. Обозначают буквами латинского алфавита:  $A, B, C\dots$

**Достоверным** называется событие, которое происходит всегда. Обозначается  $\Omega$ .

**Невозможным** называется событие, которое не может произойти. Обозначается  $\emptyset$ .

**Вероятность случайного события** это численная мера объективной возможности наступления данного события. Обозначение:  $P(A)$  — вероятность события  $A$ .

#### D.1.1. Операции над событиями

$\bar{A}$  — событие, противоположное  $A$ . Заключается в том, что событие  $A$  не произошло.

$A \cap B$  — произведение событий. Это событие, которое заключается в совместном происхождении событий  $A, B$ .

Если  $A \cap B = \emptyset$ , то события  $A, B$  называются несовместными.

Вместо  $A \cap B$  иногда пишут  $AB$ .

$A \cup B$  — объединение или сумма событий. Заключается в том, что хотя бы одно из  $\{A, B\}$  верно.

**Закон де Моргана** в терминах событий:

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} \quad (400)$$

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B} \quad (401)$$

Диаграммы Венна

**Свойства противоположного события:**

1.  $\overline{\bar{A}} = A$
2.  $A \cap \bar{A} = \emptyset$
3.  $A \cup \bar{A} = \Omega$

**Свойства бинарных операций над событиями.**

1. Коммутативность:

- $A \cap B = B \cap A;$
- $A \cup B = B \cup A.$

2. Ассоциативность:

- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ ;
- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ .

3. Дистрибутивность.

- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ ;
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ .

### **Операция включения**

$A \subset B$  – событие, которое заключается в том, что происхождение  $B$  влечёт  $A$ .

### **Разность и симметрическая разность.**

Разность событий  $A$  и  $B$  определяется как:

$$A \setminus B = A \cap \overline{B} \quad (402)$$

Симметрической разностью называется бинарная операция над событиями, такая, что

$$A \triangle B = (A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) \quad (403)$$

Отрицание симметрической разности:

$$\overline{A \triangle B} = \overline{A} \triangle B = A \triangle \overline{B} = \overline{A} \triangle \overline{B} \quad (404)$$

### **Поглощение.**

1.  $A \cup (A \cap B) = A$
2.  $A \cap (A \cup B) = A$
3.  $\overline{A} \cup (A \cap B) = \overline{A} \cup B$
4.  $\overline{A} \cap (A \cup B) = \overline{A} \cap B$

### **Декомпозиция бинарных операций.**

1.  $A \cup B = A \triangle B \triangle AB$
2.  $A \setminus B = A \setminus (AB)$

### **D.1.2. Аксиомы вероятности**

1.  $\forall A P(A) \geq 0$  (неотрицательность);
2.  $P(\Omega) = 1$  (Вероятность достоверного события);
3.  $\forall A, B : A \cap B = \emptyset : P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ . (Аддитивное свойство вероятности).

### D.1.3. Следствия из Аксиом

**Теорема о вероятности противоположных событий.**

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1 \quad (405)$$

*Доказательство:* так как

$$\begin{cases} A \cup \overline{A} = \Omega \\ A \cap \overline{A} = \emptyset \end{cases} \quad (406)$$

то из аксиом 2 и 3:  $P(A \cup \overline{A}) = P(\Omega) = 1$ . ■

*Следствие из теоремы.*

Вероятность объединения  $n$  попарно независимых событий.

$$\forall A_1, A_2, \dots, A_n : \forall i, j : i \neq j : A_i \cap A_j = \emptyset :$$

$$P\left(\bigcup_{1 \leq i \leq n} A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) \quad (407)$$

*Доказательство:* по индукции.  $n = 2$ : это аксиома 3.

Пусть верно для  $n \in \mathbb{N}$ . Тогда  $P\left(\bigcup_{1 \leq i \leq n} A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$  Докажем для  $n + 1$ :

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{1 \leq i \leq n+1} A_i\right) &= P\left(\left[\bigcup_{1 \leq i \leq n} A_i\right] \cup A_{n+1}\right) = P\left(\bigcup_{1 \leq i \leq n} A_i\right) + \\ &+ P(A_{n+1}) = \sum_{i=1}^n P(A_i) + P(A_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} P(A_i) \quad \blacksquare \end{aligned} \quad (408)$$

## D.2. Случайная величина

Будем обозначать случайные величины прописными греческими буквами ( $\xi, \eta, \dots$ ).

1. Для дискретных случайных величин множество значений или конечно, или бесконечно, но счётно.
2. Для непрерывных случайных величин множество значений равнomoщно  $\mathbb{R}$ .

Универсальным законом распределения и непрерывных, и дискретных случайных величин является *функция распределения* (ф. р.).

По определению, функция распределения  $F_\xi$  для случайной величины  $\xi$  определяется как вероятность события  $\{\xi < x\}$ .

$$F_\xi := P(\xi < x) \quad (409)$$

### D.2.1. Свойства функции распределения случайной величины

Пусть  $\xi$  - случайная величина.

1.  $0 \leq F_\xi(x) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$ ,
2.  $F_\xi(-\infty) = F_\xi(\xi < -\infty) = 0$ ,
3.  $F_\xi(+\infty) = F_\xi(\xi < \infty) = 1$ ,
4.  $F_\xi \nearrow$  (функция распределения монотонно не убывает на всей области определения).

□ Пусть  $x_1 < x_2$  и  $x_1, x_2$  входят в область значений случайной величины  $\xi$ . Тогда  $F_\xi(x_2) = P(\xi < x_2) = P(\{\xi < x_1\} \cup \{x_1 \leq \xi < x_2\}) = P(\xi < x_1) + P(x_1 \leq \xi < x_2) \geq P(\xi < x_1) = F_\xi(x_1)$  ■

## **E. Алгоритмы и структуры данных && программирование**

### **E.1. Основные понятия**

**Алгоритм** — точное или формализованное описание вычислительного процесса, ведущее от входных данных к искомому результату.

**Структуры данных** — множество элементов данных и связи между ними.

Физические данные существуют в памяти машины, а теоретические нет.

*Элементарные* данные не могут быть разделены на более мелкие части. Если же данные могут быть разделены на логически более мелкие части, то они называются *сложными*.

#### **E.1.1. Анализ сложности и эффективности алгоритмов**

Должны быть некие критерии *хорошего алгоритма*.

Два основных критерия, используемых на практике:

1. Быстродействие;
2. Объём потребляемой памяти.

Прямое измерение времени работы программной реализации измеряет далеко не только быстродействие алгоритма. На время выполнения влияют так же способ реализации, умения программиста, среда разработки и мощность компьютера.

Измерения скорости и памяти носят теоретический характер.

$T(n)$  — функция теоретического времени работы алгоритма.

$V(n)$  — функция теоретической пространственной сложности алгоритма.

Получить точную формулу нельзя, можно только получить скорость и порядок скорости изменения времени выполнения.

## E.2. Асимптотические оценки функций

Далее при анализе алгоритмов будем полагать, что все функции асимптотически положительны.

- Функция  $f(n)$  принадлежит О-большому от функции  $g(n)$ , если существуют такие положительные константы  $C$  и  $N$ , что для всех  $n > N$  функция  $f(n)$  ограничена сверху функцией  $g(n)$ , умноженной на константу  $C$ .

$$f(n) = O(g(n)) \Leftrightarrow \exists N, C > 0 : \forall n > N : f(n) \leq C \cdot g(n) \quad (410)$$

- Функция  $f(n)$  принадлежит Омега-большому от функции  $g(n)$ , если существуют такие положительные константы  $C$  и  $N$ , что для всех  $n > N$  функция  $f(n)$  ограничена снизу функцией  $g(n)$ , умноженной на константу  $C$ .

$$f(n) = \Omega(g(n)) \Leftrightarrow \exists N, C > 0 : \forall n > N : f(n) \geq C \cdot g(n) \quad (411)$$

- Функция  $f(n)$  принадлежит тетта-большому от функции  $g(n)$ , если существуют такие положительные константы  $C_1$ ,  $C_2$  и  $N$ , что для всех  $n > N$  функция  $f(n)$  ограничена сверху и снизу функцией  $g(n)$ , умноженной на константы  $C_1$  и  $C_2$  соответственно.

$$\begin{aligned} f(n) = \Theta(g(n)) \Leftrightarrow \exists N, C_1, C_2 > 0 : \forall n > N : \\ C_1 \cdot g(n) \leq f(n) \leq C_2 \cdot g(n) \end{aligned} \quad (412)$$

- Функция  $f(n)$  принадлежит о-малому от функции  $g(n)$ , если предел отношения  $f$  и  $g$  равен нулю при неограниченном возрастании  $n$ .

$$f(n) = o(g(n)) \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0 \quad (413)$$

- Функция  $f(n)$  принадлежит омега-малому от функции  $g(n)$ , если предел отношения  $g$  и  $f$  равен нулю при неограниченном возрастании  $n$ .

$$f(n) = \omega(g(n)) \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)} = 0 \quad (414)$$

### E.2.1. Свойства сравнений функций

- Транзитивность.

- из  $f(n) = \Theta(g(n))$  и  $g(n) = \Theta(h(n))$  следует  $f(n) = \Theta(h(n))$
- из  $f(n) = O(g(n))$  и  $g(n) = O(h(n))$  следует  $f(n) = O(h(n))$
- из  $f(n) = \Omega(g(n))$  и  $g(n) = \Omega(h(n))$  следует  $f(n) = \Omega(h(n))$

- из  $f(n) = o(g(n))$  и  $g(n) = o(h(n))$  следует  $f(n) = o(h(n))$
- из  $f(n) = \omega(g(n))$  и  $g(n) = \omega(h(n))$  следует  $f(n) = \omega(h(n))$

2. Рефлексивность.

- $f(n) = \Theta(f(n))$
- $f(n) = O(f(n))$
- $f(n) = \Omega(f(n))$

3. Симметричность.

- $f(n) = \Theta(g(n)) \Rightarrow g(n) = \Theta(f(n))$

4. Перестановочная симметрия.

- $f(n) = O(g(n)) \Leftrightarrow g(n) = \Omega(f(n))$
- $f(n) = o(g(n)) \Leftrightarrow g(n) = \omega(f(n))$

## E.3. Бинарный поиск

Классический бинарный поиск это алгоритм поиска на отсортированном массиве со значениями в диапазоне  $[a; b]$ . Ниже приведён псевдокод для этого алгоритма.

```
fun binary_search(array, x):
    n = array.len()
    l, r = 0, n-1
    while l <= r:
        mid = (l + r) / 2
        if arr[mid] == x:
            return mid
        if array[mid] < x:
            l = mid + 1
        else:
            r = mid - 1
    return -1
```

Временная сложность данного алгоритма равна  $O(\log n)$ .

### E.3.1. Вариант с поиском границ

- Если требуется найти **левую** границу, когда требуемое условие выполняется, то можно использовать такой алгоритм.

```
fun left_binary_search(l, r, check, checkparams):
    while l < r:
        mid = (l + r)/2
        if check(mid, checkparams):
            r = mid
        else:
            l = mid + 1
    return l
```

- Если требуется найти **правую** границу, когда требуемое условие выполняется, то можно использовать такой алгоритм.

```
fun right_binary_search(l, r, check, checkparams):
    while l < r:
        mid = (l + r + 1)/2
        if check(mid, checkparams):
            l = mid
        else:
            r = mid - 1
    return l
```

На практике, лучше проверять реализацию бинпоиска на 2-х числах!

## E.4. Динамическое программирование

Динамическое программирование(ДП) позволяет решать задачи, комбинируя решения вспомогательных задач.

Два варианта задач для решения методом динамического программирования:

- подсчёт количества способов;
- оптимизация(максимум или минимум).

**Этапы решения задачи методом ДП.**

1. Описание структуры оптимального решения;
2. Рекурентное соотношение для значения, соответствующего оптимальному решению(включая базу динамики);
3. Вычисление значения, соответствующего оптимальному решению методом восходящего анализа.
4. Составление оптимального решения, полученного на предыдущих этапах.

### E.4.1. Простые примеры ДП

#### E.4.1.1. Ступеньки

За один шаг можно подняться на одну или две ступеньки. За посещение каждой из ступенек дают  $a_i$  рублей. Необходимо найти максимальную сумму за подъём на вершину лестницы из  $n$  ступенек.

*Решение:* Пусть  $dp[i]$  - максимальная сумма за подъём на  $i$ -ю ступеньку. Тогда

$$dp[i] = a[i] + \max(dp[i-1], dp[i-2]) \quad (415)$$

База динамики.  $dp[0] = 0$ ,  $dp[1] = a[1]$ . Ответ:  $dp[n]$  ■.

Полученное решение имеет временную и пространственную сложность  $\Theta(n)$ . Пример таблицы для данной задачи(0 добавлен в качестве нулевого элемента).

$a[i]$	0	10	-5	-20	-10	20	30	-10	10
$dp[i]$	0	10	5	-10	-5	15	45	35	55

#### E.4.1.2. Ступеньки с сертификатом

За один шаг можно подняться на одну или две ступеньки. За посещение каждой из ступенек дают  $a_i$  рублей. Необходимо найти максимальную сумму за подъём на вершину лестницы из  $n$  ступенек. Вывести номера ступенек, по которым мы шагали.

*Решение:* Пусть  $dp[i]$  - максимальная сумма за подъём на  $i$ -ю ступеньку. Выделим массив  $prev[n]$ , в  $i$ -том элементе которого будем хранить номер ступеньки, с которой мы попали на  $i$ -ю ступеньку. Тогда

$$dp[i] = a[i] + \max(dp[i-1], dp[i-2]) \quad (416)$$

$$prev[i] = \underset{i}{\operatorname{argmax}}(dp[i-1], dp[i-2]) \quad (417)$$

База динамики.  $dp[0] = 0$ ,  $dp[1] = a[1]$  и теперь добавляется  $prev[1] = 0$ . Ответ:  $dp[n]$  ■.

Пример таблицы для данной задачи:

$a[i]$	0	10	-5	-20	-10	20	30	-10	10
$dp[i]$	0	10	5	-10	-5	15	45	35	55
$prev[i]$	0	0	1	1	2	4	5	6	6

#### E.4.1.3. Наибольшая возрастающая подпоследовательность

Задача: найти длину наибольшей возрастающей подпоследовательности в массиве  $a$ .

- *подпоследовательность* — подпоследовательность, полученная вычёркиванием некоторых элементов из исходной(необязательно подряд идущих);
- *возрастающая* —  $\forall i \in \overline{1..n} : a_{i+1} > a_i$ .
- *наибольшая* — максимальная по длине среди всех подходящих подпоследовательностей.

*Решение.* Пусть  $dp[i]$  - длина наибольшей возрастающей подпоследовательности, заканчивающейся на  $i$ -ом элементе. Будем для очередного элемента  $a[i]$  запускать внутренний цикл на отрезке от 0 до  $i-1$  и проверять, можно ли продлить возрастающую подпоследовательность элементом  $a[i]$ . Если да, то берём максимум из всех подходящих  $dp[j]$  ( $j < i$ ). Если нет, то записываем  $prev[i] = -1$  и  $a[i] = 1$ . Ответ на задачу:  $\max(dp[i])$ .

К сожалению, временная сложность этого решения  $\Theta(n^2)$ . Пример таблицы ниже. Жёлтым выделены индексы НВП, зелёным максимум динамики(ответ), а красным те элементы, у которых нет предшественников.

индекс	0	1	2	3	4	5	6
$a[i]$	4	10	5	12	3	24	7
$dp[i]$	1	2	2	3	1	4	3
$prev[i]$	-1	0	0	1	-1	3	2

Приведём решение за  $O(n \log n)$ .

#### E.4.1.4. Покупка билетов

В очереди за билетами стоит  $n$  людей.  $i$  – й человек может купить себе билет за  $A_i$  секунд. Себе и следующему за  $B_i$  секунд. Себе, следующему и ещё одному за ним за  $C_i$  секунд. Найти минимальное время, за которое все люди будут с билетами.

*Решение.* Пусть  $dp[i]$  - минимальное время обивления первых  $i$  людей. Тогда рекуррентное соотношение будет иметь вид:

$$\begin{aligned} dp[i] &= \max(dp[i-1] + A_i, \\ &\quad dp[i-2] + B_i, \\ &\quad dp[i-3] + C_i) \end{aligned} \tag{418}$$

В качестве базы динамики запишем 3 виртуальных человека с бесконечным временем покупки, чтобы начинать использовать рекурренту с  $n = 1$  и определим для них динамику, равную 0. Сложность решения по времени равна  $\Theta(n)$ .

Пример таблицы для этой задачи ниже.

№	$A_i$	$B_i$	$C_i$	$dp[i]$
-2	$\infty$	$\infty$	$\infty$	0
-1	$\infty$	$\infty$	$\infty$	0
0	$\infty$	$\infty$	$\infty$	0
1	5	10	15	5
2	2	10	15	7
3	5	5	5	12
4	20	20	1	12
5	20	1	1	12

#### E.4.1.5. Представление числа минимальной последовательностью операций

Дано целое число  $N \leq 10^4$ . Представить его в виде арифметического выражения минимальной длины, в котором используются только операции сложения, умножения и скобки, а все числа не превосходят  $K$ .

*Решение.* Пусть  $dp[i]$  - минимальная длина арифметического выражения для числа  $i$ .

### E.4.2. Двумерное динамическое программирование

#### E.4.2.1. Наибольшая общая подпоследовательность

Наибольшая общая подпоследовательность (НОП) двух последовательностей - это максимальная по длине подпоследовательность, которую можно получить вычеркиванием некоторых элементов из первой и из второй последовательности.

*Задача.* Даны две последовательности  $a$  и  $b$ . Найти НОП для этих последовательностей.

*Решение.* Пусть  $dp[i][j]$  - длина НОП для первых  $i$  элементов последовательности  $a$  и первых  $j$  элементов последовательности  $b$ . Обозначим  $n = |a|$ ,  $m = |b|$ .

1. Если  $a[i] = b[j]$ , то  $dp[i][j] = dp[i - 1][j - 1] + 1$  (если элементы совпали, то мы берём данный элемент в НОП).
2. Иначе, как минимум один из элементов  $a[i]$  или  $b[j]$  не входит в НОП. Тогда  $dp[i][j] = \max(dp[i - 1][j], dp[i][j - 1])$ .

Итак,

$$dp[i][j] = \begin{cases} 0, & \text{если } i \cdot j = 0 \\ dp[i - 1][j - 1] + 1, & \text{если } a[i] = b[j] \\ \max(dp[i - 1][j], dp[i][j - 1]), & \text{если } a[i] \neq b[j] \end{cases} \quad (419)$$

Длина НОП равна  $dp[n - 1][m - 1]$ . Для восстановления ответа поднимаемся по таблице  $dp$  в обратном порядке по следующему алгоритму:

1. Если  $a[i] = b[j]$ , то добавляем этот элемент в НОП и переходим к  $dp[i - 1][j - 1]$ .
2. Иначе, переходим к  $dp[i - 1][j]$  или  $dp[i][j - 1]$ , а точнее к тому из них, который имеет большее значение.

Сложность нахождения длины НОП по времени равна  $\Theta(n \cdot m)$ . Для восстановления ответа потребуется ещё  $O(n + m)$  времени.

#### E.4.2.2. Расстояние Левенштейна

Расстояние Левенштейна (редакционное расстояние) между двумя строками - это минимальное количество операций (вставка, удаление, замена), необходимых для преобразования одной строки в другую.

*Задача.* Даны две строки  $s$  и  $t$ . Найти расстояние Левенштейна между ними.

*Решение.* Пусть  $dp[i][j]$  - расстояние Левенштейна между первыми  $i$  символами строки  $s$  и первыми  $j$  символами строки  $t$ . Обозначим  $n = |s|$ ,  $m = |t|$ .

1. Если  $s[i] = t[j]$ , то  $dp[i][j] = dp[i - 1][j - 1]$ .
2. Иначе,  $dp[i][j] = \min(dp[i - 1][j] + 1, dp[i][j - 1] + 1, dp[i - 1][j - 1] + 1)$ .

Итак, расстояние Левенштейна между строками  $s$  и  $t$  равно  $dp[n - 1][m - 1]$ . Этот алгоритм работает за  $\Theta(n \cdot m)$ .

## **F. Анализ данных**