Основные правила комбинаторики

Правило суммы. Если элемент множества A можно выбрать m способами, а элемент множества B n способами, то выбор "либо A, либо B" может быть сделан $m + n$ способами, при условии, что множества A и B *не пересекаются.*

Доказательство: Количество способов выбрать "либо A, либо B" равно мощности множества $A \cup B$. По условию $A \cap B = \varnothing$, поэтому надо доказать лемму:

$$A \cap B = \varnothing \Rightarrow |A \cup B| = |A| + |B|$$

Доказательство леммы: пусть $A = \{a_1, ..., a_m\}$ и $B = \{b_1, ..., b_n\}$ Тогда

$$A \cup B = \{a_1, ..., a_m, b_1, ..., b_n\}$$

Здесь существенно использовано то, что $A \cap B = \varnothing$, так как тогда $\forall a \in A,\ \forall b \in B:\ a \neq b$. Следовательно, $|A \cup B| = m + n$.■

По лемме, $|A \cup B| = |A| + |B|$, что и требовалось доказать. ■

Правило произведения. Если объект A можно выбрать m способами и для каждого выбора A объект B можно выбрать n способами, то количество способов выбрать упорядоченные пары (A, B) равно $m \cdot n$.

Доказательство: