

## FCSR-h Filtrés

7 avril 2021

# Chapitre 1

## LFSR

### 1.1 Définition

Un registre à décalage à rétroaction linéaire ou LFSR (Linear Feedback Shift Register) constitue en un élément de base des générateurs pseudo-aléatoires de génération de suites de chiffres.

Un LFSR binaire de longueur  $n$  est composé d'un bloc de  $n$  bits appelé registre  $(a_0, \dots, a_n)$  et d'une fonction de rétroaction linéaire. Cette fonction  $f$  est de la forme :

$$f(a_0, a_1, \dots, a_n) = q_0 a_0 + q_1 a_1 + \dots + q_n a_n$$

### 1.2 Architecture Fibonacci

Le registre est initialisé avec  $r$  bits  $(a_0, a_1, \dots, a_{r-1})$ . A chaque cycle d'horloge ces bits sont additionnés (modulo 2) multipliés par les  $q_i$  décrits plus hauts.

Le bit résultant de cette opération :

$$a_r = \sum_{i=0}^{r-1} a_i q_{r-i} \pmod{2}$$

va par la suite être réinjecté dans la première cellule. Les autres bits seront tous décalés vers la cellule de droite ( $a_i \Rightarrow a_{i+1}$ ).

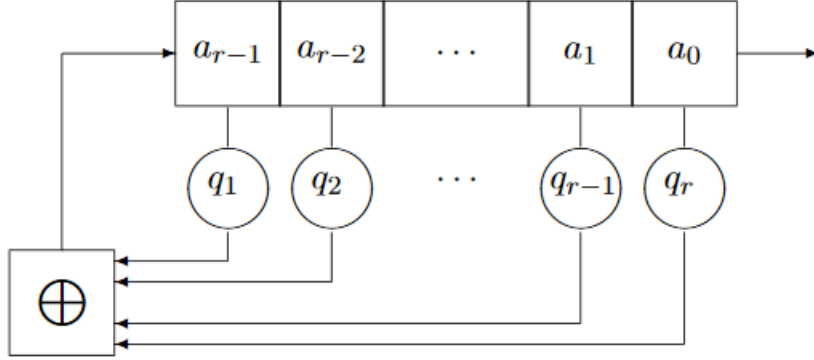


FIGURE 1.1 – LFSR Architecture Fibonacci

**Exemple :** LFSR à 4 bits avec  $(q_0, q_1, q_2, q_3) = (1, 1, 0, 1)$

- Initialisation du registre avec :  $(0, 1, 1, 0) = (a_3, a_2, a_1, a_0)$
- Premier tic : on calcule  $a_4 = 0 * q_0 + 1 * q_1 + 1 * q_2 + 1 * q_3 = 1$  bit de sortie  $a_0 = 0$ . Nouvel état du registre :  $(a_4, a_3, a_2, a_1) = (1, 0, 1, 1)$
- Second tic d'horloge :  $a_5 = 1 * q_0 + 0 * q_1 + 1 * q_2 + 1 * q_3$
- ...
- Au septième tic on retrouve l'état initial :  $(0, 1, 1, 0)$

### 1.3 Architecture Galois

Dans la représentation Galois d'un LFSR les choses se présentent de la manière suivante : Pour un LFSR de longueur  $r$ , à chaque tic d'horloge, chaque cellule  $a_i$  est mise à jour avec le calcul :

$$\forall i \in 1, \dots, r-2, a_i = a_{i+1} + q_{i+1}a_0 \pmod{2}$$

$$a_{r-1} = q_r a_0$$

$a_{r-1}$  devient donc la première cellule du registre.

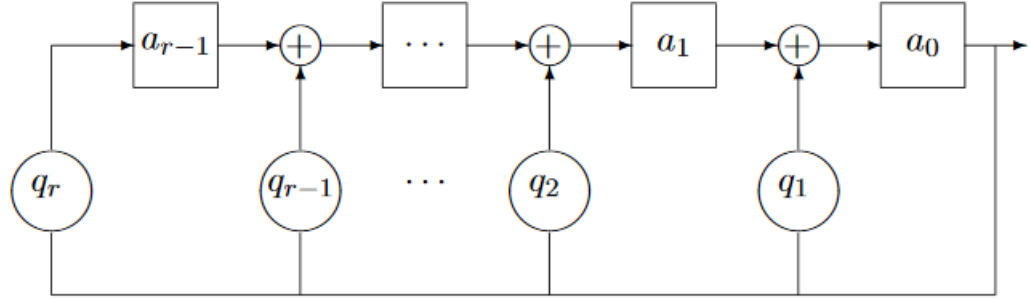


FIGURE 1.2 – LFSR Architecture Galois

A chaque LFSR de longueur  $r$  (dans les deux architectures), on associe le polynôme de rétroaction (ou caractéristique) suivant :

$$q(X) = q_r X^r + q_{r-1} X^{r-1} + \dots + q_1 X + 1$$

A noter qu'on appelle polynôme de connexion l'inverse du polynôme caractéristique :

$$b(X) = q(1/X)X^r$$

## Chapitre 2

# FCSR

### 2.1 Définition

Les FCSR (Feedback with Carry Shift Register) sont analogues aux LFSR en utilisant non plus l'addition modulo 2 mais dans  $\mathbb{Z}$ . Un FCSR de longueur  $r$  est construit de manière quasi identique à un LFSR : on dispose de  $r$  cellules  $(a_0, \dots, a_{r-1})$  et d'une nouvelle cellule  $m$  servant de "retenue" (carry en anglais) à l'addition dans  $\mathbb{Z}$ .

### 2.2 Architecture Fibonacci

A la manière des FCSR en architecture Fibonacci, à chaque tic d'horloge, on calcule une somme  $z$  intermédiaire, puis on va décaler à droite l'ensemble des cellules du registre. A la différence que cette fois-ci on va garder la retenue et le contenu de la première cellule est le bit de parité de la somme.

Cela se présente comme tel :

On somme :

$$z = m + \sum_{i=0}^{r-1} a_i q_{r-i} \in \mathbb{Z}$$

On décale à droite l'ensemble des cellules :  $a_i = a_{i+1}, \forall i \in [0, \dots, r-2]$

La première cellule  $a_{r-1}$  prend la valeur du bit de parité ( $z \bmod 2$ ).

La nouvelle cellule de "retenue"  $m$  prends la valeur des autres bits de  $z$  :

$$m = z \operatorname{div} 2 \text{ (le quotient de la division euclidienne de } z \text{ par } 2)$$

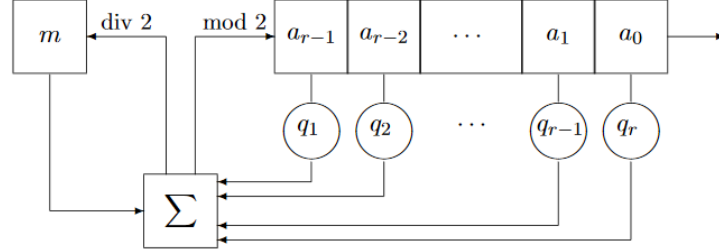


FIGURE 2.1 – FCSR Architecture Fibonacci

### 2.3 Architecture Galois

Concernant les FCSR en mode Galois, à l'instar de l'architecture Fibonacci, on retrouve des similitudes aux LFSR Galois. Le bit  $a_0$  sert également de rétroaction à tous les autres. Les additions sont cette fois faites avec "retenue", et cette donnée est stockée dans une nouvelle cellule  $c_i$  relative à sa cellule  $a_i$ .

A chaque tic d'horloge un FCSR de longueur  $r$  est mis à jour de la façon suivante :

$$\forall i \in \{0, \dots, r-1\}, \begin{cases} z_i = a_{i+1} + c_i + q_{i+1}a_0 \\ a_i = z_i \bmod 2 \\ c_i = z_i \text{ div } 2 \end{cases}$$

Finalement, la première cellule devient :  $a_{r-1} = c_{r-1} + q_r a_0$

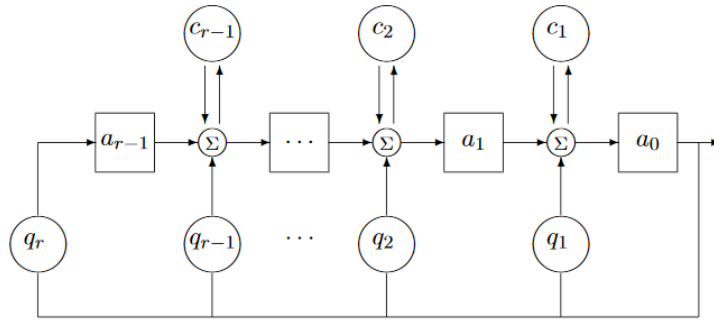


FIGURE 2.2 – FCSR Architecture Galois

Le  $\Sigma$  représente les  $z_i$  intermédiaires.

Dans les deux architectures on peut associer un FCSR de longueur  $r$  à un "entier de connexion" :

$$q = q_r 2^r + q_{r-1} 2^{r-1} + \dots + q_1 2 - 1 \in \mathbb{Z}$$

## 2.4 Entiers 2-adiques

Un entier 2-adique est une série formelle  $\alpha = \sum_{i=0}^{\infty} a_i 2^i$  avec  $a_i \in \{0, 1\}$ . Ces séries ne convergent pas à proprement parler (elles convergent au sens de la topologie 2-adique) mais peuvent être tout de même manipulées en le considérant. L'ensemble de telles séries forme l'anneau  $\mathbb{Z}_2$  des entiers 2-adiques. La différence entre cet anneau et l'anneau  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[X]$  est que l'addition dans  $\mathbb{Z}_2$  est réalisée en reportant les retenues sur les termes d'ordre supérieur, i.e  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2^n + 2^n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$ . S'il existe un entier  $N$  tel que  $a_n = 0 \quad \forall n \geq N$  alors  $\alpha$  est un entier positif. Chaque entier impair  $q$  a un inverse dans  $\mathbb{Z}_2$

**Proposition :** Soit  $A = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une séquence binaire et  $\alpha = \sum_{i=0}^{\infty} a_i 2^i$  l'entier 2-adique correspondant. La séquence  $A$  est ultimement périodique si et seulement si, il existe deux nombres  $p$  et  $q$  (avec  $q$  impair  $\iff q \equiv 1 \pmod{2}$ ) dans  $\mathbb{Z}$  tel que  $\alpha = p/q$ . De plus  $A$  est strictement périodique si  $pq \leq 0$  et  $|p| \leq |q|$  ( $\iff |\alpha| \leq 1$ ).

La période de  $A$  est l'ordre de 2 modulo  $q$  (i.e le plus petit entier  $T$  tel que  $2^T \equiv 1 \pmod{q}$ ). Si  $q$  est premier alors  $T$  est un diviseur de  $|q| - 1$ . A partir de la proposition précédente on peut définir un FCSR à l'aide d'un entier  $q$  premier et d'une valeur initiale  $p$ .

## 2.5 Conséquences sur les FCSR

### 2.5.1 Mode Fibonacci

Dans cette section on considère un FCSR de longueur  $r$  en architecture Fibonacci avec un entier de connexion  $q$  comme décrit plus haut, une retenue initiale  $m_{r-1}$  et un registre initial  $(a_0, \dots, a_{r-1})$ . Ce registre va donc générer une séquence infinie, potentiellement périodique,  $A = (a_0, a_1, a_2, \dots)$  de bits associée à son entier 2-adique  $\alpha = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot 2^i$ . On

a  $q = \sum_{i=0}^r q_i \cdot 2^i$  avec  $q_0 = -1$ , on définit :

$$p = \sum_{i=0}^{r-1} \sum_{j=0}^i q_j a_{i-j} 2^i - m_{r-1} 2^r$$

**Théorème :** La sortie  $A$  d'un FCSR comme définit plus haut est la séquence de bits de la représentation 2-adique du nombre rationnel  $\alpha = p/q$ , soit :

$$\alpha = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot 2^i = p/q \in \mathbb{Z}_2$$

On comprend donc que pour un même FCSR, différents état initiaux vont donner des séquences radicalement distinctes.

**Corollaire :** Soit  $A = (a_0, a_1, a_2, \dots)$  une séquence potentiellement périodique, alors son entier 2-adique associé  $\alpha = \sum a_i \cdot 2^i$  est le quotient de deux entiers  $p$  et  $q$  (le quotient  $p/q$  est un nombre rationnel). Le dénominateur  $q$  est l'entier de connexion qui génère la séquence  $A$ . Cette séquence est strictement périodique si et seulement si  $p \leq 0$  et  $|\alpha| \leq 1$ .

**Preuve du théorème :** Dans cette preuve, on considère les calculs dans  $\mathbb{Z}_2$ . Regardons la transition d'un état du FCSR en architecture Fibonacci, en supposant  $n$  transitions au préalable. En posant la longueur  $r \in \mathbb{N}$  On a donc, une valeur de retenue  $m_{n-1}$  et le contenu du registre étant les  $r$  bits  $(a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_{n-r})$  explicités précédemment (on a  $a_{n-1}$  la dernière "nouvelle" cellule, la plus à gauche, et  $a_{n-r}$  la dernière cellule du registre, la plus à droite, sachant que le registre se décale vers la droite). Afin d'effectuer la transition vers le nouvel état, on procède comme expliqué, on somme :

$$z_n = m_{n-1} + \sum_{i=1}^r a_i q_{n-i}$$

On remplace le contenu de la cellule de retenue :

$$m_n = z_n \text{ div } 2$$

On décale tous les bits vers la droite, et la nouvelle cellule la plus à gauche devient :

$$a_n = z_n \text{ mod } 2$$



Ces équations peuvent être combinées en une seule :

$$z_n = 2m_n + a_n$$

Ce qui implique :

$$a_n = \sum_{i=1}^r q_{n-i} \cdot a_i + (m_{n-1} - 2m_n)$$

On a les valeurs initiales du FCSR représentées par :  $(a_0, a_1, \dots, a_{r-1})$  (valeurs des bits) et  $m_{r-1}$  (cellule de retenue). Si on reprend l'équation du théorème pour  $\alpha$  cela donne :

$$\begin{aligned} \alpha &= \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot 2^i \\ &= a_0 + a_1 2 + \dots + a_{r-1} 2^{r-1} + \sum_{n=r}^{\infty} a_n 2^n \\ &= x + \sum_{n=r}^{\infty} \left( \sum_{i=1}^r q_{n-i} a_i \right) \cdot 2^n + \sum_{n=r}^{\infty} (m_{n-1} - 2m_n) 2^n \end{aligned}$$

Où :

$$x = a_0 + 2a_1 + 2^2 a_2 + \dots + a_{r-1} 2^{r-1}$$

l'entier représentant la valeur initiale des cellules du registre.

**Remarque :**

$$\sum_{i=1}^r q_{n-i} a_i \Leftrightarrow \sum_{i=1}^r q_i a_{n-i}$$

Cela peut servir pour certains calculs

La seconde sommation dans l'équation de  $\alpha$  s'annule à l'exception du premier

terme  $m_{r-1}$ , ce qui donne :

$$\begin{aligned}
\alpha &= x + m_{r-1}2^r + \sum_{n=r}^{\infty} \sum_{i=1}^r q_i 2^i a_{n-i} 2^{n-i} \\
&= x + m_{r-1}2^r + \sum_{i=1}^r q_i 2^i \left( \sum_{n=r}^{\infty} a_{n-i} 2^{n-i} \right) \\
&= x + m_{r-1}2^r + \sum_{i=1}^r q_i 2^i (\alpha - (a_0 2^0 + a_1 2^1 + \dots + a_{r-i-1} 2^{r-i-1})) \\
&= x + m_{r-1}2^r + \alpha \cdot \sum_{i=1}^r q_i 2^i - \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{j=0}^{r-i-1} q_i \cdot 2^i \cdot a_j \cdot 2^j
\end{aligned}$$

La somme du milieu étant nulle quand  $i = r$  ce qui nous ramène à :

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{x + m_{r-1}2^r - \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{j=0}^{r-i-1} q_i \cdot 2^i \cdot a_j \cdot 2^j}{1 - \sum_{i=1}^r q_i 2^i} \\
&= \frac{\sum_{i=0}^{r-1} \sum_{j=0}^{r-i-1} q_i \cdot a_j \cdot 2^{i+j} - m_{r-1}2^r}{q}
\end{aligned}$$

On opère un changement de variable avec  $k = i + j$  ce qui nous donne :

$$\alpha = \frac{\sum_{k=0}^{r-1} \sum_{i=0}^k q_i a_{k-i} 2^k - m_{r-1}2^r}{q} = \frac{p}{q}$$

□

### 2.5.2 mode Galois

On sait que comme les LFSR, les deux architectures de FCSR sont équivalentes, et dans le cas de celle dite de Galois les choses se présentent comme telles :

Pour un FCSR en mode Galois de longueur  $r$  de registre initial  $(a_0, a_1, \dots, a_{r-1})$  de cellules de retenues initiales  $(c_1, c_2, \dots, c_{r-1})$ , on rappelle que l'entier de connexion est défini par :

$$q = -1 + q_1 2^1 + \dots + q_{r-1} 2^{r-1} + q_r 2^r$$

on définit le  $p$  présenté plus haut par :

$$p = a_0 + (a_1 + c_1)2 + \dots + (a_{r-1} + c_{r-1})2^{r-1}$$

Le théorème vu précédemment s'applique de la même façon, pour un tel FCSR la séquence qu'il produit est la séquence de coefficients de l'expansion 2-adique du nombre rationnel  $\alpha = \frac{p}{q}$ .

### 2.5.3 Paramètres d'un FCSR

On rappelle qu'un FCSR produit la représentation 2-adique du nombre rationnel  $p/q$ . Pour le construire  $p$  dépend de la clé secrète et du IV (Initial Vector) comme nous l'avons vu précédemment, mais  $q$  est un paramètre public, et il détermine la période. Il est important que  $q$  remplisse certaines conditions.  $q$  doit être un nombre premier impair (négatif selon les représentations) avec  $\log_2(q) = n+1$ . L'ordre de 2 modulo  $q$  est  $|q|-1$  et  $T = (|q|-1/2)$  la période, est également un nombre premier.

## Chapitre 3

# Filtres sur les FCSR

### 3.1 Introduction

Dans les chapitres précédents, nous avons présenté des générateurs de nombres pseudo-aléatoires classiques se basant sur des objets mathématiques avancés. Les propriétés des FCSR sont bien connues : hautement non-linéaires, périodiques et présentent de très bonnes dispositions statistiques. Mais cela n'est pas suffisant, en effet étant donné la suite générée, on peut toujours reconstruire le modèle de base (entier de connexion par exemple), il n'y a rien de proprement secret. Dans le cas des automates LFSR, dans le but de reconstruire le modèle, on peut par exemple citer l'algorithme de Berlekamp-Massey. On utilisera un algorithme analogue à ce dernier dans le cas des FCSR.

C'est pour cette raison que l'idée d'introduire des filtres sur les cellules des FCSR est apparu. Grâce à la non-linéarité de tels automates, le meilleur filtre est simplement un filtre linéaire, qui effectue un XOR ("ou exclusif" équivalent à une additions de bits modulo 2) sur certains états du registre. On appelle cela les FCSR filtrés (Filtered FCSR, ou encore F-FCSR).

### 3.2 Reconstruction du modèle des FCSR

Dans cette section, nous allons montrer un algorithme permettant de retrouver les entiers relatifs  $p$  et  $q$  (bases du modèle des FCSR). L'algorithme que nous allons présenter est analogue à l'algorithme de Berkelamp-Massey qui lui, résout le problème de reconstruction du modèle des LFSR. On considère que l'on a une séquence binaire  $a = (a_0, a_1, ..)$  potentiellement

périodique. On pose également  $\phi$  la fonction telle que :  
 $\forall f = (f_1, f_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z},$

$$\phi(f) = \max(|f_1|, |f_2|)$$

**Algorithme :**

Début :

Entrer les  $a_i$  jusqu'à rencontrer le premier  $a_{k-1}$  non nul

$$\alpha = a_{k-1} \cdot 2^{k-1}$$

$$f = (0, 2)$$

$$g = (2^k - 1, 1) = (g_1, g_2)$$

**Tant que** il reste des bits **Faire :**

entrer un nouveau bit  $a_k$

$$\alpha = \alpha + a_k 2^k$$

**Si**  $\alpha \cdot g_2 - g_1 \equiv 0 \pmod{2^{k+1}}$  **alors :**

$$f = 2 \cdot f$$

**Sinon si**  $\phi(g) < \phi(f)$  **alors :**

$$d = \min(\phi(f + d \cdot g))$$

$$(d \equiv 1 \pmod{2})$$

$$(g, f) = (f + d \cdot g, 2g)$$

**Sinon :**

$$d = \min(\phi(g + d \cdot f))$$

$$(d \equiv 1 \pmod{2})$$

$$(g, f) = (g + d \cdot f, 2f)$$

$$k = k + 1$$

**Retourner**  $g$

### 3.3 F-FCSR

**Question : comment filtrer un automate FCSR ?**

Dans le cas des LFSR de nombreux outils ont été utilisés dans le but de masquer la structure du générateur, notamment en utilisant des fonctions booléennes avec des propriétés précises afin de combiner plusieurs LFSR, utilisant des combineurs avec mémoire, ou en réduisant la séquence produite par les LFSR.

Il est possible d'utiliser des méthodes similaires dans le cas des FCSR, mais il n'est pas nécessaire d'utiliser des fonctions de filtrage hautement non linéaires.

On introduit les fonctions linéaires de filtrage de FCSR :  $f : \mathbb{F}_2^n \rightarrow \mathbb{F}_2$ ,

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \oplus_{i=1}^n f_i x_i, \quad f_i \in \mathbb{F}_2$$

Avec  $\oplus$  la somme directe dans le corps  $\mathbb{F}_2$ .

**Remarque :** on aurait pu introduire la notion de temps  $t$  à nos cellules du registre. C'est cependant totalement équivalent au modèle présenté dans les chapitres précédents :  $(a_0(t) \Leftrightarrow a_{0+t})$  cela simplifie la compréhension pour la suite.

Grâce à cette fonction de filtrage, on filtre les  $k$  cellules  $a_i(t)$  du registre principal, on ne s'occupe pas des cellules de retenue. Afin de modéliser la séquence de notre FCSR filtré (à 1 filtre), on considère le vecteur binaire  $F = (f_0, f_1, \dots, f_{k-1})$  de longueur  $k$ . La séquence produite par ce FCSR est donc :

$$S = (s(t))_{t \in \mathbb{N}},$$

où

$$s(t) = \oplus_{i=1}^k f_i \cdot a_i(t)$$

### 3.4 F-FCSR-H

Concernant le F-FCSR-H, le nombre de bits extraits est désormais 8. On considère donc maintenant 8 vecteurs linéaires  $F_0, F_1, \dots, F_7$ . Par contre, le vecteur linéaire  $F_j$  ne considère que les cellules  $a_i$  du registre avec  $i$  satisfaisant  $i \equiv j \pmod{8}$ . On va donc non plus produire des bits mais des octets. En paramètres, on utilise une clé de longueur 80 et un vecteur initial (IV) de longueur binaire  $v$  avec  $32 \leq v \leq 80$ . La taille du FCSR (le nombre de cellules du registres) est  $n = 160$ . Et les cellules de retenue sont au nombre de  $l = 82$ .

On pose

$$q = 1993524591318275015328041611344215036460140087963$$

ce qui nous donne :

$$d = (1+|q|)/2 = (AE985DFF \ 26619FC5 \ 8623DC8A \ AF46D590 \ 3DD4254E)$$

dans sa représentation hexadécimale.

On considère le filtre statique  $F = d$ , et on construit nos 8 vecteurs linéaires de la façon suivante : on assigne en place  $i$  du vecteur  $F_j$  le  $j$ -ème bit de l'octet  $i$  de  $F$ .

Ce qui nous donne  $F_0 = 00110111010010101010$  et  $F_1 = 10011010110111000001$  par exemple. On rappelle que les vecteur  $F_j$  ne considèrent que les  $a_i$  tels que  $i \equiv j \pmod{8}$ . Le premier bit de l'octet produit sera donc :

$$b_0 = 0 \cdot a_0 + 1 \cdot a_8 + 0 \cdot a_{16} + \cdots + 1 \cdot a_{136} + 0 \cdot a_{144} + 0 \cdot a_{152}$$

Donc le FCSR produit un octet à chaque itération et est donné par :

$$z = (a_8 + a_{24} + \cdots + a_{135}, a_1 + a_{47} + \cdots, \dots)$$

L'initialisation de l'automate consiste en charger la clé et le bloc IV dans le registre principal, de faire 20 itérations produisant 20 octets. Ce qui nous donne 160 bits qui seront utilisés en tant que registre initial de notre automate. Une fois l'initialisation terminée on le fait tourner 162 fois sans produire de sortie.

### 3.5 Attaque sur les F-FCSR-H