

## Покретно светлећи мост



**Назив пројекта:** „Мост“

**Тема пројекта:** „Покретно светлећи мост“

**Чланови тима за "Квиз Мост Математике" (ученици са три часа математике недељно):**

- Весели Јарослав 14
- Месарош Давид 24
- Вељко Благојевић 32
- Достанић Настасја 42

**Аутори пројекта:**

Ученици- главни аутори пројекта:

- Михајло Ђошић 26, израда металне конструкције моста;
- Антонио Анкајцан 42, израда технологије за покретање и осветљење моста;
- Павлов Никола 42, креирање "Математичке игре" и апликације "Занимљивости о мостовима";
- Брмбота Милорад 42, аутор видео клипа, слике лога за мајице;

Ученици- учесници у пројекту:

- Милешић Лука 26, идејно решење конструкције моста;
- Бранко Калинић 24, нацрт моста, нацрт орнамента;
- Шимшић Страхиња 26, израда кућице, клупице, бунара;
- Стојановић Огњен 26, израда кутије- постоља за мост;
- Живорад Урошевић 45, израда бродића;
- Бојић Живојин 42, аутор клипа;
- Достанић Настасја, учесница у реализацији фазе "Прорачун физичких карактеристика моста" и математичког појма "Симетрија";
- Калинић Бранко 24, учесник у фази "Оптерећење, количина и цена материјала";
- Михајло Ђошић 26, учесник у реализацији "Лего мост";
- Милешић Лука 26, учесник у реализацији "Лего мост";

**Професори:**

- Данка Мириловић, професор математике и рачунарства, ментор пројекта, координатор израде макете и пројекта "Покретно светлећи мост" ;
- Немања Ђорђевић, професор електро групе предмета, координатор фазе "Прорачун физичких карактеристика моста";
- Сибиновић Зоран, професор практичне наставе;

- Марко Веселиновић, помоћни наставник, координатор израде "Лего моста";
- Марко Стојановић, помоћни наставник, аутор снимка моста и фотографија.

**Име и презиме ментора, звање ментора, мејл адреса:**

Мириловић Данка, мастер математичар, [danka\\_adamovic@yahoo.com](mailto:danka_adamovic@yahoo.com)

**Име школе:** Електротехничка школа „Никола Тесла“ Панчево

**Адреса школе:** Максима Горког 7, 26000 Панчево

**Имејл адреса школе:** etsntesla@etsntesla.edu.rs

**Број телефона школе:** 013-2352615

**Датум почетка и завршетка пројекта:** 5.03.2018. - 10.5.2018.

## Садржај:

<b>II Опис пројекта.....</b>	<b>5</b>
<b>1. Циљ пројекта .....</b>	<b>5</b>
<b>2. План пројекта .....</b>	<b>5</b>
<b>3. Разрада пројекта.....</b>	<b>6</b>
<b>4. Извођење пројекта .....</b>	<b>7</b>
<b>5. Представљање пројекта.....</b>	<b>8</b>
5.1. Израда макете покретно светлећег моста .....	8
5.2. Технологије које су коришћене за развој и контролу моста.....	9
5.3. Креирање "Математичког квиза" .....	13
5.4. Лего мост .....	14
5.5. Презентација пројекта.....	16
5.6. Креирање апликације "Занимљивости о мостовима" .....	16
<b>6. Рефлексија о пројекту .....</b>	<b>16</b>
<b>7. Математички појмови.....</b>	<b>17</b>
7.1. Симетрија .....	17
7.2. Геометријски ликови и фигуре.....	21
7.3. Примена математичких функција .....	21
7.3.1. Оптерећење моста .....	21
7.3.2. Количина и цена материјала .....	23
7.3.3. Прорачун физичких карактеристика моста .....	24
<b>8. Софтверски алати .....</b>	<b>31</b>
<b>Литература .....</b>	<b>34</b>

## **II Опис пројекта**

### **1. Циљ пројекта**

Покретно светлећи мост је пројекат направљен са циљом да промовише математику и примену знања из математике, програмирања и стручних предмета стечених у Електротехничкој школи. Пројекат је осмишљен да се састоји из више делова, реализатори пројекта су ученици "ЕТШ Никола Тесла" из Панчева. Први део пројекта је израда макете "Покретно светлећег моста", која ће бити контролисана андроид апликацијом, "Математичким квизом" чије тачно решавање ће омогућити подизање моста и спуштање моста (у реалној ситуацији пролаз брода испод моста). Други део пројекта "Покретно светлећи мост" је остваривање идеје да се примене математичке функције и знања стручних предмета у израчунавањима површине и запремине геометријских тела, прорачуна цене утрошеног материјала за израду моста, оптерећења, прорачун брзине подизања моста, потребног времена за које ће се мост подићи, силе затезања ужета, као и момента мотора. Трећи део пројекта је израда покретног "Лего моста", чији су основни елементи Лего коцке. Четврти део пројекта је израда видео клипа и презентације у сврси презентовања пројекта на такмичењу и креирање андроид апликације "Занимљивости о мостовима".

Макета "Покретно светлећег моста" и "Лего моста" ће бити представљене на традиционалној школској манифестацији „Математика из Теслиног дворишта“, која промовише значај и лепоту математике ученицима основних и средњих школа, као и на манифестацијама које имају за циљ промоцију школе.

### **2. План пројекта**

Израда макета два покретна моста од различитих материјала: "Лего моста", од лего коцки и "Покретно светлећег моста" од метала.

"Покретно светлећи мост" не постоји у стварности, конструкција ће бити од метала (лим и арматура), његов изглед, начин функционисања- омогућавање покретности и осветљења ће бити реализовано помоћу идеја и креација ученика "ЕТШ Никола Тесла" из Панчева, уз координацију ментора. Покретност моста контролисаће андроид апликација коју ће направити ученици. Главни математички појам који ће бити идејни симбол за израду нацрта "Покретно светлећег моста" ће бити симетрија. Основни елементи конструкције ће бити геометријски ликови - други математички појам који ће се појавити у овом пројекту. Након завршене макете ученици ће се бавити практичном применом математичких функција: израчунавањима површина

геометријских ликова, запремина тела, као и прорачунима потребног материјала, цене моста, оптерећења као и прорачунима везаним за физичке карактеристике покретно светлећег моста (брзине подизања моста, потребног времена за подизање, израчунавање силе затезања ужета, прорачун момента мотора). Примена математичких функција ће бити трећи математички појам који ће се појавити у овом пројекту.

Приликом конструкције "Лего моста" користиће се готови елементи пакета "Lego Minstore", лего коцкице и мотори који су саставни део пакета, који ће омогућити његово покретање преко бесплатне андроид апликације "Lego Minstore Commander".

### 3. Разрада пројекта

Окупљање заинтересованих ученика и организација у тимове, зависно од њихових склоности и интересовања и изношење плана пројекта.

Ученици ће креирати изглед (нацртати цртеж) по ком ће направити макету "Покретно светлећег моста" од метала. Конструкција моста ће бити симетрична и заснива се на идеји да ће се мост састојати из два дела (правоугаоних површи), које се подижу истовремено на горе, под одређеним углом и на тај начин омогућавају пролаз великих бродова испод моста. Мост ће бити осветљен лед расветом.

Приликом креирања нацрта "Покретно светлећег моста" кључан математички појам је симетрија. Конструкцију моста чиниће четири стуба који су међусобно спојени горњом везом, облика једнакокраког троугла која носи главни украс моста са обе стране. Стубови ће бити металне шипке (арматура) пресавијене у саставу три геометријска лика: правугаоника, једнакокраког троугла и делтоида (повезаних заједничком страницом и теменом). Веза која ће спајати стубове ће бити метална шипка (арматура) пресавијена у облику: правоугли троугао, правоугли трапез, правоугли трапез, правоугли троугао (сви геометријски ликови су повезани заједничком страницом). Украси су орнаменти креирани на основу слике коју ће урадити ученици, чији је мотив симетрична фигура у равни. Главни украс - орнамент ће бити постављен (залемљен) на средини шипке која повезује стубове - испод основних страница правоуглих трапеза са обе стране. Спој обе покретне стране моста ће бити сакривен малим орнаментом, тако да ће мост давати утисак целине која се не раздваја. Макета покретно светлећег моста ће бити осно симетрична. Прилаз са леве и десне стране моста ће бити правугаоне површи које ће бити повезане канапима са највишом тачком стубова. Покретне површи ће бити правугаоног облика, и на њиховим крајевима ће бити заштитна ограда за аутомобиле, кроз коју ће бити постављено осветљење. Након израде чврстих делова моста и украса, следи фарбање моста. Мост ће бити офарбан у сребрно сиву боју, при чему ће пут- асфалт по коме се крећу возила бити офарбан тамније сивом бојом.

Друга етапа је омогућавање покретности и извођење осветљења моста. У овој фази ученици ће креирати апликацију која ће бити покренута са мобилног телефона у виду "Математичке игре", чији ће тачни одговори на математичка питања омогућити контролисано дизање, односно спуштање моста. Игра ће садржати општа математичка питања (питања везана за геометријске ликове и фигуре, примене математичких функција, основне рачунске операције, питања из историје математике). Више од 50% тачних одговора на постављена питања омогућиће покретност моста, у супротном мост се неће подићи. Мост ће бити постављен на кутији од иверице димензије 130цм, висине 15 цм, ширине 50 цм, облика квадрата, у којој ће бити постављени потребни делови који омогућавају покретност и осветљење.

Наредна фаза у изради моста је украшавање рељефа околине моста (израда дрвца, бродича, бунарчића, клупица, кућице, воде и земље). Израду детаља ће учинити ручно ученици. Украсна дрвца ће бити направљена од бакарних жица и перлица, бродич, клупице и кућица- сојеница од дрвета. Површине воде и траве ће се креирати бојењем стиропора темпером. Површине ће бити украшене природним камењем.

Следећа фаза је део пројекта који се односи на практичну примену математичких функција у израчунавањима површина и запремина геометријских фигура који се појављују у конструкцији покретно светлећег моста, као и прорачунима везаним за електро струку, физичких карактеристика моста: прорачун брзине подизања моста, потребног времена за подизање, прорачун силе затезања ужета, као и момент мотора. У овој фази пројекта биће извршен прорачун количине потребног материјала потребне за израду покретно светлећег моста. За утрошени материјал се може пронаћи цена, па се може и израчунати прорачун цене моста- цена самог материјала, без трошкова прављења, монтаже и обраде. Код оптерећења мора се водити рачуна да није оптерећење само услед тежине људи и превозних средстава. Обавезно је напоменути да на оптерећење утиче ветар, киша, снег. Мост никако не може бити потпуно крут, мора да буде еластичан како не би пукао.

Покретан Мост од "Лего" коцкица ће бити креиран помоћу коцкица и потребних делова (мотора) из пакета "Lego Minstore", које поседује школа. Покретност "Лего моста" ће омогућити апликација "Lego Minstore Commander", која се бесплатно преузима са Play Store. Контрола моста је преко блутута. "Лего мост" ће бити коришћен у сврси промоције школе.

#### **4. Извођење пројекта**

Извођење пројекта ће се вршити у више фаза:

- окупљање заинтересованих ученика и подела задужења на основу плана пројекта "Покретно светлећи мост";

- идејна конструкција Покретно светлећег моста;
- израда нацрта за главни орнамент моста;
- реализација израде макете Покретно светлећег моста;
- фарбање макете и израда постоља за макету;
- рад на осветљењу моста;
- рад на технологијама који омогућавају покретљивост- подизање и спуштање моста;
- креирање андроид апликације "Математичка игра";
- израда детаља за украшавање постоља за макету (кућице- сојенице, бунара, клупица, бродића од дрвета, и украсних дрваца од жице и перлица);
- украшавање постоља за макету (креирање рељефа- воде, траве) додавање украсних ручно креираних детаља;
- оптерећење и прорачун потребне количине и цене материјала за израду покретно светлећег моста;
- прорачун физичких карактеристика моста (прорачун брзине подизања моста, потребно време за које ће се подићи, силе затезања ужета, као и момент мотора);
- израда "Лего моста";
- истраживање математичког појма симетрија;
- израда филмића о креирању Покретно светлећег моста у сврси презентовања дела пројекта;
- креирање апликације "Занимљивости о мостовима" у сврси презентације пројекта;
- израда презентација.

## **5. Представљање пројекта**

### **5.1. Израда макете покретно светлећег моста**

Конструкцију макете Покретно светлећег моста чине четири стуба (арматура пречника 0,8 cm), при чему су предњи и последњи повезани горњом везом- шипком (арматура пречника 0,8 cm), пресавијена у више геометријских фигура, које заједно формирају једнакокраки троугао који у подножју висине из горњег темена на основицу носи орнамент. Површине моста по којима се крећу возила су направљене од лима дебљине 1,5 mm (лим је лаган и електромотор може да га лако подигне), орнаменти су од лима дебљине 6mm, канапи тесарска жица пречника 4mm. Покретно светлећи мост не постоји у природи, његова конструкција је направљена по нацрту ученика, на начин на који је детаљно наведен у опису разраде пројекта. Ученици су направили цртеж главног украса- орнамента, који је њихово идејно решење. Приликом израде водило се



рачуна да висина стубова мора бити већа од дужине једне стране моста јер у супротном макета покретно светлећег моста не би могла да се подиже. Да би се добио ефекат да мост није покретан, када га први пут погледамо, постављен је мали орнамент у облику цвета. Након израде макете Покретно светлећи мост је префарбан у светло сиву боју, при чему је боја трака по којој се крећу возила тамно сива.

Након омогућавања покретности и извођења оветљења, ученици су радили на сређивању околине моста. Ручно су израђивани детаљи рељефа. Украсна дрвца су прављена од жице и перлица. Површина воде и траве је добијена лепљењем плоча од стиропора а затим префарбавањем темперама. Аутентичност воде је омогућило наношење силикона на фарбани стиропор. Рељеф је украшен природним камењем. Ученици су ручно израдили бродиче, кућицу, бунар, клупице од дрвета који су касније фарбани лесолом и сјајем.

## **5.2. Технологије које су коришћене за развој и контролу моста**

За контролу мотора који подиже/спушта мост коришћена је развојна плоча Arduino Uno заједно са Breakout плочом L298N Dual H-Bridge Motor Controller module. Сврха Breakout L298N Dual H-Bridge Motor Controller module плоче је контрола мотора у оба смера преко дигиталног сигнала, која омогућава подизање и спуштање моста. Комуникација између Arduino и рачунара/Bluetooth HC-05 module се врши преко serial протокола. Arduino чека команде са Serial порта које се шаљу када се у апликацији заврше сва питања квиза. Када прими те команде, он подиже или спушта мост у зависности од тога која је команда послата - ако је у апликацији погођено више од 50% питања.

```
while (Serial.available() > 0)
{
    char recieved = Serial.read();
    inData += recieved;

    // Process message when new line character is recieved
    if (recieved == '\n')
    {
        //Serial.print("Arduino Received: ");
        Serial.print(inData);
        broj=inData.toInt();
        //Serial.print(broj);
        if (broj==1) {
            turnup();

        }
        if (broj==2) {

            turndown2();

        }
        if (broj==3) {

            set_up();


        }
        if (broj==4) {

            set_down();

        }
        |

        //delay(20);

        inData = ""; // Clear recieved buffer
    }
}
```



Када добије команду да подигне мост, пусти струју моторима у истом смеру и чека да се направи контакт између покретног дела моста и жице, што је сигнал који означава да је покретни део моста стигао на максималну горњу позицију.

```
void turnup() {

digitalWrite(3, HIGH);
digitalWrite(4, LOW);
digitalWrite(5, HIGH);
digitalWrite(6, LOW);
c=0;
a=0;
delay(2000);
while(true) {

val1= digitalRead(sensorPin0);
val2= digitalRead(sensorPin1);
//Serial.println(val1);
//Serial.println(val2);

if (val1==0)
{
    Serial.println("ugasen prvi");
    digitalWrite(3, LOW);
    digitalWrite(4, LOW);
    c=1;
}
if (val2==0)
{
    Serial.println("ugasen drugi");
    a=1;
    digitalWrite(5, LOW);
    digitalWrite(6, LOW);

}
if (a==1 && c==1)
{
    Serial.println("zavrseno");
    stop();
    delay(50);
    break;
    break;
}

}
```

Функција за покретање покретно светлећег моста на горе и заустављање када се подигне до задње тачке

Програм је креиран у Arduino IDE, <https://www.arduino.cc/>

Android апликација је урађена у framework cordova који омогућава у Javascriptu да се користи native функције за андроид апликацију.

```
var address = "98:D3:31:40:20:E6";
function connectBluetooth(){
  bluetoothSerial.isConnected(
    function() {
      console.log("Bluetooth is connected");
    },
    function() {
      bluetoothSerial.connect(address, deviceConnected, function (error) {
        alert('Connection not successful.');
```

```
        //app.showError(error);
      })
      console.log("Bluetooth is *not* connected");
    }
  );
};

function deviceConnected(){
  connect=1;
  //alert("Connected to "+ address);
  console.log("Connected to "+ address);
}
var data;
function sendBluetoothDataUp(){
  data = "1\n";
  bluetoothSerial.write(data, showSuccess, showError);
}
function sendBluetoothDataDown(){
  data = "2\n";
  bluetoothSerial.write(data, showSuccess, showError);
}
```

Функције за повезивање на Bluetooth и слање команди на андроид

Frontend је рађен у HTML/CSS и користи се webview који је уграђен у corodovu.

За напајање се користи дуално напајање 12V/5V.

5V се користи за arduino i Bluetooth module као и за моторе.

12V се користи за LED траку.

### 5.3. Креирање "Математичког квиза"

**Функционалност.** Ученик- играч одговара на питања на свом таблету или андроид телефону. Квиз се састоји од 10 питања која се генеришу насумично. Питања су опште математичке садржине (својства геометријских ликова и тела, примене математичких функција, основних својства рачунских операција, питања из историје математике). Повезивање апликације и моста је преко bluetooth-a. Уколико је ученик-играч одговорио на више од 50% питања тачно, из апликације се шаље команда да се мост подигне. Ако се не одговори тачно, мост се неће подићи. Како се питања одговарају, у квизу се мењају иконице које корисник види. Ако се иконица не промени, корисник ће знати да није тачно одговорио. Сва питања имају облик тврдње, са две понуђене опције за одговор: „Тачно“ и „Нетачно“. На крају квиза, ученик- играч на свом таблету или телефону добија проценат питања на које је одговорио тачно.

**Израда:** Комплетна апликација израђена је у JavaScript програмском језику. Коришћен је Phonegap framework. На отварању апликације, она се повезује bluetooth-ом са Arduino уређајем на макети моста, и када пошаље команду, Arduino уређај прима ту команду и у зависности од ње он подиже или спушта мост.

Функција за повезивање са мостом:

```
bluetoothSerial.connect(address, deviceConnected, function (error) {  
    console.log('Connection not successful.');
```

Функција за слање команде да се мост подигне или спусти:

```
function sendBluetoothDataUp() {  
    bluetoothSerial.write(data, showSuccess, showError);  
}
```

Ова функција се позива ако је више од 50% одговора тачно.

## 5.4. Лего мост

"Лего мост" направљен је од сета лего коцкица, које поседује школа под именом Lego Education Mindstorm ev3, који се користи на практичној настави. Кључна идеја приликом креирања овог моста је направити да он буде покретан. Покретност лего моста омогућавају 2 серво мотора који су контролисани brick-ом. Ови мотори су саставни део сета. Lego brick је заправо мали лего рачунар, који се контролише помоћу апликације Lego Mindstorm Commander преко bluetooth-а. Повезивање је преко генерисаног пин-а који пише на самом Lego brick-у. Ова апликација садржи већ направљене шеме за неке лего роботе, али и даје могућност креирања нових, избором основне команде: "Joystick/ Create Comande". Преузимање апликације је бесплатно са Play store. У апликацији је одабран начин контролисања Лего моста. Приликом креирања Лего моста одабран је џојстик. Померање даље од центра омогућиће брже кретање моста.



Слика 1. Шеме направљених робота



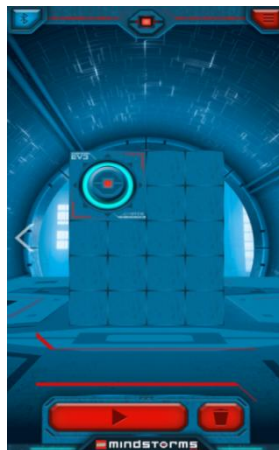
Слика 2. Команда за креирање нових шема



Слика 3. Поља у коме се додају контроле за мост



Слика 4. Процес додавања џојстика



Слика 5. Сачувана шема

## 5.5. Презентација пројекта

У сврси презентације пројекта урађен је видео клип у програму за уређивање видео записа Adobe Premiere. Видео клип је направљен мешавином клипова, слика, снимљених изјава ученика о деловима које су они реализовали као и других мултимедијалних материјала насталих током израде Покретно светлећег моста, помоћу видео ефеката и прелаза које овај софтвер омогућава. Главни циљ видео клипа је да покаже причу како је настао и како је израђен Покретно светлећи мост, како је омогућено да он буде покретан, које андроид апликације га покрећу, и завршава снимком моста на коме се виде детаљи рељефа околине.

На презентацији пројекта користиће се PowerPoint презентација за презентовање одређених делова пројекта.

## 5.6. Креирање апликације "Занимљивости о мостовима"

На презентацији пројекта ученици ће приказати гостима и AR апликацију коју су они направили и назвали : "Занимљивости о мостовима".

**Опис софтвера.** Апликација ради на принципима Augmented Reality(AR)-проширена односно допуњена реалност. Проширена реалност означава да корисник свет око себе види "допуњен" помоћу компјутерски креираних објеката (то може бити неки текст, слика, звук, 3D објекат). Овакве апликације омогућавају проширење софтверских могућности камере. Корисник укључујући своју камеру, помоћу ове апликације може да "види" објекте око себе, којих у стварности нема, а који су додати помоћу AR апликације (на пример свемирски брод, ауто, диносаурусе или друге објекте). AR технологија је слична VR(Virtual Reality) технологији- која целокупну реалност замењује виртуелном помоћу коришћења специјалних наочара и друге опреме.

**Опис апликације.** Укључивање андроид апликације "Занимљивости о мосту", покреће камеру која када се усмери ка слици која је најпре дефинисана (у овом случају ће слика бити лого са мајица које ће ученици носити), приказаће се текст- занимљиве чињенице о мостовима и математици, испод, изнад или преко те одређене слике. Ово је могуће тако што ће ученици у апликацију да убаце слику логa Покретно светлећег моста- и испрограмирају да када камера препозна ту одређену слику, приказаће одређене објекте, у овом случају текст.

## 6. Рефлексија о пројекту

Чест проблем у свакодневној настави математике је што ученици не виде практичну сврху тема која им се предаје, честа питања су где се то користи. Највећа добробит рада на овом пројекту је искористивост- употребљивост знања из различитих



области. Рад на пројекту омогућио је развијање тимског рада, сарадничких односа, развој креативности, поштовање туђег мишљења са заједничким циљем, изграђивање самопоуздања, самопотврђивање. Повезивање различитих области математике, корелација међу предметима, зачање заинтересованости ученика, схватање неопходности планирања времена за испуњење циљева, одређивање приоритета. Проналажење путева за будућа занимања, схватање значаја предузетништва (свега што је потребно да би се нешто продало на тржишту).

## 7. Математички појмови

"Покретно светлећи мост" је макета моста који не постоји у реалности. Приликом израде нацрта главни мотив је била примена математичких појмова *симетрије* и *геометријских ликова*. Следећа идеја при реализацији пројекта била је да трећи математички појам буде *примена математичких функција*, где ће ученици повезујући стечена знања из физике, основа електротехнике и других стручних предмета вршити обрачун количине, цене материјала, бавити се оптерећењем и израчунавањем брзине подизања моста, потребног времена за које ће се мост подићи, обрачун силе затезања ужета, као и момент мотора а у сваком од тих обрачуна незаобилазна је примена математичких функција у обрачунима.

### 7.1. Симетрија

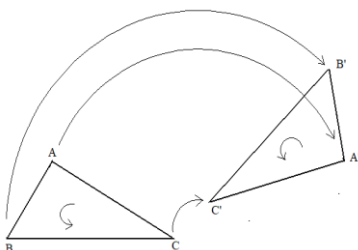
Реч симетрија у свакодневном језику је синоним за потуни склад, равномерни распоред, складност пропорција и лепоту облика. Симетрија се сматра једном од највећих чуда природе, многи научници тврде да пажљиво уочавање симетрија може да допринесе бољем разумевању света који нас окружује, као и разумевању процеса у њему. Најлепше светске архитектонске грађевине су изграђене на принципима симетрије (Стојановић, Вигњевић, Поповић, 2018).

Историјски гледано, стари Грци су разматрали међусобно подударне ликове, у делима Талеса може се наћи став о подударности троуглова, Платон говори о једнаким и сличним деловима, што се може сматрати језгром појма "симетрије". Питање о броју једнаких или сличних делова се може тумачити истоветним са питањем броја симетрија тог тела, под одређеним претпоставкама (Лучић, 2009).

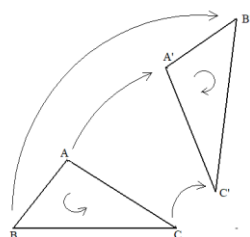
Изометријско пресликавање равни (изометрија) је обострано једнозначно пресликавање које дужи пресликава на њима подударне дужи. Изометријска пресликавања чувају колинеарност и распоред тачака. Инваријантне тачке су оне тачке које се сликају у саме себе, због овог својства се називају непокретне тачке.

Постоје две врсте изометријских трансформација равни  $E^2$ :

- директне изометријске трансформације, уколико се изометријском трансформацијом истосмерни троуглови преводе у истосмерне троуглове, тј. не мења се оријентација равни (слика 1.);
- индиректне изометријске трансформације, уколико се изометријском трансформацијом супротносмерни троуглови преводе у супротносмерне троуглове, тј. мења се оријентација равни (слика 2.).



Слика 6. Директна изометријска трансформација



Слика 7. Индиректна изометријска трансформација

Идентична трансформација равни је директна изометријска трансформација.

Свака изометријска трансформација је једнозначно одређена са два пара одговарајућих тачака. Одатле следи да је директна изометрија одређена са две инваријантне тачке коинциденција.

Композиција било које две исте изометријске трансформације (свеједно да ли су обе директне или индиректне) је директна изометријска трансформација. Композиција једне директне и једне индиректне изометријске трансформације равни увек даје индиректну трансформацију те равни. Ово својство омогућава да скуп свих директних изометријских трансформација је некомутативна подгрупа групе свих изометријских трансформација равни.

*Дефиниција:* Пресликавање равни, при којем се свака тачка  $A$  те равни пресликава у тачку  $A'$ , симетричну тачки  $A$  у односу на праву  $s$  те равни, називамо основом симетријом у односу на праву (осу  $s$ ). Ознака за ово пресликавање је  $I'_s$  (Миличић, Стојановић, Каделбург, Боричић, 1994).

**Дефиниција:** За две фигуре  $F$  и  $F'$  равни  $\alpha$ , кажемо да су симетричне у односу на праву  $s$  те равни (оносиметричне), ако свакој тачки  $M$  фигуре  $F$  одговара тачка  $M'$  фигуре  $F'$ , тако да је  $I_s(M) = M'$ , и обрнуто, свакој тачки  $N'$  фигуре  $F'$  одговара тачка  $N$  фигуре  $F$ , тако да је  $I_s(N') = N$ . Ознака:  $I_s(F) = (F')$  (Миличић, Стојановић, Каделбург, Боричић, 1994).

Осна симетрија се назива и осном рефлексијом или краће рефлексија. Права  $s$  је оса симетрије или симетрала фигуре  $F$ . Примере оносиметричних фигура можемо наћи свуда око нас као што су школска табла, сто. Оносиметричне фигуре које имају једну осу симетрије су: делтоид, једнакокраки трапез, једнакокраки троугао. Фигуре са две осе симетрије су: ромб и правугаоник. Пример фигуре која садржи три осе симетрије је једнакостранични троугао. Квадрат има четири осе симетрије а круг има бесконачно много оса симетрије. Свака права која пролази кроз пречник је оса симетрије круга.

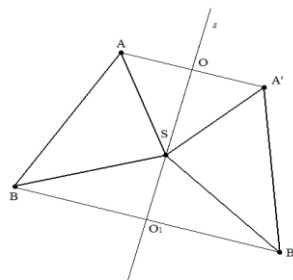
**Теорема 1:** Осна симетрија (рефлексија) је изометрија равни.

**Доказ:** Нека је дуж  $A'B'$  симетрична дужи  $AB$  у односу на праву  $s$ .

Најпре ћемо посматрати случај уколико се тачке  $A$  и  $B$  налазе на оси  $s$ , тада је  $A=A'$ ,  $B=B'$ , односно  $AB=A'B'$ .

Посматрајмо сада случај: нека се  $A, B \notin s$ , (видети слику 3. ) и нека је  $S$  тачка праве  $s$ , а  $O$  средиште дужи  $AA'$ . Тада су углови  $AOS$  и  $A'OS$  једнаки и прави,  $AO=A'O$ ,  $OS=OS$ , одакле следи да су троуглови  $AOS$  и  $A'OS$  подударни по ставу СУС. Последица подударности ових троуглова је да су  $AS=A'S$  и  $\angle ASO = \angle A'SO$ . На сличан начин се доказује да из подударности троуглова  $BSO_1$  и  $B'SO_1$  следи да су  $BS=B'S$  и  $\angle BSO_1 = \angle B'SO_1$  ( $O_1$  је средиште дужи  $BB'$ ). Одавде се закључује да је  $\angle ASB = \angle A'SB'$ , и из једнакости:  $AS=A'S$  и  $BS=B'S$  следи да су троуглови  $ABS$  и  $A'B'S$  подударни по ставу СУС. Одатле следи да је:  $AB=A'B'$ .

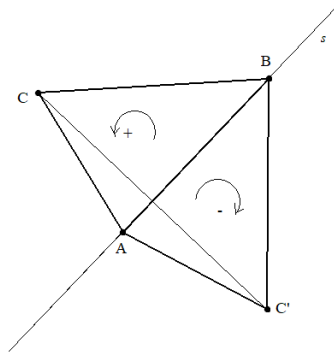
Приликом доказивања потребно је посматрати случај када је једна од крајњих тачака дужи  $AB$  на оси, што се слично доказује. Следећи случај је уколико је  $AB$  нормална на праву  $s$ , тада су  $AB$  и  $A'B'$  зборови или разлике једнаких дужи, па се одатле може закључити да важи:  $AB=A'B'$ .



Слика 8. Једнакост дужи  $AB$  и  $A'B'$

Теорема 2: Рефлексија је индиректна изометријска трансформација

Нека су  $A$  и  $B$  тачке које припадају правој  $s$ , а  $C$  и  $C'$ , такве да:  $I_s(C) = C'$  и налазе се ван праве  $s$ , као на слици 4. По дефиницији тачке  $C$  и  $C'$  се налазе са разних страна праве  $s$ , па су површи  $ABC$  и  $ABC'$  са различитих страна. То значи да су орјентисане површи  $ABC$  и  $ABC'$  различитих орјентација.



Слика 9. Супротно орјентисане површи

Уколико би тачке  $A, B$  и  $C$  пресликали рефлексијом у тачке  $A', B'$  и  $C'$ , а затим пресликали тачке  $A', B'$  и  $C'$  истом рефлексијом добили би тачке  $A, B$  и  $C$ . То значи да композиција две рефлексије је коинциденција тј.  $I_s \circ I_s = I_i$ . Ово својство се назива својством инволутивности рефлексије.

Последица ове теореме је да свака индиректна изометрија равни, са бар једном инваријантном тачком је рефлексија.

Оно што се може из горе наведеног закључити је да су:

- све осносиметричне фигуре међусобно подударне;
- све тачке које се налазе на оси симетрије су непокретне;
- Непокретне су све праве које су нормалне на осу, али њихове тачке осим тачке на оси, нису непокретне;
- Композиција две узастопне осне симетрије је идентичко пресликавање;
- Рефлексија је индиректна изометрија равни.

Приликом креирања нацрта макете "Покретно светлећег моста" замишљено је да он буде осно симетрична фигура. Лева и десна страна моста су подударне осносиметричне фигуре. Основни делови конструкције чине четири стуба, где су предња два повезана горњом везом - арматуром, као и последња два у облику једнакокраког троугла. Стубови су направљени од арматуре пресавијене у саставу три геометијска лика: правугаоника, једнакокраког троугла и делтоида (повезаних заједничком страницом и теменом). Сваки стуб је осносиметричан. Горња веза стубова је носач орнамента. Орнамент је направљен на основу цртежа ученика, цртањем кружница које се међусобно полове и он је сам за себе осносиметрична фигура. Шипка

која чини везу предњих и задњих стубова је пресавијана у облику правоугли троугао, правоугли трапез, правоугли трапез, правоугли троугао (сви геометријски ликови су повезани заједничком страницом). Гледајући од напред ови геометријски ликови формирају једнакокраки троугао чија висина из горњег темена представља осу симетрије сваке стране. У подножју висине овог троугла се налази осносиметрични орнамент. Прилаз са леве и десне стране моста чине симетричне правугаоне површи, повезане канопима са највишом тачком стубова. Покретне површи су такође подударне.

Раванска симетрија је индиректно пресликавање простора  $E^3$ , којим се свака тачка пресликава у тачку симетричну у односу на дату раван. Ова раван се назива симетрална раван. Раванска симетрија се назива и раванском рефлексijом.

Покретно светлећи мост, посматран у простору има две раванске симетрије: симетричан је у односу на раван, одређену правом која пролази кроз средину пута и нормална је на пут, или се раван може поставити кроз средиште орнамента и нормална је на праву која спаја две покретне површи моста.

## **7.2. Геометријски ликови и фигуре**

Приликом израде нацрта који је послужио за креирање макете "Покретно светлећег моста" коришћени су геометријски ликови: правоугли троуглови, правоугли трапези, правугаоници, једнакокраки троуглови, делтоиди, круг. Опис нацрта је наведен у тексту који је претходио, па неће бити понављан.

Геометријски ликови и фигуре, њихови односи, површине, запремине, чине одређени део базе питања у "Математичком квизу". Ову базу чине питања која се односе на основна својства геометријских ликова и фигура, примене математичких функција, основних својства рачунских операција, питања из историје математике). Сврха овог квиза је да успех на квизу већи од 50% питања подиже, односно спушта мост, сам квиз и базу питања су осмислили и креирали ученици.

У опису појма примене математичких функција који следи, могу се уочити израчунавања површине, запремине геометријских тела која чине мост.

## **7.3. Примена математичких функција**

### **7.3.1. Оптерећење моста**

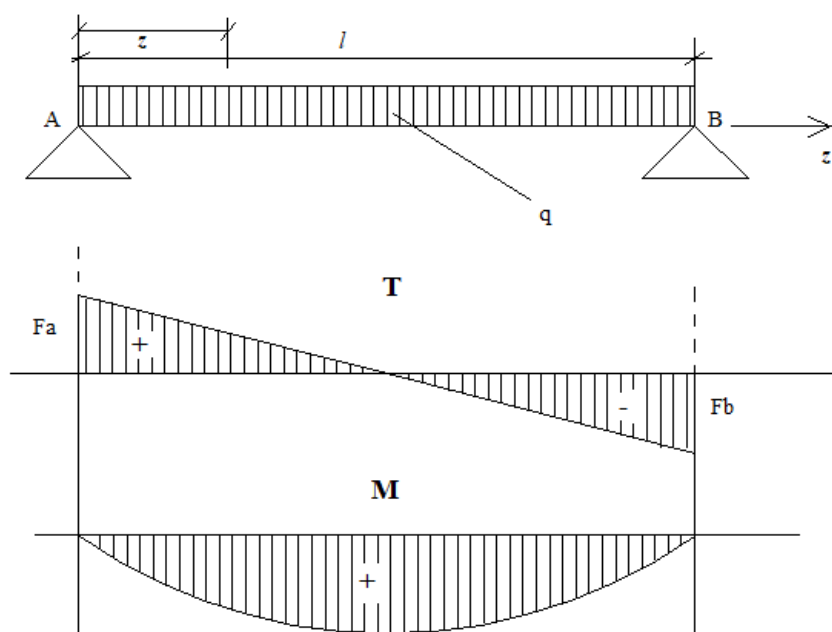
Одређивање оптерећења представља веома сложен процес, поготово када је у питању мост. То није оптерећење које је у сваком тренутку времена исто, већ се оптерећење на сваком мосту мења из минута у минут. Оптерећење зависи од броја и тежине аутомобила који се налази на мосту у датом тренутку, долази до повећања оптерећења уколико се на мосту налази воз, аутобуси, цистерне који имају много већу тежину од аутомобила. Оптерећење на мосту представљају и пешаци (уколико постоји

пешачка стаза) као и сама конструкција моста. Поред наведених оптерећења морамо водити рачуна и о снегу, киши и ветру, који значајно утичу на конструкцију моста. Након прорачуна оптерећења потребно је добијени резултат повећати за 20 - 30%, како би смо осигурали стабилност конструкције. Мост не сме да буде потпуно крут, јер у том случају може доћи до његовог пуцања, па се зато код оптерећења врши прорачун угиба, нагиба, еластичности.

У наставку следе два примера (примери су дати у општим бројевима и постоје различите комбинације оптерећења и дијаграма, а у примерима су дати најпростији случајеви)

**Први Пример :** Ако мост посматрамо у целисти:

На Слици 1. приказана је расподела попречне силе дуж моста као и момент.



Слика 10. Расподела попречне силе и момента

Једначина нагиба савијене греде има облик:

$$u'(z) = \frac{q \cdot l^3}{24 \cdot E \cdot I} \left( 1 - 6 \cdot \left( \frac{z}{l} \right)^2 + 4 \cdot \left( \frac{z}{l} \right)^3 \right)$$

Једначина еластичне линије савијене греде има следећи облик:

$$u(z) = \frac{q \cdot l^4}{24 \cdot E \cdot I} \left( \frac{z}{l} - 2 \cdot \left( \frac{z}{l} \right)^3 + \left( \frac{z}{l} \right)^4 \right)$$

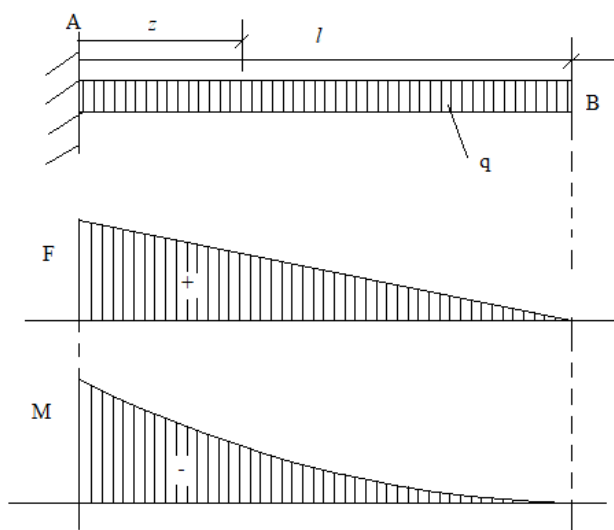
**Други пример:** Ако посматрамо пола моста (када дође до његовог раздвајања) – као конзола

Једначине у овом случају имају следећи облик:

$$u'(z) = \frac{q \cdot l^3}{6 \cdot E \cdot I} \left(1 - \left(1 - \frac{z}{l}\right)^3\right)$$

$$u(z) = \frac{q \cdot l^3}{24 \cdot E \cdot I} \left(-1 + 4 \cdot \frac{z}{l} + \left(1 - \frac{z}{l}\right)^4\right)$$

На Слици 2. приказана је расподела силе и момента дуж једне половине моста.



Слика 11. Расподела силе и момента дуж половине моста

Ознаке на сликама и у формулама имају следеће значење:

$l$  – дужина моста (или половине моста)

$A$  – ослонац  $A$

$B$  – ослонац  $B$

$q$  – континуално оптерећење (саме конструкције и аутомобила)

$z$  – координатна оса

$T$  – попречна (трансверзална) сила

$M$  – момент

$E$  – модуло еластичности

$I$  – момент инерције

### 7.3.2. Количина и цена материјала

Укупна запремина моста је:

$$V = 4306,524 \text{ cm}^3 = 4,3065 \text{ dm}^3$$

Следећи подаци су преузети са Интернета:

Специфична густина челика износи:  $\rho = 7,85 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3} = 7850 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$

Цена челика од ког ће бити направљен мост је  $600\$/t \approx 60000 \text{ din/t}$

Укупна маса моста може се израчунати уколико нам је позната специфична густина челика и укупна запремина свих челичних делова. Маса се израчунава на следећи начин:

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow m = \rho \cdot V = 4,3065 \cdot 7,85 = 33,81 \text{ kg} = 0,03381 \text{ t}$$

Густина челика је приближно једнака густини гвожђа па се та разлика на нивоу ученичког рада може занемарити.

Уколико сада помножимо масу са ценом добијамо цену материјала од којег је начињена макета:

$$60\,000 \frac{\text{din}}{\text{t}} \cdot 0,03381 \text{ t} = 2028,6 \text{ din}$$

Како су, стварни објекти за које се интересујемо као што су авиони, бродови, солитери, мостови и сл., великих димензија понекад није могуће мерење на самом телу стварних димензија који се назива "објекат прототип", мерење се врши у лабораторијским условима на моделима мањих димензија (макетама).

Да би резултати мерења, добијени на моделу, могли да се примене на прототип потребно је да буде испуњен критеријум да су они истог геометријског облика и да су све димензије скалиране истим фактором  $k$ .

Макета покретно светлећег моста није направљена по узорку стварног моста, па ћемо посматрати само пут моста по коме се крећу возила. Наш модел је ширине 15 цм (ширина пута) а ширина две траке са пешачким стазама код мостова у реалности је приближно 7 метара. Добијамо да је фактор сличности (однос било које две дужине):

$$\frac{L_p}{L_m} = k = \frac{7}{0.15} = 46,666$$

На основу овога можемо закључити да би потребна количина материјала и цена истог била вишеструко већа од самог модела. Овај фактор не значи да би цена моста била 46,666 пута већа у односу на добијену цену макете. Да би се извршило израчунавање цене моста који би постојао у реалности, такав обрачун мора да садржи много више фактора, који превазилазе знање ученика средње школе, па се ученици током пројекта тиме неће бавити.

### 7.3.3. Прорачун физичких карактеристика моста

Под физичким карактеристикама моста подразумевамо прорачун брзине подизања моста, време за које ће се подићи, силу затезања ужета, као и момент мотора. Да би се извршио прорачун наведених физичких величина потребно је из каталога примењеног мотора очитати потребне карактеристике, које улазе у прорачун. Те



карактеристике обухватају: брзину обртања мотора, коефицијент редукције брзине, номинални напон и номиналну струју рада. На Слици 12. представљене су карактеристике примењеног мотора.

Features:				
Working Voltage	Parameters	DC 3V	DC 5V	DC 6V
Motor Parameters (No Gear Box)	RPM		125R / minute	
	Current		80-100mA	
	Reduction		48:1	
	No-load Speed	125R/minute	200R/minute	230R/minute
	Load Speed	95R/minute	152R/minute	175R/minute

Слика 12. Карактеристике мотора

Са Слике 12. се могу ишчитати основне карактеристике уграђених мотора:

номинални напон мотора је:  $U_n = 5 \text{ V}$  ;

номинална струја се креће у опсегу од 80 mA до 100 mA зависно од оптерећења;

коефицијент редукције је  $N = 48/1$ ;

брзина мотора - користимо брзину при оптерећењу  $\omega = 152 \text{ ob/min.}$

Сада се потребно дату брзину претворити у радијане по секунди. Како један обртај има  $2\pi$  радијана, а један минут 60 секунди, то се за брзину обртања добија:

$$\omega = 152 \cdot \frac{2\pi}{60} = 15,9 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Међутим, ово је брзина мотора на његовом вратилу. Како наш мотор поседује редуктор, то значи да ће брзина обртања бити умањена онолико пута колики је коефицијент редукције. Редуктор брзине заправо представља два зупчаника, један мањи, који се окреће већом угаonom брзином од другог, већег полупречника, сразмерно полупречницима датих зупчаника. Како је коефицијент редукције количник полупречника мањег и већег зупчаника то добијамо да је полупречник већег зупчаника  $r = 2,4 \text{ cm}$ . Периферна брзина, којом се креће уже које подиже мост по катуру, износиће:

$$v = \frac{\omega r}{N} = \frac{15,9 \cdot 2,4}{48} = 0,792 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$$

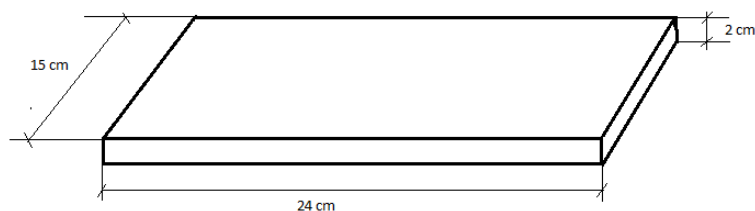
Дужина ужета када је мост спуштен износи 33 cm, а када је мост подигнут 26 cm. Дакле, дужина која се намота на осовину мотора при подизању представља разлику ове две дужине:

$$s = l_{sp} - l_{pod} = 33 - 26 = 7 \text{ cm}$$

Како се мост подиже константном брзином то се за време подизања добија:

$$t = \frac{s}{v} = \frac{7}{0,792} = 8,84 \text{ s}$$

За прорачун силе затезања потребно је прво израчунати масу половине моста која се подиже. Како она има облик шупљег квадрата димензија 24 cm, 15 cm и 2 cm, као што је приказано на Слици 13.



Слика 13. Димензије половине моста

Да би се израчунала маса моста потребно је познавати специфичну густину лима по квадратном метру, која се ишчитава из табеле са Слике 14.

Дебљина лима	Тезина kg/m <sup>2</sup>
1,0	8,00
1,2	9,60
1,5	12,00
2,0	16,00
2,5	20,00
3,0	24,00
4,0	32,00
5,0	40,00
6,0	48,00
7,0	56,00
8,0	64,00
9,0	72,00
10,0	80,00

Слика 14. Специфична густина лима у зависности од дебљине

Како је при прављењу моста коришћен лим дебљине 1,5 mm, то је специфична густина лима по квадратном метру  $\rho = 12 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2}$ .

Површина половине моста се може израчунати на основу формуле за израчунавање површине квадрата:

$$P = 2 \cdot (ab + ac + bc) = 2 \cdot (24 \cdot 15 + 24 \cdot 2 + 15 \cdot 2) \cdot 10^{-4} = 0.0876 \text{ m}^2$$

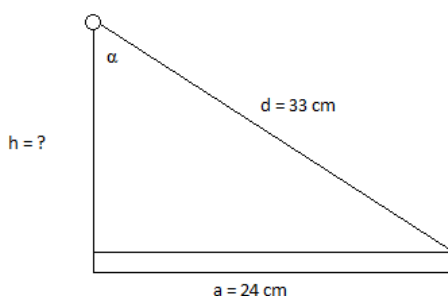
На основу површине и специфичне густине лима може се израчунати маса половине моста према једначини:

$$m = \rho \cdot P = 12 \cdot 0.0876 = 1.05 \text{ kg}$$

При анализирању силе затезања ужета посматраћемо два случаја када је мост спуштен и када је мост подигнут.

- **Спуштен мост**

Када је мост спуштен, дужина ужета која га подиже је 33 cm, а дужина моста 24 cm. На Слици 15. приказан је мост када је спуштен.



Слика 15. Спуштен мост

На основу скице може се одредити висина на којој се налази котур преко кога је пребачено уже. Користећи Питагорину теорему за висину се добија:

$$h^2 = d^2 - a^2$$

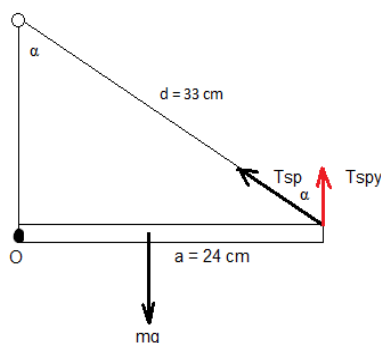
$$h = 22,65 \text{ cm}$$

Сада се, на основу дефиниције тригонометријске функције синус, може израчунати угао  $\alpha$ :

$$\sin \alpha = \frac{a}{d} = \frac{24}{33}$$

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{24}{33}\right) = 46,66^\circ$$

Силе које делују на мост у спушеном положају су сила затезања ужета и сила земљине теже. Након учртавања сила (Слика 16.) може се написати моментна једначина за тај случај. Тачка О представља тачку у односу на коју ће се писати моментна једначина.



Слика 16. Силе које делују на спуштен мост

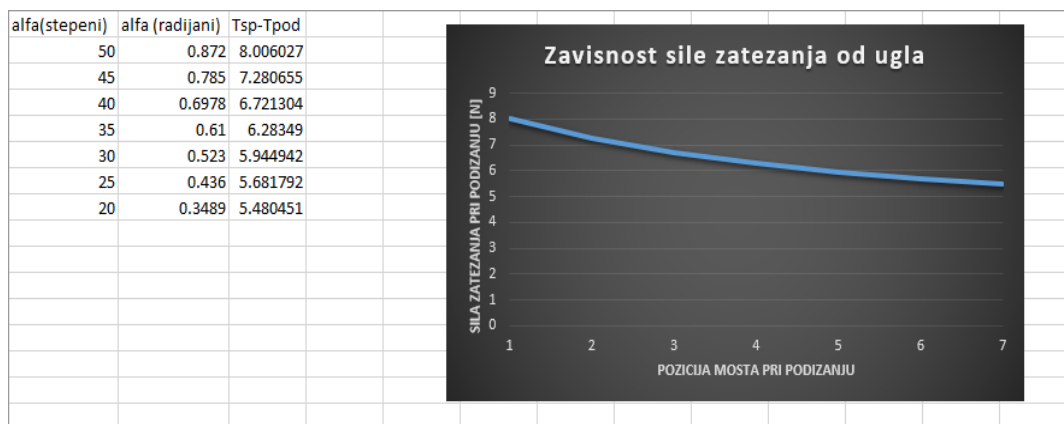
За постављање моментне једначине од интереса нам је само сила која је нормална на половину моста ( $T_{spy}$ ) јер само та компонента доводи до подизања моста. Да бисмо раставили силу затезања на компоненту која је нормална на мост потребно је одредити угао између силе затезање и те компоненте. Како угао  $\alpha$  и угао који заклапају ове две силе представљају углове са паралелним крацима, они су исти. Растојање силе земљине теже од тачке ослоња је  $\frac{a}{2}$ , а растојање од у-компоненте силе затезања  $a$ . Сада се може написати моментна једначина:

$$m \cdot g \cdot \frac{a}{2} - T_{sp} \cdot a \cdot \cos \alpha = 0$$

Одавде следи да је сила затезања једнака:

$$T_{sp} = \frac{m \cdot g}{2 \cdot \cos \alpha} = \frac{1.05 \cdot 9.81}{2 \cdot \cos 46.66} = 7.5 \text{ N}$$

Зависност силе затезања од промене угла при подизању приказана је на Сlici 17. Са Сликe17. се види да је сила највећа када је мост спуштен, односно када је угао између силе затезања и њене у-компоненте највећи. Како се угао, при подизању, смањује вредност силе затезања се смањује по експоненцијалном закону.



Слика 17. Зависност силе затезања од угла при подизању моста

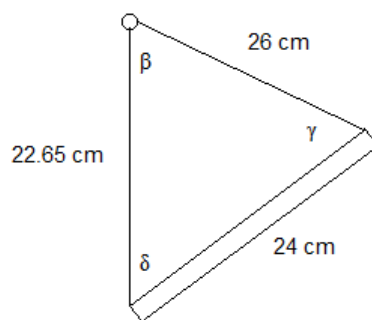
- **Подигнут мост**

Када је мост подигнут дужина ужета је 26 cm, а висина котура је остала иста, 22,65 cm. Сада је потребно одредити све углове овог троугла. На Слици 18. приказан је подигнут мост и означени сви углови.

Да би израчунали углове троугла код кога су познате дужине свих страница потребно је применити косинусну теорему, која гласи:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot bc \cdot \cos(\varphi)$$

где је  $\varphi$  угао захваћен страницама  $a$  и  $c$ .



Слика 18. Подигнут мост

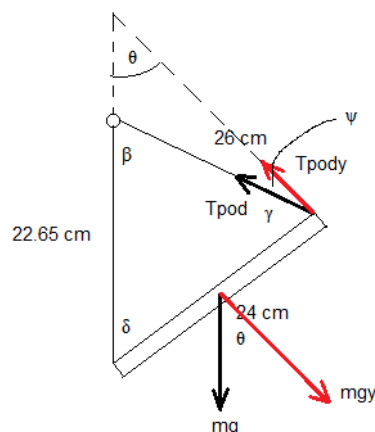
Ако применимо косинусну теорему за све углове троугла, добијамо да су углови једнаки:

$$\beta = 58,64^{\circ}$$

$$\gamma = 53,69^{\circ}$$

$$\delta = 67,67^{\circ}$$

Сада је потребно уцртати силе које делују на подигну мост. И овог пута су то само две силе: сила затезања ужета и сила земљине теже. Подигнут мост, са свим силама које делују на њега, приказан је на Слици 19.



Слика 19. Силе које делују на подигнут мост и њихове компоненте

За писање моментне једначине од интереса су нам само силе које су нормалне на мост ( $mg_y$  и  $T_{pody}$ ). Да бисмо раставили ове силе потребно је одредити углове између у-компоненти и самих сила. Угао између  $T_{pod}$  и  $T_{pody}$  је  $\psi$  и он се добија тако сто од правог угла одузмемо угао  $\gamma$ :

$$\psi = 90^\circ - \gamma = 36,31^\circ$$

Угао између  $mg$  и  $mg_y$  ћемо добити тако што ћемо конструисати правоугли троугао чији је угао при врху  $\theta$ . На основу чињенице да је збир унутрашњих углова троугла  $180^\circ$  за угао  $\theta$  се добија:

$$\theta = 180^\circ - 90^\circ - \delta = 22,33^\circ$$

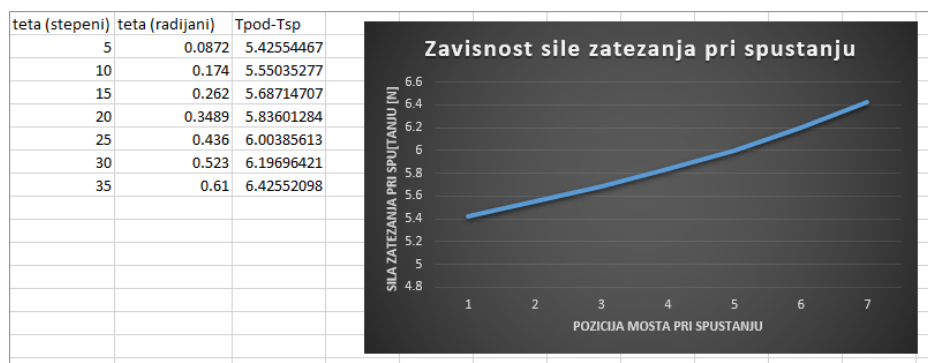
Како су растојања обе силе остала непромењена за моментну једначину се може писати:

$$m \cdot g \cdot \frac{a}{2} \cdot \cos \theta - T_{pod} \cdot a \cdot \cos \psi = 0$$

Сада се за силу затезања може писати:

$$T_{pod} = \frac{m \cdot g \cdot \cos \theta}{2 \cdot \cos \psi} = 5.9 \text{ N}$$

На Слици 20. приказана је зависност силе затезања ужета при спуштању моста. На графику се види да је сила, када је мост подигнут, најмања и да се повећава са повећањем угла при спуштању. Зависност силе затезања од угла при спуштању, такође, представља експоненцијалну функцију.



Слика 20. Зависност силе затезања ужета при спуштању

Однос силе затезања код спуштеног и подигнутог моста износи:

$$\frac{T_{sp}}{T_{pod}} = \frac{7,5}{5,9} = 1,27$$

Дакле, сила затезања код спуштеног моста је 1,27 пута већа од силе затезања у подигнутом положају, те треба проверити и оптерећење моста у спуштеном положају.

Момент мотора представља количник снаге мотора и угаоне брзине вратила мотора. На основу номиналног напона и номиналне струје може се израчунати снага мотора на следећи начин:  $P = U \cdot I$

Када је мотор оптерећен, он повлачи већу струју из мреже те ћемо за прорачун момента узети струју од 100 mA. Сада је снага мотора:

$$P = 5 \cdot 100 \cdot 10^{-3} = 0,5 \text{ W}$$

Момент мотора се може израчунати на основу формуле:

$$M = \frac{P}{\omega} \cdot N = \frac{0,5}{15,9} \cdot 48 = 1.51 \text{ Nm}$$

У изразу за момент фигурише коефицијент редукције, јер ће мотор редуктором већег пречника моћи лакше да покрене веће терете.

## 8. Софтверски алати

Приликом реализације пројекта ученици су користили мноштво софтверских алата и програмских језика да би омогућили подизање и спуштање моста, креирали "Математички квиз"- андроид апликацију за покретање моста, припремили презентацију пројекта, креирали АР апликацију "Занимљивости о мостовима", користили програме за цртање слика који се налазе у тексту пројекта, као и алате за цртање нацрта и лога "Покретно светлећег моста". У даљем тексту су објашњени коришћени програмски језици и софтверски алати, и наведено је у којој сврси.

HTML i CSS – програмски језици који се користе за креирање веб сајтова и веб апликација. "Математички квиз" креиран је првобитно, као веб апликација, да би касније коришћењем Phonegap framework, био пребачен односно компајлиран у андроид апликацију, тј. APK фајл.

JavaScript – објектно оријентисан језик који омогућава креирање динамичних web страна написаних у HTML-у i CSS- у, омогућава функционалност веб сајтова и веб апликација, последњих година веома се развио, тако да сада може да се користи за андроид или iOS апликације, Windows, односно десктоп апликације. Функционалност Математичког квиза испрограмирана је у овом језику, и све потребно да омогући динамику питања – алгоритам насумичног приказивања питања, вредновање одговора у зависности од његове тачности, временски бројач који мери колико је играчу било потребно времена да заврши квиз, приказивање играчевог успеха процентуално на крају игре (ако је имао 9 од 10 тачних одговора, остварио је 90% успеха), мењање сличица које се приказују док се решава квиз (иконица посветли уколико је играч-ученик нетачно одговорио чиме му указује на погрешност).

JavaScript– коришћен је за писање комплетне функционалности повезивања уређаја на ком се ради квиз (телефон или таблет ученика - играча) са Arduino уређајем преко bluetooth-a. Ардуино уређај се налази у постољу "Покретно светлећег моста" и он омогућава његово подизање или спуштање. Када се уређаји повежу, са играчевог телефона односно таблета се шаље команда "Покретно светлећем мосту" у зависности од успеха при решавању квиза – ако има више од 50% тачних одговора, мост ће се подићи.

Phonegap Cordova– Ово је JavaScript framework, који омогућава да веб апликацију или веб сајт прављен користећи HTML, CSS i JavaScript, претворимо у андроид или iOS апликацију која се може инсталирати на уређајима. Овај framework, је направила компанија Adobe, позната по великом броју популарних производа. Phonegap Cordova има могућност коришћења из графичког интерфејса или са командне линије. Ученици су користили командну линију, јер даје много бољу контролу и веће могућности.

Arduino IDE– Окружење за програмирање Arduino уређаја. Језик којим се пишу програми за ове уређаје је комбинација два језика и њихових функција – C и C++. У овом окружењу, уређај је испрограмиран да се повеже са уређајем на ком ученик-играч решава задатке из квиз апликације, и да прима податке и команде од истог уређаја. У зависности од команди које прими, он ће активирати моторе који подижу мост. Опис како су то учинили ученици дат је у делу "Технологије које су коришћене за развој и контролу моста". Користећи ове уређаје и окружење у коме се програмирају, могуће је убацити и велики број других функција као што су паљење и гашење светала и различити сензори покрета, квалитета ваздуха, влажности ваздуха, близине и остале врсте сензора.



Lego Mindstorm Commander- бесплатна андроид апликација за програмирање "Лего моста", начин употребе ове апликације је детаљно наведен у делу "Лего мост".

AutoCad- програмски пакет за цртање, коришћен је за креирање слика које се налазе у пројекту "Покретно светлећи мост".

Microsoft Excel- програм за графичку и табеларну обраду података, коришћен је за креирање Слика 16. и Слика 19. графикона функција на основу унете табеле вредности.

Microsoft PowerPoint- програм за израду презентација, коришћен за израду презентације пројекта.

Adobe Premiere- софтвер за креирање видео записа, коришћен за израду видео клипа о изради макете "Покретно светлећег моста".

Adobe Illustrator- програм за за цртање лога "Покретно светлећег моста".

Unity Game Engine– програм за креирање игара и апликација, користећи језике JavaScript и C#. Поддржава прављење програма и игрица за велики број платформи – Windows, Mac, Android, iOS, Blueberry, Windows Phone, Steam OS, Xbox, PlayStation . Апликација "Занимљивости о мостовима" је израђена за андроид уређаје

C# - Коришћен за функционалност целе апликације– насумичност текста који се приказује када камера препозна слику и приказивање тог текста.

Vuforia – AR(Augmented Reality) софтверски комплет (SDK – Software Development Kit) који омогућава програмирање и израду апликација базираних на технологији проширене реалности. Овај алат се користи унутар Unity програма. Користи се за убацивање слика које камера треба да препозна, објекте који треба да се појаве на екрану преко камере када се убачена слика препозна, саму камеру и целу функционалност приказивања и нестајања објеката у зависности од присуства дефинисане слике.

## Литература

- [1] Павле Миличић, Владимир Стојановић, Зоран Каделбург, Бранислав Боричић, *Математика за први разред средње школе*, Београд, Завод за уџбенике 1994. год.
- [2] Драгомир Лопандић, *Геометрија за III разред усменог образовања математичко-техничке сврхе*, Београд, Научна књига, 1987. год.
- [3] Лучић Зоран, *Огледи из историје античке геометрије*, Београд, Службени гласник, 2009. год.
- [4] Владимир Стојановић, Поповић Гордана, Никола Вигњевић, *Математика за пети разред основне школе*, Математископ, Београд, 2018. год.
- [5] Црнојевић Ц., *Механика флуида*, Машински факултет, Београд 2015. год.
- [6] Доброслав Ружић, Растко Чукић, Момчило Дуњић, Милорад Милованчевић, Нина Анђелић, Весна Милошевић-Митић, *Отпорност материјала*, Машински факултет, Београд 2010. год.
- [7] Наташа Чалуковић, *Физика I, Збирка задатака за први разред гимназије*, Београд, Круг 2010. год.
- [8] Милан Плавшић, Милош Миљковић, Слободан Николић, *Механика I, Статика и отпорност материјала*, Београд, Завод за уџбенике, 1997. год.
- [9] Зоран Пендић, Миодраг Пендић, *Електричне машине са испитивањем*, Београд, Завод за уџбенике 1997. год.
- [10] Jesse Liberty, *C++ за 21 дан*, Компјутерска библиотека, 2002. год.





