# PROJEKAT S PROJEKTNOM DOKUMENTACIJOM TIMA BOSNE I HERCEGOVINE

SREDNJE SKOLE

# I OSNOVNI PODACI

**Naziv projekta:** Sat
**Tema projekta:** Istraživanje i matematičko modeliranje kretanja kazaljki sata Big Ben
**Autori projekta:**

- Alen Hrnjić, JU Gimnazija „Bihać“ – I razred
- Filip Vorih, JU Gimnazija „Bihać“ – I razred
- Ena Mahmutović, JU Gimnazija „Bihać“ – III razred
- Farah Hesham Nafi, JU Gimnazija „Bihać“ – III razred

**Učenici koji su sudjelovali u projektu:**

- Samra Behić, JU Gimnazija „Bihać“ - IV razred
- Ema Selimović, JU Gimnazija „Bihać“ – III razred
- Šejma Šahinović, JU Gimnazija „Bihać“ – II razred

**Mentor:**

- Sanja Mihić, prof. matematike i fizike
- E-mail adresa: sanja_mihic@yahoo.com

**Škola:**

- JU Gimnazija „Bihać“
- Broj telefona: +387 37 310 410
- E-mail adresa: gimnazijabihac@gmail.com
- Adresa: Safvet-bega Bašagića 40

**Tim**: Bosne i Hercegovine
**Datum početka projekta**: 1. april 2019. godine
**Datum završetka projekta:** 10. maj 2019. godine

# *II O PROJEKTU*

### 1. *Opis problema*

Kad zamislimo Big Ben pomislimo na satni toranj u Londonu, međutim Big Ben nadimak je velikog zvona unutar sata na sjevernom dijelu Westminsterske palače. Isto to ime nosi i sat i toranj. Big Ben je jedna od najpoznatijih turističkih atrakcija Londona, te predstavlja najveći četverostrani sat koji zvoni i treći najviši satni toranj na svijetu. Dobio je ime po političaru Sir Benjaminu Hallu (1802. - 1867.) koji je zbog svog stasa dobio nadimak Big Ben. Građevinu je dizajnirao arhitekt Augustus Pugin, a izgrađen je u neogotičkom stilu. Ako posmatramo sat na satnom tornju Big Ben uočit ćemo da nas on podsjeća na kružnicu. Poluprečnik te kružnice bila bi minutna kazaljka. Unutar vanjske kružnice, uočavamo i drugu, koncentričnu kružnicu, čiji poluprečnik predstavlja satna kazaljka. Kad se kazaljke sata pokrenu, one međusobno zatvaraju različite uglove. U nekom trenutku, kazaljke se nađu na istom mjestu (preklope se), pa je ugao između njih nula stepeni. Duža kazaljka se kreće brže od kraće te je moguće u svakom trenutku odrediti relativnu brzinu njihovog udaljavanja. Kazaljke sata izvode periodično kretanje što nam omogućuje njihovo kretanje modelirati periodičnim trigonometrijskim funkcijama. Ako se nalazimo ispred sata Big Ben, možemo se zapitati koliko je sati u nekom drugom dijelu svijeta u tom trenutku. Upravo takvo posmatranje ovog satnog tornja omogućava nam da otkrijemo brojne geometrijske tajne koje on skriva. Zbog toga odlučili smo da tema našeg projekta bude istraživanje i matematičko modeliranje kretanja kazaljki sata Big Ben.

***Osnovne karakteristike satnog tornja Big Ben:***

Satni toranj Big Ben

- Dužina kazaljki:
  1. Minutna kazaljka: $4{,}3\ m$
  2. Satna kazaljka: $2{,}7\ m$
- Visina tornja: $96\ m$
- Baza tornja je kvadrat stranice $12\ m$
- Četiri sata na tornju se nalaze na visini od $54{,}9\ m$

## 2. *Ciljevi projekta*

- Određivanje ugla između minutne i satne kazaljke
- Program u C++-u koji određuje ugao između kazaljki sata za uneseno vrijeme
- Program u C++-u koji za trenutnu lokaciju ispisuje vrijeme (vremenske zone)
- Određivanje obima i površine kruga koji opisuju kazaljke sata
- Određivanje udaljenosti vrhova kazaljki sata
- Određivanje brzine udaljavanja minutne i satne kazaljke
- Program u C++- u koji određuje udaljenost vrhova kazaljki
- Matematičko modeliranje kretanja kazaljki periodičnim funkcijama
- Istraživanje kružnog isječka i kružnog prstena satne i minutne kazaljke
- Maketa satnog tornja Big Ben

## 3. *Plan projekta*

| Susret | Datum | Aktivnost |
|---|---|---|
| I | 1. 4. 2019. | • Dogovor o izboru teme projekta<br>• Istraživanje dostupnih materijala<br>• Zaduženja za učenike određenog razreda<br>• Istraživanje problema – proučavanje detaljnih karakteristika Big Ben-a |
| II | 8. 4. 2019. | Računski dio – određivanje površine i obima kruga koji opisuju kazaljke, računanje površine kružnog prstena, kružnih odsječaka |
| III | 15. 4. 2019. | Rad u C++-u – izrada programa (program za određivanje ugla između kazaljki i program za određivanje vremena na osnovu trenutne lokacije) |
| IV | 22. 4. 2019. | • Određivanje udaljenosti vrhova kazaljki sata<br>• Rad u C++ - izrada programa za računanje udaljenosti vrhova kazaljki sata |
| V | 29. 4. 2019. | Modeliranje kretanja kazaljki trigonometrijskim funkcijama |
| VI | 6. 5. 2019. | Rad u GeoGebri - crtanje sata i grafički prikaz trigonometrijskih funkcija |
| VII | 8. 5. 2019. | • Izrada makete sata<br>• Popis matematičkih pojmova |
| VIII | 10. 5. 2019. | Izrada prezentacije projekta |

## 4. Izvođenje projekta

### 4.1. Matematička razrada problema

*Neki podaci o satu/kazaljkama:*

Dužina minutne kazaljke ($r_m$) je $4{,}3m$, a dužina satne kazaljke ($r_h$) $2{,}74\ m$.
Period minutne kazaljke $(T_m) = 60\ min = 3600\ s$, a period satne kazaljke

$$(T_h) - 12h = 12 \cdot 60 \cdot 60s = 43200s.$$

Frekvencija minutne kazaljke $f_m = \frac{1}{T_m} = \frac{1}{3600s} = 0{,}0002777778$ Hz, a frekvencija satne kazaljke $f_h = \frac{1}{T_h} = 2{,}3 \cdot 10^{-5}$Hz. Ugaona brzina minutne kazaljke

$$\omega_m = \frac{2\pi}{T_m} = 0{,}001744 \frac{rad}{s},$$

a ugaona brzina satne kazaljke $\omega_h = \frac{2\pi}{T_h} = \frac{6{,}28rad}{43200s} = 0{,}0001453 \frac{rad}{s}$.
Linijska brzina vrha satne kazaljke $v = \omega r = 0{,}0001453 \frac{rad}{s} \cdot 2{,}7m = 0{,}0003923 \frac{m}{s}$,
a linijska brzina vrha minutne kazaljke $v = \omega r = 0{,}001744 \frac{rad}{s} \cdot 4{,}3m = 0{,}0074992 \frac{m}{s}$.
Obim kruga koji opisuje minutna kazaljka $O_m = 2r_m\, \pi = 27{,}02m$, a obim kruga koji opisuje satna kazaljka $O_h = 2r_h\, \pi = 17{,}2m$. Površina kruga koji opiše minutna kazaljka

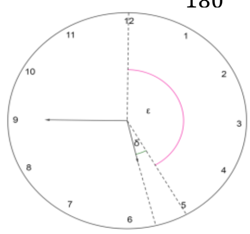
$$P_m = r_m^2\pi = 18{,}49m^2,$$

a površina kruga koji opiše satna kazaljka $P_h = r_h^2\pi = 7{,}51m^2$.

- **Određivanje ugla između satne i minutne kazaljke na satu Big Bena**

Ugao između minutne i satne kazaljke označit ćemo s $\alpha$. Da bismo odredili taj ugao potrebni su nam uglovi $\beta$ i $\gamma$. ($\beta$ je ugao između početnog položaja kazaljki kad su na 12 h i minutne (velike) kazaljke, $\gamma$ je ugao između početnog položaja kazaljki i satne (male) kazaljke)

Velika kazaljka napravi puni krug za 60 minuta. Kada podijelimo 360° (što je puni krug) sa 60 (minuta) primijetimo da velika kazaljka svake minute opiše ugao od 6°. Dakle, formula za ugao $\beta$ (u stepenima) je: $\beta = 6°M$ ili u radijanima: $\beta = \frac{6M}{180} \cdot \pi$, odnosno $\beta = \frac{M}{30} \cdot \pi$, gdje je M vrijeme u minutama. Ugao $\gamma$ se sastoji iz uglova $\delta$ i $\varepsilon$. Pošto za 60 minuta mala kazaljka opiše ugao od 30° (na analognom satu 360° : 12 = 30°), onda za svaku minutu opiše ogao od 0,5° ($\frac{30°}{60\ (minuta)}$), pa je formula za taj ugao (označili smo ga s $\delta$) $\delta = 0{,}5°M$, odnosno u radijanima: $\delta = \frac{0{,}5M}{180} \cdot \pi$



Ugao $\varepsilon$ je jednak proizvodu vremena u satima i 30° (jer mala kazaljka za svakih sat vremena opiše ugao od 30° - što je ranije dokazano). U stepenima: $\varepsilon = 30°H$, gdje je H vrijeme u satima. U radijanima: $\varepsilon = \frac{30H}{180} \cdot \pi$; $\varepsilon = \frac{H}{6} \cdot \pi$. Dakle, formula za ugao $\gamma$ je $\gamma = \varepsilon + \delta$, odnosno:

$$\gamma = 30°H + 0{,}5°M,$$

ili u radijanima: $\gamma = \frac{30H+0{,}5M}{180} \cdot \pi$. Konačno, ugao $\alpha$ je jednak apsolutnoj vrijednosti razlike uglova $\beta$ i $\gamma$ (zbog negatvnih vrijednosti razlike): $\alpha = |\beta - \gamma|$, $\alpha = |30°H - 5{,}5°M|$.

- **Program u C++-u koji računa ugao između kazaljki sata Big Bena**

```
#include<iostream>
#include<cmath>
using namespace std;
int main()
{
    int h,min;
    double const pi=3.14;
    double l,b,g,rad;
    cout<<"Unesi vrijeme (sate pa minute): "; cin>>h>>min;
    b=6*(min*1.);
    g=30*(h*1.)+0.5*(min*1.);
    l=abs(g-b);
    rad=l/180*pi;
    cout<<"Ugao izmedu kazaljki u stepenima: "<<l<<endl;
    cout<<"Ugao izmedu kazaljki u radijanima: "<<rad<<endl;
    system("PAUSE");
    return 0;
}
```

Output programa (provjera)[1]:

```
Unesi vrijeme (sate pa minute): 7 15
Ugao izmedu kazaljki u stepenima: 127.5
Ugao izmedu kazaljki u radijanima: 2.22417
Press any key to continue . . .
```

- **Program u C++-u koji za trenutnu lokaciju ispisuje vrijeme (vremenske zone)**

```
C:\Users\vedra\Desktop\Informatika\most_matematike\vremenska_zona.exe
Unesi geografsku duzinu mjesta na kojem se nalazis:298
Unesi vrijeme kod sebe: 12
U Grinvicu (na nultom meridijanu) je sada 12h.
Press any key to continue . . .
```

Output programa (provjera)[2]:

```
C:\Users\vedra\Desktop\Informatika\most_matematike\vremenska_zona.exe
Unesi geografsku duzinu mjesta na kojem se nalazis:86.83
Unesi vrijeme kod sebe: 10.45
Vremenska zona u kojoj se nalazis je UTC+6, sto znaci da je vremenska razlika 6h.
U Grinvicu (na nultom meridijanu) je sada 4.45h.
Press any key to continue . . .
```

[1] Prilog1 - Source kod programa u prilogu projekta;
[2] Prilog2 - Source kod programa u prilogu projekta;

- **Koliko puta i kada se kazaljke sata preklope**

Tokom 24 sata kazaljke sata 22 puta se nađu na istom mjestu (preklapaju se). Do ovog zaključka možemo doći sljedećim razmatranjem. Ako u vremenu T sati, minutna kazaljka napravi T obrtaja, u istom vremenu satna napravi $\frac{T}{12}$ obrtaja. Prvi put (poslije početnog preklapanja na polozaju 12h) kad se kazaljke preklope, minutna je napravila jedan obrtaj vise od satne, tako da vrijedi $T = \frac{T}{12} + 1$ , što znači da je prvo preklapanje nakon $T = \frac{12}{11}$ sati (što je približno u 1:05h). Slično, sljedeće preklapanje bi bilo u vremenu kad je minutna napravila 2 obrtaja više od satne. Za N preklapanja vrijedilo bi $T = \frac{T}{12} + N$. Pošto dan traje 24 h, rješavanjem po N dobije se da u toku 24 sata preklope se tačno 22 puta, tj. u toku 12 sati preklope se 11 puta $24 = \frac{24}{12} + N \rightarrow N = 22$. Da odredimo vrijeme u kojem se desi preklapanje, iskoristit ćemo prethodnu formulu za računanje ugla izmedju kazaljki. Preklapanje se desi kad je ugao koji zatvara satna i minutna kazaljka s početnim položajem na $12h$ isti.

$$\alpha = |\beta - \gamma|$$
$$\alpha = 0$$
$$|\beta = \gamma|$$
$$6°M = 30°H + 0{,}5°M,$$

M = 5,45 H, pri čemu je H cijeli broj iz skupa $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\}$. Na ovaj način dobijemo vremena preklapanja: 0:00, $1:05,\overline{45}$; $2:10,\overline{90}$; $3:16,\overline{36}$; $4:21,\overline{81}$; $5:27,\overline{27}$; $6:32,\overline{72}$; $7:38,\overline{18}$; $8:43,\overline{63}$; $9:49,\overline{09}$; $10:54,\overline{54}$ i $12:00$ ( 0,45 minuta je tačno 27,27 sekundi). Do istog rezultata smo mogli doći i na sljedeći način: vremenski interval između preklapanja je isti (vremenska razlika prvog i drugog preklapanja je ista kao vremenska razlika zadnjeg i predzadnjeg preklapanja) ili matematički zapisano : $\Delta t_{2,1} = \Delta t_{3,2} = \ldots = \Delta t_{22,21}$. Znamo da maloj kazaljci (kazaljka koja pokazuje sate) treba $12h$ da opiše cijeli krug, odnosno u stepenima je to punih 360 °, dok većoj kazaljci (kazaljka koja pokazuje minute) za isti opisani ugao treba 1h. Rečeno možemo prikazati i obrascem: $\omega = \frac{\alpha}{t} \langle \frac{radijan}{sekunda} \rangle$.

Opisani ugao-α
Vremenski interval-t
Ugaona brzina- $\omega$
Za neki Δt vremenski interval (potreban za preklapanje), satna kazaljka opiše nepoznati ugao α=X°, dok minutna kazaljka opiše puni ugao plus nepoznati ugao, tj. β=360° + X°.

$\omega_h$- ugaona brzina satne kazaljke
$\omega_m$-ugaona brzina minutne kazalje
Za ovaj način računanja, iz obrasca za ugaonu brzinu ćemo izlučiti t, te izjednačiti vremenske intervale kako bismo dobili nepoznati ugao X:


$$t_M = t_H$$
$$\frac{\beta}{\omega_m} = \frac{\alpha}{\omega_h}$$
$$\frac{360° + X°}{0{,}001744} = \frac{X°}{0{,}0001453}$$
$$0{,}001744 \cdot X° = 0{,}0001453 \cdot (360° + X°)$$
$$0{,}001744 \cdot X° = 0{,}052308 + 0{,}0001453 \cdot X°$$
$$0{,}0015987 \cdot X° = 0{,}052308$$

Nepoznati ugao iznosi: $X° = 32{,}71°$.

Sad je moguće odrediti i vrijeme za koje kazaljka opiše ovaj ugao na osnovu prethodno navedenih relacija za računanje ugla koji zatvaraju minutna i satna kazaljka u nekom trenutku. A možemo riješiti i jednostavnu proporciju

| | |
|---|---|
| 120 minuta | 60° |
| $\Delta t_{1,2}$ | 32,71° |

Unakrsnim množenjem dobijamo:

$$60° \cdot \Delta t1{,}2 = 32{,}71 \cdot 120\, minuta$$

Rješavanjem ove linearne jednačine, dobijamo interval $t$ potreban za preklapanje kazaljki:

$$\Delta t1{,}2 = 65{,}45\, minute$$

Uzet ćemo da je početni trenutak 12 : 00 h. Dodamo li dobiveni interval dobit ćemo drugo preklapanje. Ova preklapanja možemo posmatrati kao aritmetički niz, s obzirom da je vremenski razmak između bilo koja dva preklapanja uvijek jednak. Ako uzmemo da diferencija iznosi d = 65,42 minute, preko općeg člana možemo računati i ostala preklapanja:

$$A1 = 00{:}\,00h$$
$$A2 = A1 + d = 1{:}\,05{,}45\ h$$
$$A3 = A1 + 2d = A2 + d = 1{:}\,05{:}\,45 + 1{:}\,05{:}\,45 = 02{:}\,10{:}\,90\ i\ tako\ redom\ do$$
$$A12 = A1 = 12{:}\,00h$$

- **Određivanje udaljenosti između vrhova minutne i satne kazaljke**

Odredit ćemo udaljenost između vrhova minutne i satne kazaljke na satu Big Ben ako je vrijeme na njemu $10{:}\,00h$, te izvesti opću formulu za računanje te udaljenosti. Dužina satne kazaljke: 2,7m. Dužina minutne kazaljke: $4{,}3m$. Prvi korak u rješavanju ovog problema jeste prikaz sata koji pokazuje $10h$. Na slici uočavamo da se za dato vrijeme minutna kazaljka nalazi na broju 12, a satna na 10. Naš zadatak je da odredimo udaljenost između vrhova kazaljki. Tu udaljenost prikazali smo crvenom linijom i označit ćemo je s $x$. Sada već na slici uočavamo i trougao, a da bismo ga riješili potreban nam je i podatak za ugao između kazaljki. Ranije smo pokazali da je ugao koji opiše satna kazaljka za jedan sat 30°. Od 10 h do 12 h dva su sata, pa možemo zaključiti da je ugao između minutne i satne kazaljke tada 60°. Kako su nam poznata tri podatka, primjenom kosinusne teoreme odredit ćemo udaljenost između vrhova kazaljki.

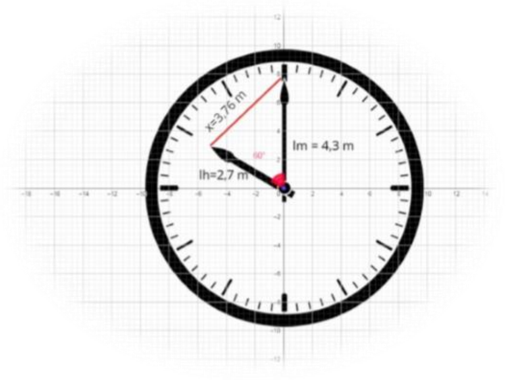
Dužina satne kazaljke ($l_h$): 2,7m
Dužina minutne kazaljke ($l_m$): 4,3m

Ugao između kazaljki(α): 60°
Udaljenost između vrhova kazaljki: $x$=?
Kosinusna teorema:

$$x^2 = l_h^2 + l_m^2 - 2 \cdot l_h \cdot l_m \cdot \cos\alpha$$


$$x^2 = 2{,}7^2 + 4{,}3^2 - 2 \cdot 2{,}7 \cdot 4{,}3 \cdot \cos 60°$$
$$x^2 = 7{,}29 + 18{,}49 - 2 \cdot 2{,}7 \cdot 4{,}3 \cdot \frac{1}{2}$$
$$x^2 = 25{,}78 - 11{,}61$$
$$x^2 = 14{,}17$$
$$x = \sqrt{14{,}17}$$
$$\boldsymbol{x = 3{,}76\ m}$$

Udaljenost između vrhova kazaljki za dato vrijeme iznosi $3{,}76m$. Pošto znamo da je dužina kazaljki na satu Big Ben konstantna, možemo odrediti i opću formulu za računanje udaljenosti između vrhova kazaljki na satu Big Ben:
Dužina satne kazaljke: $l_h = 2{,}7m$
Dužina minutne kazaljki: $l_m = 4{,}3m$
Ugao između kazaljki: α
Udaljenost između vrhova: x=?




$$x^2 = l_h^2 + l_m^2 - 2 \cdot l_h \cdot l_m \cdot \cos \propto$$

Ako uvrstimo zadane vrijednosti, dobijamo sljedeći izraz:

$$x^2 = 2{,}7^2 + 4{,}3^2 - 2 \cdot 2{,}7 \cdot 4{,}3 \cdot \cos \propto$$

$$x^2 = 7{,}29 + 18{,}49 - 23{,}22 \cos \propto$$

$$\boldsymbol{x^2 = 25{,}78 - 23{,}22 \cos \propto}$$

$$\boldsymbol{x = \sqrt{25{,}78 - 23{,}22 \cos \propto}}$$

- **Program u C++-u koji za uneseno vrijeme na satu Big Ben ispisuje udaljenost između vrhova kazaljki**

```
#include<iostream>
#include<cmath>
using namespace std;
int main()
{
	int h,min;
	double const pi=3.14;
	double I,b,g,rad,x;
	cout<<"Unesite vrijeme na satu(sate pa minute):";
	cin>>h>>min;
	b=6*(min*1.);
	g=30*(h*1.)+0.5*(min*1.);
	I=abs(g-b);
	rad=I/180*pi;
	x=sqrt(25.78-23.22*cos(I*pi/180.0));
	cout<<"Udaljenost izmedju vrhova kazaljki tada iznosi: "<<x<<endl;
	system("pause");
	return 0;
}
```

Output programa (provjera)[3]:

```
Unesite vrijeme na satu(sate pa minute):10
0
Udaljenost izmedju vrhova kazaljki tada iznosi: 3.77139
Press any key to continue . . .
```

[3] Prilog3 - Source kod programa u prilogu projekta;

- **Određivanje brzine približavanja/udaljavanja kazaljki**

Trebamo odrediti brzinu približavanja/udaljavanja vrhova kazaljki kad sat pokazuje 10 h. Dužina satne kazaljke $\boldsymbol{l_h = 2,7m}$. Dužina minutne kazaljke $\boldsymbol{l_m = 4,3m}$. Ugao između dvije kazaljke ,kada sat prikazuje 10h , α=60 ° (30°+30°). Udaljenost između vrhova kazaljki (x) smo dobili preko kosinusne teoreme:

$$x^2 = (l_h)^2 + (l_m)^2 - 2 \cdot l_h \cdot l_m \cdot cos\,\alpha$$

$$\boldsymbol{x = 3,76\ m}$$

Ugaone brzine iznose:

$$\omega_h = \frac{2\pi}{12h} = \frac{\pi}{6}\ (radijana/h)$$

$$\omega_m = \frac{2\pi}{1h} = 2\pi\ (\text{radijana/h}).$$

Oduzimanjem ove dvije ugaone brzine, dobit ćemo relativnu ugaonu brzinu što je derivacija ugla po vremenu.

$$\boldsymbol{\frac{d\alpha}{dt}} = \omega_h - \omega_m = \boldsymbol{\frac{\pi}{6} - 2\pi = -\frac{11\pi}{6}}$$

Deriviranjem lijeve i desne strane po vremenu, te zamjenom vrijednosti za udaljenost vrhova kazaljki, dobit ćemo traženu brzinu:

$$\frac{d}{dt}x^2 = \frac{d}{dt}\left(l_h^2 + l_m^2 - 2 \cdot l_h \cdot l_m \cdot co\,s\,\alpha\right)$$

$$\frac{dx}{dt}(2 \cdot x) = \frac{d\alpha}{dt}\ (2 \cdot l_h \cdot l_m \cdot sin\,\alpha\,)$$

$$\frac{dx}{dt}(2 \cdot 3{,}76) = \frac{d\alpha}{dt}(2 \cdot 4{,}3 \cdot 2{,}7 \cdot sin60)$$

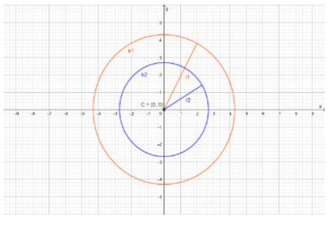
$$\frac{dx}{dt}(7{,}52) = \frac{d\alpha}{dt}\left(23{,}22 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

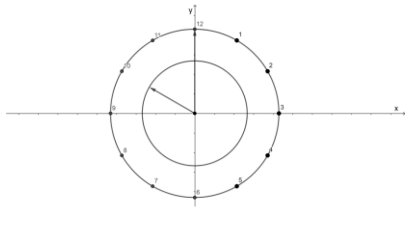
$$\frac{dx}{dt}(7{,}52) = \left(\frac{-11\pi}{6}\right)(20{,}109)$$

$$\boldsymbol{\frac{dx}{dt} = -15,39\frac{m}{h} = -25,6\frac{cm}{min} = -0,42\frac{cm}{s}}$$

- **Kružni prsten**

Na satu Big Ben uočavamo koncentične krugove. Poluprečnik jednog od tih koncentričnih krugova je satna kazaljka dužine 2,7m , dok je poluprečnik najvećeg kruga na satu minutna kazaljka dužine 4,3m. To nam omogućava da proučimo i kružni prsten koji je ograničen sa ova dva koncentrična kruga.





Površina kružnog prstena (vijenca) računa se po formuli:

$$\boldsymbol{P = (R^2 - r^2)\pi}$$

Ako znamo da je poluprečnik kruga koji opisuje minutna kazaljka 4,3m, a poluprečnik kruga koji opisuje satna 2,7m, tada površina kružnog prstena na satu Big Ben iznosi:

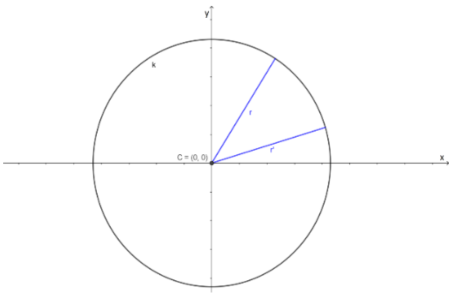
$$P = (4{,}3^2 - 2{,}7^2)\pi$$

$$P = (18{,}49 - 7{,}29)\pi$$

$$\boldsymbol{P = 11{,}29\pi}$$

$$\boldsymbol{P = 35{,}2m^2}$$

- **Kružni isječak na satu Big Ben**



Kada sat Big Ben pokazuje određeno vrijeme, na njemu možemo primijetiti i kružne isječke koje satna i minutna kazaljka tvore sa svojim početnim pravcem, a s obzirom da znamo dužine njegovih kazaljki, odredit ćemo površinu tih kružnih isječaka za proizvoljno vrijeme. Površina kružnog isječka računa se po formuli:

$$\boldsymbol{P = \frac{r^2\pi\alpha}{360°}}$$

***a) Površina kružnog isječka satne kazaljke***

Neka naše proizvoljno vrijeme za kružni isječak satne kazaljke bude ponovo $10{:}\,00h$. U sklopu prethodnih zadataka određivali smo ugao između kazaljki, a kako sada minutna kazaljka leži na početnom pravcu, ugao u kružnom isječku kojeg posmatramo jednak je uglu između kazaljki kada sat pokazuje $10{:}\,00h$, odnosno ugao iznosi 60°. Dužina satne kazaljke $rh = 2{,}7m$.

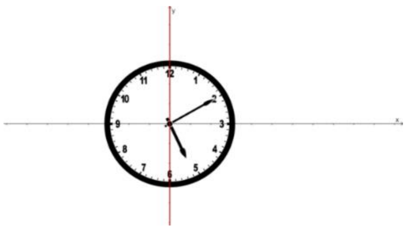

$$P = \frac{2{,}7^2 \cdot 3{,}14 \cdot 60°}{360°}$$

$$P = \frac{7{,}29 \cdot 3{,}14 \cdot 60°}{360°}$$

$$P = \frac{1373{,}436}{360}$$

$$\boldsymbol{P = 3{,}81m^2}$$

***b) Površina kružnog isječka minutne kazaljke***



Za posmatranje kružnog isječka minutne kazaljke uzet ćemo vrijeme $5{:}\,10h$. Tada se vrh minutne kazaljke nalazi na „2“, odnosno minutna kazaljka sa svojim početnim pravcem gradi ugao od 60°. Dužina minutne kazaljke $r_m = 4{,}3m$.

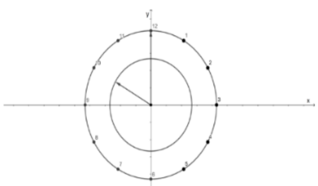
$$P = \frac{4{,}3^2 \cdot 3{,}14 \cdot 60°}{360°}$$

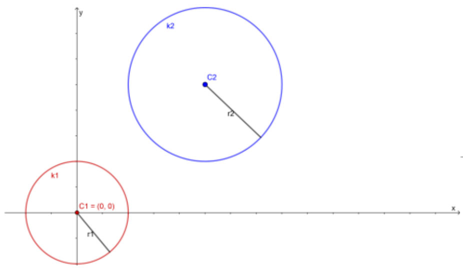
$$P = \frac{18{,}49 \cdot 3{,}14 \cdot 60°}{360°}$$

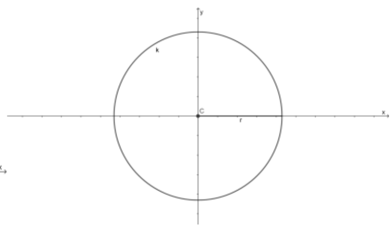
$$P = \frac{3483{,}516}{360}$$
$$\boldsymbol{P = 9{,}68m^2}$$

- **Određivanje jednačine kružnica na satu Big Ben**

Ako posmatramo sat Big Ben, uočit ćemo da su na njemu opisane dvije kružnice – jedna čiji je poluprečnik satna kazaljka dužine 2,7m i druga čiji je poluprečnik minutna kazaljka dužine 4,3m. Sa ovim podacima vrlo lako možemo odrediti jednačinu tih kružnica koristeći znanje koje smo stekli proučavajući analitičku geometriju. Normalni (necentralni, opšti) oblik jednačine kružnice glasi: $(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$. Ako je p=q=0 dobijamo centralni oblik jednačine kružnice: $x^2+y^2=r^2$.







Segmentni oblik glasi:

$$\frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{r^2}=1$$

Koordinatni sistem postavljen je tako da se koordinatno ishodište nalazi u centru sata, dakle riječ je o <u>*centralnim kružnicama*</u>. Poluprečnik *r* manje kružnice je satna kazaljka dužine 2,7m. Jednačina kružnice glasi:

$$x^2+y^2=2{,}7^2$$
$$\boldsymbol{x^2+y^2=7{,}29}$$

*Odnosno, izraženo u segmentnom obliku:*

$$\frac{x^2}{2{,}7^2}+\frac{y^2}{2{,}7^2}=1$$
$$\boldsymbol{\frac{x^2}{7{,}29}+\frac{y^2}{7{,}29}=1}$$

Poluprečnik *r* veće kružnice je minutna kazaljka dužine 4,3m. Jednačina kružnice glasi:

$$x^2+y^2=4{,}3^2$$
$$\boldsymbol{x^2+y^2=18{,}49}$$

*Odnosno:*

$$\frac{x^2}{4{,}3^2}+\frac{y^2}{4{,}3^2}=1$$
$$\mathbf{\frac{x^2}{18,49}+\frac{y^2}{18,49}=1}$$

- **Jednačina pravca na kojem leži minutna kazaljka**

Minutna kazaljka nalazi se na pravcu koji prolazi kroz ishodište, pa se jednačina tog pravca određuje oblikom:

$$\boldsymbol{y=\tan\alpha\cdot x}$$

Neka vrijeme na satu bude 5:10, tada se minutna kazaljka nalazi na „2“ i sa x osom zatvara ugao od 30°.

*Jednačina pravca glasi:* $y=\tan 30°\cdot x$

- **Modeliranje kretanja vrhova kazaljki pomoću trigonometrijskih funkcija**

Trigonometrijske funkcije su najjednostavniji primjeri periodičnih funkcija, odnosno funkcija čija se vrijednost za određen period ponavlja. Zahvaljujući tom svojstvu odredit ćemo sinusni i kosinusni model koji će opisivati položaje vrhova minutne i satne kazaljke u odnosu na horizontalni pravac, za svako dato vrijeme.

$$\boldsymbol{y=A\sin B(x-C)+D}$$

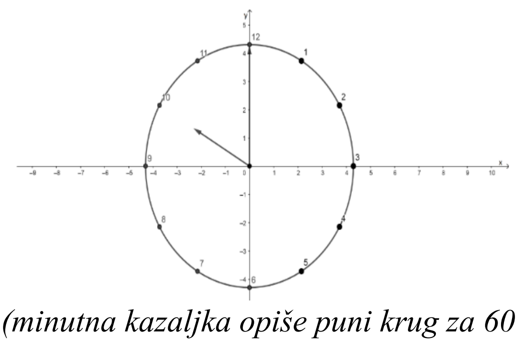
$$\boldsymbol{y=A\cos B(x-C)+D}$$

*gdje je: A – amplituda, B – period, C – horizontalno pomjeranje, D – vertikalno pomjeranje*

Postavit ćemo koordinatni sistem tako da se koordinatno ishodište nalazi u centru sata

### *a) Sinusni model*

Vertikalnog pomjeranja nema, tj. $D=0$. Pošto je riječ o funkciji sinus, ona započinje na „9“, pa se javlja horizontalno pomjeranje:




$C_h=9 \qquad C_m=45$

Dužine kazaljki su ujedno i amplitude:

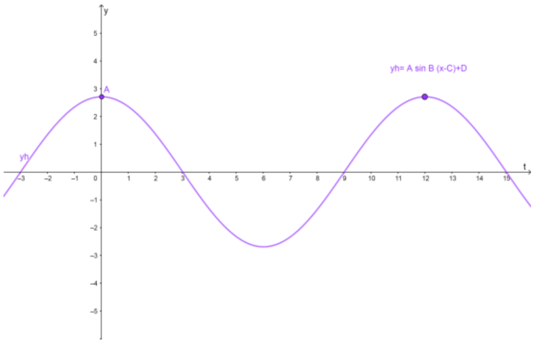
$A_h=l_h=2{,}7m \qquad A_m=l_m=4{,}3m$

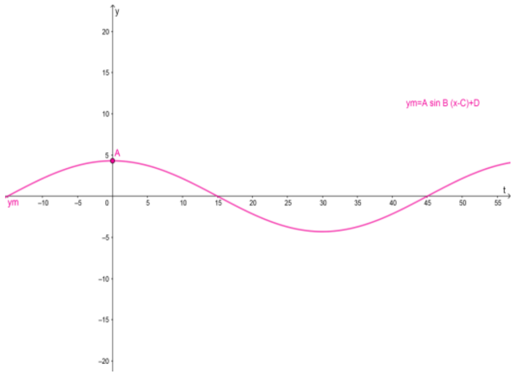
Odredit ćemo period obje kazaljke: $B_h=\frac{2\pi}{12}$, $\boldsymbol{B_h=\frac{\pi}{6}}$ *(satna kazaljka opiše puni krug za 12 sati)*

$B_m=\frac{2\pi}{60} \qquad \boldsymbol{B_m=\frac{\pi}{30}}$

*(minutna kazaljka opiše puni krug za 60 minuta)*. Pošto imamo sve potrebne podatke, odredit ćemo model za obje kazaljke.

*Satna kazaljka:*
$\boldsymbol{y_h = 2,7\sin\frac{\pi}{6}(t-9)}$ , *gdje je t – sati nakon ponoći (odnosno nakon podne)*
*Minutna kazaljka:*
$\boldsymbol{y_m = 4,3\sin\frac{\pi}{30}(t-45)}$ , *gdje je t – minute nakon punog sata*




1. *Zadatak:* Odrediti položaj vrhova satne i minutne kazaljke u 4:30h.

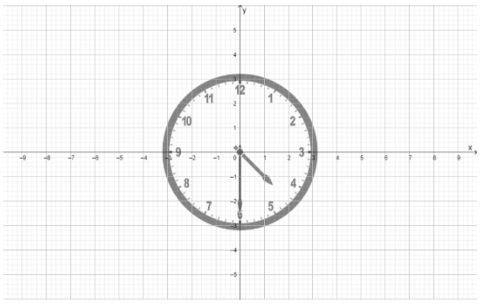
*Pozicija vrha satne kazaljke:*
t=4,5 h

$$y_h = 2,7\sin\frac{\pi}{6}(4,5-9)$$
$$y_h = 2,7\sin\frac{\pi}{6}(-4,5)$$
$$y_h = 2,7\sin(-135°)$$
$$y_h = 2,7\cdot(-\sin(180°-135°))$$
$$y_h = 2,7\cdot(-\sin 45°)$$
$$y_h = 2,7\cdot(-0,707)$$

$\boldsymbol{y_h = -1,91\ \mathrm{m}}$

*Vrh satne kazaljke se nalazi 1,91m ispod x ose. Pozicija vrha minutne kazaljke:* t = 30 min

$$y_m = 4,3\sin\frac{\pi}{30}(30-45)$$



$$y_m = 4,3\sin\frac{\pi}{30}(-15)$$
$$y_m = 4,3\sin(-90°)$$
$$y_m = 4,3\cdot(-\sin 90°)$$
$$y_m = 4,3\cdot(-1)$$

$$\boldsymbol{y_m = -4,3\ m}$$

*Vrh minutne kazaljke se nalazi u minimumu.*

2. *Zadatak:* Odrediti preko sinusnog modela kada se minutna kazaljka nalazi 3$m$ iznad $x$ ose.

t=?
*ym=3m*

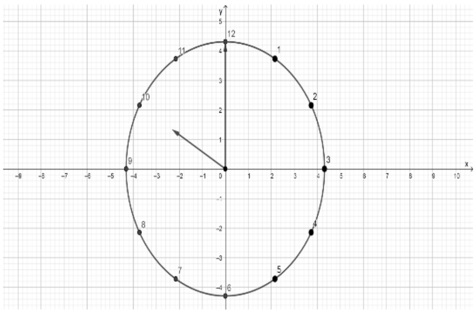
*Am=4,3m*

$$B = \frac{\pi}{30}$$

*C=45*

$$3 = 4{,}3 \sin\frac{\pi}{30}(t-45)$$

$$0{,}69767 = \sin\frac{\pi}{30}(t-45)$$



$$\sin^{-1}(0{,}69767) = \sin^{-1}\left(\sin\frac{\pi}{30}(t-45)\right)$$

$$44° = 6°(t_1-45)$$

$$136° = 6°(t_2-45)$$

$$7{,}33 = t_1-45$$

$$22{,}67 = t_2-45$$

$$t_1 = 7{,}33+45$$

$$\boldsymbol{t_1 = 52{,}33\ min}$$

$$t_2 = 22{,}67+45$$

$$\boldsymbol{t_2 = 67{,}67\ min}$$

*Vrh minutne kazaljke se nalazi 3m iznad x ose kada minutna kazaljka pokazuje 52 minute ili 7 minuta.*

b) ***Kosinusni model***

U ovom slučaju nema horizontalnog, kao ni vertikalnog pomjeranja $D = C = 0$.
Amplitude:

$$A_h = 2{,}7m \qquad A_m = 4{,}3m$$

Period ostaje isti: $\boldsymbol{B_h = \frac{\pi}{6}}$ $\boldsymbol{B_m = \frac{\pi}{30}}$

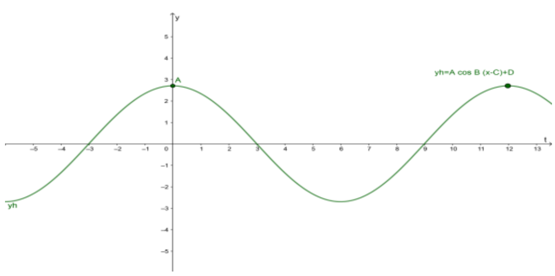
Odredit ćemo kosinusni model za obje kazaljke.

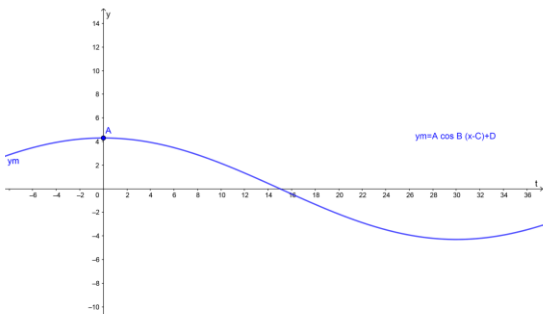
*Satna kazaljka:*

$\boldsymbol{y_h = 2{,}7\cos\frac{\pi}{6}t}$ *, gdje je t - sati nakon ponoći (odnosno nakon podne)*

*Minutna kazaljka:*

$\boldsymbol{y_m = 4{,}3\cos\frac{\pi}{30}t}$ *, gdje je t – minute nakon punog sata*



3. *Zadatak:* Odrediti poziciju vrhova minutne i satne kazaljke u 10:00h koristeći kosinusni model.

*Pozicija vrha satne kazaljke:*
*t=10 h*

$$y_h = 2{,}7\cos\frac{\pi}{6}t$$
$$y_h = 2{,}7\cos\frac{\pi}{6}10$$
$$y_h = 2{,}7\cos 300°$$
$$y_h = 2{,}7\cos(360° - 300°)$$
$$y_h = 2{,}7\cos 60°$$
$$y_h = 2{,}7 \cdot \frac{1}{2}$$

$\boldsymbol{y_h = 1{,}35\ \mathrm{m}}$

*Vrh satne kazaljke se nalazi 1,35m iznad x ose. Pozicija vrha minutne kazaljke:*
*t=0*

$$y_m = 4{,}3\cos\frac{\pi}{30}t$$
$$y_m = 4{,}3\cos\frac{\pi}{30}0$$
$$y_m = 4{,}3\cos 0°$$
$$y_m = 4{,}3 \cdot 1$$

$\boldsymbol{y_m = 4{,}3\ m}$

*Vrh minutne kazaljke se nalazi se nalazi u amplitudi.*

4. *Zadatak:* Odrediti preko kosinusnog modela kada se vrh satne kazaljke nalazi na $2m$ iznad *x* ose.

t=?
$y_h = 2\ m \quad A_h = 2{,}7 \quad B_h = \frac{\pi}{6}$

$$y_h = 2{,}7\cos\frac{\pi}{6}t$$
$$2 = 2{,}7\cos\frac{\pi}{6}t$$
$$0{,}74 = \cos 30°t$$
$$\cos^{-1} 0{,}74 = 30°t$$

$$42° = 30°t_1$$
$$318° = 30°t_2$$
$$t_1 = \frac{42°}{30°}$$

$$\boldsymbol{t_1 = 1{,}4\ \mathrm{h}}$$
$$t_2 = \frac{318°}{30°}$$
$$\boldsymbol{t_2 = 10{,}6\ \mathrm{h}}$$

*Vrh satne kazaljke se nalazi 2m iznad x ose kada se satna kazaljka nalazi na 1:24 h ili 10:06 h.*

- **Određivanje površine koju prebriše minutna kazaljka za određeno vrijeme pomoću integralnog računa.**

**Primjer 1**. Kazaljka pokazuje 15 min. To je četvrtina površine cijelog kruga koji opiše minutna kazaljka i ranije smo izračunali da iznosi $\frac{4{,}3^2\pi\, m^2}{4}$. Sad ćemo isto izračunati pomoću integralnog računa. Dužina minutne kazaljke je $l_m = 4{,}3\ m$ pa su granice integrala od 0 do 4,3. Jednačina kružnice koju opisuje minutna kazaljka je: $x^2 + y^2 = 4{,}3^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{4{,}3^2 - x^2}$

$y = \sqrt{4{,}3^2 - x^2}$ (za prvi kvadrant)

$P = \int_a^b f(x)dx$

$P = \int_0^{4{,}3} \sqrt{4{,}3^2 - x^2}dx$

$$I = \int \sqrt{4{,}3^2 - x^2}dx = \int \sqrt{4{,}3^2 - x^2} \cdot \frac{\sqrt{4{,}3^2-x^2}}{\sqrt{4{,}3^2-x^2}}dx = \int \frac{4{,}3^2-x^2}{\sqrt{4{,}3^2-x^2}}dx = \underbrace{\int \frac{4{,}3^2}{\sqrt{4{,}3^2-x^2}}dx}_{I_1} - \underbrace{\int \frac{x^2}{\sqrt{4{,}3^2-x^2}}dx}_{I_2}$$

$$I_1 = 4{,}3^2\int \frac{dx}{\sqrt{4{,}3^2-x^2}} = 4{,}3^2 arcsin\frac{x}{4{,}3} + C$$

$$I_2 = \int x \cdot \frac{x}{\sqrt{4{,}3^2-x^2}}dx = \left| \begin{array}{ll} x=u & dv=\frac{xdx}{\sqrt{4{,}3^2-x^2}} \\ dx=du & v=\int \frac{xdx}{\sqrt{4{,}3^2-x^2}} = \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} 4{,}3^2-x^2=t \\ -2xdx=dt \\ xdx=-\frac{dt}{2} \end{array} \right| = -\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{t}} = -\frac{1}{2}\int t^{\frac{-1}{2}}dt$$

$$= -\sqrt{t} = -\sqrt{4{,}3^2 - x^2}$$

$$I_2 = uv - \int vdu = -x\sqrt{4{,}3^2 - x^2} + \underbrace{\int \sqrt{4{,}3^2 - x^2}\, dx}_{I}$$

$$I_2 = -x\sqrt{4{,}3^2 - x^2} + I_1 - I_2$$

$$2I_2 = -x\sqrt{4{,}3^2 - x^2} + 4{,}3^2 arcsin\frac{x}{4{,}3}$$

$$I_2 = \frac{1}{2}\left(-x\sqrt{4{,}3^2 - x^2} + 4{,}3^2 arcsin\frac{x}{4{,}3}\right) + C$$

$$I = I_1 - I_2 =$$

$$= I_1 + \frac{1}{2}x\sqrt{4{,}3^2 - x^2} - \frac{1}{2}I_1 = \frac{1}{2}I_1 + \frac{1}{2}x\sqrt{4{,}3^2 - x^2} = \frac{1}{2}4{,}3^2 arcsin\frac{x}{4{,}3} + \frac{1}{2}x\sqrt{4{,}3^2 - x^2}$$

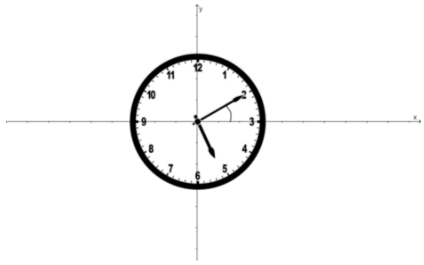
$P=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{4{,}3^2-x^2} - 4{,}3^2 arcsin\frac{x}{4{,}3}\right)\Big|_{0}^{4{,}3}$

$P=\frac{1}{2}\left[\left(4{,}3\sqrt{4{,}3^2-x^2}-4{,}3^2 arcsin\frac{4{,}3}{4{,}3}\right)- \left(0\cdot\sqrt{4{,}3^2-0^2}-4{,}3^2 arcsin\frac{0}{4{,}3}\right)\right]$

$P=\frac{1}{2}\left(-4{,}3^2\cdot\frac{\pi}{2}+4{,}3^2\cdot 0\right)=\frac{1}{2}\left|-4{,}3^2\cdot\frac{\pi}{2}\right|=\frac{4{,}3^2\pi\, m^2}{4}$

**Primjer 2.** Kazaljka pokazuje 10 min na satu. $P=\int_a^b[f(x)-g(x)]dx$

$f(x)=\sqrt{4{,}3^2-x^2}$ jednačina kružnice koju opisuje minutna kazaljka, $g(x)=\frac{\sqrt{3}}{3}x$ jednačina pravca na kojem leži minutna kazaljka. Za određivanje granica integrala treba odrediti presjek funkcije f(x) i g(x):



$\sqrt{4{,}3^2-x^2}=\frac{\sqrt{3}}{3}x \quad \Big|^2$

$4{,}3^2-x^2=\frac{1}{3}x^2$

$4{,}3^2=\frac{4}{3}x^2 => x^2=\frac{3\cdot 4{,}3^2}{4} \Longrightarrow x_{1/2}=\pm\sqrt{\frac{3\cdot 4{,}3^2}{4}}$

$x=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 4{,}3$ (u prvom kvadrantu)

$P=\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}4{,}3}\left(\sqrt{4{,}3^2-x^2}-\frac{\sqrt{3}}{3}x\right)dx$

$I=\int\left(\sqrt{4{,}3^2-x^2}-\frac{\sqrt{3}}{3}x\right)dx=\underbrace{\int\sqrt{4{,}3^2-x^2}\,dx}_{I_1}-\underbrace{\frac{\sqrt{3}}{3}\int x dx}_{I_2}$

$I_1=\frac{1}{2}\left(4{,}3^2 arcsin\frac{x}{4{,}3}+x\sqrt{4{,}3^2-x^2}\right)+C$

$I_2=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{x^2}{2}=\frac{\sqrt{3}}{6}x^2$

$I=\frac{1}{2}\left(4{,}3^2 arcsin\frac{x}{4{,}3}+x\sqrt{4{,}3^2-x^2}\right)-\frac{\sqrt{3}}{6}x^2$

$P=\left(\frac{1}{2}\left(4{,}3^2 arcsin\frac{x}{4{,}3}+x\sqrt{4{,}3^2-x^2}\right)-\frac{\sqrt{3}}{6}x^2\right)\Big|_{0}^{\frac{\sqrt{3}\cdot 4{,}3}{2}}=$

$= \frac{1}{2}\left(4{,}3^2 arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}\cdot 4{,}3}{2}\sqrt{4{,}3^2 - \frac{3\cdot 4{,}3^2}{4}}\right)$ - $\frac{\sqrt{3}}{6}\cdot\frac{3\cdot 4{,}3^2}{4} = \frac{1}{2}\left(4{,}3^2\cdot\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 4{,}3^2\cdot\frac{1}{2}\right) - \frac{\sqrt{3}}{8}\cdot$ $4{,}3^2$

P=$\frac{4{,}3^2\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{8}\cdot 4{,}3^2 - \frac{\sqrt{3}}{8}\cdot 4{,}3^2 = \frac{4{,}3^2\pi\, m^2}{6}$

Kad kazaljka pokazuje 10 minuta, površina koju je prebrisala je šestina ukupne površine kruga.

### 4.2. Izrada makete

Koristeći ranije navedene podatke dimenzija sata i satnog tornja, uzeli smo za koeficijent homotetije $k = \frac{1}{300}$ i izračunali dimenzije koje smo koristili za pravljenje makete.

Kružnica sata (stvarne dimenzije):

$$r = 4{,}3m$$
$$P = r^2\pi = (4{,}3m)^2\cdot 3{,}14$$
$$= 18{,}49m^2\cdot 3{,}14$$
$$= 58{,}06\, m^2$$
$$O = 2r\pi = 2\cdot 4{,}3m\cdot 3{,}14 = 27m$$

Kružnica sata (umanjene dimenzije):

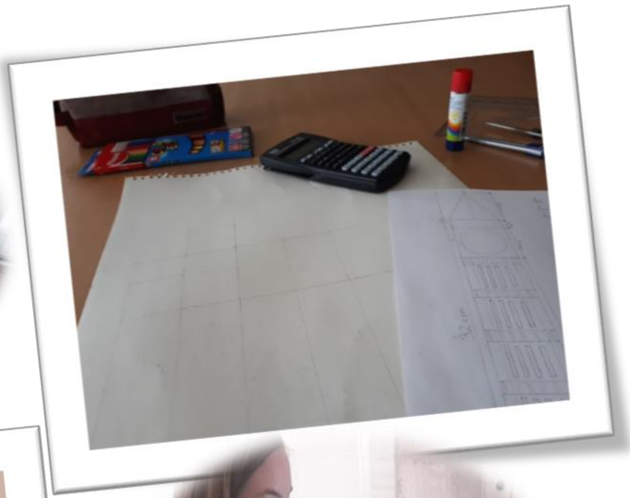
$$k = \frac{1}{300}$$
$$r' = k\cdot r = \frac{1}{300}\cdot 4{,}3m = 0{,}014m$$
P'=$r'^2\pi = (0{,}014)m^2\cdot 3{,}14 = 0{,}00020m^2\cdot$ $3{,}14 = \ = 0{,}00063m^2$

Stranica tornja (stvarne dimenzije):

$$a = 12m$$
$$b = 96m$$
$$P = ab = 12m\cdot 96m = 1152m^2$$
$$O = 2(a+b) = 2(12+96)m = 2\cdot 108m = 216m$$

Stranica tornja (umanjene dimenzije):

$$k = \frac{1}{300}$$
$$a' = k\cdot a = \frac{1}{300}\cdot 12m = 0{,}04m$$
$$b' = k\cdot b = \frac{1}{300}\cdot 96m = 0.32m$$
$$P' = a'\cdot b' = 0{,}04m\cdot 0{,}32m = 0{,}0128m^2 = 128cm^2$$
$$O' = 2(a'+b') = 2\cdot(0{,}04+0{,}32)m = 2\cdot 0{,}36m = 0{,}72m = 72cm$$



### 4.3. Predstavljanje projekta

Predstavljanje projekta smo pripremili u PowerPoint prezentaciji.

### 4.4. Refleksija projekta

Kroz projekt na temu Sat učenici su naučili povezivati stečeno znanje nastavnih sadržaja prvenstveno matematike, ali i informatike i fizike, s problemima iz svakodnevnog života. Iako im se na prvi pogled činilo da nema puno poveznica sata s matematikom, razmišljanjem, analiziranjem i istraživanjem problema, konkretan sat koji su izabrali nudio je na kraju i previše poveznica, pa su se morali ograničiti samo na proučavanje kretanja kazaljki sata, a ne cijelog tornja na kojem se nalazi sat. Učenici prvog razreda su naučili primijenjivati znanje o uglovima u ravni na konkretan problem određivanja ugla koji zatvaraju kazaljke sata. Primijenili su

znanje iz informatike, tj. programiranja da odrede program pomoću kojeg su isti problem određivanja ugla riješili na drugi način. Učenici drugog razreda su primjenom homotetije i sličnosti naučili raditi proračune za izradu makete konkretnog objekta, u ovom slučaju satnog tornja. Učenici trećeg razreda su naučeno gradivo o periodičnim funkcijama primijenili za modeliranje kretanja kazaljki sata, prepoznali su u njihovom kretanju periodičnost, što je i omogućilo korištenje trigonometrijskih funkcija za opis njihovog kretanja. Primjenom kosinusne teoreme, mogli su računati udaljenost vrhova kazaljki sata. Učenici četvrtog razreda su novostečena znanja iz diferencijalnog i integralnog računa koristili za određivanje brzine udaljavanja kazaljki, te računanje površine kružnih isječaka.
Kako je svaki dio projektnog zadataka bio povezan s prethodim dijelom, učenici su kroz cijeli projekt surađivali jedni s drugima i koristili podatke do kojih su došli ostali učenici, te tako njegovali i razvijali timski rad. Na karaju smo zaključili, da je stvarno matematika jezik svijeta koji nas okružuje.

# III MATEMATIČKI POJMOVI

**Geometrija u ravni:** tačka(npr.tačka početka kazaljke, završetka, koordinatni početak...), duž (dio prave od početka do kraja kazaljke), prava (određivanje pravca na kojem leži kazaljka), ugao (ugao izmedju kazaljki), kružnica (kružnica koju opisuju vrhovi kazaljki), trougao (trougao koji zatvaraju vrhovi kazaljki i zajednički početak), pravougaonik (jedna strana satnog tornja), krug (površina koju opišu kazaljke), kružni isječak, kružni prsten.
**Analitička geometrija**: opći, segmentni i centralni oblik jednačine kružnice, jednačina prave
Teoreme: kosinusna teorema (pri određivanju udaljenosti vrhova kazaljki)
**Trigonometrija:** Trigonemtrijske funkcije sinus i kosinus (za modeliranje kretanja kazaljki sata), trigonometrijske jednačine
**Diferencijalni i integralni račun:** prvi izvod (za računanje brzine udaljavanje kazaljki), integral, određeni integral, primjena određenog integrala (pri određivanju površine koju opiše minutna kazaljka)
**Aritmetički niz** (kao niz vrijednosti koje dobijemo pri određivanju trenutaka preklapanja kazaljki)

U skladu sa NPP-om BiH u okviru razreda smo razmatrali sljedeće probleme:

I razred

1. Izračunati obim i površinu kruga koji opisuju satna i minutna kazaljka
2. Odrediti period, frekvenciju, ugaonu i linijsku brzinu kazaljki
3. Određivanje ugla koji zatvaraju kazaljke sata za proizvoljno vrijeme
4. Pravljenje programa u C++ za računanje ugla između kazaljki

II razred

1. Izračunavanje površine satnog tornja
2. Računanje umanjenih dimenzija satnog tornja primjenom homotetije
3. Pravljenje programa u C++ za određivanje vremena u nekoj vremenskoj zoni u odnosu na vrijeme koje pokazuje sat Big Ben

III razred

1. Računanje površine kružnog prstena i kružnog odsječka minutne i satne kazaljke
2. Primjenom kosinusne teoreme računanje udaljenosti vrhova kazaljki
3. Modeliranje kretanja kazaljki pomoću trigonometrijskih funkcija
4. Određivanje jednačina kružnica koje opisuju minutna i satna kazaljka
5. Određivanje jednačine pravca na kojem leži minutna kazaljka

IV razred
1. Primjenom diferencijalnog računa određivanje brzine udaljavanja/približavanja minutne i satne kazaljke
2. Primjenom integralnog računa računanje površine koju prebriše minutna kazaljka
3. Prepoznavanje aritmetičkog niza u nizu vrijednosti trenutaka preklapanja kazaljki sata
4. Pravljenje programa u C++ za određivanje udaljenosti vrhova kazaljki sata

## IV SOFTVERSKI ALATI

1. MS Word
2. MS PowerPoint
3. GeoGebra
4. C++

## V IZVORI

### 5. 1. Literatura


1. Udžbenici za srednje škole iz matematike u Bosni i Hercegovine:

A. Hodžić: *Matematika za 1.razred srednje škole*, Svjetlost, Sarajevo, 2002.

A. Huskić: *Matematika za 2. Razred gimnazije i drugih srednjih škola*, Svjetlost, Sarajevo, 2009.

S. Softić: *Matematika za 3 razred gimnazije*, Svjetlost, Sarajevo, 2000.

N. Džubur: *Matematika 4 sa zbirkom zadataka*, Svjetlost, Sarajevo, 2008.

2. https://www.parliament.uk/bigben
3. https://www.londoncitybreak.com/big-ben
4. https://hr.wikipedia.org/wiki/Big_Ben


### 5. 2. Popis slika

1. Slike sata i grafici funkcija urađeni u programu GeoGebra
2. Slike sata Big Ben preuzete sa sljedećih linkova
   https://www.visitlondon.com/things-to-do/sightseeing/london-attraction/big-ben
   https://customercarecontacts.com/contact-of-big-ben-london-phone-address/

### 5. 3. Fotografije

Izrada makete satnog tornja
Fotografije učenika koji su radili na projektu

# PRILOG 1

Program u C++-u koji računa ugao između kazaljki sata Big Bena

```
#include<iostream>
#include<cmath>
using namespace std;
int main()
{
        int h,min;
        double const pi=3.14;
        double l,b,g,rad;
        cout<<"Unesite vrijeme (sate pa minute): "; cin>>h>>min;
        b=6*(min*1.);
        g=30*(h*1.)+0.5*(min*1.);
        l=abs(g-b);
        rad=l/180*pi;
        cout<<"Ugao izmedu kazaljki u stepenima: "<<l<<endl;
        cout<<"Ugao izmedu kazaljki u radijanima: "<<rad<<endl;
        system("PAUSE");
        return 0;
}
```

# PRILOG 2

Program u C++-u koji za trenutnu lokaciju ispisuje vrijeme (vremenske zone)

```
#include <iostream>
#include <cmath>
#include <cstdlib>
#include <iomanip>
using namespace std;
double racun_zone();
int main()
{
racun_zone();
system("pause");
return 0;
}
double racun_zone()
{
double geo_duzina, vrijeme, razlika;
cout<<"Unesi geografsku duzinu mjesta na kojem se nalazis:";cin>>geo_duzina;
cout<<"Unesi vrijeme kod sebe: ";cin>>vrijeme;
if(geo_duzina>0)
```

```
{
if(geo_duzina<=15)
{
cout<<"Vremenska zona u kojoj se nalazis je UTC+1, sto znaci da je vremenska razlika 1h.\n";
razlika=1;
}
else if(geo_duzina<=30)
{
cout<<"Vremenska zona u kojoj se nalazis je UTC+2, sto znaci da je vremenska razlika 2h.\n";
razlika=2;
}
else if(geo_duzina<=45)
{
cout<<"Vremenska zona u kojoj se nalazis je UTC+3, sto znaci da je vremenska razlika 3h.\n";
razlika=3;
}
else if(geo_duzina<=60)
{
cout<<"Vremenska zona u kojoj se nalazis je UTC+4, sto znaci da je vremenska razlika 4h.\n";
razlika=4;
}
else if(geo_duzina<=75)
{
cout<<"Vremenska zona u kojoj se nalazis je UTC+5, sto znaci da je vremenska razlika 5h.\n";
razlika=5;
}
else if(geo_duzina<=90)
{
cout<<"Vremenska zona u kojoj se nalazis je UTC+6, sto znaci da je vremenska razlika 6h.\n";
razlika=6;
}
else if(geo_duzina<=105)
{
cout<<"Vremenska zona u kojoj se nalazis je UTC+7, sto znaci da je vremenska razlika 7h.\n";
razlika=7;
}
else if(geo_duzina<=120)
{
cout<<"Vremenska zona u kojoj se nalazis je UTC+8, sto znaci da je vremenska razlika 8h.\n";
razlika=8;
}
else if(geo_duzina<=135)
{
cout<<"Vremenska zona u kojoj se nalazis je UTC+9, sto znaci da je vremenska razlika 9h.\n";
razlika=9;
}
else if(geo_duzina<=150)
{
cout<<"Vremenska zona u kojoj se nalazis je UTC+10, sto znaci da je vremenska razlika 10h.\n";
razlika=10;
}
```

```
else if(geo_duzina<=165)
{
cout<<"Vremenska zona u kojoj se nalazis je UTC+11, sto znaci da je vremenska razlika 11h.\n";
razlika=11;
}
else if(geo_duzina<=180)
{
cout<<"Vremenska zona u kojoj se nalazis je UTC+12, sto znaci da je vremenska razlika 12h.\n";
razlika=12;
}
if(vrijeme-razlika<=0)
cout<<"U Grinvicu (na nultom meridijanu) je sada "<<setprecision(4)<<24-razlika<<"h.\n";
else
cout<<"U Grinvicu (na nultom meridijanu) je sada "<<setprecision(4)<<vrijeme-razlika<<"h.\n";
}
else if(geo_duzina<0)
{
if(geo_duzina>=15)
{
cout<<"Vremenska zona u kojoj se nalazis je UTC-1, sto znaci da je vremenska razlika -1h.\n";
razlika=-1;
}
else if(geo_duzina>=30)
{
cout<<"Vremenska zona u kojoj se nalazis je UTC-2, sto znaci da je vremenska razlika -2h.\n";
razlika=-2;
}
else if(geo_duzina>=45)
{
cout<<"Vremenska zona u kojoj se nalazis je UTC-3, sto znaci da je vremenska razlika -3h.\n";
razlika=-3;
}
else if(geo_duzina>=60)
{
cout<<"Vremenska zona u kojoj se nalazis je UTC-4, sto znaci da je vremenska razlika -4h.\n";
razlika=-4;
}
else if(geo_duzina>=75)
{
cout<<"Vremenska zona u kojoj se nalazis je UTC-5, sto znaci da je vremenska razlika -5h.\n";
razlika=-5;
}
else if(geo_duzina>=90)
{
cout<<"Vremenska zona u kojoj se nalazis je UTC-6, sto znaci da je vremenska razlika -6h.\n";
razlika=-6;
}
else if(geo_duzina>=105)
{
cout<<"Vremenska zona u kojoj se nalazis je UTC-7, sto znaci da je vremenska razlika -7h.\n";
razlika=-7;
```

```
}
else if(geo_duzina>=120)
{
cout<<"Vremenska zona u kojoj se nalazis je UTC-8, sto znaci da je vremenska razlika -8h.\n";
razlika=-8;
}
else if(geo_duzina>=135)
{
cout<<"Vremenska zona u kojoj se nalazis je UTC-9, sto znaci da je vremenska razlika -9h.\n";
razlika=-9;
}
else if(geo_duzina>=150)
{
cout<<"Vremenska zona u kojoj se nalazis je UTC-10, sto znaci da je vremenska razlika -10h.\n";
razlika=-10;
}
else if(geo_duzina>=165)
{
cout<<"Vremenska zona u kojoj se nalazis je UTC-11, sto znaci da je vremenska razlika -11h.\n";
razlika=-11;
}
else if(geo_duzina>=180)
{
cout<<"Vremenska zona u kojoj se nalazis je UTC-12, sto znaci da je vremenska razlika -12h.\n";
razlika=-12;
}
if(vrijeme-razlika>=24)
cout<<"U Grinvicu (na nultom meridijanu) je sada "<<setprecision(4)<<0-razlika<<"h.\n";
else
cout<<"U Grinvicu (na nultom meridijanu) je sada "<<setprecision(4)<<vrijeme-razlika<<"h.\n";
}
else
{
cout<<"Vremenska zona u kojoj se nalazis je UTC(WET), sto znaci da je vremenska razlika 0h.\n";
cout<<"Dakle u Grinvicu je sada "<<vrijeme<<"h.\n";
}
```

# PRILOG 3

<u>Program u C++-u koji za uneseno vrijeme na satu Big Ben ispisuje udaljenost između vrhova kazaljki</u>

```
#include<iostream>
#include<cmath>
using namespace std;
int main()
{
```

```
        int h,min;
        double const pi=3.14;
        double I,b,g,rad,x;
        cout<<"Unesite vrijeme na satu(sate pa minute):";
        cin>>h>>min;
        b=6*(min*1.);
        g=30*(h*1.)+0.5*(min*1.);
        I=abs(g-b);
        rad=I/180*pi;
        x=sqrt(25.78-23.22*cos(I*pi/180.0));
        cout<<"Udaljenost izmedju vrhova kazaljki tada iznosi: "<<x<<endl;
        system("pause");
        return 0;
}
```