

**PROJEKAT SA PROJEKTNOM DOKUMENTACIJOM
TIMA
BOSNE I HERCEGOVINE
SREDNJE ŠKOLE**

I. OSNOVNI PODACI

1. Naziv projekta: Most

2. Tema projekta: Istraživanje luka Starog mosta u Mostaru

3. Autori projekta:

- Ajdin Čaušević, „Unsko – sanski koledž“ Bihać – I razred
- Tarik Beganović, JU „Gimnazija“ Cazin – II razred
- Adnan Kišmetović, JU „Gimnazija“ Cazin – III razred
- Hana Ibrahimpašić, „Unsko – sanski koledž“ Bihać – IV razred

4. Voda tima:

Haris Omanović, profesor razredne nastave
JU „Pedagoški zavod USK-a“
77000 Bihać
Tel: 063/281-844
Web stranica: www.pzusk@pzusk.ba
e – mail: omanovicharis18@gmail.com

5. Mentori:

- Edin Liđan MA, Pedagoški fakultet Univerziteta u Bihaću, e-mail: lidjan_edin@hotmail.com
- Enes Škrgić, prof. fizike i informatike, JU „Gimnazija“ Cazin, e-mail: enes.skrbic@gmail.com
- Ornela Mahmutović-Filipović, prof. matematike i informatike, OŠ „Cazin II“, e-mail: ornela_mahmutovic@hotmail.com
- Samir Kišmetović, nastavnik matematike i fizike, prof. informatike, OŠ „Konjodor“, e-mail: samirkismetovic@hotmail.com
- Semira Beganović, prof. matematike i fizike, JU „II srednja škola“ Cazin, e-mail: semirabeganovic@hotmail.com

6. Tim: Bosne i Hercegovine

7. Datum početka projekta: 30.4.2018.

8. Datum završetka projekta: 9.5.2018.

II. O projektu

1. Opis problema

„Od svega što čovek u životnom nagonu podiže i gradi, ništa nije u mojim očima bolje i vrednije od mostova. Oni su važniji od kuća, svetiji od hramova. Svačiji i prema svakom jednaki, korisni, podignuti uvijek smisleno, na mjestu na kom se ukrštava najveći broj ljudskih potreba, istrajniji su od drugih građevina i ne služe ničem što je tajno ili zlo.“

(Ivo Andrić)

Stari most u Mostaru izgrađen je prvi put 1566. godine i tada je predstavljao jednu od najvećih lučnih konstrukcija na svijetu. Dao ga je sagraditi Sulejman Veličanstveni, a u djelo njegovu želju je proveo Mimar Hajrudin. Stari most u Mostaru predstavlja jednu od svjetskih građevinskih atrakcija, koja nikog ne ostavlja ravnodušnim, pa nije ostavila ni nas. Posmatranjem Starog mosta u Mostaru „golim“ okom, zapitali smo se šta vidimo u njegovom luku, parabolu ili nešto drugo?



Da utemeljimo temu našeg projekta ponudili smo kolegama učenicima, profesorima pa i na ulici slučajnim prolaznicima pitanje šta opisuje luk Starog mosta u Mostaru? Odgovori su bili da na slici vide parabolu ili luk. Da li su odgovori bili tačni i šta zapravo luk predstavlja pokušat ćemo odgonetnuti kroz ovaj projekat.

2. Ciljevi projekta

- Ispitati da li luk Starog mosta opisuje parabolu ili neku drugu krivu
- Odrediti jednačinu intradosa¹ krive na luku Starog mosta u Mostaru
- Istražiti luk Starog mosta u GeoGebri
- Odrediti dužinu luka krive intradosa na luku Starog mosta
- Izraditi model Starog mosta u AutoCad-u
- Napraviti maketu Starog mosta u Mostaru
- Razvijati timski i grupni oblik rada

¹ Intrados je linija donjeg ruba svoda, dok je ekstrados linija gornjeg ruba svoda mosta

3. Plan projekta

Susret	Datum	Aktivnost
I	30.4.2018.	Odabir teme projekta i dogovor oko aktivnosti: <ul style="list-style-type: none">• Istraživanje literature – cijeli tim• Priprema materijala za maketu –cijeli tim• Dogovor o izradi modela Starog mosta u AutoCadu – individualni rad učenika Tarika Beganovića• Izrada apleta u GeoGebri za istraživanje luka Starog mosta – individualni rad učenika Adnana Kišmetovića
II	3.5.2018.	<ul style="list-style-type: none">• Analiza GeoGebra apleta• Analiza AutoCad modela• Razrada matematičkog problema
III	4.5.2018.	<ul style="list-style-type: none">• Pravljenje makete• Matematički pojmovi
IV	7.5.2018.	<ul style="list-style-type: none">• Slaganje projektne dokumentacije, prezentacije i provjera svega urađenog

4. Izvođenje projekta

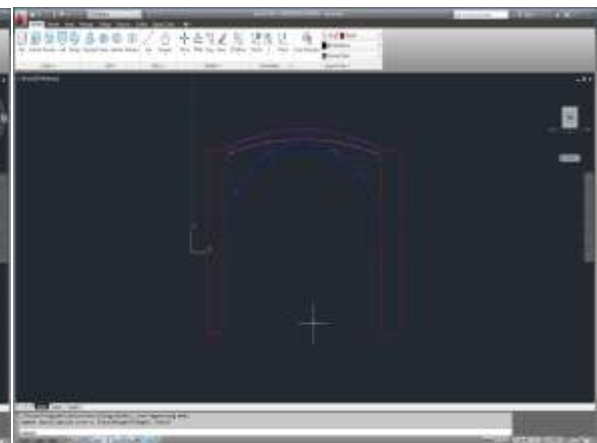
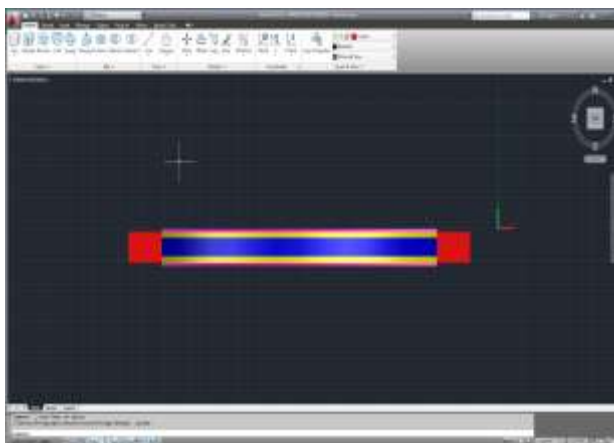
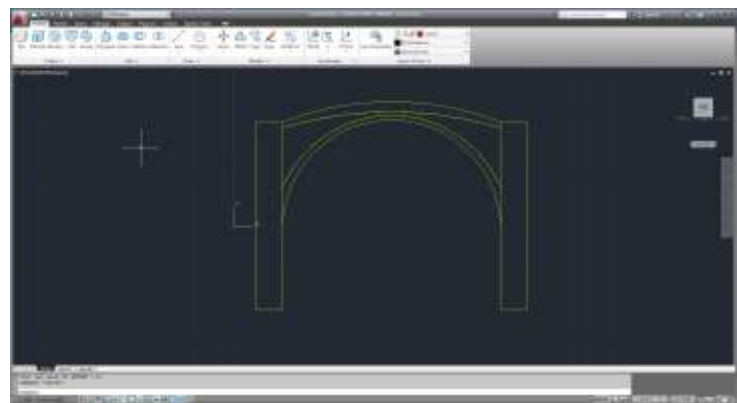
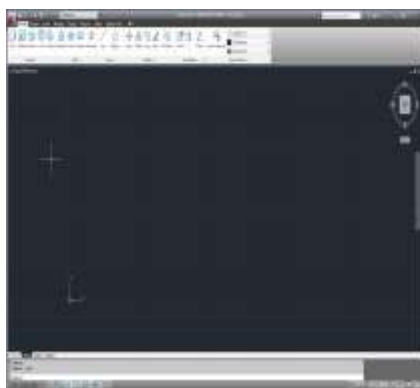
4.1. Istraživanje luka Starog mosta u GeoGebri

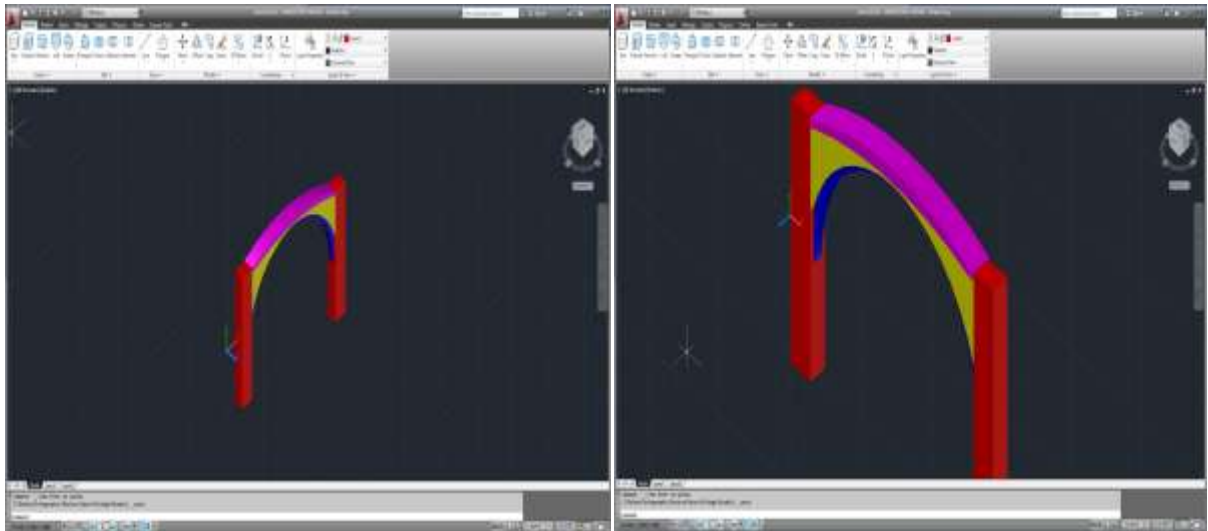


Na osnovu čega smo ustanovili da luk Starog mosta ne predstavlja parabolu već polukružnicu.



4.2. Vizualizacija (model) Starog mosta u Mostaru u AutoCad-u



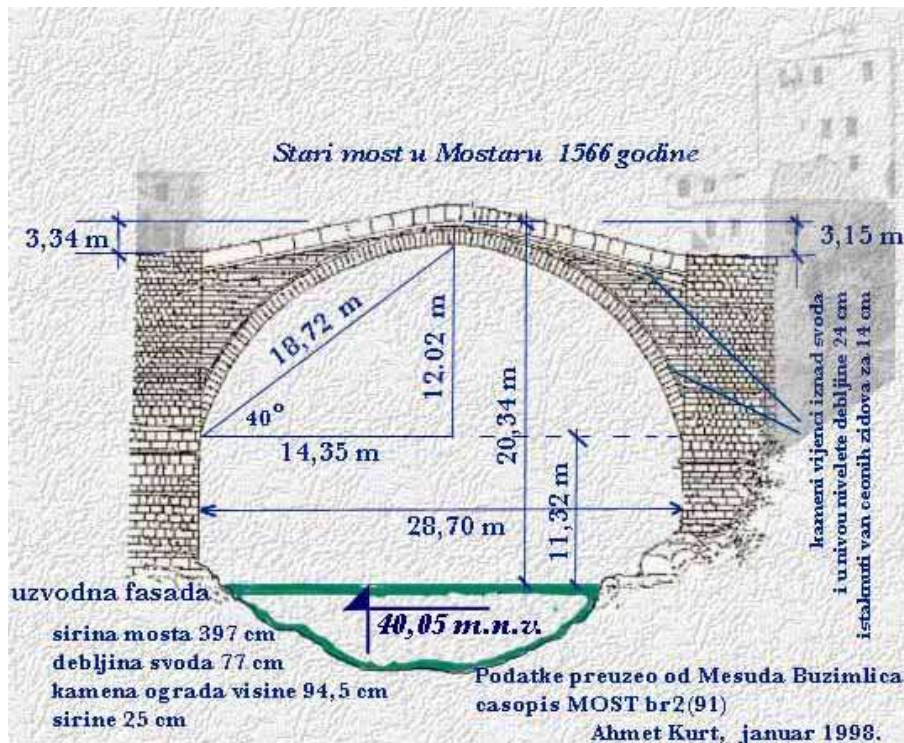


Do istih zaključaka dolazimo analizirajući model Starog mosta u Mostaru u programu AutoCad.



4.3. Matematička razrada problema

Sa matematičke strane odlučili smo posmatrati problem određivanja dužine luka Starog mosta u Mostaru, koristeći udaljenost od obale do obale. Za mjere poslužili smo se slikom



- **Određivanje jednačine kružnice koja opisuje luk Starog mosta u Mostaru**

Određujemo kružnicu koja leži u ishodištu koordinatnog sistema, tj. centralnu kružnicu, oblika

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

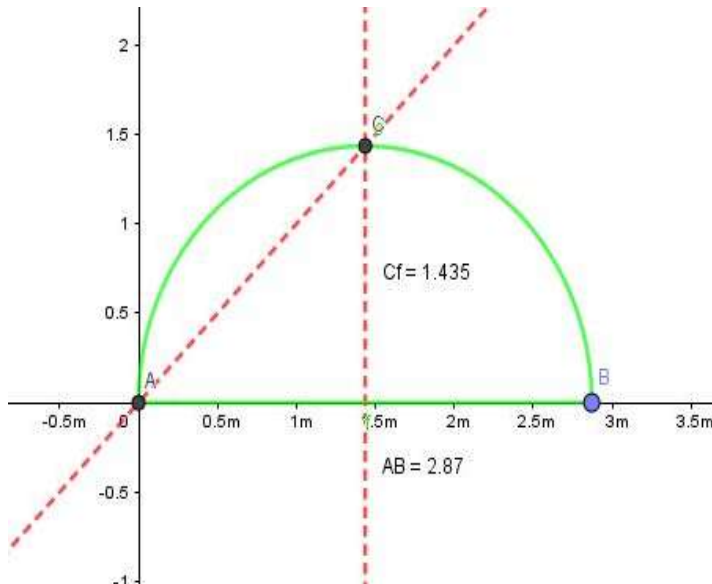
Drugim riječima suština našeg problema se ogleda u određivanju poluprečnika r . Ako se zna da je udaljenost između dvije obale $28,70m$, to nam je jasno da naš poluprečnik mora biti dimenzija $r=14.35m$, a to znači da se naše ishodište koordinatnog sistema nalazi na sredini udaljenosti od obala i na udaljenosti od najudaljenije tačke od vode za $14.35m$ od centra kružnice, pa naša jednačina kružnice glasi

$$x^2 + y^2 = 14.35^2.$$

Odredimo sada dužinu luka Starog mosta u Mostaru.

- **Određivanje dužine luka Starog mosta preko kružnog isječka**

Ako znamo da je raspon mosta $28,70m$ iz toga slijedi da je poluprečnik tog polukruga $14,35m$.



$$r=14,35$$

$$\alpha=90^0$$

$$l=?$$

$$l=\frac{2r\pi\alpha}{360^0}$$

$$l=\frac{2\cdot 14,35\cdot 3,14\cdot 90^0}{360^0}$$

$$l=\frac{90,118}{4}$$

$$l=22,529m$$

Pošto je to polovina kružnog luka $22,529\cdot 2 = 45,059 m$.

- **Računanje dužine luka preko poluobima**



Postavimo koordinatni sistem tako da se nalazi u ishodištu kružnice koja odgovara luku Starog mosta. Tada možemo konstruisati dva pravougla trougla čija tjemena sa pravim uglom će biti u ishodištu koordinatnog sistema. Njihovom konstrukcijom dobijamo jednakokraki pravougli trougao, oko kojeg je moguće opisati kružnicu poluprečnika $r=14.35$.

Slijedi da je dužina luka Starog mosta jednaka njegovom poluobimu, tj.

$$l = \frac{0}{2} = \frac{2r\pi}{2} = r\pi.$$

Odakle dobivamo rezultat za dužinu luka Starog mosta $l=45,059m$.

- **Primjenom diferencijalnog i integralnog računa**

Jednačina kružnice pomoću koje je opisan luk Starog mosta je data sa $x^2 + y^2 = 14.35^2$. Iz date jednačine dobijamo da je

$$y^2 = 14.35^2 - x^2$$

$$y = \pm \sqrt{14.35^2 - x^2}$$

Posmatrat ćemo $y = \sqrt{14.35^2 - x^2}$. Dužina luka krive primjenom diferencijalnog i integralnog računa se može dobiti pomoću formule

$$l = \int \sqrt{1 + (y')^2} dx.$$

U tu svrhu postavimo ishodište koordinatnog sistema u centar kružnice koja odgovara luku Starog mosta u Mostaru. Tada je dužina polovine luka jednaka

$$l_1 = \int_0^{14.35} \sqrt{1 + (y')^2} dx,$$

odnosno dobijamo da je

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{14.35^2 - x^2}} (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{14.35^2 - x^2}}$$

$$(y')^2 = \frac{x^2}{14.35^2 - x^2}.$$

Uvrštavanjem u formulu za računanje dužine krive dobijamo

$$l_1 = \int_0^{14.35} \sqrt{1 + \frac{x^2}{14.35^2 - x^2}} dx,$$

rješavanjem dobijenog integrala dobijamo

$$l_1 = \int_0^{14.35} \sqrt{\frac{14.35^2 - x^2 + x^2}{14.35^2 - x^2}} dx$$

$$= \int_0^{14.35} \frac{\sqrt{14.35^2}}{\sqrt{14.35^2 - x^2}} dx = \frac{\sqrt{14.35^2}}{\sqrt{14.35^2}} \int_0^{14.35} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{14.35^2}}} dx = \int_0^{14.35} \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{x}{14.35})^2}} dx$$

Riješimo sada integral

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - (\frac{x}{14.35})^2}} = \left| \frac{x}{14.35} = t, dx = 14.35 dt \right| = \int \frac{14.35 dt}{\sqrt{1 - t^2}} = 14.35$$

$$\int \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} = 14.35 (\arcsin t) = 14.35 \arcsin\left(\frac{x}{14.35}\right).$$

Rješavanjem našeg određenog integrala dobijamo:

$$l_1 = 14.35 \arcsin\left(\frac{x}{14.35}\right) \Big|_0^{14.35} = 14.35 [\arcsin 1 - \arcsin 0]$$
$$= 14.35 \cdot 1.57079633 = 22.5409273355$$

Slijedi da je ukupna dužina luka starog mosta u Mostaru

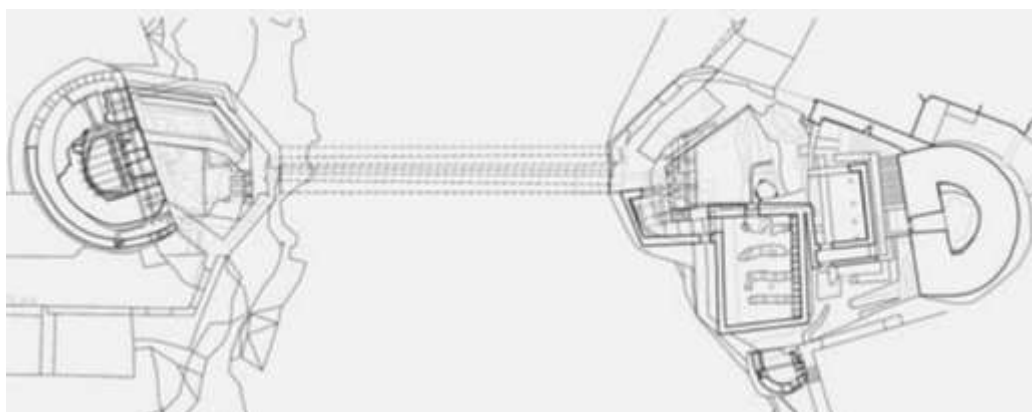
$$l = 2l_1 = 2 \cdot 22.5409273355 = 45.081854691.$$

4.4. Pravljenje makete Starog mosta

Potom smo zajedničkim snagama pristupili planu izrade makete mosta. Kako smo već našli sliku Starog mosta sa dimenzijama odlučili smo se da dimenzije sa slike proporcionalno umanjimo i napravimo maketu.



Da bi dobili maketu bilo nam je neophodan i tlocrt Starog mosta. Za tu svrhu poslužili smo se tlocrtom lokaliteta.



Od raznih varijanti odlučili smo se za opciju izrade makete od kartona. Dogovorili smo konkretne zadatke i dali se u obavezi iskupljanja materijala. Na slijedećem sastanku materijal je bio spreman.

4.5. Materijali korišteni u pravljenju makete

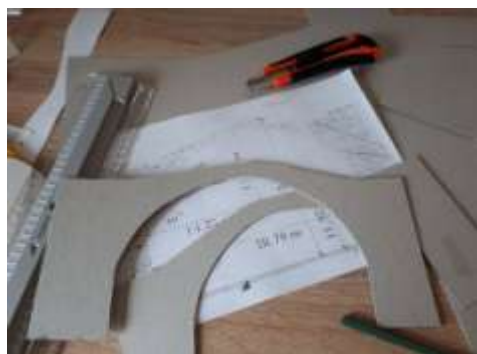
Pripremili smo karton, lenijar, skalpel, lijepilo



Slijedi razmišljanje:



Nakon sata vremena već se nadzirao oblik;



Dok je trajala faza sušenja mi smo se prebacili na jedan drugi karton 😊

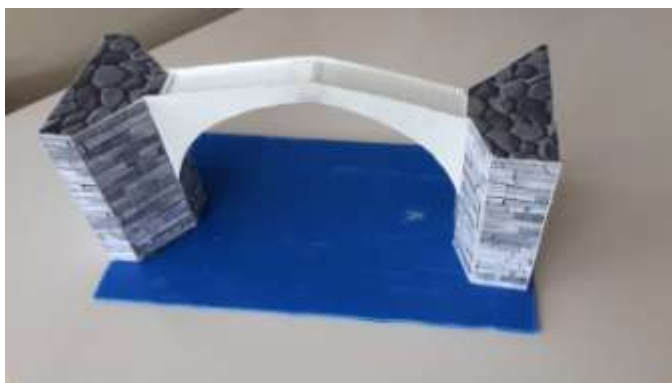


Nakon što smo prethodno očistili radni stol, slijedila je maketa oblika:



Ostalo je da je još „ušminkamo“ maketu našeg mosta, što smo ostavili za drugi dan.

Nakon ponovnog okupljanja konačno smo dobili toliko željenu maketu



4.6. Predstavljanje projekta

Predstavljanje projekta smo pripremili u PowerPoint prezentaciji sa pratećim materijalima.

4.7. Refleksija o projektu

Kroz projekt smo napravili istraživanje luka Starog mosta u Mostaru, koji mnogi percipiraju kao parabolu. Smatramo da se tema projekta može proširiti i učiniti još interesantnijom i kompleksnijom, ali zbog ograničenosti vremena i oblika nastavnog plana i programa u IV razredu srednje škole u BiH odlučili smo se za istraživanje konkretnog problema. Kroz sam projekat koristeći poznata matematička znanja uspjeli smo dokazati da luk Starog mosta u Mostaru predstavlja polukružnicu, odrediti jednačinu kružnice kojoj dati luk odgovara, te odrediti samu dužinu polukružnice na tri različita načina. Poteškoće i ograničenja u istraživanju nam je predstavljao problem kasnog početka projekta kako je to vidljivo i u samom planiranju izvođenja projekta i u broju napravljenih susreta. Kroz projekat su učenici kroz pripremu samostalnih apleta u različitim informatičkim softverima ponovili do sada postojeća znanja iz informatike, te su uz pomoć svojih mentora produbila svoja znanja. Učenici su kroz projekat povezali svijet koji nas okružuje sa matematikom, matematiku sa drugim naukama i umjetnostima. Kroz aktivnosti koje smo imali prilikom izrade projekta učenici, a i mi sami smo razvijali osjećaje za rad u paru, timski i grupni oblik rada.

Projekat je na zanimljiv način učenike uveo u razumijevanje pojma dokaza, analize, sinteze, analogije pa ponekad i apstrakcije. Omogućio je povezivanja matematičkih sadržaja sa realnim svijetom i konačno dao učenicima odgovor na pitanje „Zašto mi ovo učimo?“. Učeničko zadovoljstvo tokom izvođenja projekta je još jedan od pokazatelja da je projektna nastava, nastava XXI stoljeća.

III. MATEMATIČKI POJMOVI

Geometrija u ravni: tačka, duž, prava, kriva (parabola i (polu)kružnica), trougao (jednakokraki, pravougli i jednakokraki pravougli), pravougaonik, ugao, mnogougao (petougao, osmougao), simetrija i asimetrija.

Geometrija prostora: prizme (trostrana, kvadar, petostrana i osmostrana).

Diferencijalni i integralni račun: prvi izvod, integral, određeni integral, dužina luka.

U skladu sa NPP-om BiH u okviru razreda smo razmatrali sljedeće probleme:

○ I razred

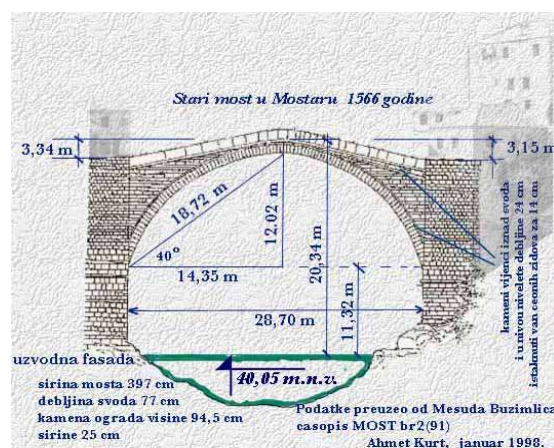
1. Izračunati poluprečnik kružnice koja odgovara luku Starog mosta u Mostaru.
2. Odrediti centralnu kružnicu koja odgovara luku Starog mosta.
3. Odrediti obim (poluobim) centralne kružnice.
4. Izračunati dužinu luka krive pomoću poluobima kruga.
5. Uočiti jednakokraki trougao na extradosu luka mosta.
6. Kako se mogu iskoristiti geometrijska tijela za izradu stubova – oslonaca.

○ II razred

1. Uočavanje luka mosta u obliku parabole (uz pretpostavku da se radi o paraboli).
2. Istraživanje luka kao kvadratne funkcije (uz pretpostavku da se radi o paraboli).
3. Ispitivanje grafika kvadratne funkcije.
4. Određivanje najviše tačke na intradosu.

○ III razred

1. Određivanje uglova u pravouglom trouglu na osnovu trigonometrijskih funkcija (dokaz da je vrijednost ugla 40 u trouglu sa slike)



2. Istraživanje luka kao dijela kružnice.

3. Koliko najviše se može povući tangenti na luk iz tačke koja ne pripada luku.
4. Uočavanje prizmi kao sastavnih dijelova mosta.
5. Izračunavanje površine stubova (nosača) mosta koristeći znanje iz stereometrije.

- IV razred

1. Primjena diferencijalnog računa na luk Starog mosta.
2. Odrediti najvišu tačku na intradosu luka pomoću drugog izvoda.
3. Primjena integralnog računa na luk Starog mosta.
4. Određivanje dužine luka krive Starog mosta preko diferencijalnog i integralnog računa.

IV. SOFTVERSKI ALATI

1. AutoCad
2. GeoGebra
3. MS Word
4. MS PowerPoint

V. Izvori

5.1. Literatura

1. Udžbenici za srednje škole iz matematike u Bosni i Hercegovine
 - A. Hodžić: *Matematika za 1.razred srednje škole*, Svjetlost, Sarajevo, 2002.
 - A. Huskić: *Matematika za 2. Razred gimnazije i drugih srednjih škola*, Svjetlost, Sarajevo, 2009.
 - S. Softić: *Matematika za 3 razred gimnazije*, Svjetlost, Sarajevo, 2000.
 - N. Džubur: *Matematika 4 sa zbirkom zadataka*, Svjetlost, Sarajevo, 2008.
2. <http://www.elfak.ni.ac.rs/downloads/informacije/studenti/blanketi/odredjeni-integrali.pdf>
3. Intrados i ekstrados
<https://www.google.com/url?sa=t&ret=j&q=&esrc=s&source=web&cd=3&cad=rja&uact=8&ved=0ahUKEwjz9MuG1PvaAhVJP5oKHUTuCXcQFgg1MAI&url=http%3A%2F%2Fwww.grad.hr%2Fgukov%2Fpdf%2F5-luk.pdf&usg=AOvVaw15CILgTER2SocHdxRisNql>
4. J. Radnić, A. Harapin, M. Smilović, N. Grgić, M. Glibić: *Statička i dinamička analiza starog kamenog mosta u Mostaru*, Građevinar 8/2012, UDK: 624.5.012.1:624.042/.046
<https://hrcak.srce.hr/file/128605>
5. https://hr.wikipedia.org/wiki/Stari_most_u_Mostaru

5.2. Popis slika

1. Slike urađene u programu GeoGebra
 - Slike iz samostalnog rada Adnana Kišmetovića (GeoGebra)
 - Slika korištena unutar apleta
<https://www.bing.com/images/search?view=detailV2&ccid=C55NoYWj&id=BD4B6503645C55CF4E66611605ACAEDF31ABF3E7&thid=OIP.C55NoYWjbmMSkUHppo4iPQHAE0&mediaurl=https%3a%2f%2farchitectureandinteriordesign.files.wordpress.com%2f2014%2f01%2fstari-most-mostar-bosnia-and-herzegovina.jpg&exph=650&expw=1000&q=stari+most+u+mostaru&simid=608028987556300096&selectedIndex=55&ajaxhist=0>
 - Slike iz samostalnog rada Tarika Beganovića (AutoCad)
 - Slika korištena za računanje dužine luka krive preko kružnog isječka (rađena u GeoGerbi)
 - Slika korištena za računanje dužine luka krive preko poluobima
https://www.bing.com/images/search?view=detailV2&ccid=FnDEO%2f66&id=15FD4D2F908F30FCE47063D1232B54984A34001A&thid=OIP.FnDEO_66SPZ-NCGfiUKJgHaFi&mediaurl=http%3a%2f%2fwww.daniel-ursprung.ch%2fOrig%2fmostar_most.jpg&exph=1712&expw=2288&q=stari+most+u+mostaru&simid=607995456770150140&selectedIndex=68&ajaxhist=0 (dorađena u PowerPointu)

- Slika tlocrta

<https://hrcak.srce.hr/file/14192>

- Link slike sa dimenzijama Starog mosta

<http://www.geocities.ws/Paris/Bistro/1347/mostar5.html>

5.3. Fotografije

- Izrada mekete Starog mosta