1. БРОЈЕВИ

Решени примери

Реални бројеви

Нека је Rскуп реалних бројева. Скуп Nприродних и скуп Zцелих бројева су подскупови скупа R. Ако је $a \in Z$и $b \in N$, овде постоје јединствени цели бројеви qи rтакви да је

$$a = bq + r, 0 \leq r < q.$$

У случају $r = 0$кажемо да је број a**делив бројем** bили да је број aдељив бројем b.
Природан број nје дељив:

- са 3 ако је збир његових цифара дељив са 3,
- са 4 ако је његов двоцифрени завршетак дељив са 4,
- са 5 ако је његова задња цифра 0 или 5,
- са 8 ако је његов троцифрени завршетак дељив са 8,
- са 9 ако је збир његових цифара дељив са 9,
- са 11 ако је разлика збира цифара на парним и збира цифара на непарним местима дељива са 11,
- са 25 ако је његов двоцифрени завршетак 00, 25, 50 или 75.

Пример 1. Да ли је број 1234567891011 квадрат неког природног броја?

Решење. Не, јер је дати број дељив са 3, а није дељив са 9.

Природни бројеви aи bсу **узајамно прости** ако је њихов највећи заједнички делилац један. Ако су aи bузајамно прости и ако је природан број cдељив и са aи са b, онда је cдељив и са ab.

Пример 2. Доказати да је број 200…088 дељив са 36.

Решење. Дати број је дељив и са 9 и са 4. Ако су 4 и 9 узајамно просте, то је дати број дељив и производом 4·9.

Пример 3. Ако је pпрост број већи од 3, доказати да је број $p^2 - 1$дељив са 24.

Решење. Пошто је производ $(p - 1)(p + 1)$дељив са 3, а p прост број већи од 3, то је $(p - 1)(p + 1)$, односно $p^2 - 1$, дељив са 3. Како су $p - 1$и $p + 1$узастопни парни бројеви, то је $p - 1 = 2k$и $p + 1 = 2k + 2$, па је

$$p^2 - 1 = 2k(2k + 2) = 4k(k + 1),$$

što значи да је $p^2 - 1$делив и са 8. Из чињење да су бројеви 3 и 8 узајамно прости следи да је $p^2 - 1$делив и са 24.

☐ Производ првих n природних бројева се означава са $n!$и чита n факторијел.

Пример 4. Одредити највећи делилац броја 100! који је облика 2^n, где је n природан број.

Решење. Међу првих 100 природних бројева један је делив са 2^6, три су делива са 2^5, шест су делива са 2^4, дванаест са 2^3, двадесет пет са 2^2и педесет са 2^1. Према томе, број 100! је делив са $2^{1+3+6+12+25+50}$, односно са 2^{97}.

Пример 5. Ако су n и k природни бројеви, доказати да је број $(n+1)(n+2)\cdots(n+k)$делив са k!.

Решење. Нека је d делилац броја k!. Међу првих k узастопних природних бројева има [k/d], а међу k узастопних бројева $n+1, n+2, \dots, n+k$има $[(n+k)/d] - [n/d]$бројева деливих са d, где је [x] цео део реалног броја x. Како је $[n+k/d] \geq [n/d] + [k/d]$, то број $(n+1)(n+2)\cdots(n+k)$садржи све делиоце броја k!.

☐ Природни бројеви који имају само два делиоца су **прости бројеви**. Сви остали природни бројеви, осим броја 1, су сложени бројеви.

Пример 6. Доказати да је сваки прост број p већи од 5 облика $6n+1$или $6n+5$, где је n природан број.

Решење. Сваки природан број већи од 5 је облика 6n или 6n+1 или 6n+2 или 6n+3 или 6n+4 или 6n+5. Бројеви 6n, 6n+2, 6n+3 и 6n+4 су сложени, јер су прва три делива са 3, а последњи са 2.

Пример 7. Ако природан број n већи од 4 није прост, доказати да је број (n−1)! делив са n.

Решење. Пошто је n сложен број, то је n = mk, где су m и k природни бројеви већи од 1, а мањи од n. Ако је m ≠ k, онда су и m и k фактори броја (n−1)!. Ако је m = k, онда је m > 2 и 2m < n = mk, па су m и 2m фактори броја (n−1)!. Према томе, у оба случаја (n−1)! је делив са n.

☐ Нека су a, b, c и d реални бројеви. Ако је a < b и c > 0, онда је ac < bc, а ако је a < b и c < 0, онда је ac > bc. Ако су a, b, c и d позитивни, при чему је a < c и b < d, онда је ab < cd.

Пример 8. Доказати да је $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{99}{100} < \frac{1}{10}$.

Решење. Нека је a производ на левој страни даје неједнакости. Из неједнакости

$$\frac{1}{2} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \cdots < \frac{99}{100} < \frac{100}{101}$$

следи да је

$$a < \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{100}{101} = \frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3} \cdots \frac{100}{99} \cdot \frac{1}{101} = \frac{1}{10}.$$

☐ Реалан број који не може да се представи у облику разломка је ** ирационалан број**.

Пример 9. Испитати да ли је број $\log_2 3$рационалан или ирационалан.

Решење. Претпоставимо да је дати број рационалан. Ако је $\log_2 3 = p/q$, онда је $2^p = 3^q$, што није могуће, јер је 2^p прави број, а 3^q непаран. Према томе, дати број је ирационалан.

Пример 10. Доказати да је број tg 5°ирационалан.

Решење. Претпоставимо да је $\text{tg } 5^\circ = p/q$. Тада је

$$\text{tg } 10^\circ = \frac{2p/q}{1 - p^2/q^2} = \frac{p_1}{q_1}$$

Слично је

$$\text{tg } 20^\circ = \frac{p_2}{q_2}, \text{tg } 30^\circ = \frac{p_3}{q_3}$$

Међутим, $\text{tg } 30^\circ = 1/\sqrt{3}$, што значи да није рационалан број. Према томе, претпоставка није тачна, па је дати број ирационалан.

☐ Сваки периодични децимални број са бесконачно много децимала може да се напише у облику разломка.

Пример 11. 12.345345 ...написати у облику разломка.

Решење. Ако је $a = 12.345345$ ..., онда је $1000a = 12345.345345$ ..., па је $999a = 12333$. Према томе,

$$a = \frac{12333}{999} = \frac{4111}{333}$$

Пример 12. Израчунати $(0.12333\ldots : 0.0925) : (\frac{5}{8} + 2.70833\ldots)$.

Решење. Пошто је

$$0.1233\ldots = 0.33\ldots - 0.21 = \frac{1}{3} - \frac{21}{100} = \frac{37}{300}$$

израз у првој загради је једнак 4/3, а пошто је

$$2.70833\ldots = 2.33\ldots + 0.375 = \frac{21}{9} + \frac{3}{8}$$

израз у другој загради је 30/9. Према томе, дати израз је једнак $4/3 \div 9/30$, односно 2/5.

☐ Апсолутна вредност |a| броја a је a ако је a не-негативан број, −a ако је a негативан број. Дакле,

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$$

Нека својства апсолутне вредности су:
$|a| = |-a|, |a \cdot b| = |a| \cdot |b|, |a + b| \leq |a| + |b|, |a - b| \geq ||a| - |b||$.

Пример 13. Нека су a, b и c произвољни реални бројеви, а, β и γ позитивни реални бројеви, при чему је

$$|a| < \alpha, |b - 1| < \beta, |a - c| < \gamma.$$