**1. БРОЈЕВИ**

**Решени примери**

**Реални бројеви**

Нека је скуп реалних бројева. Скуп природних и скуп целих бројева су подскупови скупа . Ако је и , овде постоје јединствени цели бројеви и такви да је

У случају кажемо да је број **делив бројем** или да је број дељив бројем . Природан број је дељив:

* са 3 ако је збир његових цифара дељив са 3,
* са 4 ако је његов двоцифрени завршетак дељив са 4,
* са 5 ако је његова задња цифра 0 или 5,
* са 8 ако је његов троцифрени завршетак дељив са 8,
* са 9 ако је збир његових цифара дељив са 9,
* са 11 ако је разлика збира цифара на парним и збира цифара на непарним местима дељива са 11,
* са 25 ако је његов двоцифрени завршетак 00, 25, 50 или 75.

**Пример 1.** Да ли је број 1234567891011 квадрат неког природног броја?

**Решење.** Не, јер је дати број дељив са 3, а није дељив са 9.

Природни бројеви и су **узајамно простi** ако је њихов највећи заједнички делилац један. Ако су и узајамно прости и ако је природан број дељив и са и са , онда је дељив и са .

**Пример 2.** Доказати да је број 200…088 дељив са 36.

**Решење.** Дати број је дељив и са 9 и са 4. Ако су 4 и 9 узајамно просте, то је дати број дељив и производом 4·9.

**Пример 3.** Ако је прост број већи од 3, доказати да је број дељив са 24.

**Решење.** Пошто је производ дељив са 3, а p прост број већи од 3, то је , односно , дељив са 3. Како су и узастопни парни бројеви, то је и , па је

što значи да је делив и са 8. Из чињење да су бројеви 3 и 8 узајамно прости следи да је делив и са 24.

☐ Производ првих n природних бројева се означава са и чита n факторијел.

**Пример 4.** Одредити највећи делилац броја 100! који је облика , где је n природан број.

**Решење.** Међу првих 100 природних бројева један је делив са , три су делива са , шест су делива са , дванаест са , двадесет пет са и педесет са . Према томе, број 100! је делив са , односно са .

**Пример 5.** Ако су n и k природни бројеви, доказати да је број делив са k!.

**Решење.** Нека је d делилац броја k!. Међу првих k узастопних природних бројева има [k/d], а међу k узастопних бројева има бројева деливих са d, где je [x] цео део реалног броја x. Како је , то број садржи све делиоце броја k!.

☐ Природни бројеви који имају само два делиоца су **прости бројеви**. Сви остали природни бројеви, осим броја 1, су сложени бројеви.

**Пример 6.** Доказати да је сваки прост број p већи од 5 облика или , где je n природан број.

**Решење.** Сваки природан број већи од 5 је облика 6n или 6n+1 или 6n+2 или 6n+3 или 6n+4 или 6n+5. Бројеви 6n, 6n+2, 6n+3 и 6n+4 су сложени, јер су прва три делива са 3, а последњи са 2.

**Пример 7.** Ако природан број n већи од 4 није прост, доказати да је број (n−1)! делив са n.

**Решење.** Пошто је n сложен број, то је n = mk, где су m и k природни бројеви већи од 1, а мањи од n. Ако је m ≠ k, онда су и m и k фактори броја (n−1)!. Ако је m = k, онда је m > 2 и 2m < n = mk, па су m и 2m фактори броја (n−1)!. Према томе, у оба случаја (n−1)! је делив са n.

☐ Нека су a, b, c и d реални бројеви. Ако је a < b и c > 0, онда је ac < bc, а ако је a < b и c < 0, онда је ac > bc. Ако су a, b, c и d позитивни, при чему је a < c и b < d, онда је ab < cd.

**Пример 8.** Доказати да је .

**Решење.** Нека је a производ на левој страни даје неједнакости. Из неједнакости

следи да је

☐ Реалан број који не може да се представи у облику разломка је \*\* ирационалан број\*\*.

**Пример 9.** Испитати да ли је број рационалан или ирационалан.

**Решење.** Претпоставимо да је дати број рационалан. Ако је , онда је , што није могуће, јер је 2^p прави број, а 3^q непаран. Према томе, дати број је ирационалан.

**Пример 10.** Доказати да је број ирационалан.

**Решење.** Претпоставимо да је . Тада је

Слично је

Међутим, , што значи да није рационалан број. Према томе, претпоставка није тачна, па је дати број ирационалан.

☐ Сваки периодични децимални број са бесконачно много децимала може да се напише у облику разломка.

**Пример 11.** написати у облику разломка.

**Решење.** Ако је , онда је , па је . Према томе,

**Пример 12.** Израчунати .

**Решење.** Пошто је

израз у првој загради је једнак 4/3, а пошто је

израз у другој загради је 30/9. Према томе, дати израз је једнак , односно 2/5.

☐ Апсолутна вредност |a| броја a је a ако је a не-негативан број, −a ако је a негативан број. Дакле,

Нека својства апсолутне вредности су:  
.

**Пример 13.** Нека су a, b и c произвољни реални бројеви, a, β и γ позитивни реални бројеви, при чему је