Bandwidth problem minimizacije

Seminarski rad u okviru kursa
Naučno izračunavanje
Matematički fakultet

Nevena Nikolić, 1021/2018
Luka Kalinić, 1058/2018

Avgust 2019

Sažetak

U ovom radu najpre definišemo, a potom rešavamo *bandwidth* problem minimizacije, koristeći metod promenljivih okolina.

Sadržaj

1 Uvod

Bandwidth problem minimizacije (eng. *Bandwidth Minimization Problem*) se sastoji u pronalaženju permutacije redova i kolona retke matrice sa ciljem da ne-nula elementi budu sadržani u okviru trake, koja je što je moguće bliža glavnoj dijagonali. Ovaj problem je nastao pedesetih godina prošlog veka i zasniva se na primedbi da kada ne-nula elemente grupišemo u okviru uzane trake oko glavne dijagonale, operacije poput inverzije matrice i računanja determinante postaju vremenski efikasnije.

Primene ovog problema su brojne, a najvažnija je u rešavanju velikih sistema linearnih jednačina. Gausova eliminacija može da se izvede u vremenu $O(nb^2)$ za matricu čija je dimenzija n i *bandwidth* b, što je brže od direktnog $O(n^3)$ algoritma kada je b manje od n. Dokazano je da je *bandwidth* problem minimizacije NP-kompletan, odnosno da nije veoma verovatno da postoji algoritam za njegovo rešavanje koji radi u polinomijalnom vremenu.

Algoritmi za rešavanje *bandwidth* problema minimizacije mogu da se podele na egzaktne i heurističke, a u novije vreme razvijeno je i više metaheuristika. Metaheuristike predstavljaju opšte šablone čijim preciziranjem se dolazi do heurističkih metoda za konkretne probleme. [2].

2 Formulacija problema

Bandwidth problem minimizacije može biti formulisan za matrice ili grafove, pri čemu važi da su obe formulacije problema ekvivalentne. Ekvivalencija je zasnovana na činjenici da se dati graf može predstaviti svojom matricom povezanosti i obratno.

2.1 *Bandwidth* problem minimizacije za matrice

Neka je data binarna (svi elementi su 0 ili 1), retka, simetrična matrica $A = \{a_{ij}\}$. Tada se *bandwidth* matrice A definiše kao

$$B(A) = max\{|i - j| : a_{ij} \neq 0\} \tag{1}$$

Bandwidth problem minimizacije za matrice (eng. *Matrix Bandwidth Minimization Problem*, skraćeno *MBMP*) se sastoji u permutovanju redova i kolona matrice A tako da ne-nula elementi budu sadržani u traci što je moguće bližoj glavnoj dijagonali, odnosno tako da se minimizuje *bandwidth* $B(A)$.

2.2 *Bandwidth* problem minimizacije za grafove

Neka je $G = (V, E)$ konačan neusmereni graf, gde je V skup čvorova i E skup grana. Neka je 1-1 funkcija $f : V \to \{1, 2, ..., n\}$ funkcija obeležavanja čvorova grafa. Tada se *bandwidth* čvora v definiše kao

$$B_f(v) = max_{i:(i,j)\in E}\{|f(i) - f(j)|\} \tag{2}$$

i *bandwidth* grafa G za f se definiše kao

$$B_f(F) = max\{|f(i) - f(j)| : (i, j) \in E\} \tag{3}$$

Bandwidth problem minimizacije za grafove (eng. *Graph Bandwidth Minimization Problem*, skraćeno *GBMP*) se sastoji u pronalaženju funkcije obeležavanja f koja minimizuje *bandwidth* grafa, odnosno veličinu $B_f(G)$.

3 Metode za rešavanje

Kao što smo već pomenuli, algoritmi za rešavanje *bandwidth* problema minimizacije mogu da se podele na egzaktne i heurističke (odnosno metaheurističke).

Egzaktni algoritmi se najčešće baziraju na pristupu poznatom kao *granje i ograničavanje* (eng. *branch and bound*). Del Korso i Manzini (*Del Corso G.M., G. Manzini*, 1999) su uspeli da reše problem za instance male i srednje veličine. Kaprara i Salazar (*Caprara A. and J.J. Salazar*, 2005) su uspeli da prošire prethodni rezultat uvodeći uže donje granice. Međutim, treba uzeti u obzir i cenu izračunavanja za dobijanje optimalnog rešenja. Stoga ovi metodi mogu rešavati samo probleme čija je veličina dovoljno mala da vreme izvršavanja bude razumno.

Heuristički pristupi zasnovani su na iskustvu i dobijeno rešenje ne mora biti optimalno. Ipak, heurističkim pristupom možemo brzo pronaći rešenje koje je dovoljno dobro za dati problem kombinatorne optimizacije. Metaheuristike, kao što smo pomenuli, predstavljaju tehniku koja je opštija od heuristika i zahtevaju manje računskih pretpostavki, te je poslednjih decenija akcenat stavljen na razvijanje metaheurističkih metoda za rešavanje *bandwidth* problema minimizacije. U literaturi se najčešće pominju tri ovakve metaheuristike: simulirano kaljenje (eng. *Simulated Annealing*, SA), tabu pretraga (eng. *Tabu Search*, TS) i metod promenljivih okolina (eng. *Variable Neighborhood Search*, VNS). U nastavku ćemo se fokusirati na rešavanje *bandwidth* problema minimizacije koristeći metod promenljivih okolina.

4 Metod promenljivih okolina

Metod promenljivih okolina (VNS) je metaheuristika predložena 1997. godine koja se pokazala veoma korisnom za dobijanje približnog rešenja optimizacionih problema. Predstavlja uopštenje lokalne pretrage, gde su definisane okoline, po kojima će se sistematski vršiti pretraživanje [1]. Metoda promenljivih okolina se bazira na sledećim principima:

- Lokalni minimum za jedan tip okoline ne mora nužno i da bude lokalni minimum za drugi tip okoline.
- Globalni minimum predstavlja lokalni minimum za sve tipove okolina.
- Za mnoge probleme u praksi, lokalni minimumi više tipova okolina su relativno blizu jedan drugog.

U literaturi postoji nekoliko varijanti osnovnog algoritma, među kojima se najčešće sreću redukovana, osnovna i uopštena metoda promenljivih okolina. U svim slučajevima se, ukoliko nije pronađeno bolje rešenje, prelazi u narednu okolinu, a inače, ukoliko se pronađe bolje rešenje, algoritam se resetuje na prvi razmatrani tip okoline.

Literatura

[1] Stefan Mišković. Metoda promenljivih okolina - beleške sa vežbi. URL: http://ni.matf.bg.ac.rs/vezbe/4/vns.html.

[2] Anđelka Zečević Mladen Nikolić. *Naučno Izračunavanje*. Matematički fakultet, Beograd.