CURSO:
Control Digital

Tema 2: Función de transferencia/ Transformadas de LaPlace

Profesor:
Héctor Sánchez

UNIVERSIDAD LATINA DE COSTA RICA
LAUREATE INTERNATIONAL UNIVERSITIES®

La Transformada de Laplace

El comportamiento de los sistemas físicos se describe mediante ecuaciones diferenciales ordinarias, lo que conlleva al estudio detallado y profundo de las mismas para lograr una base matemática que garantice el nivel de conocimientos adecuados en los temas de control

Algunos de estos conocimientos también abarcan la teoría de variable compleja, la diferencial, ecuaciones diferenciales, la transformada de Laplace y la transformada z.

La teoría de control moderno requiere considerablemente de un nivel matemático más intensivo, tales como la teoría de matrices, teoría de conjuntos, álgebra lineal, transformaciones lineales, programación, teoría de probabilidades y otros tópicos de matemática avanzada.

La Transformada de Laplace

Los objetivos de este capítulo son:

- Introducir los fundamentos de la transformada de Laplace.
- Desarrollar aplicaciones de la transformada de Laplace para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias.
- Introducir el concepto de función de transferencia.

La Transformada de Laplace

La transformada de la Laplace es una de las herramientas matemáticas más usadas para resolver ecuaciones diferenciales. En comparación con los métodos clásicos de solución de ecuaciones diferenciales, el método de Laplace se basa en:

1. Las soluciones, tanto homogénea como particular de las ecuaciones diferenciales, se obtienen en una sola operación matemática.

2. La transformada de Laplace convierte la ecuación diferencial en ecuaciones algebraicas con el operador s, por lo que es posible manipular las mismas mediante las reglas básicas del álgebra para obtener la solución en el dominio de s. La solución final se obtiene tomando la transformada inversa de Laplace.

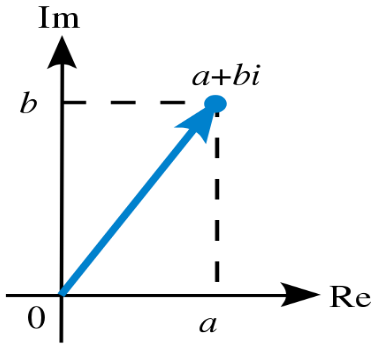
La Transformada de Laplace

Definición de la transformada de Laplace :

Sea f(t) una función continua en [0,∞). La transformada de Laplace de f(t) es la función f(s) definida mediante la integral:

$$f(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt \qquad (1)$$

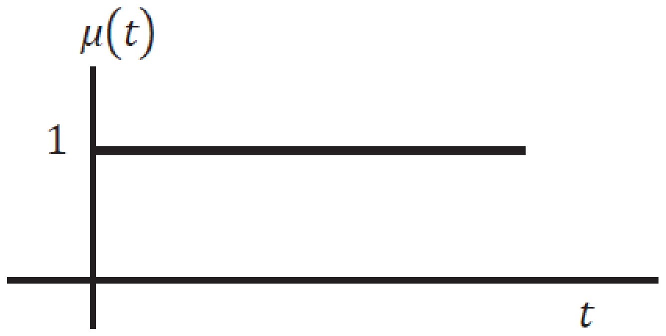
El dominio de *F(s)* está formado por todos los valores de *s* para los cuales la integral en (1) existe, la transformada de la Laplace se denota L {*f(t)*} o *f(s)*. Donde la variable $s = \alpha + j\omega$ se define en el plano complejo.



La Transformada de Laplace

Ejemplo 1 Sea la función f(t) definida por:

$$\mu(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & para\ otro\ valor \end{cases}$$



Gráfica de la función escalón unitario.

Calcular la transformada de Laplace para esa función f(t)

La Transformada de Laplace

Usando la definición de la transformada de Laplace para calcular:

$$f(s) = \int_0^\infty (1)e^{-st}dt = -\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_0^\infty = 0 - \frac{-1}{s} = \frac{1}{s}, \qquad (2)$$

$$s > 0$$

Para valores de s < 0, la integral diverge y por tanto el dominio de F(s) es para s > 0.

La Transformada de Laplace

EJEMPLO 2

Determine la transformada de Laplace de $f(t) = e^{at}$, $t \geq 0$, donde $a > 0$ es una constante.

$$f(s) = \int_{0}^{\infty} \left(e^{at}\right) e^{-st} dt = \int_{0}^{\infty} e^{-(s-a)t} dt$$

$$= -\frac{1}{s-a} e^{-(s-a)t} \Big|_{0}^{\infty} \frac{1}{s-a},\ s > a$$

La Transformada de Laplace

De este resultado podemos obtener las trasformadas de las siguientes funciones:

$$a)\ f(t) = e^{jat}, \qquad b)\ f(t) = e^{-jat}$$

La transformada de la función $f(t) = e^{jat}$ usando el resultado en (3) obtenemos:

$$F(s) = \frac{1}{s - ja}$$

La transformada de la función $f(t) = e^{j\text{-}at}$ usando el resultado en (3) obtenemos:

$$F(s) = \frac{1}{s + ja}$$

La Transformada de Laplace

Para s > |ja| se obtienen los pares de transformadas siguientes:

$$e^{jat} \leftrightarrow \frac{1}{s - ja} \qquad (4)$$

$$e^{-jat} \leftrightarrow \frac{1}{s + ja} \qquad (5)$$

La Transformada de Laplace

$$\text{Si } f(t) \leftrightarrow F(s)$$

El operador matemático doble implicación ↔, significa que va en dos sentidos, el primero indica que: :

$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s),$ de igual manera el segundo indica

$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t),$ siendo

$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ la transformada inversa de Laplace de $F(s)$

Propiedades de la Transformada de Laplace

a) Propiedad de linealidad

Teorema 1

Dada dos funciones f(t), g(t), se requiere determinar la transformada de la suma de estas funciones, la propiedad de linealidad de la transformada define a la trasformada de la suma de funciones como la suma de sus transformadas, ilustrada de la forma siguiente:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{af(t)+bg(t)\} &= \mathcal{L}\{af(t)\}+\mathcal{L}\{bg(t)\} \qquad (6)\\ &= aF(s)+bG(s)\end{aligned}$$

Propiedades de la Transformada de Laplace

a) Propiedad de linealidad

Ejemplo 3:
Determine la transformada de la función $f(t) = sen(at)$ para $t \geq 0$, donde a es una constante arbitraria. :

Podemos comenzar estableciendo la relación de la función seno con las funciones exponenciales, usando la **identidad de Euler** tenemos que:

$$\operatorname{sen}(bt) = \frac{e^{jbt} - e^{-jbt}}{2j}$$

Propiedades de la Transformada de Laplace

Este resultado facilita el cálculo de la trasformada de la función seno, debido que la trasformada de las funciones exponenciales ya son conocidas usando (4) y (5), por lo cual es muy fácil hallar L{sen(at)} mediante la aplicación de la propiedad de linealidad de la transformada equivale a obtener:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{e^{jat}-e^{-jat}}{2j}\right\}:$$

$$f(t)=\frac{1}{2j}\left(e^{jbt}-e^{-jbt}\right)\leftrightarrow F(s)=\frac{1}{2j}\left(\frac{1}{s-bj}-\frac{1}{s+bj}\right)$$

$$=\frac{1}{2j}\left(\frac{s+bj-s+bj}{s^2+b^2}\right)=\frac{2bj}{2j\left(s^2+b^2\right)}=\frac{b}{s^2+b^2}$$

Propiedades de la Transformada de Laplace

Podemos concluir que:

$$\text{Si } f(t) \leftrightarrow F(s)$$

$$\operatorname{sen}(bt) \leftrightarrow \frac{b}{s^2 + b^2}$$

De manera análoga se puede determinar la transformada de la función **f(t) = cos(b),** (hacerlo como como ejercicio), donde obtendrá el siguiente resultado:

Siendo la identidad de Euler para el coseno: $\cos(bt) = \dfrac{e^{jbt} + e^{-jbt}}{2j}$

El resultado es: $\cos(bt) \leftrightarrow \dfrac{s}{s^2 + b^2}$

Propiedades de la Transformada de Laplace

b) Propiedad de traslación en s

Teorema 3

Si la transformada de Laplace L{(f(t)} = F(s) existe para s > a entonces:

$$\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = \int_0^\infty e^{at} f(t) e^{-st}\, dt = f(s-a) \text{ para } s > a$$

Ejemplo 4
Determinar la transformada de Laplace de f(t) = e^{at} sen(bt).

En el Ejemplo 3 vimos que: $\mathcal{L}\{\text{sen}(bt)\} = \dfrac{b}{s^2 + b^2}$

Asi que por la propiedad de traslación de F(s) tenemos: $\mathcal{L}\{e^{at}\,\text{sen}(bt)\} = \dfrac{b}{(s-a)^2 + b^2}$

Propiedades de la Transformada de Laplace

c) Transformada de Laplace de la derivada

Teorema 4

Sea f(t) una función continua diferenciable en el intervalo [0, ∞); entonces la transformada de Laplace de la función derivada de f(t) viene dada por:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0) \qquad (12)$$

Podemos usar inducción para extender el teorema a derivadas de orden superior:

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0) \qquad (13)$$

y en general obtenemos el resultado:

$$\mathcal{L}\{f^n(f)\} = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0)$$

$$- s^{n-3}f''(0) - \ldots\ldots - f^{n-1}(0) \qquad (14)$$

Propiedades de la Transformada de Laplace

Esta propiedad es muy útil para encontrar la solución de las ecuaciones diferenciales ordinarias, lo cual abordaremos más adelante cuando estudiemos las aplicaciones de la transformada de Laplace, por ahora la usaremos para encontrar las transformadas de funciones conocidas.

Ejemplo 5

Sea la función $f(t)$ = sen (bt), si **$f'(t)$ = bcos (bt)** y $f(0) = 0$ halle la transformada de la derivada de la función $f(t)$ = sen bt.

Sustituyendo en la ecuación (12) obtenemos:

$$\mathcal{L}\{(\text{Sen}\,bt)'\} = sF(s) - 0$$

Por tanto: $$\mathcal{L}\{(\text{Sen}\,bt)'\} = sF(s) - 0 = s\,\frac{b}{s^2 + b^2}$$

Propiedades de la Transformada de Laplace

d) Propiedad de multiplicación por t^n

Teorema 5

Sea una función f(t) seccionalmente continua y diferenciable en el intervalo [0, ∞); entonces su trasformada de Laplace es también diferenciable y por lo tanto,

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n} \qquad (15)$$

La demostración de este teorema es muy sencilla, bastará con derivar la función F(s) usando la definición de la transformada de Laplace e intercambiando el orden de integración y derivación.

Propiedades de la Transformada de Laplace

Ejemplo 6

$$\text{Sea } f(t) = t\mu(t) \text{ donde } \mu(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

La transformada de esta función la calculamos en el Ejemplo 1, y es:

$$\mu(t) = \frac{1}{s};$$

Para calcular la transformada de la función f(t), debemos aplicar la propiedad de multiplicación por t,

$$F(s) = -\frac{d\left(\frac{1}{s}\right)}{ds} = \frac{1}{s^2},$$

podemos concluir que la transformada de:

$$f(t) = t \text{ para } t \geq 0 \text{ es } f(s) = \frac{1}{s^2}$$

Propiedades de la Transformada de Laplace

Ejemplo 7

Calcular la transformada L de: $f(t) = t^2$

$$F(s) = (-1)^2 \frac{d^2\left(\frac{1}{s}\right)}{ds^2} = \frac{2}{s^3}$$

Calcular la transformada L de: $x(t) = t^3$

$$X(s) = (-1)^3 \frac{d^3\left(\frac{1}{s}\right)}{ds^3} = \frac{6}{s^4}$$

Propiedades de la Transformada de Laplace

e) Propiedad de de desplazamiento en el tiempo

Teorema 6

Sea Sea *f(t)*una función seccionalmente continua y existe su transformada. Entonces la transformada de *f(t − τ)* para $t \geq \tau$ está dada por:

$$\mathcal{L}\{f(t-\tau)\} = F(s)e^{-s\tau} \qquad (17)$$

Demostración: Por definición $\mathcal{L}\{f(t-\tau)\} = \int_0^\infty f(t-\tau)e^{-s\tau}dt$

Si hacemos $u = t - \tau$, $t = u + \tau$, entonces, $\mathcal{L}\{f(t-\tau)\} = \int_0^\infty f(u)e^{-(u+\tau)s}dt = \int_0^\infty f(u)e^{-su}e^{-\tau s}du$

$$= e^{-s\tau}\int_0^\infty f(u)e^{-su}du = e^{-s\tau}f(s)$$

Propiedades de la Transformada de Laplace

Ejemplo 8

Determinar la transformada de la función x(t)= sen(t − 5) para t ≥ 5.

Como conocemos la transformada de sen *t* $\frac{1}{s^2+1}$

Aplicamos la propiedad de desplazamiento y obtenemos:

$$\mathcal{L}\{\text{sen}(t-5)\}=\frac{1}{s^2+1}e^{-5s}$$

Propiedades de la Transformada de Laplace

f) Propiedad de la transformada de la Integral

Teorema 7

Sea $f(t)$ una función seccionalmente continúa en el intervalo $[0,\infty)$, y cuya transformada es $F(s)$. Entonces,

$$\mathcal{L}\left\{ \int_0^t f(t)dt \right\} = \frac{F(s)}{s} + \int_{-\infty}^{t} f(t)dt, \qquad (18)$$

pero la función es cero si $t < 0$ y se tiene que:

$$\mathcal{L}\left\{ \int_0^t f(t)dt \right\} = \frac{F(s)}{s} \qquad (19)$$

Propiedades de la Transformada de Laplace

Ejemplo 9

Determinar la transformada de la función $f(t) = \int_0^t e^{-2t}\,\mathrm{sen}(5t)\,dt.$

Buscamos primero la transformada del argumento $\mathcal{L}\{e^{-2t}\,\mathrm{sen}(5t)\} = \dfrac{5}{(s+2)^2+25}$ traslación en s

Aplicamos la propiedad de la integral, para determinar la transformada de *f(t)*, se obtiene:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \frac{\dfrac{5}{(s+2)^2+25}}{s} = \frac{5}{s\left[(s+2)^2+25\right]}$$

Propiedades de la Transformada de Laplace

g) Propiedad de escalamiento en el tiempo

Teorema 8

Una función está escalada en el tiempo y está definida por $f(at)$ de tal manera que su transformada.

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(at)e^{-st}dt$$

Viene dada por:

$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$$

Propiedades de la Transformada de Laplace

g) Propiedad de escalamiento en el tiempo

Teorema 8

Demostración:

Sabemos que:

$$\int_0^{\infty} f(at)e^{-st}dt$$

Haciendo un cambio de variables.

$$u = at, \;\; t = \frac{u}{a}, \;\; du = adt \Rightarrow \frac{du}{a} = dt$$

y sustituyendo en la integral obtenemos:

$$\frac{1}{a}\int_0^{\infty} f(u)e^{-s\frac{u}{a}}\,dt = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$$

Propiedades de la Transformada de Laplace

Ejemplo 10

Determine la transformada de la función $x(at) = (at)^2$.

Como conocemos la transformada de la función

$f(t) = t^2 \leftrightarrow \dfrac{2}{s^3}$ aplicamos la propiedad del Ejemplo 7 y

obtenemos:

$$\mathcal{L}\{x(at)\} = \frac{1}{a}\frac{2}{\left(\frac{s}{a}\right)^3} = \frac{2}{s^3} = \frac{2a^2}{s^3}$$

Propiedades de la Transformada de Laplace

h) Propiedad del teorema del valor inicial

Teorema 9

Sea *f(t)* una función seccionalmente continúa en el intervalo [0,∞) y cuya transformada *F(t)* existe. Entonces podemos conocer su condición inicial en t = 0 mediante la propiedad:

$$\lim_{t \to 0} f(t) = \lim_{s \to \infty} sf(s) = f(0)$$

Propiedades de la Transformada de Laplace

Ejemplo 11

Suponga que la función $x(t)$ tiene la transformada:

$$X(s) = \frac{-3s^2 + 2}{s^3 + s^2 + 3s + 2}$$

Determine $x(0)$

Aplicando el teorema de valor final nos queda:

$$x(0) = \lim_{s \to \infty} sX(s) = \lim_{s \to \infty} \frac{-3s^3 + 2s}{s^3 + s^2 + 3s + 2} = \frac{-3}{1} = -3$$

Propiedades de la Transformada de Laplace

i) Propiedad del teorema del valor final

Teorema 10

Sea $f(t)$ una función seccionalmente continúa en el intervalo $[0,\infty)$ y cuya transformada $F(t)$ existe. Entonces podemos conocer $f(\infty)$ *por la relación* :

$$f(\infty) = \lim_{s \to 0} sF(s) \qquad (21)$$

Propiedades de la Transformada de Laplace

Ejemplo 12

Determinar el valor final e inicial de la función $x(t) = 4e^{-5t} - 3e^{-2t}$.

$$X(s) = \frac{4}{s+5} - \frac{3}{s+2} = \frac{s-7}{s^2+7s+14}$$

$$x(0) = \lim_{s \to \infty} \frac{s^2 - 7s}{s^2+7s+14} = 1$$

$$x(\infty) = \lim_{s \to 0} \frac{s^2 + 7s}{s^2+7s+14} = 0$$

Propiedades de la Transformada de Laplace

Ejemplo 13

Suponga que $X(s)$ es una función racional dada. Halle $x(\infty)$.

$$X(s) = \frac{2s^2 - 3s + 4}{s^3 + 3s^2 + 2s} = \frac{2s^2 - 3s + 4}{s(s+1)(s+2)}$$

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = \lim_{s \to 0} s \frac{2s^2 - 3s + 4}{s(s+1)(s+2)} = \frac{4}{2} = 2$$

$$x(0) = \lim_{s \to \infty} \frac{s(2s^2 - 3s + 4)}{s(s+1)(s+2)} = 2$$

UNIVERSIDAD LATINA DE COSTA RICA
LAUREATE INTERNATIONAL UNIVERSITIES®

Resumen de Transformada de Laplace

$f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$
$1, \quad t \geq 0$	$\frac{1}{s}, \; s > 0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$\operatorname{sen}(bt)$	$\frac{b}{s^2+b^2}$
$\cos(bt)$	$\frac{s}{s^2+b^2}$

$e^{at}t^n$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
$e^{at}\operatorname{sen}(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$
$e^{at}\cos(bt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$
$f(t-\tau)$	$e^{-s\tau}F(s)$
$\int f(t)dt$	$\frac{F(s)}{s}$
$f(at)$	$\frac{1}{a}F(s/a)$

Tarea 2

1. Determine la transformada de Laplace de las funciones siguientes:

1.1 $f(t) = 4cos(3t)e^{-4t}$

1.2 $f(t) = 5cos(3t)e^{-t} + t^2 cos(5t)$

1.3 $f(t) = t^3e^{-t} + sen(2t)$

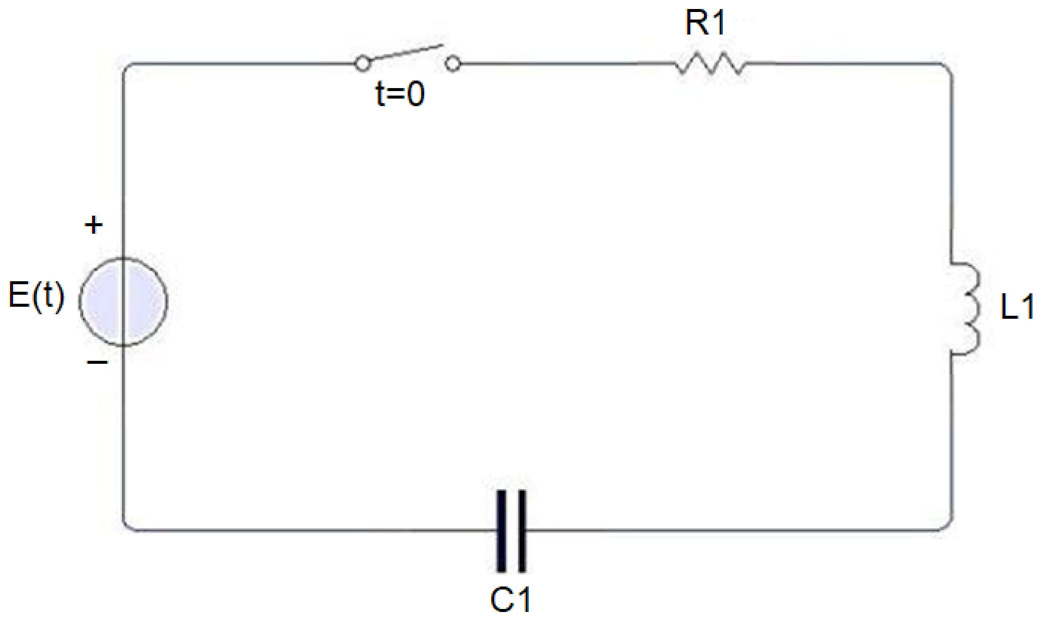
1.4 $f(t) = (t-4)e^{t-4} + \mu(t-4)$

1.5 $f(t) = cos(2t) - 4\,sen(5t)$

Ejemplo aplicado a circuitos electrónicos

En el siguiente circuito, hay una fuente de voltaje E(t), un inductor L1, una resistencia R1 y un capacitor C1. Cuando el interruptor es cerrado, se produce una corriente eléctrica que se denota por i(t).

La corriente eléctrica i(t) es igual al flujo de carga de electrones *q(t)* en el tiempo.
Por lo tanto se tiene que la corriente **i = dq/dt**



El voltaje VR en una resistencia es R.i = R(dq/dt)

El voltaje VL en un inductor es L(di/dt) =$L(d^2q/dt^2)$

El voltaje VC en un capacitor es q/C

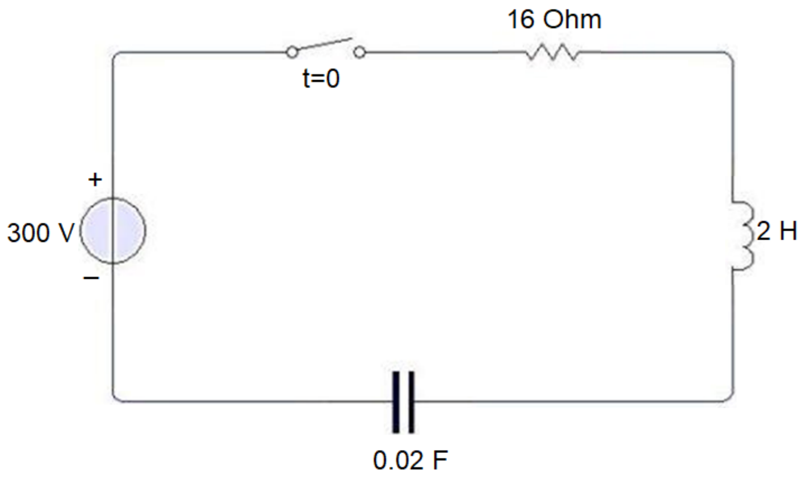
R, L, y C son la resistencia en ohmios, la inductancia en Henrios y la capacitancia en Faradios respectivamente.

Según la ley de volaje de Kirchoff se tiene que:

E(t)=VR + VL + VC

Ejemplo aplicado a circuitos electrónicos

Ejemplo: Un inductor, un capacitor y una resistencia se conectan a una batería E, como se muestra en la figura. El inductor es de 2 Henrios, el capacitor de 0,02 Faradios y la resistencia de 16 Ohmios. En el instante t = 0 se cierra el circuito. Encontrar la carga y la corriente en cualquier tiempo t > 0 si E = 300 voltios



$$E(t) = VR + VL + VC$$

$$E(t) = R(dq/dt) + L(d^2q/dt^2) + q/C$$

Con E=300, R=16, L=2 y C=0.02

$$300 = 16 \cdot \frac{dq}{dt} + 2 \cdot \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{0.02}$$

Las condiciones iniciales son 0.
Entonces q(0)=0, q'(0)=0, i(0)=0

Aplicando transformada de Laplace: $\frac{300}{s} = 16sQ + 2s^2Q + 50Q$

Despejando Q: $Q = \frac{6}{s} + \frac{6(s+4)}{(s+4)^2+9} + \frac{24}{(s+4)^2+9}$

Aplicando transformada inversa se halla q e i: $q = 6 - 6e^{-4t}\cos(3t) - 8e^{-4t}sen(3t)$ $\quad i = \frac{dq}{dt} = 50e^{-4t}sen(3t)$

Transformada Inversa de Laplace

Anteriormente definimos a la transformada de Laplace como un operador integral que asocia a cada función $f(t)$ con una función $F(S)$

Ahora vamos a encontrar *f(t)* cuando conocemos la transformada *F(S)* es decir, queremos hallar la transformada inversa de Laplace.

Definición de transformada inversa de Laplace

Sea una función $F(S)$. Si existe una función $f(t)$ que sea seccionalmente continua en el intervalo [0, ∞) y satisfaga la relación:

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t)$$

Entonces $f(t)$ es la transformada inversa de Laplace de $F(S)$

Transformada Inversa de Laplace

Ejemplo 14

Determinar la transformada inversa de Laplace $L^{-1}\{F(S)\}$ donde:

$$\text{i) } F(s) = \frac{6}{s^4}$$

$$\text{ii) } F(s) = \frac{6}{(s-2)^2 + 36}$$

$$\text{iii) } F(s) = \frac{s-1}{s^2 - 2s + 5}$$

Transformada Inversa de Laplace

Ejemplo 14

Para calcular transformada inversa de Laplace $L^{-1}\{F(S)\}$ usaremos la tabla de transformadas y las propiedades de la transformada estudiadas en la sección anterior :

$$\text{i) } \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{6}{s^4}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3!}{s^4}\right] = t^3$$

$$\text{ii) } \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{6}{(s-2)^2+36}\right] = e^{2t}\operatorname{sen}(6t)$$

$$\text{iii) } \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s-1}{(s-1)^2+4}\right] = e^{t}\cos(2t)$$

Transformada Inversa de Laplace

Una de las herramientas más útiles es la propiedad de la linealidad, la misma es heredada de la linealidad de la transformada de Laplace y se enuncia a continuación.

Teorema 11

Sea $L^{-1}\{F_1(S)\}$ *y* $L^{-1}\{F_2(S)\}$ funciones que existen y son continuas en el intervalo $[0,\infty)$, entonces:

Ejemplo 15

Determinar la transformada inversa de Laplace de:

$$F(s) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s-3} + \frac{2s}{s^2+4} + \frac{10}{3s^2+6s+9}\right\}$$

Transformada Inversa de Laplace

Ejemplo 15

Primero aplicamos la propiedad de linealidad:

$$f(t) = 4\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\} + 2\,\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+4}\right] + \frac{10}{3}\,\mathcal{L}^{-1}\;\frac{1}{s^2+2s+3}$$

De la tabla de transformadas de Laplace obtenemos que:

$$4\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\} = 4e^{3t},\ \text{y}\ \ 2\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+4}\right] = 2cos\,2t$$

Ahora debemos de calcular el ultimo termino:

$$\left(\frac{10}{3}\right)\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+2s+3}\right]$$

Transformada Inversa de Laplace

Ejemplo 15

Usamos un artilugio algebraico para darle la forma de una expresión que se pueda resolver directamente. Hacemos $s^2+2s+3= (s+1)^2 + 2$. Al sustituir tenemos:

$$\left(\frac{10}{3}\right)\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+2s+3}\right] \Rightarrow \left(\frac{10}{3\sqrt{2}}\right)\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\sqrt{2}}{(s+1)^2+2}\right]$$

Esto nos da como resultado:

$$\frac{10}{3\sqrt{2}}\, e^{-t}\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{2}t\right)$$

Transformada Inversa de Laplace

Uso de fracciones parciales

1. Raíces reales diferentes

Determinar la transformada inversa de Laplace $\mathcal{L}^{-1}\left[F_1(s)\right]$, si

$$F(s) = \frac{5s+3}{s^3+7s^2+14s+8}$$

Procedemos a representarla de la siguiente manera:

$$F(s) = \frac{5s+3}{s^3+7s^2+14s+8} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s+4}$$

Transformada Inversa de Laplace

Uso de fracciones parciales

$$A = \frac{5s+3}{(s+2)(s+4)}\bigg|_{s=-1} = \frac{-2}{3} \qquad B = \frac{5s+3}{(s+1)(s+4)}\bigg|_{s=-2} = \frac{-7}{-2} = \frac{7}{2} \qquad C = \frac{5s+3}{(s+1)(s+2)}\bigg|_{s=-4} \quad C = -\frac{17}{6}$$

Por lo tanto,

$$F(s) = \frac{5s+3}{s^3+7s^2+14s+8}$$

$$F(s) = -\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{s+1} + \frac{7}{2}\cdot\frac{1}{s+2} - \frac{17}{6}\cdot\frac{1}{s+4}$$

Por último, la transformada inversa de Laplace $\mathcal{L}^{-1}\left[F_1(s)\right]$ es:

$$f(t) = -\frac{2}{3}e^{-t} + \frac{7}{2}e^{-2t} - \frac{17}{6}e^{-4t}, \text{ para } t > 0$$

Aplicaciones de la Transformada de Laplace a las ecuaciones diferenciales

Ejemplo 18

Resuelva la siguiente ecuación diferencial con los valores iniciales dados (EXPLICAR).

$\frac{dy}{dt} + 4y = 10\text{Sen}2t \Rightarrow$ y' +4y = 10Sen2t sabiendo que: y(0) = 8 /Resp:/ y(t) = 9^{e-4t} – cos2t + sen2t

Primer paso: se aplica la transformada a ambos lados de la ecuación diferencial.

L{y'} + 4L{y} = 10L{Sen2t}

sY(s) –y(0) + 4Y(s) = $10\frac{2}{(s^2+4)}$ Con y(0) = 8

sY(s) – 8 + 4Y(s) = $\frac{20}{(s^2+4)}$ Despejamos Y(s): Y(s) = $\frac{8}{(s+4)} + \frac{20}{(s^2+4)(s+4)}$ Y(s) = $\frac{8s^2+52}{(s+4)(s^2+4)}$

Aplicaciones de la Transformada de Laplace a las ecuaciones diferenciales

Ejemplo 18

Segundo paso: se aplica fracciones parciales :

$$Y(s) = \frac{9}{(s+4)} + \frac{-s+4}{(s^2+4)} = \frac{9}{(s+4)} + \frac{-s}{(s^2+4)} + \frac{4}{(s^2+4)}$$

Tercer paso: se resuelven las transformadas inversas de Laplace $y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)]$

$$y(t) = L^{-1}\{\frac{9}{(s+4)}\} - L^{-1}\{\frac{s}{(s^2+4)}\} + 2L^{-1}\{\frac{2}{(s^2+4)}\}$$

$$\boxed{y(t) = 9e^{-4t} - \cos 2t + \operatorname{sen} 2t}$$

Aplicaciones de la Transformada de Laplace a las ecuaciones diferenciales

Ejemplo 19

Resuelva la siguiente ecuación diferencial con los valores iniciales dados.

$$y'' + 2y' + 2y = t \qquad \text{sabiendo que:} \qquad y(0) = 1 \qquad y'(0) = 1$$

Primer paso: se aplica la transformada a ambos lados de la ecuación diferencial.

Resolvemos la transformada para cada termino: $s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 2[sY(s) - y(0)] + 2Y(s) = \dfrac{1}{s^2}$

Factorizamos Y(s): $Y(s)[s^2 + 2s + 2] = s + 3 + \dfrac{1}{s^2}$

Despejamos Y(s): $Y(s) = \dfrac{s^3 + 3s + 1}{s^2(s^2 + 2s + 2)}$

Aplicaciones de la Transformada de Laplace a las ecuaciones diferenciales

Ejemplo 19

Segundo paso: Se busca Y(s) usando el método de fracciones parciales y se obtiene:

$$Y(s) = \frac{3}{2}\frac{(s+1)}{(s+1)^2+1} + 2\frac{1}{(s+1)^2+1} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s^2}\right)$$

Tercer paso: se determina la transformada inversa de Y(s) para obtener y(t): $y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)]$

$$y(t) = \frac{3}{2}e^{-t}\cos t + 2e^{-t}\operatorname{sen} t - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t$$