

DÚ č.4 - Poissonův proces, systémy hromadné obsluhy

Marek Nevole, Jan Novotný

ČVUT - FIT

{nevolmar, novot103}@fit.cvut.cz

19. března 2022

1 Úvod

Ve čtrtém úkolu z předmětu vybrané statistické metody jsme se zabývali Poissonovými procesy a systémy hromadné obsluhy. Za reprezentanta byl zvolen Marek Nevole.

Úkol jsme vypracovali pomocí programovacího jazyka Python¹ v prostředí Jupyter Notebook² s volně dostupnými knihovnami SciPy³, NumPy⁴ a Matplotlib⁵.

2 Popis problému

Uvažujte model hromadné obsluhy $M|G|\infty$.

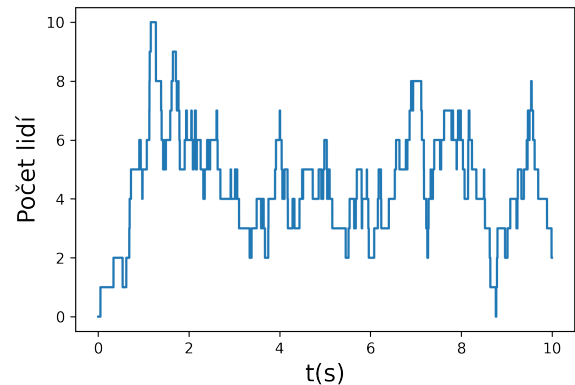
- Požadavky přichází podle Poissonova procesu s intenzitou $\lambda = 10 \text{ s}^{-1}$.
- Doba obsluhy jednoho požadavku (v sekundách) má rozdělení $S \sim \text{Ga}(4, 2)$, tj. Gamma s parametry $a = 4, p = 2$.
- Časy mezi příchody a časy obsluhy jsou nezávislé.
- Systém má (teoreticky) nekonečně paralelních obslužných míst (každý příchozí je rovnou obsluhován).

Označme N_t počet zákazníků v systému v čase t . Předpokládejme, že na začátku je systém prázdný, tj. $N_0 = 0$.

3 Úloha č.1

Simulujte jednu trajektorii $\{N_t(\omega) \mid t \in (0, 10 \text{ s})\}$. Průběh trajektorie graficky znázorněte.

Zákazníci přichází podle Poissonova procesu s intenzitou $\lambda = 10 \text{ s}^{-1}$. Počet příchozích zákazníků v intervalu $[s, t]$ odpovídá Poissonovu rozdělení přírůstků $N_t - N_s \sim \text{Poisson}(\lambda(t - s))$, tedy počet



Obrázek 1: Jedna trajektorie $\{N_t(\omega) \mid t \in (0, 10 \text{ s})\}$.

zákazníků této úlohy je z rozdělení $\text{Poisson}(100)$. Toto rozdělení je implementováno v knihovně SciPy jako *poisson* a pro náhodný výběr obsahuje metodu *rvs*, které jsme předali parametr $mu=100$. Náhodný výběr z tohoto rozdělení vrátil hodnotu $n = 95$. Časy jednotlivých příchodů zákazníků odpovídají rovnoměrnému rozdělení $U(0, t)$. Tedy jsme udělali 95 náhodných výběrů z rozdělení $U(0, 10)$, pomocí třídy *uniform* a metody *rvs* s parametry $scale=t$, $size=n$. Doba obslužení těchto zákazníků je z rozdělení $\text{Ga}(4, 2)$ s parametry $a = 4, p = 2$. Gamma rozdělení je implementováno jako *gamma* s metodou pro náhodný výběr *rvs*. Parametry pro tuto metodu jsou *shape* a *scale*, v našem studijním textu používáme parametry, které odpovídají parametrizaci *shape* a *rate*. Pro $\text{Ga}(a, p)$ je $shape = p$ a $rate = a$. Mezi *scale* a *rate* lze převádět pomocí vzorce $scale = \frac{1}{rate}$. Tedy po 95 náhodných výběrech z $\text{Ga}(4, 2)$ jsme dostali intervaly všech zákazníků v čase a výslednou trajektorii lze pozorovat na obrázku 1.

4 Úloha č.2

Simulujte $n = 500$ nezávislých trajektorií pro $t \in (0, 100)$. Na základě těchto simulací odhadněte rozdělení náhodné veličiny N_{100} .

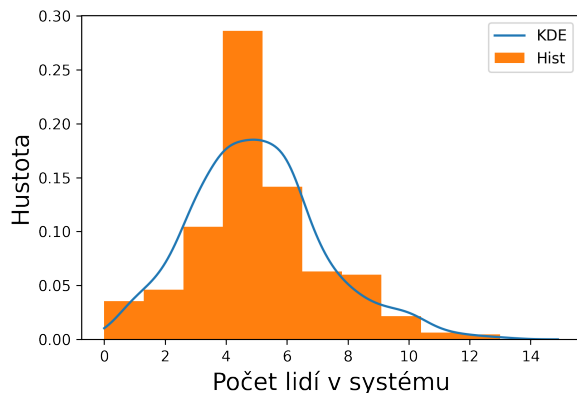
¹python.org

²jupyter.org

³scipy.org

⁴numpy.org

⁵matplotlib.org



Obrázek 2: Odhad rozdělení N_{100} pomocí histogramu a jádrových metody.

5 Úloha č.3

Diskutujte, jaké je limitní rozdělení tohoto systému pro $t \rightarrow +\infty$. Pomocí vhodného testu otestujte na hladině významnosti 5 %, zda výsledky simulace N_{100} odpovídají tomuto rozdělení.