Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Физический факультет

Лабораторная работа №2.1

Изучение распределения молекул по скоростям

Руководитель:
канд. физ.-мат. наук
Конов И. А.
Работу выполнили:
Левин Н. Н.
Высоцкий М. Ю.
гр. 052101

Томск, 2022

1 Теоретическое введение

Цель работы: изучить распределение молекул по скоростям на примере двумерной механической модели.

1.1 Вывод распределения Максвелла

Проведя рассуждениями о пространстве скоростей, мы имеем функцию:

$$dN = Nf(\vec{v})dw = Nf(v_x, v_y, v_z)dv_x dv_y dv_z, \tag{1}$$

где dN – число изображающих точек в элементе объема dw.

Определим функцию распределения $f\left(\vec{v}\right)$. Обозначим за dN' число молекул, компонента скорости v_x которой лежит в пределах от v_x до $v_x + dv_x$. Отсюда имеем:

$$dN' = N\varphi\left(v_x\right)dv_x, \tag{2}$$

где $\varphi\left(v_x\right)$ - функция распределения по компоненте v_x.

Выберем из этих молекул те, компоненты v_y которых лежат в пределах от v_y до $v_y + dv_y$:

$$dN'' = dN'\varphi\left(v_y\right)dv_y = N\varphi\left(v_x\right)\varphi\left(v_y\right)dv_x dv_y \tag{3}$$

Далее выберем из dN'' те молекулы, компоненты v_z которых лежат от v_z до $v_z + dv_z$:

$$dN = dN\prime\varphi\left(v_z\ \right)dv_z = \ N\varphi\left(v_x\ \right)\varphi\left(v_y\ \right)\varphi\left(v_z\ \right)dv_x dv_y dv_z \tag{4}$$

Сравнивая (4) и (1), получаем:

$$f\left(\vec{v}\right) = \varphi\left(v_x\ \right)\varphi\left(v_y\ \right)\varphi\left(v_z\ \right) \tag{5}$$

Так как положительные и отрицательные направления координат равноправны, примем $\varphi\left(-v_x\right) = \varphi\left(v_x\right)$. Получается, φ зависит только от модуля или от квадрата компоненты v_x. Это работает для остальных проекций. Значит, функция может зависеть только от квадрата скорости $\vec{v^2}$. Получим:

$$f\left(\vec{v^2}\right) = f\left(v_x^2\right)f\left(v_y^2\right)f\left(v_z^2\right) \tag{6}$$

где $v^2 = \ v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$. Для решения (6) осуществляется переход к новым переменным, соответствующим значениям кинетических энергий:

$$\varepsilon_x = \frac{mv_x^2}{2},\ \varepsilon_y = \frac{mv_y^2}{2}, \varepsilon_z = \frac{mv_z^2}{2};\ \varepsilon = \ \frac{mv^2}{2}$$

После замены переменных (6) будет выглядеть так:

$$f(\varepsilon) = \varphi\left(\varepsilon_x\right)\varphi\left(\varepsilon_y\right)\varphi\left(\varepsilon_z\right) \tag{7}$$

$$\varepsilon = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \tag{8}$$

Рассмотрим изменения энергий, которые будут равны нулю. В этом случае дифференциалы от любых функций аргумента ε равны нулю:

$$d\left[\left(\varepsilon_x\right)\varphi\left(\varepsilon_y\right)\varphi\left(\varepsilon_z\right)\right] = 0 \tag{9}$$

$$d\varepsilon_x + d\varepsilon_y + d\varepsilon_z = 0 \tag{10}$$

Дифференцируя (9) и деля его на $\varphi\left(\varepsilon_x\right)\varphi\left(\varepsilon_y\right)\varphi\left(\varepsilon_z\right)$ получим:

$$\frac{\varphi\prime\left(\varepsilon_x\right)}{\varphi\left(\varepsilon_x\right)}d\varepsilon_x + \frac{\varphi\prime\left(\varepsilon_y\right)}{\varphi\left(\varepsilon_y\right)}d\varepsilon_y + \frac{\varphi\prime\left(\varepsilon_z\right)}{\varphi\left(\varepsilon_z\right)}d\varepsilon_z = 0 \tag{11}$$

Умножив (10) на неопределенный множитель α и сложив с (11) получим:

$$\left[\frac{\varphi\prime\left(\varepsilon_x\right)}{\varphi\left(\varepsilon_x\right)} + \alpha\right]d\varepsilon_x + \left[\frac{\varphi\prime\left(\varepsilon_y\right)}{\varphi\left(\varepsilon_y\right)} + \alpha\right]d\varepsilon_y + \left[\frac{\varphi\prime\left(\varepsilon_z\right)}{\varphi\left(\varepsilon_z\right)} + \alpha\right]d\varepsilon_z = 0 \tag{12}$$

Данное уравнение будет выполняться, если выражения в скобках будут равны нулю. Следовательно:

$$\frac{\varphi'^{(\varepsilon_x)}}{\varphi\left(\varepsilon_x\right)} + \alpha = 0$$

$$\frac{d\varphi\left(\varepsilon_x\right)}{\varphi\left(\varepsilon_x\right)} = -\alpha d\varepsilon_x$$

Интегрирование дает

$$ln\varphi\left(\varepsilon_x\right) = \ -\alpha\varepsilon_x + lnA \to \ \varphi\left(\varepsilon_x\right) = A_1 e^{-\alpha\varepsilon_x} \tag{13}$$

Для OY, OZ выражения будут точно такими же:

$$\varphi\left(\varepsilon_y\right) = A_1 e^{-\alpha\varepsilon_y};$$

$$\varphi\left(\varepsilon_z\right) = A_1 e^{-\alpha\varepsilon_z}$$

В итоге получаем:

$$f\left(\varepsilon\right) = \ A_1^3 e^{-\alpha\varepsilon} \tag{14}$$

Возвращаясь к переменным скорости, получаем:

$$\varphi\left(v_x\right) = \ A_1 e^{-\frac{m\alpha v_x^2}{2}}; \varphi\left(v_y\right) = \ A_1 e^{-\frac{m\alpha v_y^2}{2}}; \varphi\left(v_z\right) = \ A_1 e^{-\frac{m\alpha v_z^2}{2}}$$

$$f(v) = A_1^3 e^{-\frac{m\alpha v^2}{2}} \tag{15}$$

Далее, чтобы сократить количество текста, мы опускаем вывод коэффициентов A_1 и α. Мы будем опираться на вывод, данный в учебнике Сивухина Д. В. в §72, и продолжим рассуждения.

Их значения равны:

$$A_1 = \sqrt{\frac{m\alpha}{2\pi}} \tag{16}$$

$$\alpha = \frac{1}{kT} \tag{17}$$

Из (1), (13), (16) следует, что число молекул dN, имеющих скорости в интервалах по x, y, z, определяется по формуле:

$$dN = N\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{\alpha kT}} dv_x dv_y dv_z \tag{18}$$

Далее получаем распределение Максвелла по абсолютному значению скорости. Мы ищем молекулы, имеющих скорости в интервале от v до dv. Направление может быть любым в силу равновероятности. В пространстве скоростей изображающие точки располагаются внутри бесконечно тонкого сферического слоя, со средним радиусом v и толщиной dv. Число молекул в этом слое определяется формулой:

$$dN = 4\pi N\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{kT}} v^2 dv \tag{19}$$

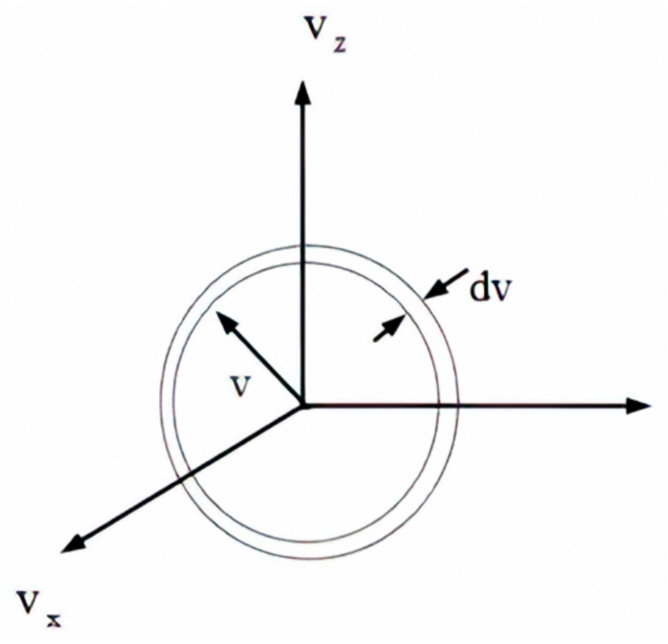

Рис. 1: Пространство скоростей

И таким образом, мы имеем функцию распределения $F(v)$:

$$F\left(v\right)=4\pi N\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{mv^2}{kT}}v^2 \qquad (20)$$

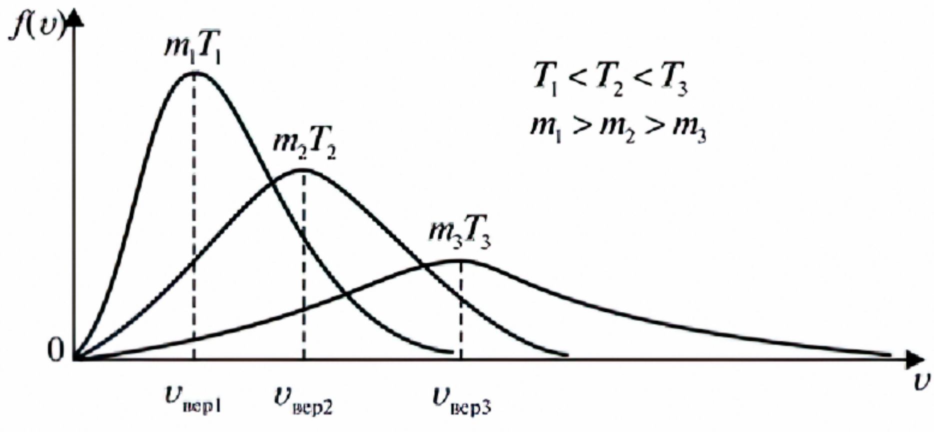

Рис. 2: Распределение $f(v)$

Вид распределения Максвелла показан на рисунке. С увеличением температуры максимум распределения смещается в сторону больших скоростей, а высота кривой в максимуме несколько понижается. Функция обращается в нуль при $v=0$ и при $v\to\infty$ так как неподвижных и движущихся бесконечно быстро молекул не бывает. Она имеет максимум при условии:

$$v=v_{\text{в}}=\sqrt{\frac{2kT}{m}}$$

1.2 Двумерное распределение

Предположим, что молекулы могут двигаться только в координатах x и y. Компонента скорости v_z может быть любой. Мы ищем число молекул, компоненты v_x и v_y лежат в соответствующих для них интервалах. Проинтегрировав (18) по компоненте v_z и обозначив $n = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$, получаем:

$$dN' = N\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)e^{-\frac{mn^2}{kT}}dn_x dn_y, \tag{21}$$

где $dn_x = dv_x$;$dn_y = dv_y$.

Молекулы будут находиться в бесконечно тонком кольце радиуса n и толщиной dn. Площадь данного кольца - $2\pi ndn$. Заменив $dn_x dn_y$ на данную площадь, получим:

$$dN' = 2\pi N\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)e^{-\frac{mn^2}{kT}}ndn \tag{22}$$

Для реального газа (22) представляет собой число молекул, у которых проекция на XY лежит в интервале от n до dn. Получаем функцию распределения:

$$F'(n) = 2\pi N\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)e^{-\frac{mn^2}{kT}}n \tag{23}$$

Возвращаемся к переменным v, дифференцируем (23) по v, приравнивая его к нулю. Получим наиболее вероятное значение вероятной скорости:

$$v_{\text{в}} = \sqrt{\frac{kT}{m}} \tag{24}$$

Подставив (24) в (22), получим:

$$dN' = \ Ne^{-\frac{mv^2}{kTv_{\text{в}}^2}}\frac{v}{v_{\text{в}}^2}dv \tag{25}$$

Проинтегрировав (25), получим:

$$\Delta N = N\left\{e^{-\frac{v_1^2}{2v_{\text{в}}^2}} - e^{-\frac{v_2^2}{2v_{\text{в}}^2}}\right\} \tag{26}$$

Это наша рабочая формула.

Т.к. мы не имеем возможности измерить скорость каждого зерна отдельно, приведем рабочую формулу к виду:

$$\Delta m_i = m\left[e^{-\frac{(i-1)^2}{2i_{\text{в}}^2}} - e^{-\frac{-i^2}{2i\text{в}2}}\right] \tag{27}$$