Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ТОМСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Физический факультет

Лабораторная работа №30
Изучение параметрического возбуждения колебаний

Руководитель:
канд. физ.-мат. наук
Конов И. А.
Работу выполнили:
Левин Н. Н.
Высоцкий М. Ю.
гр. 052101

Томск, 2022

1 Теоретическое введение

Цель работы: экспериментально исследовать явление параметрического резонанса.

1.1 Гармонические колебания математического маятника

Для начала, рассмотрим математический маятник. Если отклонить маятник на угол φ из положения равновесия, он начнет совершать вращательное движение вдоль оси z, проходящей перпендикулярно к плоскости рисунка через точку O.

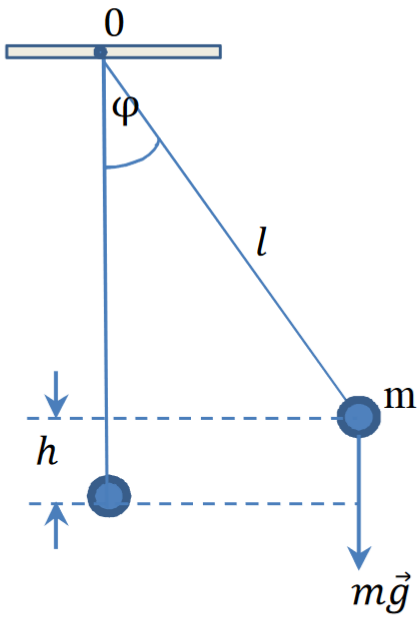

Рис. 1: Математический маятник

Запишем уравнение динамики вращательного движения относительно оси z:

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z,$$

где $L_z = I_z\dot{\varphi}$; $M_z = -mgl\sin\varphi$, если принять за положительное направление z, сонаправленное с вектором угловой скорости ω.

Примем массу груза за m, длину нити за $l = const$. Тогда мы имеем момент инерции $I_z = ml^2$, который не будет изменяться во время движения. И тогда мы можем записать уравнение в виде:

$$I_z\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mgl\sin\varphi$$

При рассмотрении малых углов, мы можем сказать, что $\sin\varphi \approx \varphi$, и тогда мы получим уравнение:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi = 0,$$

решением которого будут колебания вида:

$$\varphi = \varphi_0 cos(\omega_0 t + \alpha),$$

где $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ – собственная частота колебаний математического маятника.

Далее мы рассмотрим изменение полной механической энергии маятника в процессе движения:

Кинетическая энергия равна:

$$E_{\text{к}} = \frac{I(\dot{\varphi})^2}{2} = \frac{1}{2}ml^2\omega_0^2\varphi_0^2[\sin(\omega_0 t + \alpha)]^2$$

Потенциальная энергия относительно положения равновесия равна:

$$E_{\text{п}} = mgh = mgl(1 - \cos\varphi)$$

Разложив $\cos\varphi$ в ряд Тейлора около точки равновесия маятника $\varphi = 0$, получим $\cos\varphi \approx 1 - \frac{1}{2}\varphi^2$. Тогда мы можем представить потенциальную энергию в виде:

$$E_{\text{п}} = \frac{1}{2}mgl\varphi^2 = \frac{1}{2}\omega_0^2\varphi_0^2[\cos(\omega_0 + \alpha)]^2$$

И так как

$$\omega_0^2 = \frac{g}{l}$$

$$[\cos(\omega_0 + \alpha)]^2 = \frac{1}{2}[1 + \cos 2(\omega_0 + \alpha)]$$

$$[\sin(\omega_0 + \alpha)]^2 = \frac{1}{2}[1 - \cos 2(\omega_0 + \alpha)]$$

мы можем представить кинетическую и потенциальную энергию в следующем виде:

$$\text{E}_{\text{к}} = \frac{1}{4}ml^2\omega_0^2\varphi_0^2[1 - \cos 2(\omega_0 + \alpha)]$$

$$\text{E}_{\text{п}} = \frac{1}{4}ml^2\omega_0^2\varphi_0^2[1 + \cos 2(\omega_0 + \alpha)]$$

Следовательно, кинетическая и потенциальная энергии совершают гармонические колебания вокруг общего среднего значения $\frac{1}{4}ml^2\omega_0^2\varphi_0^2$ с удвоенной угловой частотой $2\omega_0$. Полная механическая энергия остается неизменной, и она равна:

$$\text{E} = \text{E}_{\text{к}} + \text{E}_{\text{п}} = \frac{1}{2}ml^2\omega_0^2\varphi_0^2$$

1.2 Параметрические колебания

Параметрическое возбуждение колебаний происходит в результате развития **параметрической неустойчивости**, возникающей при периодическом воздействии на те параметры системы, которые определяют величину запасённой колебательной энергии. Для математического маятника – это длина нити или масса груза.

Пусть длина нити изменяется со временем. Мы имеем зависимость $l = l(t)$. Тогда

$$\frac{d(ml^2\dot{\varphi})}{dt} = -mgl\sin\varphi$$

примет вид

$$2ml\dot{l}\dot{\varphi} + ml^2\ddot{\varphi} + mgl\sin\varphi = 0$$

Для малых углов отклонения маятника из положения равновесия получим уравнение вида:

$$\ddot{\varphi} + \frac{2\dot{l}}{l}\dot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi = 0$$

В методическом пособии указано, что "анализ и решение данного уравнения очень сложны потому они опускаются. Также нужно учитывать, что данное уравнение получается для малых углов, не превышающих значения $\varphi_{\text{пред.}} \approx 8^\circ$. В случае бо́льших отклонений появляются нелинейные эффекты, когда период собственных колебаний начинает зависеть от амплитуды колебаний φ_0.

$$T_{0\text{нел.}\varphi_0} \approx T_0(1 + \frac{\varphi_0^2}{16}) \qquad (1)$$