

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ТОМСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Физический факультет

Лабораторная работа №2.1

Изучение распределения молекул по скоростям

Руководитель:
канд. физ.-мат. наук
Конов И. А.
Работу выполнили:
Левин Н. Н.
Высоцкий М. Ю.
гр. 052101

Томск, 2022

1 Теоретическое введение

Цель работы: изучить распределение молекул по скоростям на примере двумерной механической модели.

1.1 Вывод распределения Максвелла

Проведя рассуждениями о пространстве скоростей, мы имеем функцию:

$$dN = N f(\vec{v}) dw = N f(v_x, v_y, v_z) dv_x dv_y dv_z, \quad (1)$$

где dN – число изображающих точек в элементе объема dw .

Определим функцию распределения $f(\vec{v})$. Обозначим за dN' число молекул, компонента скорости v_x которой лежит в пределах от v_x до $v_x + dv_x$. Отсюда имеем:

$$dN' = N \varphi(v_x) dv_x, \quad (2)$$

где $\varphi(v_x)$ – функция распределения по компоненте v_x .

Выберем из этих молекул те, компоненты v_y которых лежат в пределах от v_y до $v_y + dv_y$:

$$dN'' = dN' \varphi(v_y) dv_y = N \varphi(v_x) \varphi(v_y) dv_x dv_y \quad (3)$$

Далее выберем из dN'' те молекулы, компоненты v_z которых лежат от v_z до $v_z + dv_z$:

$$dN = dN'' \varphi(v_z) dv_z = N \varphi(v_x) \varphi(v_y) \varphi(v_z) dv_x dv_y dv_z \quad (4)$$

Сравнивая (4) и (1), получаем:

$$f(\vec{v}) = \varphi(v_x) \varphi(v_y) \varphi(v_z) \quad (5)$$

Так как положительные и отрицательные направления координат равноправны, примем $\varphi(-v_x) = \varphi(v_x)$. Получается, φ зависит только от модуля или от квадрата компоненты v_x . Это работает для остальных проекций. Значит, функция может зависеть только от квадрата скорости \vec{v}^2 . Получим:

$$f(\vec{v}^2) = f(v_x^2) f(v_y^2) f(v_z^2) \quad (6)$$

где $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$. Для решения (6) осуществляется переход к новым переменным, соответствующим значениям кинетических энергий:

$$\varepsilon_x = \frac{mv_x^2}{2}, \quad \varepsilon_y = \frac{mv_y^2}{2}, \quad \varepsilon_z = \frac{mv_z^2}{2}; \quad \varepsilon = \frac{mv^2}{2}$$

После замены переменных (6) будет выглядеть так:

$$f(\varepsilon) = \varphi(\varepsilon_x) \varphi(\varepsilon_y) \varphi(\varepsilon_z) \quad (7)$$

$$\varepsilon = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \quad (8)$$

Рассмотрим изменения энергий, которые будут равны нулю. В этом случае дифференциалы от любых функций аргумента ε равны нулю:

$$d[(\varepsilon_x) \varphi(\varepsilon_y) \varphi(\varepsilon_z)] = 0 \quad (9)$$

$$d\varepsilon_x + d\varepsilon_y + d\varepsilon_z = 0 \quad (10)$$

Дифференцируя (9) и деля его на $\varphi(\varepsilon_x) \varphi(\varepsilon_y) \varphi(\varepsilon_z)$ получим:

$$\frac{\varphi'(\varepsilon_x)}{\varphi(\varepsilon_x)} d\varepsilon_x + \frac{\varphi'(\varepsilon_y)}{\varphi(\varepsilon_y)} d\varepsilon_y + \frac{\varphi'(\varepsilon_z)}{\varphi(\varepsilon_z)} d\varepsilon_z = 0 \quad (11)$$

Умножив (10) на неопределенный множитель α и сложив с (11) получим:

$$\left[\frac{\varphi'(\varepsilon_x)}{\varphi(\varepsilon_x)} + \alpha \right] d\varepsilon_x + \left[\frac{\varphi'(\varepsilon_y)}{\varphi(\varepsilon_y)} + \alpha \right] d\varepsilon_y + \left[\frac{\varphi'(\varepsilon_z)}{\varphi(\varepsilon_z)} + \alpha \right] d\varepsilon_z = 0 \quad (12)$$

Данное уравнение будет выполняться, если выражения в скобках будут равны нулю. Следовательно:

$$\frac{\varphi'(\varepsilon_x)}{\varphi(\varepsilon_x)} + \alpha = 0$$

$$\frac{d\varphi(\varepsilon_x)}{\varphi(\varepsilon_x)} = -\alpha d\varepsilon_x$$

Интегрирование дает

$$\ln \varphi(\varepsilon_x) = -\alpha \varepsilon_x + \ln A \rightarrow \varphi(\varepsilon_x) = A_1 e^{-\alpha \varepsilon_x} \quad (13)$$

Для ОУ, ОZ выражения будут точно такими же:

$$\varphi(\varepsilon_y) = A_1 e^{-\alpha \varepsilon_y};$$

$$\varphi(\varepsilon_z) = A_1 e^{-\alpha \varepsilon_z}$$

В итоге получаем:

$$f(\varepsilon) = A_1^3 e^{-\alpha \varepsilon} \quad (14)$$

Возвращаясь к переменным скорости, получаем:

$$\varphi(v_x) = A_1 e^{-\frac{m\alpha v_x^2}{2}}; \varphi(v_y) = A_1 e^{-\frac{m\alpha v_y^2}{2}}; \varphi(v_z) = A_1 e^{-\frac{m\alpha v_z^2}{2}}$$

$$f(v) = A_1^3 e^{-\frac{m\alpha v^2}{2}} \quad (15)$$

Далее, чтобы сократить количество текста, мы опускаем вывод коэффициентов A_1 и α . Мы будем опираться на вывод, данный в учебнике Сивухина Д. В. в §72, и продолжим рассуждения.

Их значения равны:

$$A_1 = \sqrt{\frac{m\alpha}{2\pi}} \quad (16)$$

$$\alpha = \frac{1}{kT} \quad (17)$$

Из (1), (13), (16) следует, что число молекул dN , имеющих скорости в интервалах по x , y , z , определяется по формуле:

$$dN = N \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv_x dv_y dv_z \quad (18)$$

Далее получаем распределение Максвелла по абсолютному значению скорости. Мы ищем молекулы, имеющих скорости в интервале от v до dv . Направление может быть любым в силу равновероятности. В пространстве скоростей изображающие точки располагаются внутри бесконечно тонкого сферического слоя, со средним радиусом v и толщиной dv . Число молекул в этом слое определяется формулой:

$$dN = 4\pi N \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2 dv \quad (19)$$

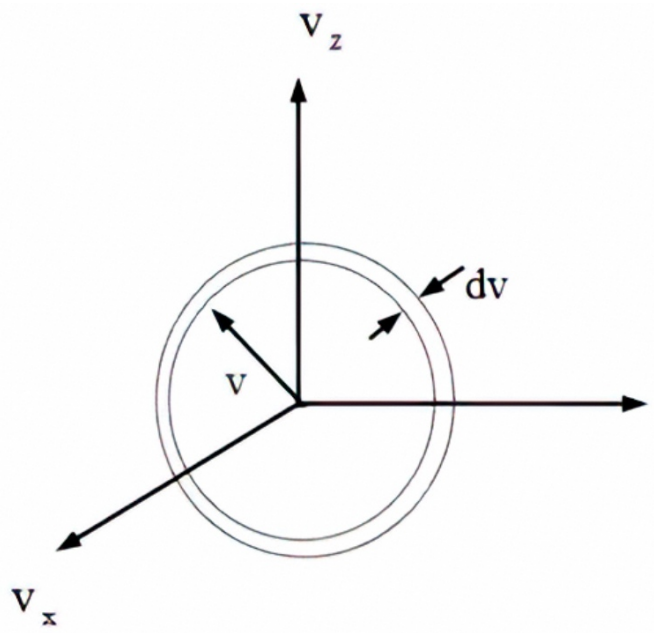


Рис. 1: Пространство скоростей

И таким образом, мы имеем функцию распределения $F(v)$:

$$F(v) = 4\pi N \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{kT}} v^2 \quad (20)$$

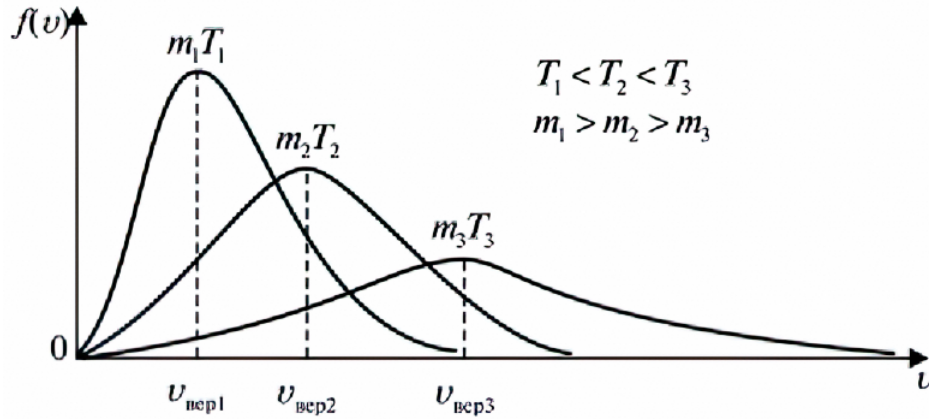


Рис. 2: Распределение $f(v)$

Вид распределения Максвелла показан на рисунке. С увеличением температуры максимум распределения смещается в сторону больших скоростей, а высота кривой в максимуме несколько понижается. Функция обращается в нуль при $v = 0$ и при $v \rightarrow \infty$ так как неподвижных и движущихся бесконечно быстро молекул не бывает. Она имеет максимум при условии:

$$v = v_{\text{в}} = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$$

1.2 Двумерное распределение

Предположим, что молекулы могут двигаться только в координатах x и y . Компонента скорости v_z может быть любой. Мы ищем число молекул, компоненты v_x и v_y лежат в соответствующих для них интервалах. Проинтегрировав (18) по компоненте v_z и обозначив $n = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$, получаем:

$$dN' = N \left(\frac{m}{2\pi kT} \right) e^{-\frac{mn^2}{kT}} dn_x dn_y, \quad (21)$$

где $dn_x = dv_x; dn_y = dv_y$.

Молекулы будут находиться в бесконечно тонком кольце радиуса n и толщиной dn . Площадь данного кольца - $2\pi n dn$. Заменяв $dn_x dn_y$ на данную площадь, получим:

$$dN' = 2\pi N \left(\frac{m}{2\pi kT} \right) e^{-\frac{mn^2}{kT}} n dn \quad (22)$$

Для реального газа (22) представляет собой число молекул, у которых проекция на XY лежит в интервале от n до dn . Получаем функцию распределения:

$$F'(n) = 2\pi N \left(\frac{m}{2\pi kT} \right) e^{-\frac{mn^2}{kT}} n \quad (23)$$

Возвращаемся к переменным v , дифференцируем (23) по v , приравняв его к нулю. Получим наиболее вероятное значение вероятной скорости:

$$v_B = \sqrt{\frac{kT}{m}} \quad (24)$$

Подставив (24) в (22), получим:

$$dN' = N e^{-\frac{mv^2}{kT v_B^2}} \frac{v}{v_B^2} dv \quad (25)$$

Проинтегрировав (25), получим:

$$\Delta N = N \left\{ e^{-\frac{v_1^2}{2v_B^2}} - e^{-\frac{v_2^2}{2v_B^2}} \right\} \quad (26)$$

Это наша рабочая формула.

Т.к. мы не имеем возможности измерить скорость каждого зерна отдельно, приведем рабочую формулу к виду:

$$\Delta m_i = m \left[e^{-\frac{(i-1)^2}{2i_B^2}} - e^{-\frac{i^2}{2i_B^2}} \right] \quad (27)$$