

## Codeforces 708 - AIM Tech Round 3 (Div. 1)

**第一题:** 给你一个由小写英文字母组成的字符串, 你一定要对一个非空子串做某个操作, 这个操作是把每个字母变成他前面的字母, 如 **b** 变成 **a**, **a** 变成 **z**, **z** 变成 **y**. 问你如何选择这个非空子串, 使得变换后的字符串字典序尽量小.

**做法:** 首先除了 **a**, 别的字符经过操作都会变小. 而字典序是先比较前面的字符, 所以我们选择的字符串一定要包含不为 **a** 的第一个字符. 之后就尽量延伸直到再碰到一个 **a** 为止. 注意如果全是 **a** 的话, 也一定要选非空子串, 所以这时把最后一个字母变成 **z**.

**第二题:** 有一个由 **0** 和 **1** 组成的序列. 现在告诉你  $a[0..1][0..1]$ , 其中  $a[i][j]$  表示这个序列的形如  $(i,j)$  的子序列的个数. 让你复原这个序列. 输出任意解或判断无解.

**做法:** 首先我们由  $a[0][0]$  和  $a[1][1]$  可以推知 **0** 和 **1** 的个数. 然后由 **0** 和 **1** 的个数可以退出  $a[0][1]$  和  $a[1][0]$  的和. 如果这个和吻合, 就可以通过把每个 **1** 往 **0** 里面插的方法来构造. 如果不吻合, 或者  $a[0][0]$  和  $a[1][1]$  不可能出现, 则无解. 但是注意如果  $a[0][0]$  和  $a[1][1]$  中有一个为 **0** 的话, 并不能推知对应数字的个数是 **0** 个还是 **1** 个. 需判断. 最后, 只有空序列满足条件不算有解.

**第三题:** 给一个树, 定义质心是所有子树的大小都不超过树的总点数除以二的点. 现在允许你砍掉一条边, 再加上一条边, 但所得还必须是棵树. 对于每个点, 问你允许你做刚才的操作的情况下, 这个点能否成为新树的质心.

**做法:** 首先想让一个点成为质心, 肯定要在最大的那个子树上砍一刀. 砍下来的肯定要直接接在这个点下面. 那么砍掉的部分的大小肯定是不超过总点数除以二的条件下越大越好. 我们树 **dp** 这个值.

**第四题:** 给你一个可能是错误的网络流, 已知每条边的容量和当前容量, 要求你用最小的代价, 把这个网络流改成满足容量限制和流量平衡的. 将任何一条边的容量或者流量加或者减 **1** 单位都花费 **1** 代价.

**做法:** 大多数题目背景和做法不会一样. 但是网络流例外. 这道题做法显然还是网络流. 首先我们发现, 每条边的流量修改确定后, 容量修改也就确定了. 只要增大到等于流量就够了. 所以我们将增大流量的费用和增大容量的费用一起计算. 如果一条边当前的容量大于流量, 那么增大流量的花费为 **1**, 但是流量超过容量以后, 花费就为 **2**. 减小这条边的流量花费为 **1**, 但是不能减为负数. 如果一条边的流量大于容量, 那他先要预先交流量减容量的费用. 然后如果要减小流量的话, 如果减小后的值还是大于本来的容量, 那么花费不变(额外花费为 **0**), 但是减少到原来容量以下的部分花费为 **1**. 然后我们考虑流量平衡条件, 很容易把原来每个点的容量平衡条件写成关于本来的流量和流量变化的等式. 我们发现这就是一个关于每条边流量变化量的流量平衡条件. 有可能多常数, 要从新的源点或汇点连边解决, 类似下界流那样, 做最小费用最大流. 最后原来的源和汇没有流量平衡限制, 所以给他们无限的流量. 但是新的源和汇已经被我们用来保证流量平衡了, 所以我们只好把原来的源点和汇点连起来, 理由和下界流建图里的一样. 做个最小费用最大流结束.

**第五题:** 你有一个网格阵. 除了最上面一行和最下面一行, 每个格子都是可以被破坏的. 现在每天早上, 有一阵风从左边吹过, 每个可以被破坏且左边没有别的格子的格子都有一个概率被破坏(相互独立). 每天晚上又有一阵风从右边吹过, 以同样概率破坏右侧的裸露格子. 问你  $k$  个昼夜之后, 最上面和最下面两个不会被破坏的行依然连通的概率是多少(连通就是通过没被破坏的格子四连通连起来).

**做法:** 首先我们有一些随机变量, 每一行剩下哪个区间, 或者一个方格都不剩了. 但是这个随机变量不好看. 所以我们首先 **coupling** 一下, 转换随机变量. 我们考虑每次每行以一定概率吹风, 只要风吹来, 格子必定破坏. 然后每一行从左边(或右边)吹来的风的个数就是个二项分布.  $k$  个昼夜之后依旧连通的概率就是每一行左边和右边的两个随机变量的和不能超过行的长度, 并且相邻两行中, 第一行左边的随机变量和第二行右边的随机变量的和不能超过行的长度, 左右调换亦然. 因为这些条件都是这一行和上一行的随机变量相关, 所以我们可以写出  $dp[i][l][r]$  代表第  $i$  行, 左边随机变量得  $l$ , 右边随机变量得  $r$ , 同时第  $i$  行和之前所有行都连起来的概率. 这个概率从第  $i-1$  行的一个二维区间转移过来. 复杂度三方. 神奇的是我们考虑这个  $dp$  关于  $l$  的边缘  $dp$  值的后缀和以及关于  $r$  的边缘  $dp$  值的后缀和, 因为只有  $l$  和  $r$  的和小于行长度的  $dp$  值有效, 所以上面两个边缘  $dp$  后缀和就足够转移了. 可以发现这个转移下  $dp$  是平方的. 做完了.