

AtCoder Grand Contest 003

第一题: 给你一个东西南北四个字组成的字符串, 问能否给每个字赋一个非负权值, 使得按照每个字所示的方向走这个字的权值的距离, 把字符串走完时, 能在二维平面上走回起点.

做法: 只要东西同时出现, 南北同时出现即可.

第二题: 某人有点数为 1 到 n 的卡牌各若干张(可不相同). 他可以用两张同样点数的卡牌组成一个对子, 或者用两张相邻点数的卡牌组成对子. 问每张卡牌只能使用一次的前提下, 他最多能组成多少个对子.

做法: 若某种卡牌张数为 0 , 那么比这张卡牌小的和大的卡牌是互不相干的. 如果没有张数为 0 的卡牌, 那么答案是总数除以二加一.

第三题: 给你一个序列, 允许交换相邻两个数或者交换隔一个数的两个数. 问排好序至少需要几次第一种操作.

做法: 通过第二种操作, 数字可以在同奇偶的位置之间随意交换. 而若一个数字所在位置的奇偶性和他在排好序的序列中所在位置的奇偶性不同, 那么我们一定要一个第一种操作来修复他. 我们可以通过第二种操作把奇偶位置不对的数都排到一起, 然后每两个这样的奇偶错位数用一个第一种操作还原. 奇偶性对了之后, 用第二种操作排序即可. 所以答案为奇偶错位数字个数除以二.

第四题: 给你最多 100000 个数, 每个小于等于 10^{10} , 问最多选出几个使得选出的数中不存在两个乘积为完全立方数.

做法: 首先因为完全立方数就是每个质因子的指数都模三余零的数, 所以若我们选择了一个数, 那么每个质因子的指数模三都等于这个数的这个质因子指数模三的相反数的数是不能取的. 按照每个质因子的指数模三的值分类, 我们发现选择了一类里的数字, 就不能选这一类对应的另外一类里的任何数字. 且这种对应关系是双向的. 所以我们只要每对关系选个数多的那一种就好. 然后我们需要对数字归类并求出对应的类. 首先我们可以把三次方不超过 10^{10} 的质因子去掉. 之后只会剩余(0)没有了; (1)一个质数; (2)两个不同质数的积; (3)一个质数的平方. 我们发现除了最后一种情况, 对应的类别里这一部分的质因子的乘积都是当前这个数这一部分的平方. 所以我们只要判断最后一种情况的出现. 这个只要判断是否开根号后是质数即可.

第五题: 你有一个序列, 从 1 到 n 排成一排. 有多个操作, 是把当前序列复制粘贴无限多次, 然后把当前序列变成这个无限序列的指定长度的一个前缀. 最后问你所有操作做完后, 1 到 n 分别出现了多少次.

做法: 首先如果一个操作比前面的要求长度要短的话, 前面一个操作就没用. 所以我们这样做直到操作所需的长度是递增的. 统计答案的过程其实是一开始最后的序列每个位置都出现 1 次, 然后每次把后一个数列中位置 x 的出现次数传给前一个数列的位置 $x \% L$, L 为前一个序列的长度. 这个算法可以做个优化. 由于我们不能记住一个序列中每个位置出现多少次,

所以我们只记录一个序列整体出现多少次, 即他里面的每个位置都出现了至少这么多次. 那么后一个长度为 S 的序列整体出现 1 次就会导致前一个长度为 T 的序列整体出现 S/T 次, 还余下一个 $S\%T$ 的零头. 这个零头一定是更前面的长度更短的序列复制而来的. 反复这样做, 前面有一些序列的整体出现次数增加了, 这部分答案就留待那些序列去算, 同时还可能余下一个零头, 这部分就是最初的 1 到 n 的序列中数字出现的次数. 因为每次 $S\%T$ 时, S 至少减半, 所以 S 最多减半 \log 次. 每次我们要找到小于等于 S 的最大的 T , 这个需要二分. 所以处理一个序列需要 \log^2 的时间, 总复杂度是 $n\log^2$.

第六题: 给出一个二维方格阵, 有些格子是黑的(他们 4 连通), 剩下的是白的. 现在对这个图形做分形, 即每个黑格子都变成最初的方格阵, 每个白格子都变成和最初的方格阵等大的空白方格阵. 问分形 k 次后, 黑格子的 4 联通块有几个.

做法: 这题虽然是最后一题但是非常简单. 假如黑格子与边界格子没有交的话, 显然每次分形连通块的数量要乘以当前的黑格子数. 如果左边界上某一个地方是黑的, 有边界上同样地方的格子也是黑的, 那么这种方格阵如果左右相邻摆放的话, 总连通块数就会减一. 我们再排除一种简单情况, 即左右摆放和上下摆放连通块数都减少, 此时无论分形多少次答案都是 1. 所以最 general 的一种情况, 不失一般性, 是方格阵左右相邻摆放的话, 会有左边方格阵的右边界黑格子和右边方格阵的左边界黑格子相邻; 同时上下摆放没有任何这种情况. 此时我们考虑分形 k 次后黑格子的个数, 联通块的个数, 整个方格阵中左右相邻的黑格子数, 以及整个方格阵左右边界上对应位置都是黑色的格子对数这 4 种量, 发现可以组成一个线性递推, 快速幂即可.