☞ Cours 13.

1. Intégration par changement de variable – section (II) 1.7

Pour trouver une primitive d'une fonction f on peut avoir la chance de reconnaître que f est la dérivée d'une fonction bien connue. C'est malheureusement très rarement le cas, et on ne connaît pas les primitives de la plupart des fonctions. Cependant nous allons voir des techniques qui permettent de calculer des intégrales et des primitives. Parmi ces techniques, l'intégration par changement de variable. Celle-ci nous permettra de ramener l'intégrale à effectuer sous une des formules de base étudiées à la section précédente.

Exemple

Calculons la primitive de

$$\int \tan t \, \mathrm{d}t = \int \frac{\sin t}{\cos t} \, \mathrm{d}t.$$

Théorème 1

Si $u = g(x)$ est une fonction dérivable dont l'image est un intervalle I et si f est une fonction continue sur I, alors

$$\boxed{\int f\big(g(x)\big) g'(x) \, \mathrm{d}x}$$

Voici un moyen simple de s'en souvenir. En effet si l'on note

$$u = g(x)$$

alors par dérivation on obtient

$$\mathrm{d}u = g'(x)\,\mathrm{d}x$$

d'où la substitution

$$\int f(u)\,\mathrm{d}u = \int f\big(g(x)\big)g'(x)\,\mathrm{d}x$$

Règle :

1. Choisir $u = g(x)$ tel que vous pouvez retrouver $g'(x)$ dans l'expression à intégrer.
2. Calculer la différentielle $du = g'(x)\ dx$.
3. Substituer u et du dans l'expression à intégrer – il ne doit pas y avoir de x ou de dx qui reste.
4. Résoudre la nouvelle intégrale simplifiée.
5. Substituer $u = g(x)$ dans votre résultat final.

Nous utilisons l'intégration par substitution pour $\int f(x)\ dx$ lorsque $f(x)$ contient une fonction ($g(x)$) et sa dérivée (comme un facteur).

Exemple

Trouvez $\displaystyle\int x^2(3x^3+2)^3\,\mathrm{d}x$.

Exemple 1

Calculer les intégrales suivants

1. $\int \cot x \, \mathrm{d}x =$

2. $\int \frac{3x^4}{1+x^{10}} \, \mathrm{d}x$

3. $\int \frac{x 2^{\sqrt{4x^2+3}}}{\sqrt{4x^2+3}} \, \mathrm{d}x$

Exemple 2

1. $\displaystyle\int e^{2x+1}\,\mathrm{d}x$

2. $\displaystyle\int \frac{4x}{x^2+7}\,\mathrm{d}x$

3. $\displaystyle\int \tan^2(3\theta)\sec^2(3\theta)\,\mathrm{d}\theta$

4. $\displaystyle\int \frac{3x+3}{x^2+2x+4}\,\mathrm{d}x$

5. $\displaystyle\int \sec^2\left(\frac{x}{3}\right) e^{\tan\left(\frac{x}{3}\right)}\,\mathrm{d}x$

6. $\displaystyle\int \frac{\tan^3(\sqrt{\theta})\sec^2(\sqrt{\theta})}{\sqrt{\theta}}d\theta$

Exemple 3

Évaluons les intégrales définies suivantes,

1. $\displaystyle\int_1^2 5xe^{x^2+1}\,\mathrm{d}x$

    a) .

    b) .

2. $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{dr}{r\ln^3 r}$

1.1. Les fonctions symétriques

Théorème 2

Soit f une fonction continue sur $[-a,\ a]$.

a) Si f est paire, alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx.$

b) Si f est impaire, alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0.$

Exemple 4

Calculez

a) $\displaystyle\int_{-\pi/3}^{\pi/3} x^4 \sin x\, dx$

b) $\displaystyle\int_{-3}^{3} (x^2+1)\, dx$

☞ Faire les exercices suivants du manuel **II** :
Pages : **69**. No : **3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 39, 41, 43, 45, 47, 53, 55, 57, 59, 61, 63, 65, 67, 69, 71, 73, 79**