SONLI QATORLAR

1-Mavzu: Asosiy tushunchalar. Sonli qator ta'rifi, yaqinlashuvchiligi, sodda xossalari. Musbat hadli sonli qatorlarning yaqinlashuvchiligi.

Darsning rejasi

1. Sonli qator ta'rifi, yaqinlashuvchiligi va sodda xossalari.

2. Musbat hadli sonli qatorlarning yaqinlashuvchiligi.

Asosiy adabiyotlar

1. Азларов Т.А, Мансуров Х.Т. Математик анализ 1т, Т, Ўқитувчи, 1994.

2. Ильин В.А., Садовничий В.А, Сендов Б.Х, Математический анализ, т.1, М «Наука», 1979.

3. Gaziyev A., Israilov I., Yaxshiboyev M. Matematik analizdan musol va masalalar. 3-qism. Samarqand. 2006.

4. Б.П.Демидович. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М., «Наука» 1990.

5. Садуллаев А, Мансуров Х.Т., Худойберганов Г, Варисов А.К, Ғуломов Р. Математик анализ курсидан мисол ва масалалар тўплами, 1-қ, Т. Ўқитувчи. 1993.

6. Mamirov U.E. Mardiyev R., Ne'matov A.B.,Ibragimov A.M. Sonli qatorlar, funksional qatorlar,xosmas integrallar va parametrga bo'gliq xos va xosmas integrallar. SamDU nashriyoti. Samarqand 2011.

Qo'shimcha adabiyotlar

7. Кудрявцев Л.Д. и др. Сборник задач по математическому анализу 1,2 т. М.

“Наука” 1984. 1986.

8. Gaziyev A., Israilov I., Yaxshiboyev M. Matematik analizdan mustaqil ishlar.

3-qism. Samarqand. 2010.

Darsning maqsadlari:

Ta’limiy maqsadi: talabalarda sonli qator yaqinlashuvchiligi, uzoqlashuvchiligi va uning sodda xossalari, musbat hadli sonli qatorlarning yaqinlashuvchiligi haqida bilimlarni amaliy masalalarga qo‘llash ko‘nikmasini hosil qilish.

Rivojlantiruvchi maqsadi: talabalarning izlanuvchanlik faoliyatini rag‘batlantirish, muammoli topshiriqlarga mulohazali javoblar berish ko‘nikmalarini hosil qilish hamda ularda natijalarni umumlashtirish, mantiqiy va ijodiy qobiliyatni, muloqot madaniyatini rivojlantirish.

Tarbiyaviy maqsadi: talabalarni mustaqil fikrlash va misol, masalalarni yechishda mustaqil ish faoliyatiga jalb etish, ularda o‘zaro hurmat, hamkorlik fazilatlarini shakllantirish hamda fanga bo‘lgan qiziqishni o‘stirish.

Tayanch iboralar: sonli qator, qismiy yig‘indilar ketma-ketligi, chekli limit, qator yaqinlashuvchi, qator uzoqlashuvchi, musbat hadli sonli qator.

Darsning jihozlari: Sinf doskasi, darsliklar, o‘quv va uslubiy qo‘llanmalar, ma’ruzalar kursi, tarixiy ma’lumotlar, izohli lug‘atlar, atamalar, o‘tilgan dars mavzusi bo‘yicha savollar va muammoli toshiriqlar majmuasi, testlar, kartochkalar, shaxsiy kompyuter, lazerli proyektor.

Dars o‘tish usuli: Avval o‘tilgan mavzu qay darajada o‘zlashtirilganligini tekshirish, uy ishi topshiriqlarni bajarish natijalari bo‘yicha munozarali jonli muloqotni amalga oshirish, asosiy tushuncha va natijalarning misol, masalalarni yechishga tatbig‘i ko‘nikmalarini hosili qilish.

Darsning borishi ***(10 daqiqa):*** Tashkiliy qism: dars xonasining sanitariya holatini kuzatish, davomati va talabalarning darsga tayyorligini tekshirish. Talabalarni o‘tgan darsda berilgan uy vazifalari va mustaqil ish bo‘yicha topshiriqlarni hamda bajarilishini tekshirish.

O‘tilgan mavzular bo‘yicha: Talabalarning amaliy mashg‘ulot mavzusi bo‘yicha uy ishi topshiriqlarni bajarish natijalarini tahlil qilish orqali bilim darajsini aniqlash.

Yangi dars mavzusining bayoni ***(60 daqiqa):*** *Sinfda yechiladigan misollar*: [6]: 1.4-§: № 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Ta’rif. Ushbu $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$: $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$ sonli ketma-ketlik hadlaridan tuzilgan $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$ (1)

ifodaga sonli qator deyiladi va qisqacha $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ kabi belgilanadi, ya’ni:

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n , \qquad (2)$$

(2) – sonli qator hadlaridan quyidagi ketma-ketlikni tuzamiz:

$$A_1 = a_1; \quad A_2 = a_1 + a_2; ...; \; A_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n; ...$$

bu $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlik (2) – sonli qatorning qismiy yig‘indilar ketma-ketligi deyiladi.

Ta’rif. Agar $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlikning limiti chekli, ya’ni $\lim_{n\to\infty} A_n = A$ (A-chekli) bo‘lsa, qator yaqinlashuvchi (yoki (1) – ifodaning qiymati deyiladi) va A soni qator yig‘indisi deyiladi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$ kabi belgilanadi.

Agar $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlik chekli limitga ega bo‘lmasa, u holda (2) – sonli qator uzoqlashuvchi deyiladi.

1-teorema. Agar (2) – qator yaqinlashuvchi va yig‘indisi A soniga teng bo‘lsa, u holda ixtiyoriy chekli o‘zgarmas c soni uchun $ca_1 + ca_2 + ca_3 + ... + ca_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ qator ham yaqinlashuvchi va yig‘indisi $c \cdot A$ ga teng bo‘ladi.

2-teorema. Ikkita yaqinlashuvchi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ va $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sonli qatorlar yig‘indilari mos ravishda A va B sonlarga teng bo‘lsa, u holda bu qatorlar hadlarining algebraik yig‘indisidan tuzilgan

$$(a_1 \pm b_1) + (a_2 \pm b_2) + ... + (a_n \pm b_n) + ... = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$$

qator ham yaqinlashuvchi va yig‘indisi $A \pm B$ ga teng bo‘ladi.

3-teorema. Agar (2) – sonli qator yaqinlashuvchi bo‘lsa, u holda $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ bo‘ladi (agar $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ bo‘lsa, u holda (2) – sonli qator uzoqlashuvchi bo‘ladi).

Masalan: $\frac{2}{3}+\frac{3}{5}+\frac{4}{7}+\frac{5}{9}+...$ qatorda

$a_n = \frac{n+1}{2n+1}$ bo‘lib, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}} = \frac{1}{2} \neq 0$ bo‘lganligi uchun bu qator uzoqlashuvchi.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad (a_n \geq 0), \quad n = 1,2,3,... \tag{3}$$

qator musbat hadli sonli qator deyiladi. $A_{n+1} = A_n + a_{n+1} \geq A_n$ ekanligidan $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ qismiy yig‘indilari ketma-ketligining o‘suvchiligi kelib chiqadi.

4-teorema. (3) – sonli qatorning yaqinlashuvchi bo‘lishi uchun, $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlikning yuqoridan chegaralangan bo‘lishi zarur va yetarli.

5-teorema. Agar (3) – sonli qatorda $a_n \geq a_{n+1}$, $n = 1,2,3,...$ bo‘lsa, u holda (4) – qator bilan bir vaqtda

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot a_{2^n}, \tag{4}$$

sonli qator yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi bo‘ladi.

1-misol. $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+...+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+...$ qatorning yaqinlashuvchiligini ko‘rsating va yig‘indisini toping.

Yechish: Bu qator uchun avval $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ qismiy yig‘indilar ketma-ketligini tuzamiz va limitini qaraymiz:

$A_n = \frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+...+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ buning limitini hisoblash uchun bu yig‘indini quyidagicha tasvirlaymiz

$$A_n = \frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+...+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+...+\frac{1}{2n-3}-\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$$

bundan

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}$$

ga ega bo‘lamiz. Demak, qator yaqinlashuvchi va yig‘indisi $\frac{1}{2}$ ga teng bo‘ladi.

2-misol. $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{3^{n+1}}+...$ qatorning yaqinlashuvchiligini ko‘rsating va yig‘indisini toping.

Yechish. Bu holda $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlik quyidagicha:

$$A_n = 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{3^{n-1}} = \frac{1-\frac{1}{3^n}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}-\frac{1}{2\cdot 3^{n-1}} \quad \text{bo‘lib,}$$

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2\cdot 3^{n-1}}\right) = \frac{3}{2}$$

ega bo‘lamiz. Demak, qator yaqinlashuvchiligi ta’rifiga ko‘ra, berilgan qator yaqinlashuvchi va yig‘indisi $\frac{3}{2}$ ga teng bo‘ladi.

3-misol. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)$ qatorning yaqinlashuvchiligini ko‘rsating va yig‘indisini toping.

Yechish. Bu holda $a_n = \sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$ ekanligidan

$$A_n = \left(\sqrt{3}-2\sqrt{2}+\sqrt{1}\right)+\left(\sqrt{4}-2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)+\left(\sqrt{5}-2\sqrt{4}+\sqrt{3}\right)+...+\left(\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}+\sqrt{n-1}\right)+$$
$$+\left(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right) = 1-\sqrt{2}+\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1} = 1-\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}$$

bo‘lib,

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}\right) = 1-\sqrt{2}$$

ega bo‘lamiz. Demak, ta’rifiga ko‘ra qator yaqinlashuvchiligi va yig‘indisi $1-\sqrt{2}$ ga teng bo‘ladi.

4-misol. $\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+...+\frac{1}{n!}+...$ qatorni yaqinlashishga tekshiring.

Yechish. $a_n = \frac{1}{n!} > 0$, ya’ni berilgan qator musbat hadli, $A_n = \frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+...+\frac{1}{n!}$ yig‘indining yuqoridan chegaralanganligini tekshiramiz,

$$A_n = \frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+...+\frac{1}{n!} < 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^n}+...+\frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} = 2-\frac{1}{2^{n-1}} < 2,$$

4-teoremaga ko‘ra berilgan qator yaqinlashuvchi bo‘ladi.

5-misol. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ qatorni yaqinlashishga tekshiring.

Yechish. $a_n = \frac{1}{n^2} > 0$ bo‘lib, bu qator musbat hadli, $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n^2} = a_n$ ekanligidan qator hadlarining monoton kamayuvchiligi kelib chiqadi, 5-teoremaga ko‘ra, $\sum_{n=1}^{\infty}2^n\cdot a_{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty}2^n\cdot\frac{1}{2^{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ qatorning yaqinlashuvchiligidan berilgan qatorning yaqinlashuvchiligi kelib chiqadi.

6-misol. $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{0,01}$ qatorni yaqinlashishga tekshiring.

Yechish. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{0,01} = 1 \neq 0$ bo‘lganligi uchun qator yaqinlashishining zaruriy sharti bajarilmaydi, shuning uchun qator uzoqlashuvchi bo‘ladi.

Uyda yechiladigan misollar: [3]:1-§: № 1.1, 1.2, 1.16, **[4]**: № 2546, 2547, 2556.

Mavzuni o‘zlashtirish darajasini tekshirish va mustahkamlash ***(10 daqiqa).*** Mavzu bo‘yicha asosiy tushunchalar va tasdiqlar o‘z ifodasini topgan bir necha savollar bilan talabalarga murojaat qilish va 1-2 misolni yechish qanday bajarilishini so‘rash hamda asosiy tushinchalarni takrorlash.