

# 基于 Mumford-Shah 模型的快速水平集图像分割方法

李 俊 杨 新 施鹏飞

(上海交通大学图像处理与模式识别研究所 上海 200030)

**摘 要** 该文对 Chan-Vese 提出的基于 Mumford-Shah 模型的水平集分割图像的算法做了两方面的改进:首先改进了 C-V 方法的偏微分方程,使得 C-V 方法可以快速计算出全局最优分割;其次,采用源点映射扫描方法来快速计算符号距离函数,克服了常规水平集方法中构造符号距离函数计算量大的缺点,并结合该文所提出的基于快速步进法生成符号表的方法,进一步提高了计算稳定性.两方面的改进提高了计算的速度和分割效果,试验统计结果显示,对于  $512 \times 512$  的大幅图像,一般只需要 10 次左右的迭代就可以得到最优的分割效果.对合成图像、生物医学图像的分割结果表明了本文方法的稳健、快速.

**关键词** 图像分割, Mumford-Shah 模型, 水平集方法, 符号距离函数

**中图法分类号:** TP391

## A Fast Level Set Approach to Image Segmentation Based on Mumford-Shah Model

LI Jun YANG Xin SHI Peng-Fei

(Institute of Image Processing & Pattern Recognition, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030)

**Abstract** A new level set PDE based on the simplified Mumford-Shah model for image segmentation was proposed by Chan and Vese, which shows less insensibility of initialization and noise affect, and has the ability of detecting both inner and outer edges of targets with inner hole just by one enclosed active contour. However, the edges far way from the active contours would be seriously suppressed by the dirac function in the proposed PDE. To solve this problem, this paper improved the C-V's PDE by replacing the dirac function  $\delta_c(\phi)$  with  $|\nabla \phi|$ , which eliminates the suppression against the edges wide of the active contours, such that the improved PDE gives global optimization of Mumford-Shah model and need less evolution loops than that of the C-V's PDE. Besides, in order to further stabilize and fasten the level set evolution procedures, the paper addresses an improved approach to construction of the signed distance function using Voronoi source scanning method, which extends the Voronoi source of the grids nearest to active contours to the far grids along with characteristic lines, only needs simple comparison and few multiplication operations with computational complication  $O(N)$ , faster than the traditional approaches. At last, a new sign map labeling method is proposed to distinguish the inside and outside of the 2D closed active contour by fast marching method. These three improvements dramatically give more efficiency and performance than the C-V approach, for example, typically all edges of an  $512 \times 512$  large image will be picked up only within 10 iterating times by one initial active con-

收稿日期:2001-05-15;修改稿收到日期:2001-12-18. 本课题得到国家自然科学基金(60072026, 69931010)资助. 李俊,男,1972年生,博士,现在摩托罗拉中国研究中心工作,研究方向为偏微分方程在图像处理中的应用、图像匹配技术、运动目标跟踪等. E-mail: a18547@email.mot.com. 杨新,男,博士,教授,主要从事时间序列图像中运动物体识别. E-mail: yangxin@sjtu.edu.cn. 施鹏飞,男,1940年生,教授,博士生导师,研究领域为图像分析、模式识别、智能技术与系统.

tour. The segmentation tests for synthesized and biomedical images prove the proposed segmenting method is very fast and robust.

**Keywords** image segmentation, Mumford-Shah model, level set method, signed distance function

## 1 引 言

曲线演化(curve evolution)是解决静止或运动图像中分割和目标检测问题<sup>[5-11]</sup>的一种有效方法. 该方法利用闭合曲线或曲面形变的特定规律, 定义度量闭合曲线或曲面形变的能量函数, 最小化这个能量函数能使闭合曲线(曲面)逐渐逼近图像中指定目标的边缘<sup>[1,2]</sup>. 这种方法将图像的分割转化为最优化问题, 大量的数学工具可供使用, 从而使得曲线演化方法在图像分割, 特别是纹理复杂或运动形变区域的分割和检测中得到广泛的应用. 然而, 早期基于平面的曲线演化方法<sup>[4]</sup>计算不稳定, 且难于处理曲线演化中闭合曲线的分裂与融合. 近年由 Osher 与 Sethian 提出的水平集(Level Set)方法<sup>[3,4]</sup>将两维(三维)的闭合曲线(曲面)演化问题转化为三维(四维)空间中水平集函数曲面演化的隐含方式来求解, 避免了对拓扑结构变化的处理, 计算稳定, 从而在图像处理和计算机视觉中得到广泛应用<sup>[5-11]</sup>.

传统的基于几何活动轮廓线(geometric active contour)的水平集图像分割方法<sup>[5,6]</sup>仅利用图像的局部边缘信息, 对边缘模糊或者存在离散状边缘的区域, 很难得到理想的分割效果. 而基于 Mumford-Shah 模型<sup>[12]</sup>的分割方法依赖的是同质区域的全局信息, 因此可以获得较好的分割结果. 本文对 Chan 和 Vese<sup>[13]</sup>提出的基于简化 Mumford-Shah 模型的水平集图像分割方法进行改进, 目的是提高分割速度和分割的鲁棒性. 首先, 对 C-V 方法中的偏微分方程做了改进, 使得单次迭代中对能量函数优化的全局性更优, 从而大幅度减少迭代次数; 其次, 改进了影响水平集方法计算效率的符号距离函数生成方法, 采用源点扫描方法<sup>[14]</sup>, 只需要四次扫描, 就可以计算全图范围的距离函数, 计算量仅为  $O(N)$ , 进一步提高计算效率; 最后, 本文提出一种利用快速步进标记法, 快速生成基于初始闭合曲线的符号表, 保证了初始符号距离函数生成的稳定性.

## 2 水平集方法(Level Set Method)

设二维闭合曲线为  $C(p, t) = (x(p, t), y(p, t))$ ,  $p$  是任意参数化变量,  $t$  是时间, 并设曲线的内向单位法矢为  $N$ , 则曲线沿单位法矢方向的曲线演化(如图 1 所示)可以用如下偏微分方程表示<sup>[3,4]</sup>:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = V(C)N \quad (1)$$

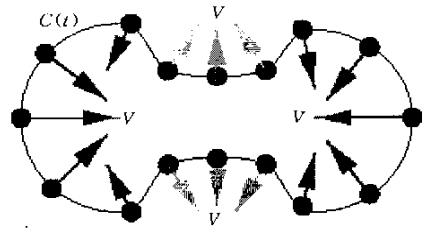


图 1 曲线演化示意

式中,  $V(C)$  是速度函数, 决定曲线  $C$  上每点的演化速度.

目前, 解决曲线演化的途径主要是水平集 Level Set 方法<sup>[4,6]</sup>, 该方法将平面闭合曲线  $C$  隐含表达为连续函数  $\phi(x, y)$  的具有相同函数值的点集(称为水平集)<sup>[4]</sup>, 通常是  $\{\phi=0\}$ , 称为关于  $C$  的水平集函数. 如图 2(a) 是一条平面闭合曲线  $C$ , 图 2(b) 是其水平集函数的间接表达, 图中的黑线就是隐含为水平集的平面曲线  $C$ .

水平集函数通常取由初始闭合曲线  $C_0$  生成的符号距离函数(signed distance function), 记为 SDF. 设  $\phi(x, t=0)$ ,  $x \in R^2$  是 SDF, 则有

$$\phi(x, t=0) = \pm d \quad (2)$$

式(2)中的  $d$  是点  $x$  到初始曲线  $C(t=0)$  的距离, 右边的符号根据点  $x$  位于闭合曲线  $C(t=0)$  的内外部而定, 如果  $x$  位于  $C(t=0)$  的内部, 则取正号(或负号), 反之取负号(或正号).

以水平集函数所表达的曲线演化的最大特点是: 即使隐含在  $\phi$  中的水平集  $C$  发生了拓扑结构变化(合并或分裂),  $\phi$  仍保持为一有效函数<sup>[3,4]</sup>. 如图 2

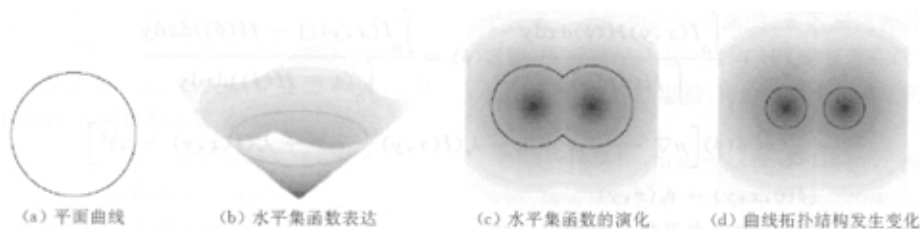


图 2 基于水平集方法的曲线演化示意图

(c), (d)所示,其中图 2(c)是水平集函数更新后的曲线形状,而图 2(d)中的一条曲线已经分裂为两条。

要使  $\phi$  的演化和闭合曲线  $C$  的演化相关,  $\phi$  的演化要遵循如下 Hamilton-Jacobi 偏微分方程<sup>[3]</sup>

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = V_{\text{ext}} |\phi| \quad (3)$$

方程(3)中的  $V_{\text{ext}}$  是与  $C$  法线方向的速度相关的某种函数,由方程(1)中  $V$  扩展而来,由于通常  $V$  只在  $C$  的位置有意义,也即定义在零水平集,因此常需要将零水平集的  $V$  扩展到整个函数曲面定义域,称为扩展速度场  $V_{\text{ext}}$ 。

### 3 基于 Mumford-Shah 模型的活动轮廓线图像分割及水平集解

图像分割的目的是将图像中的灰度(纹理)同质(homogeneity)的区域  $R$  分离出来,并通过各个同质区域的边界来表达。通常,基于几何活动轮廓线模型分割图像的方法仅依赖于包围待分割目标或在目标内部的活动轮廓线  $C$  所在位置的图像局部信息,难于综合图像区域的全局信息。比如基于水平集的测地活动轮廓线分割方法<sup>[5]</sup>,所遵循的基于水平集方法的偏微分方程(PDE)如下:

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi(x, y, t)}{\partial t} = g(|\nabla I(C)|)(k + v) |\nabla \phi(x, y, t)| \\ \phi(x, y, 0) = \phi_0(x, y) \end{cases} \quad (4)$$

式(4)中  $\phi(x, y)$  是基于  $C$  的水平集函数,  $k = \nabla \cdot \left[ \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \right]$  是水平集函数的曲率,  $v$  是常数,  $I(x, y)$  是图像函数,  $g(\cdot) \geq 0$  是递减函数。该方程描述了以函数曲面  $\phi$  的零水平集  $\phi(x, y) = 0$  所表达的二维闭合活动轮廓线  $C$  沿法线方向的演化,方程右边是速度项。可见,当  $C$  靠近图像边缘,  $|\nabla I(C)|$  增大,导致  $g(\cdot) \rightarrow 0$ , 方程右边趋于 0,  $C$  的速度趋于零,最

终停止运动。这样,  $C$  就停在图像的边缘位置。然而,由于图像中的边缘并非都是理想的阶梯边缘,如果  $C$  附近是较平滑的边缘,则  $C$  可能越过边缘,出现“冒顶”,不再返回到正确位置。虽然 Caselles<sup>[6]</sup> 等以及 Siddiqi<sup>[7]</sup> 等引入一些额外约束项,能在一定程度上克服轮廓线“冒顶”,然而不能从根本上解决问题,关键是这些方法仅依靠位于闭合轮廓线  $C$  下的图像局部信息来控制  $C$  的运动,难以全局性地分割出图像中的同质区域。

Chan 和 Vese 提出了另外一种基于简化 Mumford-Shah 区域最优划分的图像分割模型<sup>[13]</sup>。设定定义域为  $\Omega$  的图像  $I(x, y)$  被闭合边界  $C$  划分为目标  $\omega_o$  ( $C$  的内部)和背景  $\omega_b$  ( $C$  的外部)两个同质区域,各个区域的平均灰度为  $c_o$  和  $c_b$ ,考虑拟合能量函数:

$$\begin{aligned} F(C, c_o, c_b) = & \mu L(C) + \nu S_o(C) + \\ & \lambda_o \int_{\text{inside}(C)} |I - c_o|^2 dx dy + \\ & \lambda_b \int_{\text{outside}(C)} |I - c_b|^2 dx dy \end{aligned} \quad (5)$$

$L(C)$  是闭合轮廓线  $C$  的长度,  $S_o(C)$  是  $C$  的内部区域面积,  $\mu, \nu \geq 0$ ,  $\lambda_o, \lambda_b > 0$  是各个能量项权重系数。当闭合边界  $C$  没有位于两个同质区域的边界时,  $F(C)$  不能达到最小值;只有轮廓线位于两个同质区域边界时,  $F(C)$  才能达到最小值。最优化式(5),就可得到最终分割轮廓线  $C$  的位置以及未知数  $c_o, c_b$ , 即

$$\{C^*, c_o^*, c_b^*\} = \inf_{C, c_o, c_b} F(C, c_o, c_b) \quad (6)$$

由于上面的模型利用了图像的全部信息,通过最优化式(6),就可得到全局最优的图像分割结果。

设  $\phi_0$  是根据初始轮廓线  $C_0$  构造的水平集函数, 即  $\{C_0 | \phi_0(x, y) = 0\}$ , 并设  $\phi$  为内正外负型的 SDF, 即  $\phi(\text{inside}(C)) > 0$ ,  $\phi(\text{outside}(C)) < 0$ 。Chan 和 Vese 以欧拉-拉格朗日方法推导出了满足式(5)并以水平集函数  $\phi$  表达的偏微分方程如下:

$$\begin{cases} c_o(\phi) = \frac{\int_{\Omega} I(x,y)H(\phi)dxdy}{\int_{\Omega} H(\phi)dxdy}, c_b(\phi) = \frac{\int_{\Omega} I(x,y)(1-H(\phi))dxdy}{\int_{\Omega} (1-H(\phi))dxdy} \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} = \delta(\phi) \left[ \mu \nabla \cdot \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} - v - \lambda_o(I(x,y) - c_o)^2 + \lambda_b(I(x,y) - c_b)^2 \right] \\ \phi(0,x,y) = \phi_o(x,y) \end{cases} \quad (7)$$

式(7)中的  $\Omega$  是图像函数和水平集函数的定义域,

$H(z) = \begin{cases} 1, & z > 0 \\ 0, & z < 0 \end{cases}$  是 Heaviside 函数, 而  $\delta(x)$  是 Dirac 函数.

从方程(7)可以看出, 偏微分方程所涉及的图像函数  $I(x,y)$  的定义域是全图数据, 而方程(4)中的  $g(I(C))$  函数是仅利用轮廓线  $C$  所在位置的图像数据; 并且方程(7)中的另两个未知数  $c_o, c_b$  也定义在图像定义域内, 具有全局特征. 因此 Chan-Vese 阐述了该方法的一个非常显著的特点就是全局优化, 仅用一条初始闭合轮廓线, 就可把带内部空洞目标的内外边缘全检测出来, 不需为检测内部空洞的边缘做特别处理; 其次, 初始曲线无需完全位于同质区域的内部或外部, 仍然可以正确地分割出目标和背景; 最后, 这种方法还有一个显著的特点就是不依靠图像中的边缘信息, 因此, 即使图像中的边缘呈模糊或离散状, 仍然可以获得理想的分割效果.

不过, 实验表明, 方程(7)中的 Dirac 函数  $\delta(x)$  狭窄的定义范围, 限制了该方法检测图像边缘的全局性. C-V 方法之所以能检测出带空洞的目标的内部, 是因为采用了规则化的 Dirac 函数  $\delta_\epsilon(x) = \frac{\epsilon}{\pi(\epsilon^2 + x^2)}$ , 该函数保证在图像定义域范围内, 所有点的  $\delta_\epsilon(\phi(x,y))$  值都是趋于零的正值, 从而不至于“埋没”空洞区域中的异质区域边界. 然而, 如果带空洞的目标比较“厚”, 则 Dirac 函数严重抑制了对远离活动轮廓线  $C$  的边缘的检测, 致使不能稳定地检测出内部区域.

另外, C-V 方程中,  $\phi$  每次更新后, 需要重新初始化为符号距离函数, 以保持计算稳定性. C-V 方法采用如下迭代方法重新初始化  $\phi$  为符号距离函数

$$\begin{cases} \phi_i = \text{sgn}(\phi)(1 - |\nabla \phi|) \\ \phi(0, \cdot) = \phi(t, \cdot) \end{cases} \quad (8)$$

这种方法仅靠变形后的  $\phi$  的符号来保证计算的准确性, 而没有利用零水平集的确切位置信息, 因此可能导致零水平集位置发生移动. 并且, 要保证在  $\Omega$  域内每点式(8)都收敛, 计算量较大.

万方数据

## 4 对 C-V 图像分割方程的改进

为消除方程(7)中 Dirac 函数对检测远离活动轮廓线  $C$  边缘的抑制, 这里将方程(7)中的  $\delta_\epsilon(\phi(x,y))$  替换成  $|\nabla \phi(x,y)|$ , 使偏微分方程变为

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = |\nabla \phi| \left[ \mu \nabla \cdot \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} - v - \lambda_o(I(x,y) - c_o)^2 + \lambda_b(I(x,y) - c_b)^2 \right] \quad (9)$$

方程(9)中的两个未知数  $c_o$  和  $c_b$  的计算同方程(7). 由于  $|\nabla \phi(x,y)| \approx 1$ , 消除了 Dirac 函数对非零水平集的抑制, 对于远离  $C$  的图像边缘, 方程(9)右边第二项绝对值很大, 从而使得  $\phi$  可能发生符号反相, 这样, 方程(9)就可以检测出远离  $C$  的内外边缘, 因此, 方程(9)比方程(7)有更好的全局优化特性.

为保证方程(9)数值解的稳定性, 我们未采用 C-V 方法中的变分数值解法, 而是采用如下的有限差分方法<sup>[3]</sup>:

设  $h$  是离散水平集函数的二维网格步长,  $(x_i, y_i) = (ih, jh)$ ,  $1 \leq i, j \leq M$  为格点坐标, 则  $\phi_{i,j}^n = \phi(n\Delta t, x_i, y_i)$  是关于  $h$  的对  $\phi(x,y)$  在网格上的近似, 这里令  $n \geq 0, \phi^0 = \phi_0$ , 并设

$$\begin{aligned} D_{i,j}^{-x} &= \phi_{i,j} - \phi_{i-1,j}, & D_{i,j}^{-y} &= \phi_{i,j} - \phi_{i,j-1}, \\ D_{i,j}^{+x} &= (\phi_{i+1,j} - \phi_{i-1,j})/2, & D_{i,j}^{+y} &= (\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j-1})/2, \\ D_{i,j}^{-xy} &= \phi_{i,j} - \phi_{i-1,j-1}, & D_{i,j}^{+xy} &= \phi_{i+1,j+1} - \phi_{i,j}, \\ D_{i,j}^{xy} &= (\phi_{i+1,j+1} - \phi_{i-1,j-1})/2, \end{aligned}$$

根据 Osher-Sethian 求解水平集的“熵守恒”差分方法<sup>[4]</sup>, 可得方程(9)的数值解表达式如下:

$$\phi_{i,j}^{n+1} = \phi_{i,j}^n + \Delta t \left[ \max(F_{m-}, 0) \nabla^+ + \min(F_{m-}, 0) \nabla^- + \mu K_{i,j} ((D_{i,j}^{xy})^2 + (D_{i,j}^{xy})^2)^{1/2} \right] \quad (10)$$

上式中的

$$\begin{aligned} \nabla^+ &= [\max(D_{i,j}^{-x}, 0)^2 + \min(D_{i,j}^{+x}, 0)^2 + \max(D_{i,j}^{-y}, 0)^2 + \min(D_{i,j}^{+y}, 0)^2]^{1/2}, \\ \nabla^- &= [\min(D_{i,j}^{-x}, 0)^2 + \max(D_{i,j}^{+x}, 0)^2 + \min(D_{i,j}^{-y}, 0)^2 + \max(D_{i,j}^{+y}, 0)^2]^{1/2} \end{aligned}$$

$K_{i,j}$  是水平集函数在  $(i,j)$  的曲率, 由下式定义

$$K = \nabla \cdot \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} = \frac{\phi_{xx}\phi_y^2 - 2\phi_{xy}\phi_x\phi_y + \phi_{yy}\phi_x^2}{(\phi_x^2 + \phi_y^2)^{3/2}},$$

可以由中点差分  $D_{m-1}^x$  和  $D_{m-1}^y$  近似计算出来,  $F_m$  由 Mumford-Shah 分割模型所定义, 如下

$$F_{m-1}(x, y) = -v - \lambda_a(I(x, y) - c_a)^2 + \lambda_b(I(x, y) - c_b)^2.$$

由于本文的方程(10)需要求解能量函数(5)的全局解, 因此, 不能使用通常局部求解水平集的方法——窄带法(narrow band)<sup>[4,5]</sup>, 而需要在整个定义域  $\Omega$  内更新水平集函数, 计算量大; 不过, 由于方程(9)是全局优化偏微分方程, 从后面的实验可以看到, 只需要数量很少的几次迭代, 就可以获得理想的分割效果. 其实, 真正影响水平集计算量的步骤是每次更新水平集函数后, 将水平集函数重新初始化为符号距离函数的计算. 下面本文采用一种源点扫描的距离函数生成方法, 仅需在  $\Omega$  范围内做 4 次扫描和简单的计算, 就可准确生成符号距离函数.

5 符号距离函数的快速生成

符号距离函数的生成分两部分: 首先构造符号表  $S_{C_0}(p)$ , 即区分闭合初始轮廓线  $C_0$  内外部, 并以正号(或负号)标记  $C_0$  内部, 即  $S(\text{inside}(C_0)) = +1$ , 负号(或正号)标记  $C_0$  外部, 即  $S(\text{outside}(C_0)) = -1$ ; 其次, 计算  $\Omega$  中每一个网格点  $p$  到  $C_0$  的最短距离  $d_{C_0}(p)$ , 则

$$\phi_0(p) = S_{C_0}(p)d_{C_0}(p) \tag{11}$$

其中, 根据  $C_0$  计算每点  $p$  的距离最耗时, 由于计算每一点  $p$  到  $C_0$  的距离的复杂度为  $O(M)$ ,  $M$  是  $C_0$  在网格上的点数, 则总的计算复杂度为  $O(MN)$ ,  $N$  则是网格点数, 计算量很大, 特别是在  $C_0$  比较长的情况下. Malladi 等提出一种生成距离函数的快速步进法<sup>[5]</sup>, 计算量可以减小到  $O(N \ln M)$ , 仍然不小.

为了增强计算符号距离函数的稳定性并提高计算速度, 本文提出利用快速步进法生成符号表  $S$  的方法, 并采用一种扫描确定源点映射的方法快速生成距离函数, 只需要对  $\phi$  的全部网格点做 4 次扫描和简单的运算, 就可以完成距离函数的生成.

5.1 初始符号表的生成

区分初始闭合轮廓线  $C_0$  的内外部是生成符号距离函数的第一步. 常用的方法是选取一些规则的闭合曲线, 如矩形或圆等, 由于已知这些规则闭合曲线的几何参数, 因此很容易判断其内外部; 然而, 对

于任意形状的初始闭合曲线, 要区别内外部就比较烦琐, 逐行扫描确定交点的方式需要复杂的判断, 容易出现差错, 一旦出错, 将影响整个符号距离函数生成的正确性.

本文提出利用快速步进法<sup>[4]</sup>标记  $C_0$  内外部的的方法, 该方法只需要一个种子点  $P_{\text{seed}}$  作为引导, 以一种特殊的扫描方式求解方程

$$[\max(D_{i,j}^-T, 0)^2 + \min(D_{i,j}^+T, 0)^2 + \max(D_{i,j}^-T, 0)^2 + \min(D_{i,j}^+T, 0)^2]^{1/2} = 1 \tag{12}$$

式中的  $T_{i,j}$  表示从种子点  $P_{\text{seed}}$  到达考察点  $P_{i,j}$  的时间, 整个计算量是  $O(N \ln N)$ . 具体算法如下:

- (1) 初始化
  - (a) 设  $C_0$  上的所有网格点的  $T = +\infty$ , 并标记网格点为 Accepted;
  - (b) 种子点  $P_{\text{seed}}$  的  $T = 0$ , 并将其标记为 Accepted, 种子点周围的 4 个邻点的  $T = 1$ , 标记为 Trial, 并按先后顺序将四邻点放入按  $T$  从小到大顺序的二叉排序堆  $\text{Heap}(T)$ ;
  - (c) 其他所有的网格点到达时间设为  $T = -\infty$ , 并标记为 Faraway;
- (2) 前向步进
  - (a) 从  $\text{Heap}(T)$  中输出  $T$  最小的点  $P_{\min T}$ , 标记为 Accepted, 并从  $\text{Heap}(T)$  中删除;
  - (b) 由方程(12), 计算  $P_{\min T}$  的 4 个四邻接点中标记为 Trial 或 Faraway 的网格点的  $T$ , 如果某个四邻点的标记是 Trial, 则用计算值更新它在  $\text{Heap}(T)$  中的  $T$  值; 如果标记是 Faraway, 则将该网格点以计算值为属性加入  $\text{Heap}(T)$ ;
  - (c) 如此循环, 直到  $\text{Heap}(T)$  中没有元素为止;
- (3) 输出: 将  $T \geq 0$  的所有点以 +1 标记, 其他的点以 -1 标记.

5.2 距离函数的源点扫描生成

生成距离函数的操作在初始化以及更新水平集函数中都要用到, 且计算量较大, 因此, 如何快速稳定地生成距离函数, 对提高水平集方法的计算效率很重要. 本文根据 Tsai 提出的源点扫描法<sup>[14]</sup>确认与每个网格点  $P$  同处一条特性线(轮廓线  $C$  的法线)上的轮廓线点, 即  $P$  点基于  $C$  的源点  $P_s$ , 源点是  $C$  上距离待考察网格点最近的点, 从而可计算出  $P$  点到  $P_s$  点的距离, 这就是  $P$  点的距离函数值, 这样就可以快速生成距离函数. 本文将每次扫描得到的源点保存, 利用这些中间结果大大减小了寻找源点的计算量, 提高了计算速度.

定义 1. 设  $\Omega$  是  $R^2$  上的连通子集, 点  $P \in \Omega$ , 并且  $C$  的离散点集  $\Gamma \subset C$  且  $\Gamma \subset \Omega$ , 定义点  $P$  基于

$\Gamma$  的源点为

$$Source(P) = \{Q \in \Gamma; dist(P, \Gamma) = |P - Q|\}.$$

从定义可以看出,  $P$  点在  $\Gamma$  上的源点就是  $\Gamma$  上距离  $P$  点最近的点.

**定义 2**(二维扫描方向). 定义下列规则排列二维网格  $(1:N_x-1, 1:N_y-1)$  上的扫描迭代方向:

$(x+, y+)$  扫描: 从左到右, 从上到下;  $(x-, y+)$  扫描: 从右到左, 从上到下;

$(x+, y-)$  扫描: 从左到右, 从下到上;  $(x-, y-)$  扫描: 从右到左, 从下到上;

则最近点映射方法构造基于点集  $\Gamma$  的距离函数步骤如下:

(1) 初始化. 计算距离  $C$  的离散点集  $\Gamma$  最近的网格点  $P_{closest} = \{p \in \Omega; 0 \leq dist(p, \Gamma) \leq 1\}$  到  $\Gamma$  的准确距离  $d$  以及相应的源点  $P^* [16]$ , 并将最近点的  $d$  保存到距离函数数组  $u$ , 源点  $P^*$  保存到映射数组  $V$ , 将所有最近点标记为 Visited; 其它点的  $d = +\infty$ , 标记为 Unvisited;

(2) 分别以 4 个扫描方向  $\{(x+, y+), (x-, y+), (x+, y-), (x-, y-)\}$  扫描网格  $\Omega$ . 每次扫描中, 更新每个网格点  $E$  (不含标记为 Visited 的点) 的距离函数值  $u_E$  及其最近点映射值  $V_E$ , 更新方法如下:

(a) 计算点  $E$  与每个四邻接点  $P_i$  源点  $P_i^*$  的距离  $u_i^{tmp} = E - P_i^*$ ;

(b) 如果  $u_i^{tmp} < \min u(P_i)$ , 设  $u_i^{tmp} = +\infty$ , 保证距离函数的单调性;

(c) 设置  $u(E) = \min u_i^{tmp} = u_i^{tmp}$  并且  $V(E) = P_i^*$ .

由于保存了已计算距离值的网格点的源点, 简

化了当前点之源点的寻找以及距离函数值的计算, 因此整个算法只需 4 次扫描, 就可以计算出  $\Omega$  的所有网格点关于  $C$  的离散点集  $\Gamma$  的距离函数值, 因此计算复杂度为  $O(N)$ . 将距离函数值乘上符号表中对应点的符号, 即得符号距离函数 SDF.

## 6 实验结果及讨论

### 6.1 符号距离函数的构造

下面对比几种符号距离函数生成方法的计算效率, 以说明本文提出的计算距离函数的高效率. 实验首先用本文提出的符号标记法得到任意形状闭合曲线的内外部分标记图, 然后分别利用直接求距离函数方法 (即计算每个网格点到闭合曲线  $C$  的最短距离, 作为该点的距离函数值, 然后加上符号图中相应点的符号, 作为该点的 SDF 值), 使用文献 [4] 中的 Fast Marching 方法以及本文方法计算在不同网格分辨率下, 关于不同长度闭合曲线的距离函数, 并记录计算时间以及各种方法所得 SDF 与直接求取法所求 SDF 值的方差. 这里, 取网格分辨率分别为  $128 \times 128$ ,  $256 \times 256$  以及  $512 \times 512$ .

图 3(a) 是任意形状的闭合曲线; 图 3(b) 是利用本文方法所计算的符号图, 内部为正值, 外部为负值; 图 3(c) 为对应的符号距离函数. 多次实验表明, 本文提出的符号表生成方法是非常鲁棒的, 而且速度也很快 [16].



图 3 本文方法所产生的任意形状闭合曲线的符号距离函数

表 1 是直接法、Fast Marching 法和本文方法构造 SDF 的计算时间对比, 表中的方差为其它两种方法所得 SDF 与直接法的 SDF 之间的平均方差. 由表中可见, 本文方法的计算速度最快, 且计算精度与直接法相差非常小, 精度很高; 另外, 本文方法和轮廓线的长度没有直接关系, 这样就不会出现类似直

接法中当轮廓线较长时计算变慢的现象. 另外, 本实验还测试了利用式 (8) 的偏微分方程方法来重新初始化 SDF, 实验表明, 当 SDF 出现严重变形时, 这种方法计算出来的 SDF 和实际的 SDF 有非常大的误差, 表明这种方法很不稳定.

表 1 3 种 SDF 构造方法比较

方法	网格大小	轮廓线点数	计算时间(s)	* 方差(%)
直接法	128×128	208	0.701	—
		1390	4.617	—
	256×256	361	4.807	—
		1868	24.705	—
	512×512	408	21.691	—
		2525	134.994	—
Fast Marching	128×128	208	1.032	46.811
		1390	2.494	5.430
	256×256	361	6.699	171.998
		1868	12.698	43.408
	512×512	408	45.695	484.205
		2525	86.765	109.899
最近点扫描法	128×128	208	0.11	0.005
		1390	0.100	0.015
	256×256	361	0.440	0.005
		1868	0.450	0.008
	512×512	408	1.823	0.002
		2525	1.893	0.004

注：\* 方差 表示和直接法所计算出的 SDF 之间的统计方差。

6.2 M-S 准则分割图像实验

下面的实验对比 C-V 算法和本文方法分割图像的速度与性能,比较指标是迭代次数、计算时间以及最终分割结果. 实验中,C-V 方法以及本文改进的 C-V 分割方法都采用本文提出的快速 SDF 生成算法,以提高计算速度和稳定性. 为使结果比较可靠,所有的实验中,两种方法都采用相同的参数,时间步长  $\Delta t = 0.1$ ,网格步长  $h = 1$ ,M-S 模型参数:  $\lambda_0 = \lambda_\infty = 1, v = 0$ .

迭代收敛的判断条件是  $Q = \frac{\sum_{i,j} |\phi_{i,j}^{n+1} - \phi_{i,j}^n|}{M} \leq h^2 \Delta t$ ,  $\phi_{i,j}^{n+1}$  与  $\phi_{i,j}^n$  分别为演化前后的水平集函数,  $M$  是满足  $|\phi_{i,j}^n| < h$  的网格点数日.

图 4 是对合成带噪图像(大小  $130 \times 130$ )的分割实验. 其中,图 4(a)是原始图像,图中有 3 个几何图形,其中两个有空心区域;左上角的浅色闭合曲线是初始活动轮廓线,包含左上角的目标图形. 图 4 (b)是利用 C-V 方法分割的结果,共迭代 6 次,计算时间 1.125s;图 4(c)是本文改进方法的分割结果,迭代 3 次,耗时 0.561s. 从实验结果可见,本文方法不仅迭代次数减少了,而且分割结果比 C-V 方法的好,图 4(b)中,只有左上角的目标得到了完好分割(内部区域也分割出来了),但另两个目标却没有分割出,这是由于另两个目标距初始轮廓线较远,受到了 Dirac 函数的抑制;而本文方法得到了全局的分割效果,3 个目标均完好分割出,包括内部区域.



图 4 带噪声合成图像的分割

图 5 是对胸腔 CT 图片( $217 \times 185$ )的分割,其中图 5(a)是原始图像和初始轮廓线;图 5(b)是 C-V 算法分割的结果,迭代 30 次,耗时 14.921s;图 5(c)是本文改进的 C-V 方法分割的结果,迭代仅 4 次就

收敛了,耗时 2.033s. 可见,改进方法不仅收敛快,而且分割的结果比 C-V 方法更令人满意,大部分的骨骼区域都划分出来了.

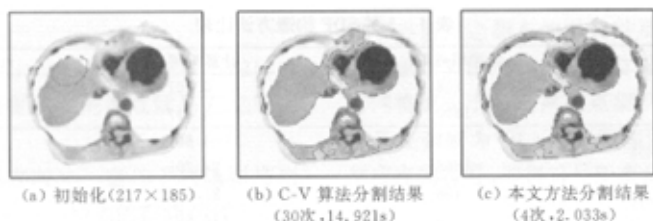


图 5 胸腔 CT 图片的分割

图 6 是对生物芯片图像中探针点阵的分割结果。生物芯片中探针点(图 5(a)中圆点)的亮度和颜色是生物化学反应强度的表征,要提取每个探针点的这些信息,关键在定位探针点位置,但是,由于探针点亮度不均匀,背景噪声很大,常规基于边缘分割的方法很难获得较理想的结果。由于 M-S 模型是基于空间和灰度的信息模型,因此,很适合作探针点的分割应用。图 6(a)就是一幅灰度化后的芯片图像,白色曲线为初始活动轮廓线,为了突出本文方法分割的全局性,故意将轮廓线仅包含一部分探针点。图

6(b)是基于图 6(a)初始化条件下,用 C-V 方法做的分割,可见,C-V 方法只能分割出初始轮廓线内部以及周围很窄范围内的探针点,不能将全图的探针点都分割出来;要分割全部探针点,必须使初始轮廓线包含整幅图,这种初始化方法将大大增加达到收敛的迭代次数。图 6(c),(d)是利用本文改进方法做的分割结果,其中图 6(c)是仅迭代一次的结果,就分割出了很多探针点;图 6(d)是最终分割结果,仅 5 次迭代,耗时 11.056s。

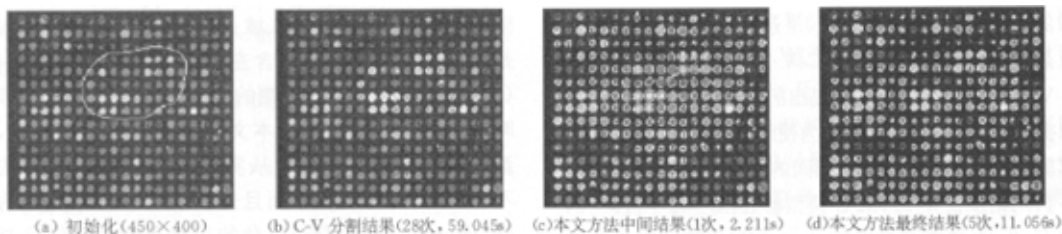


图 6 生物芯片探针矩阵点的分割

## 7 结 语

本文对基于 Mumford-Shah 模型的 C-V 方法的拉格朗日-欧拉偏微分方程解做了改进,提高了 Mumford-Shah 模型的全局优化性能,降低了能量函数优化过程所需的迭代次数。另外,针对水平集方法,提出了一种快速构造符号距离函数的方法,这种方法不仅计算速度快,精度高,而且很稳定。对合成图像、CT 图像和生物芯片图像的分割结果证明了本文方法具有快速收敛,耗时短、全局优化的特点,非常适合于生物医学领域中的图像分割问题。

## 参 考 文 献

- 1 Kass M, Witkin A, Terzopoulos D. Snakes: Active contour models. *International Journal of Computer Vision*, 1988, 1

- (4); 321—332
- 2 Cohen L D. On active contour models and Balloons. *CVGIP: Image Understanding*, 1991, 53(2): 211—218
- 3 Osher S, Sethian J A. Fronts propagating with curvature-dependent speed; Algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations. *Journal of Computational Physics*, 1988, 79(1): 12—49
- 4 Sethian J A. *Level Set Methods and Fast Marching Methods: Evolving Inter Faces in Computational Geometry, Fluid Mechanics, Computer Vision, and Materials Science*. Longdon: Cambridge University Press, 1999
- 5 Malladi R, Sethian J A, Vemuri B C. Shape modeling with front propagation: A level set approach. *IEEE Trans Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1995, 17(2): 158—175
- 6 Caselles V, Kimmel R, Sapiro G. Geodesic active contours. *International Journal of Computer Vision*, 1997, 22(1): 61—79
- 7 Siddiqi K, Lauziere Y B, Tannenbaum A *et al.* Area and length minimizing flows for shape segmentation. *IEEE Trans Image Processing*, 1998, 7(3): 433—443
- 8 Paragios N, Deriche R. Geodesic active contours and level sets



- for the detection and tracking of moving objects. *IEEE Trans Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2000, 22(3): 266—280
- 9 Alvarez L, Lions P-L, Morel J-M. Image selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion II. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 1992, 29(3): 845—866
  - 10 Bertalmio M, Sapiro G, Caselles V *et al.* Image inpainting. In: *Proc SIGGRAPH'2000*, New Orleans, 2000, 417—424
  - 11 Faugeras O, Keriven R. Variational principles, surface evolution, PDE's level set methods, and the stereo problem. *IEEE Trans Image Processing*, 1998, 7(3): 336—344
  - 12 Mumford D, Shah J. Optimal approximation by piece wise smooth functions and associated variational problems. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 1989, 42(5): 577—685
  - 13 Chan F T, Vese L. Active contours without edges. *IEEE Trans Image Processing*, 2001, 10(2): 266—277
  - 14 Tsai Y H. Rapid and accurate computation of the distance function using grids. *UCLA Mathematics Department, UCLA CAM Report*, 00-36, 2000
  - 15 Li Jun. Curve evolution based image segmentation and applications [Ph D dissertation]. Shanghai Jiaotong University, Shanghai, 2001 (in Chinese)  
(李 俊. 基于曲线演化的图像分割方法及应用[博士学位论文]. 上海交通大学, 上海, 2001)



man-machine interaction, and embedded systems, and so on.

**LI Jun**, male, born in 1972, Ph. D. . He is a senior engineer at China Research Center (Shanghai). Motorola Labs. His current research interests include PDE applications in image processing, image matching, motion analysis, handwriting recognition, OCR, human-machine interaction, and embedded systems, and so on.

**YANG Xin**, male, Ph. D. , professor. His current research interests include partial differential equation in image procession, detection of motion objects in time sequence images, Image matching and computer graphics.

**SHI Peng-Fei**, male, professor. His research interests include image analysis and understanding, computer vision and intelligent system.