

首都师范大学

硕士学位论文

基于离散能量泛函变分的图像去噪

姓名：孙洁

申请学位级别：硕士

专业：计算数学

指导教师：王风

20080430

摘 要

数字图像处理是数学科学和计算机技术相融合的一门新兴学科, 图像的去噪一直是该学科的研究热点。近年来偏微分方程在图像去噪中的应用日益受到数学界与图形图像界研究人员的广泛关注。所使用的偏微分方程主要有两个来源: 一个是直接构造, 它们大多来自用于描述物理现象的偏微分方程。另一个就是通过变分途径来获取某一能量泛函的欧拉-拉格朗日方程, 以此来构造所需的偏微分方程。最近几年来第二种方法得到了广泛的应用, 本文首先对一些经典的去噪模型进行了介绍, 对各种模型的优缺点进行一些分析比较。作者的主要研究工作是通过变分途径来构造去噪模型。通常的方法是通过连续能量泛函进行变分来构造微分方程模型, 然后通过离散求解偏微分方程来进行图像去噪。而本文将具有普遍意义的一类连续能量泛函离散化, 然后对离散能量泛函进行变分构造去噪模型。对所获得的非线性方程组推导出显式迭代格式, 并通过数值实验证实了推广模型去噪的有效性和与偏微分方程模型相比的高效性。

关键词: 图像去噪, 偏微分方程, 变分方法, 离散能量泛函

Abstract

Digital image processing is a new discipline which combines mathematical science with computer technology. Image denoising is one of the researching focus in this field. Recently the application of Partial Differential Equations (PDEs) in image denoising is commonly concerned by researchers in the areas of mathematics, graphics and images. The PDEs used are usually constructed by two approaches. One method is to construct PDEs directly, which always describe physical phenomena. The other method is to construct PDEs from the Euler-Lagrange equation of an energy functional by variational approach. The latter is widely used in recent years. This thesis first surveys some classical models. The strengths and weaknesses of each model is analyzed and commented. Our main work is to establish denoising model based on variational technique. The common routine is to construct PDE models by the variation of continuous energy functional and to discretize the obtained PDEs to denoising images. In this thesis, we discretize a generic continuous energy functional and construct denoising model by variational calculus. Explicit iteration scheme for solving the nonlinear system of equations is derived. Numerical experiments are carried out to verify the effectiveness of the generalized model and the efficiency compared with PDE models.

Keywords: Image denoising, partial differential equations, variational method, discrete energy functional

首都师范大学学位论文原创性声明

本人郑重声明：所呈交的学位论文，是本人在导师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果。除文中已经注明引用的内容外，本论文不含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的作品成果。对本文的研究做出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式标明。本人完全意识到本声明的法律结果由本人承担。

学位论文作者签名：孙浩

日期：08年5月4日

首都师范大学学位论文授权使用声明

本人完全了解首都师范大学有关保留、使用学位论文的规定，学校有权保留学位论文并向国家主管部门或其指定机构送交论文的电子版和纸质版。有权将学位论文用于非赢利目的的少量复制并允许论文进入学校图书馆被查阅。有权将学位论文的内容编入有关数据库进行检索。有权将学位论文的标题和摘要汇编出版。保密的学位论文在解密后适用本规定。

学位论文作者签名：孙浩

日期：08年5月4日

第一章 引言

§1.1 数字图像处理

图像是自然界景物的客观反映，图像处理技术是人类认识世界和改造世界的重要工具之一。随着计算机和网络技术的迅速发展，今天我们面对的大部分图像是离散化的，并且以数字的形式存储在计算机中，这样的图像我们称为数字图像。在计算机中对数字图像的处理和操作我们称为数字图像处理。

图像处理技术的内容非常丰富，根据抽象程度和研究方法等的不同可以分为三个层次：图像处理、图像分析和图像理解^[1]。低层的图像处理着重强调在图像之间进行的变换，如对图像进行加工改善图像的视觉效果，或对图像进行压缩编码以满足所需存储的空间、传输时间或传输通路的要求。作为中层的图像分析主要是对图像中感兴趣的目标进行检测和测量，以获得它们的客观信息从而建立对图像的描述，它是一个从图像到数据的过程。最高层的图像理解是在图像分析的基础上，进一步研究图像中各个目标的性质及其相互联系，并得出对图像内容含义的理解以及对原来客观场景的解释，从而指导和规划行为。在本文中我们主要考虑的是低层图像处理，对于低层的图像处理包含两个主要内容：图像增强和图像复原。图像增强技术的目的是将被模糊的图像的细节或者图像中感兴趣的部分显现出来。而图像复原是以图像退化的数学或概率模型为基础，通过退化现象的某种先验知识来重建、复原已经退化的图像。本文考虑的就是这样一个问题，即将一个被噪声污染的图像更好的还原。

§1.2 基于偏微分方程的图像去噪方法

基于偏微分方程的图像处理方法在图像的中底层处理中获得了广泛的认可与应用，例如图像增强、图像去噪、图像尖锐化、直方图均衡化、图像分割、边缘检测、图像修补等，现已有许多专著出现，例如文献 [2,3,4,5] 等。可以毫不夸张的说，将偏微分方程引入图像处理，是该领域的一场革命。其中偏微分方程在去噪中的应用成果最为丰富，从经典的热传导方程到现在的许多其他方程，已经极

大的改进了去噪方法,改善了去噪效果。

图像去噪中使用的偏微分方程主要有两个来源,一个是直接构造,然后进行实验,再对模型进行修改,例如热传导方程及其修正模型,我们称这种方法为直接方法。这种方法在确定扩散系数时有很大的选择空间,在向前扩散的同时具有向后扩散的功能,所以具有平滑图像和将边缘尖锐化的能力。但是这种方法是病态问题在实际应用中不稳定。

第二种方法是通过变分的途径获取某一能量泛函的欧拉-拉格朗日方程,然后构造所需的偏微分方程,必要时可对所得的模型进行改造。图像去噪的变分模型将图像看成是一个能量系统,并认为没有噪声的图像是较平滑的,相应的能量也最小;当图像被噪声污染后图像就变得不光滑,其能量也相应的增大很多。图像去噪的途径就是寻找一个能量泛函,然后在一些对于具体问题得到的约束条件约束下,最小化图像系统的能量。当图像系统的能量达到最小化状态时,图像的噪声就被去除了。这样图像去噪的问题就转化为一个能量最小化问题,通过变分法来求解。这里的能量估计很重要,不同的人从不同的观点出发就得到不同的模型。这种方法比直接构造方法稳定,并且具有明确的理论解释。

§1.3 本文的研究工作

本文研究的是基于变分方法来进行图像的去噪。一般的基于变分方法的图像去噪考虑的是连续的情况,而本文研究的是离散的情况。对能量泛函进行离散化,这样不但提高了运算的效率同时避免了通过连续能量得到的方程离散化困难的问题,而且能很大程度的提高运算的效率。并且通过实验作出了验证。

本文的章节结构安排如下:

第一章,引言。介绍了问题的背景,和图像处理的基本知识。

第二章,基于直接构造方法的偏微分方程模型。介绍经典的基于直接构造方法得到的图像去噪的偏微分方程的模型,以及进一步改造模型并分析他们的优缺点。

第三章,基于变分方法的偏微分方程模型。介绍经典的基于变分方法的偏微

分方程模型，以及基于这些模型的进一步的改造的模型并分析他们的优缺点。

第四章，数字全变差 (DTV) 模型及其推广。介绍 DTV 模型这种基于离散能量泛函的模型，并且给出了它的推广形式。给出实验结果。

最后对全文进行总结。

第二章 基于直接构造方法的偏微分方程模型

热传导方程是最经典的用于图像去噪的基于直接构造方法的偏微分方程模型。很多经典的偏微分方程去噪模型都是根据热传导方程改进而来的。这里假设原始图像或未经噪声污染的图像为 $u(\mathbf{x})$ ，所观察到的或污染后的图像为 $u^0(\mathbf{x})$ ，在只有噪声的假设下有

$$u^0(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}) + n(\mathbf{x}). \quad (2.1)$$

成立。这里 $n(\mathbf{x})$ 假设为加性高斯噪声，并且 $\int_{\Omega} n(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0$ 和 $\int_{\Omega} (n(\mathbf{x}))^2 d\mathbf{x} = \sigma^2$ 成立，即噪声的均值为 0，方差为 σ^2 ，其中 σ 已知或通过其他途径估出，如统计方法等。图像定义域的边界 $\partial\Omega$ 的外单位法向为 $\mathbf{n} = (n^1, n^2)$ 。图像去噪的目的就是由 u^0 尽可能的恢复 u ，在去除噪声的同时，尽量保持图像的特征，例如边界、棱角等。

用于图像去噪的热传导方程如下：

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u = \operatorname{div}(\nabla u), \\ u(\mathbf{x}, 0) = u^0(\mathbf{x}), \end{cases} \quad (2.2)$$

方程 (2.2) 的解可以表示为高斯函数与 $u_0(\mathbf{x})$ 的卷积^[6]，即 $u(\mathbf{x}, t) = G_t(\mathbf{x}) * u^0(\mathbf{x})$ ，其中 $G_t(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi t} \exp(-\frac{\|\mathbf{x}\|^2}{4t})$ 是标准差为 $\sqrt{2t}$ 的二维高斯函数。图像处理中 $G_t(\mathbf{x})$ 也称为高斯滤波器，它是图像处理中使用最多的平滑方法。

这种扩散方程由于其各向同性的均匀扩散性，所有点的像素值以相同的速度向周围扩散。但是在噪声均匀地向周围扩散的同时，图像的边界也在向周围扩散，两个物体相邻区域的颜色相互融合越来越模糊，从而产生较严重的失真。

§2.1 非均匀线性扩散方程模型

要改进均匀扩散的高斯滤波带来的缺点，一个自然的想法就是考虑利用图像结构的先验信息，减少在边缘处的扩散以在去噪的同时更好地保持边缘。一个简单的思路就是将梯度算子作为边缘检测算子，构造的扩散系数为原始图像梯度的

函数, 在梯度小的地方 (图像的平坦处) 具有较大的扩散系数, 而在梯度大的地方 (边缘处) 具有很小的扩散系数。因而它能够有效地去除平坦处的噪声, 而保留边缘不变, 这种方程我们称为非均匀线性扩散方程^[7]。

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(c(\|\nabla u^0\|^2)\nabla u), \\ u(\mathbf{x}, 0) = u^0(\mathbf{x}), \end{cases} \quad (2.3)$$

扩散系数取为噪声图像 u^0 的梯度 $\|\nabla u^0\|$ 的非线性函数, 例如:

$$c(\|\nabla u^0\|^2) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\|\nabla u^0\|^2}{\lambda^2}}},$$

其中 λ 为一阈值。该模型的优点是: 根据 $\|\nabla u^0\|$ 的大小来判断边缘, 能较好的保持边缘, 减少对边缘处的模糊。缺点是: 第一, 它依据原始图像的梯度来判断边缘, 这种判断无疑会受到噪声的影响而产生偏差。第二, 它在边缘处的扩散系数取得很小, 这实际上相当于没有对边缘处的噪声进行处理, 因而边缘处的噪声几乎保持不变。

因此, 人们逐渐将一般的扩散方程推广到不均等的线性扩散方程和各向异性的非线性扩散方程, 从而实现像素值在各个方向的异性扩散。在边界点上像素值的扩散速度小于非边界点, 这样在非边界区域平滑的过程中, 边界上各点的像素值扩散的幅度会小于其他像素。因此确保了方程在边缘处具有较小的扩散速度, 而在其他地方具有较快的扩散速度, 从而有效保持边界, 保存细节。

§2.2 P-M 非线性扩散模型

为解决非均匀线性扩散方程中的问题, Perona 和 Malik^[8] 提出了一种非线性扩散方程 (P-M 非线性扩散模型), 模型为:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(c(\|\nabla u\|)\nabla u), \\ u(\mathbf{x}, 0) = u^0(\mathbf{x}), \end{cases} \quad (2.4)$$

这里 $c(\cdot) > 0$ 是非增函数, 称为扩散系数。Perona 和 Malik 给出了两个这样的扩散系数: $c(s) = e^{-(\frac{s}{\lambda})^2}$ 和 $c(s) = \frac{1}{1+(\frac{s}{\lambda})^2}$, 其中常数 λ (为阈值) 可以预先设置, 也

可以随着图像每次迭代的结果的变化而变化,它和噪声的方差有关。事实上,该模型可以通过选取密度函数 (3.1) 中的 $F = \int_0^{\|\nabla u\|} sc(s)ds$ 而得到。

P-M 模型的优点:由 $c(\cdot)$ 的性质可得方程 (2.4) 在图像梯度较大的地方扩散较小;而在图像梯度较小的地方扩散较大。这样就可以在滤除噪声的同时一定程度上保持边界,而且可以在迭代的过程中不断地根据最近一步所获得的图像梯度作为边缘检测子,因而能减少噪声对边缘检测的影响。模型的缺点: P-M 模型的平滑效果较差,容易造成图像积块现象或称阶梯现象,即图像处理某些区域内灰度值相同。区域内灰度值相等,表示该区域任意一点像素的一阶导数为零。这说明随着迭代次数的增加图像会向分块等灰度值图像过渡,那么图像看上去就像是由各个不同亮度的区域组成,图像的轮廓会显得过分尖锐;而且这种方法依然没有解决边缘上的噪声处理问题,边界的保持效果并不理想。

在 P-M 模型中是用像素点的梯度大小和梯度门限来做比较决定是否对该点进行扩散。如果该点的梯度幅度大于门限 (P-M 模型中的扩散系数中的 λ), 那么在迭代过程中其幅值将随着迭代次数增加而增强,达到锐化边缘的作用,如果梯度的幅值太小,在迭代过程中,信号的不平坦将被平滑掉。理论上有些噪声具有无限大的梯度。因此梯度大小不足以作为区分噪声和区域边界的标准,一个常用的方法就是先对图像进行平滑,降低噪声点的梯度,而强的灰度阶越被保留下来,这样再运用 P-M 方程进行滤波就能起到较好的效果。1992 年, Catté, Lions, Morel 和 Coll^[9] 提出方程:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(c(\|\nabla G_\tau * u\|)\nabla u), \\ u(\mathbf{x}, 0) = u^0(\mathbf{x}), \end{cases}$$

其中 G_τ 为上述高斯函数, τ 为滤波尺度,函数 $c(\cdot)$ 满足的条件与 P-M 模型一致。我们称此模型为 CLMC 模型。此方程引入了函数 u 和高斯函数 G_τ 的卷积,来消除噪声导致的无界算子的影响,故能达到比 P-M 模型更好的去噪效果。不足的是当参数 $\tau \rightarrow 0$ 时,此模型可能不稳定。

对 P-M 模型还有很多其他的改进方式,例如张量型扩散方程模型^[10, 11, 12, 13]以及复扩散模型^[14]与前向后向扩散模型^[15]等。

第三章 基于变分方法的偏微分方程模型

基于变分方法进行图像处理，就是首先通过对初始问题的分析得到一个泛函的能量最小化问题。然后运用变分原理导出欧拉 - 拉格朗日方程，引入时间变量，用梯度下降法得到偏微分方程。在连续意义下，一幅定义在区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 上的灰度图像可以用函数表示为

$$\begin{aligned} u : \Omega &\rightarrow [0, 1] \subset \mathbb{R} \\ u : \mathbf{x} = (x^1, x^2) = (x, y) &\rightarrow u(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

同样假设原始图像或未经噪声污染的图像为 $u(\mathbf{x})$ ，所观察到的或污染后的图像为 $u^0(\mathbf{x})$ ，噪声模型为 (2.1)。

对函数 $f \in C^2(\Omega)$ ，我们使用 $f_\alpha = \frac{\partial f}{\partial x^\alpha}$, $\alpha = 1, 2$ 表示偏导数， $\nabla f = (f_1, f_2)^T$ 表示 f 的梯度， $\nabla^2 f = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{21} \\ f_{12} & f_{22} \end{pmatrix}$ 表示函数 f 的海森矩阵。使用 $\Delta f = f_{11} + f_{22}$ 表示函数 f 的拉普拉斯。对向量 $\mathbf{v} = (v^1, v^2)^T$ ，定义其散度为 $\text{div}(\mathbf{v}) = (v^1)_1 + (v^2)_2$ 。在无特殊说明的情况下向量的内积与范数使用符号 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 和 $\|\cdot\|$ 表示，函数空间中的范数用下标表示，例如 $\|f\|_{L^1}$, $\|f\|_{L^2}$ 等。

这里考虑的能量泛函是由密度函数

$$F(\mathbf{x}, u(\mathbf{x}), \nabla u(\mathbf{x}), \nabla^2 u(\mathbf{x})) \quad (3.1)$$

诱导的，即

$$\mathcal{F}(u) = \int_{\Omega} F(\mathbf{x}, u(\mathbf{x}), \nabla u(\mathbf{x}), \nabla^2 u(\mathbf{x})) d\mathbf{x}. \quad (3.2)$$

在合适的函数空间内，可求得其欧拉-拉格朗日方程为 [16]：

$$F_u(\cdots) - \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x^i} F_{u_i}(\cdots) + \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} F_{u_{ij}}(\cdots) = 0, \quad (3.3)$$

其中 $(\cdots) = (\mathbf{x}, u(\mathbf{x}), \nabla u(\mathbf{x}), \nabla^2 u(\mathbf{x}))$ 。为使用演化技术，给图像增加一个尺度参数 t (通常表示时间)，即图像 u 除了依赖位置之外，还依赖于参数 t 。于是可构造

如下演化方程

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = -F_u + \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x^i} F_{u_i} - \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} F_{u_{ij}}, \\ u(\mathbf{x}, 0) = u^0(\mathbf{x}). \end{cases} \quad (3.4)$$

在方程的解有意义的情况下, 所有的 $u(\mathbf{x}, t) (t \in [0, +\infty))$ 构成一尺度空间, 即 $\mathcal{X} = \{u(\mathbf{x}, t); t \in [0, +\infty)\}$ 。在此变分模型基础之上, 还可以进行适当修改以满足各种需要。下节中除了介绍原始模型外, 还考虑了一些变体模型。注意 (3.3) 与 (3.4) 中符号的区别, 原因是能量 (3.2) 的一阶变分为能量正增长的速度, 取负号是为了使能量减少。

§3.1 极小化全变差模型 (ROF 模型)

1992 年, Rudin, Osher 和 Fatemi^[17,18] 对基于偏微分方程的变分模型做出了里程碑式的工作, 建立了使全变差 (Total Variation) 极小的 ROF 模型。这种基于全变差的图像去噪方法是目前应用最广泛的图像恢复模型之一, 它不但取得了很好的去噪效果而且还能很好的保持图像的边缘。该模型使用的能量泛函为:

$$\mathcal{F}(u) = \int_{\Omega} \|\nabla u\| dx + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} (u - u^0)^2 dx, \quad (3.5)$$

这里 λ 为 Lagrange 松弛因子。这个能量泛函由两部分构成: 第一项 $\int_{\Omega} \|\nabla u\| dx$ 是对图像能量的估计, 起到平滑的作用, 一般称为正则项。第二项 $\frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} (u - u^0)^2 dx$ 反映了被恢复图像与含噪声图像之间的距离 (或差别), 起到使恢复前与恢复后的图像保持一定距离的作用, 所以我们称之为保真项。参数 λ 就起到了平衡第一项和第二项的作用, 随着 λ 的增大求出的 $u(\mathbf{x})$ 越接近 $u^0(\mathbf{x})$ 。该能量泛函对应的欧拉-拉格朗日方程为:

$$\operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\|\nabla u\|} \right) + \lambda(u^0 - u) = 0. \quad (3.6)$$

其对应的演化方程即 ROF 模型为

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\|\nabla u\|} \right) + \lambda(u^0 - u), \\ u(\mathbf{x}, 0) = u^0(\mathbf{x}). \end{cases} \quad (3.7)$$

令 $\lambda = 0$ 就得到 Osher-Rudin TV 扩散模型或者加权平均曲率驱动^[19,18]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\|\nabla u\|} \right).$$

在 (3.6) 式中, 由于在平的区域 $\|\nabla u\|$ 的值为零, 而 $\|\nabla u\|$ 的值又在分母上, 为避免分母为零而导致无法计算的情况出现, 要将 (3.6) 式中的 $\|\nabla u\|$ 规范化:

$$\|\nabla u\|_a = \sqrt{\|\nabla u\|^2 + a^2}. \quad (3.8)$$

这里 a 为一个小的正参数。这样修改后的欧拉—拉格朗日方程 (3.6) 对应的能量泛函则为:

$$\mathcal{F}_a(u) = \int_{\Omega} \|\nabla u\|_a dx + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} (u - u^0)^2 dx.$$

这个模型的处理结果很好, 但同时也存在一些难以克服的问题:

1. 模型只对小梯度的高斯噪声有效, 而对梯度很大的脉冲噪声无能为力。因为理论上说, 在孤立的脉冲噪声点处, 无论在哪个方向上梯度模 $\|\nabla u\| \rightarrow \infty$, 因此各个方向的扩散系数 $\frac{1}{\|\nabla u\|} \rightarrow 0$, 从而扩散方程在任何方向都不进行扩散, 也就无法消除脉冲噪声了;
2. 前面我们提到模型中的保真项能迫使方程的稳定解近似接近给定的图像初值, 避免过多的平滑。 λ 的值越大, 保真项的作用越大, 算法的解就越接近初值。 λ 的值越小, 扩散项作用就越大, 图像就越平滑。时间参数 t 可以看作是图像的尺度参数, 随着时间 t 的增大, 图像的细节逐渐减少, 变得更平滑和简单。那么 λ 应该怎样来取值是一个问题。
3. 对于分段连续图像, 模型会随着求解偏微分方程的迭代次数的增加使图像的噪声彻底消除但同时也使图像各个分段的灰度值向常数过渡, 即前面提到过的阶梯现象。随着迭代次数的进一步增加, 各分段之间的灰度值也会向同一常数值过渡。最后, 整幅图像变成同一灰度值的平凡图。尽管模型中保真项的作用可以使图像不会演化为灰度同一的平凡图, 但是阶梯现象是不能抑制的。产生阶梯现象的根本原因是模型在图像的平滑区域会有较强的扩散, 它

们把图像渐变区域也扩散为平坦区域,从而消除了区域间的自然、平缓过渡,区域越平滑扩散就越强,最终导致图像转化为一些局部常数区域。

解决以上的问题就成为接下来研究的目标之一,出现了很多对 ROF 模型改进的模型。

增强的全变差模型 (Improved Total Variation, ITV 模型):

为了抑制 ROF 模型中产生的阶梯现象, Marquina 和 Osher 提出了 ITV 模型^[20, 21],就是在 TV 模型中乘一个因子 $\|\nabla u\|$, 即

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \|\nabla u\| \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\|\nabla u\|} \right) + \lambda \|\nabla u\| (u^0 - u). \quad (3.9)$$

因为只有在平的区域时 $\|\nabla u\|$ 为零,所以 (3.9) 式与 ROF 模型 (3.7) 有相同的解。在文献 [21] 中列出了这一改进带来的许多优点,如它可以更好的保持精细结构以及可以更有效的抑制阶梯现象等,并且通过实验表明 (3.9) 式是能够很好的抑制阶梯现象的。

全变差精细模型 (Iterated Total Variation Refinement, ITVR 模型):

为尽量保持图像中的细节, Osher 等人提出了 ITVR 模型^[22]。一般在应用 ROF 模型及其变体去噪时,噪声图像 $u^0(\mathbf{x})$ 与恢复的图像 $u(\mathbf{x})$ 的差 $u^0(\mathbf{x}) - u(\mathbf{x})$ 都直接丢弃了,但是其中不但有噪声还有图像中的精细结构的信息。该模型就是通过噪声图像与恢复的图像的差来保持图像细节。算法的步骤是:首先求解一般的 ROF 模型

$$u^1 = \arg \min_{u \in BV} \left\{ \int_{\Omega} \|\nabla u\| d\mathbf{x} + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} (u^0(\mathbf{x}) - u(\mathbf{x}))^2 d\mathbf{x} \right\},$$

BV 是有界变差函数空间^[4, 23], 定义为

$$BV(\Omega) = \{u \in L^1(\Omega); \int_{\Omega} |Du| < +\infty\},$$

其中

$$\int_{\Omega} |Du| = \sup \left\{ \int_{\Omega} u \operatorname{div} \varphi d\mathbf{x}; \varphi = (\varphi^1, \varphi^2) \in C_0^1(\Omega, \mathbb{R}^2), |\varphi|_{L^\infty(\Omega)} \leq 1 \right\},$$

这里 $\operatorname{div} \varphi = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial \varphi^i}{\partial x^i}$, $|\varphi|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{\mathbf{x}} \sqrt{\sum_{i=1}^2 (\varphi^i(\mathbf{x}))^2}$, $C_0^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$ 是具有紧支集的连续可微函数空间。然后做修正步, 得到:

$$u^2 = \arg \min_{u \in BV} \left\{ \int_{\Omega} \|\nabla u\| dx + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} (u^0(\mathbf{x}) + n^1(\mathbf{x}) - u(\mathbf{x}))^2 dx \right\},$$

这里 n^1 是由第一步得到的噪声估计: $u^0(\mathbf{x}) = u^1(\mathbf{x}) + n^1(\mathbf{x})$ 。修正步就是将由第一步得到的噪声估计加到初始的图像中去。由此可得计算 u^{k+1} 就是最小化下面的修正项

$$u^{k+1} = \arg \min_{u \in BV} \left\{ \int_{\Omega} \|\nabla u\| dx + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} (u^0(\mathbf{x}) + n^k(\mathbf{x}) - u(\mathbf{x}))^2 dx \right\}$$

这里 $u^0 + n^k = u^{k+1} + n^{k+1}$ 。当 $k \rightarrow \infty$, u^k 在 L^2 空间单调收敛于噪声图像 u^0 。所以选择适当的迭代停止条件很重要, 一般取 $\|u^k - u\|^2 \leq \sigma^2$ 。

ABO 模型:

为了克服 ROF 模型对于去除脉冲噪声没有作用这一缺点, 2006 年 K. Joo 和 S. Kim 提出了一个混合模型 [24]

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \|\nabla u\|^\alpha \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\|\nabla u\|_a^{1+\omega}} \right) + \beta(u^0 - u), & \alpha, \beta, \omega \geq 0, \\ u(\mathbf{x}, 0) = u^0(\mathbf{x}), \end{cases} \quad (3.10)$$

其中 $\|\nabla u\|_a$ 是 $\|\nabla u\|$ 的规范化 (3.8), 该模型称为 $\alpha\beta\omega$ (ABO) 模型。当 $\alpha = 0$ 时退化为 ETVM (加强的最小全变差, Enhanced Total Variation Model) 模型 [25], 即

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\|\nabla u\|_a^{1+\omega}} \right) + \beta(\mathbf{x}, t)(u^0 - u), & \beta, \omega \geq 0, \\ u(\mathbf{x}, 0) = u^0(\mathbf{x}), \end{cases}$$

其中 $\beta(\mathbf{x}, t)$ 是一个可变参数。当 $\alpha = 1$, $\omega = 0$, $\beta = 0$ 时为 MCM (mean curvature motion, 平均曲率驱动) 模型 [26], 即

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \|\nabla u\| \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\|\nabla u\|} \right), \\ u(\mathbf{x}, 0) = u^0(\mathbf{x}), \end{cases}$$

平均曲率驱动模型对脉冲噪声特别有效。使用 ABO 模型 (3.10) 可以去除高斯和脉冲的混合噪声, 开始时选择 $\alpha = 1$, $\omega = 0$, $\beta = 0$ 模型即为平均曲率驱动模型, 去除脉冲噪声。然后再设置 $\alpha = 0$ 即为 ETVM 模型, 去除高斯噪声。这里算法中参数 α, β, ω 的选择对于算法的去除各种类型的混合噪声的能力至关重要。对这些参数的取法也有相当多的研究 [25]。

凸凹各向异性扩散模型 (convex-concave anisotropic diffusion, CCAD 模型):

S. Kim 在 [27] 中将噪声模型 (2.1) 改写成

$$u^0 = u + g(u)v,$$

其中 $g(u)v$ 定义为噪声, 这里 v 的均值为 0。 $g(u) = 1$ 为高斯噪声, $g(u) = \sqrt{u}$ 为超声图像中的斑点噪声。考虑的能量泛函 $\mathcal{F}(u)$ 为

$$\mathcal{F}(u) = \int_{\Omega} \rho(\|\nabla u\|) dx + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} \left(\frac{u^0 - u}{g(u)} \right)^2 dx,$$

其中 ρ 是一个增函数 (经常是凸函数)。由该能量泛函诱导的欧拉-拉格朗日方程为

$$\operatorname{div} \left(\rho'(\|\nabla u\|) \frac{\nabla u}{\|\nabla u\|} \right) + \lambda \phi(u)(u^0 - u) = 0, \quad (3.11)$$

其中 $\phi(u) = \frac{g(u) + (u^0 - u)g'(u)}{g(u)^3}$ 。取 $\rho(x) = x^{2-q}$, 与 ITV 模型类似, Kim 在 (3.11) 的两边同乘以 $\|\nabla u\|^q$ 后, 构造如下的演化方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \|\nabla u\|^q \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\|\nabla u\|^q} \right) = \beta(u^0 - u),$$

其中 $\beta = \lambda \phi(u) \|\nabla u\|^q / (2 - q)$ 。这个模型称为 CCAD 模型。当 $q \in [0, 2)$ 时, 该模型可以使用一个稳定的数值算法来实现。CCAD 模型不但可以去除高斯噪声而且可以去除超声图像中的斑点噪声。在数值上已经证明当 $1 < q < 2$ 时, CCAD 模型是优于 ITV 模型 ($q = 1$ 时) 的。

§3.2 高阶模型

You-Kaveh 模型:

2000 年 Y. You 和 M. Kaveh^[28] 考虑了使用高阶的模型来进行保特征去噪, 同样要抑制阶梯现象的产生, 使用的能量泛函为

$$\mathcal{F}(u) = \int_{\Omega} \rho(\|\Delta u\|) dx.$$

这是基于 Laplace 算子的模型。当 $\Delta u = 0$ 时图像只是一个平面, 但不一定是水平平面, 图像的轮廓也会平缓许多。此模型最大的优点就是用分段斜面 (对于平面曲线是分段斜线) 来近似边界, 从而消除了二阶非线性扩散方程所造成的积块或阶梯现象, 可以得到与原图像更加逼近的复原图像。由变分方法得到欧拉-拉格朗日方程

$$\Delta(\rho'(\|\Delta u\|) \frac{\Delta u}{\|\Delta u\|}) = 0.$$

相应的演化方程是一个四阶偏微分方程

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = -\Delta(c(\|\Delta u\|)\Delta u), \\ u(\mathbf{x}, 0) = u^0(\mathbf{x}), \end{cases}$$

其中函数 $c(s)$ 是正的非增函数, 满足 $c(s) = \frac{\rho'(s)}{s}$, 且 $\rho(s)$ 是非负非减函数。在这个方程中 You 和 Kaveh 取 $c(s) = \frac{1}{1+(\frac{s}{k})^2}$, 从而 $\rho(s) = \frac{k^2}{2} \ln[1 + \frac{s^2}{k^2}]$, 其中 k 为常数。也可以取 $c(s) = e^{-(\frac{s}{k})^2}$ 。这个模型在图像去噪方面得到了很好的效果, 但是它在滤除本来是平滑区域的噪声时会造成不平整的现象, 同时对于脉冲噪声它没有去除能力。

LLT 模型:

挪威学者 Lysaker, Lundervold 和 Tai 在 2003 年提出一个四阶模型来克服阶梯现象, 称为 LLT 模型^[29]。该模型使用的能量泛函为

$$\mathcal{F}(u) = \int_{\Omega} \|\nabla^2 u\|_F dx + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} (u - u^0)^2 dx, \quad (3.12)$$

其中 $\|A\|_F$ 为矩阵 $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 的 Frobenius 范数, 即 $\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2}$. 于是由变分方法得到的欧拉-拉格朗日方程为

$$\left(\frac{u_{xx}}{\|\nabla^2 u\|}\right)_{xx} + \left(\frac{u_{xy}}{\|\nabla^2 u\|}\right)_{xy} + \left(\frac{u_{yx}}{\|\nabla^2 u\|}\right)_{yx} + \left(\frac{u_{yy}}{\|\nabla^2 u\|}\right)_{yy} + \lambda(u - u^0) = 0.$$

则相应的演化方程为:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = -\left(\frac{u_{xx}}{\|\nabla^2 u\|}\right)_{xx} - \left(\frac{u_{xy}}{\|\nabla^2 u\|}\right)_{xy} - \left(\frac{u_{yx}}{\|\nabla^2 u\|}\right)_{yx} - \left(\frac{u_{yy}}{\|\nabla^2 u\|}\right)_{yy} - \lambda(u - u^0), \\ u(\mathbf{x}, 0) = u^0(\mathbf{x}). \end{cases}$$

该方程的边界条件很复杂而且难以离散化。该模型能在保持特征的同时较好的去除噪声并能减少阶梯现象的发生, 但离散求解比较复杂。

通过以上的介绍我们可以得出如下的结论: 对于基于变分方法的这类模型总的可以分为两类, 一类是基于梯度算子 ∇u (一阶导数), 相应的偏微分方程是二阶的; 另一类是基于二阶导数的 (如拉普拉斯算子 Δu 、曲率等), 相应的偏微分方程是四阶的。近些年来许多研究者通过理论分析揭示出四阶偏微分方程模型所拥有的特性是二阶偏微分方程所没有的, 而且在恢复平滑区域和保护细小纹理方面具有优势 [28, 29, 30, 31]。但是它在去噪效率和保护图像边缘方面却不如二阶偏微分方程模型。单独的只在二阶或高阶偏微分方程模型中寻找一种方法使之可以在高效去噪的同时恢复渐变区域、保护边缘和平滑区域, 还是比较困难的。目前结合二阶、四阶甚至是更高阶的偏微分方程模型, 研究它们的混合模型是重要的研究方向之一。

能量模型一般包含两部分内容, 一部分是用以刻画图像光滑程度的度量, 另一部分是刻画保真性的部分。一般有一个松弛因子用以平衡这两部分, 各种不同的模型关于这一平衡因子的选择虽有一定的算法或指导性原则, 但对于带噪声并无先验信息的图像, 该因子的选择是一个值得探讨的问题。演化方程一般是由能量泛函的欧拉-拉格朗日方程导出的, 其演化方向是负梯度方向。

对大部分模型, 这里只给出了初始条件, 并没有给出边界条件。一般来讲, 对二阶方程, 通常使用的边界条件是 Dirichlet 边界条件、Neumann 边界条件或周

期边界条件。对四阶方程，一般考虑 Neumann 边界条件或其变形。演化方程在进行离散求解时，迭代的终止条件并没有给出，一般是通过实验来确定所需迭代次数。对很多模型来讲，当演化方程达到稳态时，图像将变成单值图像或分片单值图像，此时图像几无价值，失去去噪的意义。但如果迭代步数过少，则去噪效果可能不理想，不能满足对图像进行中、高层处理的要求。因此，对各模型来讲选择合适的迭代步数也是至关重要的。

第四章 数字全变差 (DTV) 模型及其推广

§4.1 DTV 模型

T. Chan, S. Osher 和 J. Shen 在 ROF 模型的基础上提出了数字全变差模型^[32], 也称为 DTV 模型。这个模型基于数字域上由无向图 $[\Omega, E]$ 来进行建模, Ω 是节点 (像素) 和边集 E (相邻像素之间有一条边相连) 的有限集合, 给出 TV 模型 (4.1) 的离散显式格式。

模型所使用的能量泛函为:

$$\mathcal{F}(u) = \int_{\Omega} \|\nabla u\| dx + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} (u - u^0)^2 dx, \quad (4.1)$$

对能量泛函离散化后推导出相应的 TV 模型的离散显式格式为:

对于任意节点 $\alpha \in \Omega$,

$$u_{\alpha} = \sum_{\beta \sim \alpha} h_{\alpha\beta}(u) u_{\beta} + h_{\alpha\alpha} u_{\alpha}^0, \quad (4.2)$$

其中 $h_{\alpha\beta} = \frac{\omega_{\alpha\beta}(u)}{\lambda + \sum_{\gamma \sim \alpha} \omega_{\alpha\gamma}(u)}$, $h_{\alpha\alpha} = \frac{\lambda}{\lambda + \sum_{\gamma \sim \alpha} \omega_{\alpha\gamma}(u)}$, $\omega_{\alpha\beta}(u) = \frac{1}{\|\nabla_{\alpha} u\|_a} + \frac{1}{\|\nabla_{\beta} u\|_a}$, $\|\nabla_{\alpha} u\|_a = \sqrt{\|\nabla_{\alpha} u\|^2 + a^2}$, a 与 (3.8) 相同, 为一个小的正数, 目的是对 $\|\nabla_{\alpha} u\|$ 进行规范化。 $\beta \sim \alpha$ 表示 β 是 α 的相邻点, 这里考虑四个相邻点情况, 也可以考虑八个相邻点的情况。参数 λ 的选取可按一定的原则, 在 [32] 中给出了参考选取方式。DTV 模型是由离散能量^[33]导出的方程, 而不是由连续能量导出方程后再离散化得到的, 可以证明, 该模型是 TV 模型的数字版^[32]。大量实验表明, 该模型去除噪声 (包括高斯噪声和椒盐噪声) 效果良好, 并能很好的保持图像的细节。由于本模型是一个显式模型, 其编程非常简单, 运行效率远远高于第二章提到的对 PDE 模型进行离散求解。该模型是一个很好的去噪模型, 并且可应用于一维的不规则取样信号、二维的灰度和彩色图像以及复杂的拓扑结构的数据^[32]。

§4.2 DTV 模型的推广

我们基于 DTV 模型给出了它的推广形式并进行了推导, 下面具体介绍推导的过程:

§4.2.1 基于图的建模

§4.2.1.1 图的基本定义

数字图像 u 是一个函数 $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, 定义 $[\Omega, G]$ 为一个无向图, 其中 Ω 为每一条边的方向 G 和顶点构成的有限集合。定义顶点为 α, β, \dots (见图 4.1), 如果 α, β, \dots 被长为 r 的边连接, 我们记为 $\alpha \sim \beta$ 。这里分别使用

$$N_1 = \{\beta \in \Omega; \beta \overset{1}{\sim} \alpha\} \quad \text{and} \quad N_{\sqrt{2}} = \{\gamma \in \Omega; \gamma \overset{\sqrt{2}}{\sim} \alpha\}$$

定义 α 的 1 邻域和 $\sqrt{2}$ 邻域。对于在顶点 α 的值我们定义为: u_α 。

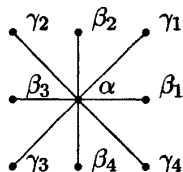


图 4.1 顶点 α 和它的相邻点

对于任意顶点 α , 定义

$$\|\nabla_g u_\alpha\| := \sqrt{\sum_{\beta \overset{1}{\sim} \alpha} (u_\beta - u_\alpha)^2 + \sum_{\gamma \overset{\sqrt{2}}{\sim} \alpha} \frac{(u_\gamma - u_\alpha)^2}{2}}.$$

这里我们考虑像素点的相邻八个点, 以此来推导和求解。

§4.2.1.2 离散化能量和方程

我们使用下面的能量泛函进行最小化

$$E(u) = \int_{\Omega} \phi(\|\nabla u\|) dx + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} (u - u^0)^2 dx, \quad (4.3)$$

离散化能量泛函则为:

$$\mathcal{E}(u) := \sum_{\alpha \in \Omega} \phi(\|\nabla_g u_\alpha\|) + \frac{\lambda}{2} \sum_{\alpha \in \Omega} (u_\alpha - u_\alpha^0)^2, \quad (4.4)$$

这里的函数 $\phi(x)$ 我们取为 ^[34] $\phi(x) = x^{2-q}, 0 \leq q < 2$ 。 $\phi(x)$ 也可以取成其他的形式, 例如 [4] 中的 $\phi(x) = \frac{x^2}{1+x^2}, \log(1+x^2), 2\sqrt{1+x^2} - 2$ 等等。对于 Lagrange 松弛因子 λ 可以预先取值 (^[20]), 也可以进行估计 (^[17, 18])。

定理 1: 对于离散化能量 (4.4), 去噪方程为

$$0 = \sum_{\beta \in N_1} (u_\alpha - u_\beta) \left(\frac{\phi'(\|\nabla_g u_\alpha\|)}{\|\nabla_g u_\alpha\|} + \frac{\phi'(\|\nabla_g u_\beta\|)}{\|\nabla_g u_\beta\|} \right) + \sum_{\gamma \in N_{\sqrt{2}}} \frac{(u_\alpha - u_\gamma)}{2} \left(\frac{\phi'(\|\nabla_g u_\alpha\|)}{\|\nabla_g u_\alpha\|} + \frac{\phi'(\|\nabla_g u_\gamma\|)}{\|\nabla_g u_\gamma\|} \right) + \lambda(u_\alpha - u_\alpha^0), \alpha \in \Omega. (4.5)$$

定理 1 的证明:

为了计算离散化能量 (4.4) 的变分, 求 $\mathcal{E}(u)$ 关于 u_α 点的导数。因为只有 $\mathcal{E}(u)$ 的 $1 + N_1 + N_{\sqrt{2}}$ 项包含有 u_α (参看图 4.1), 所以我们计算变分为:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \mathcal{E}(u)}{\partial u_\alpha} \\
&= \frac{\partial \phi(\|\nabla_g u_\alpha\|)}{\partial u_\alpha} + \frac{\partial \left(\sum_{\beta \in N_1} \phi(\|\nabla_g u_\beta\|) \right)}{\partial u_\alpha} + \frac{\partial \left(\sum_{\gamma \in N_{\sqrt{2}}} \phi(\|\nabla_g u_\gamma\|) \right)}{\partial u_\alpha} + \lambda(u_\alpha - u_\alpha^0) \\
&= \frac{\phi'(\|\nabla_g u_\alpha\|) \partial \left(\left(\sum_{\beta \in N_1} (u_\beta - u_\alpha)^2 + \sum_{\gamma \in N_{\sqrt{2}}} \frac{(u_\gamma - u_\alpha)^2}{2} \right)^{1/2} \right)}{\partial u_\alpha} \\
&\quad + \sum_{\beta \in N_1} \phi'(\|\nabla_g u_\beta\|) \frac{\partial(\|\nabla_g u_\beta\|)}{\partial u_\alpha} + \sum_{\gamma \in N_{\sqrt{2}}} \phi'(\|\nabla_g u_\gamma\|) \frac{\partial(\|\nabla_g u_\gamma\|)}{\partial u_\alpha} \\
&\quad + \lambda(u_\alpha - u_\alpha^0) \\
&= \phi'(\|\nabla_g u_\alpha\|) \frac{1}{\|\nabla_g u_\alpha\|} \left(\sum_{\beta \in N_1} (u_\alpha - u_\beta) + \sum_{\gamma \in N_{\sqrt{2}}} \frac{u_\alpha - u_\gamma}{2} \right) \\
&\quad + \sum_{\beta \in N_1} \phi'(\|\nabla_g u_\beta\|) \frac{1}{\|\nabla_g u_\beta\|} (u_\alpha - u_\beta) + \sum_{\gamma \in N_{\sqrt{2}}} \phi'(\|\nabla_g u_\gamma\|) \frac{1}{2\|\nabla_g u_\gamma\|} (u_\alpha - u_\gamma) \\
&\quad + \lambda(u_\alpha - u_\alpha^0) \\
&= \sum_{\beta \in N_1} (u_\alpha - u_\beta) \left(\frac{\phi'(\|\nabla_g u_\alpha\|)}{\|\nabla_g u_\alpha\|} + \frac{\phi'(\|\nabla_g u_\beta\|)}{\|\nabla_g u_\beta\|} \right) \\
&\quad + \sum_{\gamma \in N_{\sqrt{2}}} \frac{(u_\alpha - u_\gamma)}{2} \left(\frac{\phi'(\|\nabla_g u_\alpha\|)}{\|\nabla_g u_\alpha\|} + \frac{\phi'(\|\nabla_g u_\gamma\|)}{\|\nabla_g u_\gamma\|} \right) + \lambda(u_\alpha - u_\alpha^0).
\end{aligned}$$

因此能量泛函达到极小的必要条件是 u_α 满足 (4.5)。

推论：如果 $\phi(x) = x^{2-q}, 0 \leq q < 2$, 则 (4.5) 可写为

$$\begin{aligned}
0 &= (2-q) \left(\sum_{\beta \in N_1} (u_\alpha - u_\beta) (\|\nabla_g u_\alpha\|^{-q} + \|\nabla_g u_\beta\|^{-q}) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{\gamma \in N_{\sqrt{2}}} \frac{(u_\alpha - u_\gamma)}{2} (\|\nabla_g u_\alpha\|^{-q} + \|\nabla_g u_\gamma\|^{-q}) \right) + \lambda(u_\alpha - u_\alpha^0), \alpha \in \Omega. \quad (4.6)
\end{aligned}$$

这里当 $q = 0$ 时, 为离散化的 Dirichlet 能量; $q = 1$ 时, 为全变差 (total variation)。当 $0 \leq q \leq 1$ 可以证明离散化能量的最小值是存在且唯一的, 因为能量函数是一个关于 u 的严格凸函数 [33]。当 $1 < q < 2$ 根据变分的计算理论最小值可能并不存在或者并不唯一。但是从后面的数值实验可以看到它的结果是优于

前面的取值的。这个结果和文献 [27] 所得到的是非常类似, 即 CCAD 模型。它在数值上证明了在 $1 < q < 2$ 时 CCAD 模型是优于 ITV 模型的 [20]。

§4.2.2 推广的模型

对于顶点 α , 如果 $\|\nabla_g u_\alpha\| \neq 0$, $\|\nabla_g u_\beta\| \neq 0$ 以及 $\|\nabla_g u_\gamma\| \neq 0$, 我们定义权函数:

$$\omega_{\alpha\beta}(u) = \frac{\phi'(\|\nabla_g u_\alpha\|)}{\|\nabla_g u_\alpha\|} + \frac{\phi'(\|\nabla_g u_\beta\|)}{\|\nabla_g u_\beta\|}, \quad (4.7)$$

$$\omega_{\alpha\gamma}(u) = \frac{\phi'(\|\nabla_g u_\alpha\|)}{2\|\nabla_g u_\alpha\|} + \frac{\phi'(\|\nabla_g u_\gamma\|)}{2\|\nabla_g u_\gamma\|}. \quad (4.8)$$

如果 $\|\nabla_g u_\alpha\| = 0$, 我们则令 $\omega_{\alpha\beta}(u) = \omega_{\alpha\gamma}(u) = 0$ 。如果 $\|\nabla_g u_\alpha\| \neq 0$ 并且 $\|\nabla_g u_\beta\| = 0$, 我们则令 $\|\nabla_g u_\beta\| = a$, 这里的 a 是一个小的正数 (如: $a = 10^{-4}$), 然后根据 (4.7) 定义权函数。

那么方程 (4.5) 变为

$$\begin{aligned} & \left(\lambda + \sum_{\beta \in N_1} \omega_{\alpha\beta}(u) + \sum_{\gamma \in N_{\sqrt{2}}} \omega_{\alpha\gamma}(u) \right) u_\alpha - \sum_{\beta \in N_1} \omega_{\alpha\beta}(u) u_\beta - \sum_{\gamma \in N_{\sqrt{2}}} \omega_{\alpha\gamma}(u) u_\gamma \\ & = \lambda u_\alpha^0, \end{aligned} \quad (4.9)$$

对于所有的 $\alpha \in \Omega$ 。这一般是一个非线性方程组。为方便起见我们定义

$$h_{\alpha\beta}(u) = \frac{\omega_{\alpha\beta}(u)}{\lambda + \sum_{\beta \in N_1} \omega_{\alpha\beta}(u) + \sum_{\gamma \in N_{\sqrt{2}}} \omega_{\alpha\gamma}(u)}, \quad (4.10a)$$

$$h_{\alpha\gamma}(u) = \frac{\omega_{\alpha\gamma}(u)}{\lambda + \sum_{\beta \in N_1} \omega_{\alpha\beta}(u) + \sum_{\gamma \in N_{\sqrt{2}}} \omega_{\alpha\gamma}(u)}, \quad (4.10b)$$

$$h_{\alpha\alpha}(u) = \frac{\lambda}{\lambda + \sum_{\beta \in N_1} \omega_{\alpha\beta}(u) + \sum_{\gamma \in N_{\sqrt{2}}} \omega_{\alpha\gamma}(u)}. \quad (4.10c)$$

我们通过局部迭代的 Gauss-Jacobi 方法来求解方程组 (4.9)。

$$u_\alpha^{k+1} = \sum_{\beta \in N_1} h_{\alpha\beta}(u^k) u_\beta^k + \sum_{\gamma \in N_{\sqrt{2}}} h_{\alpha\gamma}(u^k) u_\gamma^k + h_{\alpha\alpha}(u^k) u_\alpha^0, \quad (4.11)$$

对于所有的 $\alpha \in \Omega$, 这里的 k 为迭代步。事实上这个过程也可以看作是一个低通数字滤波。不断变化的 u_α 是 α 点已知的 1 邻域点的值 u_β 和 $\sqrt{2}$ 邻域点的值 u_γ 以及 α 初始值的加权平均。

实际上我们可以将图像去噪看作是一个加权平均的过程。关键在于如何选择每一个像素点的权。对于 (4.11) 在迭代过程中图像的局部信息可以很好的保存, 因为它只是考虑像素点的相邻的点。如果能选择合适的权函数 $\omega_{\alpha\beta}(u)$ 和 $\omega_{\alpha\gamma}(u)$, 区别特征区域和相似区域就可以自动的执行。这个自适应性我们很容易从它的性质上理解。如果对于当前的值 u^k 像素点 α 的周围是非常平坦的区域, 那么则支配着 λ 。此时滤波类似于作用在 u^k 上的低通滤波, 使得该点的输出值 u_α^{k+1} 更加平坦。如果相反情况对于当前的值 u^k 像素点 α 的周围是变化很大, 那么局部权与 λ 相比就无关紧要。因此滤波可以自动的检测并进行平滑, 这一点对于边界的去噪是非常重要的。

对于迭代格式 (4.11) 算法的描述:

- 1) 对于所有的像素点指定一个顺序: $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_{|\Omega|}$ 。令 $k=0$ 。
- 2) $k=k+1$. 对于每一个像素 α , 计算局部的变量 $\|\nabla_g u_\alpha\|$ 。
- 3) 对于每一个像素 α 以及它的 1- 邻域 β 和 $\sqrt{2}$ - 邻域 γ , 分别根据 (4.7) 和 (4.8) 计算权函数 $\omega_{\alpha\beta}(u^k)$ 和 $\omega_{\alpha\gamma}(u^k)$ 。
- 4) 对于每一个像素 α , 根据 (4.10) 计算 $h_{\alpha\beta}(u), h_{\alpha\gamma}(u), h_{\alpha\alpha}(u)$ 。
- 5) 对于每一个像素 α , 根据 (4.11) 计算 u_α^{k+1} 。
- 6) 如果 $k > N$ (期望的迭代步数) 或者其他的终止条件, 停止迭代。否则到 2)。

§4.2.3 数值实验和结果比较

所有实验执行的机器配置: Intel® Core(TM) 2 CPU T7200 2.00GHz, 1GB RAM; 使用软件: Matlab®。

首先说明几个问题:

1) 数字能量变分模型不需要任何的边界条件。数字模型中边界条件已转换到图的结构中和局部变分 $\|\nabla_g u_\alpha\|$ 的定义中。

2) 拉格朗日乘子 λ 对于去噪的效果影响是很大的。对于它的取法和估计的讨论可以在 [18] 和 [35] 中查到。在数字模型中, 一个 λ 的理想的估计可以通过下式计算:

$$\lambda \approx \frac{1}{\sigma^2} \frac{1}{|\Omega|} \sum_{\alpha \in \Omega} \sum_{\beta \sim \alpha} \omega_{\alpha\beta} (u_\beta - u_\alpha)(u_\alpha - u_\alpha^0),$$

这里 σ^2 是噪声的方差, 它可以通过图像中相似区域进行估计。在运算公式中我们取 λ 近似于 $1/\sigma^2$ 。

§4.2.3.1 函数 ϕ 的凹凸性质对应的去噪结果

正如我们在引理 1 中所介绍的, 函数 ϕ 的凹凸性质对去噪的结果和特征的保护有很大的影响。在本文中我们仅仅取 $\phi(x) = x^{2-q}$ 我们分别使 $q = 0, 0.5, 1, 1.02, 1.2, 1.5$ 来进行实验。当 $0 \leq q \leq 1$ 时, 密度函数是凸函数。如果 $1 < q < 2$ 密度函数则为凹函数, 因此不能保证能量泛函存在唯一的最小值。图 4.2 (a) 图是初始无噪声图像, (b) 图是加了高斯噪声 ($\sigma = 1/7$) 的图像, (c)-(h) 是 q 的六种不同取值下的去噪图像。我们可以看出 (g) 图是去噪效果最好的图像。在后面的表 4.1 中的计算值也证实了这个结果。由此我们可以得到一个结论就是在有些情况下凹性泛函比凸性泛函能保持更多的特征。

§4.2.3.2 去除椒盐噪声

本推广模型不但能够去除高斯噪声还能够去除椒盐噪声, 我们只要在运算时改变对 q 的取值就可以了。这也克服了连续能量模型只能去除高斯噪声的问题。图 4.4, (a) 图是初始图 (b) 添加了 25% 的椒盐噪声。图 (c)-(h) 不同的 q 的去噪结果。我们可以看到 g 的效果最佳。在后面的表 4.1 中的计算值也证实了这个结果。

§4.2.3.3 对彩色图像进行去噪处理

本推广模型可以方便的拓展到多通道图像的处理上去。图 4.5 是一个实例。

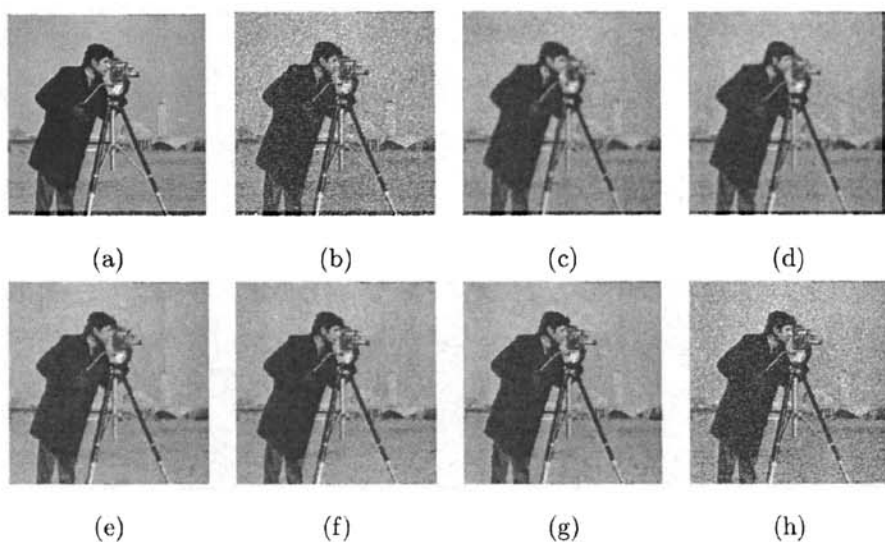


图 4.2 函数 ϕ 的凹凸性质对去噪结果的影响. 在这个实验中我们使用 1- 邻域进行计算. (a) 为初始图像. (b) 为加了高斯噪声 ($\sigma = 1/7$) 的图像. (c) L^2 能量的结果, i. e., $q = 0$. (d) $q = 0.5$. (e) TV 能量的结果, i. e., $q = 1$. (f) $q = 1.02$. (g) $q = 1.2$. (h) $q = 1.5$.

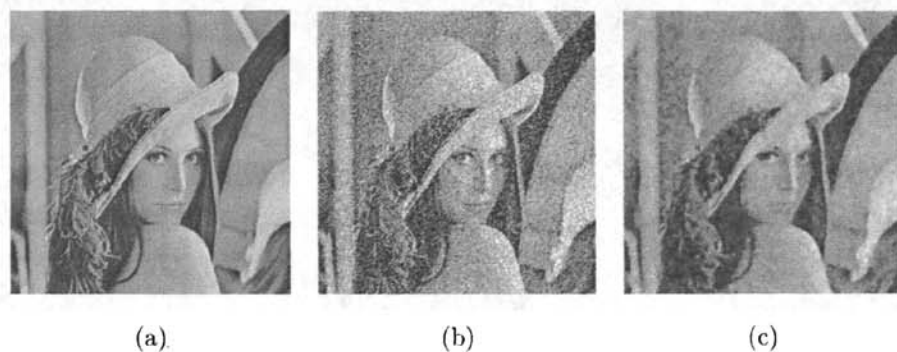


图 4.3 在这个实验中我们使用 1- 邻域和 $\sqrt{2}$ 邻域进行计算. (a) 为初始图像. (b) 为加了高斯噪声 ($\sigma = 1/7$) 的图像. (c) $q = 1.2$ 的结果.

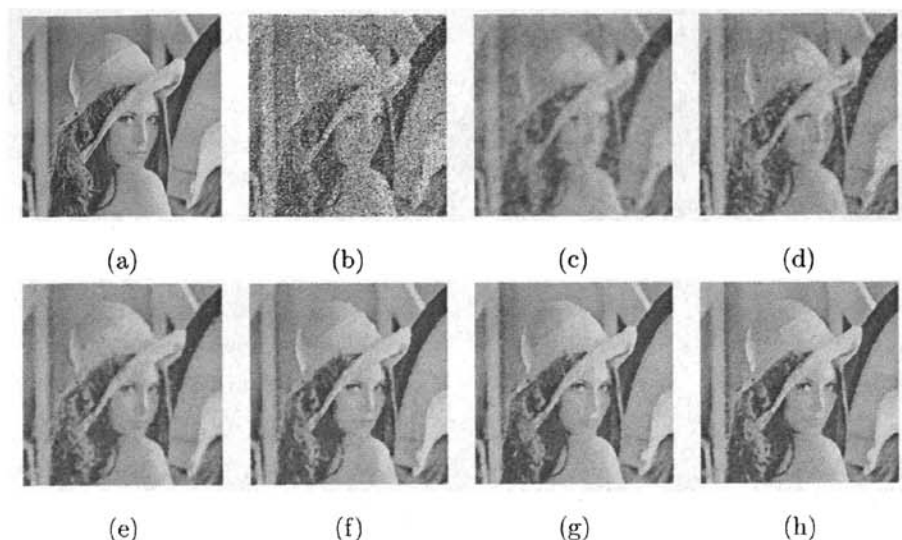


图 4.4 取不同的 q 值去除椒盐噪声的结果. (a) 为初始图像. (b) 添加了 25% 的椒盐噪声的图像. (c) L^2 能量的去噪结果, 即 $q = 0$. (d) $q = 0.5$. (e) TV 能量去噪的结果, 即 $q = 1$. (f) $q = 1.5$. (g) $q = 1.8$. (h) $q = 1.9$.

图 (b) 是初始图像 (a) 添加了 25% 的椒盐噪声. 图 (c)–(h) 取不同的 q 的去噪结果. 我们可以看到 (g) 图的效果最好. 在后面的表 4.1 中的计算值也证实了这个结果.

§4.2.3.4 去噪结果的比较

关于去噪效果的比较问题, 是一个比较困难的问题. 当一个模型提出时, 它一定在某一方面优于许多其他模型, 这一点只要看一下模型提出的动机及数值实验效果就不难明白. 但虽然有很多的模型, 要说哪一个模型是最优的, 实属困难. 在图像去噪领域来讲, 给出一个客观的检测去噪效果的方法是一个很重要的问题, 但是同时也是一个很困难的问题. 在 [36] 中就给出了图像去噪效果的四个标准: (1) 数学方面: 在正则性假设下方法噪声大小的渐近阶; (2) 感知数学方面: 对图像模型进行修改时所产生的算法修饰及其解释; (3) 量化实验方面: 计算噪声图像与原始图像的 L^2 距离表; (4) 视觉方面: 恢复图像的视觉质量, 这也

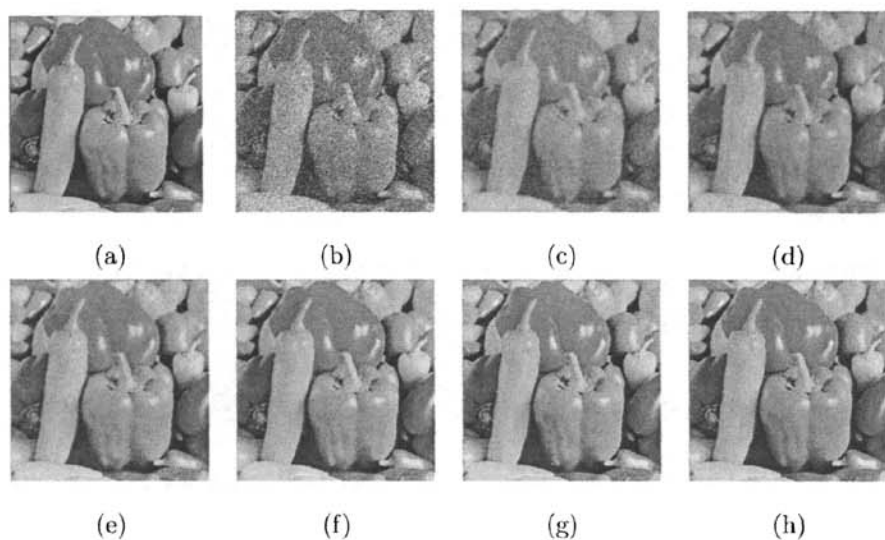


图 4.5 彩色图像去除椒盐噪声的结果. (a) 为初始图像. (b) 添加了 25% 的椒盐噪声的图像. (c) L^2 能量的去噪结果, 即 $q = 0$. (d) $q = 0.5$. (e) TV 能量的去噪结果, 即 $q = 1$. (f) $q = 1.5$. (g) $q = 1.8$. (h) $q = 1.9$.

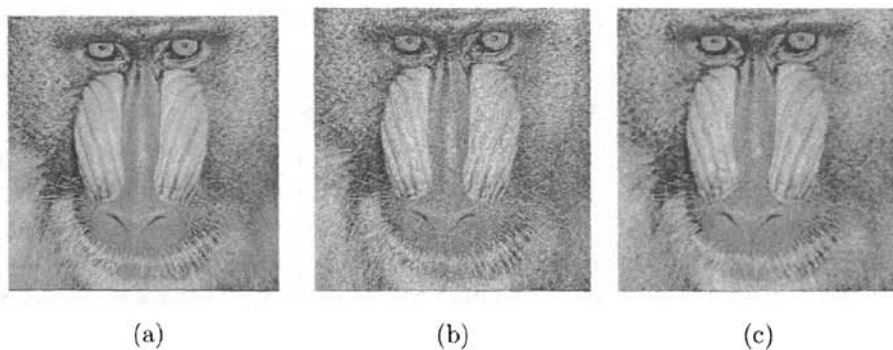


图 4.6 含有大量纹理的彩色图像去除高斯噪声的结果. (a) 为初始图像. (b) 为加了高斯噪声 ($\sigma = 1/7$) 的图像. (c) $q = 1.9$ 时的结果.

表 4.1 均值平方误差

<div>图号</div> <div>图</div>	(c)	(d)	(e)	(f)	(g)	(h)
图 4.2	135.54	124.48	113.95	115.77	109.62	156.10
图 4.4	142.75	122.35	96.48	80.64	76.47	77.08
图 4.5	557.65	453.67	345.13	276.41	270.77	272.76

是最有力的评价标准。另外，计算原始图像与恢复图像的残差也是通常使用的评价标准 [25]。图像恢复效果的检验标准需要进一步探讨，目前也有很多研究人员从事这方面的研究。

下面我们就给出一个客观的标准来对去噪结果进行比较。在本文的实验中我们计算了去噪后图像与原图像的 L^2 距离，从而在数量上估计去噪的效果。结果呈现在表 4.1 中。计算的方法是：

$$d(\text{original}, \text{estimate}) = \left(\sum_{\alpha \in \Omega} (u_{\alpha}^{\text{orig}} - u_{\alpha}^{\text{est}})^2 \right)^{1/2}.$$

这里我们称为均值平方误差。显然，对于同一个初始的图像来说均值平方误差越小相应的去噪效果越好。通过表中的值可以帮助我们确定视觉上的判断。

§4.2.3.5 本推广模型与其他模型比较

因为 PDE 方法通常最终要求解一个线性方程组，相应程序的编写和执行上比本推广模型要麻烦的多。图 4.7 是一个比较的结果。图 (a) 是原始图像 (b) 添加了高斯噪声的图像 ($\sigma = 1/7$)。图 (c) 是使用本模型去噪后的结果 ($q = 1.2$)，运行时间为 3.38 秒。图 (d) 是使用 ROF 模型去噪后的结果运行时间为 26.80 秒。可以看出本模型比 PDE 模型效率更高。

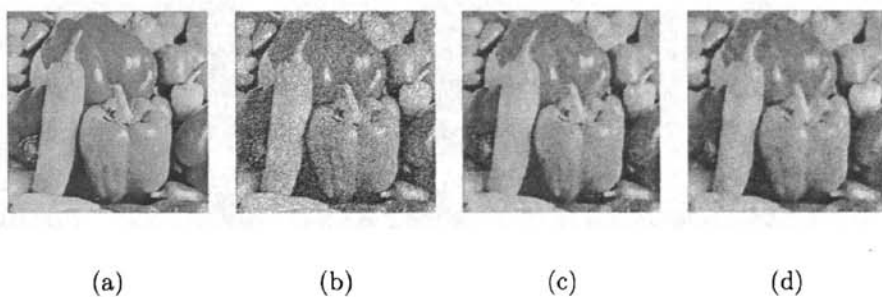


图 4.7 与 ROF 模型进行耗时的比较. (a) 为初始图像. (b) 为添加了高斯噪声的图像 ($\sigma = 1/7$). (c) 为 $q = 1.2$ 时本模型去噪的结果. (d) ROF 模型去噪的结果.

总结

图像去噪是数字图像处理的一个热点问题。近年来偏微分方程在图像去噪中的应用日益受到数学界与图形图像界研究人员的广泛关注。通常所使用的偏微分方程主要有两个来源：一个是直接构造，它们大多来自用于描述物理现象的偏微分方程。另一个就是通过变分途径来获取某一能量泛函的欧拉-拉格朗日方程，以此来构造所需的偏微分方程。最近几年来第二种方法得到了广泛的应用，本文首先对一些经典的去噪模型进行了介绍，对各种模型的优缺点进行一些分析比较。作者的主要研究工作是通过变分途径来构造去噪模型，对于基于离散能量泛函的变分去噪方法给出了一个推广。

通常的方法是通过连续能量泛函进行变分来构造微分方程模型，然后通过离散求解偏微分方程来进行图像去噪。而本文将具有普遍意义的一类连续能量泛函离散化，然后对离散能量泛函进行变分构造去噪模型。给出了求解方程组的显式迭代格式。推导中使用了像素点的相邻八个点并给出了实验结果（见图 4.3）。通过数值实验证实了推广模型去噪的有效性和与 PDE 模型相比的高效性。

同时在中也发现了一些问题可以作为以后研究的方向。1，使用 1-邻域和 $\sqrt{2}$ 邻域与使用 1-邻域去噪效果并没有明显的改善。2，本模型对于含有大量的纹理信息的图像的去噪能力一般（见图 4.6）。3，对于彩色图像的我们使用了 RGB 三个分量各自独立处理再合成的方法。但是这个方法有时不能很好的保护色彩的信息。现在有很多研究的方法比如将彩色图像分离为亮度和色彩的单位向量分别进行处理，可以参考。4，怎样有针对性的更好的提高去噪的效果。以上这些都是作者未来研究的目标。

图像去噪的问题有着极其丰富的研究内容，本文只是做了非常有限的探索。随着科技的发展人们的研究也会不断的深入，相信会有更多的科研工作者加入到这个行列中来取得更多的成果。

参考文献

- [1] 张直. 基于偏微分方程的图像处理. 高等教育出版社, 2004年. 第一版.
- [2] G. Sapiro. *Geometric Partial Differential Equations and Image Analysis*. Cambridge University Press, Cambridge, 2001.
- [3] T. F. Chan and J. H. Shen. *Image Processing and Analysis-Variational, PDE, Wavelet, and Stochastic Methods*. SIAM, Philadelphia, 2005.
- [4] G. Aubert and P. Kornprobst. *Mathematical Problems in Image Processing: Partial Differential Equations and the Calculus of Variations*, volume 147 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer, second edition, 2006.
- [5] S. Osher and N. Paragios, editors. *Geometric Level Set Methods in Imaging, Vision, and Graphics*. Springer-Verlag, 2003.
- [6] A. P. Witkin. Scale-space filtering. In *Proceedings of the 8th International Joint Conference on Artificial Intelligence*, pages 1019–1021, Karlsruhe, Germany, 1983. ACM Inc. New York.
- [7] P. Charbonnier, L. Blanc-Féraud, G. Aubert, and M. Barland. Two deterministic half-quadratic regularization algorithms for computed imaging. In *Proc. IEEE Int. Conf. Image Processing*, volume II, pages 168–172, 1994.
- [8] P. Perona and J. Malik. Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, 12(7):629–639, 1990.
- [9] F. Catté, P. L. Lions, J. M. Morel, and T. Coll. Image selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion. *SIAM J. Num. Anal.*, 29(1):182–193, 1992.
- [10] J. Weickert. Multiscale texture enhancement. In V. Hlaváč and R. Sára, editors, *Computer Analysis of Images and Patterns*, volume 970 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 230–237. Springer, Berlin, 1995.
- [11] J. Weickert. Theoretical foundations of anisotropic diffusion in image processing. In W. Kropatsch, R. Klette, and F. Solina, editors, *Proceedings of the 7th TFCV on Theoretical Foundations of Computer Vision*, volume 11 of *Computing Supplement*, pages 221–236. Springer, 1996.

- [12] J. Weickert. A review of nonlinear diffusion filtering. In *Scale-Space Theory in Computer Vision*, volume 1252 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 3–28. Springer, Berlin, 1997.
- [13] J. Weickert. Coherence-enhancing diffusion filtering. *International Journal of Computer Vision*, 31(2/3):111–127, 1999.
- [14] G. Gilboa, Y. Y. Zeevi, and N. A. Sochen. Complex diffusion processes for image filtering. In *Scale-Space and Morphology in Computer Vision: Third International Conference, Scale-Space 2001*, volume 2106 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 299–307, Vancouver, Canada, July 2001. Springer Berlin.
- [15] G. Gilboa, N. Sochen, and Y. Y. Zeevi. Forward and backward diffusion processes for adaptive image enhancement and denoising. *IEEE Trans. Image Processing*, 11(7):689–703, 2002.
- [16] M. Giaquinta and S. Hildebrandt. *Calculus of Variations*, Vol. I. Number 310 in A Series of Comprehensive Studies in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1996.
- [17] L. Rudin, S. Osher, and E. Fatemi. Nonlinear total variation based noise removal algorithms. *Physica D*, 60:259–268, 1992.
- [18] L. Rudin and S. Osher. Total variation based image restoration with free local constraints. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Image Processing*, volume 1, pages 31–35, 1994.
- [19] J. M. Morel and S. Solimini. *Variational Methods in Image Segmentation*, volume 14 of *Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications*. Birkhäuser, Boston, 1995.
- [20] A. Marquina and S. Osher. Explicit algorithms for a new time dependent model based on level set motion for nonlinear deblurring and noise removal. *SIAM J. Sci. Comput.*, 22(2):387–405, 2000.
- [21] S. Osher and R. Fedkiw. *Level Set Methods and Dynamic Implicit Surfaces*, volume 153 of *Applied Mathematical Science*. Springer-Verlag, New York, 2003.

- [22] S. Osher, M. Burger, D. Goldfarb, J. Xu, and W. Yin. Using geometry and iterated refinement for inverse problems (1): Total variation based image restoration. Technical Report CAM 04-13, UCLA, 2004.
- [23] L. C. Evans and R. F. Gariepy. *Measure Theory and Fine Properties of Functions*. CRC Press, 1992.
- [24] K. Joo and S. Kim. PDE-based image restoration: A hybrid model and color image denoising. *IEEE Transactions on Image Processing*, 15(5):1163–1170, 2006.
- [25] K. Joo and S. Kim. PDE-based image restoration I: Anti-staircasing and anti-diffusion. Technical Report 2003-07, Department of Mathematics, University of Kentucky, 2003.
- [26] L. Alvarez, F. Guichard, P. L. Lions, and J. M. Morel. Axioms and fundamental equations of image processing. *Arch. Rational Mech. Anal.*, Vol. 123:199–257, 1993.
- [27] S. Kim. Image denoising via diffusion modulation. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 30(1):72–91, 2006.
- [28] Y. L. You and M. Kaveh. Fourth-order partial differential equation for noise removal. *IEEE Trans. Image Processing*, 19(10):1723–1730, 2000.
- [29] M. Lysaker, A. Lundervold, and X. C. Tai. Noise removal using fourth-order partial differential equation with applications to magnetic resonance images in space and time. *IEEE Trans. Image Processing*, 12(12):1579–1590, 2003.
- [30] M. Lysaker, S. Osher, and X. C. Tai. Noise removal using smoothed normals and surface fitting. *IEEE Trans. Image Processing*, 13(10):1345–1357, 2004.
- [31] J. B. Greer and A. L. Bertozzi. H^1 solutions of a class of fourth order nonlinear equations for image processing. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 10(1-2):349–366, 2004.
- [32] T. F. Chan, S. Osher, and J. H. Shen. The digital TV filter and nonlinear denoising. *IEEE Trans. Image Processing*, 10(2):231–241, 2001.
- [33] S. Osher and J. Shen. Digitized PDE method for data restoration. In G. Anastassiou, editor, *Handbook of Analytic-Computational Methods in Applied Mathematics*, pages 751–771. Chapman & Hall/CRC, 2000.

- [34] S. Kim and H. Lim. A non-conver diffusion model for simultaneous image denoising and edge enhancement. *Electronic Journal of Differential Equation*, (Conference 15):175–192, 2007. Six Mississippi State Conference on Differential Equations and Computational Simulations.
- [35] M. I. G. Bloor and M. J. Wilson. Modular solvers for image restoration problems using the discrepancy principle. *Numerical Linear Algebra with Applications*, 9(5):347–358, 2002.
- [36] A. Buades, B. Coll, and J. M. Morel. On image denoising methods. Technical Report 2004-15, Centre de Mathématiques et de Leurs Applications(CMLA), 2004.

攻读硕士期间作者撰写发表的论文

1. Jie Sun, Qin Zhang , Feng Wang , Xing Zhao. On the Generalization of Digital Total Variation Filter. (Accepted by The 2008 International Congress on Image and Signal Processing) Haikou, China
2. 孙洁, 张琴, 徐国良, 图像去噪中的变分模型综述 (已投应用数学学报)
3. Qin Zhang, Jie Sun and Guoliang Xu. Noise Removal Based on the Variation of Digitalized Energy. Proceedings of Geometric Modeling and Processing (GMP) 2008. Lecture Notes in Computer Sciences, 4095, 290-303. (Will also appear in CAD or CAGD or Journal of Zhejiang University).
4. Qin Zhang, Guoliang Xu, Jie Sun, A general sixth order geometric flow and its applications in surface processing, Proceedings of 2007 International Conference on Cyberworlds, 2007, Hannover, 447-456.

致 谢

首先感谢我的导师王风副教授，她对本文的工作给予了悉心的指导和有力的支持。在此我向王老师表示衷心的感谢。感谢院里的其他老师，他们学识渊博，学术功底深厚，让我深深的敬佩。他们是我终身学习的榜样。

感谢我的同学。在学习上，我从与他们的讨论中获益良多。在生活上，他们给予了我许多的关心和帮助，这让我深深的感动。我将永远珍惜这份情谊。

感谢首都师范大学数学科学学院给予了我宝贵的学习机会和良好的学习生活条件。

最后我要感谢我的家人，他们的理解、帮助，支持和关爱给了我前进的动力和信心。

今天是我妈妈的生日，谨以此文献给她，祝她生日快乐，永远幸福！

孙 洁

2008 年 4 月 30 日