

重庆大学

硕士学位论文

偏微分方程图像分割研究

姓名：汪雯雯

申请学位级别：硕士

专业：应用数学

指导教师：何传江

2010-04

摘 要

图像分割技术用于提取图像中感兴趣的目标，它是图像处理中十分重要的研究内容之一。图像分割是将整个图像区域分割成若干个互不交叠的非空子区域的过程，每个子区域的内部是连通的，同一区域内部具有相同或相似的特征。

图像分割方法很多，基于偏微分方程的图像分割方法是目前应用比较广泛的图像分割方法之一。与通常的图像处理方法相比，虽然偏微分方程方法的计算量偏大，计算耗时长，但是其灵活多样的数值计算方法使演化偏微分方程在离散化时具有较好的稳定性，而且能够满足高质量的图像恢复和精确的图像分割等方面的需要。在偏微分图像分割方法中，基于变分法和水平集方法的活动轮廓模型集中体现了偏微分图像分割方法的优越性，因而该方法在图像处理领域中越来越受重视，已逐渐成为研究的热点，并被广泛的应用于图像处理的其它领域。

在本学位论文中，我们首先介绍相关的数学知识及图像分割背景，然后重点介绍了基于区域活动轮廓模型—C-V 模型，并针对 C-V 模型的缺点提出了两个改进方案：

(1) 快速 C-V 模型。C-V 模型是一个著名的基于区域的活动轮廓模型，根据其演化速度主要与活动轮廓线内外灰度差有关的特性，我们提出一种快速 C-V 分割模型。实验结果显示，该模型不仅大大提高了演化速度，并且降低了对初始轮廓线的依赖性。

(2) 融合局部熵信息的 C-V 模型。图像的灰度变化对图像分割也很重要，因此，我们在 C-V 模型中加入了表征灰度变化的图像局部熵信息，提出了一个新模型。实验结果显示，该模型对背景复杂，非同质图像以及噪声图像具有很好的分割结果。

关键词：图像分割，几何活动轮廓模型，水平集方法，局部熵，偏微分方程

ABSTRACT

Image segmentation means extracting interested objects from an image, and it is one of the key issues in image processing. Firstly, image segmentation is a process that segment image domain into a set of connected regions, each region having the same or similar features. Feature of an image means a remarkable attribute of an image.

There are many different methods for image segmentation, and the segmentation method based on PDE is one of the most popular at present. Compared to traditional image segmentation, PDE-based method involves too many calculations. But the flexible numerical method has good stability when discretizing PDE. Besides, it can carry out high-quality image restoration and precise image segmentation. Active contour models based on variational method and level set method reflect the advantages of PDE method. Thus, the active contour models have gained more and more attentions in image processing field, and are widely used in other areas of imaging.

In this dissertation, we first review a relative knowledge of mathematics and image segmentation. And then, we present respectively the improvement of C-V model and the model based on inter-dissimilar.

The main results of this dissertation are summarized as follows:

(1) Fast C-V models. We find that the evolving speed of the contour is closely related to the absolute difference between the two regions (foreground and background). Therefore, we propose a fast C-V model by magnifying the absolute difference between foreground and background. The experimental results show that this model has faster convergence and it reduced a lot of iterations.

(2) C-V incorporated with local entropy. Intensity changes are crucial for accurate segmentation of many images, thus we propose a new model which incorporates local entropy into C-V. The experimental results show that this model can obtain better results with respect to images with noise, complex background or inhomogeneous.

Keywords: image segmentation, active contour, level set method, local entropy, Partial differential equation

1 绪 论

数字图像处理 (Digital Image Processing) 又称为计算机图像处理, 最早出现于 20 世纪 50 年代, 当时的电子计算机技术已经发展到一定水平, 人们开始利用计算机来处理图形和图像信息, 从这时候起, 图像分割作为一门图像处理的子学科开始形成了。图像分割技术^[1]是图像处理、分析与理解、图像识别和计算机视觉领域的一项基本而又关键的技术, 广泛应用于军事、医疗、工农业生产和教育等领域, 是计算机图像理解方法实现的基础。而基于偏微分方程的图像分割由于其自身的处理优点越来越受到许多学者的关注, 并衍生出了许多研究分支。

1.1 研究背景与意义

近几年, 计算机技术和图像处理技术得到了飞速发展, 并逐步渗入和影响到各个学科的发展。图像分割不仅是目标表达的基础, 对特征测量有重要的影响, 更是因为图像分割及其基于分割的目标表达、特征提取和参数测量等将原始图像转化为更抽象、更紧凑的表达形式, 使得更高层的图像分析和理解成为可能。

在图像的研究和应用中, 人们往往仅对图像的某一部分感兴趣, 我们可以将其称为目标或前景 (其余部分成为背景)。图像分割就是根据图像中有意义的特征或者需要应用的特征将一副图像分割成若干部分或子集的过程。这里的特征可以是图像本身的特征, 比如像素的灰度差别、颜色差别、纹理和物体轮廓线等, 或者是局部统计特征的差别如空间频谱或直方图等其他统计特征。正是根据这些特征我们可以区分图像中不同的目标物体, 预先定义的目标可以对应单个区域, 也可以对应多个区域。图像分割的研究多年来一直受到人们的高度重视, 至今已经提出了上千种类型的分割算法^[2]。由于图像分割理论背景各式各样, 分割策略多种形式, 并且各种方法相互交叉, 很难将其严格分类。目前, 传统的图像分割方法, 一般可以分为以下三类:

- ①基于阈值的分割方法;
- ②基于边缘检测的分割方法;
- ③基于区域提取的分割方法;

其中, 阈值分割由于其在分割过程中仅仅考虑图像的灰度信息, 因此, 对不存在明显的灰度差异或物体的灰度值范围有较大重叠的图像难以得到准确的分割结果, 同时阈值的自适应选择仍然是目前研究的重点和难点。基于方向导数的边缘检测方法主要是利用不同区域间像素灰度不连续的特点检测出边缘, 从而实现图像的分割。实际上, 由于噪声、

不均匀的照明产生的边缘间断以及其他由于引入虚假的亮度间断所带来的影响,使得我们在图像分割过程中往往需要对分割对象进行预处理比如用高斯滤波进行高斯平滑去处噪声或者对分割结果进行预后处理,如进行边缘连接操作等。基于区域提取的分割方法,其本质就是把具有某种相似性质的像素连通起来,形成区域,从图像中分离出来。它充分利用了图像的局部信息,可以克服图像分割在空间上不连续的缺点,但是又存在着图像过度分割的问题。

相对于传统的图像分割方法,目前应用比较普遍的图像分割方法是基于模型的图像分割方法。基于模型的图像分割方法一般分为两种,一是基于变分方法的参数活动轮廓模型分割方法,二是基于水平集方法的几何活动轮廓模型分割方法。本文中我们重点介绍几何偏微分方程应用于图像分割方法,它主要是采用活动轮廓模型来实现的。其基本思想是,将所研究问题归结为一个泛函极小问题,通过变分方法将泛函极值问题转化为偏微分方程的求解问题,然后把偏微分方程的解作为图像分割后的结果。可见基于偏微分方程的图像处理的首要步骤是建立一个合乎处理要求的偏微分方程,即建立数学模型。

由于偏微分方程本身来自连续域,它本质上描述的是模拟图像,一旦其解的存在性和唯一性被证明,就可以利用离散方法对数字图像求取数值解。这使得利用偏微分方程进行处理图像具有如下优势^[3]:

(1)具有很强的局域自适应性(local adaptability)。偏微分方程本身建立在连续的图像模型之上,它使图像某像素的值在当前时间的变化仅仅依赖于该像素点的一个“无穷小”的邻域,因此我们说图像处理的偏微分方程方法具有“无穷”的局域自适应能力。

(2)偏微分方程和相应的曲线(曲面)流给出分析图像的连续模型,离散的滤波表现为连续的微分算子,因而使得网格的划分、局部非线性分析易于实现。

(3)偏微分方程有比较成熟的理论基础,这就使得各种图像处理方法的合成十分自然。同时借助偏微分方程的数值分析理论,算法高速、准确且稳定。特别是粘性理论^[4]提供了严格应用偏微分算子的理论基础,即使图像不连续、不足以给出经典意义上的导数概念,仍然可以应用偏微分方程进行研究和处理。

(4)图像中的一些几何特征比如梯度、曲率等都可以用偏微分方程方法直接给出,这样更有利于建立各种数学模型。

正是因为偏微分方程以上的优势,使得偏微分方程图像处理成为一个持续的研究热点,取得了许多引人注目的成果。目前,基于偏微分方程的图像处理已经发展为一个结合数学形态学、变分法、逼近论和仿射几何等数学方法的完整理论体系。基于偏微分方程的图像分割是偏微分方程方法在图像处理领域中的最具代表性的应用,一直以来都是

图像技术中的研究热点。

1.2 偏微分方程图像分割的研究现状

图像分割是图像处理中的一项关键技术，自上世纪 70 年代起一直受到人们的高度重视，至今已提出上千种分割算法，但因尚无通用的分割理论，而现有的分割算法大都是针对具体问题而提出的，因此并没有一种适合所有图像的通用分割算法。下面主要介绍近几年来偏微分方程图像分割方法的研究现状。

图像分割是图像理解的重要组成部分，其目的是将目标和背景分离，为目标识别、精确定位等后续处理提供依据，其结果直接影响到其后的信息处理过程。图像分割主要是基于相邻像素在像素值方面的两个性质：不连续性和相似性。相似性主要是指在区域内各像素之间具有某种相似的特性，而在区域的边界上往往具有不连续性。图像分割正是利用不同区域间像素灰度不连续的特点检测出区域间的边缘。传统的图像分割往往比较容易受图像噪声影响，需要预处理和后处理步骤，因此分割精度比较低。

上个世纪 90 年代初，基于偏微分方程的图像处理这个学科的正式形成对于整个图像处理研究领域具有重大的意义。它的基本思想是将所研究的问题归结为一个带约束条件或不带约束条件的泛函极小问题，然后应用变分方法导出一个或一组偏微分方程，最后结合相应的初始条件或边界条件，用数值计算方法求解此偏微分方程（组）。从某种意义上讲，在此之前，图像处理技术一门偏重于工程技巧性的学科，正是由于偏微分方程在图像处理中的引入和发展，带来了大量数学工具的引入，使图像处理技术发展成为一个具有深厚理论基础的基础性科学研究领域。继承了数学物理方程中的大量研究成果，在很多图像处理和计算机视觉的应用领域，图像偏微分方程的研究目前逐渐丰富和成熟，已经迅速发展成为一种理论上严谨，实用上有效地方法。

基于偏微分方程的图像处理的研究工作可以追溯到 Nagao 关于图像平滑的研究^[5]和 Koenderink 对图像结构^[6]的探索。而数学形态学和图像水平线等知识的广泛研究也在一定程度上丰富了这个研究方向的内容。其中，图像处理中的图像滤波和图像分割直接影响到基于偏微分方程的图像处理技术的萌芽和发展。文献【7】的发表，被认为是基于偏微分方程的图像处理这个学科形成的一个标志。

偏微分方程在图像分割领域的应用，主要开始于 Kass, Witkin 和 Terzopoulos 等于 1987 年提出的一种称主动轮廓模型(ACM, 又称为 Snakes)的分割方法^[8]，该模型是一种基于能量的图像分割方法，其能量函数为基于曲线的内部能量和基于图像数据外部能量的加权和。通过极小化该能量泛函使在待分割目标周围的一条初始曲线在固有内力和图像外力的共同作用下不断演化，最终收敛到目标的边界轮廓。主动轮廓模型在分割精度、抗噪性、稳定性和鲁棒性上大大超出了传统的图像分割方法，它对一系列计算机视觉问

题给出了统一的解决方法, 已经被越来越多的研究者成功的应用于边缘(边界)提取^[9]、图像分割和分类^[10]、运动跟踪^[11]、三位重建、立体视觉匹配等计算机视觉领域, 尽管关于活动轮廓模型的理论研究还不完善, 但是它所提出的新思想及其广泛的应用已经证明了它的价值。这种方法最大的贡献在于, 它把先验的形状约束条件很自然的融入到底层处理, 相对传统的分割方法是一个很大的突破, 也迅速引起了人们的注意, 这一模型开启了活动轮廓模型图像分割的大门, 但是该模型也有其自身的缺点比如: 分割的结果与活动轮廓的初始位置有关; 活动轮廓很难收敛到曲率高的边缘; 拓扑结构不易改变等。在此基础上人们不断改进发展, 提出了更多活动轮廓模型。Cohen^[12]提出了主动轮廓线的“气球”模型, 形象的称之为 **Balloons force**, 它提高了外部能量所能捕获的范围, 克服了 **Snake** 模型对初始轮廓的敏感性, 使之稳定地收敛于边缘; Jang^[13]等人提出了 **Shaking Snake** 方法, 在图像能量中引入了彩色边缘的概念, 克服了 **Snake** 模型容易受到噪声的影响而陷入局部极小的难题; Xu 提出的梯度向量流 **GVF**^[14]方法和广义梯度向量流 **Snake**^[15]模型, 扩大了轮廓线的捕获范围, 并成功解决了演化曲线无法收敛到图像深度凹陷区域的缺点; Yu^[16]等人提出的梯度向量扩散(**GVD**)方法, 大大降低时间的复杂性, 加快了演化速度; Williams 等^[17]提出的一种贪婪算法(**greedy algorithm**)把迭代次数从 $O(nm)^3$ 降为 $O(nm)$; Menet 等^[18]提出的 **B-snake** 模型, 使得模型的表达更有效, 同时能隐式地表达角点, 改进了 Kass 等人模型中如收敛速度慢、很难处理不连贯性以及噪声敏感等缺陷。这些改进模型主要是从扩大对模型的吸引范围, 解决模型对初始化位置的敏感性的目的出发。

上述模型的闭合曲线是由曲线的参数形式表达的, 在演化过程中, 曲线的内在参数如法矢和曲率等计算起来比较费力, 为提高稳定性需不断参数化, 要求初始化曲线必须限制在分割对象的边界附近, 并且很难处理曲线拓扑变化以及难以推广到三维图像分割, 本身不具备拓扑自适应能力而这恰恰是水平集方法在曲线演化中的优势。水平集方法引入到主动轮廓模型势在必行。

在处理拓扑结构变化问题方面, 突破性的进展还是得益于将 Oshier 等提出的水平集计算方法^[19]的引入。水平集方法自 1988 年提出以后最初是被成功地应用于流体力学, 计算机图形学, 材料科学等领域。93 年 Caselles^[20]等人和 95 年 Malladi^[21]等人的两篇著名文章首先把水平集方法应用在图像处理和计算机视觉领域, 他们将水平集方法成功的引入到活动轮廓模型中, 即将二维平面内的轮廓曲线隐含地表达为更高维的曲面(即水平集函数)的一个水平集, 提出了基于边缘信息的几何活动轮廓模型。这个模型借助水平集方法, 很好的解决了拓扑结构变化的问题, 并且能比较容易推广到更高维数的空间; 大大拓宽了 **Snakes** 模型的应用范围, 活动轮廓模型也得到了更大的发展。

几何活动轮廓模型主要是利用水平集函数的一阶导数,因此其演化在很大程度上依赖于边缘停止函数。在曲线演化过程中,轮廓曲线以一定的演化速度向内收缩或向外扩张,演化速度主要由基于曲线本身性质属性(曲率、法向量等)的速度和耦合了图像信息的停止速度函数决定。当停止速度函数的演化速度等于零时(理想状态),也即表示演化曲线停止迭代,到达目标边界。但实际应用中,该模型存在着边缘泄露,计算量大,分割极为缓慢等问题。Caselles 等^[22]又提出了另外一种几何形式的 Snake,称为测地主动轮廓模型(Geodesic Active Contours)很好的解决了边界泄漏问题。针对几何活动轮廓模型的这些问题,后来的许多学者对其进行了大量的改进,例如,文献【23】从停止速度场入手提出了一种加快演化速度、减少边界泄露的方案; Leventon 等人^[24]则将形状信息引入到测地活动轮廓模型中,以提高模型的鲁棒性, Paragios 则在几何活动轮廓模型中整合 GVF^[25],不仅加快了曲线演化的速度,提高了其鲁棒性,而且降低曲线演化对初始位置的要求,等等。

GAC 模型缺点的主要原因在于,该模型仅仅依赖于图像的边缘梯度信息,而图像的离散梯度值是有界的,导致了边缘停止函数在边界上的取值并不为零,因此要解决 GAC 模型一系列问题的另一思路就是让模型不过分依赖于或者甚至不依赖于图像的边缘梯度,考虑到图像的全局信息提出了基于区域的分割模型。这项工作得益于 Runfard 做的一项开拓性工作^[26]:就是将只使用边缘信息的经典活动轮廓模型扩展为基于区域的活动轮廓模型。以变分方法为框架综合考虑区域信息的经典的图像分割模型 Mumford-Shah 模型^[27],由于该模型在理论分析和实际应用的困难,在具体使用时均做不同的近似或简化。比如在能量函数中增加了与轮廓线内外区域特征有关项,提出的基于简化的 Mumford-Shah 模型 C-V 模型^[28],对分段常值图像和分段光滑图像有很好的效果。针对该模型的缺点,许多学者又从不同的角度对 C-V 模型进行了扩展或改进。例如,文献【29】提出了 PS (piecewise smooth) 模型,成功地实现多相图像中不同灰度多目标轮廓的提取。文献【30】提出 RSF 模型,灰度不均一图像有很好的结果,该模型的主要缺点是演化结果对初始曲线的位置较为敏感。文献【31】结合 C-V 和 RSF 模型提出 LGIF 模型,较好的解决 RSF 模型对初始曲线位置敏感的问题。文献【32】提出 ECV 模型,把灰度变化融入 C-V 模型,较好解决了 C-V 模型无法分割背景复杂的图像的问题。文献【33】提出多层水平集分割模型,C-V 模型变成该模型的一个特例。Yezzi,Tsai,Willsky(Y-T-W)^[34]不仅考虑不同区域的平均灰度的差异,而且考虑不同区域间平均标准差的不同提出了两相与三相图像分割的统计方法。

然而,偏微分方程模型应用于图像分割还有许多需要解决的问题,并面临着许多挑战,例如进一步的理论分析以及快速有效地数值计算方法等。我们相信,图像分割必然

会经过数学上量的精确分析而成熟起来。

1.3 主要工作和结构安排

本文主要研究基于偏微分方程的图像分割，主要针对基于区域的模型进行讨论。首先总的介绍了现有的图像分割算法，并分析了各类分割方法的优缺点和改进模型。C-V模型是一个著名的基于区域的分割模型，一方面，我们通过对C-V模型的具体分析发现影响分割速度的主要因素是图像的灰度差，以此为切入点提出了快速C-V分割模型来克服原有模型的缺点；另一方面，在实验我们发现C-V模型对灰度不均匀的图像和背景复杂的图像的分割效果不是很好，而产生这种现象的原因就是在演化方程仅仅考虑到图像的整体灰度特点，而忽略了图像的局部特征，为此本文我们通过在演化方程中引入表征图像灰度变化的局部熵提出一种改进模型。

本文共分五章，具体内容安排如下：

第一章为绪论，简要的介绍了图像分割的意义和偏微分方程图像分割的发展背景和研究现状。

第二章为图像分割的相关背景知识，主要包括偏微分方程的基本概念及其定解问题和变分原理。其中变分法和梯度下降法一节主要介绍了变分法和梯度下降法的基本理论，变分法是从极小化能量泛函得到驱动曲线的偏微分方程的基础，梯度下降法是求解推导出的偏微分方程的常用方法。

第三章详细介绍了基于水平集方法的图像分割。主要介绍了曲线演化理论，水平集方法，以及水平集的具体数值实现，还在最后一节中简单的介绍了水平集方法用于图像分割的具体原理。

第四章为本文所作的主要工作，首先介绍了C-V模型，并指出该模型的缺点，通过具体的分析给出了两个改进的C-V模型：快速C-V模型和结合局部熵的C-V改进模型。前者大大提高了模型的演化速度并降低了对初始轮廓线的依赖性，而熵的引入使C-V模型能够分割部分背景复杂和非同质的图像并具有较强的抗噪性。

第五章为全文总结和展望。

2 图像分割的理论基础

2.1 图像分割的定义

在图像的研究与应用中，人们往往仅对图像中的某些部分感兴趣。这些部分常称为目标或背景，它们一般对应图像中特定的、具有独特性质的区域。所谓图像分割就是指将图像中具有特殊涵义的不同区域分离开，这些区域是相互不交叉的，每一个区域都满足特定区域的一致性。

下面我们从集合的角度来说来定义图像分割：设整个图像空间为一个集合 R ，图像分割就是利用同质性，采用某种方法使得 R 分解为几个互补重叠的非空子集（或子区域）： $\{R_1, R_2, \dots, R_n\}$ ，这些子集必须满足如下几个条件：

- (1) $R = \bigcup_{i=1}^n R_i$;
- (2) R_i 是一个连通区域， $i = 1, 2, \dots, n$;
- (3) 对任意的 $i \neq j, R_i \cap R_j = \emptyset$;
- (4) 对任意的 $i = 1, 2, \dots, n$ ， $P(R_i) = \text{true}$;
- (5) 对所有的 i 和 j ，如果 $i \neq j$ ，则 $P(R_i \cup R_j) = \text{false}$ 。

其中， $P(R_i)$ 是作用于区域 R_i 中所有像素点上的相似性逻辑谓词。

在上述条件中，条件(1)表示一副图像分割结果中全部子区域的总和要包括图像中任意一个像素，或者说分割过程中原图像的任意一个像素都被划分到其中某个子区域中；条件(2)要求分割结果中在同一个子区域内的像素应该是连通的，即同一个子区域的任意两个像素在该子区域内相互连通，或者说分割得到的区域是一个连通组元；条件(3)表明分割结果中的各个子区域之间是没有交集的，或者说原图像中的任意像素不可能同时属于两个不同的子区域；条件(4)要求分割后属于同一区域的像素具有某种相似的属性；条件(5)要分割后属于不同区域的素具有某种不同的属性，或者说不同的子区域应该具有不同的特性，没有公共元素。

2.2 平面微分几何

定义从一维实域到二维实域的映射 $C(p): [a, b] \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ 表示平面上一条曲线，其中 p 为曲线的参数，即对任一 $p \in [a, b]$ 确定了曲线上的一个点 $C(p) = (x(p), y(p))$ （为了讨论方便，假设曲线是二次可微的。如果一条曲线有 $C(a) = C(b)$ ，则该曲线是闭曲线。如果一条曲线上至少存在一对参数 $p_0, p_1 \in (a, b)$ 且 $p_0 \neq p_1$ ，使得 $C(p_0) = C(p_1)$ ，称该曲线有自交叉点。没有自交叉点的曲线称为简单曲线。有自交叉点的闭合曲线叫简单闭曲线，

在以后的研究中，我们经常采用这种类型的曲线)。由定义知 $C(p)$ 实际上可以看成是一个矢量，它对 p 的导数也形成矢量

$$C_p = (x_p, y_p) \quad (2.1)$$

其方向为曲线的切线方向，故称之为切矢量。其长度为：

$$|C_p| = (x_p^2 + y_p^2)^{1/2} \quad (2.2)$$

它可理解为曲线上点的位置随着 p 的增加的变化速率，因而 C_p 也可称为速度矢量。

现在来考察曲线从起点 $p_0 = a$ 到 p 点所经过的距离——弧长

$$s(p) = \int_a^p |C_p(\tau)| d\tau \quad (2.3)$$

于是有

$$\frac{ds}{dp} = |C_p| \quad (2.4)$$

参数 p 的选择有很多种，当弧长 s 作为曲线的参数时，上式左边为 1，而右边为 $|C_s|$ ，故有 $|C_s| = 1$ 。这就是说，若以弧长 s 为参数，则切矢量总是单位长度，记为 $T := C_s$ ， $|T| \equiv 1$ 。

本文中讨论的曲线在任意两点之间的长度是有限的，相当于认为函数 $x(p)$ 和 $y(p)$ 的变分是有限的，根据弧长的定义，得到两点之间的弧长计算公式为：

$$L(p_1, p_2) = \int_{s(p_1)}^{s(p_2)} ds = \int_{p_1}^{p_2} (x_p^2 + y_p^2)^{1/2} dp \quad (2.5)$$

平面曲线的另一个基本概念是曲率 (curvature)。曲率是描述曲线弯曲程度的量。由于 C_s 为单位矢量，它自身的内积为 1，即

$$\langle C_s, C_s \rangle = \|C_s\|^2 = 1$$

上式两边求导可得

$$\langle C_s, C_{ss} \rangle = 0 \quad (2.6)$$

可见矢量 C_{ss} 与单位切矢量 C_s 正交。定义与 T 构成右手坐标系的单位矢量为法矢量 N 。可见矢量 C_{ss} 与 N 共线，故可表达为

$$C_{ss} = \kappa N \quad (2.7)$$

式中的比例系数 κ 称为曲率。当 C_{ss} 与 N 平行时， κ 为正值；反之，当 C_{ss} 与 N 反平行时， κ 为负值。不过由于 N 的方向是由 T 按右手坐标系确定的，而 T 的方向是参数增大的方向，它决定于曲线起点的规定。可见对于一条开放的曲线而言，曲率取正号或负号取决于曲线起点的规定。但对于闭合曲线而言，起点和终点在同一位置，不过这时仍可规定曲线的绕行方向，按惯例规定逆时针绕行方向为正，于是 N 将指向闭合曲线的内部，因而当曲线向外凸出时，曲率为正；反之曲线向内凹，曲率为负。

下面我们从具体的实例来计算曲率 κ ：设曲线定义为 $C(p) = (x(p), y(p))$ 由

$$C_s = (x_p, y_p) \frac{dp}{ds}$$

结合式 (2.4) 可得:

$$C_s = (x_p, y_p) \frac{dp}{ds} = \frac{(x_p, y_p)}{(x_p^2 + y_p^2)^{1/2}} \quad (2.8)$$

进一步作微分可得:

$$\begin{aligned} \frac{dC_s}{dp} &= \frac{x_p y_{pp} - x_{pp} y_p}{(x_p^2 + y_p^2)^{3/2}} (-y_p, x_p) \Rightarrow \\ C_{ss} &= \frac{dC_s}{dp} \cdot \frac{dp}{ds} = \frac{x_p y_{pp} - x_{pp} y_p}{(x_p^2 + y_p^2)^{3/2}} \cdot \frac{(-y_p, x_p)}{(x_p^2 + y_p^2)^{1/2}} \\ &= \frac{x_p y_{pp} - x_{pp} y_p}{(x_p^2 + y_p^2)^{3/2}} N \end{aligned} \quad (2.9)$$

进而得到曲率的表达式

$$\kappa = \frac{x_p y_{pp} - x_{pp} y_p}{(x_p^2 + y_p^2)^{3/2}} \quad (2.10)$$

曲率的特性:

(1) 只有两种曲线的曲率是常数, 直线的曲率为零, 圆的曲率为半径的倒数。曲率为常数的闭曲线只有圆。

(2) 在曲线的顶点处, 不存在曲率的一阶导数。

(3) 闭曲线的曲率总合是 2π 的整数倍, 简单闭合曲线的曲率总合是 2π 。

(4) 所有长度为 L 的简单闭曲线中, 半径为 $L/2\pi$ 的圆的面积最大。

2.3 偏微分方程及其差分求解

2.3.1 偏微分方程的基本概念

一个包含有多元未知函数和未知函数的各阶偏导数的方程称为偏微分方程 (PDE), 若干个偏微分方程构成的方程组称为偏微分方程组 (coupled PDEs)。函数 $u(x, y, \dots)$ 的偏微分方程 (Partial Differential Equation) 是指函数 u 与其偏导数 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \dots$ 的

一个数学关系式, 记为:

$$F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \dots\right) = 0 \quad (2.11) \text{ 对}$$

于二阶 PDE

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \cdot \partial y_j} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = f \quad (2.12)$$

式中的 a_{ij}, b_i, c 和 f 均可以是自变量 x_1, \dots, x_n 以及 u 和 $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ 的函数。一般可假设 $a_{ij} = a_{ji}$ ，即 $A := [a_{ij}]$ 为 $n \times n$ 的对称阵。如果 A 是正定或负定的（其本征值全部同号）则成为椭圆（elliptic）型方程；如果 A 的本征值至少有一个为零，则成为抛物（parabolic）型方程；如果 A 的本征值全部非零且有 $n-1$ 个同号，则称为双曲型（hyperbolic）方程。下面是三个经典的二阶微分方程，它们分别是

$$\text{泊松方程:} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} = f(x, y) \quad (\text{椭圆型})$$

$$\text{热传导方程:} \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} \quad (\text{抛物型})$$

$$\text{波方程:} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial^2 t} = \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} \quad (\text{双曲型})$$

当 $f(x, y) = 0$ 时，泊松方程即为 Laplace 方程。

在数学和物理的许多领域经常会出现这三种偏微分方程。一般来说，对于椭圆型方程常研究边值问题，而对于抛物型方程和双曲型方程常讨论的是初值问题。本文中出现的偏微分方程都是抛物型方程。

2.3.2 偏微分方程的定解问题

在常微分方程的求解过程中，必须给定初始条件才可能得到唯一的解。类似的，对于偏微分方程，只有在给出适当的初始条件和边界条件的情况下才能求解，这些条件成为定解条件。对于一个偏微分方程附加上一个或若干个定解条件的求解问题称为这个偏微分方程的定解问题。在讨论的问题中，有的问题与时间有关，有的则与时间无关。与时间有关的问题的定解条件中自然要指出所谓初始状态，这样的条件一般成为初始条件或初值条件。另一个要考虑的条件是所讨论的系统与其他系统或“外界”的关系，这样的条件叫做边界条件或边值条件。下面首先介绍边界条件：

①第一类边界条件：指定

$$u(x, t) = f(x), \quad x \in \partial\Omega, t \geq 0$$

也称为 Dirichlet 边界条件。

②第二类边界条件：

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \mu(x, t), \quad x \in \partial\Omega, t \geq 0$$

式中 n 表示 $\partial\Omega$ 的法矢量。它也称为 Neumann 边界条件。

③第三类边界条件

$$\frac{\partial u}{\partial n} + au = \mu(x, t), \quad x \in \partial\Omega$$

也称为 Robin 条件。从数学上看, 第二类边界条件可以看称第三类边界条件中 $a = 0$ 的特例。但从物理学的观点来看, 第二类边界条件较第三类边界条件更常采用。边界条件在具体的提出和使用过程中都与问题的物理背景有关。

初始条件和边界条件是根据特定物理问题的要求而提出来的。具有独立时间变量 t 的偏微分方程中, 初始条件给出了应变变量 $u(x, t)$ 在特定时间 $t = t_0$ 或 $t = 0$ 的物理状态。一般情况下, 给出初始条件 $u(x, 0)$ 或同时给出初始条件 $u(x, 0)$ 和边界条件就可以决定函数 $u(x, t)$ 在以后时间的变化。这类条件称为初始条件或柯西条件。它常是唯一解存在的必要和充分条件。在初始条件和边界条件的术语下, 我们一般讨论以下三类问题: ①初值问题, 此时定解条件中只有初始条件; ②边值问题, 此时定解条件中只有边界条件; ③初边值问题, 此时定解条件中既包含初始条件有包含边界条件。

如果一个 PDE 的定解问题的解同时具有存在性 (偏微分方程至少存在一个解), 唯一性 (偏微分方程最多存在一个解) 和稳定性 (解必须稳定, 就是说, 给定数据中发生微小变化, 其相应解的变化必须保持在允许的范围内), 则称此问题是一个适定 (well-posed) 问题, 否则它是一个病态 (ill-posed) 问题。稳定性指标是求解物理问题的一个基本要求。一个方程只有求得其稳定的解, 才能探讨该方程的实际意义。

2.3.3 偏微分方程的差分解法

在偏微分方程定解问题中, 我们很难直接求得方程的解析解。特别是在具体的应用中, 比如图像处理应用中所出现的偏微分方程大多都是各种非线性偏微分方程, 一般解析解很难求得, 这时我们可以借助数值计算来获取该问题的近似解。求解偏微分方程常用的几种数值解法主要有, 差分法、变分法和有限元法等。差分方法又称为有限差分方法或网格法, 是求偏微分方程定解问题数值解中应用最广泛的方法之一。它的基本思想是: 首先是将微分方程的求解区域分成足够细的网格, 将自变量的连续变化区域用有限离散点 (网格点) 集代替; 将问题中出现的连续变量的函数用定义在网格点上离散变量的函数代替; 通过用网格点上的函数的差商代替导数, 将含连续变量的偏微分方程定解问题化成只含有限个未知数的代数方程组 (称为差分格式)。最后把求解代数方程组得到的节点上的未知函数值作为微分方程的近似解。因此, 用差分方法求解偏微分方程定解问题一般需要解决以下问题:

- ①选取网格;
- ②对微分方程及定解条件选择差分近似, 列出差分格式;
- ③求解差分格式;
- ④讨论差分格式解对于微分方程解的收敛性及误差估计。

下面以一维热传导方程为基本模型来讨论适用于抛物型方程定解问题的几种差分格式。

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & (x, t) \in \Omega, \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in (0, 1), \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, & t \in [0, T], \end{cases} \quad (2.13)$$

其中, $\bar{\Omega} = \{(x, t) | x \in [0, 1], t \in [0, T]\}$, a 为正常数。

首先对 xt 平面进行网格剖分。分别取 h, τ 为 x 方向与 t 方向的步长, 用两族平行直线 $x = x_k = kh (k = 0, 1, 2, \dots), t = t_j = j\tau (j = 0, 1, 2, \dots)$, 将 xt 平面剖分成矩形网格, 节点为 $(x_k, t_j) (k = 0, 1, 2, \dots, j = 0, 1, 2, \dots)$ 。如果 $[0, 1]$ 被 N 等分, $k = 0, 1, 2, \dots, N$, 则 $h = 1/N$; 如果 $[0, T]$ 被 M 等分, $j = 0, 1, 2, \dots, M$, 则 $\tau = 1/M$ 。为简便起见, 记 $(k, j) = (x_k, t_j)$, $u_{k,j} = u(k, j) = u(x_k, t_j)$, $\varphi_k = \varphi(x_k)$ 。

接着我们对微分方程做差分近似, 在网格内点 (k, j) 处, 对 $\frac{\partial u}{\partial t}$ 分别采用向前、向后及中心差商公式, 对 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 采用二阶中心差商公式, 公式 (2.13) 可分别表示为

$$\begin{aligned} \frac{u(k, j+1) - u(k, j)}{\tau} - a \frac{u(k+1, j) - 2u(k, j) + u(k-1, j)}{h^2} &= O(\tau + h^2) \\ \frac{u(k, j) - u(k, j-1)}{\tau} - a \frac{u(k+1, j) - 2u(k, j) + u(k-1, j)}{h^2} &= O(\tau + h^2) \\ \frac{u(k, j+1) - u(k, j-1)}{2\tau} - a \frac{u(k+1, j) - 2u(k, j) + u(k-1, j)}{h^2} &= O(\tau + h^2) \end{aligned} \quad (2.14)$$

由此得到一维热传导方程的不同差分近似

$$\begin{aligned} \frac{u_{k,j+1} - u_{k,j}}{\tau} - a \frac{u_{k+1,j} - 2u_{k,j} + u_{k-1,j}}{h^2} &= 0 \\ \frac{u_{k,j} - u_{k,j-1}}{\tau} - a \frac{u_{k+1,j} - 2u_{k,j} + u_{k-1,j}}{h^2} &= 0 \\ \frac{u_{k,j+1} - u_{k,j-1}}{2\tau} - a \frac{u_{k+1,j} - 2u_{k,j} + u_{k-1,j}}{h^2} &= 0 \end{aligned} \quad (2.15)$$

其次, 对初边值条件进行离散化:

$$\begin{aligned} u(k, 0) &= \varphi_k = \varphi(x_k), & k &= 0, 1, 2, \dots, N; \\ u(0, j) &= u(N, j) = 0, & j &= 0, 1, 2, \dots, M; \end{aligned}$$

即为:

$$\begin{aligned} u_{k,0} &= \varphi_k, & k &= 0, 1, 2, \dots, N; \\ u_{0,j} &= u_{N,j} = 0, & j &= 0, 1, 2, \dots, M; \end{aligned}$$

一般我们对 $\frac{\partial u}{\partial t}$ 作向前差分，得到偏微分方程的显式差分方程组为：

$$\begin{cases} u_{k,j+1} = u_{k,j} + \frac{\tau a}{h^2} (u_{k+1,j} - 2u_{k,j} + u_{k-1,j}) \\ u_{k,0} = \varphi_k & k = 0, 1, 2, \dots, N; \\ u_{0,j} = u_{N,j} = 0 & j = 0, 1, 2, \dots, M. \end{cases}$$

这样，利用 $k=0$ 层上的数值，即可逐点算出 $k=1$ 层上的全部离散节点处解的近似值，再利用 k 层上的节点值算出 $k+1$ 层上的节点值。这样逐层逐点的显示计算数值解是非常方便的。若选用向后差商，便的得到偏微分方程的隐式差分格式。

2.4 变分原理和梯度下降法

在图像处理中求能量泛函的最小值经常用到变分法和梯度下降法。下面对这两种方法作一一介绍。

2.4.1 变分原理

变分问题是研究泛函的极值问题，这是一个很早就引起人们注意的问题。1696 年，J. Bernoulli 首先公开提出最速降线问题，并引起了一大批数学家的兴趣，从此数学进入了变分运算的年代。1744 年，L. Euler 综合了前人的工作，确立了变分法，从此变分运算及其研究迅速发展起来，成为应用数学研究领域的一个强有力的数学工具。经典的欧拉-拉格朗日（Euler-Lagrange）变分问题是，在满足边界条件的情况下，在域中找到函数 u ，并使泛函达到一个极小值。

设 $u_0(x) \in M, u(x)$ 是容许函数类 M 中的任一函数，如果 $J(u_0) \leq J(u)$ （或 $J(u_0) \geq J(u)$ ），则称泛函 $J(u)$ 在 u_0 处取得整体极小值（或整体极大值）；如果作为比较的函数 $u(x)$ 仅限于函数 $u_0(x)$ 的某一领域中，则称 $J(u)$ 在 u_0 处取得局部极小值（或局部极大值）。极大（小）值通常称为极值，极大值函数和极小值函数通称为极值函数。泛函的整体（或局部）极值类似于普通函数的整体（或局部）极值。变分法的核心就是求泛函的极值函数和相应的极值问题。

变分基本引理 1 设函数 $\eta(x) \in C^1[x_0, x_1]$ 且 $\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0$ ，若对于 $f(x) \in C[x_0, x_1]$ 均有 $\int_{x_0}^{x_1} f(x)\eta(x)dx = 0$ ，则 $f(x) \equiv 0, \forall x \in [x_0, x_1]$ 。

变分基本引理 2 设 D 为平面区域， ∂D 为 D 的边界， $\eta(x, y) \in C^1(\bar{D})$ 且 $\eta|_{\partial D} = 0$ 。若对于 $f(x, y) \in C(D)$ ，均有 $\iint_D f(x, y)\eta(x, y)dxdy = 0$ ，则 $f(x) \equiv 0, \forall x \in D$ 。

下面我们来讨论最简变分问题，即

$$\begin{cases} J[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx \\ \text{求 } y^* \in X, \text{使 } J[y^*] = \min_{y \in X} J(y) \end{cases} \quad (2.16)$$

其中, $X = \{y \mid y \in C^2[x_0, x_1], y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1\}$, F 是关于 x, y, y' 的三元函数, 且 $F(x, y, y') \in C^2, x_0, y_0, x_1, y_1$ 均为常数。

我们假定 X 中极值函数 y^* 是存在的, 设

$$y(x) = y^* + \alpha \eta(x), \quad (2.17)$$

其中, $\eta(x) \in C^2[x_0, x_1]$, 且 $\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0$, α 为参数。显然, $y(x) \in C^2[x_0, x_1]$ 且 $y(x_0) = y^*(x_0) = y_0, y(x_1) = y^*(x_1) = y_1$ 。故 $y(x) \in X$ 。这样,

记

$$\Phi(\alpha) = J[y^* + \alpha \eta] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y^* + \alpha \eta, y^{*'} + \alpha \eta') dx.$$

则

$$\begin{aligned} \Phi'(\alpha) &= \frac{d}{d\alpha} \int_{x_0}^{x_1} F(x, y^* + \alpha \eta, y^{*'} + \alpha \eta') dx \\ &= \int_{x_0}^{x_1} [F_y(x, y^* + \alpha \eta, y^{*'} + \alpha \eta') \eta \\ &\quad + F_{y'}(x, y^* + \alpha \eta, y^{*'} + \alpha \eta') \eta'] dx \\ &= \int_{x_0}^{x_1} F_y \eta dx + [F_{y'} \eta]_{x=x_0}^{x=x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{dx} (F_{y'}) \eta dx \\ &= \int_{x_0}^{x_1} [F_y - \frac{d}{dx} F_{y'}] \eta dx. \end{aligned}$$

从而有

$$\begin{aligned} \Phi'(\alpha)|_{\alpha=0} &= \Phi'(0) \\ &= \int_{x_0}^{x_1} \left[F_y(x, y^*, y^{*'}) - \frac{d}{dx} F_{y'}(x, y^*, y^{*'}) \right] \eta(x) dx \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.18)$$

由于 $F_y - \frac{d}{dx} F_{y'}$ 是 x 的连续函数, $\eta(x)$ 是任意的, 故由变分基本引理 1, 推出 y^* 要满足的条件为:

$$\begin{cases} F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0, \\ y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1. \end{cases} \quad (2.19) \quad \text{这} \quad (2.20)$$

里, 方程 (2.19) 称为欧拉 (Euler) 方程, 加上边界条件 (2.20), 称为欧拉方程边值问题。

采用上面同样的方法, 我们来考虑泛函

$$E(u) = \int_a^b F(x, u, u', u'') dx \quad (2.21)$$

可以得到Euler方程

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial u'} \right) + \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial u''} \right) = 0 \quad (2.22)$$

对于二维情况，能量泛函可以写成

$$E(u) = \iint_D F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{yy}) dx dy \quad (2.23)$$

式中函数 F 定义域为 D ，且具有二阶连续偏导数。

得到Euler-Lagrange方程

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial u_x} \right) - \frac{d}{dy} \left(\frac{\partial F}{\partial u_y} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial F}{\partial u_{xx}} \right) + \frac{d^2}{dy^2} \left(\frac{\partial F}{\partial u_{yy}} \right) = 0 \quad (2.24)$$

即函数 $u(x, y)$ 是泛函方程取极值的必要条件是满足微分方程 (2.24)。这就是具有两个独立变量的欧拉-拉格朗日方程。

严格地讲，由于欧拉微分方程边值问题的解满足的只是变分问题的必要条件，故它是否一定是极值函数或极值曲线，还需作进一步判别。但是在实际问题中，极值的存在性往往是在问题给出时已经肯定的。

2.4.2 梯度下降法

经过变分法我们得到 Euler 方程，下面的问题是如何求解的问题，即如何求解方程 $E'(u) = 0$ ，但是 Euler 方程一般是非线性的，只有在很少数比较简单的方程中才可能直接求得方程的解。特别是在图像处理过程中，虽然我们成功的将能量泛函推到演化方程，但是在多数情况下，我们无法直接求得 u 的值。为了解决这一难题，我们引入时间变量 $t, (t \geq 0)$ ，于是我们将求解静态问题转化为曲线随时间动态演化的问题^[35]。当演化达到稳定时，也就是变分问题 Euler 方程的解

我们依旧以一维变分问题为例，

$$E(u) = \int_a^b F(x, u, u') \quad (2.25)$$

微扰项 $v(\cdot)$ 是由 $u(\cdot, t)$ 从 t 到 $t + \Delta t$ 所产生的改变量，即

$$v = \frac{\partial u}{\partial t} \Delta t$$

这样一阶变分问题就可以改写为

$$E(\cdot, t + \Delta t) = E(\cdot, t) + \Delta t \int_a^b \frac{\partial u}{\partial t} \left[\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial u'} \right) \right] dx$$

于是只要令

$$\frac{\partial u}{\partial t} = - \left[\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial u'} \right) \right] = \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial u'} \right) - \frac{\partial F}{\partial u} \quad (2.26)$$

就可使 $E(u(\cdot, t))$ 不断减小, 因为这时

$$\Delta E = E(\cdot, t + \Delta t) - E(\cdot, t) = -\Delta t \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial u'} \right) \right]^2 dx \leq 0$$

故称式(2.26)为变分问题式(2.25)所对应的梯度流 (最速下降流)。

我们可以从偏微分方程的初始值 u_0 开始, 根据式(2.26)作迭代计算, 知道 u 达到稳定解为止, 这时

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial u'} \right) = 0$$

可见梯度下降流的稳态解也是Euler方程式的解。

对于二维变分问题, 类似推导, 可得梯度下降流:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial u_x} \right) + \frac{d}{dy} \left(\frac{\partial F}{\partial u_y} \right) - \frac{\partial F}{\partial u}$$

对于非凸的能量泛函, 欧拉方程构建的偏微分方程的解不是唯一的, 而且最终的解值和初始值 u_0 的选择有很大关系。对不同的 u_0 我们可能得到不同的局部极小值而不是全局最小值。

3 基于水平集方法的图像分割

3.1 曲线演化理论

曲线演化理论的目的是仅使用几何度量研究曲线形变，这些几何度量包括单位法向量、曲率。本文所研究的曲线演化对象仅限于简单曲线，即：闭合、无交叉的曲线，如图（3.1）所示。

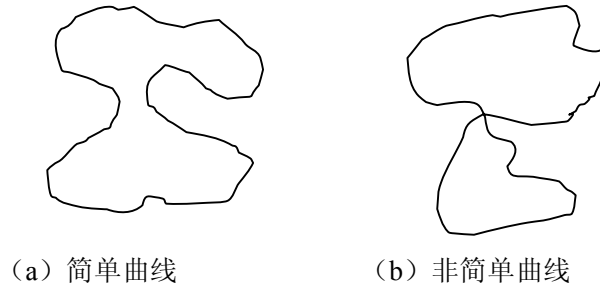


图 3.1 简单曲线和非简单曲线

Fig 3.1 Simple curve and non-simple curve

曲线演化理论是指利用演化曲线本身的几何性质如法向量或曲率来研究曲线随着时间的变化，而在参数曲线演化模型中，曲线演化依赖的是任意参数化曲线的导数。考虑运动曲线 $C(s,t) = (X(s,t), Y(s,t))$ ，其中 s 为任意参数化变量， t 为时间，用 N 表示描述曲线方向的单位法向矢量， k 为描述曲线弯曲程度的曲率，曲线沿法向的演化可由下述偏微分方程表达：

$$\frac{\partial C}{\partial t} = V(k)N \quad (3.1)$$

其中， $V(k)$ 被称为速度函数，它决定了曲线上每点的演化速度，曲线的演化沿着单位法失的方向运动如图 3.2 所示。要指出的是，沿任意方向运动的曲线总是可以重新参数化为方程（3.1）的形式，因为曲线的切线方向的变形仅仅影响曲线的参数化，不会改变其形状和几何属性。

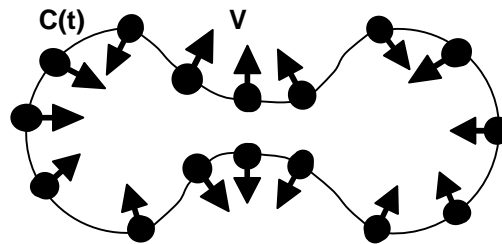


图 3.2 曲线演化示意图

Fig 3.2 Planar curve evolution

在曲线演化理论中对曲线变形研究最多的是曲率变形 (curvature deformation) 和常量变形 (constant deformation) 两种方法。由于曲线演化是本论文所使用的水平集方法的基础, 以下从最短测地轮廓线的角度推导出测地轮廓线演化方程, 并进一步得到曲线的曲率和常量演化方程。

令 $c(q) \in C$ $q \in [a, b]$ 且 $c(t, q)$ 是一个曲线族, $t \geq 0$ 是一个外部参数 (时间), $c(0, q) = c(q)$, 假定 $c(t, a) = c(t, b)$, 且对所有 $t > 0$ 有 $\frac{\partial c}{\partial t}(t, a) = \frac{\partial c}{\partial t}(t, b)$ 。定义弧长 $s = s(q) = \int_a^q \left| \frac{\partial c}{\partial q}(\tau) \right| d\tau$, 对任意曲线 c 有:

$$\frac{\partial^2 c}{\partial q^2} = \left| \frac{\partial c}{\partial q} \right|^2 \frac{\partial^2 c}{\partial s^2} + \left\langle T, \frac{\partial^2 c}{\partial q^2} \right\rangle T,$$

其中 T 表示单位切向矢量, $T = \frac{\partial c}{\partial q} / \left| \frac{\partial c}{\partial q} \right|$ 。令 N 为曲线的单位法矢量, k 为曲率,

$$\frac{\partial^2 c}{\partial s^2} = kN$$

设曲线的测地距离为

$$E(t) = \alpha \int_a^b g(|\nabla I(c(t, q))|) \left| \frac{\partial c}{\partial q}(t, q) \right| dq,$$

为求最短测地距离, 对上式求导得

$$E'(t) = \alpha \int_a^b \left\langle \frac{\frac{\partial c}{\partial q}}{\left| \frac{\partial c}{\partial q} \right|}, \frac{\partial^2 c}{\partial t \partial q} \right\rangle dq + \alpha \int_a^b \left| \frac{\partial c}{\partial q} \right| \left\langle \nabla g, \frac{\partial c}{\partial t} \right\rangle dq$$

上式右边第一个积分项对 q 分部积分得:

$$E'(t) = -\alpha \int_a^b \left\langle g \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{\frac{\partial c}{\partial q}}{\left| \frac{\partial c}{\partial q} \right|} \right) + \frac{\partial c}{\partial q} \left\langle \nabla g, \frac{\partial c}{\partial q} \right\rangle, \frac{\partial c}{\partial t} \right\rangle dq + \alpha \int_a^b \left| \frac{\partial c}{\partial q} \right| \left\langle \nabla g, \frac{\partial c}{\partial t} \right\rangle dq,$$

该方程可写为:

$$E'(t) = \partial \alpha \int_a^b \left| \frac{\partial c}{\partial q} \right| \left\langle \frac{\partial c}{\partial t}, \nabla g - \frac{1}{\left| \frac{\partial c}{\partial q} \right|} \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{\frac{\partial c}{\partial q}}{\left| \frac{\partial c}{\partial q} \right|} \right) g - \frac{\partial c}{\partial q} \left\langle \nabla g, \frac{\partial c}{\partial q} \right\rangle \right\rangle dq,$$

由 T, N, k 的定义, 得到:

$$E'(t) = \alpha \int_a^b \left| \frac{\partial c}{\partial q} \right| \left\langle \frac{\partial c}{\partial t}, \nabla g - kgN - \langle T, \nabla g \rangle T \right\rangle dq,$$

再基于 (N, T) 分解 ∇g ，最终得到：

$$E'(t) = \alpha \int_a^b \left| \frac{\partial c}{\partial q} \right| \left\langle \frac{\partial c}{\partial t}, \langle \nabla g, N \rangle N - kgN \right\rangle dq.$$

因而 $J(t)$ 最快速减小的方向由下式给出：

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \alpha (kg - \langle \nabla g, N \rangle) N. \quad (3.2)$$

注意：如果 $g \equiv 1$ ，那么上式简化为：

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \alpha kN. \quad (3.3)$$

其中， α 是正值常数，而 k 是曲线的曲率。上述方程又可以称为“曲线变短流”（Curve Shortening Flow），闭合曲线在曲率方程的作用下会逐渐变平滑、收缩变形，并使曲线的总长度变小，最终收缩成一个圆点。

与上式对应的常量演化方程为常量变形由下述方程描述：

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \alpha N,$$

其中， α 为决定曲线变形速度的系数。常量变形所起的作用同参数变形模型中的压力（气球力）的效果相同。在常量演化过程，可以看到，常量演化最终会导致曲线出现尖角，并可能导致演化曲线的拓扑结构的变化。这正好与曲率变形保持光滑、消除奇点的作用形成互补。

以上两种演化曲线又称为活动轮廓线。将曲线演化理论用于图像分割，基本思想是如何耦合图像数据和曲线的演化速度，使得当曲线运动到物体的边界时演化速度为零，停止演化。演化过程是通过水平集方法来实现的。虽然我们可以使用参数化的方式表达曲线的动态演化，但是参数演化无法处理曲线拓扑结构的变化尤其是对三维情形。因此，需要有一种更加自然地处理曲线的几何参数的计算方法，而水平集方法正好满足这个要求。

3.2 水平集方法

水平集的方法和活动轮廓模型的方法有些类似，其基本思想就是耦合图像数据和变形速度（可以使用曲率变形或常量变形），使得曲线演化停止在目标的边缘位置，曲线演化过程通过水平集方法来实现。该模型最大的特点是计算的稳定性和拓扑无关性，近年来水平集方法逐渐成为研究的热点，被广泛应用于图像分割中。

水平集方法（Level set method）最初是由 Osher 和 Sethian^[36,37]为了解决遵循热力学

方程下的火苗的外形变化过程而提出的。该方法的基本原理是，将用于演化的曲线或曲面作为零水平集嵌入到高一维的水平集函数中，通过演化这个更高维函数，达到隐式演化嵌入其中的零水平集的目的。以二维水平集方法为例，平面闭合曲线 C 被隐含地表达为三维连续函数曲面 $\phi(x, y, t)$ 的一个具有相同函数值的同值曲线 $\{\phi = c\}$ ，其中 $\phi(x, y, t)$ 称为水平集函数。在处理曲线演化的问题时，水平集函数按照一定的规律在坐标平面上不断更新演化，然后再求出同值水平集所在的位置，即为曲线演化后的形状。

我们把平面上的一条闭合曲线 C 定义为一个二维函数 $\phi(x, y)$ 的水平集

$$C = \{(x, y), \phi(x, y) = c\}$$

这样 C 的某种变化，我们看作是由于 $\phi(x, y)$ 发生的相应变化引起的。具体来说，随时间变化的封闭曲线，可以表达为随时间变化的三维函数 $\phi(x, y, t)$ 的水平集，即

$$C(t) := \{(x, y), \phi(C(t), t) = c\} \quad (3.4)$$

对方程 (3.4) 求全微分得:

$$\frac{d\phi}{dt} = \nabla \phi \cdot \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (3.5)$$

假设

$$\begin{aligned} \phi(x, y) &> c, & (x, y) \text{ 在封闭曲线 } C \text{ 外部} \\ \phi(x, y) &< c, & (x, y) \text{ 在封闭曲线 } C \text{ 内部} \\ \phi(x, y) &= c, & (x, y) \text{ 在封闭曲线 } C \text{ 上} \end{aligned}$$

根据水平集函数的定义， ϕ 沿着 C 的切线方向的变化量为零， $\nabla \phi$ 与闭合曲线 C 的切线垂直，因此 $\nabla \phi$ 和 C 的法线同向。另外 (3.5) 的推导与常数 c 的选取无关，所以，为了方便，常取 $c = 0$ ，即我们关心的曲线是嵌入函数的零水平集，此时零水平集 C 的内向单位法矢量为 $N = -\frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|}$ 。将它和方程 (3.1) 代入 (3.5) 式，可得

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -\nabla \phi \cdot V(C)N = \nabla \phi \cdot V(C) \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} = V(C)|\nabla \phi| \quad (3.6)$$

这个方程称为水平集方程法^[38]，它是曲线演化方程 $\frac{\partial C}{\partial t} = V(k)N$ 的欧式表达。此时，曲线的曲率可以用水平集函数表示为 $k = \text{div}(\frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|})$ 。

下面我们通过图 3.3 来理解水平集方法的思想：初始时刻的曲线如(a)所示，为一条闭合曲线，作为零水平集被嵌入在曲面中的情形如图(b) $\phi(x, y) = 0$ 。曲线到达另一时刻的形状如图(c)所示，此时嵌入在演化曲面中的情形如图(d) $\phi(x, y) = 0$ 所示，从中可以看到 $\phi(x, y) = 0$ 是随着嵌入函数 ϕ 的演化在不断发生变化。

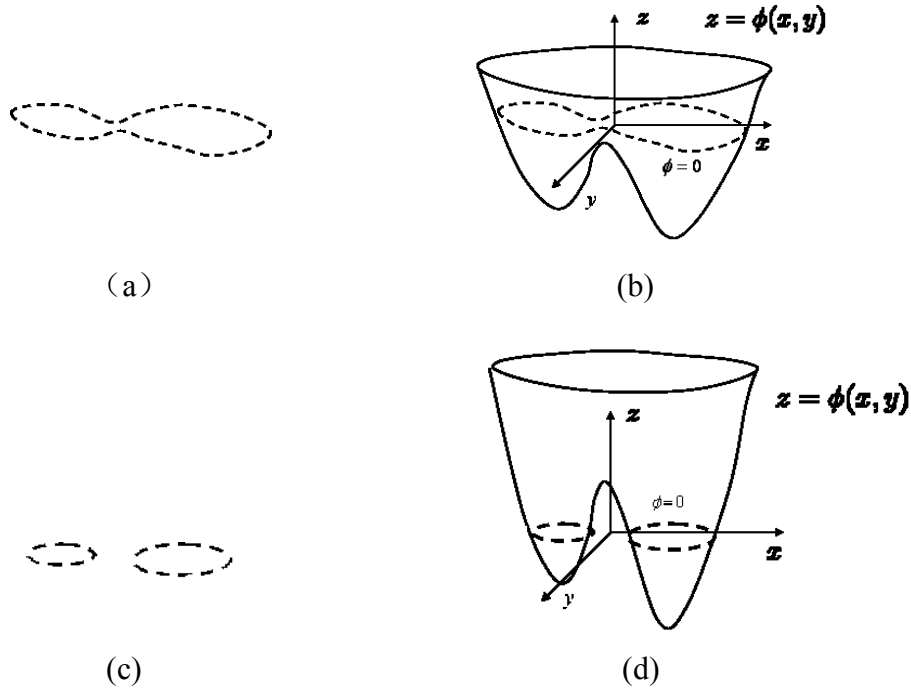


图 3.3 演化的水平集及嵌入的曲面

Fig 3.3 Evolution level set curve and embedded surface

在进行数值计算时，首先要选用一个水平集函数 ϕ ，通常要使它初值的零水平集对应与给定的初始曲线 C_0 。水平集函数 $\phi(x, y)$ 的选择是不唯一的，对应于不同的构造方法，通常要使它初值的零水平集对应与给定的初始曲线 C_0 。下面我们介绍两种常用的水平集函数的构造方法。

一种是使得闭合曲线内部网格点值为-1，闭合曲线外部网格点为+1，闭合曲线上值为 0，可以得到阶跃式水平集函数。

$$\phi(x, y) = \begin{cases} 1 & (x, y) \text{ 在封闭曲线 } C \text{ 外部} \\ 0 & (x, y) \text{ 在封闭曲线 } C \text{ 上} \\ -1 & (x, y) \text{ 在封闭曲线 } C \text{ 内部} \end{cases}$$

另外一种比较常用的水平集函数是：由初始曲线 $C_0(x, y)$ 生成的符号距离函数 (Signed Distance Function)。设 $\phi(x, y, 0), (x, y) \in R^2$ 是符号距离函数，则有

$$\phi(x, y, 0) = \begin{cases} d[(x, y), C] & (x, y) \text{ 在封闭曲线 } C \text{ 外部} \\ -d[(x, y), C] & (x, y) \text{ 在封闭曲线 } C \text{ 内部} \end{cases}$$

其中 $d[(x, y), C]$ 表示点 (x, y) 与曲线 C 之间的 Euclidean 距离。在曲线演化过程中要求水平集函数始终保持为符号距离函数。对于任意闭合曲线，如果我们去直接计算符号距离函数计算量较大，从而导致演化速度很慢。为了计算的简单我们一般选择 C_0 为简单规则的闭合曲线。例如，当 C_0 是一个圆心在 (x_0, y_0) ，半径为 R 的圆，初始曲线的方程表达

为：

$$\phi_0(x, y) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} - R$$

即可。在本毕业论文中我们主要采用这种形式的水平集函数。

选择符号距离函数的优点是：数值计算比较稳定。这主要是因为距离函数具有如下性质：

$$|\nabla \phi| = 1$$

这意味着水平集函数 $\phi(x, y)$ 的变化率是比较平缓的。初始化 $\phi(x, y)$ 就是要在给定的区域 Ω 内，计算每一网格点到初始曲线 C_0 的距离。然后根据网格点是在 C_0 的内部还是外部分别赋予负号或正号。

用水平集方法实现活动轮廓线的演化，把一个低维的问题转化为高维问题，这就使得问题在形式上变得似乎更加复杂，但是随着计算机的发展水平集方法还是越来越显示出它的优点：

(1) 只要速度函数 V 是平滑的，则水平集函数 $\phi(x, y, t)$ 将始终保持为一个有效的函数。其零水平集演化曲线在演化过程中可以很自然的处理拓扑结构的变化。

(2) 借助于偏微分方程方法成熟的理论基础，可以得到稳定的、高精度的有限差分格式。

(3) 水平集方法可以直接推广到求解高维曲面的演化运动。

(4) 可以直接由 $\phi(x, y, t)$ 计算曲线 C 的几何特征，比如单位法矢和曲率等。

(5) ϕ 在演化过程中保持为符号距离函数，在演化过程中很容易的利用离散网络结构的有限差分法来实现数值计算近似解。

3.3 水平集方法的数值计算

通过前一章偏微分方程数值方法的学习，我们知道其数值解法有很多种，比如：有限差分法、有限元法、谱法等。其中，有限差分法（finite difference）法是目前图像处理中最为常用的一种数值近似方法。这主要是数字图像的空间定义域是二维等间隔离散化的点集，并且其灰度值也被离散化为整数型，这样就很自然地构成了有限差分法所需要的等分网格（grid）。因此，同样要想利用水平集方法来实现曲线演化，也必须采用适当的数值方法近似求解。由于水平集函数在演化过程中始终保持为一个函数，因此我们可以用离散网格表达水平集函数 $\phi(x, y, t)$ 。设离散网格的间隔为 h ，时间步长为 Δt ， ϕ_{ij}^n 表示 n 时刻、在节点 (i, j) 处的水平集函数，即 $\phi_{ij}^n = \phi(ih, jh, n\Delta t)$ 。则方程（3.6）可以离散化为

$$\frac{\phi_{ij}^{n+1} - \phi_{ij}^n}{\Delta t} = V_{ij}^n |\nabla_{ij} \phi_{ij}^n| \quad (3.7)$$

式中： V_{ij}^n 表示 n 时刻网格点 ij 处的曲线演化速度。在计算曲线演化方程过程中我们会用到水平集函数的一、二阶导数，这时我们可以利用水平集函数满足“熵守恒”条件的有限差分格式计算，以避免常量演化中可能导致的水平集函数奇异性问题。为此定义如下的六个有限差分算子：

$$\begin{aligned} D_{i,j}^{-x} &= \phi_{i,j} - \phi_{i-1,j}, D_{i,j}^{+x} = \phi_{i+1,j} - \phi_{i,j}, D_{i,j}^{0x} = (\phi_{i+1,j} - \phi_{i-1,j}) / 2 \\ D_{i,j}^{-y} &= \phi_{i,j} - \phi_{i,j-1}, D_{i,j}^{+y} = \phi_{i,j+1} - \phi_{i,j}, D_{i,j}^{0y} = (\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j-1}) / 2 \end{aligned}$$

则方程 (3.7) 的近似解可以写成如下形式：

$$\phi_{i,j}^{n+1} = \phi_{i,j}^n - \Delta t [\max(V_{i,j}, 0) \nabla^+ + \min(V_{i,j}, 0) \nabla^-] \quad (3.8)$$

其中

$$\begin{aligned} \nabla^+ &= \left\{ \left[\max(D_{i,j}^{-x}, 0) \right]^2 + \left[\min(D_{i,j}^{+x}, 0) \right]^2 + \left[\max(D_{i,j}^{-y}, 0) \right]^2 + \left[\min(D_{i,j}^{+y}, 0) \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \\ \nabla^- &= \left\{ \left[\min(D_{i,j}^{-x}, 0) \right]^2 + \left[\max(D_{i,j}^{+x}, 0) \right]^2 + \left[\min(D_{i,j}^{-y}, 0) \right]^2 + \left[\max(D_{i,j}^{+y}, 0) \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

应用于图像分割，方程 (3.6) 中的速度函数通常可以写成如下形式：

$$V = V_{prop} + V_{curv} + V_{adv}$$

式中 $V_{prop} = V_0$ 是常量扩张速度（气压力）； $V_{adv} = U(x, y, t) \cdot N$ 是水平对流速度 $U(x, y, t) = (u(x, y, t), v(x, y, t))$, $V_{curv} = -\varepsilon k$ 是曲率速度；则方程 (3.6) 的近似解为：

$$\begin{aligned} \phi_{i,j}^{n+1} &= \phi_{i,j}^n + \Delta t \{ -[\max(V_{0ij}, 0) \nabla^+ + \min(V_{0ij}, 0) \nabla^-] \\ &\quad - [\max(u_{ij}^n, 0) D_{ij}^{-x} + \min(u_{ij}^n, 0) D_{ij}^{+x}] \\ &\quad - [\max(v_{ij}^n, 0) D_{ij}^{-y} + \min(v_{ij}^n, 0) D_{ij}^{+y}] \\ &\quad + \varepsilon k_{i,j} [(D_{i,j}^{0y})^2 + (D_{i,j}^{0x})^2]^{1/2} \} \end{aligned} \quad (3.9)$$

这种差分方法成为逆向有限差分法（Upwind Finite Difference）。

通过 (3.7) 就是我们的迭代方程，随着水平集函数的迭代更新，利用轮廓检测的方法，可以得到更新后的水平集函数的零水平集，即可得到演化后的活动轮廓线，一直到得到物体的边缘轮廓为止。而且，轮廓曲线的曲率可以直接采用中心差分方法来数值计算，即采用 $D_{i,j}^{0x}$ 和 $D_{i,j}^{0y}$ 来近似，而单位法向矢量可以按照下式计算：

$$\begin{aligned} n_{i,j}^+ &= \frac{(\phi_x, \phi_y)}{\sqrt{\phi_x^2 + \phi_y^2}} = \frac{(D_{i,j}^{+x}, D_{i,j}^{+y})}{\sqrt{(D_{i,j}^{+x})^2 + (D_{i,j}^{+y})^2}} + \frac{(D_{i,j}^{-x}, D_{i,j}^{-y})}{\sqrt{(D_{i,j}^{-x})^2 + (D_{i,j}^{-y})^2}} \\ &\quad + \frac{(D_{i,j}^{+x}, D_{i,j}^{-y})}{\sqrt{(D_{i,j}^{+x})^2 + (D_{i,j}^{-y})^2}} + \frac{(D_{i,j}^{-x}, D_{i,j}^{+y})}{\sqrt{(D_{i,j}^{-x})^2 + (D_{i,j}^{+y})^2}} \end{aligned}$$

然后，

$$N_{i,j} = \frac{n_{i,j}^+}{|n_{i,j}^+|}$$

用水平集方法实现轮廓线的演化的最大优点是能够比较容易处理演化过程中活动轮廓线拓扑结构的变化, 因此水平集方法在图像分割中的应用越来越广泛, 同时也被越来越多的应用到图像处理的其他领域。

3.4 水平集方法用于图像分割

偏微分方程应用于图像分割主要是采用活动轮廓模型来实现。一般地, 活动轮廓模型依据其表达和实现方法不同可分为两种, 一种是参数化的 **Snake** 模型, 另外一种是何活动轮廓模型。传统的参数化 **Snake** 模型是一种典型的基于变分的能量极小化模型。其主要思想是, 在图像某个区域的附近定义一条带能量的初始演化曲线, 利用图像边缘所需要的内部/外部约束定义一个表示曲线的能量函数, 然后利用变分法对能量函数极小化, 得到模型演化的偏微分方程。然而, 由于传统的 **Snake** 方法是基于 **Lagrange** 的表达方式, 所以很难处理演化曲线拓扑结构发生变化的情形, 同时由于该模型用参数来表示曲线和曲面的一些性质, 因此并且很难将其推广到高维空间。而用水平集表达的几何活动轮廓模型在演化过程中曲线拓扑结构的变化可以得到自然的处理, 其基本思想是: 把活动轮廓模型隐含的表示为一个高一维的水平集函数的零水平集, 然后利用包含曲线变形力 (如法向常量或曲率驱动力) 的速度函数 F , 在图像空间范围内演化水平集函数, 使得水平集函数的零水平集描述的闭合曲线在目标的轮廓线位置停止。也就是说我们通过演化水平集函数而得到零水平集的表达形式。

水平集应用于图像分割主要有两种基本形式, 一是在早期的几何活动轮廓模型中, 一般是先利用曲线演化理论, 得到一个用拉格朗日方式描述的二维曲线演化的偏微分方程, 再利用水平集方法将其转化为相应的水平集表达形式; 二是利用变分法, 极小化一个关于平面参数化曲线的能量函数, 得到曲线演化的梯度下降流, 然后再转化为水平集演化的欧式表达。水平集函数演化的偏微分方程也可以直接通过极小化关于水平集函数自身的能量函数来实现, 这种方法称为变分水平集方法。变分水平集方法的关键是首先建立一个能量模型, 并且能量模型中的内、外部能量都使用水平集函数表示, 再利用变分法对这个能量函数极小化, 便得到水平集演化的偏微分方程。

相对于传统的由纯粹的 **PDE** 驱动的水平集图像分割方法, 基于变分水平集的图像分割方法可以在能量函数中自然地融入附加约束信息, 如基于图像区域、边缘或物体形状先验知识的信息, 因而可以产生鲁棒性更强的结果。在基于偏微分方程的图像分割领域, 应用变分水平集方法中一个比较典型的例子是 **Chan** 和 **Vese** 提出的 **C-V** 模型。

在接下来的两章中我们将着重介绍基于区域的图像分割模型, 并通过分析模型的优缺点给出本文的改进方法。

4 C-V 模型的两个改进模型

4.1 C-V 模型

4.1.1 M-S 分割模型

1989 年 Mumford 与 Shah^[27]从图像的整体特征出发,提出了 M-S 模型,该模型能够分割一些边缘模糊甚至不完整边界的图像。其基本思想是:最小化近似图像与原始图像之间的误差。假设图像 $I(x, y) \in \Omega$, 目标物体的实际边界轮廓线 $C_0(x, y)$ 把图像分割为若干同质区域图像 $I_o^{MS}(x, y)$ 。此时, 分割图像 $I_o^{MS}(x, y)$ 与原始图像 $I(x, y)$ 之间的误差是所有分割图像中最小的。设图像域 Ω 中任意闭合曲线 $C(x, y)$ 将图像分割成图像 $I_o(x, y)$, 则图像分割的目的就是最小化 M-S 能量方程

$$E^{MS}(I_o, C) = \mu \text{Length}(C) + \lambda \int_{\Omega} |I - I_o|^2 dx dy + \int_{\Omega/C} |\nabla I_o|^2 dx dy \quad (4.1)$$

其中, 第一项为长度项, 控制图像边缘的粗糙度, 使边界尽可能光滑; 第二项为图像的保真项, 表示原图像与近似图像之间的近似程度; 第三项为正则项, 保证图像的光滑性。图像的分割过程就是求得能使能量方程取极小值的最优分割闭合轮廓线 $C_0(x, y)$ 的过程, 所得轮廓线 $C_0(x, y)$ 将图像划分为若干个图像平滑区域 $I_o(x, y)$ 。由上式可以看出, M-S 模型的能量函数中包含了对图像区域和边界的描述项, 而不仅仅依赖图像的边缘梯度信息, 通过一次能量函数的优化, 就把图像分割为不同的同质区域图像, 使各个区域对应于不同的物体或物体的不同部分。

M-S 模型在具体应用中由于其自身的缺陷依旧存在许多问题, 首先该模型是一种自由不连续问题, 对图像边缘采用几何测度来进行控制, 这使得数值求解过程比较困难, 特别是对于分割具有复杂边界的图像, 我们很难计算曲线长度项 $\text{Length}(C)$ 。同时 M-S 模型能量函数中各项最小值问题不均为非凸的, 解是不唯一的, 因此很难求得能量函数的全局最优解。鉴于此, 很多学者对其能量函数进行了改进, 但是这些方法仍然存在着计算量较大, 数值求解不易等问题。其中最著名的是 2001 年 Chan 和 Vese^[28]利用水平集方法提出一种简化的 M-S 模型: C-V 模型, 极大地促进了 Mumford-Shah 模型和主动轮廓模型的发展和应用。

4.1.2 C-V 分割模型

C-V 模型基于更为简单直接的假设: 即图像中同质区域内的灰度是常数。从数学上看, C-V 模型实际上是一种两区域二值最小划分问题 (minimal partition problem) 的水平集形式。从图像分割的角度看, 设图像 $I: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ 具有退化形式: $I(x) = c_+ \chi_{\Omega_+}(x) + c_- \chi_{\Omega_-}(x) + \text{noise}$, 设将图像分割为目标图像区域 Ω_+ 和背景图像 Ω_- , c_{\pm}

是常数,分别表示目标图像区域 Ω_+ 和背景图像区域 Ω_- 的灰度灰度平均值, $\Omega = \Omega_+ \cup \Omega_-$, $\Omega_+ \cap \Omega_- = \emptyset$, χ_{Ω_\pm} 表示 Ω_\pm 的特征函数, C-V 模型给出了恢复 c_\pm 和 Ω_\pm 的方法:

$$\begin{aligned} \inf_{\phi, c_+, c_-} E(\phi, c_+, c_-) &= \inf_{\phi} \inf_{c_+, c_-} E(\phi, c_+, c_-) \\ E(C, c_+, c_-) &= \mu \text{Length}(C) + \lambda_1 E_1(C) + \lambda_2 E_2(C) \\ &= \mu L(C) + \lambda_1 \int_{\text{inside}(C)} |I - c_+|^2 dx dy + \lambda_2 \int_{\text{outside}(C)} |I - c_-|^2 dx dy \end{aligned} \quad (4.2)$$

其中, C 是演化曲线, $\text{inside}(C)$ 和 $\text{outside}(C)$ 分别表示演化曲线的内部和外部区域, $\mu \geq 0$, $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ 是权重系数。在实验中我们一般取 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ 。在能量泛函中, 第一项(光滑项)起正则化作用, 后两项为能量拟合项:

$$E_F(C) = \lambda_1 \int_{\text{inside}(C)} |I - c_+|^2 dx dy + \lambda_2 \int_{\text{outside}(C)} |I - c_-|^2 dx dy \quad (4.3)$$

使零水平集更好地拟合 Ω_\pm 的公共边界(目标边缘)。下图所示为拟合能量函数 $E_F(C)$ 在曲线各种演化状况下的取值情况: 由前三种情况可以看出, 当轮廓线 $C(x, y)$ 没有位于两个同质区域的边界时, 曲线拟合能量 $E_F(C)$ 均大于零, 不能达到极小值; 只有当轮廓线 $C(x, y)$ 位于两个同质区域边界时, 拟合能量 $E_F(C)$ 达到极小值 0。

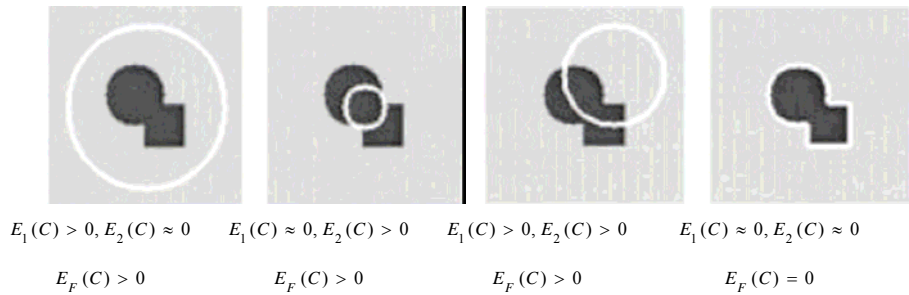


图 4.1 Chan-Vese 模型示意图

Fig4.1 Illustrations to the C-V segmentation model

设 ϕ_0 是根据演化曲线 $C(x, y)$ 的初始轮廓曲线构造的符号距离函数, 即有 $\phi_0(x, y) = 0$; $\phi(x, y, t)$ 为演化过程中的水平集函数, 第零水平集描述演化的曲线 $C(x, y, t) : \{\phi(x, y, t) = 0\}$, 从而得到能量泛函(4.2)的水平集表达形式:

$$\begin{aligned} E(C) &= \mu \int_{\Omega} \delta(\phi) |\nabla \phi| dx dy + \lambda_1 \int_{\Omega} |I - c_+|^2 H(\phi) dx dy \\ &\quad + \lambda_2 \int_{\Omega} |I - c_-|^2 [1 - H(\phi)] dx dy \end{aligned} \quad (4.4)$$

其中 $\delta(x)$ 是 Dirac 函数; $H(x)$ 是 Heaviside 函数。

外层极小采用变分法和最速下降法给出了图像 I 的分割结果:

$$\hat{I}(x) = c_+ H(\phi(x)) + c_- (1 - H(\phi(x)))$$

其中, 平均灰度值 c_+ , c_- 具有如下的表示式

$$\begin{aligned}
c_+(\phi) &= \frac{\int_{\Omega} I(x, y) H(\phi) dx dy}{\int_{\Omega} H(\phi) dx dy} \\
c_-(\phi) &= \frac{\int_{\Omega} I(x, y) (1 - H(\phi)) dx dy}{\int_{\Omega} (1 - H(\phi)) dx dy}
\end{aligned} \tag{4.5}$$

其中，水平集函数 ϕ 的演化由偏微分方程(4)控制：

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \delta(\phi) \mu \operatorname{div} \left(\frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \right) + \delta(\phi) \left[-(I - c_+)^2 + (I - c_-)^2 \right] \tag{4.6}$$

($\delta = H'$ 是一维 Dirac 函数)

Heaviside 函数取为

$$H(\phi) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2}{\pi} \arctan \left(\frac{\phi}{\varepsilon} \right) \right) \tag{4.7}$$

Dirac 函数为

$$\delta(\phi) = \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + \phi^2} \tag{4.8}$$

式中 ε 为常数。显然，C-V 模型适用的图像，必须要求目标 (Ω_+) 和背景 (Ω_-) 的灰度变化不大 (接近于常值)，这样才可用二值 C-V 函数 (目标区域取一个值，背景区域取另一个值) 较好地近似，从而通过零水平集 $\{x: \phi(x) = 0\}$ 提取目标边缘。由于水平集演化方程涉及到的图像信息是一种全局的信息，而且并没有包含图像任何的边缘信息，因此，此方法对图像中存在边界模糊或断裂的情况，仍能取得好的分割结果，并且具有一定的消除噪声的作用。该模型的主要优点是，演化偏微分方程简单，计算复杂性低，演化结果对初始曲线的位置不敏感，并有较好的抗噪性，等等。

对于 C-V 模型适用的图像，我们实验发现模型的下述问题：

- ① 尽管演化方程 (4.6) 的计算复杂性不高，但是到达稳定状态所需的迭代次数却不少 (少则数十次，多则上千次)；
- ② 尽管分割结果对演化曲线的初始化 (大小和位置) 不敏感但是迭代次数却十分敏感；
- ③ C-V 模型，对背景复杂图像和非同质图像的分割效果不理想，等。

针对模型的缺点，许多学者从不同的角度对 C-V 模型进行了扩展或改进。本文也试图解决 C-V 模型的不足某些之处，在第一个模型中，我们通过分析影响演化速度的可能存在的原因，提出了快速 C-V 模型，较好的解决了前两个问题；同时在第二个模型中，我们认为 C-V 模型之所以不能分割背景复杂图像的主要原因在于该模型完全忽略了图像灰度变化对图像分割的形象，因此我们把表征图像灰度变化的图像局部熵融合到 C-V

模型中, 扩大了 C-V 模型分割图像的范围, 解决了第三个问题, 同时具有更好的抗噪性。

4.2 快速 C-V 模型

显然, C-V 模型适用的图像, 必须要求目标 (Ω_+) 和背景 (Ω_-) 的灰度变化不大 (接近于常值), 这样才可用二值 C-V 函数 (目标区域取一个值, 背景区域取另一个值) 较好地近似, 从而通过零水平集 $\{x: \phi(x)=0\}$ 提取目标边缘。对于上节中我们提到的 C-V 模型中的缺点, 我们接下来进一步分析其存在的原因, 并提出相应的改进模型。

4.2.1 模型介绍

我们从 C-V 模型的演化偏微分方程(4.6)入手。在方程(4.6)中, 右端第一项对应于能量泛函(4.2)的长度项, 起正则化的作用, 在 C-V 后续模型中都是必不可少的。因此, 本文中我们仅仅讨论右端第二项 (对应于能量泛函的拟合项) 的作用。将其变形得到:

$$\begin{aligned} -(I-c_+)^2 + (I-c_-)^2 &= 2(c_+ - c_-) \left(I - \frac{c_+ + c_-}{2} \right) \\ &= 2\text{sign}(c_+ - c_-) |c_+ - c_-| \left(I - \frac{c_+ + c_-}{2} \right) \end{aligned} \quad (4.9)$$

通过分析可知, 上式的第一部分为符号函数, 决定了演化曲线是向内运动还是向外运动, 与曲线的演化速度无关。因此, 水平集函数的演化速度应该与式(4.9)的后两项有关, 即与图像 I 在演化曲线内外灰度均值的绝对差 $|c_+ - c_-|$ 和平均值 $(c_+ + c_-)/2$ 有密切的关系。虽然, c_+ , c_- 在曲线演化过程中不断发生变化, 但是总体而言 $(c_+ + c_-)/2$ 在演化过程中变化不大 (近似于图像灰度均值), 因此在演化过程中对速度的影响是很小的。换言之, 演化速度的大小主要由演化曲线内外灰度均值的绝对差 $|c_+ - c_-|$ 决定。

不难想象, 如果初始曲线的大小和位置选择不好, 完全可能出现演化曲线内外灰度均值接近的情况, 即 $c_+ \approx c_-$ 。这导致 $-(I-c_+)^2 + (I-c_-)^2 \approx 0$, 拟合项的作用减弱, 此时拟合项对演化速度的影响很小, 导致一次迭代使水平集函数的变化甚微, 从而需要更多的迭代次数。这是 C-V 模型迭代次数多以及迭代次数敏感于初始曲线大小和位置的主要原因。

找到原因, 提出改进措施就不难。把 $|c_+ - c_-|$ 换成更一般的形式 $f(|c_+ - c_-|)$, 得到如下的演化方程:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \delta(\phi) \left[\mu \text{div} \left(\frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \right) + \text{sign}(c_+ - c_-) f(|c_+ - c_-|) \left(I - \frac{c_+ + c_-}{2} \right) \right] \quad (4.10) \quad \text{自}$$

然我们希望 $f(x)$ ($x \geq 0$) 满足下列条件:

- ① $f(x) \geq 0$;
- ② 当 $x_1 > x_2$ 时 $f(x_1) > f(x_2)$;

$$\textcircled{3} f(x) \geq x;$$

$$\textcircled{4} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \gg 0;$$

其中，条件（1）函数的取值为正，保证了曲线的运动方向不会因为函数 $f(x)$ 的引入而发生变化；条件（2）和条件（3）保证了 $f(x)$ 的递增，即当区间差扩大时， $f(x)$ 的作用会相应扩大，从而放大了 $|c_+ - c_-|$ 在演化速度中的作用，演化速度自然就提高了；条件（4）保证了当灰度差较小时 f 依然可以取得较大的值，这样当曲线灰度差较小时也具有加快的演化速度，避免了当初始轮曲线取的不好时演化速度慢的缺点。满足这个条件的函数是很多的，当 $f(x) = x$ 时即为方程（4.6）式，本文我们选择 $f(x) = \frac{1}{2}e^x$ ，同时由于在演化过程中，我们只需要几步便可得到正确的分割结果，同时省略掉了水平集的重新初始化。

4.2.2 数值实现

与 C-V 模型采用的复杂有限差分法不同，本文模型的数值实现主要采用简单的中心差分法。

首先设 h 是空间步长， Δt 是时间步长，网格点 $(x_i, y_j) = (ih, jh)$ ，其中 $1 \leq i, j \leq M$ ， n 时刻 $\phi(t, x, y)$ 在该网格点的值近似为 $\phi_{i,j}^n = \phi(n\Delta t, x_i, y_j)$ ，这里 $n \geq 0$ ， $\phi^0 = \phi_0$ 。用中心差分法近似代替 ϕ_x 、 ϕ_y 为：

$$\phi_x \approx \frac{\phi_{i+1,j}^n - \phi_{i-1,j}^n}{2h}, \phi_y \approx \frac{\phi_{i,j+1}^n - \phi_{i,j-1}^n}{2h} \quad (4.11)$$

ϕ_t 用向前差分格式，方程（4.7）用中心差分法代替，得到该方程的近似表达式：

$$\frac{\phi_{i,j}^{k+1} - \phi_{i,j}^k}{\Delta t} = \delta_h(\phi_{i,j}^k) \left[\mu k_{i,j}^n + \text{sign}(c_+(\phi^n) - c_-(\phi^n)) f(|c_+(\phi^n) - c_-(\phi^n)|) \left(I - \frac{c_+(\phi^n) + c_-(\phi^n)}{2} \right) \right]$$

Heaviside 函数与 Dirac 函数的取法与前面的式（4.7）（4.8）相同，其中

$$c_+(\phi^n) = \frac{\sum_{i,j} I_{i,j} H_\varepsilon(\phi_{i,j}^n)}{\sum_{i,j} H_\varepsilon(\phi_{i,j}^n)}, \quad c_-(\phi^n) = \frac{\sum_{i,j} I_{i,j} (1 - H_\varepsilon(\phi_{i,j}^n))}{\sum_{i,j} (1 - H_\varepsilon(\phi_{i,j}^n))} \quad (4.12)$$

$$k_{i,j}^n = \frac{N\phi_{i+1,j}^n - N\phi_{i-1,j}^n + N\phi_{i,j+1}^n - N\phi_{i,j-1}^n}{2h} \quad (4.13)$$

其中，

$$N\phi_x \approx \frac{\phi_x}{\sqrt{\phi_x + \phi_y}}, N\phi_y \approx \frac{\phi_y}{\sqrt{\phi_x + \phi_y}} \quad (4.14)$$

程序用 Matlab7.01 编写。其中主要的参数选择为：时间步长 $\Delta t = 0.1$ ， $\varepsilon = 1$ 。模型参数（ μ 除外）对所有实验取值相同值（源于文献[28]），参数 μ 在具体实验中给出（对于不同图像，C-V 模型需要调整参数 μ ）。

4.2.3 实验结果

本节主要验证以下几点：1) 与 C-V 模型相比，本文模型在分割结果相同的情况下大大减少了迭代次数缩短了演化时间；2) 本文模型的迭代次数对初始曲线的大小和位置不敏感，C-V 模型则不然。

实验 1 迭代次数减少

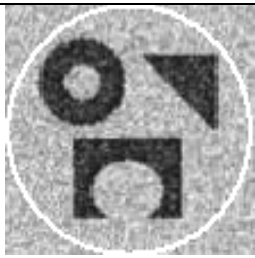
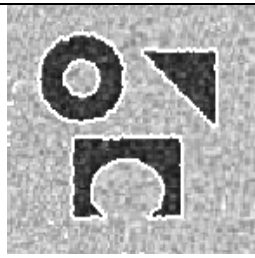
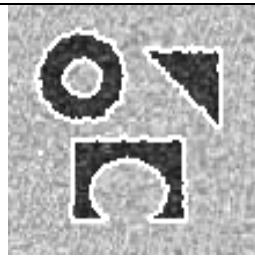
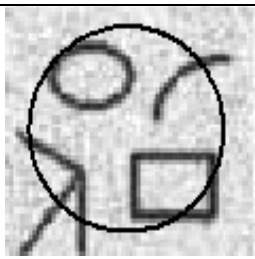
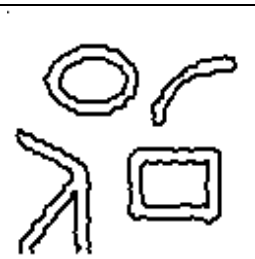

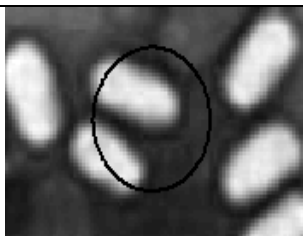
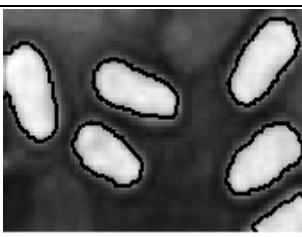
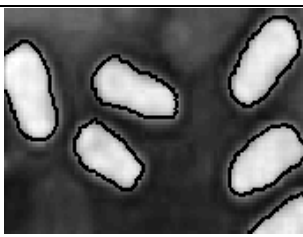
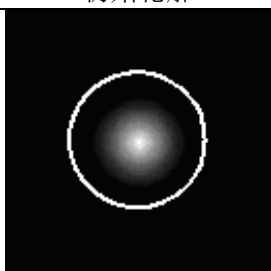
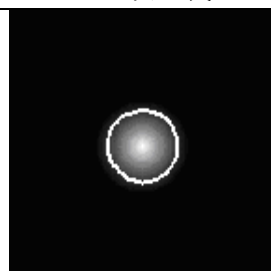
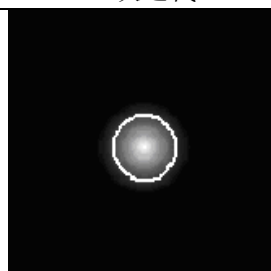
实验图像	CV 模型	本文模型
 初始轮廓	 250 次迭代	 4 次迭代
 初始轮廓	 45 次迭代	 3 次迭代
 初始轮廓	 60 次迭代	 3 次迭代
 初始轮廓	 80 次迭代	 4 次迭代

图 4.1. 二值图像的分割结果

Fig.4.1 Segment results of binary image

图 4.1 给出了 4 幅图像的分割结果与迭代次数。其中前两行是分别是两幅 100×100

和 65×65 的噪声图像, 第三行是一幅 66×112 背景复杂的自然图像, 最后一幅是 290×290 的人造图像。实验过程中我们取参数 $\mu = 0.02 \times 255^2$ 。实验结果显示, 本文模型可以取得与 C-V 模型基本相同的分割结果, 但是在初始轮廓线相同的情况下, C-V 模型少则需要几十次多则需要上百次的迭代才能得到正确的目标边界, 而本文模型只需要几次迭代就可得到相同的分割结果, 迭代次数明显减少, 充分显示了本文模型的优势。同时, 由于能量泛函和演化方程中没有涉及到梯度的改变, 因此不会降低模型的抗噪性。前两幅噪声图像的正确分割也恰恰说明了这一点。


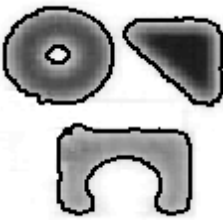

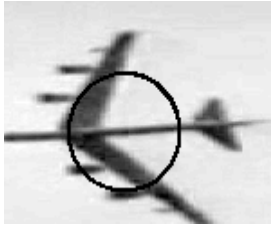




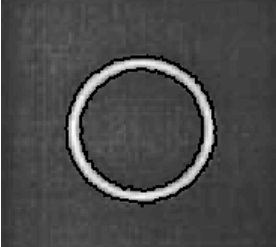
实验图像	CV 模型	本文模型
		
初始轮廓	1500 次迭代	2 次迭代
		
初始轮廓	400 次迭代	1 次迭代
		
初始轮廓	1200 次迭代	3 次迭代

图 4.2. 两个模型的分割结果与迭代次数

Fig 4.2 Segment results of synthesized image

图 4.2 给出了三副比较简单的人造图像, 其中 μ 的取值分别为 $\mu = 0.02 \times 255^2$, $\mu = 0.005 \times 255^2$ 和 $\mu = 0.04 \times 255^2$, 实验结果显示, 对于 C-V 能够分割的图像, 本文模型能够取得同样的分割结果, 但是在分割速度 C-V 模型需要上千次的迭代, 而本文模型

基本上迭代 3 次以内便能得到正确的分割结果, 说明本文模型在演化速度上具有很大的优势。

实验 2 初始轮廓线的大小对演化速度的影响

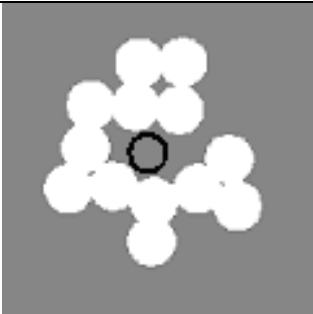
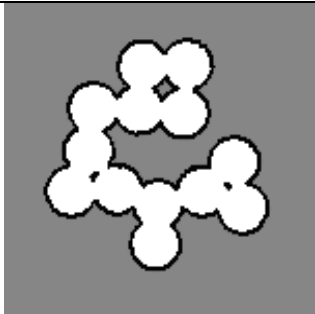
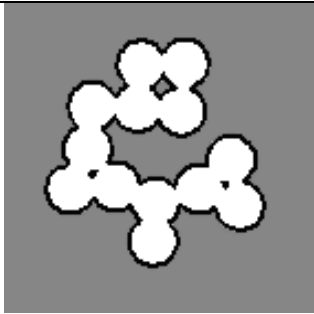

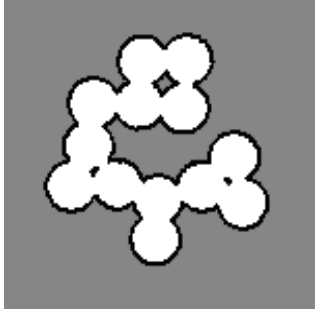
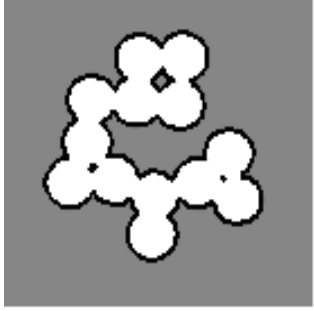
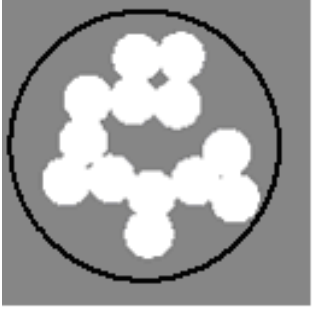
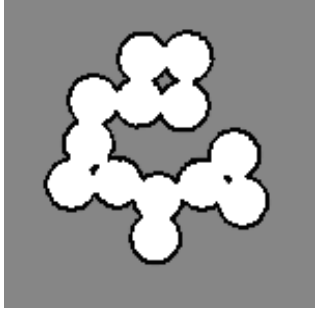

实验图像	C-V 模型	本文模型
		
初始轮廓 (a)	13000 次迭代	2 次迭代
		
初始轮廓(b)	120 次迭代	2 次迭代
		
初始轮廓(c)	1000 次迭代	2 次迭代

图 4.3. 两个模型对不同大小的初始轮廓的分割结果与迭代次数

Fig4.3 Experimental results of different size of initial curve

图 4.3 是一副 256×256 的人工图像。图中给出了当初始轮廓分别为三个同心圆时, 两个模型 ($\mu = 0.000001 \times 255^2$) 的分割结果与迭代次数。实验结果标明: 对于这三个不同大小的初始轮廓, 尽管两个模型的分割结果相同, 两个模型的迭代次数差异很大。当我们初始位置选择比较好的时候 (如初始轮廓 (b)), C-V 模型只要 130 次迭代便可得

到正确的图像分割结果，但是如果我们的初始曲线选择的不好时（如初始位置（a）和（c）），那么 C-V 模型就有可能要经过上万次的迭代才能的到正确的图像分割结果，即 C-V 模型的迭代次数很大程度上依赖于初始曲线的选择。而本文模型迭代次数稳定，无论初始曲线的大小如何都只需要仅仅 2 次的迭代便可分割出目标。

实验 3 初始曲线的位置对分割速度的影响

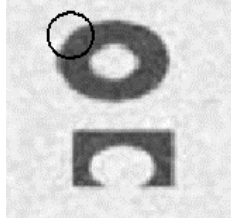
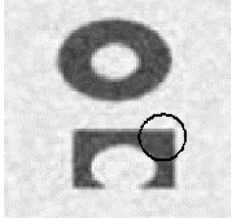
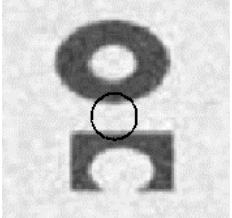
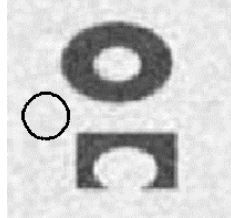
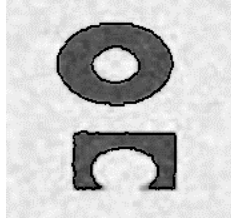
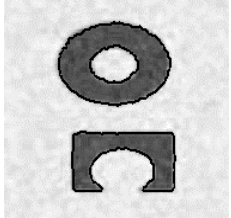
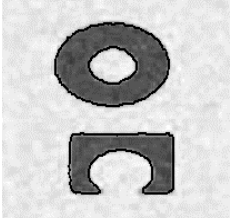
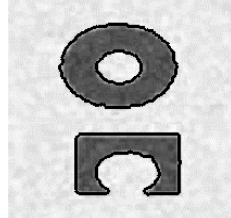
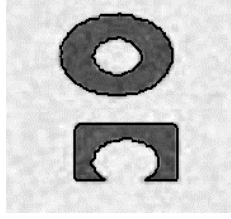
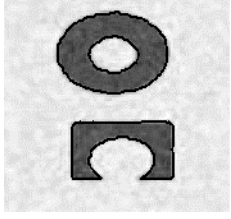
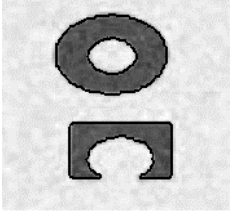
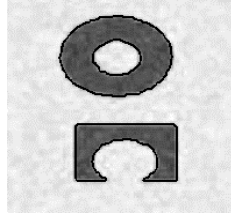
实验 图像	 (a1)	 (b1)	 (c1)	 (d1)
C V 模型	 (a2) 300 次迭代	 (b2) 130 次迭代	 (c2) 80 次迭代	 (d2) 1300 次迭代
本 文 模 型	 (a3) 2 次迭代	 (b3) 2 次迭代	 (c3) 2 次迭代	 (d3) 2 次迭代

图 4.4 两个模型对不同位置的初始轮廓的分割结果

Fig.4.4 Segmentation results with different initial position

图 4.4 是一幅 84×84 的人工噪声图像，但噪声不足以破坏目标的整体性，因此可以被 C-V 模型和本文模型分割。该图像有两个目标物体，初始曲线均为半径为 10 的圆，且处于图像中不同的位置并各具代表性，其中（a1）（b1）分别与两个目标物体相交，（c1）与全部目标物体相交，而（d1）在目标物体的外部。在四个不同的位置我们可以看到（ $\mu = 0.01 \times 255^2$ ）两个模型都能正确的分割，且分割结果基本相同。但是随着初始位置的不同，C-V 模型的迭代次数出现明显的变化，少则几十次多则上千次，而本文模型无论初始轮廓线在图像的哪个位置都仅用三次迭代即可得到正确的图像分割。同时，本文

模型的分割方法也是比较稳定的，当分割次数相同时，分割时间不会有太大的变化，如表 4.1 所示：

表 4.1 两个模型对应于不同初始位置的分割时间

Table4.1. Segmentation time with different initial position

初始曲线	圈 a(1)	圈 b(1)	圈 c(1)	圈 d(1)
本文模型	1.61s	1.48s	1.47s	1.47s
C-V 模型	32.56s	14.95s	9.70s	188.55s

4.3 结合局部熵的 C-V 模型

4.3.1 熵的概念

熵^[39]是信息论里的一个概念，用来描述事物不确切的量，表示一个系统的混乱无序的状态。度量信息多少的测度称为信息量，信息量与不确定性消除程度有关。从符号集 $A = \{a_i, i = 1, 2, \dots, N\}$ 中选择一个符号时得到的信息量 I (单位为比特)与产生该符号的 $p(a_i)$ 概率有关，定义如下：

$$I = -\log_2 p(a_i)$$

全体符号集 A 的平均信息量，即熵(entropy) S 为：

$$S = -\sum_{i=1}^N p(a_i) \log_2 p(a_i)$$

其中

$$\sum_{i=1}^N P(a_i) = 1$$

当 p_i 以等概率出现时，熵 S 取得最大。如果将信息论中的熵，直接应用到图像处理中，会存在一些缺陷。例如：熵不能反映图像中的细节，包括几何形态，像素在空间分布的状态等，为此，Shiozaki^[40]给出了以灰度特征为表征的图像局部熵的定义。设图像窗口 Ω_x 的大小为 $M \times N$ ，点 (i_0, j_0) 为该窗口的中心像，则点 (i_0, j_0) 处的局部熵值定义为：

$$S(i_0, j_0) = -\frac{1}{MN} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N p_{ij} \log_2 p_{ij}$$

其中， $I(i, j)$ 为图像的灰度， $p_{ij} = \frac{I(i, j)}{\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N I(i, j)}$ 。当 p_{ij} 相等时图像局部熵取得最大，也就

是说在图像灰度均匀的地方图像的局部熵就越大。

与偏微分方程的连续模型对应，不妨以 $I(x)$ 记 $I(i, j)$ ，我们将图像的熵改写为如下形式：

$$S = -\frac{1}{|\Omega_x|} \iint_{\Omega_x} p(y, \Omega_x) \log_2(p(y, \Omega_x)) dy \quad (4.15)$$

其中：

$$p(x) = \frac{I(x)}{\iint_{\Omega_x} I(y) dy} \quad (4.16)$$

在像素灰度比较均匀的区域，局部熵比较大，而在灰度变化较大的区域，局部熵会较小。图像的局部熵反应了图像灰度的离散程度，也就是说在局部熵大的地方，灰度分布相对均匀，在局部熵小的地方，灰度分布离散性较大而与图像灰度的均值无关。

4.3.2 模型介绍

C-V 模型的分割函数 c_+ 和 c_- 具有如下表达式：

$$c_+(\phi) = \frac{\int_{\Omega} I(x, y) H(\phi) dx dy}{\int_{\Omega} H(\phi) dx dy} \quad c_-(\phi) = \frac{\int_{\Omega} I(x, y) (1 - H(\phi)) dx dy}{\int_{\Omega} (1 - H(\phi)) dx dy}$$

c_+ 和 c_- 分别是图像在 $inside(C)$ 和 $outside(C)$ 中灰度值的算术平均，完全忽略了图像灰度的变化。因此，对于背景变化比较大和非同质图像用算术平均值来拟合内外部的图像灰度势必会产生误差，从而不能正确的得到分割结果。事实上，在灰度变化大的区域，图像包含的信息量比较大，在能量拟合项中应该起到更大的作用，而对于灰度变化不大比较平滑的区域，图像包含的信息量比较少，其在能量拟合项中的作用相应的就要小些，以此为根据，我们自然地想到把表示图像梯度变化信息的熵融入到 c_+ 和 c_- 中，得到本文改进的演化方程：

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \mu \delta(\phi) \operatorname{div} \left(\frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \right) + \delta(\phi) \left(\lambda_2 (I - c_-')^2 - \lambda_1 (I - c_+')^2 \right) \quad (4.17)$$

其中 c_+, c_- 的定义修正为：

$$c_+' = \frac{\int_{\Omega} (1 - S^n) I(x, y) H(\phi(x, y)) dx dy}{\int_{\Omega} (1 - S^n) H(\phi(x, y)) dx dy}$$

$$c_-' = \frac{\int_{\Omega} (1 - S^n) I(x, y) (1 - H(\phi(x, y))) dx dy}{\int_{\Omega} (1 - S^n) (1 - H(\phi(x, y))) dx dy}$$

模型分析：一方面，我们把表示图像灰度变化的局部熵信息融入到 CV 模型，使得在能量拟合的过程中，灰度变化大的区域作用就大些，灰度变化小的区域作用就小些，即在图像边界处包含的信息量比较多，对能量的拟合作用要大些，相反，对于对目标或背景灰度变化不大的区域其信息量比较少因此在能量拟合项中的作用就要相应的小些。因此该模型对于非同质图像和背景变化比较复杂的图像具有较好的分割效果。同时，虽然单像素点处的灰度值也有较大的变化，跟边界具有相似的性质，但是图像的局部熵是

在一个小区域内计算的, 因此对局部熵的影响很小, 这是局部熵具有较好的抗噪声能力的主要原因, 同时这也是我们为什么不直接将梯度信息引入 C-V 模型主要考虑的因素。根据定义可知 $0 < S < 1$, 需要指出的是当 $n \rightarrow \infty$ 时就是我们熟悉的 C-V 模型。

4.3.3 数值实现

与 C-V 模型采用的复杂有限差分法不同, 本文模型的数值实现主要采用简单的中心差分法。其中, h 是空间步长, Δt 是时间步长, 离散方式与前节快速 C-V 相似, 这里就不再重复。则方程(4.18)可由等式

$$\frac{\phi_{i,j}^{k+1} - \phi_{i,j}^k}{\Delta t} = L(\phi_{i,j}^k)$$

近似表示。这里, $L(\phi_{i,j}^k)$ 表示方程 (4.16) 右边的中心差分形式。

$$L(\phi_{i,j}^k) = \delta_h(\phi_{i,j}^k) \left(\mu k_{i,j}^k + \lambda_2 \left(I_{i,j} - c_-(\phi^n) \right)^2 - \lambda_1 \left(I_{i,j} - c_+(\phi^n) \right)^2 \right)$$

其中

$$k_{i,j}^n = \frac{N\phi_{i+1,j}^n - N\phi_{i-1,j}^n + N\phi_{i,j+1}^n - N\phi_{i,j-1}^n}{2h}$$

本节试验平台是运行 Windows XP 的 C-V (Celeron 3.06G/内存 480M), 程序用 Matlab 编写 (Matlab 7.01)。主要参数的选择为: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\tau = 0.04$ 时间步长 $\Delta t = 0.2$ $\mu = 0.01 \times 255 \times 255$, n 的选择根据不同的图像, 我们在实验中分别给出。

4.3.4 实验结果

在本节中, 我们通过实验验证: (1) 该模型能正确分割部分灰度背景变化大或者非同质且 C-V 不能分割的图像; (实验一) (2) 对于 C-V 模型能较好的处理的图像, 本文模型具有相同的分割效果, 且具有更强的抗噪性(实验二)。

实验 1 灰度背景变化大且 C-V 不能分割的图像

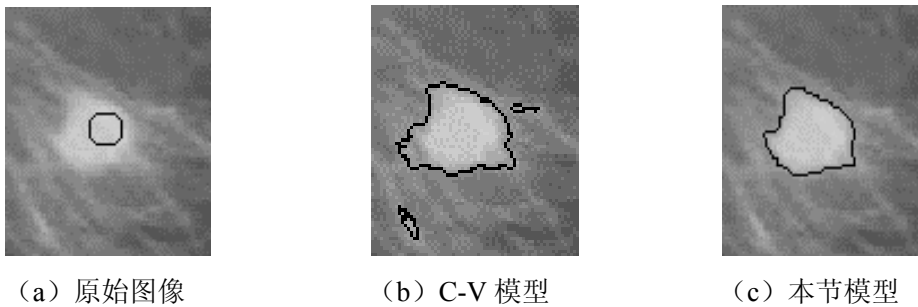


图 4.4 肿瘤图像的分割结果

Fig 4.4 Segmentation result of swelling image

图 4.4 是一幅 61×71 乳房肿瘤图片（图中圆圈为初始曲线，下同），背景血管交织，灰度不均。实验表明：C-V 模型无论迭代多少次，背景区域的部分血管总会被当作目标而分割出来，无法得到正确的图像边界，而对于本文模型当 $n=0.006$ 时，迭代 60 次即能正确提出目标，且迭代次数较少。

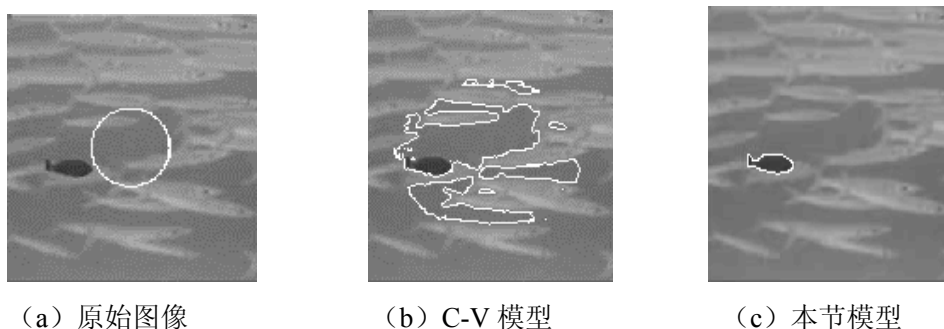


图 4.5 鱼雷图像的分割结果

Fig4.5 segmentation result of torpedo image

图 4.5 是一幅 193×206 军事航海图像，图中包含鱼雷、鱼和海水，背景灰度变化大。无论进行多少次的演化，C-V 模型在分割过程中总是会把背景的部分海水作为目标分割出来，而无法正确地提取目标物体鱼雷，而本文模型当 $n=2$ 时即可正确分割这个图像。

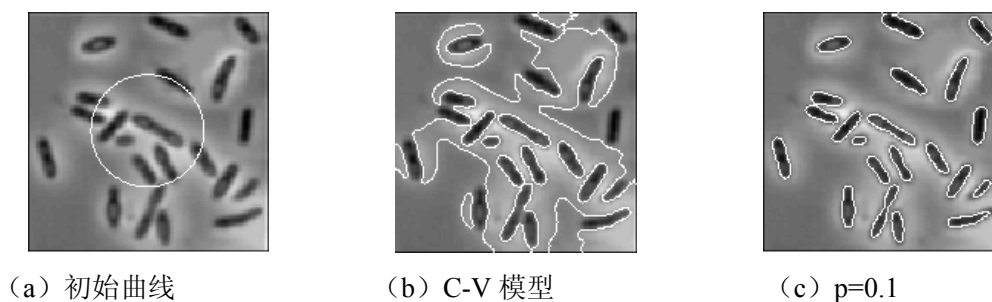


图 4.6 非同质图像分割结果

Fig4.6 segmentation result of inhomogeneous image

图 4.6 是一幅 107×107 的非同质图像。目标物体的周围亮度明显比目标物体要亮。无论对于是 C-V 模型，还是以后许多改进模型都无法正确分割目标物体。实验结果显示：对于此类图像，本文模型当 $n=0.1$ 时，能够得到正确的图像分割结果，如图 4.6(c) 所示。

实验 2 对噪声图像的分割

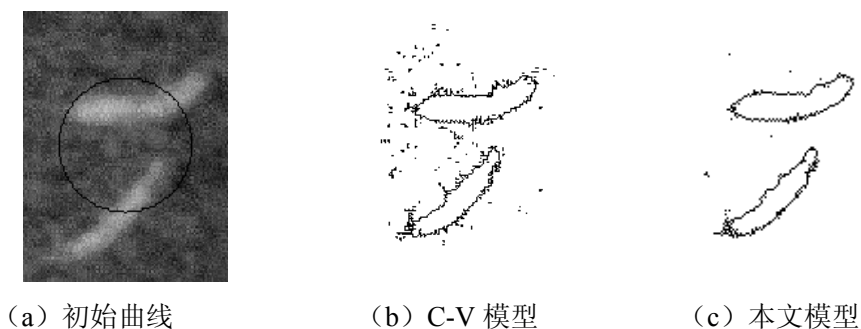


图 4.7 噪声图像的分割结果

Fig4.7 segmentation result of noisy image

图 4.7 是一幅 94×123 自然的噪声图像，对于 C-V 模型的分割结果我们可以看到在目标物体的边缘总是会有噪声点，无论迭代多少次都无法消除。而本文模型中当 $n=0.01$ 时，经过 60 次迭代就可得到明显优于 C-V 模型的分割结果。因此本文模型具有更好的抗噪性。

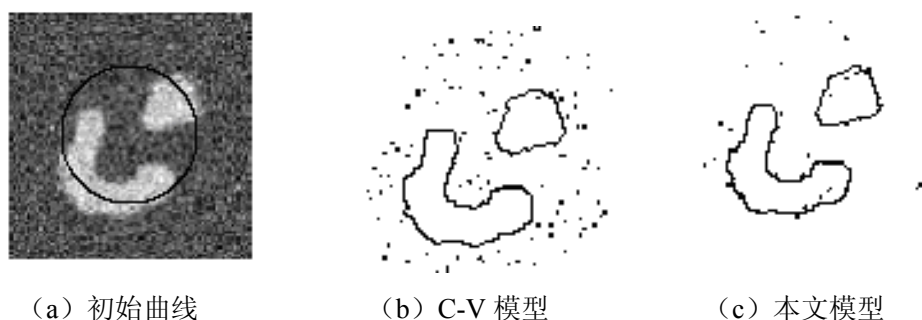


图 4.8 人造噪声图像分割结果

Fig4.8 Segmentation result of artificial image with noise

图 4.8 是一幅 107×107 的噪声图像，实验结果显示，C-V 模型同样无法将图像目标物体周围的噪声去除，而本文模型则能够取得较好的分割结果，图 4.8 中的 (c) 给出了当 $n=0.01$ 时的分割结果。虽然在目标物体边缘还是有些噪声点没有去除，但是相对于 C-V 模型，已经取得很好的分割结果。

4.4 结论

本文首先介绍了 C-V 模型，并且深入分析并讨论了该模型的一些缺点，在此基础上提出了两个改进的模型。

一个是快速 C-V 模型。该模型从演化方程入，分析了可能影响演化速度的速度项，

并以此为改进的依据。实验结果显示,该模型不仅大大提高了演化速度,而且对初始轮廓线的选取不再那么敏感,实现了更好的图像分割。

另一个是融合局部熵的 C-V 模型,图像的灰度变化对图像分割起着重要的作用,而 C-V 模型却忽略了这点,在该模型中我们把描述图像灰度离散状况的熵融合到 C-V 模型中,较好地解决了 C-V 模型的一些缺点,对噪声图像和背景复杂的图像都有较好的分割效果。

5 总结与展望

5.1 全文总结

近年来,图像处理和计算机视觉中偏微分方程的应用受到了国内外有关学者极大的关注。在继承了数学物理方程大量的研究成果的基础上,图像偏微分方程的研究逐渐丰富和成熟,已经成为一种理论上严谨,实际上有效的方法。本文主要针对基于偏微分方程的图像分割方法进行了讨论,下面对本文工作做总结。

首先本文主要介绍了图像分割的意义并对现有的图像分割方法进行了综述,同时简单介绍了近几年图像分割的发展过程,特别是偏微分方程在图像分割中的引入,更是加快了图像分割技术的发展。

最后,本文通过分析 C-V 分割模型的缺点提出了两个改进方法。

①第一个模型扩大了 C-V 模型中表征速度的区间差。活动轮廓模型(C-V 模型)是基于区域的活动轮廓模型,图像分为内外两个常值区域,当目标和背景的灰度相差较大是该模型演化较快且有很好的分割效果。但是,在实际的应用中,其演化速度还是受到一定的限制,同时演化的速度很大程度依赖于初始位置的选择。针对此,我们从 C-V 模型的演化方程入手,分析影响演化速度的主要因素,通过对演化方程的改进得到一个新的模型。实验结果显示,我们的模型得到很好的演化结果。

②第二个模型在演化方程中引入了表征图像灰度变化的局部熵信息。图像的灰度变化对图像分割很重要,图像的局部熵信息在很大程度上反映了图像的灰度变化,因此将局部熵引入 C-V 模型得到一个改进的模型。实验结果显示新模型对背景复杂,非同质图像都有较好的分割结果,而 C-V 模型不能处理这类图像,同时,该方法具有更强的抗噪性。

5.2 今后的研究方向

图像分割的偏微分方程方法是近几年图像分割的热点,在国内外很受重视。本文仅就其中的一小部分问题进行了总结,并对传统的方法进行了探讨和改进,取得了一定的实验效果。但是由于作者的水平和时间有限,许多有意义的问题在本文中没有涉及到,特别是图像分割的理论分析比较少。在今后的学习中,首先要强化自己的理论基础,同时针对许多现有的模型,可以加入更多的先验信息进行进一步的改进,扩大已应用领域

致 谢

本论文的研究工作是在我的导师何传江教授悉心指导和关心下完成的。本论从最初的选题，方案论证到算法的实现都得到了何老师的精心指导和帮助，为我能够顺利地完

成论文提供了保障。

在研究生的学习过程中，何老师严谨的治学态度，孜孜不倦的工作作风，高度的责任感、一丝不苟的求学精神，无以不令我敬佩。何老师不仅在专业知识和学习方法上给予了我很大的指导，让我具备了独立解决问题，克服困难的能力；更是在日常生活中教会了我许多人生的道理，让我受益匪浅。在此对何老师表示由衷的感谢和诚挚的敬意！

感谢我的师兄弟姐妹：李梦，王艳，原野，陈强，冯玉玲等，与他们经常性的讨论使我开阔了视野，丰富了知识，只是在这样一个互帮互助的环境下才使得自己可以顺利地完成论文。

最后感谢我的家人，正是他们在物质和精神上的支持和鼓励，才让我顺利的完成学业。

衷心感谢在百忙中评阅论文和参加答辩的各位专家、教授！

汪雯雯

二〇一〇年四月 于重庆

参考文献

- [1] 张毓晋.图像分割[M]. 北京:科学出版社, 2001. 1-7.
- [2] Castlemen K. R. Digital Image Processing [M]. Prentice Hall, 1996.
- [3] Marcelo B. Processing of flat and non-flat image information on arbitrary manifolds using partial differential equations [M]. Ph. D thesis, University of Minnesota, 2001.
- [4] Crandall M., Ishii H., Lions PL. User's guide to viscosity solution of second order partial differential equation [M]. CEREMADE, 1991.
- [5] Nagao M. Edge preserving smoothing [J]. CGIP, 1979, 9:394-407.
- [6] Koenderink J. J. The structure of image [J]. Biological Cybernetics, 1984, 50:363-370.
- [7] Alvaerz L., Guichard F., Lions P. L. Axioms and fundamental equations of image processing[J]. Archive for Rational Mechanics and Analysis.1993, 16(9):200-257.
- [8] Kass. M, Witriw., Terzopoulos D. A. Snakes: active contour models[C]. Int't J.Comp.Vis, 1988, 1: 321-369.
- [9] Zhou Y. B., Zhang G. Z. Deformable objects contour extraction [J]. Acta Electronic Sinica, 1998, 26(7):133-137.
- [10] Jolly M. P. D, Lakshmanan S., Jain A. K. Vehicle segmentation and classification using deformable templates [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1996,18(3):293-308
- [11] 史立, 张兆扬, 马然. 基于运动跟踪匹配技术的视频对象提取[J]. 通信学报 2001, 22(11):77-85.
- [12] Cohen L. D. On active models and balloons [J]. CVGIP: Image Understand. 1991, 53(3): 211-218.
- [13] Seok-Woo Jang. Snakes using colour edge for contour extraction [J]. Proceedings: International Conference on Image Processing, 2002, 9(2):817-820.
- [14] Cheng yang Xu. Snakes, Shapes and Gradient Vector Flow [J]. IEEE Transactions on Image processing, 1998, 7(3):359-369.
- [15] Xu C., Prince JL. Generalized gradient vector flow external forces for active contour [J]. Signal Processing, 71(2), 1998:131-139.
- [16] Zeyun Yu, Bajaj C. Image segmentation using gradient vector diffusion and region merging [J]. In Proceedings: 16th International Conference on Pattern Recognition, 2002, (5):941-944.
- [17] Williams D. J., Shah M. A fast algorithm for active contours and curvature estimation [J]. CVGIP: Image Understanding, 1992, 55(1):14-26.

- [18] Brigger P., Hoeg J., Unsser M. B-spline snakes: a flexible tool for parametric contour detection[J]. IEEE Transactions on Image processing, 2000, 9(9):884-896.
- [19] Osher R., Sethian J. A. Fronts propagating with curvature-dependent speed: Algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations[J], Journal of Computational Physics, 1988, 79:12-49.
- [20] Caselles V., Catta F., Coll T., Dibos F. A geometric model for active contours in image processing [J]. Numerische Mathematik, 1993, 66:1-31.
- [21] Malladi R., Setian J. A., Vemuri B. C. Shape modeling with front propagation: a level set approach [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1995, 17(2):158-175.
- [22] Caselles V., Kimmel R., Sapiro G. Geodesic active contour[C]. Int'l Conf. Computer Vision, 1995:694-699.
- [23] 何传江, 唐利明. 几何活动轮廓模型中停止速度场的异性扩散[J]. 软件学报, 2007, 18(2):600-607.
- [24] Leventon M. E., Statistical shape influence in geodesic active contours [J]. IEEE Transactions Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, Hihon Head Islands, South California. USA, 2000, 1:1316 -1323.
- [25] Paragios N., Mellina-Gottardo O., Ramesh V. Gradient vector flow fast geometric active contours [J], IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2004, 26(3):402-407.
- [26] Ronfard R. Region-based strategies for active contour models [J]. International Journal of Computer Vision, 13(2), 1994: 229-251.
- [27] Mumford D., Shah J. Optimal approximation by piecewise smooth functions and variational problems [M]. Comm. Pure Appl. Math, 1989, 43(8):999-1036.
- [28] Chan T. F., Vese L. A. Active contours without edges [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2001, 10(2):266-277.
- [29] Chan T. F., Vese L. A. A multiphase level set framework for image segmentation using the mumford and shah model [J]. Int. J Comput Vision, 2002, 50(3):271-293.
- [30] Li C., Kao C., Gore J. C., Ding Z. Minimization of region-scalable fitting energy for image segmentation [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2008, 17(10):1940-1949.
- [31] Wang L., Li C., Sun Q., Xia D., Kao C. Active contours driven by local and global intensity fitting energy with application to brain MR image segmentation[J]. Computerized Medical imaging and Graphics, 2009, 33:520-531.
- [32] 何瑞英, 何传江. 扩展无边活动轮廓模型[J]. 计算机工程与应用, 2009, 45(24):156-158.
- [33] Chung G., Vese L. A. Image segmentation using a multilayer level-set approach [J]. Compute Visual. Sci., 2009, 12:267-285.

- [34] Yezzi A., Tsai A., Willsky A. A Statistical Approach to Snakes for Bimodal and Trimodal Imagery [A]. Seventh IEEE International Conference on Computer Vision, October 1999, 898-903.
- [35] 王大凯,侯榆青,彭进业.图像处理的偏微分方程方法[M].北京:科学出版社,2008.
- [36] Sethian J.A. Curvature and evolution of fronts [J]. Communications in Mathematical Physics,1985,101:487-499.
- [37] Osher R.,Sethian J.A. Fronts propagating with curvature-dependent speed: Algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations[J]. Journal of Computational Physics, 1988, 79:12-49.
- [38] Sethian J. A. Level set methods and fast marching methods: Evolving Interfaces in Computational Geometry, Fluid Mechanics, Computer Vision, and Materials Science [M]. Cambridge University press, 1999.
- [39] Shannon, C.E. A mathematical theory of communication [J]. Bell Systems Technical Journal. 1948,27:379-423.
- [40] Shiozaki A. Edge extraction using entropy operator [J]. Computer Vision, Graphics, and Image Processing, 1986,36(1):1-9.

附 录

A. 作者在攻读学位期间发表的论文目录:

- [1] 何传江, 汪雯雯. 分片常值灰度图像的快速分割. 计算机工程与应用, 录用, 待刊.
- [2] 汪雯雯, 何传江. 融合熵信息的 C-V 改进模型.(修改中, 待投)