Самостоятельная работа

Коновалов Дмитрий

Декабрь 2019

1 Постановка задачи

Рассматривается дискретная модель численности популяции с подразделением на возрастные классы

$$\begin{cases} x[k+1] = by[k], \\ y[k+1] = x[k](1-x[k]) + cy[k], \end{cases} \tag{1}$$

где $x[k]$ — численность неполовозрелых особей, $y[k]$ — численность половозрелых особей в k-ый сезон размножения, $b > 0$ — коэффициент рождаемости и выживаемости на первом году жизни, $c \in (0,1)$ — выживаемость взрослых особей.

Период размножения заканчивается появлением новорожденных особей нового поколения. Предполагается, что времени между двумя последовательными размножениями достаточно для полного развития младенцев до взрослого состояния, а новорожденных — до состояния младшего возраста. Коэффициенты выживаемости и плодовитости зрелых особей считаются постоянными. Принятое предположение характерно для организмов с небольшим периодом жизни, включающим два-три периода размножения: насекомые, рыбы, мелкие млекопитающие.

Базовые значения параметров $x[0] = 0.2$, $y[0] = 0.1$, $b = 2.8$, $c = 0.15$.

2 Положения равновесия

Для поиска положений равновесия, рассмотрим конечные разности первого порядка:

$$\begin{cases} \Delta x[k] = x[k+1] - x[k] = 0, \\ \Delta y[k] = y[k+1] - y[k] = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Подставим полученные уравнения в исходную систему (1) и найём положения равновесия.

В данном случае их два:

1. $(0,0)$
2. $((b+c-1)/b, (b+c-1)/b^2)$

3 Анализ линеаризованной модели

Линеаризованая в точке x_0, y_0 система имеет вид:

$$\begin{cases} x[k+1] = y[k] - by_0, \\ y[k+1] = x[k](1-2x_0) + cy[k] - x_0(1-2x_0) - cy_0, \end{cases} \tag{3}$$

Для исследования системы на устойчивость в точке x_0, y_0 найдём решения характеристического полинома системы:

$$det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & b \\ 1-2x_0 & c-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(c-\lambda) - b(1-2x_0) = \lambda^2 - c\lambda - b(1-2x_0) = 0,$$

$$\lambda_{1,2} = \lambda_{1,2}(z_0) = \frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4b(1-2x_0)}}{2}.$$

Следовательно, решения $z_1 = (0,0)^T$ и $z_2 = ((b+c-1)/b, (b+c-1)/b^2)^T$ системы асимптотически устойчивы, когда $|\lambda_1(z_1)| < 1$, $|\lambda_2(z_1)| < 1$ и $|\lambda_1(z_2)| < 1$, $|\lambda_2(z_2)| < 1$.

4 Эксперимент

В ходе эксперимента была проанализирована сходимость системы к точкам равновесия в зависимости от значения параметров a и b. Для каждой пары значений делается 1000 шагов системы, затем из последних 200 значений выбирается минимальное и максимальное. Если каждое из них принадлежит eps-трубке ($eps = 1e^{-}3$) одного из положений равновесия, то имеется сходимость к этому положению равновесия. Также были проанализированы собственные числа системы при разных параметрах a и b. Исходный код находится в git-репозитории `https://github.com/NewKidlp2/SystemAnalysis`.

5 Результаты

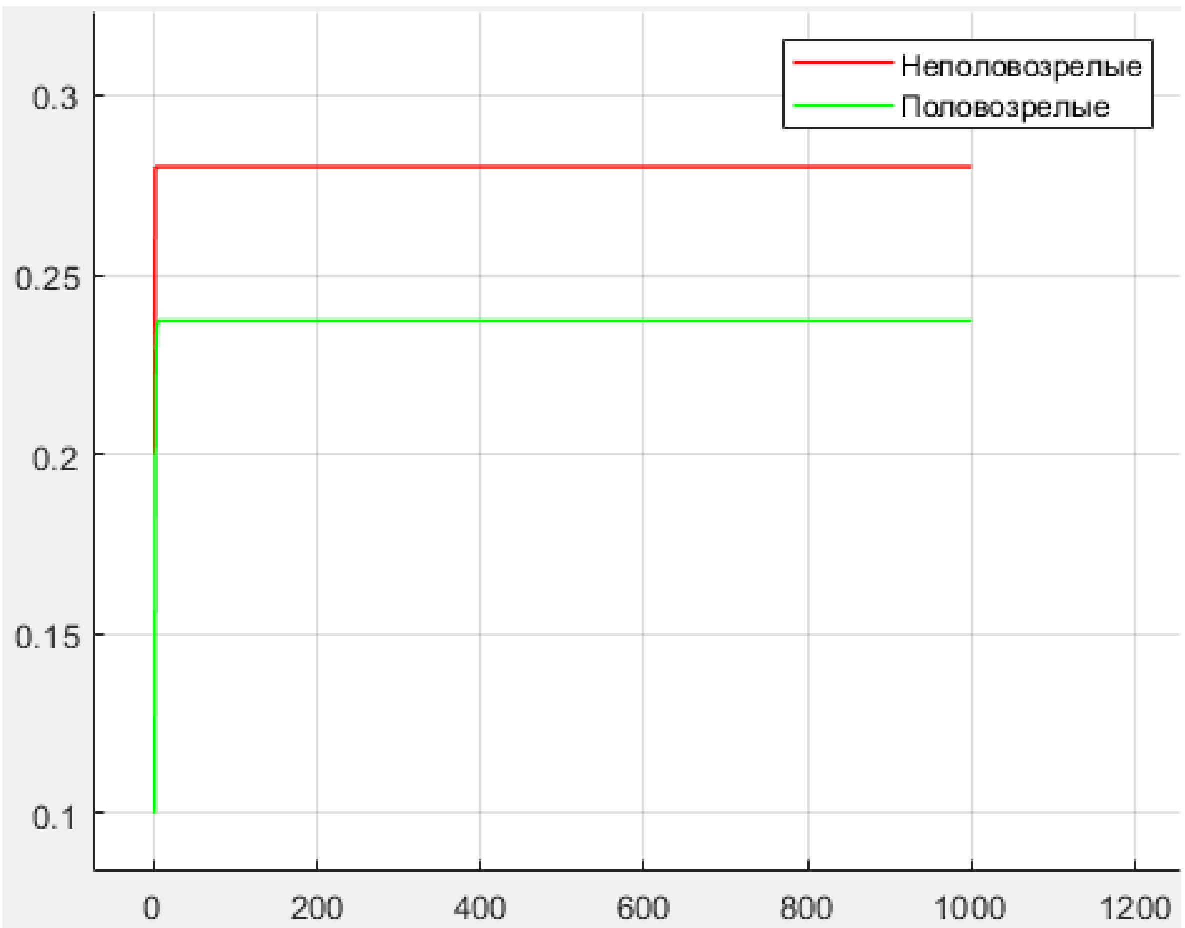


Рис. 1: На данном графике мы видим результат работы симуляции с тысячей шагов.

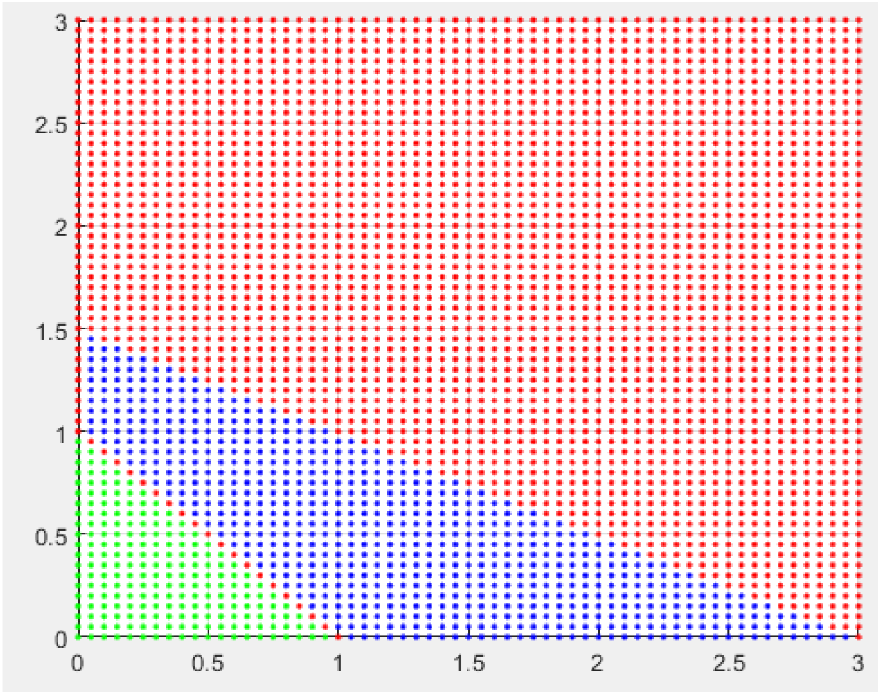
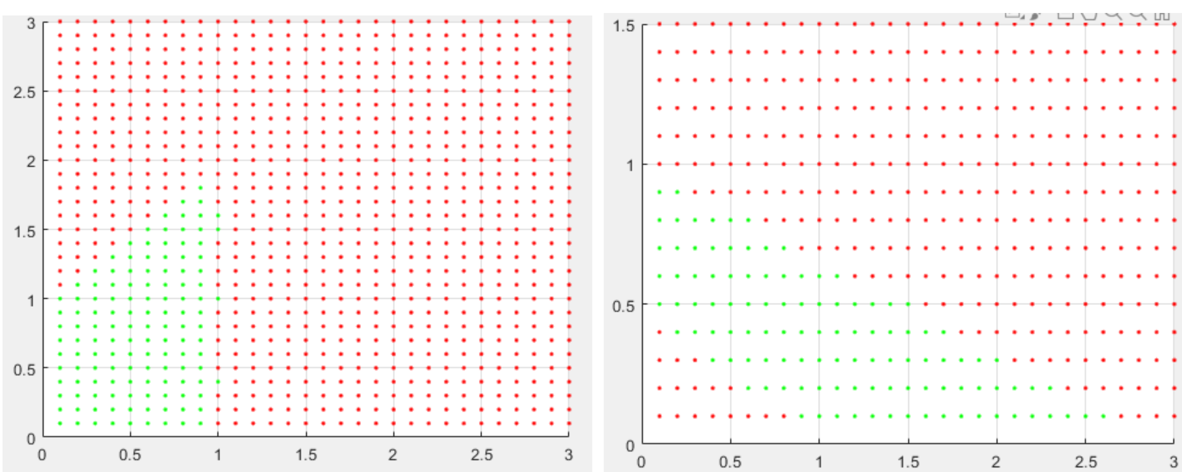


Рис. 2: На данном графике мы видим анализ сходимости системы к точкам равновесия в зависимости от значений параметров a и b. Зелёным цветом выделены значения, для которых имеется сходимость к первому положению равновесия, синим - ко второму, красным, для которых отсутствует сходимость.



(a) (b)

Рис. 3: На данных графиках представлен анализ собственных чисел линеаризованной системы для первого (a) и второго (b) положений равновесия. Зелёным цветом выделены точки, в которых имеет место асимптотическая устойчивость, а красным - нет.