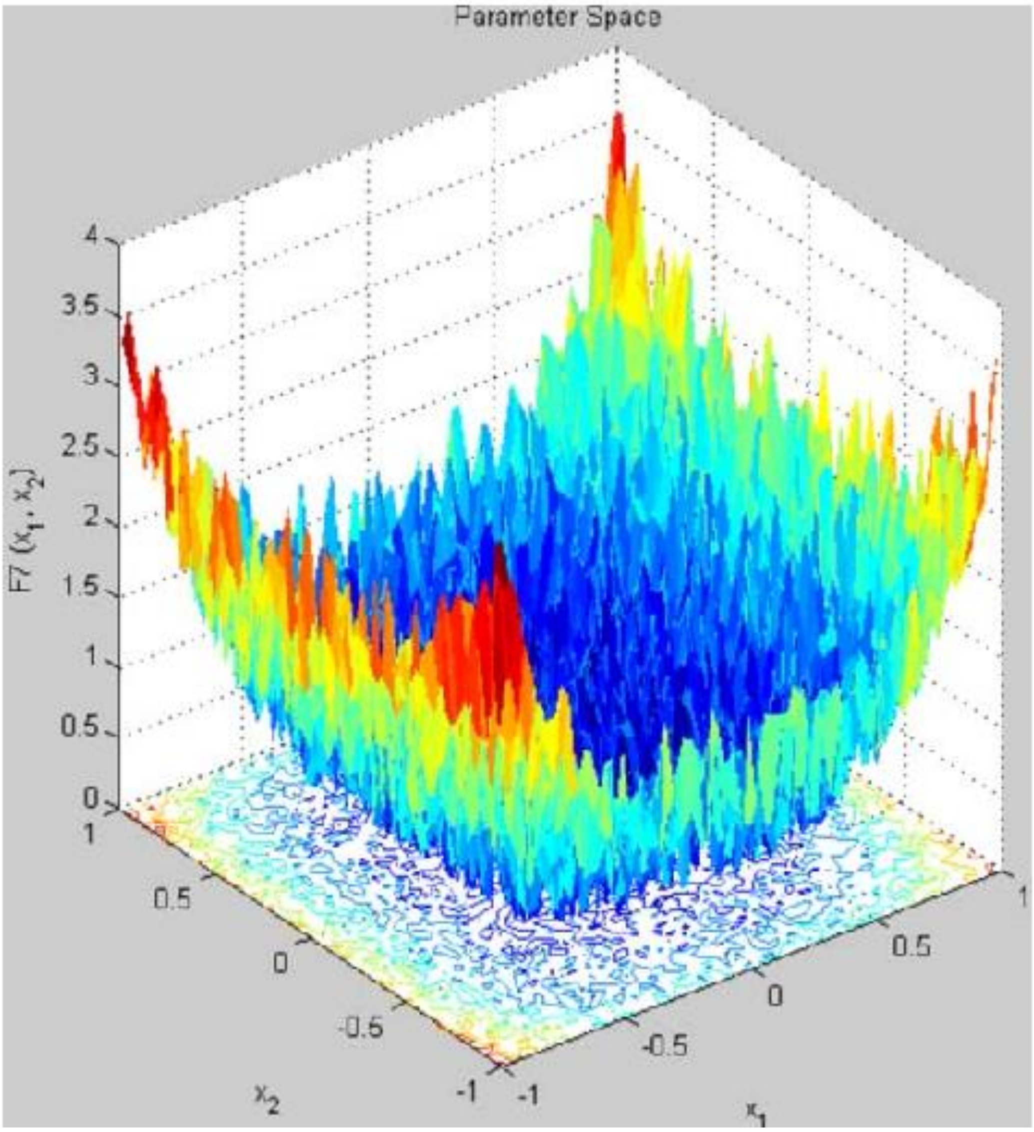


Методы Оптимизации

ЛаБораторная Работа 2

Авторы: Куприянов M3233, Долматова M3232, Шайдулин M3233

Ссылка на реализацию

Цели работы

1. Ознакомится с методом Ньютона и его вариациями
2. Изучить квази-ньютоновские методы
3. Рассмотреть возможности библиотеки scipy.optimize
4. Реализовать рассмотренные методы

Работа

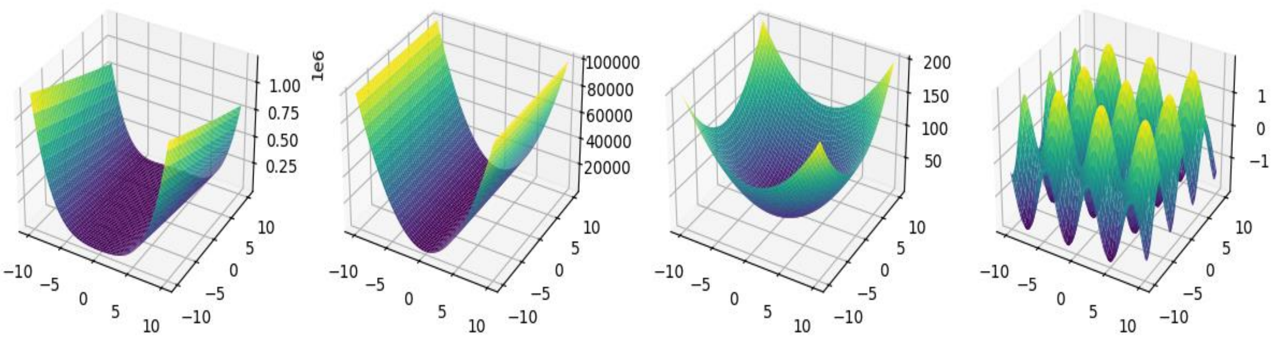
Мы взяли 4 различные функции: cos(y)+sin(x), была взята как не полиномиальная функция, требуемая в условии, а также у нее достаточно просто найти гессиан и градиент, что поможет сравнить предполагаемые и реальные результаты. Также была взята функция 1000x^2+y^2 как функция с плохо обусловленной матрицей, остальные функции мы взяли из 1 лабораторной работы.

В качестве начальных точек мы выбрали (10,79); (-2;-2);(0.001;0.003) как и в прошлой лабораторной, так как надо было посмотреть как будут вести себя функции в зависимости от координатной четверти исходной точки, но при этом мы заменили точку (10000,1888) на (10,79), иначе возникает переполнение в связи с новым методом и новой функцией с большим коэффициентом.

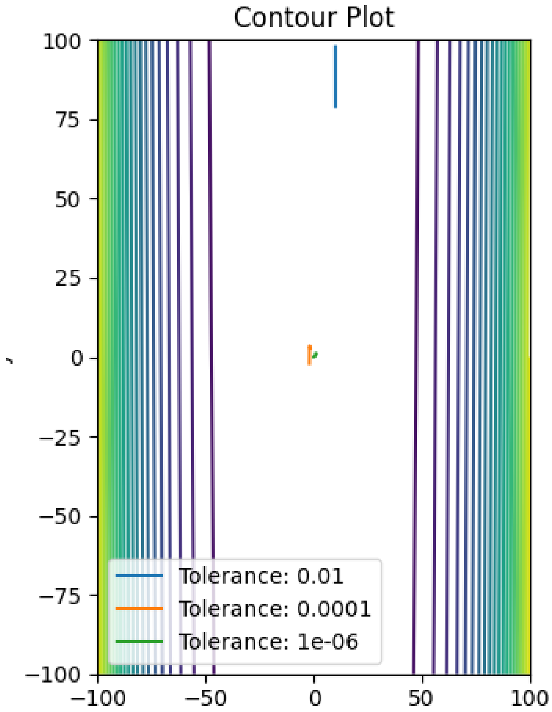
Как и в прошлой работе мы рассматривали три точности: 1e-2, 1e-4, 1e-6.

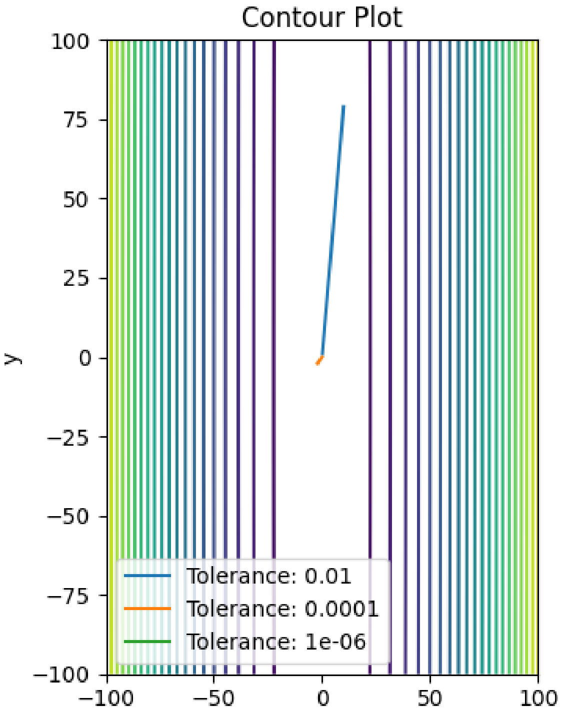
Метод Ньютона с постоянным Шагом

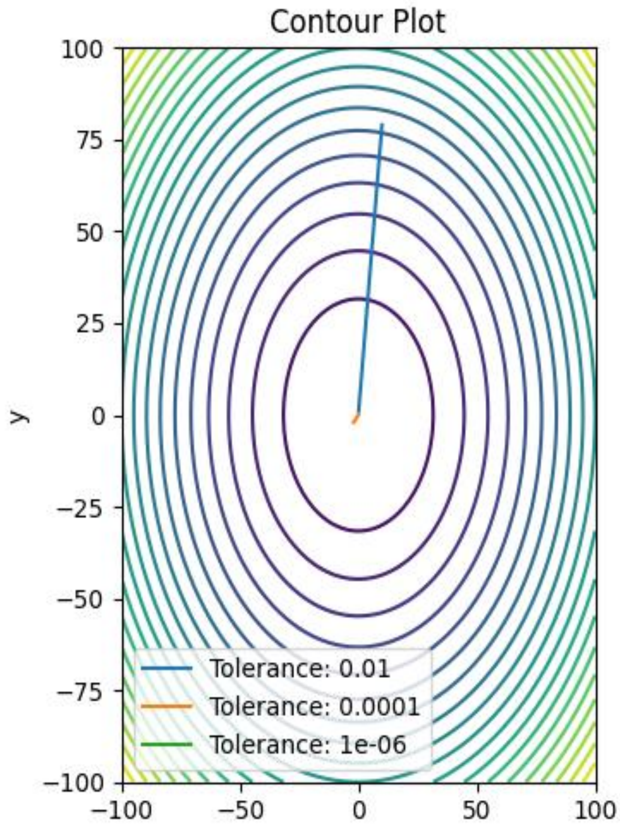
Графики функций:

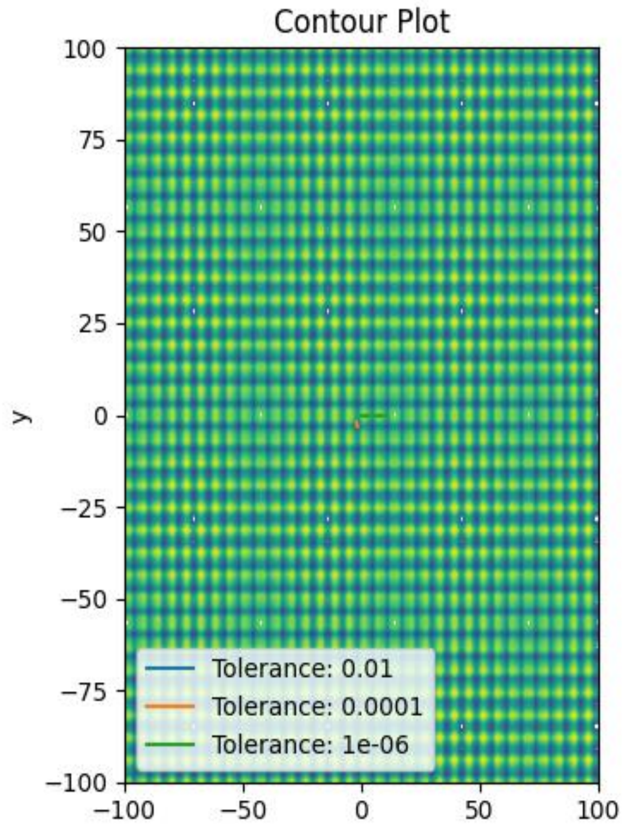


Теперь добавим графики линий уровня и траектории (в зависимости от точности):









Теперь добавим таблицу результатов:

Table 1: Optimization Results

Function	Initial Point	Tolerance	Minimum	Func Evaluations	Grad/Hess Evaluation
Rosenbrock	[10, 79]	0.010000	(9.9739, 97.9239)	260	Grad: 520 / Hess: 1560
$1000x^2 + y^2$	[10, 79]	0.010000	(0.1250, 0.9882)	437	Grad: 874 / Hess: 2622
$x^2 + y^2$	[10, 79]	0.010000	(0.1250, 0.9874)	437	Grad: 874 / Hess: 2622
$sin(x) + cos(y)$	[10, 79]	0.010000	(10.2593, 78.9037)	23	Grad: 46 / Hess: 138
Rosenbrock	[-2, -2]	0.010000	(-1.9884, 2.8994)	174	Grad: 348 / Hess: 1044
$1000x^2 + y^2$	[-2, -2]	0.010000	(-0.7032, -0.7033)	105	Grad: 210 / Hess: 630
$x^2 + y^2$	[-2, -2]	0.010000	(-0.7032, -0.7032)	105	Grad: 210 / Hess: 630
$sin(x) + cos(y)$	[-2, -2]	0.010000	(-1.8902, -2.3880)	29	Grad: 58 / Hess: 174
Rosenbrock	[0.001, 0.003]	0.010000	(0.1533, 0.0240)	12	Grad: 24 / Hess: 72
$1000x^2 + y^2$	[0.001, 0.003]	0.010000	(0.0010, 0.0030)	1	Grad: 2 / Hess: 6
$x^2 + y^2$	[0.001, 0.003]	0.010000	(0.0010, 0.0030)	1	Grad: 2 / Hess: 6
$sin(x) + cos(y)$	[0.001, 0.003]	0.010000	(10.2171, 0.0025)	19	Grad: 38 / Hess: 114
Rosenbrock	[10, 79]	0.000100	(9.6909, 93.7746)	500	Grad: 1000 / Hess: 3000
$1000x^2 + y^2$	[10, 79]	0.000100	(0.0657, 0.5194)	500	Grad: 1000 / Hess: 3000
$x^2 + y^2$	[10, 79]	0.000100	(0.0657, 0.5190)	500	Grad: 1000 / Hess: 3000
$sin(x) + cos(y)$	[10, 79]	0.000100	(10.9868, 78.5445)	454	Grad: 908 / Hess: 2724
Rosenbrock	[-2, -2]	0.000100	(-1.6681, 2.7430)	500	Grad: 1000 / Hess: 3000
$1000x^2 + y^2$	[-2, -2]	0.000100	(-0.0131, -0.0131)	500	Grad: 1000 / Hess: 3000
$x^2 + y^2$	[-2, -2]	0.000100	(-0.0131, -0.0131)	500	Grad: 1000 / Hess: 3000
$sin(x) + cos(y)$	[-2, -2]	0.000100	(-1.5750, -3.1325)	459	Grad: 918 / Hess: 2754
Rosenbrock	[0.001, 0.003]	0.000100	(0.9902, 0.9805)	500	Grad: 1000 / Hess: 3000
$1000x^2 + y^2$	[0.001, 0.003]	0.000100	(0.0010, 0.0030)	1	Grad: 2 / Hess: 6
$x^2 + y^2$	[0.001, 0.003]	0.000100	(0.0010, 0.0030)	1	Grad: 2 / Hess: 6
$sin(x) + cos(y)$	[0.001, 0.003]	0.000100	(10.9856, 0.0000)	442	Grad: 884 / Hess: 2652
Rosenbrock	[10, 79]	0.000001	(9.6909, 93.7746)	500	Grad: 1000 / Hess: 3000
$1000x^2 + y^2$	[10, 79]	0.000001	(0.0657, 0.5194)	500	Grad: 1000 / Hess: 3000
$x^2 + y^2$	[10, 79]	0.000001	(0.0657, 0.5190)	500	Grad: 1000 / Hess: 3000
$sin(x) + cos(y)$	[10, 79]	0.000001	(10.9901, 78.5427)	500	Grad: 1000 / Hess: 3000
Rosenbrock	[-2, -2]	0.000001	(-1.6681, 2.7430)	500	Grad: 1000 / Hess: 3000
$1000x^2 + y^2$	[-2, -2]	0.000001	(-0.0131, -0.0131)	500	Grad: 1000 / Hess: 3000
$x^2 + y^2$	[-2, -2]	0.000001	(-0.0131, -0.0131)	500	Grad: 1000 / Hess: 3000
$sin(x) + cos(y)$	[-2, -2]	0.000001	(-1.5735, -3.1356)	500	Grad: 1000 / Hess: 3000
Rosenbrock	[0.001, 0.003]	0.000001	(0.9902, 0.9805)	500	Grad: 1000 / Hess: 3000
$1000x^2 + y^2$	[0.001, 0.003]	0.000001	(0.0000, 0.0001)	345	Grad: 690 / Hess: 2070
$x^2 + y^2$	[0.001, 0.003]	0.000001	(0.0000, 0.0001)	345	Grad: 690 / Hess: 2070
$sin(x) + cos(y)$	[0.001, 0.003]	0.000001	(10.9901, 0.0000)	500	Grad: 1000 / Hess: 3000

Плюсы:

- Быстрая сходимость: метод Ньютона имеет квадратичную скорость сходимости, то есть быстро сходится к решению при хорошем выборе начального приближения, поэтому в среднем работает быстрее методов одномерного поиска.
- если функция гладкая и имеет непрерывные производные в окрестности корня, метод Ньютона работает быстро и точно, что видно из таблицы.
- Использует информацию производную: что позволяет идти прямо к корню, учитывая наклон функции в каждой точке.

Минусы:

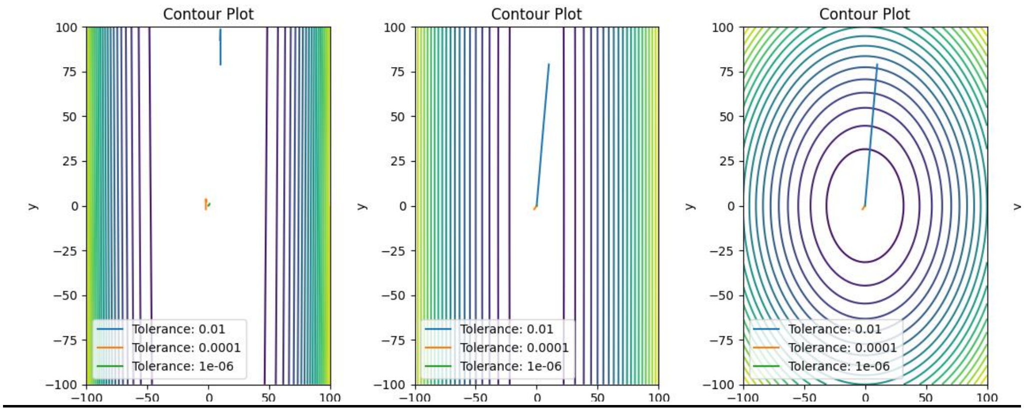
- Чувствителен к начальному приближению: метод может не сойтись или сойтись к неправильному корню, если начальное приближение выбрано плохо, в среднем влияет сильнее чем методы одномерного поиска, что видно по значению вычислений в зависимости

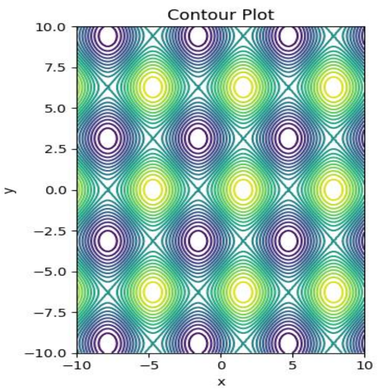
- Требует вычисления второй производной: что вызывает проблемы при сложных функциях
- Неустойчив к различным типам корней: метод Ньютона может проявлять неустойчивость при наличии кратных корней, точек перегиба или особенностей функции.

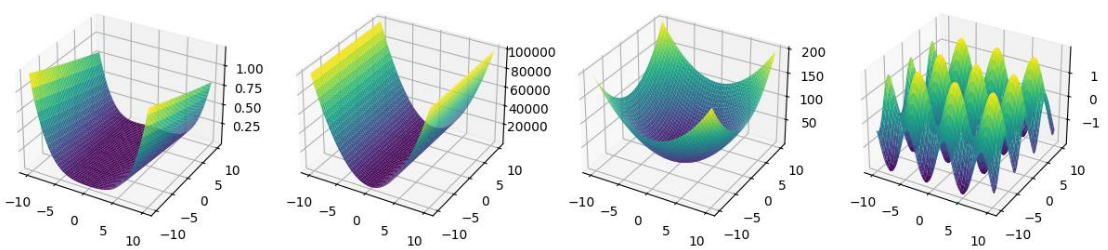
Можно сказать, что выбор между методом Ньютона и методами одномерного поиска зависит от исходной задачи. Например, если функция гладкая и начальное приближение хорошее, метод Ньютона может быть лучшим выбором из-за его высокой скорости сходимости. Если функция негладкая или начальное приближение неочевидно, методы одномерного поиска скорее будут лучшим решением.

метод Ньютона с одномерным поиском и одномерный поиск по правилу Вольфе (Wolfe)

Метод Ньютона с методом одномерного поиска (золотого сечения):







Function	Initial Point	Tolerance	Minimum	Func Evaluations
Rosenbrock(golden)	[10, 79]	0.010000	(9.960441258920305, 98.18100398836688)	176
$1000x^2 + y^2$(golden)	[10, 79]	0.010000	(0.013317805145504451, 0.10529361804543448)	235
$x^2 + y^2$(golden)	[10, 79]	0.010000	(0.013317463029344979, 0.10521804495320498)	235
sin(x) + cos(y) (golden)	[10, 79]	0.010000	(10, 79)	1
Rosenbrock(golden)	[-2, -2]	0.010000	(-1.9609663743129537, 3.502069091936055)	173
$1000x^2 + y^2$(golden)	[-2, -2]	0.010000	(-1.4081394753181578, -1.4082817724773862)	71
$x^2 + y^2$(golden)	[-2, -2]	0.010000	(-1.4081392366842067, -1.4081392366842067)	71
sin(x) + cos(y) (golden)	[-2, -2]	0.010000	(-1.9886956535036948, -2.0517534851672843)	6
Rosenbrock(golden)	[0.001, 0.003]	0.010000	(0.035368821562619085, 0.003811737312610253)	4
$1000x^2 + y^2$(golden)	[0.001, 0.003]	0.010000	(0.001, 0.003)	1
$x^2 + y^2$(golden)	[0.001, 0.003]	0.010000	(0.001, 0.003)	1
sin(x) + cos(y) (golden)	[0.001, 0.003]	0.010000	(5.00499708388889, 0.0029849999571452046)	2
Rosenbrock(golden)	[10, 79]	0.000100	(1.0001677086268046, 1.0003305248433059)	381
$1000x^2 + y^2$(golden)	[10, 79]	0.000100	(9.212456280529738e-05, 0.0007252987192025016)	285
$x^2 + y^2$(golden)	[10, 79]	0.000100	(9.211134562381121e-05, 0.0007276661752018264)	285
sin(x) + cos(y) (golden)	[10, 79]	0.000100	(10, 79)	1
Rosenbrock(golden)	[-2, -2]	0.000100	(0.9997873227329165, 0.9995695833687883)	325
$1000x^2 + y^2$(golden)	[-2, -2]	0.000100	(-0.0006259091537002793, -0.0006260294136914013)	258
$x^2 + y^2$(golden)	[-2, -2]	0.000100	(-0.0006259092130333196, -0.0006259092130333196)	258
sin(x) + cos(y) (golden)	[-2, -2]	0.000100	(-2, -2)	1
Rosenbrock(golden)	[0.001, 0.003]	0.000100	(0.999549708913631, 0.9990944245680314)	237
$1000x^2 + y^2$(golden)	[0.001, 0.003]	0.000100	(0.001, 0.003)	1
$x^2 + y^2$(golden)	[0.001, 0.003]	0.000100	(0.001, 0.003)	1
sin(x) + cos(y) (golden)	[0.001, 0.003]	0.000100	(1.5698711549721223, 2.8105825661119577e-06)	248
Rosenbrock(golden)	[10, 79]	0.000001	(1.00000154178712, 1.0000030377414781)	396
$1000x^2 + y^2$(golden)	[10, 79]	0.000001	(6.897072621184584e-07, 5.437188555084241e-06)	315
$x^2 + y^2$(golden)	[10, 79]	0.000001	(6.89568031272941e-07, 5.448746721306436e-06)	315
sin(x) + cos(y) (golden)	[10, 79]	0.000001	(10, 79)	1
Rosenbrock(golden)	[-2, -2]	0.000001	(0.9999978952059569, 0.9999957403178009)	347
$1000x^2 + y^2$(golden)	[-2, -2]	0.000001	(-2, -2)	1
$x^2 + y^2$(golden)	[-2, -2]	0.000001	(-2, -2)	1
sin(x) + cos(y) (golden)	[-2, -2]	0.000001	(-2, -2)	1
Rosenbrock(golden)	[0.001, 0.003]	0.000001	(0.9999970211257517, 0.9999940079974717)	277
$1000x^2 + y^2$(golden)	[0.001, 0.003]	0.000001	(0.001, 0.003)	1
$x^2 + y^2$(golden)	[0.001, 0.003]	0.000001	(0.001, 0.003)	1
sin(x) + cos(y) (golden)	[0.001, 0.003]	0.000001	(1.570789516812681, 2.083548434438145e-08)	287

Плюсы:

- Быстрая сходимость: Метод Ньютона и так сходится быстро к решению, а если использовать метод одномерного поиска (золотое сечение), для определения оптимального шага, получаем еще лучший результат.
- Высокая точность: из-за быстрой сходимости и нормального выбора шага метод Ньютона с золотым сечением достигает высокой точности при нахождении локального минимума, как мы видим из таблицы получается точнее примерно на 0.1*tolerance в зависимости от выбранной точности.
- Эффективность: Метод Ньютона с одномерным поиском в среднем требует чуть меньшего числа итераций для достижения оптимума по сравнению с методом Ньютона с постоянным шагом.

Минусы:

- Чувствительность к начальному приближению: Метод Ньютона чувствителен к начальному приближению, и использование метода одномерного поиска может не всегда компенсировать эту чувствительность.
- Ограниченная применимость: Метод Ньютона с одномерным поиском иногда может быть менее эффективным, например, на функциях с большими

градиентами или в случае наличия ограничений (как видно из таблицы для функции с большим коэффициентом)

Метод Ньютона по правилу Вольфе:

Function	Initial Point	Tolerance		Func Evaluations	Grad Evaluations	Hess Evaluations
Rosenbrock(wolfe)	[10, 79]	0.010000	(9.634979682972402, 92.74655717140976)	10	20	60
$1000x^2 + y^2(wolfe)$	[10, 79]	0.010000	(0.002441385174488426, 0.019196759534417258)	13	26	78
$x^2 + y^2(wolfe)$	[10, 79]	0.010000	(0.002441188532254211, 0.019301742730269203)	13	26	78
$sin(x) + cos(y)(wolfe)$	[10, 79]	0.010000	(10.981863236424918, 78.55282220543226)	6	12	36
Rosenbrock(wolfe)	[-2, -2]	0.010000	(-1.574746749137048, 2.446035868028146)	11	22	66
$1000x^2 + y^2(wolfe)$	[-2, -2]	0.010000	(-0.007812512961224772, -0.007820564376039696)	9	18	54
$x^2 + y^2(wolfe)$	[-2, -2]	0.010000	(-0.007812514610346367, -0.007812514610346367)	9	18	54
$sin(x) + cos(y)(wolfe)$	[-2, -2]	0.010000	(-1.5830965102649923, -3.1385288868537455)	6	12	36
Rosenbrock(wolfe)	[0.001, 0.003]	0.010000	(0.8409384839154006, 0.7019892242331508)	13	26	78
$1000x^2 + y^2(wolfe)$	[0.001, 0.003]	0.010000	(0.001, 0.003)	1	2	6
$x^2 + y^2(wolfe)$	[0.001, 0.003]	0.010000	(0.001, 0.003)	1	2	6
$sin(x) + cos(y)(wolfe)$	[0.001, 0.003]	0.010000	(61.24843536354921, 4.394530399483911e-05)	8	16	48
Rosenbrock(wolfe)	[10, 79]	0.000100	(9.634979682972402, 92.74655717140976)	10	20	60
$1000x^2 + y^2(wolfe)$	[10, 79]	0.000100	(1.9073321675751423e-05, 0.00014997468332600362)	20	40	120
$x^2 + y^2(wolfe)$	[10, 79]	0.000100	(1.9071785409287887e-05, 0.00015079486504818564)	20	40	120
$sin(x) + cos(y)(wolfe)$	[10, 79]	0.000100	(10.995467178289166, 78.53991794021731)	13	26	78
Rosenbrock(wolfe)	[-2, -2]	0.000100	(-1.574746749137048, 2.446035868028146)	11	22	66
$1000x^2 + y^2(wolfe)$	[-2, -2]	0.000100	(-0.000122070515014669, -0.00012219632194682324)	15	30	90
$x^2 + y^2(wolfe)$	[-2, -2]	0.000100	(-0.00012207054077825115, -0.00012207054077825115)	15	30	90
$sin(x) + cos(y)(wolfe)$	[-2, -2]	0.000100	(-1.5709885032586384, -3.141544782435067)	12	24	72
Rosenbrock(wolfe)	[0.001, 0.003]	0.000100	(0.9992883861221233, 0.9985609099512933)	104	208	624
$1000x^2 + y^2(wolfe)$	[0.001, 0.003]	0.000100	(6.250000000002861e-05, 0.000187500000327754)	5	10	30
$x^2 + y^2(wolfe)$	[0.001, 0.003]	0.000100	(6.249999999965971e-05, 0.00018750000000037232)	5	10	30
$sin(x) + cos(y)(wolfe)$	[0.001, 0.003]	0.000100	(61.2608595500768, 6.866457216606298e-07)	14	28	84
Rosenbrock(wolfe)	[10, 79]	0.000001	(9.634979682972402, 92.74655717140976)	10	20	60
$1000x^2 + y^2(wolfe)$	[10, 79]	0.000001	(1.4901032559180765e-07, 1.1716772134841352e-06)	27	54	162
$x^2 + y^2(wolfe)$	[10, 79]	0.000001	(1.4899832351006048e-07, 1.1780848831889408e-06)	27	54	162
$sin(x) + cos(y)(wolfe)$	[10, 79]	0.000001	(10.995573450774318, 78.53981713349428)	20	40	120
Rosenbrock(wolfe)	[-2, -2]	0.000001	(-1.574746749137048, 2.446035868028146)	11	22	66
$1000x^2 + y^2(wolfe)$	[-2, -2]	0.000001	(-9.536758985521108e-07, -9.546587652116746e-07)	22	44	132
$x^2 + y^2(wolfe)$	[-2, -2]	0.000001	(-9.536760998300788e-07, -9.536760998300788e-07)	22	44	132
$sin(x) + cos(y)(wolfe)$	[-2, -2]	0.000001	(-1.5707978281718011, -3.141592279601182)	19	38	114
Rosenbrock(wolfe)	[0.001, 0.003]	0.000001	(0.9999931304045634, 0.9999861035189573)	176	352	1056
$1000x^2 + y^2(wolfe)$	[0.001, 0.003]	0.000001	(4.882812500002235e-07, 1.4648437525621235e-06)	12	24	72
$x^2 + y^2(wolfe)$	[0.001, 0.003]	0.000001	(4.882812499973291e-07, 1.4648437500028602e-06)	12	24	72
$sin(x) + cos(y)(wolfe)$	[0.001, 0.003]	0.000001	(61.26105520441164, 5.360593557373012e-09)	21	42	126

Плюсы:

- Эффективен на выпуклых функциях: метод хорошо работает на выпуклых функциях, где гессиан является положительно определенным.
- Малое количество итераций: можно заметить что этот метод требует гораздо меньшего числа итераций чем все остальные
- Является достаточно точным, не уступает другим методам

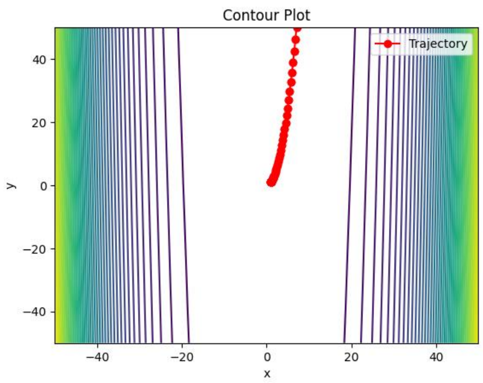
Минусы:

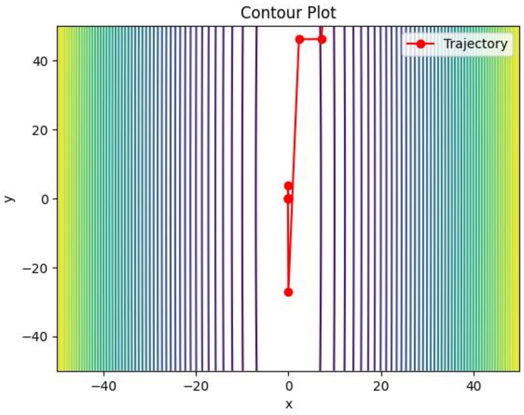
- Те же, что и метода Ньютона

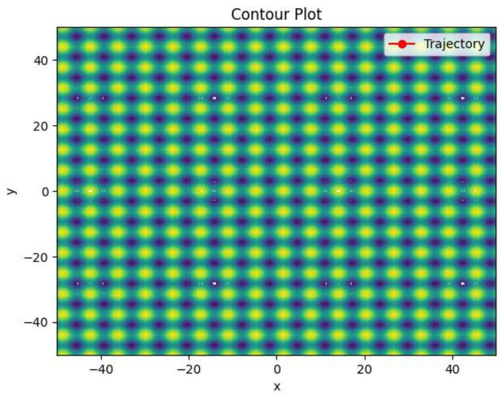
- Неустойчивость на невыпуклых функциях: на невыпуклых функциях метод может быть менее стабильным из-за возможности попадания в локальные минимумы (например если гессиан не является положительно_определенным во всех точках как в случае с не полином. функцией)

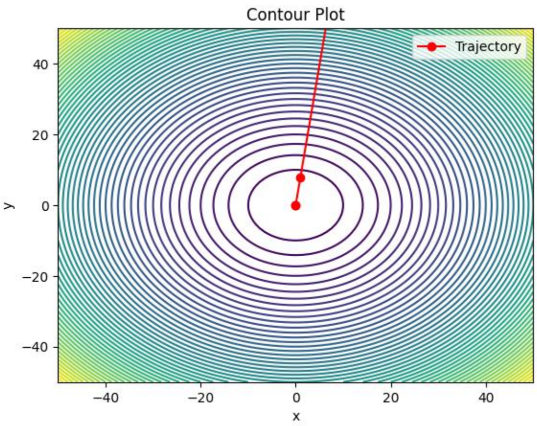
- Дополнительные вычисления на каждой итерации: Вольфе требует дополнительные вычисления для выбора размера шага, что может увеличить вычислительную нагрузку по сравнению с обычным методом Ньютона.

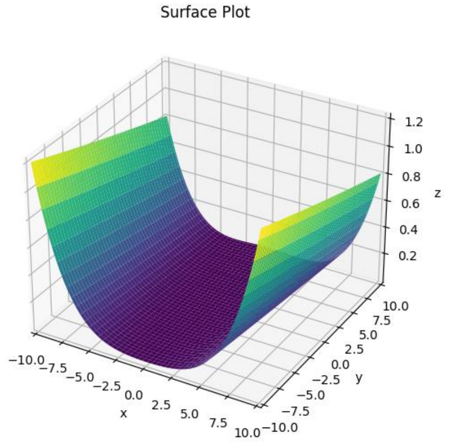
метод Newton-CG и квазиньютоновский метод

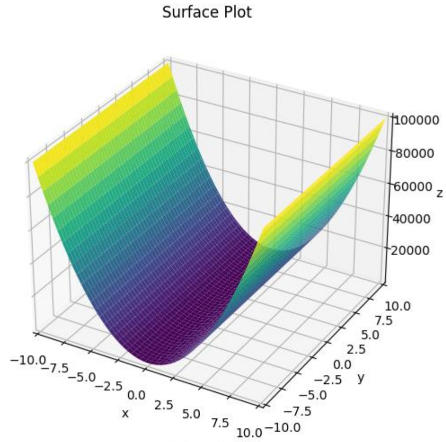


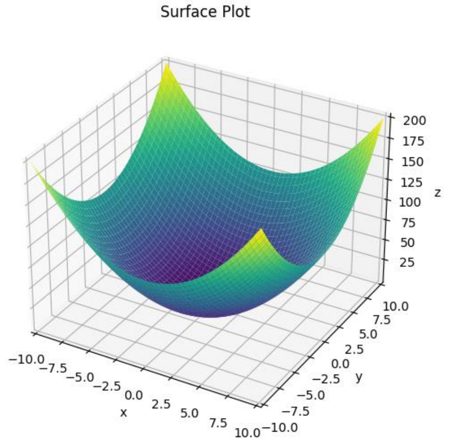












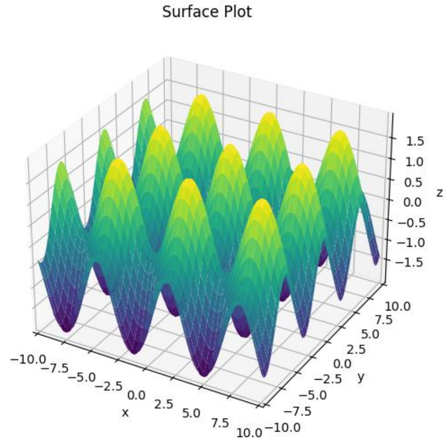


Table 1: Optimization Results

Function	Initial Point	Tolerance	Minimum	Func Evaluations
rosenbrock	[10, 79]	1.000000×10^{-5}	$(0.9999968, 0.9999937)$	167
rosenbrock	[10, 79]	1.000000×10^{-6}	$(0.9999968, 0.9999937)$	167
rosenbrock	[10, 79]	1.000000×10^{-7}	$(1.0000000, 1.0000000)$	169
rosenbrock	[-2, -2]	1.000000×10^{-5}	$(0.99999997, 0.99999994)$	47
rosenbrock	[-2, -2]	1.000000×10^{-6}	$(0.99999997, 0.99999994)$	47
rosenbrock	[-2, -2]	1.000000×10^{-7}	$(0.99999997, 0.99999994)$	47
rosenbrock	[0.001, 0.003]	1.000000×10^{-5}	$(0.9999981, 0.9999962)$	31
rosenbrock	[0.001, 0.003]	1.000000×10^{-6}	$(0.9999981, 0.9999962)$	31
rosenbrock	[0.001, 0.003]	1.000000×10^{-7}	$(1.0000000, 1.0000000)$	33
func_1000	[10, 79]	1.000000×10^{-5}	$(-7.8306846 \times 10^{-9}, -9.4252975 \times 10^{-9})$	33
func_1000	[10, 79]	1.000000×10^{-6}	$(-7.8306846 \times 10^{-9}, -9.4252975 \times 10^{-9})$	33
func_1000	[10, 79]	1.000000×10^{-7}	$(-7.8306846 \times 10^{-9}, -9.4252975 \times 10^{-9})$	33
func_1000	[-2, -2]	1.000000×10^{-5}	$(-7.4505808 \times 10^{-9}, -7.4508680 \times 10^{-9})$	21
func_1000	[-2, -2]	1.000000×10^{-6}	$(-7.4505808 \times 10^{-9}, -7.4508680 \times 10^{-9})$	21
func_1000	[-2, -2]	1.000000×10^{-7}	$(-7.4505808 \times 10^{-9}, -7.4508680 \times 10^{-9})$	21
func_1000	[0.001, 0.003]	1.000000×10^{-5}	$(-7.4261468 \times 10^{-9}, 3.6919172 \times 10^{-9})$	15
func_1000	[0.001, 0.003]	1.000000×10^{-6}	$(-7.4261468 \times 10^{-9}, 3.6919172 \times 10^{-9})$	15
func_1000	[0.001, 0.003]	1.000000×10^{-7}	$(-7.4261468 \times 10^{-9}, 3.6919172 \times 10^{-9})$	15
func_x2_y2	[10, 79]	1.000000×10^{-5}	$(-6.6816858 \times 10^{-8}, -7.2881347 \times 10^{-7})$	24
func_x2_y2	[10, 79]	1.000000×10^{-6}	$(-6.6816858 \times 10^{-8}, -7.2881347 \times 10^{-7})$	24
func_x2_y2	[10, 79]	1.000000×10^{-7}	$(-6.6816858 \times 10^{-8}, -7.2881347 \times 10^{-7})$	24
func_x2_y2	[-2, -2]	1.000000×10^{-5}	$(-3.5877107 \times 10^{-8}, -3.5877106 \times 10^{-8})$	9
func_x2_y2	[-2, -2]	1.000000×10^{-6}	$(-3.5877107 \times 10^{-8}, -3.5877106 \times 10^{-8})$	9
func_x2_y2	[-2, -2]	1.000000×10^{-7}	$(-3.5877107 \times 10^{-8}, -3.5877106 \times 10^{-8})$	9
func_x2_y2	[0.001, 0.003]	1.000000×10^{-5}	$(-2.9801909 \times 10^{-9}, 5.9604650 \times 10^{-9})$	9
func_x2_y2	[0.001, 0.003]	1.000000×10^{-6}	$(-2.9801909 \times 10^{-9}, 5.9604650 \times 10^{-9})$	9
func_x2_y2	[0.001, 0.003]	1.000000×10^{-7}	$(-2.9801909 \times 10^{-9}, 5.9604650 \times 10^{-9})$	9
sin_cos	[10, 79]	1.000000×10^{-5}	$(10.9955741, 78.5398149)$	15
sin_cos	[10, 79]	1.000000×10^{-6}	$(10.9955741, 78.5398149)$	15
sin_cos	[10, 79]	1.000000×10^{-7}	$(10.9955741, 78.5398149)$	15
sin_cos	[-2, -2]	1.000000×10^{-5}	$(-1.5707906, -3.1415924)$	15
sin_cos	[-2, -2]	1.000000×10^{-6}	$(-1.5707906, -3.1415924)$	15
sin_cos	[-2, -2]	1.000000×10^{-7}	$(-1.5707906, -3.1415924)$	15
sin_cos	[0.001, 0.003]	1.000000×10^{-5}	$(-1.5707950, 3.1415927)$	66
sin_cos	[0.001, 0.003]	1.000000×10^{-6}	$(-1.5707950, 3.1415927)$	66
sin_cos	[0.001, 0.003]	1.000000×10^{-7}	$(-1.5707950, 3.1415927)$	66

Плюсы метода Newton-CG:

- Эффективность в больших пространствах: Newton-CG более эффективен в больших пространствах, тк он использует квазиньютоновскую аппроксимацию гессиана вместо его точного вычисления,(что видно из таблицы)
- Меньшие требования по памяти: память для хранения квазиньютоновской матрицы, меньше, чем для хранения полного гессиана
- Лучшая устойчивость к сингулярности: Newton-CG более устойчив к сингулярностям и вырожденным матрицам в сравнении с методом Ньютона, так как в библиотеке SciPy используют квазиньютоновскую аппроксимацию гессиана вместо его точного вычисления , еще есть динамическая адаптация к изменениям формы функции (есть адаптивное изменение шага).
- Лучшая точность чем у предыдущих методов

Минусы метода Newton-CG:

- Не всегда глобально сходится: Newton-CG не гарантирует глобальной сходимости к решению
- Сильная зависимость от начального приближения: зависимость от начальной точки может быть более критична чем у стандартного метода Ньютона, некорректный выбор может привести к медленной сходимости или к расходимости.

Дополнительный пункт 2

1. Пример функции, для которой метод Ньютона может не сходиться, это функция с нулевой производной в точке, где мы хотим найти корень. Например, пусть у нас есть функция x^3 при начальном приближении в 0 , метод Ньютона будет пытаться вычислить следующее приближение, но п производная функции будет давать 0, а значит при попытке найти следующее приближение получим неопределенность, а значит метод не сработает, также можно взять например ln(x) с отрицательной начальной точкой и метод Ньютона не сработает .
2. Рассмотрим функцию, которую мы взяли как не полиномиальную: sin(x)+cos(y), можно заметить, что обычный метод Ньютона и метод Ньютона по золотому сечению дают разный результат при начальной точке (0.001;0.003) и максимальном приближении, это можно объяснить периодичностью функции, и различном подходом в обновлении значения

Заключение

В заключение можно сказать, что мы разобрали новые алгоритмы предложенные в работе и осознали их преимущества и недостатки по сравнению с друг другом , а также с предыдущей лабораторной работой и разобрали основные примеры и некоторые тонкости для реализации каждого из алгоритмов.