1 часть: (1) $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right)$

1) $f'(x) = \cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right)' = \left(\frac{\pi}{6}+x\right)' \cdot \left(-\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)\right)$

$= -\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)$

2) $f'' = -\cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right)$

3) $f''' = \sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)$

4) $f'''' = \cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right)$

после чего произойдет зацикливание.

$\Rightarrow$ формулу можно обобщить, как:

$$f^{(n)} = \cos\left(\left(x+\frac{\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{2}\cdot n\right)$$

Действительно: при $n=0$ получим $\cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right)$ при $n=1$: $-\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)$; при $n=2$: $-\cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right)$,

а при $n=3$: $\cos\left(x+\frac{\pi\cdot 3}{2}\right) = \sin x$, а далее в силу периодичности – цикл.

(2) Воспользуемся формулой:

$$P_n(x) = P(x_0) + P'(x_0)(x-x_0) + \ldots + \frac{P^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R(x_0)$$

$\Rightarrow$ получим: $\cos\left(x_0+\frac{\pi}{6}\right) + (x-x_0)\cdot\cos\left(x_0+\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\right) + \ldots + \frac{\cos\left(x_0+\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}n\right)}{n!}(x-x_0)^n +$
$+R(x_0)$, при $x_0=0$: $\frac{\sqrt{3}}{2} + x\left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot x^2 + \frac{1}{2}\cdot x^3 + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot x^4 \ldots$

(3) Воспользуемся формулой косинуса суммы:

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta \Rightarrow$ в нашем случае получим

$\cos x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin x\cdot\frac{1}{2}$ пользуясь формулой производной косинуса и синуса, распишем многочлен.

$\Rightarrow$

$$\cos'(x) = -\sin(x)$$

$$\cos''(x) = -\cos(x)$$

$$\cos'''(x) = \sin(x)$$

$$\cos''''(x) = \cos(x).$$

$\Rightarrow$ про-е $f^{(n)} = \cos(x + \frac{\pi}{2} \cdot n)$.

У синуса:

$$\sin'(x) = \cos(x)$$

$$\sin''(x) = -\sin(x)$$

$$\sin'''(x) = -\cos(x)$$

$$\sin''''(x) = \sin(x).$$

$\Rightarrow$ пр-е $f^{(n)} = \sin(x + \frac{\pi}{2} n)$

$\Rightarrow$ получим: $\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(\cos(x_0) + (x-x_0) \cdot \cos(x_0 + \frac{\pi}{2}) + \ldots \frac{\cos(x_0 + \frac{\pi}{2} n)}{n!}(x-x_0)^n\right) -$

$- \frac{1}{2}\left(\sin(x_0) + (x-x_0) \cdot \sin(x_0 + \frac{\pi}{2}) + \ldots \frac{\sin(x_0 + \frac{\pi}{2} n)}{n!}(x-x_0)^n\right) + R_{(x)}$

т.к. косинусы будут чередовать знак и обнулятся при чет. знач.: (с синусами наоборот)

$\Rightarrow$ при, например, $x_0 = 0$; получим совпадение с предыдущим.

---

(4) в форме Лагранжа: $R_n(x, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$

$f(a)$; $a = 0{,}05$.

$\Rightarrow$ при $x_0 = 0$; $x = 0{,}05$; где: $0 < \xi < x$

$\Rightarrow R_1 = \frac{f''(\xi + \frac{\pi}{2} \cdot 2)}{2!} \cdot 0{,}05^2$; в общем случае:

$R_n = \frac{\cos(\xi + \frac{\pi}{2} n)}{(n+1)!} \cdot 0{,}05^{n+1}$. В силу огранич. фун-ии $\cos(t)$, получим $|R_n| \leq \frac{1 \cdot 0{,}05^{n+1}}{(n+1)!} \Leftrightarrow$

$\Rightarrow$ 1) $\Delta_1 = 10^{-3}$

2) $\Delta_2 = 10^{-6}$

1) : $10^{-3} \geq \frac{1 \cdot 0{,}05^{n+1}}{(n+1)!}$

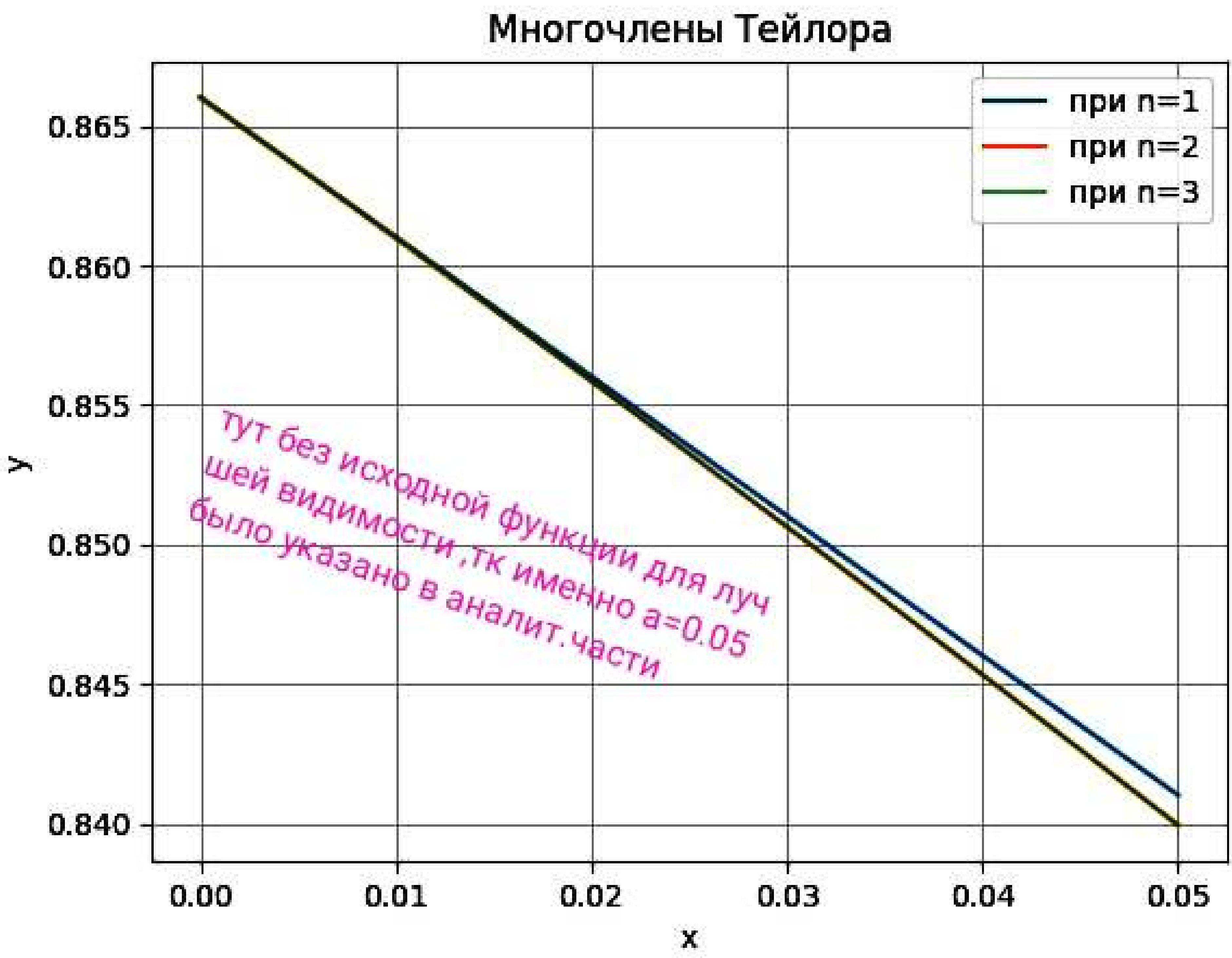
• подставим $n = 1 \Rightarrow 10^{-3} \geq \frac{1 \cdot 0{,}5^{2}}{2!}$

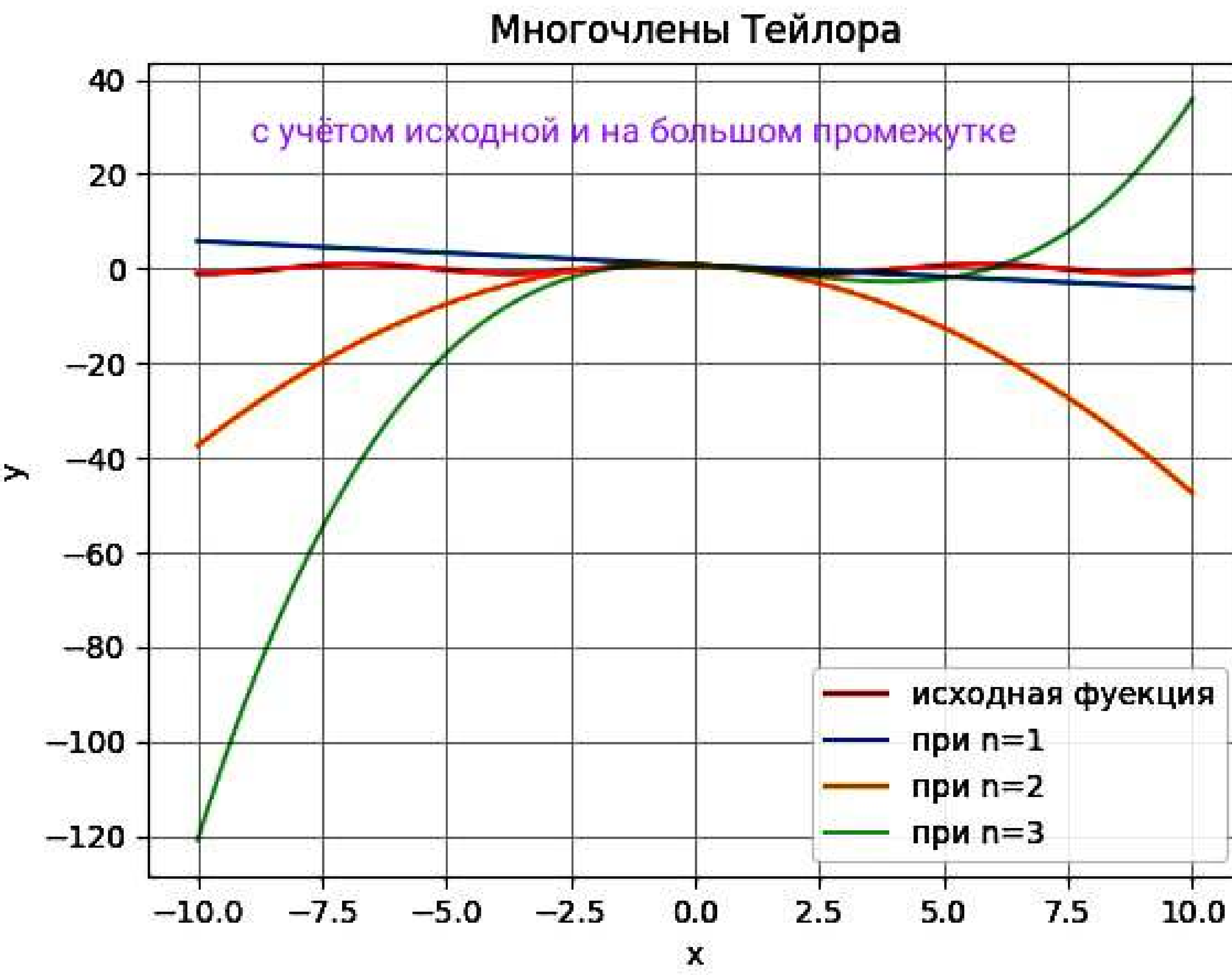
$\Rightarrow \frac{1}{800} \leq \frac{1}{1000}$ — неверно. $\approx 2{,}1 \cdot 10^{-5}$

• подставим $n = 2 \Rightarrow \left(\frac{1}{20}\right)^3 : 3! \leq \frac{1}{10^3}$ — верно; в силу убывания функции следующие n - подходят

2) Из предыдущего, $n = 2$ - не подходит $\Rightarrow$ при $n = 3$ получим $\frac{1 \cdot 0{,}05^4}{4!} \Rightarrow$ получим $\frac{1}{24 \cdot 20^4} \leq 10^{-6}$ — верно. Аналогично, начиная с этого номера - подходит

$\Rightarrow n_2 = 3$; $n_1 = 2$.


Многочлены Тейлора
при n=1
при n=2
при n=3
0.865
0.860
0.855
0.850
0.845
0.840
y
0.00
0.01
0.02
0.03
0.04
0.05
x
тут без исходной функции для луч
шей видимости ,тк именно а=0.05
было указано в аналит.части


Многочлены Тейлора
с учётом исходной и на большом промежутке
40
20
0
−20
−40
−60
−80
−100
−120
y
−10.0
−7.5
−5.0
−2.5
0.0
2.5
5.0
7.5
10.0
x
исходная фуекция
при n=1
при n=2
при n=3