

# 1) Лабораторная работа. Аналитическая часть

$$X_n = \frac{2n-1}{2n+1} \cdot \sin \frac{2+(-1)^n}{6} \pi$$

Выделим подпоследовательность  $y_n$  состоящую из нечетных элементов  $\Rightarrow y_n = \frac{2n-1}{2n+1} \cdot \sin \frac{2+(-1)^n}{6} \pi$ ;  $n$ -нечет  $\Rightarrow$  получим

$$y_n = \frac{2n-1}{2n+1} \cdot \sin \frac{1 \cdot \pi}{6}, \quad n\text{-нечет.}$$

Также выделим подпоследовательность  $z_n$  состоящую из четных элементов  $\Rightarrow z_n = \frac{2n-1}{2n+1} \cdot \sin \frac{1 \cdot \pi}{2}$ ,  $n$ -чет.

Заметим  $\frac{2n-1}{2n+1} = \frac{2 - \frac{1}{n}}{2 + \frac{1}{n}} \Rightarrow$  по св-ам пределов,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{1}{n}}{2 + \frac{1}{n}} =$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} 2 : \lim_{n \rightarrow \infty} 2 = 1.$$

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ n: 2}} \{y_n\} = \sin \frac{\pi}{6}; \quad \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ n: 2}} \{z_n\} = \sin \frac{\pi}{2}$$

Поскольку  $x_n < x_{n+1} > x_{n+2}$ , для нечет.  $n$  то все подпоследовательности содержащие бесконечное число таких элементов не будут иметь предела.  $\Rightarrow$  все остальные подпоследовательности начиная с некоторого номера будут совпадать либо с  $y_n$  либо с  $z_n \Rightarrow$  их пределы будут совпадать.  $\Rightarrow$  множество крайних пределов  $= \{ \sin \frac{\pi}{6}; \sin \frac{\pi}{2} \}$



А значит по Теореме о сходимости последовательности (последовательность сходящаяся или имеет ровно один частичный предел)  $\Rightarrow$

$\Rightarrow$  • последовательность не сходится.

- нижний предел — точная нижняя грань множества частичных пределов.
- верхний предел — точная верхняя грань множества частичных пределов.

$\Downarrow$  из найденного ранее  $\lim x_n = \sin \frac{\pi}{2}$   
 $\lim x_n = \sin \frac{\pi}{6}$

2

1) найдем точные нижнюю и верхнюю грани множества значений выделенных подпоследовательностей:

Поскольку  $\frac{2n-1}{2n+1}$  возрастает при  $n \in \mathbb{N}$ , то из определения верхней и нижней грани, следует, что она будет достигаться в этих подпоследовательностях при наименьших  $n$ ;  $\Rightarrow y \{y_n\}$  это будет при  $n=1$ :  $\frac{2 \cdot 1 - 1}{2 \cdot 1 + 1} \cdot \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{3} \cdot \sin \frac{\pi}{6}$

$y \{z_n\}$  это будет при  $n=2$ :  $\frac{2 \cdot 2 - 1}{2 \cdot 2 + 1} \cdot \sin \frac{\pi}{2} = \frac{3}{5} \cdot \sin \frac{\pi}{2}$

• Точная верхняя грань, т.к. это ЗЧР минимальных значений, ~~поэтому~~ а значит, для  $\{y_n\}$  это будет  $\lim y_n = \sin \frac{\pi}{6}$ , в силу возрастания последовательности. Аналогично для  $z_n$ , получим  $\sin \frac{\pi}{2}$ .



3) Поскольку обе из подпоследовательностей монотонно возрастают, то наименьшим элементом в каждой из них будет первый элемент, а так как эти последовательности в объединении дают исходную, то минимальный элемент послед-ти  $x_n =$   
 $\Rightarrow \min \{y_1, z_1\} = y_1 = \frac{1}{3} \sin \frac{\pi}{6}$ .

Максимального элемента нет, так как последовательность получается в объединении 2х подпоследовательностей, которые монотонно возрастают.

Верхние и нижние пределы были найдены в ~~определенных~~ ~~определенных~~ пунктах

4) Докажем по определению, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \{z_n\} = \sin \frac{\pi}{2}, n: 2$   
 а.н.н.,  $\forall \epsilon > 0 \exists n_0(\epsilon): \forall n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \epsilon \Rightarrow \left| \left( \frac{2n-1}{2n+1} - 1 \right) \cdot \sin \frac{\pi}{2} \right| <$

$< \epsilon$ , где  $\forall \epsilon > 0$ , начиная с некоего  $n_0$ ;

$$\Leftrightarrow \left( 1 - \frac{2n-1}{2n+1} \right) \sin \frac{\pi}{2} < \epsilon \Leftrightarrow \frac{2 \sin \frac{\pi}{2}}{2n+1} < \epsilon;$$

$$\text{б.о.б.м. } n_0 \geq \left\lceil \frac{1}{\epsilon} \right\rceil \Rightarrow \frac{2 \sin \frac{\pi}{2}}{2 \frac{1}{\epsilon} + 1} < \epsilon \Rightarrow \frac{2}{2 + \epsilon} < \epsilon \Rightarrow$$

$$\frac{-\epsilon^2}{2 + \epsilon} < 0, \text{ что верно для } \forall \epsilon > 0.$$

$\Rightarrow$  если подставит для  $n = \frac{1}{\epsilon}$ , то и для  $n \geq \left\lceil \frac{1}{\epsilon} \right\rceil + 1$ , т.к. значения уменьшаются  $\Rightarrow$  т.д.

отчет о коде:

язык программирования - python, версия 3.11.0

1) сначала разбиваем картинку на 4 части для каждого из пунктов, чтобы было удобнее различать каждый из графиков

2) затем размечаем сетку и строим графики для 1 пункта делая разную прозрачность для того чтобы было видно совпадающие точки

(есть более подробные комментарии в коде )

3) во втором пункте аналогично см комментарии к строкам 31,35-49.

4) в третьем пункте даем пользователю ввести значение эпсилона, делаю большой перебор с большим шагом так как достаточно найти один такой  $n_0$  и не обязательно

это должен быть самый первый номер, а так как в аналитической части доказали, что последовательность монотонно возрастает, то достаточно найти один номер,

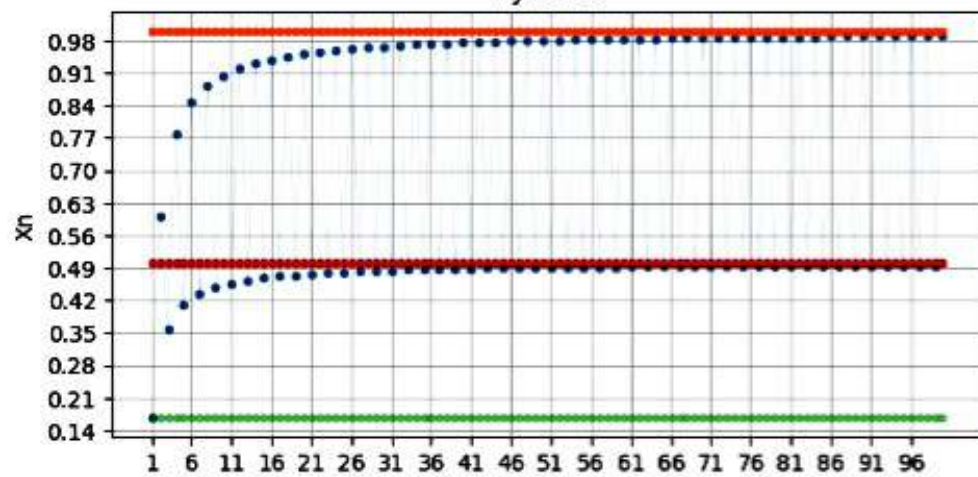
а значит для остальных после найденного все будет ок (если что есть комментарии в коде)

5) в четвертом пункте аналогично предыдущему делаем большой перебор пока не найдем нужное значение для верхней грани, а потом добавляем график из 2 пункта.

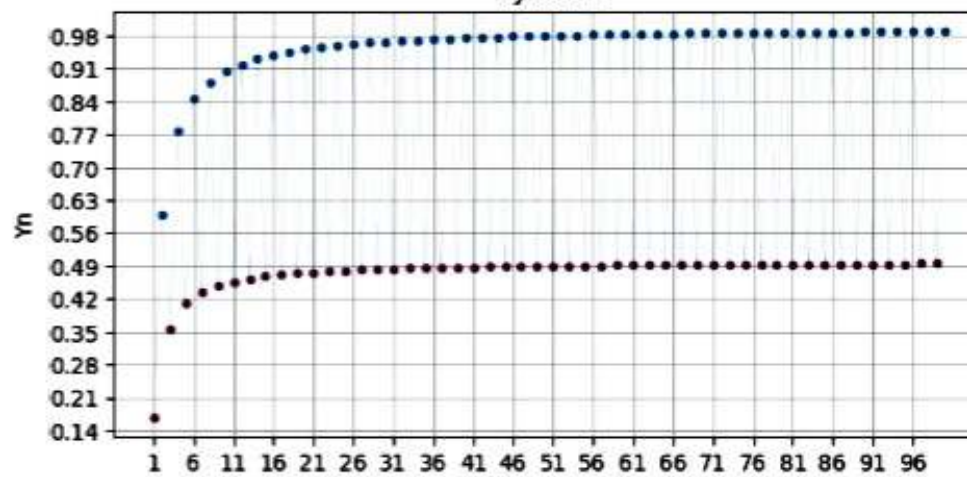


пример графиков для  $\epsilon=0.09$  и  $\epsilon_1=0.0021$

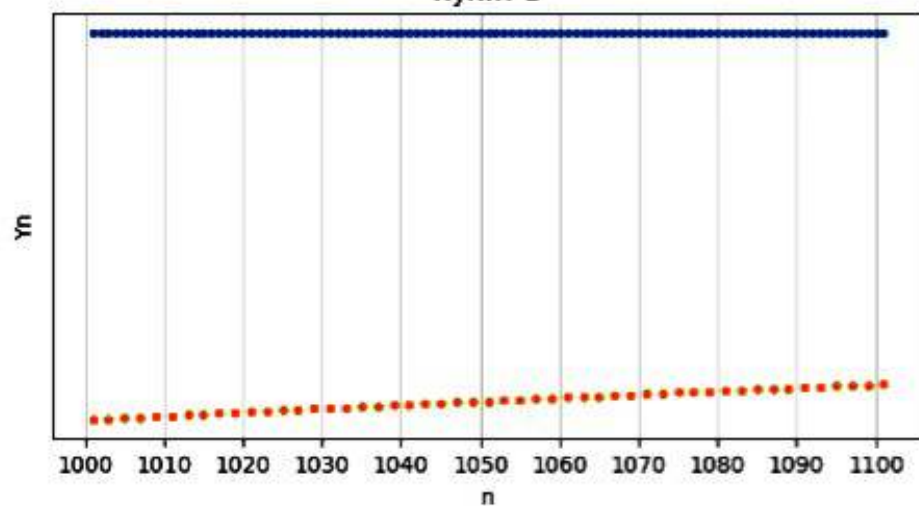
пункт 1



пункт 2



пункт 3



пункт 4

