(1) Лабораторная работа. Аналитическая часть

$$X_n = \frac{2n-1}{2n+1} \cdot \sin \frac{2+(-1)^n}{6}\pi$$

Выделим подпосл-ть y_n состоящую из нечетных элементов $\Rightarrow y_n = \frac{2n-1}{2n+1} \cdot \sin \frac{2+(-1)^n}{6}\pi$, n - нечет $\Rightarrow$ получим

$$y_n = \frac{2n-1}{2n+1} \cdot \sin \frac{1 \cdot \pi}{6}, \ n \text{ - нечет.}$$

Также выделим подпосле-ть Z_n состоящая из чет элементов $\Rightarrow$

$\Rightarrow Z_n = \frac{2n-1}{2n+1} \cdot \sin \frac{1 \cdot \pi}{2}$, n - чет.

Заметим $\frac{2n-1}{2n+1} = \frac{2-\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}} \Rightarrow$ по св-ам пределов, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2-\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} 2 : \lim\limits_{n\to\infty} 2 = 1.$

$\Downarrow$

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ n\vdots 2}} \{y_n\} = \sin\frac{\pi}{6}, \quad \lim_{\substack{n\to\infty \\ n\vdots 2}} \{z_n\} = \sin\frac{\pi}{2}$$

Поскольку $X_n < X_{n+1} > X_{n+2}$, для нечет. n, то все подпоследовательности содержащие бесконечное число таких чередований не будут иметь предела. $\Rightarrow$ все остальные подпоследовательности начиная с некоторого номера будут совпадать либо с y_n либо с $Z_n \Rightarrow$ их пределы будут совпадать. $\Rightarrow$ Множество частичных пределов $= \{\sin\frac{\pi}{6}; \sin\frac{\pi}{2}\}$

А значит, по Теореме о сходимости последовательности (последовательность сходится, если имеет ровно один частичный предел) =>

=> • последовательность не сходится.

• нижний предел — точная нижняя грань множества частичных пределов.

• верхний предел — точная верхняя грань множества частичных пределов.

$\Downarrow$ из найденного ранее $\overline{\lim}\, x_n = \sin\frac{\pi}{2}$

$\underline{\lim}\, x_n = \sin\frac{\pi}{6}$.

2

1) найдем точные нижние грани множеств значений выделенных подпоследовательностей:

Поскольку $\frac{2n-1}{2n+1}$ возрастает при $n \in \mathbb{N}$, то из определения верхней нижней грани, следует, что она будет достигаться в этих подпоследовательностях при наименьших n; => у $\{y_n\}$ это будет при $n=1$: $\frac{2\cdot1-1}{2\cdot1+1}\cdot\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{3}\cdot\sin\frac{\pi}{6}$

у $\{z_n\}$ это будет при $n=2$: $\frac{2\cdot2-1}{2\cdot2+1}\cdot\sin\frac{\pi}{2} = \frac{3}{5}\cdot\sin\frac{\pi}{2}$

• Точная верхняя грань, т.к. это sup мн-ва значений, ~~[illegible]~~ а значит, для $\{y_n\}$ это будет $\lim y_n = \sin\frac{\pi}{6}$, в силу возрастания последовательности. Аналогично для z_n, получим $\sin\frac{\pi}{2}$.

3) Поскольку обе из подпоследовательностей монотонно возрастают, то наименьшим элементом в каждой из них будет первый элемент, а так как эти последовательности в объединении дадут исходную, то минимальный элемент посл-ти $x_n =$

$\Rightarrow \min\{y_1, z_1\} = y_1 = \frac{1}{3}\sin\frac{\pi}{6}$.

Максимального элемента нет, так как последовательность получается в объединении 2-х подпоследовательностей, которые монотонно возрастают.

Верхние и нижние пределы были найдены в ~~одном из~~ предыдущих пунктов

4) Докажем по определению, что $\lim\limits_{n\to\infty}\{z_n\} = \sin\frac{\pi}{2}$, $n:2$

а. нрд., $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0(\varepsilon): \forall n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon \Rightarrow \left|\left(\frac{2n-1}{2n+1} - 1\right)\cdot\sin\frac{\pi}{2}\right| <$

$< \varepsilon$, для $\forall \varepsilon > 0$, начиная с некого n_0;

$$\Leftrightarrow \left(1 - \frac{2n-1}{2n+1}\right)\sin\frac{\pi}{2} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{2\sin\frac{\pi}{2}}{2n+1} < \varepsilon;$$

Возьмем $n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1 \overset{\text{докажем}}{\Rightarrow} \frac{2\sin\frac{\pi}{2}}{2\frac{1}{\varepsilon} + 1} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{2}{\frac{2+\varepsilon}{\varepsilon}} < \varepsilon \Leftrightarrow$

$\frac{-\varepsilon^2}{2+\varepsilon} < 0$, что верно для $\forall \varepsilon > 0$.

$\Rightarrow$ если работает для $n = \frac{1}{\varepsilon}$, то и для $n \geq \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$, т.к. знаменатель уменьшится этим.

отчет о коде:

язык программирования - python,версия 3.11.0

1)сначала разбиваем картинку на 4 части для каждого из пунктов,чтобы было удобнее различать каждый из графиков

2)затем размечаем сетку и строим графики для 1 пункта делая разную прозрачность для того чтобы было видно совпадающие точки

(есть более подробные комментарии в коде)

3)во втором пункте аналогично см коментари к строкам 31,35-49.

4)в третьем пункте даем пользователю ввести значение эпсилона,делаю большой перебор с большим шагом так как достаточно найти один такой n0 и не обязательно

это должен быть самый первый номер,а так как в аналитической части доказали, что последовательность монотонно возрастает, то достаточно найти один номер,

а значит для остальных после найденного все будет ок(если что есть комментарии в коде)

5)в четвертом пункте аналогично предыдущему делаем большой перебор пока не найдем нужное знчение для верхней грани,а потом добавляем график из 2 пункта.

пример графиков для е=0.09 и е1=0.0021