应用数学方法巧解物理问题

湖南省汨罗市一中(414400)　张献忠

物理与数学有着十分密切的联系,这是众所周知的．从数学的角度来认识物理,不但有助于物理问题的解决,同时也能加深对数学知识的理解与巩固．下面通过对几道例题的分析,说明如何在物理问题中巧用数学方法．

一、利用三角函数的最值解题

【例1】 质量为10 kg的木箱置于水平地面上,它与地面间的滑动摩擦因数为$\mu=\sqrt{3}/3$,受到一个与水平方向成θ角斜向上方的拉力F作用,为使木箱作匀速直线运动,拉力F最小值多大?

解:木箱受四个力作用,由平衡条件有:

$F\cos\theta=\mu(mg-F\sin\theta)$

$\therefore F=\dfrac{\mu mg}{\cos\theta+\mu\sin\theta}$.

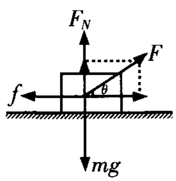

图1

这里m、g、μ为定值,分母最大时F最小,问题即变为求$\cos\theta+\mu\sin\theta$的极大值,这是数学中一个极普通的问题:令$\cos\theta+\mu\sin\theta=\sqrt{1+\mu^2}\sin(\theta+\Phi)$,

$\Phi=\arcsin 1/\sqrt{1+\mu^2}$.

所在当$\theta=\pi/2-\arcsin 1/\sqrt{1+\mu^2}$时,$F$取得最小值$F_{\min}=\mu mg/\sqrt{1+\mu^2}$,代入数据计算知,当$\theta=30°$时,$F$有最小值$F_{\min}=50$ N.

点评:这里除了应用做匀速运动的物体所受合外力为零的物理知识外,其余更多的是应用三角函数求极值的数学方法．

二、数形结合法解题

【例2】 如图2是某次实验数据画出的$U-I$图像,则①电源的电动势$\varepsilon=$______.

②该电源的短路电流$I_{短}$______.

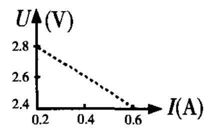

图2

③电源的内阻$r=$______.

分析与解:关于这道题很容易由思维定势得出答案$\varepsilon=2.8$ V,$I_{短}=0.6$ A,$r=\dfrac{\varepsilon}{I_{短}}=\dfrac{14\ \Omega}{3}$. 但是这个答案是错误的．

仔细观察$U-I$图线,它为经过(0.2 A,2.8 V)(0.6 A,2.4 V)两点的一条直线,可很快的由"两点确定一条直线"得出直线方程的一般表达式,即:$U=3-1\times I$,对照关系式$U=\varepsilon-Ir$故$\varepsilon=3$ V,$r=1\ \Omega$,且当$U=0$时,$I_{短}=3$ A.

点评:中学物理中一些比较抽象的习题较难求解,若能与数学图形相结合,恰当引入物理图像,则可变抽象为形象,便于突破难点、疑点,解题过程将大大简化,计算可快速便捷．

【例5】 一只老鼠从洞口爬出后沿着一直线运动,其速度大小与其离开洞口的距离成反比,当其到达距洞口为d_1的A点时,速度的大小为v_1,若B点离洞口的距离为$d_2(d_2>d_1)$,求老鼠由A到B所需的时间．

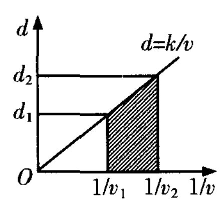

图5

解析:因老鼠的行进速度与它到洞口的距离成反比．

即有:$v=\dfrac{K}{d}$.(K为比例常数)

$v_1d_1=v_2d_2$　　　$\therefore v_2=\dfrac{d_1}{d_2}v_1$

老鼠运动速度$v=\dfrac{K}{d}$、其$v-d$图像是一条双曲线．而$d-\dfrac{1}{v}$的图像却是一条过原点的直线,如图5所示．

图中图线与横轴所包围的"面积"$d\times\dfrac{1}{v}$的单位跟时间的单位"秒"相同．类似于速度—时间图像,可知老鼠从A处行进到B处所用的时间等于图中阴影部分的梯形的"面积"值．所以

$$t=\frac{d_1+d_2}{2}\left(\frac{1}{v_2}-\frac{1}{v_1}\right)$$

将$v_2=d_1v_1/d_2$代入得

$$t=\frac{d_2^2-d_1^2}{2d_1v_1}$$

三、运用基本不等式解题

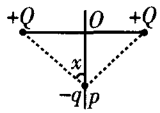

图 3

【例 3】 两个等量同号电荷$+Q$相距$2r$，其连线中点O，连线的中垂线从O点延伸到∞处，设一个异号检验电荷$-q$，从∞远处沿该中垂线向O靠拢，问这个电荷$-q$在什么位置所受库仑力最大？

分析与解：如图 3 所示，以夹角x为自变量，设一电荷在某位置p点，所受库仑引力为：

$$F=2K\frac{Q\cdot q}{(\frac{r}{\sin x})^2}\cdot\cos x=\frac{2KQ\cdot q}{r^2}\sin^2 x\cdot\cos x$$

设 $y=\sin^2 x\cdot\cos x$ 则 $y^2=\frac{1}{2}\cdot 2\sin^4 x\cdot\cos^2 x$

不等式$\frac{1}{3}(a+b+c)\geqslant\sqrt[3]{abc}$ 有 $abc\leqslant[\frac{1}{3}(a+b+c)]^3$

把 y^2 写成 $y^2=\frac{1}{2}\sin^2 x\cdot 2\cos^2 x\cdot\sin^2 x\leqslant\frac{4}{27}$

就是说 $y_{\max}=\frac{2}{9}\sqrt{3}$，此时 $\sin^2 x=2\cos^2 x$，即 $\tan x=\sqrt{2}$，则在 $\tan x=\sqrt{2}$的中垂线上的p点，电荷受引力$F_{\max}=\frac{4\sqrt{3}}{9}\cdot\frac{2KQ\cdot q}{r^2}$.

点评：基本不等式是数学中一个非常重要的知识点，用它来求解物理极值问题。往往柳暗花明，思维巧妙，事半功倍．

四、运用数学归纳法及数列求和公式解题

【例 4】 一个乒乓球从离地面h高处自由落到地面后又被弹起，如此往复下去，不计空气阻力，但由于与地面碰撞过程中的能量损失，使每次弹起的高度只有前一次下落高度的一半，求乒乓球从开始下落以后在空中来回运动的时间．

分析与解：设乒乓球能弹起$n(n\to\infty)$次，从h处下落到地面的时间为t_0，以后第一次、第二次、第三次、……，第n次被弹起高度依次为h_1、h_2、h_3……，h_n，由运动学公式得

$$t_0=\sqrt{2h/g}\qquad t_1=2\sqrt{2h_1/g}=2\sqrt{h/g}$$

$$t_2=2\sqrt{2h_2/g}=2\sqrt{h/g}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$t_3=2\sqrt{2h_3/g}=2\sqrt{h/g}(\frac{1}{\sqrt{2}})^2$$

$$\cdots\cdots t_n=2\sqrt{2h_n/g}=2\sqrt{h/g}(\frac{1}{\sqrt{2}})^{n-1}$$

依题，所求的时间就是t_0、t_1、t_2、t_3、……t_n之和

$$t_{\max}=t_0+(t_1+t_2+t_3+\cdots\cdots+t_n)$$

这里，t_1、t_2、t_3、……t_n组成了等比数列，其第一项$t_1=2\sqrt{h/g}$，公比$q=\frac{1}{\sqrt{2}}$故$(t_1+t_2+t_3+\cdots\cdots+t_n)$就是该数列前$n$项和，由前$n$项和公式$Sn=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$

$$得：t_1+t_2+t_3+\cdots\cdots+t_n=\frac{2\sqrt{h/g}[1-(\frac{1}{\sqrt{2}})^n]}{1-1/\sqrt{2}}$$

这里n为弹起次数，可理解为无限次，所以所求时间应当是$n\to\infty$的极限值，有

$$t_{\max}=t_0+\lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{h/g}[1-(\frac{1}{\sqrt{2}})^n]}{1-1/\sqrt{2}}$$

$$=\sqrt{\frac{2h}{g}}+\frac{2\sqrt{h/g}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$=(4+3\sqrt{2})\sqrt{\frac{h}{g}}.$$

点评：本题的解法首先利用了数学中的数学归纳法写出了时间的通式，然后运用等比数列求和公式进行计算得出结论，显然在这里数学归纳法起着举足轻重的作用．

由上面的例题分析，我们可以看到，在解决物理问题时，我们把它的数学形式抽象出来，抽象为某个数学问题，或是三角函数、或是几何图形、或是不等式、或是数列求和等，这时就会感到问题变得十分明朗和简单．