利用构造法巧解数学问题

李培庭，秦恒义
（包头市达茂旗百灵庙中学，内蒙古 包头 014500）

摘　要：在课堂教学中，引导学生用构造法解决数学问题，是培养学生联想思维能力和迁移概括能力的重要措施，也是培养学生的创造性、全面提高学生素质的有效方法之一。

关键词：构造法；数学问题；思维能力

中图分类号：G633.6　**文献标识码**：A　**文章编号**：1004－1869(2000)05－0072－03

构造法是根据问题的题设及结论的特征，综合运用数学知识加以联想、迁移概括，构造出与问题有关的代数或几何模型，使问题迎刃而解。

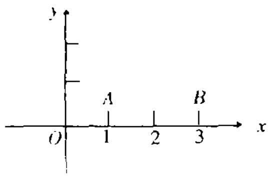

图 1

1　构造成两点间的距离解决问题

例 1. 求函数 $y=|x-1|+|x-3|\ (x\in R)$ 的值域。

分析：由 $|x-a|$ 可联想到同一数轴上两点 $A(x,0)$、$B(a,0)$ 的距离公式。

解：设 $P(x,0)$ 是 x 轴上的点，$A(1,0)$，$B(3,0)$ 是两定点，则 $y=|PA|+|PB|$（如图 1）当点 $P(x,0)$ 在点 A 的左侧或在点 B 的右侧时，都有 $y=|PA|+|PB|>2$；当 $P(x,0)$ 在线段 AB 上时，都有 $y=|PA|+|PB|=2$。$\therefore y=|PA|+|PB|\geqslant 2$，函数 $y=|x-1|+|x-3|\ (x\in R)$ 的值域是 $[2,+\infty)$。

例 2. 解不等式 $|x-1|+|x-3|>8$

分析：设 $P(x,0)$、$A(1,0)$，$B(3,0)$，则原不等式为 $|PA|+|PB|>8$，确定 $P(x,0)$ 在 x 轴上的位置，从而求出 x 的范围。由 $|AB|=|3-1|=2$，$\frac{8-|AB|}{2}=3$，将 A、B 两点分别向左、右平移 $3\left(\frac{8-|AB|}{2}\right)$ 个单位得 $C(-2,0)$、$D(6,0)$，（如图 2），$P(x,0)$ 在 C 的左侧或 D 的右侧时，都有 $|PA|+|PB|>8$，$\therefore$ 不等式 $|x-1|+|x-3|>8$ 的解集是 $\{x\mid x<-2$ 或 $x>6\}$。

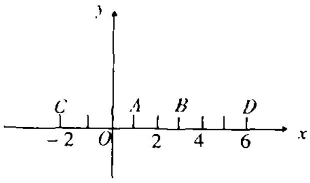

图 2

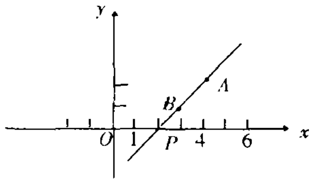

图 3

例 3. 求函数 $y=\sqrt{x^2-8x+20}-\sqrt{x^2-6x+10}$ 的最大值。

分析：原函数可化成 $y=\sqrt{(x-4)^2+2^2}-\sqrt{(x-3)^2+1^2}$，由 $\sqrt{(x-a)^2+b^2}$ 联想 $P(x,0)$ 与 $A(a,b)$ 两点间的距离。

收稿日期：2000－03－21

解：设 $P(x,0)$，$A(4,2)$，$B(3,1)$，则 $y=|PA|-|PB|$ 由平面几何知识得，当 P 在直线 AB 和 x 轴的交点处时，$|PA|-|PB|$ 取最大值 $|AB|=\sqrt{2}$，（如图3），∴ 函数的最大值为 $\sqrt{2}$。

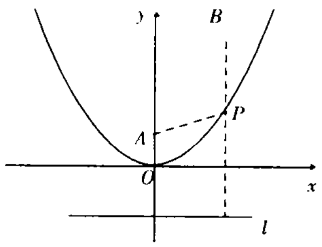

图 4

例4. 已知 x,y 满足 $y=4x^2$. 求 $\sqrt{x^2+(y-\frac{1}{16})^2}+\sqrt{(x-1)^2+(y-5)^2}$ 的最小值。

分析：$P(x,y)$ 是抛物线 $y=4x^2$ 上（如图4）的点，上述表达式是 $P(x,y)$ 与 $A(0,\frac{1}{16})$ 及 $P(x,y)$ 与 $B(1,5)$ 的距离之和。

解：设 $P(x,y)$ 是抛物线 $y=4x^2$ 上的点，则 $A(0,\frac{1}{16})$ 是抛物线的焦点，$B(1,5)$ 是一定点，由抛物线的定义知：$|PA|-|PB|$ 的最小值是 $B(1,5)$ 到抛物线 $y=4x^2$ 的准线 $l:y=-\frac{1}{16}$ 的距离 d，$d=5-(-\frac{1}{16})=\frac{81}{16}$，∴ 所求的最小值为 $\frac{81}{16}$。

2　构造成复数的模解决问题

例5. 求证：$\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}\geqslant\sqrt{2}$，$(x,y\in R)$

分析：该题根据不等式左边的表达形式可构造两点间的距离来证。由 $\sqrt{x^2+y^2}$ 也可联想到复数 $x+iy(x,y\in R)$ 的模。

解：设 $z=x+iy$，$(x,y\in R)$，$z_1=1+i$，则有：$\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}=|z|+|z-(1+i)|=|-z|+|z-1-i|\geqslant|-z+(z-1-i)|=|-1-i|=\sqrt{2}$，当 $-z$ 与 $z-1-i$ 表示的向量方向相同时取等号。

3　构造成直线的斜率解决问题

例6. 已知 x、y 满足 $x^2+y^2-4x+3=0$，求 $\frac{y}{x+1}$ 的最小值。

分析：由 $\frac{y}{x+1}=\frac{y-0}{x-(-1)}$ 联想到直线斜率的两点式表示。

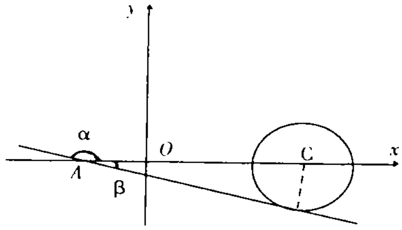

图 5

解：设 $P(x,y)$ 是圆 $(x-2)^2+y^2=1$ 上的动点，$A(-1,0)$ 是一定点，则 $\frac{y}{x+1}$ 表示直线 PA 的斜率（如图5），当 PA 与圆在 x 轴下面相切时，PA 的斜率最小，即 $\frac{y}{x+1}$ 取得最小值，其最小值为 $d=tg\alpha=tg(180°-\beta)=-tg\beta=-\frac{|PC|}{|AP|}=-\frac{1}{\sqrt{|AC|^2-|PC|^2}}=-\frac{1}{2\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{4}$.

∴ $\frac{y}{x+1}$ 的最小值为 $-\frac{\sqrt{2}}{4}$.

例7. 求函数 $y=\frac{\cos x-3}{\sin x-4}$ 的值域。

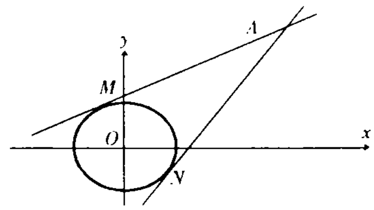

图 6

分析：设 $P(\sin x,\cos x)$、$A(4,3)$，直线 PA 的斜率为 $\frac{\cos x-3}{\sin x-4}$，又知点 $P(\sin x,\cos x)$ 在圆 $x^2+y^2=1$ 上，过点 $A(4,3)$ 作圆 $x^2+y^2=1$ 的切线 AM、AN（如图6）. 则：$K_{AM}\leqslant y\leqslant K_{AN}$（$K_{AM}$、$K_{AN}$ 分别表示直线 AM、AN 的斜率），设切线 $l:y-3=K(x-4)$，由点 $O(0,0)$ 到 l 的距离等于圆的半径 l，得 $K=\frac{12\pm2\sqrt{6}}{15}$，$K_{AM}=\frac{12-2\sqrt{6}}{15}$，$K_{AN}=\frac{12+2\sqrt{6}}{15}$，∴ 函数值域为 $[\frac{12-2\sqrt{6}}{15},\frac{12+2\sqrt{6}}{15}]$.

4 构造函数解决问题

例 8. 已知 a,b,c 均为实数，且 $|a|<1$，$|b|<1$，$|c|<1$，求证：$ab+bc+ca+1>0$。

分析：原不等式可化成：$(b+c)\cdot a+(bc+1)>0$。构造函数 $f(x)=(b+c)\cdot x+(bc+1)$，($|x|<1$)，由 $|x|<1$ 得 $-1<x<1$，∵ $f(-1)=-b-c+bc+1=(1-b)(1-c)$。

$|b|<1$，$|c|<1$ ∴ $f(-1)>0$。

又 ∵ $f(1)=b+c+bc+1=(1+b)(1+c)$。

$|b|<1$，$|c|<1$ ∴ $f(1)>0$。

$f(x)=(b+c)\cdot x+(bc+1)$ 在 $-1<x<1$ 时是单调函数，

∴ 当 $-1<x<1$ 时都有 $f(x)>0$ 成立。又 $|a|<1$，

令 $x=a$，则 $f(a)>0$，即 $ab+bc+ca+1>0$ 成立。

例 9. 求证：定义在实数集 R 上的任意函数 $f(x)$ 都可以表示成一个奇函数和一个偶函数的和。

分析：构造一个奇函数 $g(x)$ 和一个偶函数 $h(x)$，使 $f(x)=g(x)+h(x)$，设 $g(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}(x\in R)$，则 $g(-x)=\frac{f(-x)+f(x)}{2}=-\frac{f(x)-f(-x)}{2}=-g(x)$ ∴ $g(x)$ 是奇函数。

又设 $h(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}(x\in R)$，可证 $h(x)$ 是偶函数。

且有 $f(x)=g(x)+h(x)$ 成立。

5 构造方程解决问题

例 10. 设 $x,y\in R$，且 $x+y=a$，$x\cdot y=b$，求证：$b\leqslant\frac{1}{4}a^2$

分析：$x+y=a$，$x\cdot y=b$ 联想到一元二次方程根与系数的关系，即 x,y 是方程 $z^2-az+b=0$ 的两根，∵ $x,y\in R$，∴ 方程有实根，由 $\triangle\geqslant 0$ 得：

$a^2-4b\geqslant 0$，即 $b\leqslant\frac{1}{4}a^2$

6 将抽象的数学问题构造成已知特性的数学模型

例 11. 求证：$C_{m+n}^{\gamma}=C_m^{\gamma}+C_m^{\gamma-1}\cdot C_n^1+C_m^{\gamma-2}\cdot C_n^2+\cdots+C_m^1\cdot C_n^{\gamma-1}+C_n^{\gamma}$，$(m\geqslant\gamma,n\geqslant\gamma)$

分析：直接用组合数公式或性质证不易，构造一个具体的数学模型：

设有 m 个男生，n 个女生，从这 $(m+n)$ 个学生中选出 γ 个参加数学竞赛，共有多少种不同的选法？

直接选：有 C_{m+n}^{γ} 种。

分类选：1 类：不选女生有 C_m^{γ} 种选法。

2 类：选一个女生有 $C_m^{\gamma-1}C_n^1$ 种选法。

3 类：选两个女生有 $C_m^{\gamma-2}C_n^2$ 种选法。

……

γ 类：选 $(\gamma-1)$ 个女生有 $C_m^1C_n^{\gamma-1}$ 种选法。

$(\gamma+1)$ 类：选 γ 个女生有 C_n^{γ} 种选法。

分类选共有不同选法是 $C_m^{\gamma}+C_m^{\gamma-1}\cdot C_n^1+C_m^{\gamma-2}\cdot C_n^2+\cdots+C_m^1\cdot C_n^{\gamma-1}+C_n^{\gamma}$。两种选法结果相同，故等式成立。

例 12. 已知：三棱锥 $D-ABC$ 中，$AD=BC=\sqrt{13}$，$AB=CD=2\sqrt{5}$，$AC=BD=5$，(如图 7(1))

求：三棱锥 $D-ABC$ 的体积。

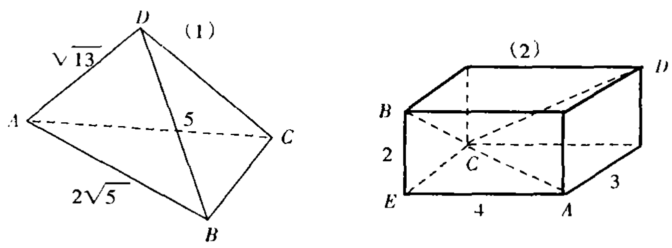

图 7

分析：若直接利用求底面积和高来计算体积较困难。由三棱锥的对棱相等这个条件，联想到长方体相对面矩形的对角线长相等。故构造一个长方体，将三棱锥“放入”，这个长方体内（如图 7(2)），由已知条件可求得这个长方体的长、宽、高分别是 4，3 和 2。三棱锥 D－ABC 的体积等于长方体的体积减去四个三棱锥 B－ACE 的体积，所求体积 $V=(4\times 3\times 2)-4\times(\frac{1}{3}\times 4\times 3\times\frac{1}{2}\times 2)=8$。

构造法没有固定模式，但必须明确构造目的，根据问题的不同特征，构造出相应的数学模型。