巧用数学方法　妙解数学问题

◉江苏省盐城市文峰中学　郑志平

数学思想方法就是指从某具体数学内容和对数学的认识过程中抽象概括出的观点，是对数学知识内容的本质认识.教学实践也证明，数学思想方法（转化思想、函数思想、构造思想、分类思想、数形结合思想等方法）是解决实际问题的重要途径，而数学习题浩瀚无边，问题又可变式发散，问题千千万万，但是蕴涵数学思想方法总是不变的.为此，在数学学习中，我们要巧用数学思想方法，妙解数学问题，不断提高学习效果.下面，现举一些案例，以供读者参考.

一、运用转化方法妙解极限问题

在平时数学解题练习中，我们如果巧妙运用转化思想方法，会使解题收到事半功倍的效果.尤其是在导数学习中，若能灵活地将极限式转化为导数定义，那么会使问题豁然开朗，使得解题速度大大提高.其次，我们还要引导学生把复杂的问题转化为简单问题，即把复杂的问题进行逐步分解、归结为简单问题，进而使学生巧妙地把复杂的问题解决.

案例1：如果$f(x)$在$x=a$处可导，当$f'(a)=b$时，试分别求下列极限：

(1)$\lim\limits_{\Delta h\to 0}\dfrac{f(a+3h)-f(a-h)}{2h}$；(2)$\lim\limits_{\Delta h\to 0}\dfrac{f(a+h^2)-f(h)}{h}$.

分析：在此问题中，增量Δx的形式是有多种情形，而Δy也必须随之对应，再利用已知函数$f(x)$在$x=a$处可导的条件，这时可以把已给定的极限式，进行恒等变形，不难转化为导数定义的结构形式，就使问题豁然开朗.

解：(1)$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+3h)-f(a-h)}{2h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+3h)-f(a)+f(a)-f(a-h)}{2h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+3h)-f(a)}{2h}+\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a)-f(a-h)}{2h}$

$=\dfrac{3}{2}\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+3h)-f(a)}{3h}+\dfrac{1}{2}\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a-h)-f(a)}{-h}$

$=\dfrac{3}{2}f'(a)+\dfrac{1}{2}f'(a)=2b.$

(2)$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h^2)-f(a)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\left[\dfrac{f(a+h^2)-f(a)}{h^2}h\right]$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h^2)-f(a)}{h^2}\cdot\lim\limits_{\Delta h\to 0}h=f'(a)\cdot 0=0.$

评注：1.在解题时，要深刻理解概念的本质，才能灵活应用概念解题；2.要注重解决这类问题时，要关注等价变形，进而使极限式巧妙地转化为导数定义的结构形式，这样有利于问题解决.

二、运用构造思想巧解三角问题

所谓构造思想就是指在解决数学问题时，往往为了实现从条件向结论转化这一目标，运用数学问题的特殊性，从新设计一个关系结构系统，去探寻解决原问题的具体方法.而构造思想方法是解决数学问题的最常用的方法，它可以用于对经典数学的概念、定理寻找构造性解释，也可以用于解决几何问题，尤其是解决有关三角问题显得得天独厚.

案例2：已知$\triangle ABC$中满足$(\overrightarrow{AB})^2=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$，$a$、$b$、$c$分别是$\triangle ABC$的三边.

(1)①判断$\triangle ABC$的形状；②求$\sin A+\sin B$的取值范围；

(2)若不等式$a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)\geqslant kabc$，对任意的$a$、$b$、$c$都成立，求$k$的取值范围.

分析：对第一个问题，经过分析，很快会发现解题思路；而对第二个问题分析起来，感到十分吃力，但我们观察已知条件，退一步思考，由第一个结论，即直角三角形，去不妨构造函数的思想方法，去思考解决问题的策略，从而使该问题获得有效地解决.

解：(1)已知$(\overrightarrow{AB})^2=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$，即$(\overrightarrow{AB})^2=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB})+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$，即$(\overrightarrow{AB})^2=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$，即$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=0$，$\triangle ABC$是以$C$为顶点的直角三角形.

则$\sin A+\sin B=\sin A+\cos A=\sqrt{2}\sin\left(A+\dfrac{\pi}{4}\right)$，$A\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

则$\sin A+\sin B$的取值范围为$(1,\sqrt{2}\,]$.

(2)在直角$\triangle ABC$中，$a=c\sin A$，$b=c\cos A$.

若$a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)\geqslant kabc$，对任意的$a$、$b$、$c$都成立，

则有$\dfrac{a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)}{abc}\geqslant k$，对任意的$a$、$b$、$c$都成立，

因$\dfrac{a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)}{abc}$

$=\dfrac{1}{c^3\sin A\cos A}[c^2\sin^2A(c\cos A+c)+c^2\cos^2A(c\sin A+c)+c^2(c\sin A+c\cos A)]$

$=\dfrac{1}{\sin A\cos A}[\sin^2A\cos A+\cos^2A\sin A+1+\cos A+\sin A]$

$=\cos A+\sin A+\dfrac{1+\cos A+\sin A}{\sin A\cos A}$，

令$t=\sin A+\cos A$，$t\in(1,\sqrt{2}\,]$，

设$f(t)=\dfrac{a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)}{abc}$

$=t+\dfrac{1+t}{\frac{t^2-1}{2}}=t+\dfrac{2}{t-1}=t-1+\dfrac{2}{t-1}+1.$

$f(t)=t-1+\dfrac{2}{t-1}+1$，当$t-1\in(0,\sqrt{2}-1]$ （下转第 83 页）

得线段AB为$y=-x+3(0\leqslant x\leqslant 3)$，代入$y=-x^2+mx-1$得：

$x^2-(m+1)x+4=0(0\leqslant x\leqslant 3)$，

原命题等价于$f(x)=x^2-(m+1)x+4$在$[0,3]$上与x轴有两个不同交点，故有$\begin{cases}\Delta=(m+1)^2-16>0,\\ 0<\dfrac{m+1}{2}<3,\\ f(0)=4\geqslant 0,\\ f(3)=9-3(m+1)+4\geqslant 0,\end{cases}$ 解得$3<m\leqslant\dfrac{10}{3}$.

故m的取值范围是$\left(3,\dfrac{10}{3}\right]$.

四、等价转化思想

等价转化思想，是指在研究问题时，采用某种手段将问题通过变换使之转化，进而使问题得到解决的一种解题策略.我们一般是将未解决的问题向已解决的问题转化.

例6　已知$M=\{(x,y)|y=x+a\}$，$N=\{(x,y)|x^2+y^2=2\}$，求使得等式$M\cap N=\varnothing$成立的实数a的取值范围.

解：$M\cap N=\{(x,y)|(x,y)\in M$，且$(x,y)\in N\}=\left\{(x,y)\ \middle|\ \begin{cases}y=x+a,\\ x^2+y^2=2.\end{cases}\right\}$，

故$M\cap N=\varnothing$等价于方程组$\begin{cases}y=x+a,\\ x^2+y^2=2\end{cases}$无解.

消去y，得关于x的一元二次方程$2x^2+2ax+a^2-2=0$.

问题又转化为一元二次方程$2x^2+2ax+a^2-2=0$无实根，

故$\Delta=(2a)^2-4\times 2\times(a^2-2)<0$，由此解得$a>2$或$a<-2$.

故a的取值范围是$\{a|a>2$或$a<-2\}$.

点拨：此题求解过程，体现了集合语言的转化技巧.

例7　若$f(x)$是定义在$\mathbf{R}$上的函数，对任意实数x都有$f(x+3)\leqslant f(x)+3$和$f(x+2)\geqslant f(x)+2$，且$f(1)=1$，则$f(2007)=$____.

解析：由$f(x+2)\geqslant f(x)+2$，得$f(x)\leqslant f(x+2)-2$，

则$f(x+1)\leqslant f(x+3)-2\leqslant f(x)+3-2=f(x)+1$，

则$f(x)\geqslant f(x+1)-1$，即$f(x-1)\geqslant f(x)-1$，

则$f(x+1)=f[(x-1)+2]\geqslant f(x-1)+2\geqslant f(x)-1+2=f(x)+1$，

则$f(x+1)=f(x)+1$，

所以数列$\{f(n)\}$是首项为1，公差为1的等差数列.

则$f(2007)=f(1)+2006\times 1=2007$.

五、整体思想

在研究数学问题时，不仅要考虑问题的各个组成部分还要有意识地放大考查问题的“视角”，将需要解决的问题看做一个整体，通过研究问题的整体形式，整体结构，整体功能，从而达到顺利而简捷地解决问题的目的.这种思维方法，就是整体思想，也就是一种全局意识.

例8　在等差数列$\{a_n\}$中，已知公差为$\dfrac{1}{2}$，且$a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{99}=60$，则$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{100}$的值为(　　).

A.120　　B.145　　C.150　　D.170

解析：因$d=\dfrac{1}{2}$，$a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{99}=60$.

则$a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{100}=(a_1+d)+(a_3+d)+(a_5+d)+\cdots+(a_{99}+d)$

$=a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{99}+50d=60+50\times\dfrac{1}{2}=85$.

则$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{100}=60+85=145$.选B. ■

(上接第 81 页)

上时$f(t)$为单调递减函数，当$t=\sqrt{2}$时取得最小值，最小值为$2+3\sqrt{2}$，即$k\leqslant 2+3\sqrt{2}$.

所以k的取值范围为$(-\infty,2+3\sqrt{2}]$.

评注：在解决不等式问题时，当直接分析情况时，觉得比较困难，这时我们要冷静地思考分析，去探索运用构造函数的方法，进行变形化简，就能使复杂的问题变成简单的问题，进而使问题快速解决.

三、运用分类方法妙解解几问题

所谓分类讨论方法就是对一个命题的题设或结论有多种可能，不唯一确定，就应按可能出现的各种情况分门别类地予以考查，最后综合归纳出正确答案.这种分类思考的方法是一种重要的数学思想方法，又是一种典型的解题策略.因此，在学习中，尤其是在解决解析几何问题时，要掌握分类的方法，领会其实质，提高分析问题、解决问题的能力，进而加强学生思维的条理性、缜密性.

案例3：已知曲线$y^2=2x$，设点$A(a,0)$，$a\in\mathbf{R}$，曲线上的点到点A的距离的最小值为$f(a)$，求$f(a)$的函数式.

分析：此题思路比较清晰，要求两点间距离的最小值问题，就必须用公式建立目标函数，即把它转化为二次函数在约束条件$x\geqslant 0$下的最小值问题，之后，对参数a的取值进行分类讨论，即可解决问题.

解析：设$M(x,y)$为曲线$y^2=2x$上任意一点，

则$|MA|^2=(x-a)^2+y^2=(x-a)^2+2x=x^2-2(a-1)x+a^2=[x-(a-1)]^2+(2a-1)$.

由于$y^2=2x$限定$x\geqslant 0$，所以分以下情况讨论：

当$a-1\geqslant 0$时，$x=a-1$取最小值，即$|MA|^2=2a-1$；

当$a-1<0$时，$x=0$取最小值，即$|MA|^2=a$.

综上所述，有$f(a)=\begin{cases}\sqrt{2a-1}&(a\geqslant 1),\\ |a|&(a<1).\end{cases}$

评注：本案例的基本思路是先建立目标函数，之后，对求二次函数的最值的问题，并不困难，而对含参数a，以及还有隐含条件$x\geqslant 0$的限制，显得具有一定的难度，这就要求在解题时，要仔细分析，要从中找出正确的分类标准，要不重不漏，即可得到$d=f(a)$的函数表达式.

总之，我们在学习中，要巧妙地运用数学思想方法，去仔细审题，分析题意，特别是遇到复杂问题时，我们要退一步思考，海阔天空，恰当地运用数学思想方法，就能使问题逐一解决，而且也能使学生终身受益. ■