

巧用三角换元法,解两类最值题

甘肃省秦安县第二中学(741600) 罗文军 ●

中图分类号:G632

文献标识码:B

文章编号:1008-0333(2016)07-0044-02

本文中笔者另辟蹊径,利用三角换元法求解一些一元无理函数和二元函数的最值题,具有构造性和可操作性等特点,其解法令人耳目一新.现介绍如下,以供参考.

1. 求一元无理函数最值

例1 (2010年陕西高考模拟题)求函数 $f(x) = \sqrt{x-6} + \sqrt{12-x}$ 的最大值.

分析 形如 $y = \sqrt{ax+b} + \sqrt{cx+b}$ ($ac < 0$) 的无理函数的最值,通常用柯西不等式求解,本文用三角换元法,解题过程简洁.

解 令 $\sqrt{x-6} = s$, $\sqrt{12-x} = t$, 则 $s^2 + t^2 = 6$ ($s \geq 0, t \geq 0$).

可设 $s = \sqrt{6}\cos\theta$, $t = \sqrt{6}\sin\theta$, $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, 则 $f(\theta) = s + t = \sqrt{6}\sin\theta + \sqrt{6}\cos\theta = 2\sqrt{3}\sin(\theta + \frac{\pi}{4})$.

由 $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, 得 $\theta + \frac{\pi}{4} \in [\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$, 所以当 $\theta + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ 时, $f(\theta)$ 取得最大值 $2\sqrt{3}$, 所以当 $x = 6\cos^2\theta + 6 = 6 \times \frac{1}{2} + 6 = 9$ 时, $f(x)$ 取得最大值 $2\sqrt{3}$.

例2 (2013年重庆卷理科第3题) $\sqrt{(3-a)(a+6)}$ ($-6 \leq a \leq 3$) 的最大值为().

A. 9 B. $\frac{9}{2}$ C. 3 D. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

分析 该题通常用配方法或基本不等式求解,本文用三角换元法,令人耳目一新.

解 设 $3-a = 9\cos^2\theta$, $a+6 = 9\sin^2\theta$, $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\sqrt{(3-a)(a+6)} = \sqrt{9\cos^2\theta \cdot 9\sin^2\theta} = 9\sin\theta\cos\theta = \frac{9}{2}\sin 2\theta$, $2\theta \in [0, \pi]$, 所以当 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 时, 即 $a = -\frac{3}{2}$ 时, $\sqrt{(3-a)(a+6)}$ 取最大值 $\frac{9}{2}$. 故选 B.

点评 本题运用三角换元法求解,思维独特,具有创新性,可以激发学生的学习热情.

2. 求二元函数最值

例3 (2010年山东高考)已知 $x, y \in \mathbf{R}^*$, 且满足 $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$, 则 xy 的最大值为_____.

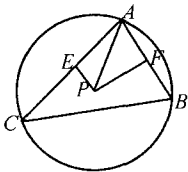
► 学生思路6 可直接乘出来,取 AC 的中点 E , AB 的中点 F , 再利用数量积的几何意义: $\vec{AP} \cdot \vec{AC} = |\vec{AC}| \cdot |\vec{AE}| = \frac{1}{2}|\vec{AC}|^2$, $\vec{AP} \cdot \vec{AB} = |\vec{AB}| \cdot |\vec{AF}| = \frac{1}{2}|\vec{AB}|^2$, 就可.

此学生迫不及待地说出他的解法,这解法一说出立即引来了一阵掌声.这位学生平时成绩中等偏下,可能由于前面几位同学的思路的引导,一下开拓了他的思维,想出了这么精彩的解法,而且这种解法自然、不偏不繁,仅仅利用了数量积的几何意义就得到了答案.让学生积极思考、探求,充分拓展他们的思维,我想这就是一题多解教学的成果吧.

解法6(数量积的几何意义)

取弦 AC 的中点 E , 弦 AB 的中点 F .

则 $\vec{AP} \cdot (\vec{AC} - \vec{AB}) = \vec{AP} \cdot \vec{AC} - \vec{AP} \cdot \vec{AB} = |\vec{AC}| \cdot |\vec{AE}| - |\vec{AB}| \cdot |\vec{AF}| = \frac{1}{2}|\vec{AC}|^2 - \frac{1}{2}|\vec{AB}|^2 = \frac{1}{2}(16-4) = 6$.

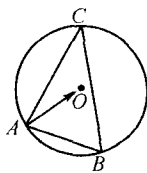


考数学复习是有效的.

此题与2012年浙江省样卷第9题异曲同工:如图,在圆 O 中,若弦 $AB = 3$, 弦 $AC = 5$, 则 $\vec{AO} \cdot \vec{BC}$ 的值是(D).

A. -8 B. -1 C. 1 D. 8

一题多解的教学,不仅可以通少量的问题去沟通各部分知识间的联系,拓宽解题的思路,提高高考数学复习的效益,“以少胜多”,而且有利于培养学生探求的精神和对数学高考研究的兴趣,培养学生的思维品质,提高学生的解题能力,特别是在如今能力立意新颖的高考试题中,尤为重要.从解题角度来看,准确把握解目标,抓住要害特征,促使思维发散,通过变化观察角度,积极寻找解题方向,形成方向性解题分析,进而再联系沟通各部分知识研究出每一解题方向下的具体解法,达到挖掘“一题多解”的目标,这也是新课程的要求,提高数学素养的需要.



(第9题)

参考文献

- [1] 胡炯涛. 数学教学论[M]. 广西教育出版社, 1996.
[2] 郑毓信. 数学方法论[M]. 广西教育出版社, 1996.

解 令 $\frac{x}{3} = \cos^2 \theta, \frac{y}{4} = \sin^2 \theta$ (θ 为锐角), $xy = 3\cos^2 \theta \cdot 4\sin^2 \theta = 12(\sin \theta \cos \theta)^2 = 12 \cdot (\frac{1}{2}\sin 2\theta)^2 = 3\sin^2 2\theta, \theta \in (0, \frac{\pi}{2})$, 当 $\theta = \frac{\pi}{4}$, 即 $x = \frac{3}{2}, y = 2$ 时, xy 取最大值 3.

点评 本题通常运用基本不等式求解, 运用三角换元法, 思路新颖.

例4 (2011年重庆高考) 已知 $a > 0, b > 0, a + b = 2$, 则 $y = \frac{1}{a} + \frac{4}{b}$ 的最小值为().

A. $\frac{7}{2}$ B. 4 C. $\frac{9}{2}$ D. 5

解 设 $a = 2\cos^2 \theta, b = 2\sin^2 \theta, \theta \in (0, \frac{\pi}{2})$, $y = \frac{1}{a} + \frac{4}{b} = \frac{1}{2\cos^2 \theta} + \frac{4}{2\sin^2 \theta} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} + 2 \cdot \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} = \frac{\tan^2 \theta}{2} + \frac{2}{\tan^2 \theta} + \frac{5}{2} \geq 2 + \frac{5}{2} = \frac{9}{2}$,

当且仅当 $\frac{\tan^2 \theta}{2} = \frac{2}{\tan^2 \theta}$, 即 $\tan^2 \theta = 2$, 即 $\sin^2 \theta = 2\cos^2 \theta$

时“=”成立. 又由 $\sin^2 \theta + 2\cos^2 \theta = 1$ 得 $\sin^2 \theta = \frac{2}{3}, \cos^2 \theta = \frac{1}{3}$, 即 $x = \frac{2}{3}, y = \frac{1}{3}$ 时, $y = \frac{1}{a} + \frac{4}{b}$ 取得最小值 $\frac{9}{2}$, 故选 C.

点评 本题可用基本不等式求解, 运用三角换元法也算简便.

例5 (2011年浙江高考) 若实数 x, y 满足 $x^2 + y^2 + xy = 1$, 则 $x + y$ 的最大值是_____.

解 $(x + \frac{y}{2})^2 + \frac{3}{4}y^2 = 1$, 令 $x + \frac{y}{2} = \cos \theta, \frac{\sqrt{3}}{2}y = \sin \theta$, 则 $y = \frac{2}{\sqrt{3}}\sin \theta, x = \cos \theta - \frac{y}{2} = \cos \theta - \frac{1}{\sqrt{3}}\sin \theta$, 从而 $x + y = \cos \theta - \frac{1}{\sqrt{3}}\sin \theta + \frac{2}{\sqrt{3}}\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}\sin \theta + \cos \theta = \frac{2}{\sqrt{3}}\sin(\theta + \varphi)$ (其中设 $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$, 且 $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos \varphi = \frac{1}{2}$).

当 $\sin(\theta + \varphi) = 1$, 即 $\sin \theta = \cos \varphi = \frac{1}{2}, \cos \theta = \sin \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 时, 即当 $x = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}, y = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 时取最大值, 故 $x + y$ 的最大值为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

点评 通过将题设变形后借助三角换元法求解.

例6 (2006年安徽省高中数学竞赛初赛题) 设 x, y 是实数, 且满足 $x^2 + xy + y^2 = 3$, 则 $x^2 - xy + y^2$ 的最大值与最小值是_____.

解 $(x + \frac{y}{2})^2 + \frac{3}{4}y^2 = 3$, 令 $x + \frac{y}{2} = \sqrt{3}\cos \theta, \frac{\sqrt{3}}{2}y = \sqrt{3}\sin \theta$, 则 $x = \sqrt{3}\cos \theta - \sin \theta, y = 2\sin \theta, x^2 - xy + y^2 = (\sqrt{3}\cos \theta - \sin \theta)^2 - 2\sin \theta(\sqrt{3}\cos \theta - \sin \theta) + 4\sin^2 \theta = 3 - 4\sqrt{3}\sin \theta \cos \theta + 4\sin^2 \theta = 5 - (2\sqrt{3}\sin 2\theta + 2\cos 2\theta)$

$= 5 - 4\sin(2\theta + \frac{\pi}{6})$.

当 $\sin(2\theta + \frac{\pi}{6}) = 1$ 时, $x^2 - xy + y^2$ 取最小值 1;

当 $\sin(2\theta + \frac{\pi}{6}) = -1$ 时, $x^2 - xy + y^2$ 取最大值 9.

点评 这是一道二元最值问题, 根据题设, 通过将题设变形后借助三角换元法求解.

例7 (数学通讯 2014 年第 7、8 月学生刊问题 181)

已知 $x, y \in \mathbf{R}^+$ 且 $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 3$, 求 $x^2 + y^2$ 的最小值.

解 令 $x = r\cos \theta, y = r\sin \theta$, 且 $r > 0, \theta \in (0, \frac{\pi}{2})$, 则 $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = \frac{1}{r}(\frac{1}{\cos \theta} + \frac{2}{\sin \theta}) = 3$, 那么 $r = \frac{1}{3}(\frac{1}{\cos \theta} + \frac{2}{\sin \theta})$. 下面只求 $f(\theta) = \frac{1}{\cos^2 \theta} + \frac{2}{\sin^2 \theta}$ 的最小值即可.

由 $f'(\theta) = \frac{\sin^3 \theta - 2\cos^3 \theta}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta} = 0$, 解得 $\tan \theta = \sqrt[3]{2}$. 当 $\tan \theta > \sqrt[3]{2}$ 时, $f'(\theta) > 0$.

当 $0 < \tan \theta < \sqrt[3]{2}$, $f'(\theta) < 0$,

由此可知, 当 $\tan \theta = \sqrt[3]{2}$, 即 $\sin \theta = \frac{\tan \theta}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}}, \cos \theta =$

$\frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}}$ 时, $f(\theta)$ 取到最小值, 且 $f_{\min}(\theta) = \sqrt{1 + \tan^2 \theta}(1 + \frac{2}{\tan \theta}) = (1 + \tan^2 \theta)\sqrt{1 + \tan^2 \theta} = \sqrt{(1 + \sqrt[3]{4})^3}$, 那么 $x^2 + y^2 = r^2 \geq \frac{(1 + \sqrt[3]{4})^3}{9}$.

即 $x^2 + y^2$ 的最小值为 $\frac{(1 + \sqrt[3]{4})^3}{9}$.

例8 (2014年“北约”卷) 已知 $x + y = -1$, 且 x, y 都是负数, 求 $xy + \frac{1}{xy}$ 的最值.

解 设 $x = -\sin^2 \alpha (\sin^2 \alpha \neq 0), y = -\cos^2 \alpha (\cos^2 \alpha \neq 0)$, 则

$$xy + \frac{1}{xy} = \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \frac{1}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} = \frac{1}{4}\sin^2 2\alpha + \frac{4}{\sin^2 2\alpha} = \frac{1}{4}(\sin^2 2\alpha + \frac{16}{\sin^2 2\alpha}),$$

因为 $\sin^2 2\alpha + \frac{16}{\sin^2 2\alpha}$ 在 $\sin^2 2\alpha \in (0, 1]$ 是减函数, 所以

$\sin^2 2\alpha = 1$ 时, 取得最小值, 所以 $xy + \frac{1}{xy}$ 的最小值为 $\frac{1}{4}(1 + \frac{16}{1}) = \frac{17}{4}$.

点评 本题借助三角换元法和对勾函数的单调性, 思路流畅.

以上所举例题说明, 要善于观察题目特征, 通过构造并利用三角换元法求解. 这是一种构造性的解题方法, 它与传统方法相比差别很大, 其思考方式新颖并富有创造性, 也优化了解题过程.