三角换元破解数学竞赛题*

●查正开 (常熟市中学,江苏 常熟 215500)

摘 要: 通过近几年全国各地高中数学竞赛试题的三角解法,总结出利用三角法来处理数学问题之解题模式——正余弦换元、切割换元、引参换元、构造换元.

关键词: 竞赛试题;三角法;解题模式;正余弦换元;切割换元;引参与构造换元

中图分类号: O122.1 **文献标识码:** A **文章编号:** 1003-6407(2018)04-0047-04

现行的《高中数学课程标准》已降低了对不等式的要求,且将不等式证明纳为《数学(选修4-5)》中的理科内容,因此大部分学生在高中阶段不能系统学习和掌握一些重要的不等式(如均值不等式、柯西不等式、排序不等式、伯努利不等式等)以及不等式证明的方法和技巧.一些数学学科优秀的学生,有志于参加高校的自主选拔和各类数学竞赛考试,而这些考试中涉及不等式知识的试题较多且考查要求较高.那么如何来解决这个矛盾呢?考虑到三角函数是高中数学的基础知识,也是高考重点考查的内容之一,学生普遍掌握得比较扎实.为此,笔者用全国高中数学联赛各省市预赛题的三角解法为例,整理出一类以三角换元为手段,将竞赛题转化为三角函数问题来处理的解题模式,供读者学习与参考.

1 正弦与余弦的换元

1.1 正余弦换元

例1 已知圆 $x^2+y^2=1$ 与抛物线 $y=x^2+h$ 有公共点,求实数 h 的取值范围.

(2011 年全国高中数学联赛江苏省预赛试题)

分析 设 $\begin{cases}x=\cos\theta,\\ y=\sin\theta,\end{cases}$ 则

$$\begin{aligned}h=y-x^2=\sin\theta-\cos^2\theta=\\ \sin^2\theta+\sin\theta-1=\\ \left(\sin\theta+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}\in\left[-\frac{5}{4},1\right],\end{aligned}$$

因此实数 h 的取值范围是 $\left[-\frac{5}{4},1\right]$.

则 $$f'(x)=8x^3-8t^3,$$

$$f(x)_{\min}=f(t)=4y^4-4\sqrt{2}t^3y+9-6t^4. \quad (2)$$

由题意,函数 $f(x)$ 有零点,即 $f(x)_{\min}\leqslant 0$.

在式(2)中,把 y 当作变量,构造函数

$$g(y)=4y^4-4\sqrt{2}t^3y+9-6t^4,$$

由 $f(x)_{\min}\leqslant 0$,知函数 $g(y)$ 有零点,则

$$g'(y)=16y^3-4\sqrt{2}t^3=2[(2y)^3-(\sqrt{2}t)^3],$$

$$g(y)_{\min}=g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)=9-9t^4\leqslant 0.$$

由题设 $t>0$,从而 $t\geqslant 1$,于是

$$\frac{2x+\sqrt{2}y}{2x^4+4y^4+9}=\frac{1}{4t^3}\leqslant\frac{1}{4},$$

当且仅当 $x=1,y=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时,$\frac{2x+\sqrt{2}y}{2x^4+4y^4+9}$ 取到最大值 $\frac{1}{4}$.

数学的本质就是用数学的眼光认识世界,揭示数学规律,总结数学方法,形成数学思想.在平时的解题过程中,师生要重视对问题和方法的追溯,刨根问底,追本求源,挖掘试题的数学本质,从中提炼出数学解题方法,这样才能知其然,更知其所以然[3].

参 考 文 献

[1] 罗增儒.数学解题学引论[M].西安:陕西师范大学出版社,2008.

[2] 波利亚.怎样解题[M].涂泓,冯承天,译.上海:上海教育出版社,2001.

[3] 叶会新.提高探究实效 培养思维能力[J].中学教研(数学),2017(6):41-44.

---

* 收文日期:2017-11-06;修订日期:2017-12-07

作者简介:查正开(1963-),男,江苏常熟人,中学高级教师.研究方向:数学教育.

评注 利用公式 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ 进行正弦与余弦换元是最常用的一种三角换元手段.

例 2 实数 x,y 满足 $x^2+y^2+xy=3$,求 x^2+y^2 的取值范围.

(2016 年全国高中数学联赛河北省高二预赛试题)

分析 将已知条件配方,得

$$\left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3y^2}{4}=3.$$

设 $\begin{cases}x+\dfrac{y}{2}=\sqrt{3}\cos\theta,\\ \dfrac{\sqrt{3}y}{2}=\sqrt{3}\sin\theta,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x=\sqrt{3}\cos\theta-\sin\theta,\\ y=2\sin\theta,\end{cases}$ 则

$$\begin{aligned}x^2+y^2&=2\sin^2\theta-2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta+3=\\&4-\sqrt{3}\sin 2\theta-\cos 2\theta=\\&4-2\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{6}\right)\in[2,6],\end{aligned}$$

故 x^2+y^2 的取值范围为 $[2,6]$.

评注 通过配方进行正弦与余弦换元是一种比较有效的三角换元手段,这里配方是要领. 需要指出的是利用不等式知识解题,一般只能解决一个方向.

本题用不等式来处理时,学生可能会这样来解:

$$3=x^2+y^2+xy\leqslant x^2+y^2+\frac{x^2+y^2}{2}\Rightarrow x^2+y^2\geqslant 2,$$

从而得到错误结果 $[2,+\infty)$. 当然用不等式来解答本题,只要运用得当,也能得出准确结论的. 事实上,只要考虑另一个方向,再增加一个不等式即可. 其正确解答过程为:一方面,

$$3=x^2+y^2+xy\leqslant x^2+y^2+\frac{x^2+y^2}{2}\Rightarrow x^2+y^2\geqslant 2;$$

另一方面,

$$3=x^2+y^2+xy\geqslant x^2+y^2-\frac{x^2+y^2}{2}\Rightarrow x^2+y^2\leqslant 6.$$

由此可知,利用不等式解题,灵活性较强,技巧性较高. 另外应该指出,若改变条件或所求式子,例如:改求 $2x^2+3y^2$ 的取值范围,则借助不等式来解答的难度大大增加,没经过不等式系统训练的学生是难以完成的,而用上述三角换元手段可以同样完成解答.

1.2 单弦换元(正弦或余弦)

例 3 求函数 $y=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{2+x}$ 的值域.

(2015 年全国高中数学联赛山西省预赛试题)

分析 易得函数的定义域为 $[-1,1]$,可设 $x=\sin\theta$,其中 $\theta\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$,则

$$y=\frac{\sqrt{1-x^2}}{2+x}=\frac{\sqrt{1-\sin^2\theta}}{2+\sin\theta}=\frac{\cos\theta}{2+\sin\theta},$$

从而 $\quad y\sin\theta-\cos\theta=-2y,$

于是 $\quad \sqrt{y^2+1}\cdot\sin(\theta-\varphi)=-2y,$

即 $\quad |\sin(\theta-\varphi)|=\left|\dfrac{-2y}{\sqrt{y^2+1}}\right|\leqslant 1,$

故 $\quad y^2\leqslant\dfrac{1}{3}.$

结合 $y\geqslant 0$,得 $0\leqslant y\leqslant\dfrac{\sqrt{3}}{3}$,因此函数 $y=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{2+x}$ 的值域为 $\left[0,\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right]$.

说明 本题中用到了一个重要变换——“合一公式”:

$$a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)$$

其中 $\tan\varphi=\dfrac{b}{a}$,再进一步运用正余弦函数的有界性得出 y 的范围. 需要指出的是“合一变换”在运用三角知识处理问题时有着广泛的应用,应该熟练掌握并自觉运用.

例 4 求函数 $y=|x+1|+|x-1|+\sqrt{4-x^2}$ 的值域.

(2013 年全国高中数学联赛安徽省预赛试题)

分析 函数的定义域为 $[-2,2]$,可设 $x=2\cos\theta$,其中 $\theta\in[0,\pi]$,则

$$y=|2\cos\theta+1|+|2\cos\theta-1|+2\sin\theta.$$

1) 当 $\theta\in\left[0,\dfrac{\pi}{3}\right]$ 时,

$$\begin{aligned}y&=4\cos\theta+2\sin\theta=\\&2\sqrt{5}\sin(\theta+\arctan 2)\in[2+\sqrt{3},2\sqrt{5}];\end{aligned}$$

2) 当 $\theta\in\left[\dfrac{\pi}{3},\dfrac{2\pi}{3}\right]$ 时,

$$y=2+2\sin\theta=\in[2+\sqrt{3},4];$$

3) 当 $\theta\in\left[\dfrac{2\pi}{3},\pi\right]$ 时,

$$\begin{aligned}y&=-4\cos\theta-2\sin\theta=\\&-2\sqrt{5}\sin(\theta+\arctan 2)\in[2+\sqrt{3},2\sqrt{5}].\end{aligned}$$

综上所述,所求函数的值域为 $[2+\sqrt{3},2\sqrt{5}]$.

评注 根据正弦或余弦函数的值域,结合已知条件可进行正弦(或余弦)换元,将问题转化为三角函数问题,再利用三角知识解决. 利用单个正弦

或余弦换元时,用正弦或余弦一般可以任选,但限制角的范围必须满足题设要求.

2　正余切与正余割的换元

2.1　切割换元

例 5　若 $P(x,y)$ 是双曲线 $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{4}=1$ 上的一点,求 $|x-y|$ 的最小值.

(2017 年全国高中数学联赛四川省预赛试题)

分析　由已知条件可设 $\begin{cases}x=2\sqrt{2}\sec\theta,\\ y=2\tan\theta,\end{cases}$ 则

$$|x-y|=|2\sqrt{2}\sec\theta-2\tan\theta|=2\left|\frac{\sqrt{2}-\sin\theta}{\cos\theta}\right|.$$

又设 $k=\frac{\sqrt{2}-\sin\theta}{\cos\theta}$,则

$$\sin\theta+k\cos\theta=\sqrt{2},$$

从而
$$\sin(\theta+\varphi)=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{k^2+1}}\leqslant 1,$$

于是
$$|k|\geqslant 1,$$

即
$$|x-y|\geqslant 2,$$

当且仅当 $\begin{cases}x=4,\\ y=2\end{cases}$ 时,不等式取到等号,因此 $|x-y|$ 的最小值为 2.

评注　利用 $\sec^2\theta-\tan^2\theta=1$,可进行正切与正割的三角换元,可将竞赛题转化为三角问题.

2.2　正切(余切)换元

例 6　求函数 $f(x)=5\sqrt{x^2+\frac{1}{2}}-3x$ 的值域.

(2014 年全国高中数学联赛内蒙古自治区预赛试题)

分析　设 $x=\frac{\tan\theta}{\sqrt{2}}$,其中 $\theta\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$,则

$$f(x)=y=5\sqrt{\frac{1}{2}(1+\tan^2\theta)}-\frac{3\tan\theta}{\sqrt{2}}=\frac{5-3\sin\theta}{\sqrt{2}\cos\theta},$$

即
$$3\sin\theta+\sqrt{2}y\cos\theta=5,$$

从而
$$\sqrt{2y^2+9}\sin(\theta+\varphi)=5,$$

于是
$$\sin(\theta+\varphi)=\frac{5}{\sqrt{2y^2+9}}\leqslant 1,$$

即
$$y^2\geqslant 8,$$

因此得所求函数的值域为 $(-\infty,2\sqrt{2}]\cup[2\sqrt{2},+\infty)$.

2.3　正割(余割)换元

例 7　求函数 $y=x^2+x\sqrt{x^2-1}$ 的值域.

(2013 年全国高中数学联赛湖北省预赛试题)

分析　由于函数的定义域为 $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$,因此可设

$$x=\sec\theta=\frac{1}{\cos\theta},\text{其中 }\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\pi\right],$$

则 $y=\frac{1}{\cos^2\theta}+\frac{1}{\cos\theta}\cdot\sqrt{\frac{1}{\cos^2\theta}-1}=\frac{1}{\cos^2\theta}+\frac{|\tan\theta|}{\cos\theta}$.

1)当 $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时,

$$y=\frac{1+\sin\theta}{\cos^2\theta}=\frac{1}{1-\sin\theta}\in[1,+\infty);$$

2)当 $\theta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$ 时,

$$y=\frac{1-\sin\theta}{\cos^2\theta}=\frac{1}{1+\sin\theta}\in\left(\frac{1}{2},1\right].$$

综上所述,所求函数的值域为 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$.

评注　根据题目的结构特征,结合正切(余切)与正割(余割)的值域可以进行正切换元或正割换元.

3　引参后三角换元

例 8　已知 $x,y\in\mathbf{R}$,且 $2x^2+3y^2\leqslant 12$,求 $|x+2y|$ 的最大值.

(2017 年全国高中数学联赛河北省预赛试题)

分析　令 $2x^2+3y^2=r^2$,则

$$0\leqslant r^2\leqslant 12.$$

设 $\begin{cases}\sqrt{2}x=r\cos\theta,\\ \sqrt{3}y=r\sin\theta,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x=\frac{r\cos\theta}{\sqrt{2}},\\ y=\frac{r\sin\theta}{\sqrt{3}},\end{cases}$ 则

$$|x+2y|=\left|\frac{r\cos\theta}{\sqrt{2}}+\frac{2r\sin\theta}{\sqrt{3}}\right|=\left|\sqrt{\frac{11r^2}{6}}\sin(\theta+\varphi)\right|\leqslant\sqrt{\frac{11r^2}{6}}\leqslant\sqrt{22},$$

故 $|x+2y|$ 的最大值为 $\sqrt{22}$.

例 9　若 $a,b,c\in\mathbf{R}$,$a^2+b^2\leqslant c\leqslant 1$,求 $a+b+c$ 的最大值和最小值.

(2013 年全国高中数学联赛江苏省复赛试题)

分析　设 $\begin{cases}a=r\cos\theta,\\ b=r\sin\theta,\end{cases}$ 其中 $0\leqslant r\leqslant\sqrt{c}\leqslant 1$,则

$$a+b+c=r(\cos\theta+\sin\theta)+c=\sqrt{2}r\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)+c\leqslant\sqrt{2}r+c\leqslant 1+\sqrt{2},$$

当且仅当 $a=b=\frac{\sqrt{2}}{2}$,$c=1$ 时,不等式取到等号,故 $a+b+c$ 的最大值为 $1+\sqrt{2}$. 又

$$\sqrt{2}r\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)+c\geqslant-\sqrt{2}r+c\geqslant-\sqrt{2c}+c=$$

$$\left(\sqrt{c}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\geqslant-\frac{1}{2},$$

当且仅当 $a=b=-\frac{1}{2},c=\frac{1}{2}$时,不等式取到等号,故 $a+b+c$ 的最小值为 $-\frac{1}{2}$.

评注 对于条件式为不等式的问题,可以通过引入参数、三角换元,利用平方关系进行正余弦换元或切割换元.

例 10 当 x,y,z 为正数时,求$\frac{4xz+yz}{x^2+y^2+z^2}$的最大值.

(2017 年全国高中数学联赛福建省预赛试题)

分析 由于 $P=\frac{4xz+yz}{x^2+y^2+z^2}=\frac{z(4x+y)}{x^2+y^2+z^2}$,令 $x^2+y^2=(kz)^2$(其中 $k>0$),设$\begin{cases}x=kz\cos\theta,\\ y=kz\sin\theta,\end{cases}$则

$$P=\frac{z(4x+y)}{x^2+y^2+z^2}=\frac{z(4kz\cos\theta+kz\sin\theta)}{(kz)^2+z^2}=$$

$$\frac{\sqrt{17k^2}\sin(\theta+\varphi)}{k^2+1}\leqslant\frac{k\sqrt{17}}{k^2+1}\leqslant\frac{\sqrt{17}}{2},$$

当且仅当 $k=1$,即 $\tan\theta=\frac{1}{4}$,亦即 $x=\frac{z}{\sqrt{17}},y=\frac{4z}{\sqrt{17}}$时,$P_{\max}=\frac{\sqrt{17}}{2}$.

4 先构造再换元

4.1 直接构造

例 11 已知 $x>0,y>0$,且 $x+2y=2$,求$\frac{x^2}{2y}+\frac{4y^2}{x}$的最小值.

(2016 年全国高中数学联赛新疆维吾尔自治区高一预赛试题)

分析 由条件 $x>0,y>0$ 且 $x+2y=2$,可设$\begin{cases}x=2\cos^2\theta,\\ 2y=2\sin^2\theta,\end{cases}$其中 $\theta\in\left(0,\frac{\theta}{2}\right)$,则

$$\frac{x^2}{2y}+\frac{4y^2}{x}=2\left(\frac{\cos^4\theta}{\sin^2\theta}+\frac{\sin^4\theta}{\cos^2\theta}\right)=2\left(\frac{\cos^6\theta+\sin^6\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}\right)=$$

$$\frac{2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)(\cos^4\theta-\cos^2\theta\sin^2\theta+\sin^4\theta)}{\sin^2\theta\cos^2\theta}=$$

$$2\cdot\frac{(\cos^2\theta+\sin^2\theta)^2-3\cos^2\theta\sin^2\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}=$$

$$2\left(\frac{1}{\sin^2\theta\cos^2\theta}-3\right)=2\left(\frac{4}{\sin^2 2\theta}-3\right)\geqslant2,$$

当且仅当 $\theta=\frac{\pi}{4}$,即 $x=1,y=\frac{1}{2}$时,不等式取到等号,故$\frac{x^2}{2y}+\frac{4y^2}{x}$的最小值为 2.

评注 根据条件 $x>0,y>0$ 且 $x+2y=2$,可将条件构造为二元二次问题,从而可利用三角换元的方法来解答.

4.2 间接构造

例 12 已知函数$f(x)=\sqrt{2-x}+\sqrt{3x+12}$的最大值为 M,最小值为 m,试求$\frac{M}{m}$的值.

(2016 年全国高中数学联赛新疆高一预赛试题)

分析 令 $u=\sqrt{2-x},v=\sqrt{3x+12}$,则

$$u^2=2-x,\quad v^2=3x+12,$$

得

$$3u^2+v^2=18.$$

设$\begin{cases}u=\sqrt{6}\cos\theta,\\ v=3\sqrt{2}\sin\theta,\end{cases}$其中 $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$,则

$$f(x)=g(\theta)=u+v=\sqrt{6}\cos\theta+3\sqrt{2}\sin\theta=$$

$$2\sqrt{6}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)\in[\sqrt{6},2\sqrt{6}],$$

因此,$\frac{M}{m}=2$.

评注 通过整体换元,将原问题构造为可进行三角换元的问题,从而完成问题的解答.

综上可知,“三角换元”是解决范围(如最值、定义域、不等式)问题的一把利器,借助上述 4 种三角换元手段可实现代数(几何)问题向三角函数问题的有效转化. 采用“三角换元”解题可规避应用不等式知识解题时灵活多变的方法和高难技巧,强化三角函数的应用意识;解题有明确的指向和固有的定式,思维流畅自然,使很多复杂的竞赛题都能手到擒来,迎刃破解.

在本文中,笔者所选取的均是竞赛试题,事实上,对高考试题的解答,三角换元法也具有广泛的适用性. 三角换元法解题既适应新课改的需求,又符合“淡化特殊技巧,注重通性通法”的新高考理念,且能有效训练和提高学生的思维能力与洞察能力,促进数学的高效学习,值得我们进行深入研究并熟练掌握.

中国标准连续出版物号:ISSN 1003-6407 / CN 33-1069/G4 邮发代号 32-17 字数 100 000 定价 5.00 元