理科教学研究

"数学问题" 简解巧法

倪德海
(江苏省如皋市教师进修学校 教师,江苏 如皋 226500)

摘 要:作者对《数学通报》中数学问题的解答另求它法,力求简洁。

关键词:数学通报;数学问题;简解
中图分类号:O14 文献标识码:A 文章编号:1672-3694(2003)01—0089—03

《数学通报》"数学问题解答"专栏我非常喜爱。我时常为供题者的独具匠心而折服,时常又为解答过于冗长而欲另辟蹊径。本文将笔者另辟蹊径的解法开列如下,这些解法显然比供题者的解法要简洁一些,但未必是最简洁的,请同行赐教。

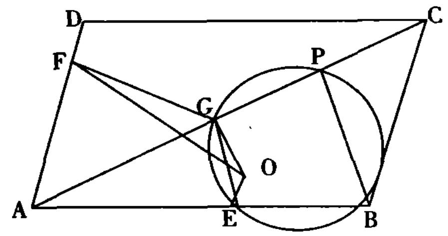
一、巧作辅助圆

例1 AC是▱ABCD较长一条对角线,O为▱ABCD内部一点,OE⊥AB于E,OF⊥AD于F,OG⊥AC于G。

求证:AE·AB+AF·AD=AG·AC("数学问题解答"第1296题,简称"1296题",下同)

该题解答既用了四点共圆、全等三角形的知识,又用了两角和差三角函数公式,添作的辅助线亦达6条之多,解答篇幅较长,其实本题用纯几何证法不仅可行,而且简便。

证明:显然,A、E、O、G、F五点共圆,过E、B、G三点作圆交AC于P,(如图)



则 AE·AB=AG·AP=AG·(AC−CP)=AG·AC−AG·CP (*)

连接FG、GE、PB,则∠FAG=∠PCB,∠AFG=∠GEB=∠CPB

∴△AFG∽△CPB

$\therefore \frac{AF}{AG}=\frac{CP}{CB}$

∴AG·CP=AF·CB=AF·AD将此式代入(*)则有

∴AE·AB+AF·AD=AG·AC

二、巧建坐标系

例2 设P_1、P_2、P_3分别为正△ABC三边AB、BC、CA上一点,$AP_1=BP_2=CP_3$,直线L为过正△ABC外接圆上任一点P的切线,试证:P_1、P_2、P_3三点到L距离之和为定值(第1286题)

供题者的解答用了三角函数知识,笔者认为用解析法证明更有趣,也显得特别简单。

证明:显然$\triangle P_1P_2P_3$也是等边三角形,$\triangle P_1P_2P_3$与△ABC有相同的中心M,$\triangle P_1P_2P_3$在△ABC外接圆的内部,M到△ABC外接圆任一条切线的距离等于该圆半径R,以切线为x轴建立直角坐标系,使△ABC在x轴上方,设$P_1(x_1,y_1)$、$P_2(x_2,y_2)$、$P_3(x_3,y_3)$,

则$M(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\frac{y_1+y_2+y_3}{3})$

$\therefore \frac{y_1+y_2+y_3}{3}=R$

$y_1+y_2+y_3=3R$

收稿日期:2002-09-20

结论得证。

利用这种解析法，我们也可轻而易举地证明如下结论：

(1)若△ABC的重心为G，以G为圆心的圆将△ABC围在其内部，则A、B、C三点到该圆任一切线距离之和为定值。

(2)正n边形n个顶点到外接圆的任一条切线的距离之和为定值。

三、巧添数或式

例3　已知正实数a,b,c满足a+b+c=1，求证：

$\sqrt{1-3a^2}+\sqrt{1-3b^2}+\sqrt{1-3c^2}\leqslant\sqrt{6}$ (969题)

简析：将欲证不等式两端同乘$\sqrt{\frac{2}{3}}$，改证：

$$\sqrt{1-3a^2}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}+\sqrt{1-3b^2}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}+\sqrt{1-3c^2}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}\leqslant 2$$

则证明显然十分简洁明了。

证明：$\sqrt{1-3a^2}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}+\sqrt{1-3b^2}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}+\sqrt{1-3c^2}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}$

$$\leqslant\frac{1-3a^2+\frac{2}{3}}{2}+\frac{1-3b^2+\frac{2}{3}}{2}+\frac{1-3c^2+\frac{2}{3}}{2}$$

$$=\frac{1}{2}[5-3(a^2+b^2+c^2)]$$

$$\leqslant\frac{1}{2}[5-3\times\frac{(a+b+c)^2}{3}]=2$$

故结论成立。

此题可作如下推广：

若$n\in N,n\geqslant1$，正实得a,b,c满足：a+b+c=1，则$\sqrt[2n]{1-3a^2}+\sqrt[2n]{1-3b^2}+\sqrt[2n]{1-3c^2}\leqslant\sqrt[2n]{2\times3^{n-1}}$

例4　已知x,y,z都是正实数，且满足xyz=1

求证：$\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}\geqslant\frac{3}{2}$(1201题)

简析：因有条件xyz=1，故欲证结论成立，只要证明

$\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}\geqslant\frac{1}{2}(x+y+z)$即可

将上式两端同加上$\frac{1}{2}(x+y+z)$所得不等式非常容易证明。

证明：$\because\frac{x^2}{y+z}+\frac{y+z}{4}\geqslant2\sqrt{\frac{x^2}{y+z}\cdot\frac{y+z}{4}}=x$

同理$\frac{y^2}{z+x}+\frac{z+x}{4}\geqslant y$，$\frac{z^2}{x+y}+\frac{x+y}{4}\geqslant z$

$\therefore\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}+\frac{x+y+z}{2}\geqslant x+y+z$

$\therefore\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}\geqslant\frac{1}{2}(x+y+z)\geqslant\frac{3}{2}\sqrt[3]{xyz}=\frac{3}{2}$

注：①本题供题者的解答关于式的变形技巧较强，不及此证法自然。

②用此证法也很容易得如下结论：

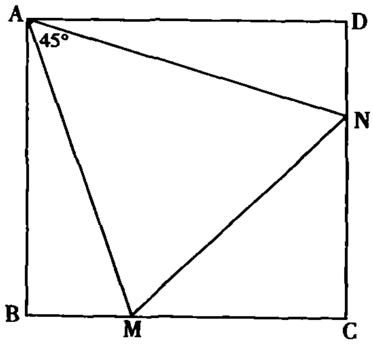
若$x_1,x_2,\cdots\cdots,x_n\in R^+$，且$x_1\cdot x_2\cdot\cdots\cdots\cdot x_n=1$则

$$\frac{x_1^2}{x_2+x_3+\cdots\cdots+x_n}+\frac{x_2^2}{x_1+x_3+\cdots\cdots+x_n}\cdots\frac{x_n^2}{x_1+x_3+\cdots\cdots+x_{n-1}}\geqslant\frac{n}{n-1}$$

四、巧用三角法

例5　正方形ABCD的边BC、CD上各有一点M、N，∠MAN=45°

求证：BM·DN=BC²−BC·MN (1302题)



简析：用供题者的纯几何证法远没有三角法简单

证明：首先易得BM+DN=MN

设∠BAM=θ，则∠DAN=45°−θ

再说AB=a，则BM=a tanθ

故MN=a tanθ+a tan(45°−θ)

于是$BM\cdot DN=a\tan\theta\cdot a\tan(45^\circ-\theta)$

$$=\frac{a^2(\tan\theta-\tan^2\theta)}{1+\tan\theta}$$

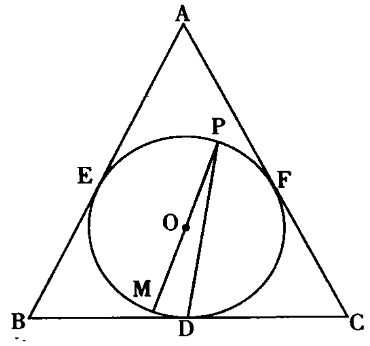
而$BC^2-BC\cdot MN=a^2-a[a\tan\theta+a\tan(45^\circ-\theta)]$

$$=\frac{a^2(\tan\theta-\tan^2\theta)}{1+\tan\theta}$$

故：$BM\cdot DN=BC^2-BC\cdot MN$

例6　⊙O是正△ABC的内切圆，E、F为AB、AC上的切点，劣弧$\overset{\frown}{EF}$上任一点P到BC、CA、AB

的距离分别为 d_1,d_2,d_3



求证：$\sqrt{d_1}=\sqrt{d_2}+\sqrt{d_3}$（1273题）

简析：供题者的解法为纯几何的。三角证法更别致，且极易推广到一般正 $2n+1$ 边形之情形

证明：过P作⊙O的直径PM，设 $PM=2R$，BC切圆O于D，连结PD，设 $\angle MPD=\theta$，则 $d_1=2R\cos^2\theta, d_2=2R\cos^2(\frac{\pi}{3}+\theta), d_3=2R\cos^2(\frac{\pi}{3}+\theta)$

$$\begin{aligned}\therefore \sqrt{d_2}+\sqrt{d_3}&=\sqrt{2R}[\cos(\frac{\pi}{3}+\theta)+\cos(\frac{\pi}{3}-\theta)]\\&=\sqrt{2R}\cdot 2\cos\frac{\pi}{3}\theta\\&=\sqrt{2R}\cos\theta\\&=\sqrt{d_1}\end{aligned}$$

五、巧归恒等式

例7 已知△ABC三内角 $\frac{\pi}{7},\frac{2\pi}{7},\frac{4\pi}{7}$ 的对边分别是 c,b,a，

证明：$\frac{a+b}{b+c}=\frac{\cos\frac{\pi}{7}}{\cos\frac{2\pi}{7}}$（650题）

简析：供题者的解答用了两个引理及余弦定理，其实此题结论的背景是一个三角恒等式

证明：$\frac{a+b}{b+c}=\frac{\cos\frac{\pi}{7}}{\cos\frac{2\pi}{7}}$

$\Leftrightarrow\frac{2R\sin\frac{4\pi}{7}+2R\sin\frac{2\pi}{7}}{2R\sin\frac{2\pi}{7}+2R\sin\frac{\pi}{7}}=\frac{\cos\frac{\pi}{7}}{\cos\frac{2\pi}{7}}$（正弦定理）

$\Leftrightarrow\frac{2\sin\frac{3\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}}{2\sin\frac{3\pi}{14}\cos\frac{\pi}{14}}=\frac{\cos\frac{\pi}{7}}{\cos\frac{2\pi}{7}}$

$\Leftrightarrow\sin\frac{3\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}=\sin\frac{3\pi}{14}\cos\frac{\pi}{14}$

上式是一个三角恒等式，结论得证。

六、巧设定比λ

例8 M_1M_2 是凸n边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 内部一条线段，且 M_1、M_2 两点到各边距离之和都为d。求证：M_1M_2 上任意一点到各边的距离之和也为d（930题）

简析：供题者的解答技巧性强，"此曲只应天上有，人间能有几回闻"。一般中学生难以循此思路获解，如下解法可谓"雅俗共赏"。

证明：设M为 M_1M_2 上任意一点，令 $\frac{M_1M}{MM_2}=\lambda$，因 $A_1A_2\cdots A_n$ 是凸n边形，线段 M_1M_2 在n边形 $MA_1A_2\cdots A_n$ 内部，因而线段 M_1M_2 在n边形的任一条边所在直线的同一侧，再设 M_1、M_2、M至 A_iA_{i-1} $(i=1,2,\cdots,n\quad A_{n+1}=A_1)$ 的距离分别为：d_i,d_i',d_i''

则 $d_i''=\frac{d_i+\lambda d_i'}{1+\lambda}$

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{i=1}^{n}d_i''&=\frac{1}{1+\lambda}\sum_{i=1}^{n}d_i+\frac{1}{1+\lambda}\sum_{i=1}^{n}d_i'\\&=\frac{1}{1+\lambda}d+\frac{\lambda}{1+\lambda}d\\&=d\end{aligned}$$

命题得证。

（审稿 李慎余 责任编辑 王德红）