一道数学题的误解、正解与巧解分析

224000 江苏省盐城中学 盛冬山
215021 江苏省苏州工业园区星湾实验中学 王 薇

题目 在一个矩形体育馆的一角 MAN 内(如图1), 设置一个四边形的运动器材储存区域, 已知 B、C 分别是墙角线 AM、AN 上的一点. 若 $AB=6$, $AC=8$, 在折线 $MBCN$ 内选一点 D, 使 $DB+DC=20$, 求储存区域四边形 $DBAC$ 面积的最大值.

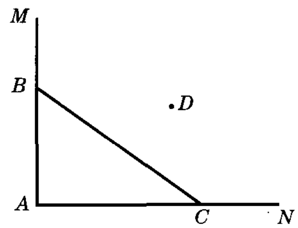

图1

误解: 在 Rt$\triangle ABC$ 中, $\because AB=6, AC=8$, $AB\perp AC$, $\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot AB=24$. 连接 BD、CD, $\because BD+CD=20$, $\therefore S_{\triangle BDC}=\frac{1}{2}CD\cdot BD\sin D\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{CD+BD}{2}\right)^2\sin D=50\sin D\leqslant 50$, 当且仅当 $CD=BD=10$, $\angle D=\frac{\pi}{2}$ 时等号成立, $\therefore$ $S_{四边形ABDC}$ 的最大值为74.

误解分析: 当 $\triangle BDC$ 的面积达到最大值时有两个条件需同时具备, 即 $CD=BD$ 且 $\angle D=\frac{\pi}{2}$, 而在 $\triangle BDC$ 中, $BD+CD=20$, $CD=BD$ 与 $\angle D=\frac{\pi}{2}$ 是不可能同时成立的, 只有当 $BC=10\sqrt{2}$ 时, $BD+CD=20$、$CD=BD$ 与 $\angle D=\frac{\pi}{2}$ 才能同时成立, 故上述解答错误.

正解: 连接 BD、CD, 在 Rt$\triangle ABC$ 中, $\because AB=6, AC=8, AB\perp AC$, $\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot AB=24$, 且 $BC=\sqrt{AB^2+AC^2}=10$, 设 $BD=x, CD=y$, 则 $x+y=20$, 又 $BC=10$, 在 $\triangle ABC$ 中, 由余弦定理得, $BC^2=BD^2+CD^2-2BD\cdot CD\cos D$, 即 $100=x^2+y^2-2xy\cos D$. $\because 100=(x+y)^2-2xy-2xy\cos D$, $\therefore xy=\frac{150}{1+\cos D}$.

$$S_{\triangle BDC}=\frac{1}{2}xy\sin D=\frac{75\sin D}{1+\cos D}=\frac{75\cdot 2\sin\frac{D}{2}\cos\frac{D}{2}}{2\cos^2\frac{D}{2}}=\frac{75\sin\frac{D}{2}}{\cos\frac{D}{2}}=75\tan\frac{D}{2}.$$

$\because \frac{150}{1+\cos D}=xy\leqslant\left(\frac{x+y}{2}\right)^2=100$, $\therefore 1+\cos D\geqslant\frac{3}{2}$, 即 $\cos D\geqslant\frac{1}{2}$, 又 $\because D\in(0,\pi)$, $\therefore 0<D\leqslant\frac{\pi}{3}$, $S_{\triangle BDC}=75\tan\frac{D}{2}\leqslant 25\sqrt{3}$, 即 $(S_{\triangle BDC})_{\max}=25\sqrt{3}$, 这时 $\angle D=\frac{\pi}{3}$. $\therefore$ $S_{四边形ABDC}$ 的最大值为 $24+25\sqrt{3}$.

正解的亮点: 上述解法的亮点是利用余弦定理深入挖掘了 $\triangle BDC$ 中边 CD、BD 与 $\angle D$ 的相互关系, 将 $\triangle BDC$ 的面积表示为 $\angle D$ 的三角函数.

巧解: 在 Rt$\triangle ABC$ 中, $\because AB=6, AC=8, AB\perp AC$, $\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot AB=24$. 要求储存区域四边形 $DBAC$ 面积的最大值, 只需求 $\triangle BDC$ 的面积的最大值. 因为 $CD+BD=20$, $BC=10<BD+CD$, 所以点 D 在以 B、C 为焦点, 长轴长为20的椭圆上, 以 BC 所在直线为 x 轴, 线段 BC 的中垂线为 y 轴建立平面直角坐标系, 则点 D 所在轨迹方程为: $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{75}=1$, 点 D 到直线 BC 的距离的最大值为 $\sqrt{75}=5\sqrt{3}$, $\therefore (S_{\triangle BDC})_{\max}=25\sqrt{3}$, 从而 $S_{四边形ABDC}$ 的最大值为 $24+25\sqrt{3}$.

巧解的亮点: 本题巧解的亮点在于将椭圆的相关知识用于解题之中, 化解了解题中两个变量化归的难点, 使解题过程得到了优化; 由此可见, 数学问题的解决, 不可只在一个或几个知识点上去研磨, 要开放思维, 多条腿走路, 特别要注意不同领域知识点的整合.