妙用数学思维，巧解数学难题

江苏省南通市如东县洋口镇古坳初级中学(226461) 顾志明

摘 要：数学思维，是初中学习过程中学生开始了解和掌握的一种比较抽象的大脑思考问题的方式. 数学教师可以从整体代换、化归思维和分类讨论等角度培养学生用灵活多变的视角来分析问题，从而提升学生的解题能力.

关键词：初中数学；数学思维；解题能力培养

中图分类号：G632 **文献标识码**：B **文章编号**：1008－0333(2016)08－0029－02

数学思维，是初中学习过程中学生开始了解和掌握的一种比较抽象的大脑思考问题的方式，这种方法在解题中是采用一种高于题目的思维来认知和解答题目，从而让题目变得简单. 在初中进行典型思维方式的教学和训练，有利于引导学生思维方式的转变，培养学生用灵活多变的视角来分析问题，在解题方面对学生来讲这是一种质的提升. 本文将从整体代换、化归思维、分类讨论三种数学思维的分析出发，进行思维的例证.

一、整体代换，转换自如

整体代换，就是从题目整体来进行把握，对已知条件从全局进行把握，进行整体代换，然后进行求解. 一般利用字母或式子抑或多项式的方法来作为代换的单位，作为一种战术性质的思路，在解题中能够将知识进行综合性的分析和使用，将复杂的问题转换为已有的经验性质的题目进行解答. 在整体代换的过程中，要注意恰当地选取“元”，这是代换法中的关键，选取不当会造成错误的解答甚至将题目变得更加复杂.

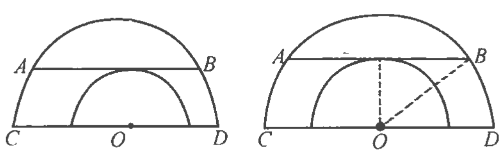
例1 已知 $a+d^2=2007, b+d^2=2008, c+d^2=2009$，且 $abc=24$，求$\frac{a}{bc}+\frac{b}{ca}+\frac{c}{ab}-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}-\frac{1}{c}$的值.

解析 对于该题目，若从已知的四个式子中联立求解，来解出 a、b、c 的值，是非常麻烦的. 但是可以考虑运用整体代换的思想，对已知的四个式子进行同项相消，得到 $a-b=-1, b-c=-1, c-a=2$. 变形可得原式 $=\frac{1}{abc}(a^2+b^2+c^2-bc-ac-ab)$，这是采用了分母有理化的解题思路，得到跟已知有关的式子. 对这个式子进行再变形得到 $=\frac{1}{2abc}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]=\frac{1}{48}\times(1+1+4)=\frac{1}{8}$. 这是采用了构造已知项的思路，把陌生的式子化为已知的式子，从而顺利解答.

二、化归思维，化难为易

化归思维作为一种多向性的思维有着非常多的应用题型，不同的题型中采用的思维方式不一样，例如复杂与简洁、抽象与形象、一般与特殊等，这里讨论的是一般与特殊的化归思维. 有些题目常常以较为特殊的未曾见过的形式出现，让学生感觉摸不着头脑，但事实上是特殊情形的变化，变成了一般性的题目. 解答过程中要注意观察这种一般性的题目是否可以化归为特殊的自己的经验型的题目，这对于解题是至关重要的.

例2 对于左图中的两个半圆，半径大的圆的弦 AB 与小半圆相切，$AB\,/\!/\,CD$，$AB=6\text{cm}$，求大的半圆减去小的半圆的剩余部分的面积.



分析 对于所要求的图形是一个不规则的图形，观察可知，大的半圆减去小的半圆就是所求图形的面积. 但是题目中并未给出两个圆的半径大小，没有数据也就让题目的求解变得十分困难. 根据图形平移的性质，将小的半圆的圆心与大的半圆的圆心重合，如右图，并不改变所求部分的面积大小.

解答 假设两个圆的半径为 R 和 r，那么所求部分的面积为 $S=\frac{1}{2}\pi R^2-\frac{1}{2}\pi r^2=\frac{1}{2}\pi(R^2-r^2)=\frac{1}{2}\pi(\frac{AB}{2})^2$，通过列式分析知道，最后化归为弦的计算. 答案为$\frac{9}{2}\pi$.

从解答过程中可以发现，平移之后的图形是一般的题目中常常会出现的，而且通过平方差的形式转化为弦长的一半的平方也是化一般为特殊的化归思想的体现. 这种思想的应用建立在日常教学与学习的基础上，能够把握课本和经常练习的题目的特点就可以奠定这种思维方式运行的基础，故而基础知识也是非常重要的，有助于化归思维的熟练应用.

三、分类讨论，运筹帷幄

初中学习了一元二次方程的解法后，就遇到一些较为复杂的系数不确定的类型的方程，这些系数的不确定性导致结果的多样化，而这样的不确定性也导致了学生对于这类题目的茫然失措. 而分类讨论的思想方法就是解决这类问题的重要方法，分类讨论一般是从方程的元和次两个角度来进行讨论，一元的情况下是一次还是二次，这需要进行判断，然后就根的结果再进行判别式的分析计算和讨论，在实数集合内进行全集合讨论，以免漏掉情况. ▶

新概念下创新型题的解答

重庆市渝北区渝北中学校(401120) 颜其福
重庆市渝北区统景初级中学校(401120) 唐 静

中图分类号:G632 **文献标识码**:B **文章编号**:1008-0333(2016)08-0030-02

新概念下的创新型题是近年中考数学解答题中涌现出的综合题型之一.题型往往取材于学生所熟悉的知识,通过类比、延伸等方法给出一个新概念,在新概念下,通过操作、阅读、探索、猜想、加工成一个综合型题.这类题有内容丰富、构思新颖别致、题样多变、知识覆盖面较大等特点,考查学生的阅读理解能力、文字概括能力,分析推理能力,数据处理探索能力、书面表达能力、随机应变能力和知识迁移能力、应用能力等,它避免了乱猜试题、充分体现了题目的公平性.下面就2015年的两个新概念下中考题目的解答进行分析领悟,以期能对我们的学习有提高.

例1 (福州市)定义:长宽比为$\sqrt{n}$: 1(n为正整数)的矩形称为$\sqrt{n}$矩形.下面,我们通过折叠的方式折出一个$\sqrt{2}$矩形,如图①所示.

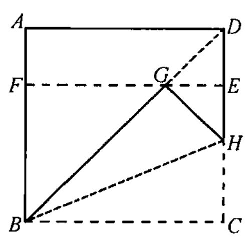


图1

操作1 将正方形$ABCD$沿过点B的直线折叠,使折叠后的点C落在对角线BD上的点G处,折痕为BH.

操作2 将AD沿过点G的直线折叠,使点A,点D分别落在边AB,CD上,折痕为EF.

则四边形$BCEF$为$\sqrt{2}$矩形.

证明 设正方形$ABCD$的边长为1,则$BD=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$.

由折叠性质可知$BG=BC=1$,$\angle AFE=\angle BFE=90°$,则四边形$BCEF$为矩形.

$\therefore \angle A=\angle BFE$. $\therefore EF /\!/ AD$.

$\therefore \frac{BG}{BD}=\frac{BF}{AB}$,即$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{BF}{1}$, $\therefore BF=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

$\therefore BC:BF=1:\frac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}:1$.

$\therefore$四边形$BCEF$为$\sqrt{2}$矩形.

阅读以上内容,回答下列问题:

(1)在图1中,所有与CH相等的线段是____,$\tan\angle HBC$的值是____;

(2)已知四边形$BCEF$为$\sqrt{2}$矩形,模仿上述操作,得到四边形$BCMN$,如图2,求证:四边形$BCMN$为$\sqrt{3}$矩形;

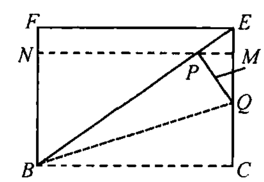


图2

▶ **例3** 一元二次方程$mx^2-4x+4=0$与$x^2-4mx+4m^2-4m-5=0$的解都是整数,求m的整数值.

解析 对题目进行分析可知,由于整数m值不确定,那么随着取值不同可能会有不同的的结果.由于是一元二次方程,故而二次项系数不等于0,即$m\neq0$,$\Delta_1\geq0$,解之得$m\leq1$.

同理,$\Delta_2\geq0$,解之得$m\geq-\frac{5}{4}$. $\therefore -\frac{5}{4}\leq m\leq1$且$m\neq0$,由于$m$是整数,故而$m$取1或-1.得到的结果要代入原来的方程以验证其正确性,所以又要分两种情况进行讨论.

(1)若$m=-1$时,第一个方程的根为$x=-2\pm2\sqrt{2}$不是整数,所以$m=-1$舍去.

(2)若$m=1$时,方程1、2的解都是整数,所以$m=1$.

一元二次方程的系数讨论问题是初中函数中常见的一种类型的讨论题型,学生在解决问题的过程中常常会漏掉一种或多种需要讨论的情况,如何避免思维的漏洞才是分类讨论思想中需要解决的最重要的问题.在解决问题的过程中,我们需要要从集合的角度进行考虑,一般情况下分为$(-\infty,0)$,(0),$(0,+\infty)$,然后将这三个集合作为大集合再进行细分.分类讨论的思维方式有利于帮助学生建立严谨的逻辑思维,养成认真细致的好习惯.

综上,讨论了整体思维、化归思维、分类讨论思维在初中解题中的原理和常见的应用形式,通过这些思想方法的学习,有助于学生从思维的高度对知识进行再次学习,领悟更多的知识和灵活解题的策略,从而从容地面对数学学习.

参考文献

[1]张宁.聚焦一元二次方程的整数解问题[J].中国数学教育:初中版,2011(10).

[2]朱元生.例析一元二次方程整数根问题的解法[J].数理化学习(初中版),2003(11).