运用数学思想方法巧解数学题

■金炳凯

一、化归思想解题

解决任何一个数学问题都是一个化归的过程。由繁化简，由未知化已知，由高次化低次等。

例1 如图1，长方体的底面半径长分别是1 cm和3 cm，高为6 cm，如果用一根细线从点A开始经过四个侧面绕一圈到达点B，那么所用细线最短需要____ cm。

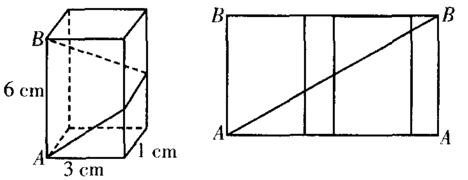

图1

解析：对于立体图形的问题往往把它转化为平面图形的问题来研究。通过侧面展开图最后化归为“两点之间线段最短”来解决。将长方体展开，连接A、B，根据两点之间线段最短，$AB=\sqrt{AA^2+AB^2}=10$ cm。

二、整体思想解题

有些数学问题如果从常规入手，解法会比较烦琐，如能从整体考虑则会简单许多。

例2 求$\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ$的值。

解析：设$A=\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ$，$B=\sin 20^\circ\sin 40^\circ\sin 80^\circ$。

$AB=\frac{1}{2^3}\sin 40^\circ\cdot\sin 80^\circ\sin 160^\circ$

$=\frac{1}{8}\sin 20^\circ\sin 40^\circ\sin 80^\circ$

$=\frac{1}{8}B$。

因为$B\neq 0$，所以$A=\frac{1}{8}$。

故$\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ=\frac{1}{8}$。

三、分类讨论思想解题

分类讨论思想是一种化整为零，各个击破，整合结论的解题策略，根据数学本质属性的不同点和相同点把数学的研究对象区分为不同种类。

例3 函数$y=(a-2)x^2+2(a-2)x-4$的值恒小于0，则a的取值范围是____。

解析：因已知函数的值恒小于0，于是转化为不等式小于0恒成立，根据二次项系数$a-2=0$和$a-2\neq 0$分为两种情况讨论。

故有$a-2=0$

或$\begin{cases}a-2<0,\\ \Delta=4(a-2)^2-4(a-2)(-4)<0。\end{cases}$

可得实数a的取值范围是$(-2,2]$。

四、函数和方程思想解题

函数思想就是利用函数的性质和图像来解决问题。而方程思想指的是设适当的未知数，把问题中的已知与未知量之间的数量关系，转化为方程或方程组的数学模型来解决问题。

例4 若实数a、b满足$a^3-3a^2+5a=1$，$b^3-3b^2+5b=5$，求$a+b$的值。

解析：构造函数$f(x)=x^3-3x^2+5x$，题目中所给的两个等式，恰好是当$x=a$和$x=b$时的函数值，即$f(a)=1$，$f(b)=5$。

因为$f(x)=x^3-3x^2+5x=(x-1)^3+2(x-1)+3$，令$x-1=t$，可再构造函数$g(t)=t^3+2t$。

所以$f(a)=g(a-1)+3=1$，$f(b)=g(b-1)+3=5$。

所以$g(a-1)=-2$，$g(b-1)=2$，$g(a-1)=-g(b-1)$。

又因为$g(t)=t^3+2t$在定义域内单调递增且是奇函数，

所以$a-1=-(b-1)$，$a+b=2$。

作者单位：河北省青县清州实验中学