巧解一道数学竞赛题

⊙福建省厦门双十中学特级教师
任 勇

参加科技夏令营的学生来自各个学校,有高中生,有初中生,也有小学生.

一位老师在给高中组的学生讲一道题:

"正数 a,b,c,A,B,C 满足条件

$$a+A=b+B=c+C=k.$$

求证:$aB+bC+cA<k^2$."

老师说:"这是第21届全苏数学奥林匹克竞赛题."

老师颇为得意地给出解答:

$$\begin{aligned}\because\quad k^3&=(a+A)(b+B)(c+C)\\&=abc+ABC+aB(c+C)+bC(a+A)+cA(b+B)\\&=abc+ABC+k(aB+bC+cA)\\&>k(aB+bC+cA),\end{aligned}$$

$$\therefore\quad aB+bC+cA<k^2.$$

老师点题:"巧用放缩法,妙证奥赛题."

高中生 A 说:"我有另一证法."

由题设条件知,所证不等式可变形为

$$a(k-b)+b(k-c)+c(k-a)-k^2<0,\text{且 } a,b,c\in(0,k).$$

把上式左端视为关于 c 的函数式,令

$$f(c)=(k-a-b)c+k(a+b)-ab-k^2.$$

当 $k-a-b=0$ 时,$f(c)=k^2-ab-k^2=-ab<0$;

当 $k-a-b\neq 0$ 时,$f(c)$为一次函数,因而是$(0,k)$上的单调函数,又 $f(0)=k(a+b)-ab-k^2=(k-a)(b-k)<0, f(k)=-ab<0$.

$\therefore$ $f(c)$在$(0,k)$上恒为负值.

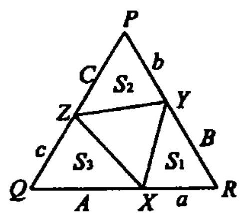
$\therefore$ $(k-a-b)c+k(a+b)-ab-k^2<0$.

故 $aB+bC+cA<k^2$.

高中生点题:"巧用构造法,妙证奥赛题."

初中生 B 说:"不必那么复杂,画个三角形就可证得."

作边长为 k 的正$\triangle PQR$,在三边上分别取三点 X、Y、Z,使 $QX=A, XR=a, RY=B, YP=b, PZ=C, ZQ=c$.



$\because$ $S_1+S_2+S_3<S_{\triangle PQR}$,

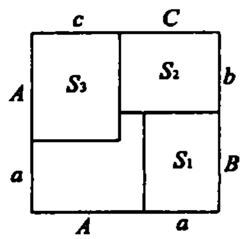
$\therefore$ $\frac{1}{2}aB\sin 60°+\frac{1}{2}bC\sin 60°+\frac{1}{2}cA\sin 60°<\frac{1}{2}k\cdot k\sin 60°$,

$\therefore$ $aB+bC+cA<k^2$.

初中生点题:"巧用三角形,妙证奥赛题."

来凑热闹的小学生 C 说:"还可以再简单一些."

作边长为 k 的正方形,有关尺寸如图.



$\because$ $S_1+S_2+S_3<S_{\text{正方形}}$,

$\therefore$ $aB+bC+cA<k^2$.

小学生点题:"巧用正方形,妙证奥赛题."

初中生笑了,高中生不好意思了,老师先是惊得目瞪口呆,继而发出会心的微笑,连称:"好,好,你们都是好样的!"