例析三角换元在解题中的妙用

★ 张鹏飞

三角换元法是用三角函数代替问题中的字母或式子，并利用三角函数之间的关系实现解题目的。三角换元法以三角函数公式为依托，利用三角函数的性质，使问题的解决化繁为为简，化难为易。下面谈谈三角换元在几类问题的的应用。

一. 在函数求值域与最值的应用

题 1.求函数 $y=x\sqrt{1-x^2}+x^2$ 的值域

解：设 $x=\sin\alpha(|\alpha|\le\frac{\pi}{2})$，原函数转化为：

$$y=\sin\alpha\cos\alpha+\sin^2\alpha=\frac{1}{2}\sin 2\alpha+\frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(2\alpha-\frac{\pi}{4})$$

$\therefore\frac{1-\sqrt{2}}{2}\le y\le\frac{1+\sqrt{2}}{2}$，所以函数的值域为 $y\in[\frac{1-\sqrt{2}}{2},\frac{1+\sqrt{2}}{2}]$

题 2.求函数 $y=\frac{1-x^2}{1+x^2}-\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}$ 的值域

解：设

$x=\tan\alpha,\left(|\alpha|<\frac{\pi}{2}\right)$,则 $\frac{1-x^2}{1+x^2}=\cos 2\alpha,\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}=2sin\alpha$，$\therefore y=\cos 2\alpha-2\sin\alpha=$

$-2\left(\sin\alpha+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}\le\frac{3}{2}$，当 $\sin\alpha=-\frac{1}{2},x=-\frac{\sqrt{3}}{3},y_{\max}=\frac{3}{2}$

二、在证明等式或不等式中的应用

（一）不等式的证明

题 3.已知 $a^2+b^2=1,c^2+d^2=1$,求证：$|ac+bd|\le 1$

证明：设 $a=\sin\alpha,b=\cos\alpha,c=\sin\beta,d=\cos\beta$，则 $|ac+bd|=|\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta|=|\cos(\alpha-\beta)|\le 1$

（二）解不等式

解不等式 $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1-x^2}{1+x^2}>0$

解：设 $x=\tan\alpha,(|\alpha|\le\frac{\pi}{2})$，

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1-x^2}{1+x^2}>0\Leftrightarrow\quad\sin\alpha+\cos 2\alpha>0$$

$\Leftrightarrow 2\sin^2\alpha-\sin\alpha-1<0$，$\therefore -\frac{1}{2}<\sin\alpha<1$，

$\therefore -\frac{\pi}{6}<\alpha<\frac{\pi}{2}$

$\therefore x=\tan\alpha>-\frac{\sqrt{3}}{3}$

（三）等式的证明

题 4.设 $a_1^2+b_1^2=1$，$a_2^2+b_2^2=1$ 且 $a_1a_2+b_1b_2=0$，求证：$a_1^2+a_2^2=1,\ b_1^2+b_2^2=1,$

证明：设 $a_1=\sin\alpha,b_1=\cos\alpha$，$a_2=\cos\beta,b_2=\sin\beta$，由 $a_1a_2+b_1b_2=0$ 可得：

$\therefore\ \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\sin(\alpha+\beta)=0$，

$\therefore\alpha+\beta=k\pi,\beta=k\pi-\alpha(k\in Z)$，

从而：$a_1^2+a_2^2=\sin^2\alpha+\cos^2\beta=\sin^2\alpha+\cos^2(k\pi-\alpha)=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，

同理可得：$b_1^2+b_2^2=1,$

三、在解析几何中的应用

题 5.（2016 年全国 III 高考）在直角坐标系 xOy 中，曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=\sqrt{3}\cos\theta\\y=\sin\theta\end{cases}$ (θ为参数)，以坐标原点为极点，以 x 轴的正半轴为极轴，，建立极坐标系，曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho\sin(\theta+\frac{\pi}{4})=2\sqrt{2}$.

（I）写出 C_1 的普通方程和 C_2 的直角坐标方程；

（II）设点 P 在 C_1 上，点 Q 在 C_2 上，求|PQ|的最小值及此时 P 的直角坐标.

解：（Ⅰ）C_1 的普通方程为 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$，C_2 的直角坐标方程为 $x+y-4=0$

（Ⅱ）由题意，设 $P(\sqrt{3}\cos\theta,\sin\theta)$，因为 C_2 是直线，所以|PQ|的最小值，即为点 P 到 C_2 的距离 $d(\theta)$ 的最小值，

$d(\theta)=\frac{|\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta-4|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\left|\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)-2\right|$，当且仅当 $\theta=2k\pi+\frac{\pi}{6}(k\in Z)$ 时，$d(\theta)$ 取得最小值为，此时 P 的直角坐标为 $\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$

题 6.已知实数 a,b 满足 $2b^2-a^2=4$，则 $|a-2b|$ 的最小值是

解：由 $2b^2-a^2=4$ 知 $\frac{b^2}{2}-\frac{a^2}{4}=1$，故可设 $b=\sqrt{2}\sec\theta,$ $a=2\tan\theta$,那么 $a-2b=2\tan\theta-2\sqrt{2}\sec\theta=\frac{2(\sin\theta-\sqrt{2})}{\cos\theta}$，

令 $t=\frac{\sin\theta-\sqrt{2}}{\cos\theta}$,$\therefore\sin\theta-t\cos\theta=\sqrt{2}$，

$\sqrt{1+t^2}\sin(\theta+\varphi)=\sqrt{2}$，其中 $\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$，

$\sin\varphi=-\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$，

从而 $\sqrt{1+t^2}\ge\sqrt{2},\therefore|t|\ge 1$，所以则 $|a-2b|$ 的最小值是 2，当 $a=b=2$ 时，等号成立。

结语

从一种形态转化为另一形态的过程，这数学解题的常用手段。而三角换元法就是一种具体的体现，应用三角换元法解题不但可以使问题的解决化繁为简，化难为易，而且可以拓展解题思路，扩大视野，培养学习兴趣。

（作者单位：贵州省安顺市平坝第一高级中学）