$\frac{\sqrt{2}}{2}$的椭圆的共性.

例6 (2012年江苏高考题)如图6,在平面直角坐标系xOy中,椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点分别为$F_1(-c,0)$,$F_2(c,0)$.已知点$(1,e)$和$(e,\frac{\sqrt{3}}{2})$都在椭圆上,其中$e$为椭圆的离心率.

(1)求椭圆的方程;

(2)设A,B是椭圆上位于x轴上方的两点,且直线AF_1与直线BF_2平行,AF_2与BF_1交于点P.

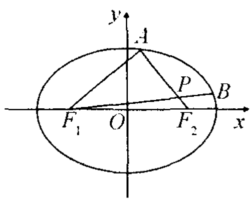

图6

(ⅰ)若$AF_1-BF_2=\frac{\sqrt{6}}{2}$,求直线$AF_1$的斜率;

(ⅱ)求证:PF_1+PF_2是定值.

解:(1)$\frac{x^2}{2}+y^2=1$(过程略);

(2)(ⅰ)设直线l为椭圆的左准线,如图7,作$AA_1\perp l$于点A_1,作$F_1M\perp AA_1$于点M,设$\angle AF_1O=\theta$,则$AF_1=eAA_1=e(\frac{b^2}{c}+AF_1\cos\theta)$,$\therefore AF_1=\frac{\frac{b^2}{a}}{1-e\cos\theta}$,

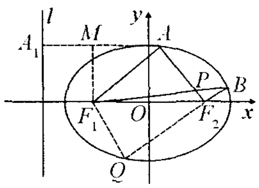

图7

同理$BF_2=\frac{\frac{b^2}{a}}{1+e\cos\theta}$,$\therefore AF_1-BF_2=\frac{2e\cdot\frac{b^2}{a}\cdot\cos\theta}{1-e^2\cos^2\theta}$ $=\frac{\cos\theta}{1-\frac{1}{2}\cos^2\theta}=\frac{\sqrt{6}}{2}$,解得$\cos\theta=\frac{\sqrt{6}}{3}$或$\cos\theta=-\frac{\sqrt{6}}{3}$(舍去).所以$k=\tan\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$,即直线$AF_1$的斜率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(ⅱ)延长BF_2交椭圆于点Q,连结F_1Q,由椭圆的对称性,可知$F_1Q\parallel PF_2$,$\therefore\frac{BF_1}{PF_1}=\frac{BQ}{QF_2}$,$\therefore PF_1=\frac{QF_2}{BQ}BF_1$,同理$PF_2=\frac{AF_2}{BQ}BF_2$,

$$\therefore PF_1+PF_2=\frac{QF_2BF_1+AF_2BF_2}{BQ}=\frac{QF_2(2\sqrt{2}-BF_2)+(2\sqrt{2}-QF_2)BF_2}{BQ}=2\sqrt{2}-2\frac{BF_2\cdot QF_2}{BF_2+QF_2}.$$

由(ⅰ)易得$\frac{BF_2\cdot QF_2}{BF_2+QF_2}=\frac{1}{\frac{1}{BF_2}+\frac{1}{QF_2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$,

$\therefore PF_1+PF_2=2\sqrt{2}-2\times\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

评注:(1)第(2)问与第(3)问解题的技巧在于:极坐标思想的应用.解题的实质为:通过平几与三角巧妙地联系着焦半径之间的关系,简化运算,若运用韦达定理求解,则计算复杂易于出错.这正体现了"不思则无,深思则远,远思则宽"的数学解题智慧.

(2)本题第(3)问的背景是:AF_2与BF_2交于点P的轨迹为与原椭圆共焦点的椭圆,且离心率$e'=\frac{2e}{1+e^2}$(其中e为原椭圆的离心率).

以上解决解析几何综合题的思路与方法告诉我们:见多识广,可以增强领悟能力,博采众长,才能减少盲目性.解题中的灵感突现,源自平时的日积月累,只有多钻研,多探索,做题时便能随机应变,或独辟蹊径,以致迎刃而解.

例析运用物理知识巧解数学问题

江西省临川一中 (344100) 尤伟峰

众所周知,数学是研究物理的有力工具,物理中的不少公式和习题都要借助数学知识来推导和演算.其实,物理中的很多方法和原理,在数学解题中也是很有用途的,下文主要运用杠杆原理、光的折射定律、椭圆的光学性质等巧解数学问题.

一、利用杠杆原理

杠杆原理亦称"杠杆平衡条件".要使杠杆平衡,作用在杠杆上的两个力(动力点、支点和阻力

点）的大小与它们的力臂成反比. 杠杆原理的表达为：动力 × 动力臂 = 阻力 × 阻力臂.

例 1　(2011 年华约联盟) 已知圆柱形水杯质量为 a 克，其重心在圆柱轴的中点处(杯底厚度及重量忽略不计，且水杯直立放置). 质量为 b 克的水恰好装满水杯，装满水后的水杯的重心还在圆柱轴的中点处.

(1) 若 $b = 3a$，求装入半杯水的水杯的重心到水杯底面的距离与水杯高的比值；

(2) 水杯内装多少克水可以使装入水后的水杯的重心最低？为什么？

解： 设空杯子的重心为 O，杯子的总高度为 h，设倒入的水的重心在 O' 处，杯子和水的整体重心在 O_1 处，O_1 到杯子底部的距离为 x.

(1) 根据杠杆原理：$O_1O' \cdot \frac{b}{2} = O_1O \cdot a \Rightarrow \frac{3}{2}(x - \frac{1}{4}h) = \frac{1}{2}h - x \Rightarrow \frac{x}{h} = \frac{7}{20}$.

(2) 设倒入水的质量为 $\lambda b(\lambda \in [0,1])$，同样，根据杠杆原理：

$$O_1O' \cdot \lambda b = O_1O \cdot a \Rightarrow \lambda b(x - \frac{1}{2}\lambda h) = (\frac{1}{2}h - x)a \Rightarrow x = \frac{\lambda^2 bh + ah}{2(\lambda b + a)}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda^2 bh + \lambda ah - \lambda ah - \frac{a^2h}{b} + \frac{a^2h}{b} + ah}{\lambda b + a}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{(\lambda b + a)h}{b} + \frac{ah(a + b)}{b(\lambda b + a)} - 2\frac{ah}{b}\right]$$

$$\geqslant \frac{1}{2}\left[2\sqrt{\frac{(\lambda b + a)h}{b} \times \frac{ah(a + b)}{b(\lambda b + a)}} - 2\frac{ah}{b}\right]$$

$$= \frac{h}{b}(\sqrt{a(a + b)} - a),$$

等号成立的条件 $\frac{(\lambda b + a)h}{b} = \frac{ah(a + b)}{b(\lambda b + a)} \Rightarrow \lambda = \frac{\sqrt{a(a + b)} - a}{b} < \frac{(a + b) - a}{b} = 1$ 符合题意. 故倒入水的质量为 $\sqrt{a(a + b)} - a$ 时，整体重心最低.

评析： 本题通过运用物理中的杠杆原理，使问题变为清晰，降低了思维难度，当然，在第(2) 中，也可通过求导得出.

二、利用光的折射定律

光在两种介质中的传播速度之比等于入射角的正弦与折射角的正弦之比，即 $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{v_1}{v_2}$.

例 2　已知 $A(1,2)$，$B(8,3)$，在 x 轴上找一点 M，使 $2|AM| + |BM|$ 取得最小值.

解： 如图 1，设 x 轴为甲、乙两种媒介的分界面，x 轴下方为甲媒介，上方为乙媒介，设点 A 关于 x 轴的对称点为 A'，光线在甲、乙两种媒介中的传播速度分别为 $\frac{1}{2}$ 和 1，则 $2|AM| + |BM| = 2|A'M| + |BM| = \frac{|A'M|}{\frac{1}{2}} + \frac{|BM|}{1}$，其可视为光线由 A' 到 M，再由 M 到 B 所需时间之和，由物理原理知，两点之间光沿着所需时间为最小值的路径传播，故 $2|AM| + |BM|$ 的最小值可视为光线从 A' 传到 B 所需时间. 设入射角为 α，折射角为 β，由光的折射定律和题意得 $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{1}{2}$，设 A 点在 x 轴上的射影为 C，且 $CM = t$，则 $\frac{t}{\sqrt{t^2 + 2^2}} = \frac{1}{2}\frac{7 - t}{\sqrt{(7 - t)^2 + 3^2}}$，解得 $t = 1$，即当 M 在 $(2,0)$ 处时，$2|AM| + |BM|$ 取得最小值.

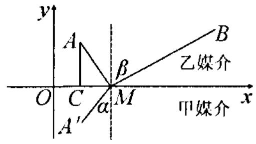

图 1

评注： 借助物理中光的折射定律，巧妙地将这种两个根号之和且根号前的系数不相等的无理函数的最值问题解决.

三、利用椭圆的光学性质

从椭圆的一个焦点发出的光线，经过椭圆反射后，反射光线交于椭圆的另一个焦点上.

例 3　已知 F_1，F_2 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的两个焦点，试证明：F_1，F_2 到椭圆的任一条切线距离的乘积为定值.

证明： 如图 2，设 F_1，F_2 到椭圆的任一条切线距离分别为 d_1，d_2，切点 P 到 F_1，F_2 的距离分别 r_1，r_2，入射角和反射角为 θ，由椭圆的定义知 $r_1 + r_2 = 2a$，① 在 ΔABC 中，由余弦定理知 $4c^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos 2\theta = (r_1 + r_2)^2 - 2r_1r_2 - 2r_1r_2\cos 2\theta = (r_1 + r_2)^2 - 4r_1r_2\cos^2\theta$②，

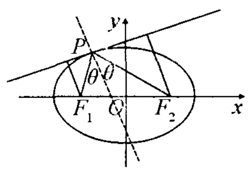

图 2

由 ①② 得 $d_1 \cdot d_2 = r_1\cos\theta \cdot r_2\cos\theta = r_1 \cdot r_2\cos^2\theta = b^2$(定值).

评注： 若用传统的直接法，把切线的方程设出来，再用点到直线的距离公式运算，运算量显然比较大，而借助椭圆的上述光学原理，简化了很多运算. 实际上，这一原理，已出现在我们的中学课本的阅读

材料中.

参考文献

[1]孙士放.大学自主招生试题解析与模拟.南京师范大学出版社,2012.

[2]王德平.一个无理函数的最值问题的物理解法.中学数学教学参考.2009.12.

用函数对称性解2012年全国高考四川卷(文、理)12

四川省泸县二中 (646106) 石庆洪

$y=f(x)$ 的抽象函数方程中,有些方程有特定的几何意义,如$f(x)=f(2a-x)$,$f(x)+f(2a-x)=2b$分别是轴对称(对称轴$x=a$)中心对称(对称中心(a,b))函数,特别地,$a=b=0$时,分别是偶函数和奇函数,$f(x+T)=f(x)$是周期函数,记住它们对解决问题很有意义.本文用这几个抽象函数方程给出2012全国高考四川卷(文、理)数学12题的快捷解法.

题目 **(文)** 设函数$f(x)=(x-3)^3+x-1$,$\{a_n\}$是公差不为0的等差数列,$f(a_1)+f(a_2)+\cdots+f(a_7)=14$,则$a_1+a_2+\cdots+a_7=$( ).

A. 0 B. 7 C. 14 D. 21

命题者给出的参考解答:$\because\{a_n\}$是公差不为0的等差数列,且$f(a_1)+f(a_2)+\cdots+f(a_7)=14$,$\therefore[(a_1-3)^3+a_1-1]+[(a_2-3)^3+a_2-1]+\cdots+[(a_7-3)^3+a_7-1]=14$,即$[(a_1-3)^3+(a_2-3)^3+\cdots+(a_7-3)^3]+(a_1+a_2+\cdots+a_7)-7=14$,$\because(a_1-3)^3+(a_2-3)^3+\cdots+(a_7-3)^3=0$,$\therefore a_1+a_2+\cdots+a_7-7=14$,$\therefore a_1+a_2+\cdots+a_7=21$,答案选$D$.

(理) 设函数$f(x)=2x-\cos x$,$\{a_n\}$是公差为$\frac{\pi}{8}$的等差数列,$f(a_1)+f(a_2)+\cdots+f(a_5)=5\pi$,则$[f(a_3)]^2-a_1a_5=$( ).

A. 0 B. $\frac{1}{16}\pi^2$ C. $\frac{1}{8}\pi^2$ D. $\frac{13}{16}\pi^2$

命题者给出的参考解答:$\because$ 数列$\{a_n\}$是公差为$\frac{\pi}{8}$的等差数列,且$f(a_1)+f(a_2)+\cdots+f(a_5)=5\pi$,$\therefore 2(a_1+a_2+\cdots+a_5)-(\cos a_1+\cos a_2+\cdots+\cos a_5)=5\pi$,$\therefore\cos a_1+\cos a_2+\cdots+\cos a_5=0$,即$2(a_1+a_2+\cdots+a_5)=2\times5a_3=5\pi$,得$a_3=\frac{\pi}{2}$,$a_1=\frac{\pi}{4}$,$a_5=\frac{3\pi}{4}$,$\therefore[f(a_3)]^2-a_1a_3=(2a_3-\cos a_3)^2-a_1a_5=\pi^2-\frac{3\pi^2}{16}=\frac{13\pi^2}{16}$,答案选$D$.

在上述参考解析中,由题设等式,马上说$(a_1-3)^2+(a_2-3)^2+\cdots+(a_7-3)^3=0$及$\cos a_1+\cos a_2+\cdots+\cos a_5=0$令人费解,本文将揭示其奥秘,还其本来面目.

(文)解法1:由$f(x)=(x-3)^3+x-1$,有$f(6-x)=[(6-x)-3]^3+(6-x)-1$,即$f(6-x)=(3-x)^3+5-x$,二方程相加得$f(x)+f(6-x)=4$,且$f(x)$单调递增,$\therefore y=f(x)$的图像有唯一对称中心$(3,2)$,$\therefore f(3)=2$,$f(a_1)+f(6-a_1)=4$,$f(a_2)+f(6-a_2)=4$,$f(a_3)+f(6-a_3)=4$,$\therefore f(a_1)+f(a_2)+f(a_3)+f(3)+f(6-a_3)+f(6-a_2)+f(6-a_1)=14$,又由已知得$f(a_1)+f(a_2)+f(a_3)+f(a_4)+f(2a_4-a_3)+f(2a_4-a_2)+f(2a_4-a_1)=14$,$\therefore f(3)+f(6-a_3)+f(6-a_2)+f(6-a_1)=f(a_4)+f(2a_4-a_3)+f(2a_4-a_2)+f(2a_4-a_1)$,$\therefore a_4=3$,$\therefore a_1+a_2+\cdots+a_7=7a_4=21$,选$D$.

解法2:$\because f(x)=(x-3)^3+x-1$,$\therefore f(6-x)=[(6-x)-3]^3+(6-x)-1$,即$f(6-x)=(3-x)^3+5-x$,二方程相加得$f(x)+f(6-x)=4$,且$f(x)$单调递增,$\therefore y=f(x)$的图像有唯一对称中心$(3,2)$,$\therefore f(3)=2$,$f(a_1)+f(6-a_1)=4$,$f(a_2)+f(6-a_2)=4$,$f(a_3)+f(6-a_3)=4$,$\therefore f(a_1)+f(a_2)+f(a_3)+f(3)+f(6-a_3)+f(6-a_2)+f(6-a_1)=14$,又$f(a_1)+f(a_2)+f(a_3)+f(a_4)+f(a_5)+f(a_6)+f(a_7)=14$,且$a_4$为数列中间项,$\therefore a_4=3$,$\therefore a_1+a_2+\cdots+a_7=7a_4=21$,故选$D$.

(理)解法1:由$f(x)=2x-\cos x$,得$f(\pi-x)=2(\pi-x)-\cos(\pi-x)$,二方程相加得$f(x)+f(\pi-x)=2\pi$,又$f'(x)=2+\sin x>0$,$\therefore f(x)$单调递增,