数根的条件,这是较为困难的.若把a视为主元,解法将会简易.

解 把a视为主元,则方程可改写为关于a的一次方程. $(x^2+4x+4)a=2x+7$,

即$a=\dfrac{2x+7}{(x+2)^2}$ ($\because x\neq -2$).

$\because a$为正整数,$\therefore \dfrac{2x+7}{(x+2)^2}\geq 1$,

即$x^2+2x-3\leq 0$,故$-3\leq x\leq 1$,

又$\because x$为整数且$x\neq -2$,

$\therefore x=-3,-1,0,1$,把它们分别代入原方程得$\begin{cases}x=-3,\\a=1,\end{cases}$ $\begin{cases}x=-1,\\a=5,\end{cases}$ $\begin{cases}x=0,\\a=\dfrac{7}{4},\end{cases}$ $\begin{cases}x=1,\\a=1.\end{cases}$

故当a=1或5时,原方程至少有一个整数解.

2.4 在特殊与一般转化中求解

例12 求证$2004^{2005}>2005^{2004}$

策略 具体数字阻碍思维,求解繁难.将此命题升格,转化为一般问题即求证: $n^{n+1}>(n+1)^n$ ($n\in N$,且$n\geq 3$),这一结论用数学归纳法便不难证明了.

例13 设$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$

$=C_n^0(x+1)^n-C_n^1(x+1)^{n-1}+\cdots+C_n^r(-1)^r(x+1)^{n-r}+\cdots+C_n^n(-1)^n$,

求$a_0+a_1+\cdots+a_n$的值.

分析 原等式易化为:

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=((x+1)-1))^n$$

$$\Rightarrow a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=x^n.$$

观察左式发现所求值恰是各项系数之和,故只须借助特殊值(令$x=1$)即可求得其值.

$a_0+a_1+a_2+\cdots+a_n=1$.

求简和转化在数学学习和解题中有着广泛的用途,应予足够的重视和强化.让学生学会在等价观念下,在辩证思维下与所学知识联系、迁移,达成求简和转化之目标.这样才能摆脱题型的束缚,提高思维素质,培养创新能力.

浅谈数学解题技巧

福建泉州慈山财经学校　　黄文质

在教学过程中,常常会发现一些学生在解决数学问题时感到心里没底,无从下手,而让宝贵的时间一分一秒地流逝.究其原因,这些学生平时对老师所讲的解题方法和技巧较少进行有序的归纳分析和总结.运用合理的解题方法,可以让我们做到有据可依,有规可循,取得事半功倍的效果.下面是笔者在多年的教学实践中,对一些常用的解题技巧作一些粗略的回顾和总结,供大家共同探讨.

1 借助熟悉的解题方法,进行正确的推理论证,以求得结论

1.1 错位相减求和

例1 证明:当n是自然数时,

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{4}\cdot\sqrt[8]{8}\cdots\sqrt[2^n]{2^n}<4.$$

分析 题中不等式的左边$=2^{\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\cdots+\frac{n}{2^n}}$,因此关键是计算

$$S_n=\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\cdots+\frac{n}{2^n}, \quad ①$$

我们先得出$2S_n=1+\dfrac{2}{2}+\dfrac{3}{4}+\cdots+\dfrac{n}{2^{n-1}}$, ②

利用错位相减法,将②式减去①式即得

$$S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{n}{2^n}$$

$$=\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{n}{2^n}=2-\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{n}{2^n}.$$

从而原式左边$=2^{2-\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{n}{2^n}}<4$.

1.2 拆项相加,添项相约

例2 证明:$\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{5}{6}\cdots\dfrac{99}{100}<\dfrac{1}{10}$.

分析 由于

$$\frac{1}{2}<\frac{2}{3},\frac{3}{4}<\frac{4}{5},\frac{5}{6}<\frac{6}{7},\cdots,\frac{99}{100}<\frac{100}{101}$$

则可令 $A=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\cdots\cdot\frac{99}{100}$,

$$B=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\frac{100}{101}.$$

从而 $AB=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{99}{100}\cdot\frac{100}{101}=\frac{1}{101}<\frac{1}{100}$.

由 $A^2<AB<\frac{1}{100}$,

即得 $A<\frac{1}{10}$.

2 重组已知条件构造辅助方程解题

在解题过程中,往往可由题设的条件构造一个新的方程,通过方程的有关知识来达到解题的效果.

例3 若 $(z-x)^2-4(x-y)(y-z)=0$, 则 x、y、z 成等差数列

分析 如果将此题的已知条件的式子展开,然后因式分解可获得证明.仔细观察已知条件,我们若将 $(z-x),(x-y),(y-z)$ 分别看作 b,a,c 则已知条件为"$b^2-4ac=0$",亦即本题可构造一元二次方程来解.

当 $x-y=0$ 时,即 $x=y$ 时,有 $x=y=z$,结论成立.

当 $x-y\neq 0$ 时,构造二次方程

$$(x-y)t^2+(z-x)t+(y-z)=0,$$

$\because \Delta=(z-x)^2-4(x-y)(y-z)=0$,

$\therefore$ 二次方程有两相等实根, $x_1=x_2=1$,

从而 $x_1x_2=\frac{y-z}{x-y}=1$, 即 $2y=x+z$,结论成立.

3 巧用对称性解题

在数学解题中,有时根据题目的数据、条件、关系等所隐含着的对称性特点,能迅速有效地解决问题,从而得到意想不到的解题效果.

例 4 设 $x>0,y>0$,求函数 $z=xy$ 在满足 $x+y=1$ 时的最大值.

分析 根据 x 与 y 的对称性,估计 $x=y=1/2$ 时,z 有最大值.为保持这种对称性,可设 $x=\frac{1}{2}-k,y=\frac{1}{2}+k(-\frac{1}{2}<k<\frac{1}{2})$.

$$z=xy=(\frac{1}{2}-k)(\frac{1}{2}+k)=\frac{1}{4}-k^2,$$

从而仅当 $k=0$ 时,即 $x=y=1/2$ 时取得最大值 1/4.

例 5 设 $0<x_i<1,x_1+x_2+\cdots+x_n=1$, 求 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2$ 的最小值.

分析 由 x_i 对称性猜想 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 时获得最小值.而根据对称性可设

$x_i=\frac{1}{n}+e_i(-\frac{1}{n}<e_i<1-\frac{1}{n})$, 则

$$\begin{aligned}&x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\\&=(\frac{1}{n^2}+e_1^2+\frac{2e_1}{n})+(\frac{1}{n^2}+e_2^2+\frac{2e_2}{n})+\cdots\\&\qquad+(\frac{1}{n^2}+e_n^2+\frac{2e_n}{n})\\&=\frac{n}{n^2}+\sum_{i=1}^{n}e_i^2+\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}e_i.\end{aligned}$$

由条件 $x_1+x_2+\cdots x_n=1$ 得 $1+\sum_{i=1}^{n}e_i=1$,

故 $\sum_{i=1}^{n}e_i=0$ 于是 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=\frac{1}{n}+\sum_{i=1}^{n}e_i^2$ 唯有 $e_i=0$ 即 $x_i=1/n(i=1,2,\cdots,n)$, 时,才取得最小值 $1/n$.

综上所述,解题是思考、探索和创造的过程,只要我们善于发现和捕捉其中的"亮点",并注意挖掘利用,困惑迷茫之时也许会步入"柳暗花明"的境地.

参考文献

[1] 沈翔.数学新题型研究.上海华东师范大学出版社 2003.

[2] 戴再平.数学方法与解题研究.北京高等教育出版社.1996.