利用定点巧解数学问题

河北大城一中　刘卫东

我们知道直线的点斜式 $y-y_0=k(x-x_0)$，无论 k 取什么值，直线恒过定点 (x_0, y_0)；直线的斜截式 $y=kx+b$，无论 k 取什么值，直线恒过定点 $(0,b)$. 通过直线的这两种形式，我们发现无论斜率 k 怎样变化，直线始终过定点. 利用直线恒过定点解决问题，可使问题简单化.

代数中的指数函数 $y=a^x(a>0$ 且 $a\neq 1)$ 的图象过定点 $(0,1)$，对数函数 $y=\log_a x$ $(a>0$ 且 $a\neq 1)$ 的图象过定点 $(1,0)$，也可以通过这样的过定点问题解决不等式问题.

对于直线的斜率公式，我们也可以发现动点与定点连线的斜率变化，从而用来解决线性规划问题.

看来我们接触过的"定点"还真不少！下面笔者将通过三种途径来阐述利用定点如何巧解问题.

1. 带有参数的直线过定点问题即直线系.

带有参数的直线，将直线化为点斜式或者斜截式的形式，得到直线过定点，利用过定点解决问题使问题简单化.

例 1　已知直线 $l: 5ax-5y-a+3=0$.

(1) 求证：不论 a 为何值，直线 l 总经过第一象限；

(2) 为使直线不经过第二象限，求 a 的取值范围.

分析　(1) 直线 $l: 5ax-5y-a+3=0$ 恒过定点，过定点的求法有两种方法，一种是将直线化为点斜式，即有 a 的放在一起，没 a 的放在一起，即可求出；另一种给 a 取值列方程组求定点.

(2) 为使直线不经过第二象限，由(1)知直线过定点且在第一象限，画出图象，则我们只要保证该直线由从过原点的直线一直旋转到垂直于 x 轴为止.

解　(1) **方法一：**由题意，直线可化为 $a(5x-1)-5y+3=0$，则 $\begin{cases}5x-1=0,\\5y-3=0,\end{cases}$ 解之得 $\begin{cases}x=\frac{1}{5},\\y=\frac{3}{5},\end{cases}$ 即点 $\left(\frac{1}{5},\frac{3}{5}\right)$，

所以直线 l 过定点 $\left(\frac{1}{5},\frac{3}{5}\right)$，此点在第一象限.

故无论 a 为何值时，直线 l 总经过第一象限.

方法二：由题意知，可给 a 任意取值，

当 $a=0$ 时，$-5y+3=0$ 即 $y=\frac{3}{5}$，　①

当 $a=1$ 时，$5x-5y+2=0$，　②

由①②解得 $\begin{cases}x=\frac{1}{5},\\y=\frac{3}{5},\end{cases}$ 即点 $\left(\frac{1}{5},\frac{3}{5}\right)$，

所以直线 l 过定点 $\left(\frac{1}{5},\frac{3}{5}\right)$，此点在第一象限.

故无论 a 为何值时，直线 l 总经过第一象限.

(2) 由(1)知道无论 a 为何值时，直线恒

过定点$\left(\frac{1}{5},\frac{3}{5}\right)$，由图 1 知，$k_{OP}=\frac{\frac{3}{5}}{\frac{1}{5}}=3$.

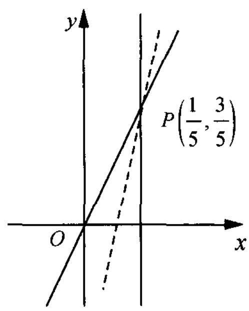

图 1

故 a 的取值范围是$[3,+\infty)$.

2. 代数中有很多函数的图象也过定点，比如指数函数和对数函数.

例 2 函数 $y=\log_a(x-1)+1(a>0,a\neq1)$的图象恒过定点 M，且点 M 在直线 $y=mx+n$ 上，其中 $m>0,n>0$，则$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$的最小值为________.

分析 对数函数 $y=\log_a x(a>0$ 且 $a\neq0)$恒过恒过定点$(1,0)$，函数 $y=\log_a(x-1)+1(a>0,a\neq1)$的图象是由对数函数 $y=\log_a x$向右平移 1 个单位，再向上平移 1 个单位，即函数 $y=\log_a(x-1)+1(a>0,a\neq1)$的图象恒过定点 $M(2,1)$.

解 由题意知，函数 $y=\log_a(x-1)+1(a>0,a\neq1)$的图象恒过定点 $M(2,1)$.

点 $M(2,1)$在直线 $y=mx+n$ 上，即 $2m+n=1$.

又 $m>0,n>0$，则

$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)(2m+n)=3+\frac{n}{m}+\frac{2m}{n}\geqslant3+2\sqrt{2}$（当且仅当$\frac{n}{m}=\frac{2m}{n}$，即 $n=\sqrt{2}m=\sqrt{2}-1$ 时，取最小值）.

所以$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$的最小值 $3+2\sqrt{2}$.

变式 函数 $y=a^{1-x}(a>0,a\neq1)$的图象恒过定点 A，若点 A 在直线 $mx+ny-1=0(m,n>0)$上，求$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$的最小值.

3. 直线的斜率变形中也会遇到定点与任意一点连线的斜率问题.

例 3 已知$\begin{cases}x-y+2>0,\\x+y-4>0,\\2x-y-5<0,\end{cases}$设 $z=\frac{y+1}{x+1}$，求 z 的取值范围.

分析 此题是针对线性规划的平面区域问题而言的，首先要画出可行域，再对目标函数 z 进行变形得到，目标函数 z 是可行域内的点与定点 $P(-1,-1)$连线的斜率的范围.

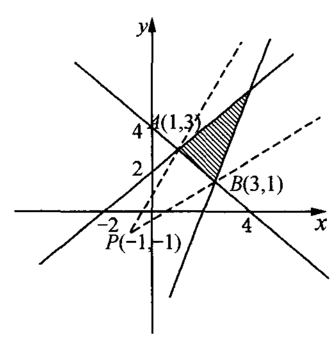

图 2

解析 由题意得 $z=\frac{y+1}{x+1}=\frac{y-(-1)}{x-(-1)}$

目标函数 z 是定点 $P(-1,-1)$与可行域内的点的连线的斜率.

$k_{PB}=\frac{1}{2}$，$k_{PA}=2$，故$\frac{1}{2}\leqslant z\leqslant2$.

综上，我们发现过定点问题在高中阶段解题中占有十分重要的地位，而许多数学问题的解决，利用过定点，可使问题转向简单化，希望同学们能够更好地利用与过定点有关的思维方式去思考问题，解决问题.