

错 在 哪 里?

1 南京市大厂高级中学

雷亚庆 (邮编:210044)

题 1 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = n^2 - an$,
若数列 $\{a_n\}$ 是单调递增数列,求 a 的取值范围

错解 $\because a_n = n^2 - an$,

\therefore 可以把 a_n 看成是关于 n 的二次函数,配方得:

$$a_n = n^2 - an = \left(n - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4},$$

又因为数列 $\{a_n\}$ 是单调递增数列,

$$\text{所以 } a_n = n^2 - an = \left(n - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} \text{ 在 } n \geq$$

1 时单调递增. 所以 $\frac{a}{2} \leq 1$, 即 $a \leq 2$.

解答错了,错在哪里?

错因分析 上述解法中利用数列是特殊的函数,然后用函数的单调性来解决数列的单调性的思路总体上是没有任何问题的.但是忽略了一点就是:数列是离散型的函数,它与我们同学们熟悉的连续型二次函数的单调性是有差异的.上述解法中体现的只是问题的一种情况,所得结果只是“数列 $\{a_n\}$ 是单调递增数列”的一个充分非必要条件.事实上当 $1 < \frac{a}{2} < 1.5$ 时也是满足题意的.

正解 1 因 $a_n = n^2 - an = \left(n - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4}$ 且
数列 $\{a_n\}$ 是单调递增数列,所以 $\frac{a}{2} < 1.5$,即 $a < 3$,

故 a 的取值范围是 $(-\infty, 3)$.

正解 2 由题意 $a_n < a_{n+1}$ 对任意的 $n \geq 1$ 且
 $n \in \mathbf{N}^*$ 都成立,所以 $n^2 - an < (n+1)^2 - a(n+1)$

1) 对任意的 $n \geq 1$ 且 $n \in \mathbf{N}^*$ 都成立,分离参数得
 $a < 2n+1$ 对任意的 $n \geq 1$ 且 $n \in \mathbf{N}^*$ 都成立;因
为 $n=1$ 时, $2n+1$ 有最小值为3.

故 $a < 3$,即 a 的取值范围是 $(-\infty, 3)$.

2 江苏省海州高级中学

刘希栋 (邮编:222023)

题 正四面体 $S-ABC$ 的棱长为 a (图1),
求能将该正四面体包裹的圆形纸的最小半径.

解 如图2,将棱长为 a 正四面体 $S-ABC$
分别沿 AC 、 SC 、 SA 展开,得边长为 $2a$ 的正三角
形 $BB'B''$,圆形纸为该三角形外接圆时面积最
小,故能将棱长为 a 正四面体 $S-ABC$ 包裹的最
小圆形纸的半径为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}a$.

解答错了,错在哪里?

乃是“展平”惹的错,圆形纸并不必覆
盖 $\triangle BB'B''$.

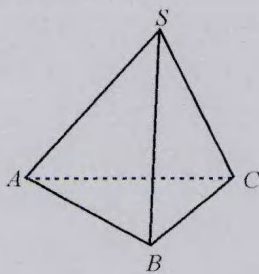


图1

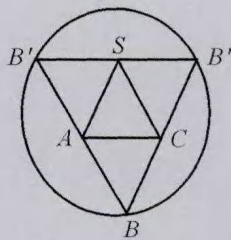


图2

实际上,若将该正四面体中的面 ABC 沿 AC
展开,将面 SBC 分别沿 BC 与 SC 展开,将面 SAB
分别沿 AB 与 SA 展开.如图3,其中 D_1 、 D_2 、 D_3 、
 D_4 分别为对应线段的中点,可以发现(以面 SBC
为例):沿 BC 展平的区域①和②分别对应沿 SC
展平的区域①和②,以 AC 中点 O 为圆心, $OD =$

a 为半径的圆纸就能包裹该正四面体, 所需圆形纸半径最小为 a .

本题也可直接从正四面体考虑, 将圆形纸片的圆心放在一条棱的中点(如 AC 中点 O), 此时半径为 a 的圆形纸能而且恰好刚刚能包裹该正四面体(如图 4).

提醒注意: “展平”是处理某些立体几何问题的一种有效方法, 但需防止因想当然地随意展平

而造成失误与偏差.

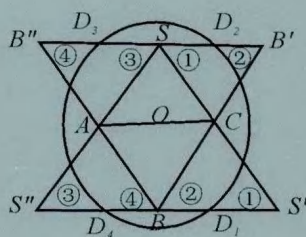


图3

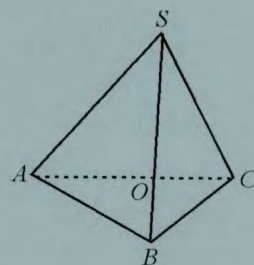


图4

欢迎订阅《中学数学教学》

全国优秀科技期刊 中国期刊方阵双效期刊

邮发代号 26-7 全国各地邮局均可订阅

《中学数学教学》始终坚持质量第一, 坚持全心全意为推动教学改革, 为提高中学数学质量服务的办刊方针。紧扣中学数学教学实际, 突出“新颖、实用、指导、资料”八字特色, 主要栏目有聚焦新课程、教学参考、解题方法、复习考试、新题点评、初数研究、错在哪里等, 内容详实, 印刷精美。

本刊为双月刊, 大 16 开 64 页, 每逢双月 15 日出版。每期定价 6.5 元, 全年 39 元。邮发代号 26-7, 全国邮局(所)均可订阅, 也可直接向编辑部订购, 我们将竭诚为您服务。

编辑部地址: 合肥市金寨路 327 号合肥师范学院

邮 编: 230061

电 话: 0551-62836265

电子邮箱: zsjxhf@sina.com

网 址: <http://zsjx.cbpt.cnki.net/>

我刊已入网“万方数据——数字化期刊群”和“中国学术期刊网”, 全文资料已入网, 若有异议, 请在来稿中注明或向我刊编辑部咨询。

编辑出版 《中学数学教学》编辑部

地 址 合肥市金寨路 327 号合肥师范学院

邮 编 230061 电 话 0551-62836265

E-mail zsjxhf@sina.com

印 刷 中国科学技术大学印刷厂

总 发 行 安徽省邮政报刊发行局

发行范围 国内外公开发刊

ISSN 1002-4123



本期责任编辑

张新全

订 阅

全国各地邮局

邮 订 代 号

26-7