中学数学解题中的通解与巧解探析

甘 娜

西南大学数学与统计学院 400715

摘 要:本文通过列举实例,初步探索了通解和巧解的关系——通解是巧解的基础,巧解是通解的升华,只谈通解不谈巧解,我们的解题教学就只是简单的模仿训练,就不会有变式更不会有创新;只谈巧解不谈通解,就如同空中楼阁,只是假象无实际意义.所以我们认为,只有在熟练掌握通解的基础上,才能逐渐形成巧解的直觉.本文旨在帮助学生开拓思维,形成变通,让学生体验由"通"到"巧"的思维过程.

关键词:善于解题;通解;巧解

G·波利亚在《数学的发现》序言中指出:"中学数学教学的首要任务就是加强解题训练","掌握数学就意味着善于解题".怎样才能算善于解题呢?是指既要掌握体现一般规律的基本方法(即通解),又要能具体问题具体分析,触类旁通利用知识间的联系解决问题(即巧解).在中学数学解题教学中教师往往较重视一般解法,以做到稳中求胜,而在更多时候忽视了追求数学解题的更高境界,即追求数学思维的灵活性与变通性.在中学解题教学中,我们应当适时的引导学生具体问题具体分析,在掌握通法的同时寻求问题的特殊性与普遍性的联系,从而训练学生的思维,使其感悟数学的精神.下面我们通过几个具体的例子作进一步探析.

例1 $f(x)=\sqrt{1+x^2}$,$a,b\in\mathbf{R}^+$且$a\neq b$,求证:$|f(a)-f(b)|<|a-b|$.

法一 $|f(a)-f(b)|=|\sqrt{1+a^2}-\sqrt{1+b^2}|=\dfrac{|a^2-b^2|}{\sqrt{1+a^2}+\sqrt{1+b^2}}<\dfrac{|a^2-b^2|}{|a|+|b|}=\dfrac{|a+b|\cdot|a-b|}{|a|+|b|}\leqslant|a-b|$.

结论得证.

法二 构造双曲线$y^2-x^2=1(y>0)$,由双曲线的几何意义:

对任意的$x_1,x_2\in\mathbf{R}$,且$x_1\neq x_2$有$\dfrac{|f(x_1)-f(x_2)|}{|x_1-x_2|}<1$,

所以$|f(a)-f(b)|<|a-b|$.

法三 由a,b的对称性,不妨设$a<b$,构造如图1所示的直角三角形:

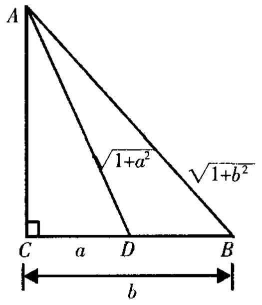

图1

由构成三角形的条件$||AB|-|AD||<|BD|$,即$|\sqrt{1+a^2}-\sqrt{1+b^2}|<|a-b|$得出$|f(a)-f(b)|<|a-b|$,当$a>b$时结论仍然成立.

法四 令$m=(1,a)$,$n=(1,b)$得出$m-n=(0,a-b)$,$(a\neq b)$得出$|m-n|=|a-b|$.又由构成三角形的条件$||m|-|n||<|m-n|$可得$|f(a)-f(b)|<|a-b|$.

解析 法一思维较常规,先将$|f(a)-f(b)|$表达出来,再利用不等式的缩放技巧,证得结果成立,其思维过程大多数人能想到,但难点在于放缩的过程,易错且不容易想到.而其他三种方法,思维方法都独特新颖,其本质都是数形结合.法二,将$f(x)$变形,发现$f(x)$的图象是双曲线的上半支,利用双曲线半支上的任意两点间的斜率与渐近线斜率之间的关系,将不等式证明成功转化为两点间斜率的绝对值的取值范围问题;题眼在于对$f(x)$变形,且能及时联系双曲线一支上点的性质.法三,则是从问题入手,观察发现要证的是差的绝对值小于某个可以看成长度的式子,自然联想到三角形的三边关系,构造三角形的思路就自然形成了,当然放在直角三角形去研究是最简单的.法四,与法三实际上是异曲同工,三角形可以看成是首尾相接的三个向量连接而成的,将图形与向量结合起来考虑,这四种不同的方法分别从不同的方面将学生的思维加以拓宽.

例2 对任意的$n\in\mathbf{N}_+$,求证:

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<4$.

法一

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=C_n^0+C_n^1\cdot\frac{1}{n}+\cdots+C_n^k\frac{1}{n^k}+\cdots+C_n^n\frac{1}{n^n}=1+n\times\frac{1}{n}+\frac{1}{2}\times1\times\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{2\times3}\times1\times\left(1-\frac{1}{n}\right)\times\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{k!}\times1\times\left(1-\frac{1}{n}\right)\times\left(1-\frac{2}{n}\right)\times\cdots\times\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\cdots+\frac{1}{n!}\times1\times\frac{(n-1)!}{n^{n-1}}<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}=3-\frac{1}{2^{n-1}}<3.$$

得出 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<4$.

法二 $\frac{1}{4}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+1+\frac{1}{n}+\ldots+1+\frac{1}{n}}{n+2}\right)^{n+2}=1$ 得出：$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<4$.

解析 法一的思维过程较为常规，利用二项式展开式，再逐项缩放，使和式最终放为一个可以求解的和，即等比数列的前$n-1$项和. 整个求解过程的难点在于对$\frac{1}{k!}\times1\times\left(1-\frac{1}{n}\right)\times\left(1-\frac{2}{n}\right)\times\cdots\times\left(1-\frac{k-1}{n}\right)<\frac{1}{k!}\times1\times1\times\cdots\times1<\frac{1}{k!}\times1\times\frac{k}{2}\times\frac{k-1}{2}\times\cdots\times\frac{2}{2}<\frac{1}{2^{k-1}}$ $(k>1,k\in Z)$ 的缩放过程，不易想到缩放为一等比数列. 而法二，则通过配凑再利用均值不等式的推广公式巧妙简洁地将问题解决，使原本很繁琐的证明通过整体的思想仅用几个步骤便得以证明.

例3

解方程$\sqrt{x^2+3x+4}+\sqrt{x^2-3x+4}=6$.

法一 移项得$\sqrt{x^2+3x+4}=6-\sqrt{x^2-3x+4}$，平方得$x-6=-2\sqrt{x^2-3x+4}$；再通过平方化简可以求得$x=\pm\frac{\sqrt{60}}{3}$.

法二 由等差数列的定义，将3看成$\sqrt{x^2-3x+4}$和$\sqrt{x^2+3x+4}$的等差中项，设公差为d,则有:

$$\begin{cases}\sqrt{x^2-3x+4}=3-d, ①\\ \sqrt{x^2+3x+4}=3+d, ②\end{cases}$$

再根据两根式中的相同部分，将方程①,②两边平方，再两式相减，解出$d=\frac{1}{2}x$，代回①或②式，可以解得$x=\pm\frac{\sqrt{60}}{3}$.

解析 诚然法二和法一究其本质是一样的，但是从思路这个角度来讲法二比起法一更具创新性，结合到等差数列的性质以及椭圆及其标准方程的化简启发，注重了对知识的迁移，体现了较高的思维价值，对解决有些更复杂的问题更具有参考价值.

例4 已知$\cos\alpha+2\sin\alpha=-\sqrt{5}$，求$\tan\alpha$的值.

法一

解方程组$\begin{cases}\cos\alpha+2\sin\alpha=-\sqrt{5},\\ \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,\end{cases}$

得$\cos\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\sin\alpha=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

所以$\tan\alpha=2$.

法二 令$\tan\alpha=x$，由题可知α是第三象限角，不妨设：$\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$.

构造直角三角形如图2所示：

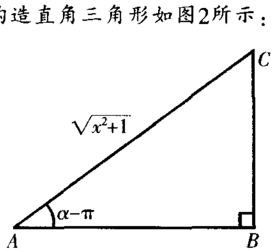

图2

则有：$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}+2\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\sqrt{5}$

解得：$x=2$，即$\tan\alpha=2$.

法三 由$\cos\alpha+2\sin\alpha=-\sqrt{5}$，可得$\frac{\cos\alpha}{\sqrt{5}}+\frac{2\sin\alpha}{\sqrt{5}}=-1$，$\cos(\alpha-\beta)=-1$，其中$\tan\beta=2$，所以$\alpha-\beta=(2k+1)\pi$，于是$\tan\alpha=\tan\beta=2$.

解析 法一直接利用三角恒等式联立方程组，通过解方程组得出结果，是常用方法，对思维的要求不高. 但是，二元二次方程组计算量较大，有时还会出现两个解的情况，讨论起来比较麻烦也容易出现计算性错误，具有一定的局限性. 法二则是回归到三角函数和直角三角形的关系中，结合勾股定理巧妙地将三角函数求值问题转化到代数式求值问题. 但是，这种方法带有特殊性，在使用时一定要注意角的范围，做题时一定要具体情况具体分析. 法三，则是将等式右边化为特殊的三角函数值，结合常用的三角函数公式，巧妙地避开了对角的讨论，化简起来也相当方便，对于解决这一类问题都是行之有效的！

其实，只要细心地研究每年高考数学试题，不难发现，高考试题中所考查的解题方法都在通法的范围内，但也不排除用巧法来解决问题. 通法的思想顺乎一般规律，其操作过程易于掌握，中下生欢迎它. 他们觉得通法自然、流畅、易于理解，但是其思维本质是定式思维. 而巧法则是思维的升华，“在反复考虑一个问题之后，突然得到了一个巧妙的想法，头脑中掠过一道灵光，顿时觉得豁然开朗，我们仿佛看到了太阳，有一种无法言语的快乐”这个过程培养了学生数学能力，增加了数学感觉. 所以我们在教学过程中需要强调的是：每个学生都应该掌握各类数学题的通法，但同时也要适度地掌握一些“特技”，提倡让学生们从通法的回顾和反思中，去自然地发现和提炼“巧法”. 这样既进行了思维铺垫，创设了思维情景、暴露了思维过程，培养了思维能力，又利于学生从大量烦琐的运算中解脱出来，进一步优化学生的思维品质，培养学生的求简意识和创新能力.