# 初中数学几类问题的巧解

贵州省赤水市第五中学　(564700)　刘开书

## 一、一元一次不等式组解集的确定

### (一) 数轴法

运用数轴法确定一元一次不等式组的解集，首先将不等式组中的每一个不等式的解集在数轴上表示出来，然后找出其公共部分，这个公共部分就是原不等式组的解集. 没有公共部分，则表示原不等式组无解.

这种用数轴法确定一元一次不等式组的解集，体现了数形结合的思想，既直观又明了，且易于掌握.

**例 1**　不等式组 $\begin{cases}2x-1>0 ①\\x-4>0 ②\end{cases}$ 的解集是________.

**解**　解不等式①，得 $x>\frac{1}{2}$. 解不等式②，得 $x>4$. 在数轴上表示不等式①、②的解集，如图 1. 所以，不等式组的解集是 $x>4$.

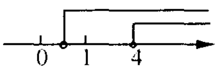

图 1

**例 2**　不等式组 $\begin{cases}3x<8+x ①,\\x-2<3 ②\end{cases}$ 的解集是________________.

**解**　解不等式①，得 $x<4$. 解不等式②，得 $x<5$. 在数轴上表示不等式①，②的解集，如图 2. 所以，不等式组的解集是 $x<4$.

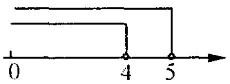

图 2

**例 3**　解不等式组 $\begin{cases}2x-7<3(1-x) ①,\\\frac{4}{3}x+3\geqslant 1-\frac{2}{3}x ②.\end{cases}$

**解**　解不等式①，得 $x<2$. 解不等式②，得 $x\geqslant -1$. 在数轴上表示不等式①，②的解集，如图 3. 所以，不等式的解集是 $-1\leqslant x<2$.

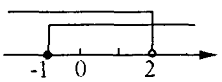

图 3

**例 4**　不等式组 $\begin{cases}x+3>5 ①,\\-2x>2 ②\end{cases}$ 的解集是________.

A. $x>2$　B. $x<-1$　C. $-1<x<2$　D. 无解

**解**　解不等式①，得 $x>2$. 解不等式②，得 $x<-1$. 在数轴上表示不等式①，②的解集，如图 4. 所以，不等式组无解，故选 D.

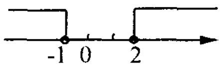

图 4

### (二) 口诀法

运用口诀法，就是将不等式组经过整理、化简后，根据“同大取大；同小取小；大若小，小若大，取中间；大若大，小若小，无解”这四句口诀确定解集的方法. 这种方法容易理解. 便于记忆，使用起来也显得十分方便.

**例 5**　不等式组 $\begin{cases}3x-2>0 ①,\\11-2x<2 ②\end{cases}$ 的解集为________，

**解**　原不等式组经过整理，化简为 $\begin{cases}x>2/3,\\x>9/2.\end{cases}$ 由“同大取大”知，不等式组的解集为 $x>9/2$.

**例 6**　不等式组 $\begin{cases}-3x\geqslant 2,\\x+3<0\end{cases}$ 的解集是________.

**解**　原不等式组经过整理，化简为 $\begin{cases}x\leqslant -2/3,\\x<-3.\end{cases}$ 由“同小取小”知，不等式组的解集为 $x<-3$.

**例 7**　解不等式组 $\begin{cases}5x-1<3(x+1)\\\frac{2x-1}{3}-\frac{5x+1}{2}\leqslant 1.\end{cases}$

**解**　原不等式组经过整理，化简为 $\begin{cases}x<2.\\x\geqslant -1.\end{cases}$ 由“大若小，小若大，取中间”知，不等式组的解集为 $-1\leqslant x<2$.

**例 8**　不等式组 $\begin{cases}2x+3\leqslant 5,\\3x-2>4\end{cases}$ 的解集是________.

A. $x \leqslant 1$　　B. $x > 2$

C. $1 \leqslant x < 2$　　D. 无解

解　原不等式经过整理，化简为$\begin{cases} x \leqslant 1, \\ x > 2. \end{cases}$由"大若大，小若小，无解"知，不等式组无解.

## 二、巧解与角平分线有关的一类组合题

### （一）角平分线与平行线的融合

1. 当题中出现与角平分线相交的平行线时，找等腰三角形过渡证题

例 9　如图 5，已知 $\triangle ABC$ 中，$I$ 是角平分线 $BE$ 和 $CF$ 的交点，$MN$ 经过 $I$，平行于 $BC$ 且与 $AB$ 交于点 $M$，与 $AC$ 交于点 $N$，求证：$MN = BM + CN$.

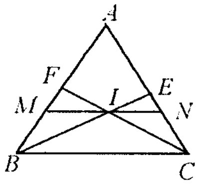

图 5

分析　平行线 $MN$ 与角平分线 $BE$、$CF$ 均相交于点 $I$，得二等腰 $\triangle MBI$ 和 $\triangle NCI$. 于是 $BM = MI$，$CN = IN$，故 $MN = MI + IN = BM + CN$.（本文只给出分析，不予证明）

2. 添设角平分线构造等腰三角形过渡证题

例 10　如图 6，$\triangle ABC$ 中，$I$ 为内心，且 $ID \parallel AB$，$IE \parallel AC$，分别交 $BC$ 于点 $D$、$E$. 求证：(1) $\triangle IDE$ 的周长等于 $BC$；(2) $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{EC}$.

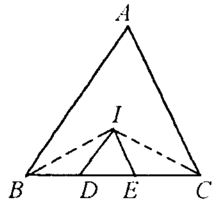

图 6

分析　依 $I$ 为 $\triangle ABC$ 内心，连结 $IB$、$IC$ 使隐形的角平分线显形化. 则由等腰 $\triangle DBI$ 和 $\triangle ECI$ 达到等量线段的转化. 又 $\triangle ABC \backsim \triangle IDE$，则以上两个问题都可获证.

3. 添设平行线构造等腰三角形过渡证题

例 11　如图 7，$\triangle ABC$ 中，$AD$ 为角平分线，过 $D$ 点作直线 $EF$ 交 $AB$ 于 $E$ 点，交 $AC$ 的延长线于 $F$ 点. 求证：$\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} = \frac{1}{AE} + \frac{1}{AF}$.

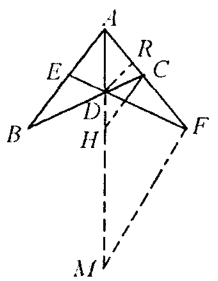

图 7

分析　分别过 $D$、$C$、$F$ 作 $DR \parallel AB$ 交 $AC$ 于 $R$，$CH \parallel AB$，$FM \parallel AB$ 分别交 $AD$ 的延长线于 $H$，$M$. 因为 $AD$ 是角平分线，结合平行线可得 $HC = AC$，$MF = AF$，且 $\frac{DR}{AB} + \frac{DR}{HC} = \frac{CR}{AC} + \frac{AR}{AC} = 1$，即 $\frac{1}{AB} + \frac{1}{HC} = \frac{1}{DR}$. 同理 $\frac{1}{AE} + \frac{1}{MF} = \frac{1}{DR}$，所以 $\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} = \frac{1}{AE} + \frac{1}{AF}$.

### （二）三角形内、外角平分线的融合

将三角形内外角平分线融合构成直角.

例 12　如图 8，$\angle BCA$ 的平分线与 $AB$ 相交于 $E$，作 $EG \parallel BC$ 与 $\angle BCA$ 的外角 $\angle ACD$ 的平分线交于点 $G$，与 $AC$ 相交于点 $F$. 求证：点 $F$ 为 $\triangle CEG$ 的外心.

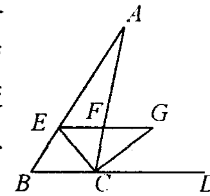

图 8

分析　由 $CE$ 与 $CG$ 分别为内外角平分线得 $\angle ECG = 90°$. 又由等腰 $\triangle FEC$ 和 $\triangle FCG$ 知 $EF = FC = FG$，得 $F$ 为 $EC$ 中点，显然，$F$ 为 $Rt\triangle EGC$ 的外心.

### （三）角平分线与垂线的融合

当题中出现与角平分线垂直的线段时，通常延长垂线或角的边来构造等腰三角形.

例 13　如图 9，$\triangle ABC$ 中，过 $B$ 作 $\angle A$ 的平分线 $AD$ 的垂线，垂足为 $E$，$M$ 是 $BC$ 的中点，连结 $EM$，并延长交 $AB$ 于 $F$. 求证：$EF = AB/2$.

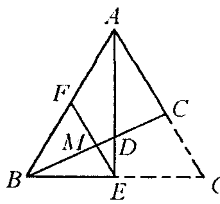

图 9

分析　分别延长 $BE$ 与 $AC$ 交于点 $G$，得

$\left.\begin{cases} \text{等腰 } \triangle ABG \\ EM \text{ 为 } \triangle BCG \text{ 的中位线} \end{cases}\right\}$进而得 $EF$ 为 $\triangle BAG$ 中位线，于是 $EF = AG/2 = AB/2$.

### （四）三角形内角平分线与外接圆的融合

例 14　如图 10，$\triangle ABC$ 中，$E$ 是内心，$\angle A$ 的平分线和 $\triangle ABC$ 外接圆相交于点 $D$，与边 $BC$ 相交于点 $F$. 求证：(1) $DE = DB$；(2) $DE$ 是 $AD$ 和 $FD$ 的比例中项.(3) $AF^2 = AB \cdot AC - BF \cdot FC$.

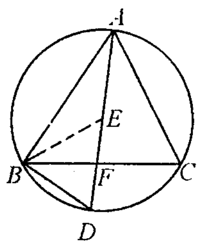

图 10

分析　连结 $BE$，由 $E$ 为内心，结合圆周角定理推论等得：$\angle BED = \angle EBA + \angle BAE = \angle EBF + \angle EAC = \angle EBF + \angle CBD = \angle EBD$. 所以 $DB = DE$. 将(2)转化为证明 $BD^2 = AD \cdot FD$，由 $\triangle BFD \backsim \triangle ABD$，即可证得. 又 $\triangle ABD \backsim \triangle AFC$，则 $AB \cdot AC = AF \cdot AD$. 而 $BF \cdot FC = AF \cdot FD = AF(AD - AF) = AF \cdot AD - AF^2$. 所以 $AF^2 = AF \cdot AD - BF \cdot FC = AB \cdot AC - BF \cdot FC$.

## 三、解探索型题

**例15**　如图11，$AB$、$AC$分别是圆$O$的直径和弦，$D$为劣弧$\overset{\frown}{AC}$上一点，$DE \perp AB$于点$H$，交圆$O$于点$E$，交$AC$于点$F$，$P$为$ED$的延长线上一点，当$\triangle PCF$满足什么条件时，$PC$与圆$O$相切，为什么?

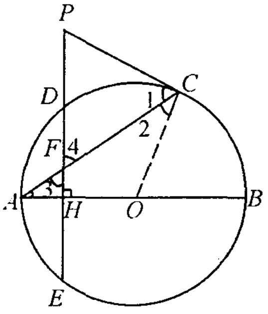

图11

**解**　当$PC = PF$(或$\angle PCF = \angle PFC$，$\triangle PCF$为等边三角形)时，$PC$与圆$O$相切.

**证明**　探索条件题的解法类似于解析法，假定结论成立，逐步探索其成立的条件. 连结$OC$，则$\angle 2 = \angle A$. 因为$PC = PF$，所以$\angle 1 = \angle 4$. 因为$\angle 3 = \angle 4$，所以$\angle 1 = \angle 3$. 因为$DE \perp AB$于$H$，所以$\angle A + \angle 3 = 90°$，所以$\angle 1 + \angle 2 = 90°$，即$OC \perp PC$，所以$PC$与圆$O$相切.

**例16**　如图12，以等腰$\triangle ABC$的一腰$AB$为直径的圆$O$交$BC$于$D$，过$D$作$DE \perp AC$于$E$，可得结论：$DE$是圆$O$的切线. 问：若点$O$在$AB$上向点$B$移动，以$O$为圆心，$OB$长为半径的圆仍交$BC$于$D$. $DE \perp AC$的条件不变，那么上述结论是否还成立?请说明理由.

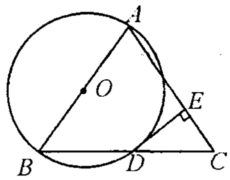

图12

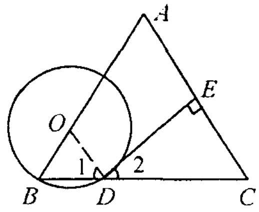

图13

**解**　探索结论题的解法是：根据条件，结合已学的知识、数学思想方法，通过分析、归纳逐步得出结论，或通过观察、实验、猜想、论证的方法求解. 结论仍然成立，如图13.

**证明**　连结$OD$，因为$OB = OD$，所以$\angle B = \angle 1$. 因为$AB = AC$，所以$\angle B = \angle C$. 所以$\angle 1 = \angle C$，所以$OD \parallel AC$. 因为$DE \perp AC$，所以$DE \perp OD$，所以$DE$为圆$O$的切线.

# 例析探求二次函数解析式的若干方法

贵州省遵义忠庄初级中学　(563000)　胡世刚

## 一、三点型

**例1**　已知：如图1，抛物线过$A$、$B$、$C$三点，顶点为$D$，且与$x$轴的另一个交点为$E$. 求抛物线的解析式.

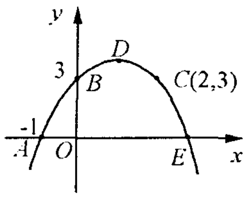

图1

**解**　设解析式为$y = ax^2 + bx + c$，由图象可知，抛物线经过$A(-1,0)$、$B(0,3)$、$C(2,3)$三点.

所以$\begin{cases} 0 = a - b + c, \\ 3 = c, \\ 3 = 4a + 2b + c, \end{cases}$　解得$\begin{cases} a = -1, \\ b = 2, \\ c = 3. \end{cases}$

所以抛物线的解析式为$y = -x^2 + 2x + 3$.

## 二、顶点型

若已知抛物线的顶点坐标或对称轴方程，则可用顶点式$y = a(x-b)^2 + k$.

**例2**　已知抛物线的顶点为$(1,2)$，并且经过点$(2,\frac{5}{2})$，求它的解析式.

根据题设特征，可用顶点式求解，设它的解式为$y = a(x-1)^2 + 2$，把点$(2,\frac{5}{2})$的坐标代入，得$\frac{5}{2} = a(2-1)^2 + 2$，所以$a = \frac{1}{2}$. 所以抛物线的解析式为$y = \frac{1}{2}(x-1)^2 + 2$，即$y = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{5}{2}$.

若用一般式求解，可设它的解析式为$y = ax^2 + bx + c$，由题设得方程组$\begin{cases} -\frac{b}{2a} = 1, \\ \frac{4ac - b^2}{4a} = 2, \\ 4a + 2b + c = \frac{5}{2}. \end{cases}$　解之，得$a$