# 寻找另一半

北京市丰台第二中学　甘志国

都说人是不完整的，存在着另一半需要你去寻找，数学上也有着这样的奇观.

**例 1**　计算：(1) $\sin^2 20°+\cos^2 80°+\sqrt{3}\sin 20°\cos 80°$；

(2) $\sin 10°\sin 50°\sin 70°$.

**解**　(1) 设 $A=\sin^2 20°+\cos^2 80°+\sqrt{3}\sin 20°\cos 80°$.

构造 $A$ 的对偶式 $B=\cos^2 20°+\sin^2 80°-\sqrt{3}\cos 20°\sin 80°$，得

$$\begin{cases}A+B=2-\sqrt{3}\sin 60°=\dfrac{1}{2},\\ A-B=\cos 160°-\cos 40°+\sqrt{3}\sin 100°=0,\end{cases}$$

所以 $A=B=\dfrac{1}{4}$.

即原式 $=\dfrac{1}{4}$.

(2) 设 $x=\sin 10°\sin 50°\sin 70°$，构造 $x$ 的对偶式 $y=\cos 10°\cos 50°\cos 70°$，得

$$\begin{aligned}xy&=\sin 10°\cos 10°\sin 50°\cos 50°\sin 70°\cos 70°\\&=\frac{1}{8}\sin 20°\sin 100°\sin 140°\\&=\frac{1}{8}\cos 10°\cos 50°\cos 70°\\&=\frac{1}{8}y,\end{aligned}$$

又 $y\neq 0$，所以 $x=\dfrac{1}{8}$.

这种根据题中某式 $A$ 的结构特征，构造 $A$ 的对偶式 $B$，再利用 $A$ 与 $B$ 之间的运算(主要是加、减、乘)求得 $A,B$ 的两种关系式，从而使问题获得解决，这种方法就叫做构造对偶式解题.

常见的对偶式有 $a+b$ 与 $a-b$，$ab$ 与 $\dfrac{a}{b}$，$\sin x$ 与 $\cos x$，$\dfrac{a^n}{a+b}$ 与 $\dfrac{a^n}{a-b}$ 等等. 下面我们再来欣赏几道题的解题思路.

**例 2**　(1) 求 $\cos\dfrac{2}{5}\pi+\cos\dfrac{4}{5}\pi$ 的值；

(2) 求 $\sin^2 20°+\cos^2 50°+\sin 20°\cos 50°$ 的值.

**解**　(1) 设 $A=\cos\dfrac{2}{5}\pi+\cos\dfrac{4}{5}\pi$，$B=\cos\dfrac{2}{5}\pi-\cos\dfrac{4}{5}\pi$，得

$$\begin{aligned}2AB&=2\left(\cos^2\frac{2}{5}\pi-\cos^2\frac{4}{5}\pi\right)\\&=\cos\frac{4}{5}\pi-\cos\frac{8}{5}\pi\\&=-B,\end{aligned}$$

又 $B\neq 0$，所以 $A=\cos\dfrac{2}{5}\pi+\cos\dfrac{4}{5}\pi=-\dfrac{1}{2}$.

(2) 设 $A=\sin^2 20°+\cos^2 50°+\sin 20°\cdot\cos 50°$，

$B=\cos^2 20°+\sin^2 50°+\cos 20°\sin 50°$，

得 $A+B=2+\sin 70°$，

$A-B=-\cos 40°+\cos 100°+\sin(-30°)$

$=-\frac{1}{2}-\sin 70°$，

从而可得，$A=\sin^2 20°+\cos^2 50°+\sin 20°\cos 50°=\frac{3}{4}$.

**评注** 这里的对偶式并没有采用与例1相同的形式，但同样解决了问题，这说明对偶式的选择并不唯一.

**例3** （普通高中课程标准实验教科书《数学·A版必修4》（人民教育出版社2007年第2版）第147页复习参考题B组第4题）已知 $\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\frac{3}{5}$，$\frac{17\pi}{12}<x<\frac{7\pi}{4}$，求$\frac{\sin 2x+2\sin^2 x}{1-\tan x}$.

**解法一** 由 $\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\frac{3}{5}$，$\frac{5\pi}{3}<\frac{\pi}{4}+x<2\pi$，得 $\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=-\frac{4}{5}$，所以

$$\begin{cases}\cos x-\sin x=\frac{3}{5}\sqrt{2},\\ \cos x+\sin x=-\frac{4}{5}\sqrt{2},\end{cases}$$

得$$\begin{cases}\sin x=-\frac{7}{10}\sqrt{2},\\ \cos x=-\frac{\sqrt{2}}{10},\end{cases}$$

所以$\frac{\sin 2x+2\sin^2 x}{1-\tan x}=-\frac{28}{75}$.

**解法二** 由 $\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\frac{3}{5}$，得 $\cos x-\sin x=\frac{3}{5}\sqrt{2}$，设 $\cos x+\sin x=m$，把这两式分别相加、相减可得

$$2\cos x=m+\frac{3}{5}\sqrt{2},2\sin x=m-\frac{3}{5}\sqrt{2},$$

再把它们平方相加，可得 $m=\pm\frac{4}{5}\sqrt{2}$.

又由 $\frac{17\pi}{12}<x<\frac{7\pi}{4}$ 得 $\sin x<0$，所以 $m<\frac{3}{5}\sqrt{2}$，得 $m=-\frac{4}{5}\sqrt{2}$，所以 $\sin x=-\frac{7}{10}\sqrt{2}$，$\cos x=-\frac{\sqrt{2}}{10}$，$\frac{\sin 2x+2\sin^2 x}{1-\tan x}=-\frac{28}{75}$.

**例4** 求函数 $f(x)=x+\frac{4}{x}(1\leqslant x\leqslant 3)$ 的值域.

**解** 构造函数 $f(x)$ 的对偶函数 $g(x)=x-\frac{4}{x}(1\leqslant x\leqslant 3)$，得增函数 $g(x)$ 的值域是$\left[-3,\frac{5}{3}\right]$.

又 $f^2(x)=g^2(x)+16$，$f(x)>0$，从而可得 $f(x)$ 的值域是[4,5].

你领悟到这种解题技巧的妙处了吗？

## 巩固练习

1. 求函数 $f(x)=2\sqrt{x-1}+3\sqrt{2-x}$ $(1\leqslant x\leqslant 2)$的值域.

2. 解方程$\sqrt{2+\sqrt{2+x}}=x$.

## 参考答案

1. 构造函数 $f(x)$ 的对偶函数 $g(x)=3\sqrt{x-1}-2\sqrt{2-x}(1\leqslant x\leqslant 2)$，得增函数 $g(x)$ 的值域是$[-2,3]$. 又 $f^2(x)+g^2(x)=13$，$f(x)>0$，从而可得 $f(x)$ 的值域是$[2,\sqrt{13}]$.

2. 设 $\sqrt{2+x}=y$，得

$$\begin{cases}\sqrt{2+x}=y,\\ \sqrt{2+y}=x,\end{cases}$$

平方相减后可求得原方程的解为 $x=2$.