

近 5 年高考三角函数试题的统计与分析——以 2019-2020 年全国卷和 2021-2023 年新高考卷为例

蒋微

扬州大学 江苏扬州

【摘要】以 2019-2020 年全国卷和 2021-2023 年新高考 I 卷为研究对象，从知识点、数学核心素养、综合难度三个维度对近五年高考卷三角函数试题进行统计与分析，由于侧重点不同，在分析对比时，将三角函数试题分为非解答题和解答题两个部分，分别分析三角函数命题的方向与特点，为数学教师提供教学启示与教学思路。

【关键词】三角函数；数学试题分析；统计与分析；综合难度模型

【收稿日期】2024 年 4 月 18 日 **【出刊日期】**2024 年 6 月 21 日 **【DOI】**10.12208/j.aam.20240008

Statistics and analysis of trigonometric function questions of college entrance examination in recent 5 years - taking 2019-2020 National Test paper and 2021-2023 New high test paper as examples

Wei Jiang

Yangzhou University, Yangzhou, Jiangsu

【Abstract】 Taking the 2019-2020 National test paper and the 2021-2023 new college entrance examination I test paper as the research object, the trig function questions of the recent five year college entrance examination paper are statistically analyzed from three dimensions: knowledge point, mathematical core literacy and comprehensive difficulty. Due to different emphases, the trig function questions are divided into two parts: non-solution questions and unsolution questions. The direction and characteristics of trigonometric function proposition are analyzed respectively to provide teaching inspiration and teaching ideas for mathematics teachers.

【Keywords】 Trigonometric function; Mathematical test item analysis; Statistics and analysis; Comprehensive difficulty model

1 问题提出

三角函数是一类基本的、重要的函数，它是刻画现实世界中具有周期性变化现象的数学模型，学生通过探索和研究三角函数之间的一些恒等关系，深化了对函数应用广泛性的认识。根据《普通高中数学课程标准（2017 年版 2020 年修订）》，三角函数被纳入必修课程“主题二：函数”，彰显了其作为函数概念的重要分支及基础初等函数的地位，其在数学教学中占据的核心角色显而易见。本研究选取了覆盖面广的全国卷（2019 年、2020 年）及新高考 I 卷（2021-2023 年）作为分析对象，探讨了近五年高考三角函数题目的出题趋势和特征，旨在为三角函数的命题及教学实践提供参考。

2 研究方法

本研究融合定性与定量分析，从知识点、数学核心素养、题目综合难度三方面，对近五年高考三角函数题目进行了统计和分析，旨在帮助教师与学生精准把握三角函数题目的出题精髓。

2.1 知识点整理归纳

通过对知识点的精细梳理，我们能够掌握核心概念并明确考察重点。本研究依据 2019 年考试大纲与

2017 年课程标准，对三角函数的知识体系进行了系统的整合，划分为五个一级知识点及十四个二级知识点，并进行了详尽的编码，详见表 1。本文采用大写字母标识一级知识点，阿拉伯数字标识二级知识点，例如 A1 代表任意角概念，B3 代表三角函数的诱导公式。根据 2017 年课程大纲，虽然“解三角形”知识原属于“平面向量及应用”，但鉴于其涉及正弦与余弦定理，故亦将之归入三角函数范畴。对于跨领域知识点，本文不再单独编码，将在后续表格中直接展示。

表 1 三角函数知识编码

一级知识点	二级知识点
A 角与弧度	任意角的概念 弧度制
B 三角函数概念和性质	三角函数（正弦、余弦、正切）的定义 三角函数的图像和性质 三角函数诱导公式 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
C 同角三角函数的基本关系式	$\frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$ 两角差（和）余弦公式 两角差（和）正弦公式 两角差（和）正切公式
D 三角恒等变换	倍角公式、半角公式 积化和差、和差化积公式的推导 解三角形（正弦定理、余弦定理）
E 三角函数的应用	三角函数的实际应用

2.2 数学核心素养

三角函数的教学在九年级下册便已铺开序幕。尽管初中阶段的锐角三角函数与高中阶段的任意角三角函数在概念上存在差异——前者以直角三角形的角边关系为载体，后者则作为描绘周期性变化的数学模型——两者均在数学及其他学科中扮演着不可或缺的角色。本研究基于 2017 年课程标准，围绕数学核心素养的六大维度（数学抽象、逻辑推理、数学建模、直观想象、数学运算、数据分析）对三角函数相关的高考试题进行了深入地统计分析。

2.3 综合难度

本研究借鉴武小鹏团队的综合难度模型^[2]，对近五年的数学高考题目进行了难度分析。该模型原用于评估整套试卷的难度，现经调整适用于分析三角函数题目的难度系数。难度因素的等级划分在“基础知识”和“认知水平”上与原模型保持一致；而“情境类型”、“数学问题”和“基本技能”则依据 2017 年课程标准进行划分。至于“核心素养”，则结合 2017 年课程标准和喻平的数学核心素养评价框架^[3]进行等级划分，对于涉及多个核心素养的题目，采取各素养等级的平均值作为该题核心素养维度的总评等级。详细的划分标准列于表 2。记第 i 个因素的等级为 a_i （每个维度共三个等级），则该试题的综合难度系数为 $d = \frac{\sum_{i=1}^3 a_i}{3} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 a_i$ ，根据该公式计算试题的难度系数，难度系数在 0-1，越接近 1 则说明难度越大。下面以 2022 年新高考 I 卷第 18 题为例进行说明。

案例：记 ΔABC 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，已知 $\frac{\cos A}{1 + \sin A} = \frac{\sin 2B}{1 + \cos 2B}$ 。

(1) 若 $C = \frac{2\pi}{3}$ ，求 B ；

(2) 求 $\frac{a^2 + b^2}{c^2}$ 的最小值。

说明: 本题为无具体情境的解答题, 故情境因素等级定为 1。数学问题等级为 2, 涉及二倍角公式(D4)、积化和差(D5)、诱导公式(B3) 及不等式等基础知识, 基础知识等级为 3。考查学生的运算求解技能, 基本技能等级为 1。此外, 题目测试了学生对任意角公式的应用能力, 认知水平等级为 2。依据喻平的数学核心素养评价框架, 核心素养等级为 2。故综合难度计算结果为 $d = 0.611$ 。

3 研究结果

3.1 三角函数试题整体情况

考虑到高考对三角函数试题的考察方向, 本研究围绕知识点、核心素养、试题难度三大维度, 对 2019、20 年全国卷(理科) 及 2021 至 2023 年新高考卷进行分析与比较。

3.2 知识点考察对比分析

本节将三角函数试题划分为非解答题(包括选择题与填空题)与解答题两大类, 并依据表 3 进行知识点的对比分析。

在非解答题中, 每题通常覆盖二至三个知识点, 而这些知识点多要求基本理解与初步应用。从表 3 中可见, 全国卷的选择题多聚焦于 B2、B4 知识点, 新高考卷则逐步偏向 D2、D4, 强调三角恒等变换中公式的灵活应用。仅在 2023 年新高考卷中出现了三角函数的填空题, 同样考查 B2、B4 知识点。综上所述, 高考改革促使非解答题更加注重学生在公式应用上的灵活性, 并持续强调对三角函数图像特性的理解。

从解答题上看, 全国卷通常都考察一到两个知识点, 着重于基本理解与应用; 新高考卷则常涵盖两至三个知识点, 并与其他数学领域如函数的根的性质、向量的运算、基本不等式等相融合。无论全国卷或新高考卷, E1 知识点均为解答题中的常客。综合来看, 高考改革促进了解答题知识点的丰富性及其与其他数学知识的综合运用。

3.3 核心素养对比分析

通过观察表 3 可以发现, 全国卷与新高考卷在三角函数试题中均着重考察数学运算与逻辑推理素养。新高考卷在逻辑推理方面相较全国卷有所提升, 一般处于 2-3 等级。此外, 新高考卷亦关注学生的数学抽象素养。以 2023 年新高考 I 卷第六题为例, 通过点与圆的位置关系、圆的切线性质及图像, 综合考察了学生对三角函数知识的掌握以及数学运算、逻辑推理、数学抽象素养的水平。总体而言, 高考改革更加强调培养学生的逻辑思维能力。

3.4 试题难度对比分析

为剖析近五年高考三角函数试题的难度特性, 将题目划分为非解答题与解答题两类, 分别计算各类别中各年份题目的平均难度值^[4]。非解答题的平均难度以曲线形式呈现于图 1, 解答题的难度则绘制于图 2。图中, 2019 年与 2020 年全国卷的平均难度由水平虚线表示, 而 2021 至 2023 年新高考卷的平均难度则以水平实线标出。

表 2 难度因素等级划分

难度因素	等级 1	等级 2	等级 3
情境类型	数学情境	现实情境	科学情境
数学问题	简单	较复杂	复杂
基础知识	单个知识点	两个知识点	大于等于三
基本技能	单个技能	两个技能	大于等于三
认知水平	理解	运用	分析
核心素养	水平 1	水平 2	水平 3

表3 2019-2023年全国卷(理科)和新高考卷数列非解答题统计

试卷	题号	知识点	核心素养	综合难度
2019 全国卷	5	B2、函数的奇偶性	逻辑推理 数学运算	0.463
	11	B2、函数的奇偶性、绝对值的应用	逻辑推理 数学运算	0.667
	17	D2、E1	逻辑推理 数学运算	0.556
2020 全国卷	7	B2、B4	数学运算	0.500
	9	C1、D4	数学运算	0.444
	16	E1、三棱锥展开图	逻辑推理 数学运算	0.611
2021 新 I 卷	4	B2、B4	数学运算	0.444
	6	B2、C1、D4、 齐次化	数学运算	0.500
	10	D1、D2、 向量的运算	数学运算	0.556
2021 新 II 卷	19	E1	数学运算	0.556
	18	E1、三角形的面积公式	逻辑推理 数学运算	0.519
2022 新 I 卷	6	B2、B4	数学运算	0.472
	18	D1、D4、E1、基本不等式	数学运算	0.611
	6	D1、D2	数学运算	0.556
2022 新 II 卷	9	B2、B4	数学运算	0.444
	18	E1	数学运算	0.444
	6	D4、E1、切线的性质、点与圆的位置关系	数学抽象 数学运算 逻辑推理	0.722
2023 新 I 卷	8	D2、D4	数学运算	0.444
	15	B2、函数的根的性质	数学运算 逻辑推理	0.583
	17	D2、E1	数学运算 逻辑推理	0.556
2023 新 II 卷	7	D4	数学运算	0.389
	16	B2、B4	逻辑推理 数学运算	0.611
	17	E1、向量运算	数学运算 逻辑推理	0.556

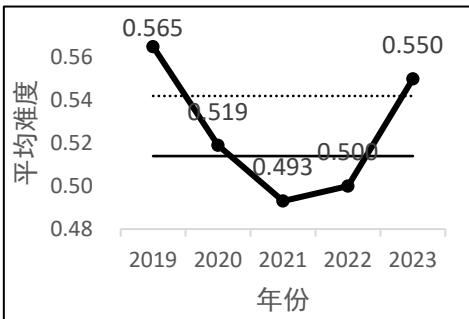


图1 非解答题平均难度趋势

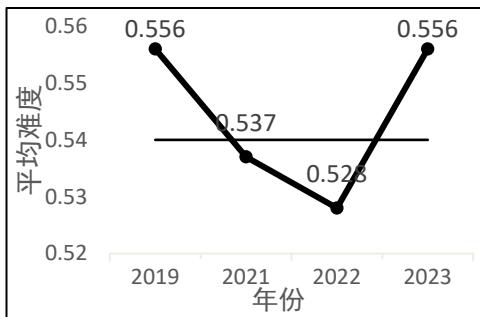


图2 解答题平均难度趋势

由图1可见，在非解答题中，新高考卷的平均难度呈上升趋势，但在总体上并不高于高考改革前，整体上都在0.55左右。原因在于考查的都是较为熟悉的公式运用、图像性质，出题人更重视的是学生对基础知识的理解。

由图2可见，在解答题中，除2020年没有出题外，几乎都会出现在17题左右，作为解答题的第一题，出题人也并没有想给学生来个“当头一棒”的意思，整体上都是中档题，难度并不大且题型统一，主要考查的是学生对三角函数一系列公式的理解与灵活运用。

4 教学启示

4.1 重视基础知识、注重灵活运用

高考考查的三角函数知识点，往往都是学生熟悉的、常考的知识点，历年来并没有出现很刁钻的试题，尤其在解答题中，三角函数的题型都很一致。近五年来，三角函数试题的难度也几乎没有较大波动。在教学上，三角函数是刻画周期现象的数学模型，不仅要基于函数视角，运用研究函数的一般策略去研究三角函数，也要考虑到三角函数自身的独特性。教师要带领学生感受三角函数循环往复、周而复始的变化规律，重视引导学生夯实基础，使根扎实，学会灵活运用三角函数的一些变式。

4.2 聚焦核心素养、培养逻辑思维

数学育人的基本途径是对学生进行系统的逻辑思维训练，而训练的基本手段是让学生进行逻辑推理和数学运算，要在推理的严谨性和简洁性、运算的正确性和算法的有效性上有要求^[5]。不论是全国卷还是新高考卷都十分重视对学生数学核心素养的考查，尤其是在逻辑推理、数学运算素养方面。虽然近五年三角函数试题主要都是在数学情境中出现，但随着高考改革，必定会以结合现实情境的方式出题，教师在教学时可为学生提供深入研究的契机，引导学生将数学问题与实际生活相联系，从中发现乐趣，不断提升学生的逻辑思维。

4.3 渗透单元思想、构建网络体系

单元教学能够有效提升学生的数学素养和创新能力。在教学中，借助单位圆定义三角函数后，研究特殊的对称性代数表示，进而引出诱导公式，提炼出口诀“奇变偶不变，符号看象限”；在借助圆的旋转对称性推出两角差的余弦公式后，再代换得到两角和的余弦公式，结合诱导公式再推导出两角差（和）的正弦公式、

正切公式；最后通过特殊化、公式变形得到二倍角公式、半角公式等。其中的逻辑环环相扣、紧密相连，教师要引导学生把握主线单位圆，帮助学生数形结合，化抽象为具体，凸显数学的整体性、关联性和结构性。

参考文献

- [1] 严兴光.基于数学理解的三角函数概念教学[J].数学通报,2021,60(05):21-24+59.
- [2] 武小鹏,孔企平.基于 AHP 理论的数学高考试题综合难度模型构建与应用[J].数学教育学报,2020,29(02):29-34.
- [3] 喻平.数学核心素养评价的一个框架[J].数学教育学报,2017,26(02):19-23+59.
- [4] 唐明超,张勇.基于综合难度模型的高考试题比较研究——以 2020—2022 年全国数学新高考卷为例[J].中学教研(数学),2024,(04):42-48.
- [5] 章建跃,李增沪主编.普通高中教科书教师教学用书 · 数学(选择性必修)第二册(A 版)[M].北京:人民教育出版社, 2019:4,12.

版权声明: ©2024 作者与开放获取期刊研究中心(OAJRC)所有。本文章按照知识共享署名许可条款发表。

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



OPEN ACCESS