巧解数学难题二则

430079 湖北省武汉市华中师范大学教育信息技术工程研究中心 彭翕成

数学是公认的学习起来比较有困难的学科. 这门学科确实存在一些难题, 让学习者头疼. 但笔者发现, 一些被称为很有难度的题目, 其实并没有传说中的那样可怕. 有许多是由于作者对问题没有深入研究, 缺少广泛查阅资料, 下笔时又有点随意, 贸然下结论. 本文将以两个经典问题为例, 说明方法恰当时有些题目并没有那么难.

例1 从 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots, \frac{1}{50}$ 共49个分数中, 找出七个分数, 要求它们的和为1.

文[1]认为:"如果从49个单位分数中, 漫无目标地去找出七个分数, 要求它们的和恰好为1, 这是很困难的, 几乎不可能. 即使我们想到: 七个分数的和为1, 平均每个分数的值为 $\frac{1}{7}$, 因此必有一些分数的值大于 $\frac{1}{7}$, 另一些分数的值小于 $\frac{1}{7}$, 这样仍很难找出解答."

除了文[1]认为此题较难之外, 还有不少文章认为此题有难度, 并花费较多篇幅来求解. 在此就不多引用了. 对于本题, 笔者认为张景中院士在科普著作《帮你学数学》[2] 中的解答最简单, 论述最深刻.

文[2]的题目稍有不同, 但本质一样. 问如何从 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots, \frac{1}{99}, \frac{1}{100}$ 这99个分数中抽取10个出来, 使之相加和为1. 文[2]解法:

$$\begin{aligned} 1 &= 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\cdots-\frac{1}{10}+\frac{1}{10} \\ &= \left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) \\ &\quad +\cdots+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)+\frac{1}{10} \\ &= \frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\frac{1}{56}+\frac{1}{72}+\frac{1}{90}+\frac{1}{10}. \end{aligned}$$

文[2]作了精辟点评"减是为了凑项, 加则是为了守恒. 一加一减, 这就是0的表现形式. 推而广之, 代数学就是研究0的各种表现形式." 接着大量举例从不同角度阐述一借一还这一朴素而实用的解题方法.

笔者认为如果从另一个角度来解此题, 相信学生也是感兴趣的. 利用下面这个表(图1). 决定这个图表的规则是: (1)边界条件: 第n行开始和结束的数都是 $\frac{1}{n}$; (2)递推法则: 表中每个数都是它脚下的两个数的和. 根据这两条规则, 可以将这个表补足到任意多行.

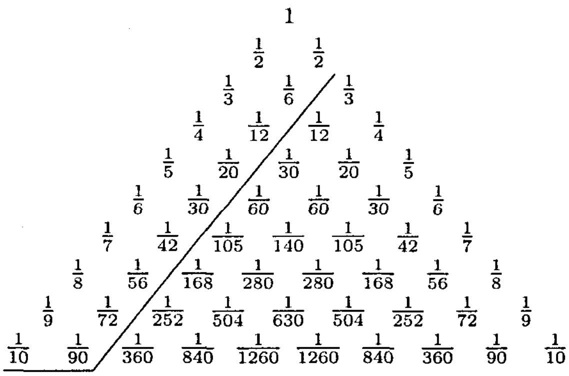

图1

表中的折线已经清楚地揭示了题目的答案: $1=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\frac{1}{56}+\frac{1}{72}+\frac{1}{90}+\frac{1}{10}$.

利用这个表, 单位分数分解的问题是比较容易解决的. 譬如要将 $\frac{1}{8}$ 分解成两个不同的单位分数之和, 先在表中找到 $\frac{1}{8}$, 得到 $\frac{1}{8}=\frac{1}{9}+\frac{1}{72}$; 将 $\frac{1}{8}$ 乘以2得到 $\frac{1}{4}$, 再在表中找到 $\frac{1}{4}$, 得到 $\frac{1}{4}=\frac{1}{5}+\frac{1}{20}$, 再除以2得 $\frac{1}{8}=\frac{1}{10}+\frac{1}{40}$; 将 $\frac{1}{8}$ 乘以4得到 $\frac{1}{2}$, 再在表中找到 $\frac{1}{2}$, 得到 $\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$, 再除以4得 $\frac{1}{8}=\frac{1}{12}+\frac{1}{24}$. 其中的2和4都是8的因子. 还可以将分数分解为两个单位分数之差, 如 $\frac{1}{6}=$

$\frac{1}{5}-\frac{1}{30}=\frac{1}{4}-\frac{1}{12}=\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$.

上面这个表看起来简单，但来头不小. 表中三角形被称为莱布尼茨三角形，又叫调和三角. 莱布尼茨是著名的数学家，是微积分的创始人之一. 莱布尼茨三角形与杨辉三角形(图2)有很大的关联.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

图 2

杨辉三角形的构造法则是：(1)边界条件：每一行开始和结束的数都是1；(2)递推法则：表中每个数都是它肩上的两个数的和. 根据这两条规则，可以将这个表补足到任意多行.

莱布尼茨三角形有许多性质与杨辉三角形构成有趣的对照. 譬如莱布尼茨三角形与杨辉三角形相同位置的数的乘积为$\frac{1}{n}$. 又如杨辉三角形内的一个数等于其左肩与左肩上这个数的右上方一切数的和，也等于其右肩与右肩上这个数的左上方一切数的和，例如$10=4+3+2+1=6+3+1$. 莱布尼茨三角形的一个数等于其左脚与左脚下这个数的右下方一切数的和，也等于其右脚与右脚下这个数的左下方一切数的和，例如$\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{12}+\frac{1}{30}+\frac{1}{60}+\cdots=\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\cdots$. 我们就是根据这一性质来分解数的.

例2 证明拿破仑定理，即分别以三角形三边为边长，向形外作等边三角形，则所作三个等边三角形的中心构成等边三角形.

文[3]认为拿破仑三角形不借助三角工具是难以证明的. 文[4]在提到拿破仑三角形时，认为“拿破仑在当时就证明了我们在今天也并非容易完成的事实”.

是否非借助三角函数不可呢，解答是否真的很困难？下面给出三种简单证明.

证法1：如图3，设G、H、I分别是所作三个等边三角形的中心，则$\frac{AG}{AB}=\frac{AI}{AF}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\angle GAI=\angle BAF$，所以$\triangle GAI\backsim\triangle BAF$，$\frac{GI}{BF}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

同理可证$\frac{GH}{DC}=\frac{\sqrt{3}}{3}$；易证$\triangle DAC\cong\triangle BAF$，$DC=BF$，则$GI=GH$.

同理可证$GI=IH$. 所以$\triangle GHI$是等边三角形.

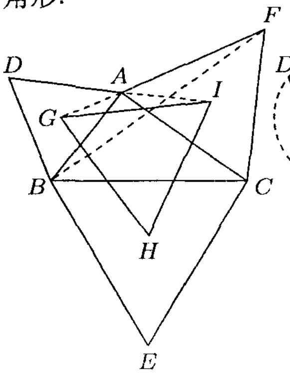

图 3

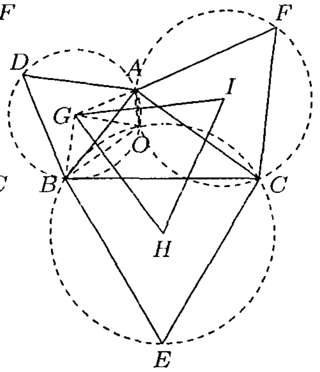

图 4

证法2：如图4，设G、H、I分别是所作三个等边三角形的中心，作3个等边三角形的外接圆，设$\odot G$交$\odot I$于A和O，则$\angle BOA=\angle AOC=120^\circ$，而$\angle BOC=360^\circ-2\times120^\circ=120^\circ$，所以$\odot H$过点$O$. 连结$AO$、$BO$，则$\angle HGI=\angle HGO+\angle OGI=\frac{120^\circ}{2}=60^\circ$.

同理可证$\angle GIH=\angle GHI=60^\circ$，所以$\triangle GHI$是等边三角形.

证法3：如图5，设G、H、I分别是所作三个等边三角形的中心，作3个等边三角形的外接圆，过点A作GI的平行线交$\odot G$、$\odot I$于J、L，延长JB、LC交于点K. 由$\angle KJL=\angle BDA=60^\circ$，$\angle JLK=\angle AFC=60^\circ$得$\angle JKL=60^\circ$，

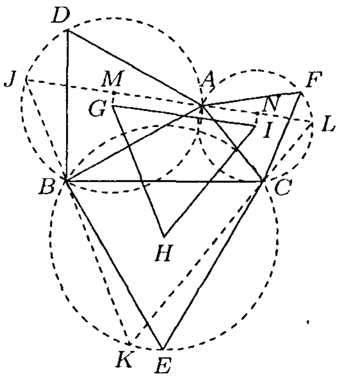

图 5

(下转第1-43页)

景: 预警方案确定:

设$W=\dfrac{\text{当月的500克猪肉价格}}{\text{当月的500克玉米价格}}$. 如果当月$W<6$, 则下个月要采取措施防止"猪贱伤农".

数据收集:

今年2月～5月玉米、猪肉价格统计表:

月份	2	3	4	5
玉米价格(元/500克)	0.7	0.8	0.9	1
猪肉价格(元/500克)	7.5	m	6.25	6

问题解决:

(1)若今年3月的猪肉价格比上月下降的百分数与5月的猪肉价格比上月下降的百分数相等, 求3月的猪肉价格m;

(2)若今年6月及以后月份, 玉米价格增长的规律不变, 而每月的猪肉价格按照5月的猪肉价格比上月下降的百分数继续下降, 请你预测7月时是否要采取措施防止"猪贱伤农";

(3)若今年6月及以后月份, 每月玉米价格增长率是当月猪肉价格增长率的2倍, 而每月的猪肉价格增长率都为a, 则到7月时只用5.5元就可以买到500克猪肉和500克玉米. 请你预测8月时是否要采取措施防止"猪贱伤农".

【简析】(1)由$\dfrac{m-7.5}{7.5}=\dfrac{6-6.25}{6.25}$, 得$m$=7.2.

(2)从2月～5月玉米的价格变化知, 后一个月总是比前一个月价格每500克增长0.1元, 故6月玉米的价格是1.1元/500克. 5月猪肉增长率为$\dfrac{6-6.25}{6.25}=-\dfrac{1}{25}$, 所以6月猪肉的价格为$6\left(1-\dfrac{1}{25}\right)=5.76$元/500克. $W=\dfrac{5.76}{1.1}\approx 5.24<6$, 要采取措施.

(3)7月猪肉价格是$6(1+a)^2$元/500克, 7月玉米价格是$(1+2a)^2$元/500克. $6(1+a)^2+(1+2a)^2=5.5$, 解得$a=-\dfrac{1}{10}$ ($a=-\dfrac{3}{2}$不合题意, 舍去). $W=\dfrac{6\left(1-\dfrac{1}{10}\right)^2}{\left(1-\dfrac{1}{5}\right)^2}\approx 7.59>6$, 所以不需要采取措施.

【评注】以上三例涉及到图形变换、实际测量、方案决策(预警方案确定)等中考热点题材, 均由浅入深设置二～三个问题, 初始问题较为简单, 只需利用基本知识或看懂题意即可解决, 后续问题的已知条件或解题要求则有了较大的变化, 不可生搬硬套、简单效仿, 需找出与上一个问题差异所在, 把解决旧问题的方法迁移到新问题中来.

通过以上对中考探究性试题新特点的分析, 我们不难发现此类试题以"问题"作为其切入口

(下转第1-48页)

(上接第1-33页)

所以$\triangle JKL$是等边三角形, B、K、E、C四点共圆. 作GM垂直JL、IN垂直JL, 则$JL=2MN=2GI$; 同理可证$JK=2GH$, $KL=2HI$. 所以$\triangle GHI$是等边三角形.

通过上面两个例子, 我们看到有些所谓的难题是方法不当造成的. 正如罗增儒先生所说: 人们对数学教育比较宽容, 常常默许那些没有理论依据或实证支持的结论, 这是数学教育论文常犯的错误[5].

很多资料在提到数学的特点时, 总要提到数学的抽象性、严谨性. 但张奠宙先生对此提出不同意见, "如果一味地讲抽象、严谨, 除了把不喜欢数学的孩子们吓跑之外, 并不能给数学教育带来多少好处. 数学的内容如此丰富多彩, 生动活泼, 为什么非要众口一词地念叨'抽象'、'严谨'不可呢?"

同样地, 数学中存在难点, 这是事实, 但没必要总是把数学难挂在嘴边, 更不能人为夸大数学的难, 而是要想办法去解决这些难点. 譬如张景中院士提倡"为教育做数学"就是为了让数学变得更容易一些, 实践证明这确实是可行的.

参考文献

[1] 孙联荣, 戴再平. 单位分数问题——例谈"有限混沌型"数学开放题教学的研究[J]. 数学通报, 2007(12): 24-26.

[2] 张景中. 帮你学数学[M]. 北京: 中国少年儿童出版社, 2002.

[3] 陈振宣. 三角函数在中学数学中的核心地位[J]. 数学通报, 2009(6): 25-30.

[4] 易南轩. 数学美拾趣[M]. 北京: 科学出版社, 2005.

[5] 罗增儒. 中学数学解题的理论和实践[M]. 南宁: 广西教育出版社, 2008.