数学题巧解的几种途径

⊙/陈德前

在中考数学试卷中，常有一些知识点多、覆盖面广、综合性强的试题.这些试题或者条件和结论关系隐晦，或者数据较多，或者图形复杂，考生往往抓不住问题的实质，解题花了很长的时间，甚至出现解题失误.本文以中考题为例，谈谈巧解这类题的几种途径.

一、从隐含条件入手

例1　已知关于x的方程$x^2-(2a+1)x+a^2+a=0$两个实数根中，只有一个根大于5，则a的取值范围是(　　).

(A)$a>4$　　(B)$4<a<5$　　(C)$a>5$　　(D)$4<a\leqslant 5$

分析：解与二元一次方程的根相关的问题，一般要用到判别式与根与系数的关系，但对于此题，运算量大且易出错.注意到原方程可用因式分解法求根这一隐含条件，巧用特殊的方程特殊的根，则可简便求解.

解：原方程可因式分解为$(x-a)[x-(a+1)]=0$.

$\therefore x_1=a, x_2=a+1$，显然$x_2>x_1$.

依题意有$\begin{cases} a+1>5, \\ a\leqslant 5. \end{cases}$

$\therefore 4<a\leqslant 5$，选(D).

二、从观察图形入手

例2　如图1所示，小山上有一座铁塔AB，在D处测得点A的仰角$\angle ADC=60°$，点B的仰角$\angle BDC=45°$；在E处测得点A的仰角$\angle E=30°$，并测得$DE=90$米，求小山高BC和铁塔高AB.(精确到0.1米，供选用的数据：$\sqrt{2}\approx 1.41, \sqrt{3}\approx 1.73, \sqrt{5}\approx 2.24$)

分析：本题用解直角三角形的方法可以求解，但运算过程较繁琐。

观察图形特征，由于$\angle ACD=90^\circ$，且$\angle AED+\angle ADC=90^\circ$，可以推出$\angle AED=\angle DAC=30^\circ$，则有$Rt\triangle ADC\backsim Rt\triangle EAC$，进而求解。

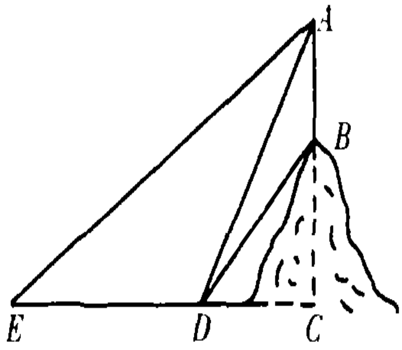

图1

解：在$\triangle ADE$中，

$\angle ADC=\angle E+\angle EAD$，$\angle ADC=60^\circ$，$\angle E=30^\circ$，

$\therefore \angle EAD=30^\circ$，$AD=DE=90$米。

又$\angle ACE=90^\circ$，$\therefore Rt\triangle ADC\backsim Rt\triangle EAC$。

$\therefore AC^2=CD\cdot CE$。 ①

在$Rt\triangle ACD$中，$\tan\angle ADC=\dfrac{AC}{CD}$，

故$AC=\tan60^\circ CD=\sqrt{3}CD$。 ②

将②代入①有$3CD^2=CD(CD+DE)$。

$\therefore CD=\dfrac{1}{2}DE=45$（米）。 ③

将③代入②得$AC=45\sqrt{3}$米。

在$Rt\triangle BDC$中，$\angle BDC=45^\circ$，

$\therefore BC=CD=45$米。

从而$AB=AC-BC=45\sqrt{3}-45\approx45\times0.73\approx32.9$（米）。

答：小山高BC为45米，铁塔高AB约为32.9米。

三、从转化结论入手

例3 如图2，在$\triangle ABC$中，$\angle ACB=90^\circ$，$AC=3$，$BC=4$，以C为圆心，AC长为半径作弧

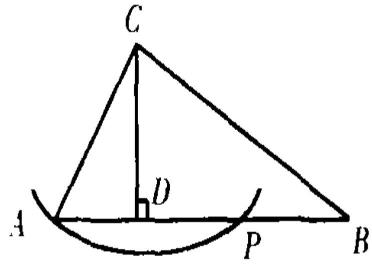

图2

交AB于点P，求AP的长.

分析：因为AP是$\odot C$的弦，常常通过作弦心距把问题转化到直角三角形中解决，即把结论求AP的长转化为求AD的长.

解：作$CD\perp AB$于D，则$AP=2AD$.

在$Rt\triangle ABC$中，$AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$，

又$CD\perp AB$，由$Rt\triangle ACD\backsim Rt\triangle ABC$有

$AC^2=AD\cdot AB$，即$AD=\dfrac{AC^2}{AB}=\dfrac{9}{5}$.

故$AP=2AD=\dfrac{18}{5}$.

四、从特殊情况入手

例4　某商品原价100元，现有下列四种调价方案，其中$0<n<m<100$，则调价后该商品价格最高的方案是（　　）.

(A)先涨价$m\%$，再降价$n\%$

(B)先涨价$n\%$，再降价$m\%$

(C)先涨价$\dfrac{m+n}{2}\%$，再降价$\dfrac{m+n}{2}\%$

(D)先涨价$\sqrt{mn}\%$，再降价$\sqrt{mn}\%$

分析：这是一道商品定价问题，关键在于先列出有关代数式，再比较其大小.

方案A的调价后为$100\times(1+m\%)(1-n\%)$元；

方案B的调价后为$100\times(1+n\%)(1-m\%)$元；

方案C的调价后为$100\times\left(1+\dfrac{m+n}{2}\%\right)\left(1-\dfrac{m+n}{2}\%\right)$元；

方案D的调价后为$100\times(1+\sqrt{mn}\%)(1-\sqrt{mn}\%)$元；

由$0<n<m<100$知，$n<\sqrt{mn}<\dfrac{m+n}{2}<m$.

因此方案A的价格最高.选(A).

这样思考，过程复杂，费时费力，可以采用特殊值法，简化计算。如取$m=90$，$n=10$，易知方案A的价格为171元；方案B的价格为11元；方案C的价格为75元；方案D的价格为91元，A的价格最高，应选(A)。

五、从数形结合入手

例5　如图3，已知抛物线$y=x^2+px+q$与x轴交于A、B两点，交y轴负半轴于点C，$\angle ACB=90°$，且$\frac{1}{OA}-\frac{1}{OB}=\frac{2}{OC}$，求$\triangle ABC$的外接圆面积。

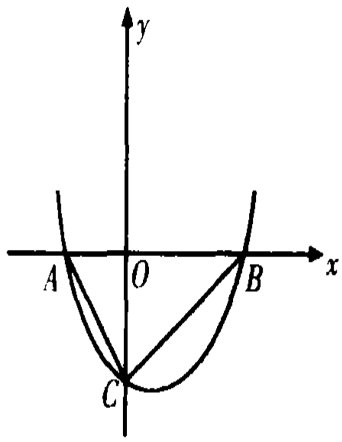

图3

分析：从图中看到点C是抛物线与y轴的交点，易想到$OC=|q|$，且$q<0$，在平面直角坐标系中，$OC\perp AB$，又已知$\angle ACB=90°$，从图形中易得$Rt\triangle ACO\backsim Rt\triangle CBO$，从而$OC^2=OA\cdot OB$，而$A$、$B$是抛物线与$x$轴的两个交点。若设$A\ (x_1,0)$，$B\ (x_2,0)$，则$x_1<0$，$x_2>0$，$OA=-x_1$，$OB=x_2$，由根与系数的关系有：

$OA\cdot OB=-x_1x_2=-q$，即$q^2=-q$，

$\therefore q=-1$($q=0$舍去)。

又$\frac{1}{OA}-\frac{1}{OB}=\frac{2}{OC}$，有$-\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}=2$。

从而$-\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=2$，又$x_1+x_2=-p$，$x_1x_2=-1$，

$\therefore -\frac{-p}{-1}=2$，即$p=-2$。

故二次函数的解析式为$y=x^2-2x-1$。

由$AB=|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2}=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=2\sqrt{2}$，

$\therefore S=\pi\left(\frac{AB}{2}\right)^2=2\pi.$

六、从演示操作入手

例6　如图4，点P为正方形$ABCD$内一点，$\angle P_1BP=\angle CBP$，$BP_1=AB$，$BP=PD$，则$\angle BP_1P=$________.

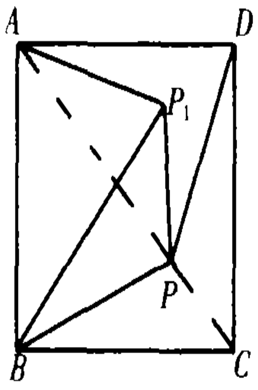

图4

分析：本题初看上去似乎较复杂，不易入手，其实我们可以先作出一个准确图形，再用量角器量出$\angle BP_1P$的度数，答案唾手可得：45°.

本题的一般解法是：

连结AC、BD，则AC与BD互相垂直平分于点O，由$PB=PD$知P点在AC上.

又$P_1B=AB=BC$，$\angle P_1BP=\angle PBC$，$BP=BP$，

$\therefore \triangle P_1BP\cong\triangle CBP.$

$\therefore \angle BP_1P=\angle BCP=45°.$

由上可见，许多中考题的解法比较灵活，有循规蹈矩的"正宗"解法，也有别出心裁的巧解.我们在学习"正宗"解法的同时，更要探究其巧思妙解，以优化我们的思维方式，提高创新能力.

责任编辑/王二喜