$\therefore t=3.\ \therefore \begin{cases}p+q=8,\\ pq=12,\end{cases}\ \therefore \begin{cases}p=2,\\ q=6.\end{cases}$

(2)$\because p=2,q=6,\ \therefore AO=1,BO=3.$

$\because AB$ 切$\odot O$ 于 H，$\therefore OH\perp AB$ 于 H，$\therefore AB\cdot OH=AO\cdot BO\ \therefore \sqrt{10}\cdot OH=3\times 1,OH=\frac{3}{\sqrt{10}}.\ OH^2=BH\cdot AH,\therefore (\frac{3}{\sqrt{10}})^2=BH\cdot(\sqrt{10}-BH),\therefore BH=\frac{9}{\sqrt{10}}.$

$\because HE/\!/AC,\ \therefore \frac{HM}{AO}=\frac{BH}{AB},\ \therefore \frac{HM}{1}=\frac{\frac{9}{\sqrt{10}}}{\sqrt{10}},\ \therefore HM=\frac{9}{10},$

$\therefore EH=\frac{9}{5}.$ 答：$EH=\frac{9}{5}.$

例 3 已知 x、y 为实数且 $y=1/2+\sqrt{8x-1}+\sqrt{1-8x}$. 求 $x:y$.

分析 已知条件中含有两个二根式，由 $\sqrt{8x-1}$ 可知 $8x-1\geqslant 0$，即 $x\geqslant 1/8$，由 $\sqrt{1-8x}$ 可知 $8x-1\geqslant 0$，即 $x\leqslant 1/8$，故本题的隐含条件就是 $x=1/8$，由此可求 y.

解 在条件 $y=1/2+\sqrt{8x-1}+\sqrt{1-8x}$ 中，由 $\sqrt{8x-1}$ 可知 $8x-1\geqslant 0$，即 $x\geqslant 1/8$；由 $\sqrt{1-8x}$ 可知 $1-8x\geqslant 0$，即 $x\leqslant 1/8$. 所以 $x=1/8$. 当 $x=1/8$ 时，$y=1/2$.

所以 $x:y=1/8:1/2=1:4$.

点评 对于一些条件缺少型问题，缺少的已知条件往往隐含在题设的背后，解题时根据题目的特征，挖掘隐含条件使之明朗化，问题由此可获得解决.

例 4 有 15 枚硬币共 3 角 5 分，求其中 1 分、2 分、5 分的硬币各多少？

解 设 1 分、2 分、5 分的硬币分别有 x 枚、y 枚、z 枚，由题意，得 $\begin{cases}x+y+z=15 & ①,\\ x+2y+5z=35 & ②.\end{cases}$

② - ①得，$y+4z=20$，所以 $y=20-4z$.

又因为 y 为非负数且 $y\leqslant 15$，所以 $0\leqslant 20-4z\leqslant 15$，所以 $5/4\leqslant z\leqslant 5$. 又 z 的取值只能为整数，故有以下四种情况：

(1)$z=2$ 时，$y=20-4z=12$，此时 $x=15-x-y=1$；(2)$z=3$ 时，$y=20-4z=8$，此时 $x=15-x-y=4$；(3)$z=4$ 时，$y=20-4z=4$，此时 $x=15-x-y=7$；(4)$z=5$ 时，$y=20-4z=0$，此时 $x=15-x-y=10$.

综上所述，本题有以下四种可能：

(1) 1 分的有 1 枚，2 分的有 12 枚，5 分的有 2 枚；

(2) 1 分的有 4 枚，2 分的有 8 枚，5 分的有 3 枚；

(3) 1 分的有 7 枚，2 分的有 4 枚，5 分的有 4 枚；

(4) 1 分的有 10 枚，2 分的没有，5 分的有 5 枚.

点评 有些"条件缺少型问题"，由于未知的只能取某些特殊的值，因此可用讨论法求得这类问题的解.

例谈初中数学题的巧解

贵州省道真自治县民族中学 (563500) 丁友权

所谓巧解就是在解题中使复杂运算或证明变得简捷. 另一种就是使思维变得通畅.

一、巧用旋转解题

例 1 在等腰直角 $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，P 为形内一点，且 $PA=3,PB=1,PC=2$，求$\angle BPC$ 的度数.

分析 如图 1，将$\triangle ACP$ 绕顶点 C 逆时针旋转 90°到$\triangle BCE$ 的位置，连 PE. 由 $CE=CP=2,\angle ECP=90°$，知 $PE=2\sqrt{2}$. 又 $BE=AP=3,PB=1$，可知 $BE^2=PE^2+PB^2,EP\perp PB$，故$\angle BPC=90°+45°=135°$.

例 2 已知 P 是等边$\triangle ABC$ 内部一点，$\angle APB$，$\angle BPC$，$\angle CPA$ 的大小之比是 $5:6:7$，则以 PA、PB、PC 的长为边的三角形的三个内角的大小之比是（从小到大）________.

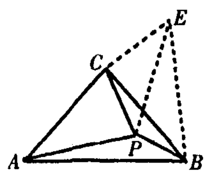

图 1

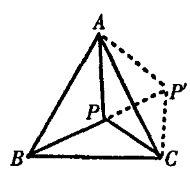

图 2

分析 因为$\angle APB:\angle BPC:\angle CPA=5:6:7$，又$\angle APB+\angle BPC+\angle CPA=360°$，所以$\angle APB=100°$，$\angle BPC=120°$，$\angle CPA=140°$.

把$\triangle PBC$绕顶点C顺时针旋转$60°$，使等边$\triangle ABC$的两边CB与CA重合，P旋转到P'. 如图2，则$P'A=PB$，$P'C=PC$，$\angle PCP'=60°$，所以$\triangle PCP'$是等边三角形. $\angle CPP'=\angle CP'P=60°$，$PP'=PC$，即$\triangle APP'$就是以$PA$、$PB$、$PC$的长为边的三角形，且$\angle APP'=\angle APC-\angle CPP'=80°$，$\angle AP'P=\angle APC-\angle CP'P=\angle BPC-\angle CP'P=60°$，从而$\angle PAP'=40°$.

故这样的三角形的三个内角的大小之比(从小到大)是$2:3:4$.

这样解法且有一般性，只要知道$\angle APB$，$\angle BPC$，$\angle CPA$的大小之比，就可用同样的方法求出以PA、PB、PC的长为边的三角形的三个内角来.

点评 进行旋转变换时，要注意以下几点：(1)确定旋转中心.(2)确定旋转角度(一般为$60°$，$90°$，$180°$)及旋转方向.

二、以算代证

对于一些证明题，当推理论证比较困难或比较麻烦的时候，合理地进行设元，用计算的方法来进行证明，能使问题较方便地得到解决.

例3 如图3，$ABCD$是正方形，$AD=3AM$，$AC=3CN$，连结BM、BN、MN.

(1)猜想：$\triangle BNM$是什么形状的三角形；

(2)试证明你的结论.

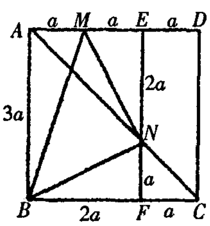

图3

分析 由于$ABCD$是正方形，$AD=3AM$，$AC=3CN$，其他的证明方法有点“无用武之地”，因此采用“以算代证”.

解 (1)$\triangle BNM$是等腰直角三角形.

(2)证明：过点N作$FE\perp AD$于E，交BC于F，由于$ABCD$是正方形，所以$EF\perp BC$.

又$\because AD=3AM$，$AC=3CN$，因此可设：

$AB=BC=CD=DA=3a$，则$AM=a$，$MD=2a$，$AC=3\sqrt{2}a$，$CN=\sqrt{2}a$. 在等腰直角三角形CNF中，由$CN=\sqrt{2}a$，$\therefore NF=FC=a$，$\therefore ED=a$，$ME=a$，$BF=2a$，$\therefore$在直角三角形ABM，直角三角形NEM，直角三角形BNF中，由勾股定理得：$BN=MN=\sqrt{5}a$，$BM=\sqrt{10}a$.

$\therefore$猜想的结论为真.

点评 假设正方形的边长为$3a$后，使问题更加直观、明朗，思维的梯度变得平缓.

例4 已知如图4，$\triangle ABC$中，$AB=AC$，延长AB至D，使$BD=AB$，E为AB的中点，连CE、CD，求证：$EC=CD/2$.

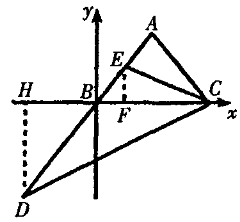

图4

证明 如图4所示，以B为坐标原点建立直角坐标系，并设$A(a,y)$，则$B(0,0)$，$C(2a,0)$，$D=(-a,-y)$. 过E、D分别作$EF\perp BC$，$DH\perp BC$，交x轴于F，H两点，由勾股定理得：

$$EC=\sqrt{(2a-\frac{1}{2}a)^2+(0-\frac{1}{2}y)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{9a^2+y^2},$$

$$CD=\sqrt{(2a+a)^2+(0+y)^2}=\sqrt{9a^2+y^2},$$

$\therefore CD=2EC$，即$EC=CD/2$.

点评 本题可用加倍法、折半法等多种方法证明，但建立坐标系后，用代数计算法来证明显得简捷方便.

三、巧选参照物解题

运动与静止的相对性不仅在物理学中有十分重要的应用，在数学中也有巧妙的运用. 对于多种运动掺和在一起的行程问题，通过选取适当的参照物，可以使题意纷繁的问题变得简单明了，求解起来轻松有趣.

例5 某船拖一橡皮筏沿江逆流而上，在A处由于绳子断开，橡皮筏顺流漂走. 10分钟后船上的人才知道，立即掉头追赶. 假设船掉头的时间忽略不计，问需要多少分钟才能追上？

分析 选取橡皮筏为参照物，则橡皮筏是静止的，水也是静止的，船是在静水中行使，往返的速度相同，当绳子断开后，橡皮筏始终呆在A处. 因此，船离开A处和返回到A处的时间相同，也是10分钟，

故船需要10分钟才能追上橡皮筏.

例6 长分别为150米和200米的快慢两列火车行驶在平行轨道上，若坐在快车上的人看见慢车驶过某一窗口的时间是8秒，则坐在慢车上的人看见快车驶过某一窗口的时间是几秒？

分析 选取快车为参照物，则快车是静止的，从“长200米的慢车驶过快车某一窗口的时间需要8秒”，可知慢车的相对速度是$200\div8=25$(米/秒)，这也是坐慢车的人看到的快车行驶的相对速度. 因此，长150米的慢车以25米/秒的速度驶过快车的某一窗口所需的时间为$150\div25=6$(秒).

例 7 甲、乙两人在环形跑道上跑步，他们从同一点同时按顺针方向出发，甲比较快，当甲第一次从背后追上乙时，甲立即转身，以原来的速度按逆时针方向跑去. 当两人相遇时，乙恰好跑了 4 圈. 问甲的速度是乙的几倍？

分析 设甲的速度为 x，乙的速度为 y，选取乙为参照物，则乙始终在出发点，第一次甲追上乙时，甲跑的相对路程是 1 圈，相对速度是 $(x-y)$；第二次两人相遇时，甲跑的相对路程也是 1 圈，相对速度则是 $(x+y)$，因此，甲跑的时间共为：$\frac{1}{x-y}+\frac{1}{x+y}$. 又由已知，乙跑了 4 圈，所需时间为 $\frac{4}{y}$. 由两人跑的时间相同得：$\frac{1}{x-y}+\frac{1}{x+y}=\frac{4}{y}$，整理，得 $2x^2-xy-2y^2=0$，解得 $x=\frac{1+\sqrt{17}}{4}y$（负根已舍去）. 故甲的速度是乙的 $\frac{1+\sqrt{17}}{4}$ 倍.

四、巧用根的判别法

在运动学的追及问题中，经常会考查追及的条件. 如：某个物理量满足什么条件时，两物体才不致相碰，或能相遇等问题. 其解法较多，但较规范、严谨且容易掌握的应是下面通过实例介绍的“二次方程判别法”.

例 8 如图 5 所示，处于平直轨道上的甲、乙两物体分别以 v_1 和 v_2 的速度同向匀速运动，$v_1>v_2$，当甲、乙两物体相距 S_0 时，甲开始做匀减速直线运动，加速度的大小为 a，为分别使两物不相遇、刚好相遇、相遇二次，则 a 应分别满足什么条件？（假定甲能从乙旁边通过互不影响）

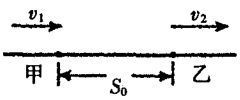

图 5

析与解 假设能相遇，且设从甲开始减速运动 t 时相遇，则 $(S_0+S_{乙})-S_{甲}=0$，即：$(S_0+v_0t)-(v_1t-\frac{1}{2}at^2)=0$，化简整理：$\frac{1}{2}at^2+(v_2-v_1)t+S_0=0$.

这是一个关于 t 的二次方程，用 Δ 表示这个方程的根的判别式，则

(1) 当 $\Delta<0$ 时，没有实数根，即没有相遇时间，说明两物体不会相遇，所以为了使两物体不相遇，需 $\Delta<0$，即 $(v_2-v_1)^2-4\times\frac{1}{2}aS_0<0$，故 $a>(v_2-v_1)^2/2S_0$.

(2) 为了使两物体刚好相遇，即甲刚好追上乙，此时只有一个相遇时间，所以需 $\Delta=0$，即 $(v_2^2-v_1)^2-4\times\frac{1}{2}aS_0=0$，故 $a=(v_2-v_1)^2/2S_0$.

(3) 为了使两物体相遇两次，即甲先超过乙，之后乙赶上甲. 此时有两个相遇时间，即方程应有 2 个根，所以需 $\Delta>0$，即 $(v_2-v_1)^2-4\times\frac{1}{2}aS_0>0$，故 $a<(v_2-v_1)^2/2S_0$，此时方程有二个正根，即有两个相遇时间.

从上述分析知，相遇时间 t 的二次方程无解、有两个相同解、有两个不同解，与两物体不相遇、相遇一次、相遇二次而对应.

例 9 已知直线 $y=2x+1$ 与 $y=x^2-3x+m-1$ 有两个交点，求 m 的取值范围.

分析 直线 $y=mx+n$ 与抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 相交时，有 $mx+n=ax^2+bx+c$ 成立，所以这两个图象有两个交点时，方程 $mx+n=ax^2+bx+c$ 有两个不同的实数根，此时 $\Delta>0$.

解 ∵ 直线 $y=2x+1$ 与抛物线 $y=x^2-3x+m-1$ 有两个交点.

∴ 方程 $2x+1=x^2-3x+m-1$，即 $x^2-5x+m-2=0$ 有两个不相等的实根. ∴ $\Delta>0$，即 $(-5)^2-4\times1(m-2)>0$，解得 $m<33/4$. 当 $m<33/4$ 时，直线 $y=2x+1$ 与抛物线 $y=x^2-3x+m-1$ 有两个交点.

例 10 若方程组 $\begin{cases}y=mx+2 & (1)\\ y^2+4x+1=2y & (2)\end{cases}$ 没有实数解，求 m 的取值范围.

分析 由于我们学过一元二次方程根的判别式，于是想到把(1)代入(2)消去一个未知数 y，得关于 x 的方程 $(mx+2)^2+4x+1=2(mx+2)$，化简为 $m^2x^2+(2m+4)x+1=0$，由于二次项系含有字母，因而，它没有实数根的条件应从两个方面考虑：一、当它为一元二次方程时，即 $m^2\neq0$ 时，满足 $\Delta<0$；二、当它为一元一次方程，即 $m^2=0$ 时，方程有解的情况.

解 把(1)代入(2)整理得：

$m^2x^2+(2m+4)x+1=0$. (3)

(1) 当 $m=0$ 时方程(3)为一元一次方程 $4x+1=0$，解得 $x=-1/4$，此时有解.

(2) 当 $m\neq0$ 时，方程(3)为一元二次方程，

$\Delta=(2m+4)^2-4m^2=16m+16$，因为它没有实数解的条件是 $\Delta<0$，即 $16m+16<0$，

∴ $m<-1$. 综上所述，当 $m<-1$ 且 $m\neq0$ 时，原方程组没有实数解.