

高中数学巧学巧解大全

第一部分 高中数学活题巧解方法总论

一、代入法

若动点 $P(x, y)$ 依赖于另一动点 $Q(x_0, y_0)$ 而运动, 而 Q 点的轨迹方程已知 (也可能易于求得) 且可建立关系式 $x_0 = f(x)$, $y_0 = g(x)$, 于是将这个 Q 点的坐标表达式代入已知 (或求得) 曲线的方程, 化简后即得 P 点的轨迹方程, 这种方法称为代入法, 又称转移法或相关点法。

【例 1】(2009 年高考广东卷) 已知曲线 $C: y = x^2$ 与直线 $l: x - y + 2 = 0$ 交于两点 $A(x_A, y_A)$ 和 $B(x_B, y_B)$, 且 $x_A < x_B$, 记曲线 C 在点 A 和点 B 之间那一段 L 与线段 AB 所围成的平面区域 (含边界) 为 D . 设点 $P(s, t)$ 是 L 上的任一点, 且点 P 与点 A 和点 B 均不重合. 若点 Q 是线段 AB 的中点, 试求线段 PQ 的中点 M 的轨迹方程;

【巧解】联立 $y = x^2$ 与 $y = x + 2$ 得 $x = -1, x_B = 2$, 则 AB 中点 $Q(\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$,

设线段 PQ 的中点 M 坐标为 (x, y) , 则 $x = \frac{\frac{1}{2} + s}{2}$, $y = \frac{\frac{5}{2} + t}{2}$,

即 $s = 2x - \frac{1}{2}$, $t = 2y - \frac{5}{2}$, 又点 P 在曲线 C 上,

$\therefore 2y - \frac{5}{2} = (2x - \frac{1}{2})^2$ 化简可得 $y = x^2 - x + \frac{11}{8}$, 又点 P 是 L 上的任一点,

且不与点 A 和点 B 重合, 则 $-1 < 2x - \frac{1}{2} < 2$, 即 $-\frac{1}{4} < x < \frac{5}{4}$,

\therefore 中点 M 的轨迹方程为 $y = x^2 - x + \frac{11}{8}$ ($-\frac{1}{4} < x < \frac{5}{4}$) .

【例 2】(2008 年, 江西卷) 设 $P(x_0, y_0)$ 在直线 $x = m$ ($y \neq \pm m, 0 < m < 1$) 上, 过点 P 作双曲线 $x^2 - y^2 = 1$ 的两条切线 PA, PB , 切点为 A, B , 定点 $M(\frac{1}{m}, 0)$. 过点 A 作直线 $x - y = 0$ 的垂线, 垂足为 N , 试求 ΔAMN 的重心 G 所在的曲线方程。

【巧解】设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 由已知得到 $y_1 y_2 \neq 0$, 且 $x_1^2 - y_1^2 = 1$, $x_2^2 - y_2^2 = 1$, (1) 垂

线 AN 的方程为: $y - y_1 = -x + x_1$,

由 $\begin{cases} y - y_1 = -x + x_1 \\ x - y = 0 \end{cases}$ 得垂足 $N(\frac{x_1 + y_1}{2}, \frac{x_1 + y_1}{2})$, 设重心 $G(x, y)$

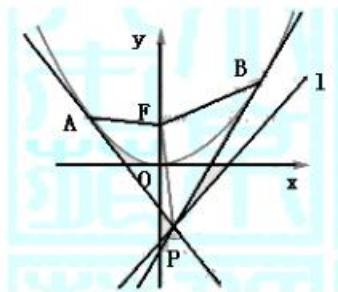
所以
$$\begin{cases} x = \frac{1}{3}(x_1 + \frac{1}{m} + \frac{x_1 + y_1}{2}) \\ y = \frac{1}{3}(y_1 + 0 + \frac{x_1 + y_1}{2}) \end{cases}$$

解得
$$\begin{cases} x_1 = \frac{9x - 3y - \frac{3}{m}}{4} \\ y_1 = \frac{9y - 3x + \frac{1}{m}}{4} \end{cases}$$

由 $x_1^2 - y_1^2 = 1$ 可得 $(3x - 3y - \frac{1}{m})(3x + 3y - \frac{1}{m}) = 2$

即 $(x - \frac{1}{3m})^2 - y^2 = \frac{2}{9}$ 为重心 G 所在曲线方程

巧练一：（2005 年，江西卷）如图，设抛物线 $C: y = x^2$ 的焦点为 F ，动点 P 在直线 $l: x - y - 2 = 0$ 上运动，过 P 作抛物线 C 的两条切线 PA 、 PB ，且与抛物线 C 分别相切于 A 、 B 两点，求 $\triangle APB$ 的重心 G 的轨迹方程。



巧练二：（2006 年，全国 I 卷）在平面直角坐标系 xOy 中，有一个以 $F_1(0, -\sqrt{3})$ 和 $F_2(0, \sqrt{3})$ 为焦点、离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 的椭圆，设椭圆在第一象限的部分为曲线 C ，动点 P 在 C 上， C 在点 P 处的切线与 x 、 y 轴的交点分别为 A 、 B ，且向量 $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ ，求点 M 的轨迹方程。

二、直接法

直接从题设的条件出发，利用已知条件、相关公式、公理、定理、法则通过准确的运算、严谨的推理、合理的验证得出正确的结论，从而确定选择支的方法叫直接法。从近几年全国

各地的高考数学试题来看，绝大部分选择题的解答用的是此法。但解题时也要“盯住选项特点”灵活做题，一边计算，一边对选项进行分析、验证，或在选项中取值带入题设计算，验证、筛选而迅速确定答案。

【例 1】(2009 年高考全国 II 卷) 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1(a > 0, b > 0)$ 的右焦点为 F,

过F且斜率为 $\sqrt{3}$ 的直线交C于A、B两点。若 $\overrightarrow{AF} = 4\overrightarrow{FB}$ ，则C的离心率为()

- (A) $\frac{6}{5}$ (B) $\frac{7}{5}$ (C) $\frac{8}{5}$ (D) $\frac{9}{5}$

【巧解】设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $F(c, 0)$, 由 $\overrightarrow{AF} = 4\overrightarrow{FB}$, 得 $(c - x_1, -y_1) = 4(x_2 - c, y_2)$

$\therefore y_1 = -4y_2$, 设过 F 点斜率为 $\sqrt{3}$ 的直线方程为 $x = \frac{y}{\sqrt{3}} + c$,

$$\text{由} \begin{cases} x = \frac{y}{\sqrt{3}} + c \\ b^2 x^2 - a^2 y^2 - a^2 b^2 = 0 \end{cases} \quad \text{消去 } x \text{ 得: } \left(\frac{b^2}{3} - a^2\right)y^2 + \frac{2b^2c}{\sqrt{3}}y + b^4 = 0,$$

$$\therefore \begin{cases} y_1 + y_2 = -\frac{6b^2c}{\sqrt{3}(b^2 - 3a^2)} \\ y_1 y_2 = \frac{3b^4}{b^2 - 3a^2} \end{cases}, \quad \text{将 } y_1 = -4y_2 \text{ 代入得} \begin{cases} -3y_2 = -\frac{6b^2c}{\sqrt{3}(b^2 - 3a^2)} \\ -4y_2^2 = \frac{3b^4}{b^2 - 3a^2} \end{cases} \text{化简得}$$

$$\begin{cases} y_2 = \frac{2b^2c}{\sqrt{3}(b^2 - 3a^2)} \\ y_2^2 = -\frac{3b^4}{4(b^2 - 3a^2)} \end{cases}, \quad \therefore \frac{4b^4c^2}{3(b^2 - 3a^2)^2} = -\frac{3b^4}{4(b^2 - 3a^2)},$$

$$\text{化简得: } 16c^2 = 9(3a^2 - b^2) = 9(3a^2 - c^2 + a^2), \therefore 25c^2 = 36a^2, e^2 = \frac{36}{25}, \text{ 即 } e = \frac{6}{5}.$$

故本题选 (A)

【例2】(2008年, 四川卷) 设定义在 R 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x) \cdot f(x+2) = 13$, 若

$f(1) = 2$, 则 $f(99) = (\quad)$

【巧解】 ∵ $f(x+2) = \frac{13}{f(x)}$, ∴ $f(x+4) = \frac{13}{f(x+2)} = \frac{13}{\frac{13}{f(x)}} = f(x)$

∴ 函数 $f(x)$ 为周期函数, 且 $T=4$, ∴ $f(99) = f(4 \times 24 + 3) = f(3) = \frac{13}{f(1)} = \frac{13}{2}$

故选 (C)

巧练一: (2008 年, 湖北卷) 若 $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + b \ln(x+2)$ 在 $(-1, +\infty)$ 上是减函数, 则 b 的取值范围是 ()

- A. $[-1, +\infty)$ B. $(-1, +\infty)$ C. $(-\infty, -1]$ D. $(-\infty, -1)$

巧练二: (2008 年, 湖南卷) 长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的 8 个顶点在同一个球面上, 且 $AB=2$, $AD=\sqrt{3}$, $AA_1=1$, 则顶点 A 、 B 间的球面距离是 ()

- A. $2\sqrt{2}\pi$ B. $\sqrt{2}\pi$ C. $\frac{\sqrt{2}\pi}{2}$ D. $\frac{\sqrt{2}\pi}{4}$

三、定义法

所谓定义法, 就是直接用数学定义解题。选择题的命题侧重于对圆锥曲线定义的考查, 凡题目中涉及焦半径、通径、准线、离心率及离心率的取值范围等问题, 用圆锥曲线的第一和第二定义解题, 是一种重要的解题策略。

【例 1】 (2009 年高考福建卷, 理 13) 过抛物线 $y^2 = 2px(p > 0)$ 的焦点 F 作倾斜角为 45° 的直线交抛物线于 A 、 B 两点, 线段 AB 的长为 8, 则 $p = \underline{\hspace{2cm}}$.

【巧解】 依题意直线 AB 的方程为 $y = x - \frac{p}{2}$, 由 $\begin{cases} y = x - \frac{p}{2} \\ y^2 = 2px \end{cases}$ 消去 y 得:

$$x^2 - 3px + \frac{p^2}{4} = 0, \text{ 设 } A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), \therefore x_1 + x_2 = 3p, \text{ 根据抛物线的定义。}$$

$$|BF|=x_2+\frac{p}{2}, |AF|=x_1+\frac{p}{2}, \therefore |AB|=x_1+x_2+p=4p=8, \therefore p=2,$$

故本题应填 2。

【例 2】(2008 年, 山东卷, 理 10) 设椭圆 C 的离心率为 $\frac{5}{13}$, 焦点在 x 轴上且长轴长为 26. 若曲线 C_2 上的点到椭圆 C 的两个焦点的距离的差的绝对值等于 8, 则曲线 C_2 的标准方程为()

(A) $\frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$

(B) $\frac{x^2}{13^2} - \frac{y^2}{5^2} = 1$

(C) $\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{4^2} = 1$

(D) $\frac{x^2}{13^2} - \frac{y^2}{12^2} = 1$

【巧解】由题意椭圆的半焦距为 $c=5$, 双曲线 C_2 上的点 P 满足 $\|PF_1\| - \|PF_2\|=8 < F_1F_2\|$, \therefore 点 P 的轨迹是双曲线, 其中 $c=5$, $a=4$, $\therefore b=3$, 故

双曲线方程为 $\frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$, \therefore 选 (A)

巧练一: (2008 年, 陕西卷) 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a>0, b>0)$ 的左、右焦点分别是 F_1, F_2 ,

过 F_1 作倾斜角为 30° 的直线交双曲线右支于 M 点, 若 MF_2 垂直于 x 轴, 则双曲线的离心率为()

A. $\sqrt{6}$

B. $\sqrt{3}$

C. $\sqrt{2}$

D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

巧练二: (2008 年, 辽宁卷) 已知点 P 是抛物线 $y^2 = 2x$ 上的一个动点, 则点 P 到点 $(0, 2)$

的距离与 P 到该抛物线准线的距离之和的最小值为()

(A) $\frac{\sqrt{17}}{2}$

(B) 3

(C) $\sqrt{5}$

(D) $\frac{9}{2}$

四、向量坐标法

向量坐标法是一种重要的数学思想方法，通过坐标化，把长度之间的关系转化成坐标之间的关系，使问题易于解决，并从一定程度上揭示了问题的数学本质。在解题实践中若能做到多用、巧用和活用，则可源源不断地开发出自己的解题智慧，必能收到事半功倍的效果。

【例1】(2008年，广东卷) 在平行四边形ABCD中，AC与BD交于点O，E是线段OD的中点，

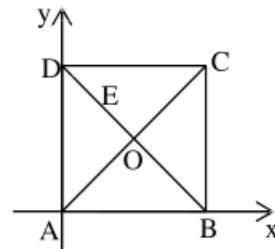
\overrightarrow{AE} 的延长线与CD交于点F。若 $\overrightarrow{AC} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{BD} = \mathbf{b}$, 则 $\overrightarrow{AF} = (\quad)$

- A. $\frac{1}{4}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b}$ B. $\frac{2}{3}\mathbf{a} + \frac{1}{3}\mathbf{b}$ C. $\frac{1}{2}\mathbf{a} + \frac{1}{4}\mathbf{b}$ D. $\frac{1}{3}\mathbf{a} + \frac{2}{3}\mathbf{b}$

【巧解】如图所示，选取边长为2的正方形ABCD

则 $B(2,0)$, $C(2,2)$, $D(0,2)$, $O(1,1)$, $E(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$,

\therefore 直线AE的方程为 $y = 3x$, 联立 $\begin{cases} y = 3x \\ y = 2 \end{cases}$ 得 $F(\frac{2}{3}, 2)$



$\therefore \overrightarrow{AF} = (\frac{2}{3}, 2)$, 设 $\overrightarrow{AF} = x\overrightarrow{AC} + y\overrightarrow{BD}$, 则 $\overrightarrow{AF} = x(2,2) + y(-2,2) = (2x - 2y, 2x + 2y)$

$\therefore \begin{cases} 2x - 2y = \frac{2}{3} \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$ 解之得 $x = \frac{2}{3}$, $y = \frac{1}{3}$, $\therefore \overrightarrow{AF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BD} = \frac{2}{3}\mathbf{a} + \frac{1}{3}\mathbf{b}$, 故本题选B

【例2】已知点O为 $\triangle ABC$ 内一点，且 $\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} + 3\overrightarrow{OC} = \mathbf{0}$, 则 $\triangle AOB$ 、 $\triangle AOC$ 、 $\triangle BOC$ 的面积之比等于 ()

- A. 9: 4: 1 B. 1: 4: 9 C. 3: 2: 1 D. 1: 2: 3

【巧解】不妨设 $\triangle ABC$ 为等腰三角形， $\angle B = 90^\circ$

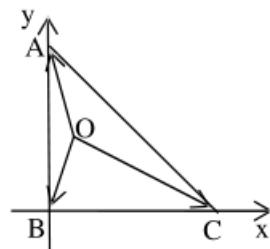
$AB = BC = 3$, 建立如图所示的直角坐标系，则点 $B(0,0)$

$A(0,3)$, $C(3,0)$, 设 $O(x, y)$,

$\therefore \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} + 3\overrightarrow{OC} = \mathbf{0}$, 即 $(-x, 3-y) + 2(-x, -y) + 3(3-x, -y) = (0,0)$

$\therefore \begin{cases} 6x = 9 \\ 6y = 3 \end{cases}$ 解之得 $x = \frac{3}{2}$, $y = \frac{1}{2}$, 即 $O(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$, 又直线 AC 的方程为 $x + y - 3 = 0$, 则点O

到直线 AC 的距离 $h = \frac{|\frac{3}{2} + \frac{1}{2} - 3|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\because |AC| = 3\sqrt{2}$, 因此 $S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2}|AB| \cdot |x| = \frac{9}{4}$,



$$S_{\triangle BOC} = \frac{1}{2} |BC| \cdot |y| = \frac{3}{4}, \quad S_{\triangle AOC} = \frac{1}{2} |AC| \cdot h = \frac{3}{2}, \text{ 故选 C}$$

巧练一：（2008 年，湖南卷）设 D、E、F 分别是 $\triangle ABC$ 的三边 BC、CA、AB 上的点，且 $\overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{FB}$ ，则 $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF}$ 与 \overrightarrow{BC} （ ）

- A. 反向平行 B. 同向平行 C. 互相垂直 D. 既不平行也不垂直

巧练二：设 O 是 $\triangle ABC$ 内部一点，且 $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = -2\overrightarrow{OB}$ ，则 $\triangle AOB$ 与 $\triangle AOC$ 面积之比是_____.

五、查字典法

查字典是大家比较熟悉的，我们用类似“查字典”的方法来解决数字排列问题中数字比较大小的问题，避免了用分类讨论法时容易犯的重复和遗漏的错误，给人以“神来之法”的味道。利用“查字典法”解决数字比较大小的排列问题的思路是“按位逐步讨论法”（从最高位到个位），查首位时只考虑首位应满足题目条件的情况；查前“2”位时只考虑前“2”位中第“2”个数应满足条件的情况；依次逐步讨论，但解题中既要注意数字不能重复，又要有充分的理论准备，如奇、偶问题，3 的倍数和 5 的倍数的特征，0 的特性等等。以免考虑不全而出错。

【例 1】（2007 年，四川卷）用数字 0, 1, 2, 3, 4, 5 可以组成没有重复数字，并且比 20000 大的五位偶数共有（ ）

- (A) 288 个 (B) 240 个 (C) 144 个 (D) 126 个

【巧解】本题只需查首位，可分 3 种情况，① 个位为 0，即 $\times \times \times \times 0$ 型，首位是 2, 3, 4, 5 中的任一个，此时个数为 $A_4^1 A_4^3$ ；② 个位为 2，即 $\times \times \times \times 2$ ，此种情况考虑到万位上不为 0，则万位上只能排 3, 4, 5，所以个数为 $A_3^1 A_4^3$ ；③ 个位为 4， $\times \times \times \times 4$ 型，此种特点考虑到万位上不为 0，则万位上只能排 2, 3, 5，所以个数为 $A_3^1 A_4^3$ ；故共有

$$A_4^1 A_4^3 + 2A_3^1 A_4^3 = 240 \text{ 个。故选 (B)}$$

【例 2】（2004 年全国 II 卷）在由数字 1, 2, 3, 4, 5 组成的所有没有重复数字的 5 位数中，大于 23145 且小于 43521 的数共有（ ）

- A. 56 个 B. 57 个 C. 58 个 D. 60 个

【巧解】(1) 查首位: 只考虑首位大于 2 小于 4 的数, 仅有 1 种情况: 即 $3 \times \times \times$ 型, 此特点

只需其它数进行全排列即可。有 A_4^4 种,

(2) 查前 2 位: 只考虑前 “2” 位中比 3 既大又小的数, 有 4 种情况:

$24 \times \times$, $25 \times \times$, $41 \times \times$, $42 \times \times$ 型, 而每种情况均有 A_3^3 种满足条件, 故共有 $4A_3^3$ 种。

(3) 查前 3 位: 只考虑前 “3” 位中既比 1 大又小于 5 的数, 有 4 种情况:

$234 \times \times$, $235 \times \times$, $431 \times \times$, $432 \times \times$ 型, 而每种情况均有 A_2^2 种满足条件, 故共有 $4A_2^2$ 种。

(3) 查前 4 位: 只考虑前 “4” 位中既比 4 大又小于 2 的数, 此种情况只有

23154 和 43512 两种情况满足条件。故共有 $A_4^4 + 4A_3^3 + 4A_2^2 + 2 = 58$ 个, 故选 C

巧练一: 用数字 0,1,2,3,4,5 可以组成没有重复数字, 并且不大于 4310 的四位偶数共有 ()

- A. 110 种 B. 109 种 C. 108 种 D. 107 种

巧练二: (2007 年, 四川卷) 用数字 1, 2, 3, 4, 5 可以组成没有重复数字, 并且比 20000 大的五位偶数共有 ()

- (A) 48 个 (B) 36 个 (C) 24 个 (D) 18 个

六、挡板模型法

挡板模型法是在解决排列组合应用问题中, 对一些不易理解且复杂的排列组合问题, 当元素相同时, 可以通过设计一个挡板模型巧妙解决, 否则, 如果分类讨论, 往往费时费力, 同时也难以解决问题。

【例 1】 体育老师把 9 个相同的足球放入编号为 1, 2, 3 的三个箱中, 要求每个箱子放球的个数不少于其编号, 则不同的放球方法有 ()

- A. 8 种 B. 10 种 C. 12 种 D. 16 种

【巧解】 先在 2 号盒子里放 1 个小球, 在 3 号盒子里放 2 个小球, 余下的 6 个小球排成一排为: $OOOOOO$, 只需在 6 个小球的 5 个空位之间插入 2 块挡板, 如: $OO|OO|OO$, 每一种插法对应着一种放法, 故共有不同的放法为 $C_5^2 = 10$ 种. 故选 B

【例2】两个实数集 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_{50}\}$, $B = \{b_1, b_2, \dots, b_{25}\}$, 若从 A 到 B 的映射 f 使得 B 中

每个元素都有原象, 且 $f(a_1) \geq f(a_2) \geq \dots \geq f(a_{50})$, 则这样的映射共有 () 个

- A. A_{50}^{24} B. C_{49}^{24} C. C_{50}^{25} D. A_{49}^{25}

【巧解】不妨设 A 和 B 两个集合中的数都是从小到大排列, 将集合 A 的 50 个数视为 50 个相同的小球排成一排为: $OOOOOOOO\dots\dots OO$, 然后在 50 个小球的 49 个空位中插入 24 块木板, 每一种插法对应着一种满足条件 $f(a_1) \geq f(a_2) \geq \dots \geq f(a_{50})$ 对应方法, 故共有不同映射共有 C_{49}^{24} 种. 故选 B

巧练一: 两个实数集合 $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_{15}\}$ 与 $B = \{b_1, b_2, b_3, \dots, b_{10}\}$, 若从 A 到 B 的是映射 f 使 B 中的每一个元素都有原象, 且 $f(a_1) \leq f(a_2) \leq \dots \leq f(a_{10}) < f(a_{11}) < \dots < f(a_{15})$, 则这样的映射共有 ()

- A. C_{10}^5 个 B. C_9^4 个 C. 10^{15} 个 D. $5^{10} \cdot A_{15}^{10}$

巧练二: 10 个完全相同的小球放在标有 1、2、3、4 号的四个不同盒子里, 使每个盒子都不空的放法有 () 种

- A. 24 B. 84 C. 120 D. 96

七、等差中项法

等差中项法是根据题目的题设条件(或隐含)的特征, 联想到等差数列中的等差中项, 构造等差中项, 从而可使问题得到快速解决, 从而使解题过程变得简捷流畅, 令人赏心悦目。

【例1】(2008 年, 浙江卷) 已知 $a \geq 0, b \geq 0$, 且 $a + b = 2$, 则 ()

- (A) $ab \leq \frac{1}{2}$ (B) $ab \geq \frac{1}{2}$ (C) $a^2 + b^2 \geq 2$ (D) $a^2 + b^2 \leq 3$

【巧解】根据 $a + b = 2$ 特征, 可得 $a, 1, b$ 成等差数列, 1 为 a 与 b 的等差中项。可设

$$a = 1 - x, \quad b = 1 + x, \quad \text{其中 } -1 \leq x \leq 1; \quad \text{则 } ab = 1 - x^2, \quad a^2 + b^2 = 2 + 2x^2,$$

又 $0 \leq x^2 \leq 1$, 故 $0 \leq ab \leq 1$, $2 \leq a^2 + b^2 \leq 4$, 由选项知应选 (C)

【例2】(2008 年, 重庆卷) 已知函数 $y = \sqrt{1-x} + \sqrt{x+3}$ 的最大值为 M , 最小值为 m , 则 $\frac{m}{M}$ 的值为 ()

- (A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

【巧解】由 $y = \sqrt{1-x} + \sqrt{x+3}$ 可得, $\frac{y}{2}$ 为 $\sqrt{1-x}$ 与 $\sqrt{x+3}$ 的等差中项,

$$\text{令 } \sqrt{1-x} = \frac{y}{2} + t, \quad \sqrt{x+3} = \frac{y}{2} - t, \quad \text{其中 } |t| \leq \frac{y}{2},$$

则 $(\frac{y}{2} + t)^2 + (\frac{y}{2} - t)^2 = 1 - x + x + 3 = 4$, 即 $t^2 = 2 - \frac{y^2}{4}$, 又 $|t| \leq \frac{y}{2}$, 则

$0 \leq t^2 \leq \frac{y^2}{4}$, 故 $0 \leq 2 - \frac{y^2}{4} \leq \frac{y^2}{4}$, 解之得 $2 \leq y \leq 2\sqrt{2}$, 即 $M = 2\sqrt{2}$, $m = 2$

$$\therefore \frac{m}{M} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ 故选 (C)}$$

巧练: (2008 年, 江苏卷) $x, y, z \in R^*, x - 2y + 3z = 0, \frac{y^2}{xz}$ 的最小值_____.

八、逆向化法

逆向化法是在解选择题时, 四个选项以及四个选项中只有一个是符合题目要求的都是解题重要的信息。逆向化策略是把四个选项作为首先考虑的信息, 解题时, 要“盯住选项”, 着重通过对选项的分析, 考查, 验证, 推断进行否定或肯定, 或者根据选项之间的关系进行逻辑分析和筛选, 找到所要选择的, 符合题目要求的选项。

【例 1】(2008 年, 湖北卷) 函数 $f(x) = \frac{1}{x} \ln(\sqrt{x^2 - 3x + 2} + \sqrt{-x^2 - 3x + 4})$ 的

定义域为 ()

A. $(-\infty, -4] \cup [2, +\infty)$ B. $(-4, 0) \cup (0, 1)$

C. $[-4, 0) \cup (0, 1]$ D. $[-4, 0) \cup (0, 1)$

【巧解】观察四个选项取端点值代入计算即可, 取 $x = 1$, 出现函数的真数为 0, 不满足, 排含有 1 的答案 C, 取 $x = -4$ 代入计算解析式有意义, 排不含有 -4 的答案 B, 取 $x = 2$ 出现二次根式被开方数为负, 不满足, 排含有 2 的答案 A, 故选 D

评析: 求函数的定义域只需使函数解析式有意义, 凡是考查具体函数的定义域问题都可用特值法代入验证快速确定选项。

【例 2】(2008 年, 江西卷) 已知函数 $f(x) = 2mx^2 - 2(4-m)x + 1, g(x) = mx$, 若对于任一

实数 x , $f(x)$ 与 $g(x)$ 的值至少有一个为正数, 则实数 m 的取值范围是 ()

- A. $(0, 2)$ B. $(0, 8)$
C. $(2, 8)$ D. $(-\infty, 0)$

【巧解】 观察四个选项中有三个答案不含 2, 那么就取 $m = 2$ 代入验证是否符合题意即可,

取 $m = 2$, 则有 $f(x) = 4x^2 - 4x + 1 = (2x - 1)^2$, 这个二次函数的函数值 $f(x) > 0$ 对

$x \in R$ 且 $x \neq \frac{1}{2}$ 恒成立, 现只需考虑 $g(x) = 2x$ 当 $x = \frac{1}{2}$ 时函数值是否为正数即可。这显然

为正数。故 $m = 2$ 符合题意, 排除不含 $m = 2$ 的选项 A、C、D。所以选 B

巧练一: (2007 年, 湖北卷) 函数 $y = \frac{2^x + 1}{2^x - 1}$ ($x < 0$) 的反函数是 ()

- A. $y = \log_2 \frac{x+1}{x-1}$ ($x < -1$) B. $y = \log_2 \frac{x+1}{x-1}$ ($x > 1$)
C. $y = \log_2 \frac{x-1}{x+1}$ ($x < -1$) D. $y = \log_2 \frac{x-1}{x+1}$ ($x > 1$)

巧练二: (2004 年, 重庆卷) 不等式 $x + \frac{2}{x+1} > 2$ 的解集是 ()

- A. $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$ B. $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$
C. $(-1, 0) \cup (0, 1)$ D. $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

九、极限化法

极限化法是在解选择题时, 有一些任意选取或者变化的元素, 我们对这些元素的变化趋势进行研究, 分析它们的极限情况或者极端位置, 并进行估算, 以此来判断选择的结果。这种通过动态变化, 或对极端取值来解选择题的方法是一种极限化法。

【例 1】 正三棱锥 $A-BCD$ 中, E 在棱 AB 上, F 在棱 CD 上, 使 $\frac{AE}{EB} = \frac{CF}{FD} = \lambda$ ($\lambda > 0$),

设 α 为异面直线 EF 与 AC 所成的角, β 为异面直线 EF 与 BD 所成的角, 则 $\alpha + \beta$ 的

值是 ()

- A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{4}$ C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{\pi}{2}$

【巧解】 当 $\lambda \rightarrow 0$ 时, $E \rightarrow A$, 且 $F \rightarrow C$, 从而 $EF \rightarrow AC$ 。因为 $AC \perp BD$, 排除选择支 A, B, C 故选 D (或 $\lambda \rightarrow +\infty$ 时的情况, 同样可排除 A, B, C), 所以选 D

【例 2】若 $a = (\frac{2}{3})^x, b = x^{\frac{3}{2}}, c = \log_{\frac{2}{3}} x$, 当 $x > 1$ 时, a, b, c 的大小关系是 ()

- A. $a < b < c$ B. $c < a < b$ C. $c < b < a$ D. $a < c < b$

【巧解】当 $x \rightarrow 0$ 时, $a \rightarrow \frac{2}{3}$, $b \rightarrow 1$, $c \rightarrow 0$, 故 $c < a < b$, 所以选 B

巧练一: 若 $0 < x < \frac{\pi}{2}$, 则 $2x$ 与 $3 \sin x$ 的大小关系 ()

- A. $2x > 3 \sin x$ B. $2x < 3 \sin x$ C. $2x = 3 \sin x$ D. 与 x 的取值有关

巧练二: 对于任意的锐角 α, β , 下列不等关系式中正确的是 ()

- (A) $\sin(\alpha + \beta) > \sin \alpha + \sin \beta$ (B) $\sin(\alpha + \beta) > \cos \alpha + \cos \beta$
(C) $\cos(\alpha + \beta) > \sin \alpha + \sin \beta$ (D) $\cos(\alpha + \beta) < \cos \alpha + \cos \beta$

十、整体化法

整体化法是在解选择题时, 有时并不需要把题目精解出来, 而是从题目的整体去观察, 分析和把握, 通过整体反映的性质或者对整体情况的估算, 确定具体问题的结果, 例如, 对函数问题, 有时只需要研究它的定义域, 值域, 而不一定关心它的解析式, 对函数图象, 有时可以从它的整体变化趋势去观察, 而不一定思考具体的对应关系, 或者对 4 个选项进行比较以得出结论, 或者从整体, 从全局进行估算, 而忽略具体的细节等等, 都可以缩短解题过程, 这是一种从整体出发进行解题的方法.

【例 1】已知 θ 是锐角, 那么下列各值中, $\sin \theta + \cos \theta$ 可能取到的值是 ()

- A. $\frac{3}{4}$ B. $\frac{4}{3}$ C. $\frac{5}{3}$ D. $\frac{1}{2}$

【巧解】 $\because \sin \theta + \cos \theta = \sqrt{2} \sin(\theta + \frac{\pi}{4})$, 又 θ 是锐角, $\therefore 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

$\frac{\pi}{4} < \theta + \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{4}$, $\therefore \frac{\sqrt{2}}{2} < \sin(\theta + \frac{\pi}{4}) \leq 1$, 即 $1 < \sqrt{2} \sin(\theta + \frac{\pi}{4}) \leq \sqrt{2}$, 故选 B

【例 2】(2002 年, 全国卷) 据 2002 年 3 月 5 日九届人大五次会议《政府工作报告》指出“2001 年国内生产总值达到 95933 亿元, 比上一年增长 7.3%.” 如果“十·五”期间(2001~2005 年) 每年的国内生产总值按此年增长率增长, 那么, 到“十·五”末, 我国国内生产总值约为 ()

- (A) 115000 亿元 (B) 120000 亿元
(C) 127000 亿元 (D) 135000 亿元

【巧解】 注意到已知条件给出的数据非常精确，2001年国内生产总值达到95933亿元，精确到亿元，而四个选项提供的数据都是近似值，精确到千亿元，即后三位都是0，因此，可以从整体上看问题，忽略一些局部的细节。

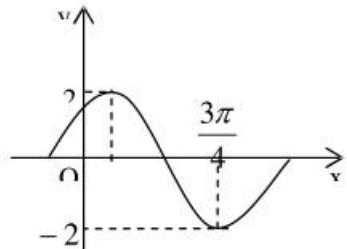
把95933亿元近似地视为96000亿元，又把 0.073^2 近似地视为0.005，这样一来，就有

$$95933 \times (1 + 7.3\%)^4 \approx 96000 \left(1 + 4 \times 0.073 + 6 \times 0.073^2\right)$$

$$\approx 96000 \times (1 + 0.292 + 6 \times 0.005) = 126720 \approx 127000.$$

巧练一： 如图所示为三角函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$, ($|\varphi| < \frac{\pi}{2}$, $A > 0$) 的图象的一部分，则此函数的周期 T 可能是（ ）

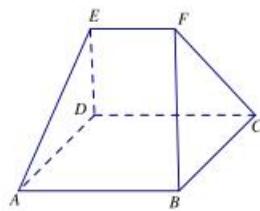
- A. 4π
- B. 2π
- C. π
- D. $\frac{11\pi}{8}$



巧练二： (全国卷) 如图，在多面体 $ABCDEF$ 中，已知面 $ABCD$ 是边长为 3 的正方形， $EF \parallel AB$,

$EF = \frac{3}{2}$, EF 与面 AC 的距离为 2，则该多面体的体

- (A) $\frac{9}{2}$
- (B) 5
- (C) 6
- (D) $\frac{15}{2}$



十一、参数法

在解题过程中，适当引入一个或几个新变量代替原式中的某些量，使得原式中仅含有这些新变量，以此作为媒介，在进行分析和综合，然后对新变量求出结果，从而解决问题的方法叫参数法。

【例 1】 (2008 年，安徽卷) 设椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 过点 $M(\sqrt{2}, 1)$ ，且左焦点为 $F_1(-\sqrt{2}, 0)$

(I) 求椭圆 C 的方程；

(II) 当过点 $P(4,1)$ 的动直线 l 与椭圆 C 相交于两不同点 A, B 时, 在线段 AB 上取点 Q , 满足 $|\overrightarrow{AP}| \cdot |\overrightarrow{QB}| = |\overrightarrow{AQ}| \cdot |\overrightarrow{PB}|$, 证明: 点 Q 总在某定直线上。

【巧解】(1) 由题意: $\begin{cases} c^2 = 2 \\ \frac{2}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1 \\ c^2 = a^2 - b^2 \end{cases}$, 解得 $a^2 = 4, b^2 = 2$, 所求椭圆方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$

(2) 由 $|\overrightarrow{AP}| \cdot |\overrightarrow{QB}| = |\overrightarrow{AQ}| \cdot |\overrightarrow{PB}|$ 得: $\frac{|\overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{PB}|} = \frac{|\overrightarrow{AQ}|}{|\overrightarrow{QB}|}$ 设点 Q, A, B 的坐标分别为 $(x, y), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 。由题设知 $|\overrightarrow{AP}|, |\overrightarrow{PB}|, |\overrightarrow{AQ}|, |\overrightarrow{QB}|$ 均不为零, 记 $\lambda = \frac{|\overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{PB}|} = \frac{|\overrightarrow{AQ}|}{|\overrightarrow{QB}|}$, 则

$\lambda > 0$ 且 $\lambda \neq 1$, 又 A, P, B, Q 四点共线, 从而 $\overrightarrow{AP} = -\lambda \overrightarrow{PB}, \overrightarrow{AQ} = \lambda \overrightarrow{QB}$,

$$\text{于是 } 4 = \frac{x_1 - \lambda x_2}{1 - \lambda}, \quad 1 = \frac{y_1 - \lambda y_2}{1 - \lambda}, \quad x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$$

$$\text{从而 } \frac{x_1^2 - \lambda^2 x_2^2}{1 - \lambda^2} = 4x, \quad \dots \dots \textcircled{1} \quad \frac{y_1^2 - \lambda^2 y_2^2}{1 - \lambda^2} = y, \quad \dots \dots \textcircled{2}$$

又点 A, B 在椭圆 C 上, 即

$$x_1^2 + 2y_1^2 = 4, \dots \dots \textcircled{3} \quad x_2^2 + 2y_2^2 = 4, \dots \dots \textcircled{4}$$

$\textcircled{1} + \textcircled{2} \times 2$ 并结合 $\textcircled{3}, \textcircled{4}$ 得 $4x + 2y = 4$, 即点 $Q(x, y)$ 总在定直线 $2x + y - 2 = 0$ 上。

【例 2】(2004 年, 辽宁卷) 设椭圆方程为 $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$, 过点 $M(0, 1)$ 的直线 l 交椭圆于点 A, B , O 是坐标原点, 点 P 满足 $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$, 点 N 的坐标为 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, 当 l 绕点 M 旋转时, 求动点 P 的轨迹方程;

【巧解】 直线 l 过点 $M(0, 1)$ 设其斜率为 k , 则 l 的方程为 $y = kx + 1$.

记 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 由题设可得点 A, B 的坐标 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 是方程组

$$\begin{cases} y = kx + 1 & \textcircled{1} \\ x^2 + \frac{y^2}{4} = 1 & \textcircled{2} \end{cases} \quad \text{的解.}$$

将①代入②并化简得， $(4+k^2)x^2+2kx-3=0$ ，所以

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{2k}{4+k^2}, \\ y_1 + y_2 = \frac{8}{4+k^2}. \end{cases}$$

于是

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right) = \left(\frac{-k}{4+k^2}, \frac{4}{4+k^2} \right).$$

设点 P 的坐标为 (x, y) ，则

$$\begin{cases} x = \frac{-k}{4+k^2}, \\ y = \frac{4}{4+k^2}. \end{cases}$$

消去参数 k 得 $4x^2 + y^2 - y = 0$

当 k 不存在时，A、B 中点为坐标原点 $(0, 0)$ ，也满足方程③，所以点 P 的轨迹方程为 $4x^2 + y^2 - y = 0$.

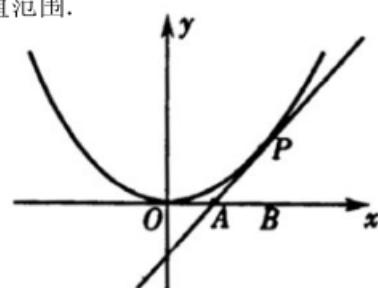
巧练一：（2008 年，全国 I 卷）直线 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ 通过点 $M(\cos \alpha, \sin \alpha)$ ，则有 ()

- A. $a^2 + b^2 \leq 1$ B. $a^2 + b^2 \geq 1$ C. $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \geq 1$ D. $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \leq 1$

巧练二：如图，已知直线 l 与抛物线 $x^2 = 4y$ 相切于点 $P(2, 1)$ ，且与 x 轴交于点 A ， O 为坐标原点，定点 B 的坐标为 $(2, 0)$.

(I) 若动点 M 满足 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BM} + \sqrt{2} |\overrightarrow{AM}| = 0$ ，求点 M 的轨迹 C；

(II) 若过点 B 的直线 l' （斜率不等于零）与 (I) 中的轨迹 C 交于不同的两点 E、F (E 在 B、F 之间)，试求 $\triangle OBE$ 与 $\triangle OBF$ 面积之比的取值范围.



十二、交轨法

如果所求轨迹是两条动曲线(包括直线)的交点所得,其一般方法是恰当地引进一个参数,写出两条动曲线的方程,消去参数,即得所求的轨迹方程,所以交轨法是参数法的一种特殊情况。

【例1】已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$, 短轴一个端点到右焦点 F 的距离为 $\sqrt{3}$.

(I) 求椭圆 C 的方程;

(II) 设直线 l 经过椭圆的焦点 F 交椭圆 C 于 A, B 两点, 分别过 A, B 作椭圆的两条切线, A, B 为切点, 求两条切线的交点 P 的轨迹方程。

【巧解】(I) 设椭圆的半焦距为 c , 依题意 $\begin{cases} \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{6}}{3}, \\ a = \sqrt{3}, \end{cases}$ 解之得 $c = \sqrt{2}$

$\therefore b = 1$, \therefore 所求椭圆方程为 $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$.

(II) 由(I)知 $F(\sqrt{2}, 0)$, 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), P(x_0, y_0)$, 对椭圆 $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$

求导: $\frac{2x}{3} + 2yy' = 0$, 即 $y' = -\frac{x}{3y}$, 则过 A 点的切线方程 PA 为 $y - y_1 = -\frac{x_1}{3y_1}(x - x_1)$

整理得 $x_1x + 3y_1y = 3$ ① 同理过 B 点的切线方程 PB 为 $x_2x + 3y_2y = 3$ ②, 又

$P(x_0, y_0)$ 在两切线 PA, PB 上, $\therefore x_1x_0 + 3y_1y_0 = 3$

$x_2x_0 + 3y_2y_0 = 3$, 因此, $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 两点均在直线 $x_0x + 3y_0y = 3$ 上,

又 $\because F(\sqrt{2}, 0)$ 在直线 $x_0x + 3y_0y = 3$ 上, $\therefore x_0\sqrt{2} + 3y_0 \times 0 = 3$, 即 $x_0 = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ 为交点 P 的轨迹方程

【例2】过抛物线 $C: y = x^2$ 上两点 M, N 的直线 l 交 y 轴于点 $P(0, b)$.

(I) 若 $\angle MON$ 是钝角 (O 为坐标原点), 求实数 b 的取值范围;

(II) 若 $b=2$, 曲线 C 在点 M, N 处的切线的交点为 Q . 证明: 点 Q 必在一条定直线上运动.

【巧解】(I) 设点 M, N 坐标分别为 $(x_1, x_1^2), (x_2, x_2^2)$ ($x_1 \neq x_2$), 则 $\overrightarrow{OM} = (x_1, x_1^2), \overrightarrow{ON} = (x_2, x_2^2)$. 由题

意可设直线 l 方程为 $y=kx+b$, 由 $\begin{cases} y = x^2 \\ y = kx + b \end{cases}$ 消去 y 得 $x^2 - kx - b = 0$, ∴ $\begin{cases} \Delta = k^2 + 4b > 0 \\ x_1 + x_2 = k \\ x_1 \cdot x_2 = -b \end{cases}$

∴ $\angle MON$ 是钝角, ∴ $\cos \angle MON = \frac{\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON}}{|OM| \cdot |ON|} < 0$, 且 $\cos \angle MON \neq -1$.

由 $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = x_1 x_2 + x_1^2 x_2^2 = -b + b^2 < 0$, 得 $0 < b < 1$.

此时 O, M, N 三点不共线, $\cos \angle MON = -1$ 不成立.

∴ b 的取值范围是 $(0, 1)$. ······ 6 分

(II) 当 $b=2$ 时, 由 (I) 知 $\begin{cases} x_1 + x_2 = k, \\ x_1 \cdot x_2 = -b = -2, \end{cases}$

∴ 函数 $y=x^2$ 的导数 $y' = 2x$,

抛物线在 $M(x_1, x_1^2), N(x_2, x_2^2)$ 两点处切线的斜率分别为 $k_M = 2x_1, k_N = 2x_2$, ∴ 在点 M, N 处的切线方程分别为

$$l_M : y - x_1^2 = 2x_1(x - x_1),$$

$$l_N : y - x_2^2 = 2x_2(x - x_2).$$

由 $\begin{cases} y - x_1^2 = 2x_1(x - x_1), \\ y - x_2^2 = 2x_2(x - x_2) \end{cases}$ ($x_1 \neq x_2$), 解得交点 Q 的坐标 (x, y) 满足

$$\begin{cases} x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \\ y = x_1 \cdot x_2, \end{cases}$$

∴ Q 点在定直线 $y = -2$ 上运动.

巧练一: 已知定点 $A(1, 0)$ 和定直线 $x = -1$ 上的两个动点 E, F , 满足 $\overrightarrow{AE} \perp \overrightarrow{AF}$, 动点 P 满足 $\overrightarrow{EP} \parallel \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{FO} \parallel \overrightarrow{OP}$ (其中 O 为坐标原点).

(I) 求动点 P 的轨迹 C 的方程;

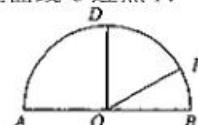
(II) 设直线 l 经过点 $M(1, 0)$ 与轨迹 C 交于 A, B 两点, 分别过 A, B 作轨迹 C 的两条切线,

A, B 为切点, 求两条切线的交点 P 的轨迹方程。

巧练二: 如图, 在以点 O 为圆心, $|AB|=4$ 为直径的半圆 ADB 中, $OD \perp AB$, P 是半圆弧上一点, $\angle POB=30^\circ$. 曲线 C 是满足 $||MA|-|MB||$ 为定值的动点 M 的轨迹, 且曲线 C 过点 P .

(I) 建立适当的平面直角坐标系, 求曲线 C 的方程;

(II) 设过点 D 的直线 l 与曲线 C 相交于不同的两点 E, F .



分别过 E, F 作轨迹 C 的两条切线, E, F 为切点,

求两条切线的交点 Q 的轨迹方程。

十三、几何法

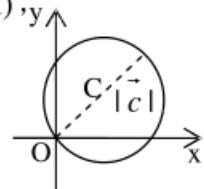
利用平面几何或解析几何的知识分析图形性质，发现动点运动规律，然后得出题目结论的方法叫做几何法。

【例 1】(2008 年, 浙江卷) 已知 \vec{a} 、 \vec{b} 是平面内两个互相垂直的单位向量, 若向量 \vec{c} 满足 $(\vec{a} - \vec{c}) \cdot (\vec{b} - \vec{c}) = 0$, 则 $|\vec{c}|$ 的最大值是 ()

【巧解】 不妨设以 \vec{a} 、 \vec{b} 所在直线为 x 轴、 y 轴，且 $\vec{a} = (1, 0)$ ， $\vec{b} =$

$\vec{c} = (x, y)$ 由已知 $(\vec{a} - \vec{c}) \cdot (\vec{b} - \vec{c}) = 0$ 得 $\vec{a} \cdot \vec{b} - (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} + |\vec{c}|^2 = 0$,

$$\text{整理得 } x^2 + y^2 - x - y = 0$$



即 $(x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{2}$, 所以向量 \vec{c} 的坐标是以 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 为圆心,

$\frac{\sqrt{2}}{2}$ 为半径的一个圆且过原点，故 $|\vec{c}|$ 的最大值即为圆的直径为 $\sqrt{2}$ ，故本题选 (C)

【例2】(2008年, 江苏卷) 若 $AB=2$, $AC=\sqrt{2}BC$, 则 $S_{\triangle ABC}$ 的最大值_____.

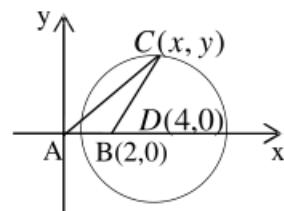
【巧解】建立如图平面直角坐标系, 设 $C(x, y)$, $A(0,0)$, $B(2,0)$, 由 $AC = \sqrt{2}BC$

$$\text{即 } |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{2} |\overrightarrow{BC}|, \therefore \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2} \sqrt{(x-2)^2 + y^2},$$

化简得 $x^2 - 8x + y^2 + 8 = 0$

配方得 $(x-4)^2 + y^2 = 8$, 所以 C 点轨迹是以 D(4,0) 为圆心,

$2\sqrt{2}$ 为半径的一个圆（除去与 x 轴的两个交点），所以当 C



$2\sqrt{2}$ 为半径的一个圆（除去与 x 轴的两个交点），所以当 C 点纵坐标绝对值为 $2\sqrt{2}$ ，即

$|y|=2\sqrt{2}$ 时, $S_{\triangle ABC}$ 有最大值为 $\frac{2 \times 2\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$, 所以答案为 $2\sqrt{2}$

巧练一：已知 $A(m + \frac{1}{m}, m - \frac{1}{m})$, $B(1,0)$, 其中 $m < 0$, 则 $|AB|$ 的最小值为_____.

巧练二：已知实数 x 、 y 满足 $\sqrt{(x-2)^2 + y^2} + \sqrt{(x+2)^2 + y^2} = 6$ ，则 $2x+y$ 的最大值等于_____.

十四、弦中点轨迹法

有关弦中点的问题，主要有三种类型：过定点且被定点平分的弦；平行弦的中点轨迹；过定点的弦重点轨迹。“点差法”解决有关弦中点问题较方便，要点是巧代斜率。

【例1】(2009年高考海南、宁夏卷)已知抛物线C的顶点在坐标原点，焦点为F(1,0)，直线l与抛物线C相交于A, B两点，若AB的中点为(2, 2)，则直线l的方程为_____.

【巧解】由F(1,0)知抛物线C的方程为 $y^2 = 4x$ ，设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ ，代入抛物线方程则有： $y_1^2 = 4x_1$, $y_2^2 = 4x_2$ ，两式相减有 $y_1^2 - y_2^2 = 4(x_1 - x_2)$ ，即 $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(y_1 + y_2) = 4 \Rightarrow k(y_1 + y_2) = 4$ ，又 $y_1 + y_2 = 4$ ， $\therefore 4k = 4$ ，即 $k = 1$ 。故 l_{AB} : $y - 2 = x - 2$ ，即 $y = x$ ， \therefore 本题应填 $y = x$

【例2】椭圆 $ax^2 + by^2 = 1$ 与直线 $y = 1 - x$ 交于A、B两点，若过原点与线段AB中点的直线的倾斜角为 30° ，则 $\frac{a}{b}$ 的值为 ()
(A) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (D) $\sqrt{3}$

【巧解】设AB的中点为 $M(x_0, y_0)$, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ ，则 $x_1 + x_2 = 2x_0$

$y_1 + y_2 = 2y_0$ ，又 $\begin{cases} ax_1^2 + by_1^2 = 1 \\ ax_2^2 + by_2^2 = 1 \end{cases}$ ，两式相减，得

$$a(x_1 + x_2)(x_1 - x_2) + b(y_1 + y_2)(y_1 - y_2) = 0,$$

$$\text{即 } 2ax_0(x_1 - x_2) + 2by_0(y_1 - y_2) = 0, \therefore \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = -\frac{ax_0}{by_0} = -1$$

$$\therefore \frac{ax_0}{by_0} = 1, \text{ 又 } \frac{y_0}{x_0} = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}, \therefore \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ 故选 (B)}$$

巧练一：若椭圆 $mx^2 + ny^2 = 1$ 与直线 $x + y - 1 = 0$ 交于A、B两点，过原点与线段AB中

点的直线的斜率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 则 $\frac{n}{m}$ 的值为_____.

巧练二: 若椭圆 $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$ 的弦被点 $P(4,2)$ 平分, 则此弦所在直线的斜率是为_____.

十五、比较法

现实世界的同类量之间, 有相等关系, 也有不等关系。两个可以比较大小的量 a 和 b , 若 $a - b = 0$, $a - b > 0$, $a - b < 0$, 则它们分别表示 $a = b$, $a > b$, $a < b$, 我们根据两个量的差的正、负或零判断两个量不等或相等的方法叫做差式比较法; 当两个量均为正值时, 有时我们又可以根据 $\frac{a}{b} = 1$, $\frac{a}{b} > 1$ 或 $\frac{a}{b} < 1$ 来判断 $a = b$, $a > b$, $a < b$, 这个方法叫做商式比较法。这两种方法在数列与函数、不等式交汇问题中应用广泛。

比较法之一（作差法）步骤：作差——变形——定号——结论

(1) 作差: 对要比较大小的两个数(或式)作差。

(2) 变形: 常采用配方、因式分解等恒等变形手段, 将“差”化成“积”。

(3) 定号: 就是确定是大于0, 还是等于0, 还是小于0, 最后下结论。

概括为“三步, 一结论”, 这里的“定号”是目的, “变形”是关键。

注意: 若两个正数作差比较有困难, 可以把式子灵活变形, 通过作商或将它们的平方差来比较大小。

【例1】 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1$, 且点 $P(a_n, a_{n+1})(n \in N^*)$ 在直线 $x - y + 1 = 0$ 上

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若函数 $f(n) = \frac{1}{n+a_1} + \frac{1}{n+a_2} + \dots + \frac{1}{n+a_n}$ ($n \in N, n \geq 2$), 求函数 $f(n)$ 的最小值.

【巧解】 (1) \because 点 $P(a_n, a_{n+1})$ 在直线 $x - y - 1 = 0$ 上, 即 $a_{n+1} - a_n = 1$ 且 $a_1 = 1$

\therefore 数列 $\{a_n\}$ 是以1为首项, 1为公差的等差数列

$$\therefore a_n = 1 + (n - 1) \cdot 1 = n$$

$$\therefore a_n = n$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad & f(n) = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}, \\
 f(n+1) &= \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} \\
 \therefore f(n+1) - f(n) &= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} > \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = 0 \\
 \therefore f(n) \text{ 是单调递增的, 故 } f(n) \text{ 的最小值是 } f(2) &= \frac{7}{12}
 \end{aligned}$$

【例 2】(I) 已知函数 $f(x) = -3x^2 + 6x - 2$. S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 点 (n, S_n) ($n \in \mathbb{N}^*$), 在曲线 $y = f(x) + 2$ 上, 求 a_n .

(II) 在 (I) 的条件下, 若 $b_n = (\frac{1}{2})^{n-1}$, $c_n = \frac{a_n \cdot b_n}{6}$, 且 T_n 是数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和. 试问 T_n

是否存在最大值? 若存在, 请求出 T_n 的最大值, 若不存在, 请说明理由.

【巧解】(I) 点 (n, S_n) 在曲线 $y = f(x) + 2$ 上, 所以 $s_n = -3n^2 + 6n$.

当 $n=1$ 时, $a_1 = S_1 = 3$, 当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = 9 - 6n$,

$$\therefore a_n = 9 - 6n.$$

$$\begin{aligned}
 (\text{II}) \quad & b_n = (\frac{1}{2})^{n-1}, c_n = \frac{1}{6} a_n b_n = \frac{9-6n}{6} (\frac{1}{2})^{n-1} = (3-2n)(\frac{1}{2})^n, \\
 \therefore T_n &= c_1 + c_2 + \cdots + c_n = \frac{1}{2} - (\frac{1}{2})^2 + \cdots + (3-2n)(\frac{1}{2})^n.
 \end{aligned}$$

$$\text{利用错位相减法, } \therefore T_n = (2n+1)(\frac{1}{2})^n - 1.$$

$$\therefore T_n + 1 = (2n+1)(\frac{1}{2})^n > 0, T_{n+1} + 1 = (2n+3)(\frac{1}{2})^{n+1} > 0,$$

$$\therefore \frac{T_n + 1}{T_{n+1} + 1} = \frac{(2n+1)(\frac{1}{2})^n}{(2n+3)(\frac{1}{2})^{n+1}} > 1,$$

$$\therefore T_{n+1} + 1 < T_n + 1,$$

$$\therefore T_{n+1} < T_n < \cdots < T_1 = \frac{1}{2}.$$

$$\text{存在最大值 } T_1 = \frac{1}{2}.$$

巧练一: (2005 年, 全国卷) 若 $a = \frac{\ln 2}{2}$, $b = \frac{\ln 3}{3}$, $c = \frac{\ln 5}{5}$, 则 ()

- A. $a < b < c$ B. $c < b < a$ C. $c < a < b$ D. $b < a < c$

巧练二：已知函数 $f(x) = a \cdot 2^x + b$ 的图象过点 $A(1, \frac{3}{2}), B(2, \frac{5}{2})$.

(I) 求函数 $y = f(x)$ 的反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的解析式;

(II) 记 $a_n = 2^{f^{-1}(n)} (n \in N^*)$, 是否存在正数 k,

使得 $(1 + \frac{1}{a_1})(1 + \frac{1}{a_2}) \cdots (1 + \frac{1}{a_n}) \geq k\sqrt{2n+1}$ 对 $n \in N^*$ 均成立. 若存在, 求出 k 的最

大值; 若不存在, 请说明理由.

十六、基本不等式法

借助基本不等式证明不等式或求某些函数最值的方法叫基本不等式。常用的基本不等式有下面几种形式: ①若 $a, b \in R$, 则 $a^2 + b^2 \geq 2ab$, (当且仅当 $a = b$ 时取等号), 反之 $ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$ 也成立, ②若 $a > 0, b > 0$, 则 $a + b \geq 2\sqrt{ab}$, (当且仅当 $a = b$ 时取等号), 反之 $ab \leq (\frac{a+b}{2})^2$ 也成立。③若 a, b, c 都是正数, 则 $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$, (当且仅当 $a = b = c$ 时取等号), 反之 $abc \leq \frac{a^3 + b^3 + c^3}{3}$ 也成立。④若 a, b, c 都是正数, 则 $a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$, (当且仅当 $a = b = c$ 时取等号), 反之 $abc \leq (\frac{a+b+c}{3})^3$ 也成立。对于公式 $a^2 + b^2 \geq 2ab$ 及公式 $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ 的理解, 应注意以下几点:

①两个公式成立的条件是不同的, 前者只要求 a, b 是实数, 而后者强调 a, b 必须是正数。②要对两个公式的等号及“当且仅当 $a = b$ 时取等号”的含义要有透彻的理解并会在函数、三角函数、解析几何等知识中灵活应用。

解题功能及技巧是: ①二、三元不等式具有将“和式”转化为“积式”和将“积式”转化为“和式”的放缩功能。②在创设应用不等式的使用条件时, 合理拆分项或配凑因式是常用的解题技巧。③“和定积最大, 积定和最小”, 即 n 个 ($n = 2, 3$) 正数的和为定值, 则可求积的最大值, 积为定值, 则可求和的最小值。应用此结论求某些函数最值要注意三个条件: 就是“一正——各项都是正数; 二定——积或和是定值; 三等一一等号能否取到”, 求最值时, 若忽略了上述三个条件, 就会出现错误, 导致解题失败。必要时要做适当的变形或换元, 以满足上述条件。

【例1】(2008年,重庆卷) 函数 $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{5+4\cos x}}$ ($0 \leq x \leq 2\pi$) 的值域是()

- (A) $[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$ (B) $[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$
 (C) $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ (D) $[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}]$

【巧解】 $\because f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{5+4\cos x}}$, $\therefore f^2(x) = \frac{\sin^2 x}{5+4\cos x} = \frac{-\cos^2 x + 1}{5+4\cos x}$

$$\text{令 } t = 5 + 4\cos x, \because 0 \leq x \leq 2\pi, -1 \leq \cos x \leq 1, \therefore t > 0$$

$$\therefore \cos x = \frac{t-5}{4}, \therefore \frac{-\cos^2 x + 1}{5+4\cos x} = \frac{-\left(\frac{t-5}{4}\right)^2 + 1}{t} = -\frac{1}{16}(t + \frac{9}{t} - 10)$$

$$\leq -\frac{1}{16}(2\sqrt{t \cdot \frac{9}{t}} - 10) = \frac{1}{4}, \text{ 当且仅当 } t = \frac{9}{t}, \text{ 即 } t = 3 \text{ 时取等号, 此时 } \cos x = -\frac{1}{2},$$

$$\text{即 } x = \frac{2\pi}{3} \text{ 或 } \frac{4\pi}{3}, \therefore f^2(x) \leq \frac{1}{4}, \text{ 因而 } -\frac{1}{2} \leq f(x) \leq \frac{1}{2}, \text{ 故 } f(x) \text{ 的值域为 } [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$$

【例2】(2008年,辽宁卷) 设 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, 则函数 $y = \frac{2\sin^2 x + 1}{\sin 2x}$ 的最小值为_____.

【巧解】由二倍角公式及同角三角函数的基本关系得:

$$y = \frac{2\sin^2 x + 1}{\sin 2x} = \frac{2\sin^2 x + 1}{2\sin x \cos x} = \frac{3\sin^2 x + \cos^2 x}{2\sin x \cos x} = \frac{3\tan^2 x + 1}{2\tan x} = \frac{3}{2}\tan x + \frac{1}{2\tan x},$$

$$\because x \in (0, \frac{\pi}{2}), \therefore \tan x > 0, \text{ 利用均值定理, } y \geq 2\sqrt{\frac{3}{2}\tan x \cdot \frac{1}{2\tan x}} = \sqrt{3}, \text{ 当且仅当}$$

$$\tan^2 x = \frac{1}{3} \text{ 时取 “=”, } \therefore y_{\min} = \sqrt{3}, \text{ 所以应填 } \sqrt{3}.$$

巧练一: 函数 $y = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 2x + 1}$ ($x > 0$) 的最小值是_____。

巧练二: 求函数 $y = x^2(1 - 5x)$ ($0 \leq x \leq \frac{1}{5}$) 的最大值。

十七、综合法

利用某些已知证明过的不等式和不等式的性质, 推导出所要证明的不等式, 这个证明方法叫综合法。

【例 1】已知 a, b 是正数，且 $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = 1$, $x, y \in (0, +\infty)$, 求证: $x + y \geq (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$

【巧证】左 $= x + y = (x + y) \cdot \left(\frac{a}{x} + \frac{b}{y}\right) = a + b + \frac{bx}{y} + \frac{ay}{x} \geq a + b + 2\sqrt{ab} = (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$

= 右, 当且仅当 $\frac{ay}{x} = \frac{bx}{y}$, 即 $\frac{x^2}{y^2} = \frac{a}{b}$ 时, 取 “=” 号, 故 $x + y \geq (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$ 。

【例 2】已知 a, b, c 是正数, 且 $a + b + c = 1$, 求证: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 9$

【巧证】 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{a+b+c}{a} + \frac{a+b+c}{b} + \frac{a+b+c}{c} = 3 + \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right) + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right) + \left(\frac{c}{b} + \frac{b}{c}\right) \geq 3 + 2 + 2 + 2 = 9$, 当且仅当 $a = b = c = \frac{1}{3}$ 时取 “=” 号。

巧练一: 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \ln x$. 设 $g(x) = f'(x)$,

求证: $[g(x)]^n - g(x^n) \geq 2^n - 2$ ($n \in N^*$).

巧练二: 已知 a, b, c, d 都是实数, 且 $a^2 + b^2 = 1$, $c^2 + d^2 = 1$, 求证: $|ac + bd| \leq 1$

十八、分析法

证明不等式时, 有时可以从求证的不等式出发, 分析使这个不等式成立的充分条件, 把证明不等式转化为判定这些充分条件是否具备的问题, 如果能够肯定这些充分条件都具备, 那么就可以判定原不等式成立, 这种方法通常叫分析法。

注意: ①分析法是“执果索因”, 步步寻求不等式成立的充分条件, 可以简单写成

$B \Leftarrow B_1 \Leftarrow B_2 \Leftarrow \dots B_n \Leftarrow A$, ②分析法与综合法是对立统一的两种方法。综合法是“由因导果”; ③分析法论证“若 A 则 B ”这个命题的证明模式(步骤)是:

欲证明命题 B 成立, 只须证明命题 B_1 成立, ..., 从而有..., 只须证明命题 B_2 成立, 从而又有..., 只须证明命题 A 成立, 而已知 A 成立, 故 B 必成立。④用分析法证明问题时, 一定要恰当用好“要证”, “只须证”, “即证”, “也即证”等词语。

【例 1】求证 $\sqrt{3} + \sqrt{7} < 2 + \sqrt{6}$

【巧证】 $\because \sqrt{3} + \sqrt{7} > 0$, $2 + \sqrt{6} > 0$, 要证 $\sqrt{3} + \sqrt{7} < 2 + \sqrt{6}$,

只须证 $(\sqrt{3} + \sqrt{7})^2 < (2 + \sqrt{6})^2$, 即证 $10 + 2\sqrt{21} < 10 + 2\sqrt{24}$

也即证 $\sqrt{21} < \sqrt{24}$, $\because 21 < 24$, $\sqrt{21} < \sqrt{24}$ 显然成立, \therefore 原不等式 $\sqrt{3} + \sqrt{7} < 2 + \sqrt{6}$ 成

立。

【例2】设 $a > 0$, $b > 0$, 且 $2c > a + b$, 证明 $c - \sqrt{c^2 - ab} < a < c + \sqrt{c^2 - ab}$

【巧证】要证 $c - \sqrt{c^2 - ab} < a < c + \sqrt{c^2 - ab}$

只须证 $-\sqrt{c^2 - ab} < a - c < \sqrt{c^2 - ab}$, 即证 $|a - c| < \sqrt{c^2 - ab}$

两边平方得: $a^2 - 2ac + c^2 < c^2 - ab$, 也即证 $a^2 + ab < 2ac$, $\because a > 0$ 且 $2c > a + b$

$\therefore a^2 + ab < 2ac$ 显然成立, \therefore 原不等式成立。

巧练一: 求证 $\sqrt{3} + \sqrt{7} < 2\sqrt{5}$

巧练二: 已知 $a > 0$, $b > 0$, $a + b = 1$, 试证明: $(a + \frac{1}{a})(b + \frac{1}{b}) \geq \frac{25}{4}$

十九、放缩法

欲证 $A \geq B$, 可通过适当放大或缩小, 借助一个或多个中间量, 使得 $B \leq B_1$,

$B_1 \leq B_2, \dots, B_i \leq A$ 或 $A \geq A_1, A_1 \geq A_2, \dots, A_i \geq B$, 在利用传递性, 达到欲证的目的,

这种方法叫放缩法。放缩法的实质是非等价转化, 放缩没有一定的准则和程序, 需按题意适当放缩否则是达不到目的, 此方法在数列与函数、不等式综合问题中证明大小关系是常用方法。

放缩法的方法有: (1) 添加或舍去一些项, 如: $\sqrt{a^2 + 1} > |a|$; $\sqrt{n(n+1)} > n$

(2) 将分子或分母放大(或缩小)

(3) 利用基本不等式, 如: $\sqrt{n(n+1)} < \frac{n+(n+1)}{2}$

(4) 利用常用结论: ① $\sqrt{k+1} - \sqrt{k} = \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} < \frac{1}{2\sqrt{k}}$;

$$\textcircled{2} \quad \frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}; \quad \frac{1}{k^2} > \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \quad (\text{程度大})$$

$$\textcircled{3} \quad \frac{1}{k^2} = \frac{4}{4k^2} < \frac{4}{4k^2 - 1} = \frac{4}{(2k-1)(2k+1)} = 2\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right) \quad (\text{程度小})$$

$$\textcircled{4} \quad \frac{2^k}{(2^k - 1)^2} < \frac{2^k}{(2^k - 1)(2^k - 2)} = \frac{2^{k-1}}{(2^k - 1)(2^{k-1} - 1)} = \frac{1}{2^{k-1} - 1} - \frac{1}{2^k - 1}$$

【例1】已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 2$, $a_n a_{n+1} + a_{n+1} = 2a_n$ ($n \in N^*$).

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $b_n = a_n(a_n - 1)$ ($n \in N^*$), S_n 是数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和, 证明: $\frac{3}{4} < S_n < 3$.

【巧解】由 $a_n a_{n+1} + a_{n+1} = 2a_n$, 得 $1 + \frac{1}{a_n} = \frac{2}{a_{n+1}}$

$$\text{即 } \frac{1}{a_{n+1}} - 1 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a_n} - 1 \right). \quad \therefore \frac{1}{a_n} - 1 = -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} = -\frac{1}{2^n}, \quad \therefore a_n = \frac{2^n}{2^n - 1}.$$

(2) 当 $n=1$ 时, $S_1 = a_1(a_1 - 1) = 2$,

$$\therefore \frac{3}{4} < S_1 < 3, \because n \geq 2 \text{ 时}, b_n = a_n(a_n - 1) = \frac{2^n}{2^n - 1} \left(\frac{2^n}{2^n - 1} - 1 \right) = \frac{2^n}{(2^n - 1)^2}$$

$$< \frac{2^n}{(2^n - 1)(2^n - 2)} = \frac{2^{n-1}}{(2^n - 1)(2^{n-1} - 1)} = \frac{1}{2^{n-1} - 1} - \frac{1}{2^n - 1},$$

$$\begin{aligned} \therefore S_n &< 2 + \left(\frac{1}{2-1} - \frac{1}{2^2-1} \right) + \left(\frac{1}{2^2-1} - \frac{1}{2^3-1} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{n-1}-1} - \frac{1}{2^n-1} \right) \\ &= 3 - \frac{1}{2^n-1} < 3. \end{aligned}$$

$$\text{又} \because n \in N^* \text{ 时}, b_n = \frac{2^n}{(2^n - 1)^2} = \frac{(2^n - 1) + 1}{(2^n - 1)^2} = \frac{1}{2^n - 1} + \frac{1}{(2^n - 1)^2}$$

$$\begin{aligned} &> \frac{1}{2^n} + \left(\frac{1}{2^n} \right)^2 \therefore S_n > \frac{\frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n \right]}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{4} \left[1 - \left(\frac{1}{4} \right)^n \right]}{1 - \frac{1}{4}} \\ &= 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n + \frac{1}{3} \left[1 - \left(\frac{1}{4} \right)^n \right] \end{aligned}$$

$$= \frac{4}{3} - \left(\frac{1}{2} \right)^n - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{4} \right)^n \geq \frac{4}{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

$$\therefore \text{当} n \in N^* \text{ 时}, \text{ 都有 } \frac{3}{4} < S_n < 3.$$

【例 2】已知数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数, S_n 为其前 n 项和, 对于任意 $n \in N^*$, 满足关系

$$S_n = 2a_n - 2$$

(I) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(II) 设数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 且 $b_n = \frac{1}{(\log_2 a_n)^2}$, 求证: 对任意正整数 n , 总有 $T_n < 2$;

【巧解】(I) 解: $\because S_n = 2a_n - 2(n \in N^*)$, ①

$$\therefore S_{n-1} = 2a_{n-1} - 2(n \geq 2, n \in N^*) \quad ②$$

$$① - ②, \text{ 得 } a_n = 2a_n - 2a_{n-1}. \quad (n \geq 2, n \in N^*)$$

$$\because a_n \neq 0, \therefore \frac{a_n}{a_{n-1}} = 2. \quad (n \geq 2, n \in N^*)$$

即数列 $\{a_n\}$ 是等比数列. $\because a_1 = S_1$,

$$\therefore a_1 = 2a_1 - 2, \text{ 即 } a_1 = 2. \therefore a_n = 2^n. (n \in N^*)$$

(II) 证明: \because 对任意正整数 n , 总有 $b_n = \frac{1}{(\log_2 a_n)^2} = \frac{1}{n^2}$.

$$\begin{aligned} \therefore T_n &= \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leq 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n} \\ &= 1 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{n} < 2. \end{aligned}$$

巧练一: 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项为 a_n , 前 n 项和为 S_n , 且 a_n 是 S_n 与 2 的等差中项; 数

列 $\{b_n\}$ 中, $b_1 = 1$, 点 $P(b_n, b_{n+1})$ 在直线 $x - y + 2 = 0$ 上,

(I) 求数列 $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$ 的通项公式 a_n , b_n ;

(II) 设 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 B_n , 试比较 $\frac{1}{B_1} + \frac{1}{B_2} + \cdots + \frac{1}{B_n}$ 与 2 的大小;

巧练二: 已知数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$, $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_2 = 0$, 且对任意 $n \in N^*$, 都有

$2S_n = n(a_n - 1)$, 点列 $P_n(a_n, b_n)$ 都在直线 $y = 2x + 2$ 上.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 求证: $\frac{1}{|\overrightarrow{P_1P_2}|^2} + \frac{1}{|\overrightarrow{P_1P_3}|^2} + \cdots + \frac{1}{|\overrightarrow{P_1P_n}|^2} < \frac{2}{5} (n \geq 2, n \in N^*)$

二十、反证法

从否定命题的结论入手, 并把对命题结论的否定作为推理的已知条件, 进行正确的逻辑推理, 使之得到与已知条件、公理、定理、法则或已经证明为正确的命题等相矛盾, 矛盾的

原因是假设不成立，所以肯定了命题的结论，从而使命题获得了证明的证明方法叫反证法。

基本证明模式是：要证明 $M > N$ ，先假设 $M \leq N$ ，由已知及性质推出矛盾，从而肯定 $M > N$ ，
适用范围：①否定性命题；②唯一性命题；③含有“至多”、“至少”问题。④根据问题条件
和结论，情况复杂难于入手，可考虑试用反证法。

反证法是属于“间接证明法”一类，是从反面的角度思考问题的证明方法，即：否定结论
 \Rightarrow 推导出矛盾 \Rightarrow 肯定结论成立，应用反证法证明的主要三步是：第一步，反设——作出与求
证结论相反的假设；第二步——归谬：将反设作为条件，并由此通过一系列的正确推理导出
矛盾；第三步——肯定结论：说明反设不成立，从而肯定原命题成立。

【例 1】若 $0 < a < 2, 0 < b < 2, 0 < c < 2$ ，证明 $(2-a)b, (2-b)c, (2-c)a$ 不能同时大
于 1

【巧证】假设 $\begin{cases} (2-a)b > 1 \\ (2-b)c > 1 \\ (2-c)a > 1 \end{cases}$ 那么 $\frac{(2-a)+b}{2} \geq \sqrt{(2-a)b} > 1$ ；同理 $\frac{(2-b)+c}{2} > 1$
 $\frac{(2-c)+a}{2} > 1$ ，上述三式相加得 $3 > 3$ ，矛盾，故假设不成立，原命题成立

【例 2】求证： $y = \sin|x|$ 不是周期函数

【巧证】假设函数 $y = \sin|x|$ 是周期函数， T 是它的一个周期 ($T > 0$)，即对任意 $x \in R$ 都
有 $\sin|x+T| = \sin|x|$ 成立，令 $x=0$ ，得 $\sin|T| = \sin|0|$ ，即 $\sin|T| = 0$ ，
 $T = n\pi (n \in N^*)$ ，分两种情况讨论：

(1) 若 $n = 2k (k \in N_+)$ ，则 $\sin|x+2k\pi| = \sin|x|$ 对任意 $x \in R$ 都成立，取 $x = -\frac{3\pi}{2}$ ，

有 $\sin|-\frac{3\pi}{2} + 2k\pi| = \sin|-\frac{3\pi}{2}| = \sin\frac{3\pi}{2} = -1$ ，即 $\sin(2k\pi - \frac{3\pi}{2}) = -1$ ，
而 $\sin(2k\pi - \frac{3\pi}{2}) = \sin(-\frac{3\pi}{2}) = -\sin\frac{3\pi}{2} = 1$ ， $\therefore T = 2k\pi (n \in N^*)$ 不是该函数的周期。

(2) 若 $n = 2k+1 (k \in N_+)$ ，则有 $\sin|x+(2k+1)\pi| = \sin|x|$ 对任意 $x \in R$ 都成立，

取 $x = \frac{\pi}{2}$ ，有 $\sin|\frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi| = \sin|\frac{\pi}{2}| = \sin\frac{\pi}{2} = 1$ ，即 $\sin(2k\pi + \frac{3\pi}{2}) = 1$ ，
而 $\sin(2k\pi + \frac{3\pi}{2}) = \sin(\frac{3\pi}{2}) = -1$ ， $\therefore T = (2k+1)\pi (n \in N^*)$ 不是该函数的周期。

由(1)和(2)说明 $T=n\pi(n\in N^*)$ 不是该函数的周期。故假设不成立，从而命题得证。

巧练一：设 $f(x)=x^2+ax+b$ ，求证 $|f(1)|, |f(2)|, |f(3)|$ 之中至少有一个不小于 $\frac{1}{2}$

巧练二：若下列方程： $x^2+4ax-4a+3=0$ ， $x^2+(a-1)x+a^2=0$ ，

$x^2+2ax-2a=0$ 至少有一个方程有实根。试求实数 a 的取值范围。

二十一、换元法

解数学题时，把某个式子看成一个整体，用一个变量去代替它，从而使问题得到简化，这叫换元法。换元法又称辅助元素法、变量代换法。通过引进新的变量，可以把分散的条件联系起来，隐含的条件显露出来，或者把条件与结论联系起来。或者变为熟悉的形式，把复杂的计算和推证简化。它可以化高次为低次、化分式为整式、化无理式为有理式、化超越式为代数式，在研究方程、不等式、函数、数列、三角等问题中有广泛的应用。

换元的实质是转化，关键是构造元和设元，理论依据是等量代换，目的是变换研究对象，将问题移至新对象的知识背景中去研究，从而使非标准型问题标准化、复杂问题简单化，变得容易处理。换元的方法有：(1) 局部换元，局部换元又称整体换元，是在已知或者未知中，某个代数式几次出现，而用一个字母来代替它从而简化问题，当然有时候要通过变形才能发现。例如解不等式 $4^x+2^x-2\geq 0$ ，先变形为设 $t=2^x(t>0)$ ，而变为熟悉的一元二次不等式求解和指数方程的问题。(2) 三角换元，应用于去根号，或者变换为三角形式易求时，主要利用已知代数式中与三角知识中有某点联系进行换元。

如求函数 $y=\sqrt{x}+\sqrt{1-x}$ 的值域时，易发现 $x\in[0,1]$ 设 $x=\sin^2\alpha$ ， $\alpha\in[0,\frac{\pi}{2}]$ ，

问题变成了熟悉的求三角函数值域。为什么会想到如此设，其中主要应该是发现值域的联系，又有去根号的需要。如：已知 $x^2+y^2=a^2$ ，可设 $x=a\cos\theta$ ， $y=a\sin\theta$ ($0\leq\theta<2\pi$)

已知 $x^2+y^2\leq 1$ ，可设 $x=r\cos\theta$ ， $y=r\sin\theta$ ($0\leq\theta<2\pi, 0\leq r\leq 1$)

已知 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ，可设 $x=a\cos\theta$ ， $y=b\sin\theta$ ($0\leq\theta<2\pi$)

已知 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ，可设 $x=a\sec\theta$ ， $y=b\tan\theta$

(3) 均值换元, 如遇到 $x + y = S$ 形式时, 设 $x = \frac{S}{2} + t$, $y = \frac{S}{2} - t$ 等等。

我们使用换元法时, 要遵循有利于运算、有利于标准化的原则, 换元后要注重新变量范围的选取, 一定要使新变量范围对应于原变量的取值范围, 不能缩小也不能扩大。

【例 1】(2008 年, 江西卷) 若函数 $y = f(x)$ 的值域是 $[\frac{1}{2}, 3]$, 则函数 $F(x) = f(x) + \frac{1}{f(x)}$ 的

值域是 ()

- A. $[\frac{1}{2}, 3]$ B. $[2, \frac{10}{3}]$ C. $[\frac{5}{2}, \frac{10}{3}]$ D. $[3, \frac{10}{3}]$

【巧解】 令 $f(x) = t$, $t \in [\frac{1}{2}, 3]$, 问题转化为求函数 $y = t + \frac{1}{t}$ 在 $t \in [\frac{1}{2}, 3]$ 的值域, 于是由函数 $y = t + \frac{1}{t}$ 在 $[\frac{1}{2}, 1]$ 上为减函数, 在 $[1, 3]$ 上为增函数, 得 $y \in [2, \frac{10}{3}]$, 故本题选 B

【例 2】(2008 年, 重庆卷) 函数 $f(x) = \frac{\sin x - 1}{\sqrt{3 - 2 \cos x - 2 \sin x}}$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) 的值域是 ()

- (A) $[-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0]$ (B) $[-1, 0]$
 (C) $[-\sqrt{2}, 0]$ (D) $[-\sqrt{3}, 0]$

$$\text{【巧解】 } f(x) = \frac{\sin x - 1}{\sqrt{3 - 2 \cos x - 2 \sin x}} = \frac{\sin x - 1}{\sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x - 2 \cos x - 2 \sin x + 2}}$$

$$= \frac{\sin x - 1}{\sqrt{(\sin x - 1)^2 + (\cos x - 1)^2}}, \text{ 当 } \sin x \neq 1 \text{ 时,}$$

$$\text{原式} = -\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\cos x - 1}{\sin x - 1}\right)^2}}, \text{ 令 } t = \frac{\cos x - 1}{\sin x - 1}, \text{ 即 } t \sin x - \cos x = t - 1,$$

$$\therefore \sqrt{t^2 + 1} \sin(x - \varphi) = t - 1, \text{ 即 } \sin(x - \varphi) = \frac{t - 1}{\sqrt{t^2 + 1}}, \text{ 其中 } \tan \varphi = |\frac{1}{t}|, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$$

$$\text{又 } 0 \leq \theta \leq 2\pi, \therefore |\sin(\theta - \varphi)| \leq 1, \text{ 即 } \left| \frac{t - 1}{\sqrt{t^2 + 1}} \right| \leq 1, \text{ 解之得 } t \geq 0, \therefore -1 \leq -\frac{1}{\sqrt{1 + t^2}} < 0,$$

当 $\sin x = 1$ 时, $f(x) = 0$, 综上知 $f(x)$ 的值域为 $[-1, 0]$, 故本题选 B

巧练一: 函数 $f(x) = 4^x + 2^{x+1} + 2$ 的值域是 ()

- A. $[1, +\infty)$ B. $(2, +\infty)$ C. $(3, +\infty)$ D. $[4, +\infty)$

巧练二：（2005 年，福建卷）设 $a, b \in \mathbf{R}, a^2 + 2b^2 = 6$ ，则 $a + b$ 的最小值是（ ）

- A. $-2\sqrt{2}$ B. $-\frac{5\sqrt{3}}{3}$ C. -3 D. $-\frac{7}{2}$

共 98 种解题方法，其他略

第十一章 不等式

难点巧学

一、活用倒数法则 巧作不等变换——不等式的性质和应用

不等式的性质和运算法则有许多，如对称性，传递性，可加性等。但灵活运用倒数法则对解题，尤其是不等变换有很大的优越性。

倒数法则：若 $ab > 0$ ，则 $a > b$ 与 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ 等价。

此法则在证明或解不等式中有着十分重要的作用。如：（1998 年高考题改编）解不等式 $\log_a(1 - \frac{1}{x}) > 1$ 。

分析：当 $a > 1$ 时，原不等式等价于： $1 - \frac{1}{x} > a$ ，即 $\frac{1}{x} < 1 - a$ ， $\because a > 1$ ， $\therefore 1 - a < 0$ ， $\frac{1}{x} < 0$ ，从而 $1 - a < \frac{1}{x}$ ， $\frac{1}{x} < 0$ 同号，由倒数法则，得 $x > \frac{1}{1-a}$ ；当 $0 < a < 1$ 时，原不等式等价于 $0 < 1 - \frac{1}{x} < a$ ， $\therefore 1 - a < \frac{1}{x} < 1$ ， $\because 0 < a < 1$ ， $\therefore 1 - a > 0$ ， $\frac{1}{x} > 0$ ，从而 $1 - a < \frac{1}{x}$ ，由倒数法则，得 $1 < x < \frac{1}{1-a}$ ；

综上所述，当 $a > 1$ 时， $x \in (\frac{1}{1-a}, +\infty)$ ；当 $0 < a < 1$ 时， $x \in (1, \frac{1}{1-a})$ 。

注：有关不等式性质的试题，常以选择题居多，通常采用特例法，排除法比较有效。

二、小小等号也有大作为——绝对值不等式的应用

绝对值不等式： $||a| - |b|| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|$ 。这里 a, b 既可以表示向量，也可以表示实

数。

当 \mathbf{a}, \mathbf{b} 表示向量时，不等式成立的条件是：向量 \mathbf{a} 与 \mathbf{b} 共线；

当 a, b 表示实数时，有两种情形：(1) 当 $ab \geq 0$ 时， $|a+b|=|a|+|b|$, $|a-b|=||a|-|b||$; (2) 当 $ab \leq 0$ 时， $|a+b|=||a|-|b||$, $|a-b|=|a|+|b|$. 简单地说就是当 a, b 同号或异号时，不等式就可转化为等式（部分地转化），这为解决有关问题提供了十分有效的解题工具。如：

若 $1 < \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$, 则下列结论中不正确的是 ()

- A、 $\log_a b > \log_b a$ B、 $|\log_a b + \log_b a| > 2$ C、 $(\log_b a)^2 < 1$ D、 $|\log_a b| + |\log_b a| > |\log_a b + \log_b a|$

分析：由已知，得 $0 < b < a < 1$, $\therefore a, b$ 同号，故 $|\log_a b| + |\log_b a| = |\log_a b + \log_b a|$, \therefore D 错。

[答案] D

注：绝对值不等式是一个十分重要的不等式，其本身的应用价值很广泛，但在高考或其他试题中常设计成在等号成立时的特殊情况下的讨论，因此利用等号成立的条件（ a, b 同号或异号）是解决这一类问题的一个巧解。

三、“抓两头 看中间”，巧解“双或不等式”——不等式的解法

(1) 解不等式（组）的本质就是对不等式（组）作同解变形、等价变换。

(2) 多个不等式组成的不等式组解集的合成——先同向再异向

不等式组的解法最关键的是最后对几个不等式交集的确定。常用画数轴的方法来确定，但毕竟要画数轴。能否不画数轴直接就可得出解集呢？下面的方法就十分有效。可以“先同向再异向”的原则来确定，即先将同向不等式“合并”（求交集），此时“小于小的，大于大的”；最后余下的两个异向不等式，要么为空集，要么为两者之间。

如解不等式组：
$$\begin{cases} x < 1 & ① \\ x < 3 & ② \\ x > -3 & ③ \\ x > 0 & ④ \\ -1 < x < 2 & ⑤ \end{cases}$$

先由③④(同>)得 $x > 0$ (大于大的)；再由①②(同<)得 $x < 1$ (小于小的)；再将 $x > 0$ 与 $x < 1$ 分别与⑤作交集，由 $x > 0$ 与⑤得 $0 < x < 2$ ；由 $x < 1$ 与⑤得 $-1 < x < 1$. 这样所得的不等式的解集为 $(0, 1)$.

(3) 双或不等式组的解集合成

形如 $\begin{cases} f_1(x) < a \text{ 或 } g_1(x) > b \\ f_2(x) < c \text{ 或 } g_2(x) > d \end{cases}$ 的不等式组称为“双或”型不等式组（实际上包括多个“或”型不等式组成的不等式组也在此列），这是解不等式组中的一个难点。解决这类不等式组时常借用数轴来确定，但学生在求解时总会出现一些错误。这里介绍一种不通过数轴的直接方法：“抓

两头 看中间”! 如: $\begin{cases} x < a \text{ 或 } x > b \\ x < c \text{ 或 } x > d \end{cases}$, 先比较 a, b, c, d 四个数的大小, 如 $a < b < c < d$, 则其解集中必含有 $x < a$ 或 $x > d$ (即抓两头); 再看 $x > b$ 与 $x < c$ 的交集, 若有公共部分, 则 $b < x < c$; 若无公共部分, 则此时为空集 (看中间), 最后将“抓两头”和“看中间”的结果作并集即为所求的解集。

四、巧用均值不等式的变形式解证不等式

均值不等式是指: $a^2 + b^2 \geq 2ab$ ($a, b \in \mathbb{R}$) ①; $a+b \geq 2\sqrt{ab}$ ($a, b \in \mathbb{R}_+$) ②.

均值不等式是高考的重点考查内容, 但其基本公式只有两个, 在实际解题时不是很方便。若能对均值不等式进行适当变形, 那么在解题时就能达到事半功倍的效果。下面的一些变形式在解题时就很有用, 不妨一试。当然你也可以根据需要推导一些公式。如:

$$(1) a^2 \geq 2ab - b^2 \quad ③;$$

是将含一个变量的式子, 通过缩小变为含两个变量的式子, 体现增元之功效, 当然反过来即是减元:

$$(2) \frac{a^2}{b} \geq 2a - b \quad ④; \quad (a, b > 0)$$

是将分式化为整式, 体现分式的整式化作用; 试试下面两个问题如何解:

$$\text{求证: (1) } a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac; \quad (2) \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq a + b + c. \quad (a, b, c > 0)$$

(析: (1) 由 $a^2 \geq 2ab - b^2$ 得 $b^2 \geq 2bc - c^2$, $c^2 \geq 2ac - a^2$, 三式相加整理即得; (2) $\because \frac{a^2}{b} \geq 2a - b$

\therefore 同样可得另两式, 再将三式相加整理即得)。

$$(3) ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \quad ⑤;$$

利用不等关系实现两数和与两数积的互化:

$$(4) \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \quad ⑥; \quad (a, b > 0)$$

利用不等关系实现两数和、两数的平方和及两数积之间的转化:

注: 涉及两数和、两数的平方和及两数积的问题是一个十分常见的问题, 利用⑤、⑥两式可以使其中的关系一目了然。从解题分析上看, 对解题有很好的导向作用。

$$(5) \text{若 } a, b \in \mathbb{R}, \text{ 则 } \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} \geq \frac{(x+y)^2}{a+b} \quad ⑦ \quad (\text{当且仅当 } \frac{x}{a} = \frac{y}{b} \text{ 时取等号});$$

此式在解题中的主要作用表现在: 从左向右看是“通分”(不是真正的通分)或“合并”, 化多项为一项, 项数多了总不是好事; 从右向左看, 是“分解”或“拆项”, 实现“一分为二”的变形策略。这在解不等式相关问题中就很有作为! 请看下例:

$$\text{例: 已知 } -1 < a < 1, -1 < b < 1, \text{ 求证: } \frac{1}{1-a^2} + \frac{1}{1-b^2} \geq \frac{2}{1-ab}.$$

分析：由上不等式，立即得到 $\frac{1}{1-a^2} + \frac{1}{1-b^2} \geq \frac{(1+1)^2}{2-a^2-b^2} \geq \frac{4}{2-2ab} = \frac{2}{1-ab}$ 。

⑦式还可推广到三个或更多字母的情形，即 $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} \geq \frac{(x+y+z)^2}{a+b+c}$ ($a, b, c > 0$)；

$\frac{b_1^2}{a_1} + \frac{b_2^2}{a_2} + \dots + \frac{b_n^2}{a_n} \geq \frac{(b_1+b_2+\dots+b_n)^2}{a_1+a_2+\dots+a_n}$ ($a_1, a_2, \dots, a_n > 0$)

(6) $ax+by \leq \sqrt{a^2+b^2}\sqrt{x^2+y^2}$. (柯西不等式)

此不等式将和(差)式与平方和式之间实现了沟通，灵活应用此式可以很方便地解决许多问题。如下例：

例：使关于 x 的不等式 $\sqrt{x-3} + \sqrt{6-x} \geq k$ 有解的实数 k 的取值范围是【 】

- A $\sqrt{6}-\sqrt{3}$ B $\sqrt{3}$ C $\sqrt{6}+\sqrt{3}$ D $\sqrt{6}$

分析：所求 k 的范围可以转化为求不等式左边的最大值即可，由柯西不等式得 $\sqrt{x-3} + \sqrt{6-x} \leq \sqrt{2}\sqrt{(\sqrt{x-3})^2 + (\sqrt{6-x})^2} = \sqrt{2}\sqrt{3} = \sqrt{6}$. $\therefore k \leq \sqrt{6}$, $\therefore k$ 的最大值是 $\sqrt{6}$. 填 D.

五、不等式中解题方法的类比应用

1、三种基本方法：比较法、分析法、综合法。其中比较法可分为作差比较法和作商比较法，不仅在不等式的证明和大小比较中有广泛的应用，同时在其他方面也有很大的作用。如分析法就是一种重要的思维方法，在数学的其他章节中也有广泛的应用。

2、放缩法：是不等式证明中一种十分常用的方法，它所涉及的理论简单，思维简单，应用灵活，因而在解题时有着十分重要的应用。如果能灵活应用放缩法，就可以达到以简驭繁的效果。

活题巧解

例 1 若 $1 < \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$, 则下列结论中不正确的是【 】

- A $\log_a b > \log_b a$ B $|\log_a b + \log_b a| > 2$ C $(\log_b a)^2 < 1$ D $|\log_a b| + |\log_b a| > |\log_a b + \log_b a|$

【巧解】特例法、排除法

由已知，可令 $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{3}$, 则 $\log_a b = \log_2 3 > 1$, $0 < \log_b a = \log_3 2 < 1$, 于是 A、B、C 均正确，而 D 两边相等，故选 D。

[答案] D。

例 2 不等式组 $\begin{cases} |x-2| < 2 \\ \log_2(x^2-1) > 1 \end{cases}$ 的解集为【 】 (A)

- (0, $\sqrt{3}$) ; (B) ($\sqrt{3}$, 2) ; (C) ($\sqrt{3}$, 4) ; (D) (2, 4)。

【巧解】 排除法

令 $x=3$, 符合, 舍 A、B; 令 $x=2$, 合题, 舍 D, 选 C。

[答案] C。

例 3 已知 $y=f(x)$ 是定义在 R 上的单调函数, 实数 $x_1 \neq x_2$, $\lambda \neq -1$ $\alpha = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$, $\beta = \frac{x_2 + \lambda x_1}{1 + \lambda}$,

若 $|f(x_1)-f(x_2)| < |f(\alpha)-f(\beta)|$, 则【 】

- A. $\lambda < 0$ B. $\lambda = 0$ C. $0 < \lambda < 1$ D. $\lambda \geq 1$

【巧解】 等价转化法

显然 $\lambda \neq 0$, $\beta = \frac{x_2 + \lambda x_1}{1 + \lambda} = \frac{\frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} x_2}{1 + \frac{1}{\lambda}}$, $\therefore \alpha$ 、 β 分别是以 x_1 , x_2 为横坐标的点所确定的线段以 λ 和 $\frac{1}{\lambda}$ 为定比的两个分点的横坐标。由题意知, 分点应在线段两端的延长线上, 所以 $\lambda < 0$, 故

选 A。

[答案] A。

例 4 $0 < a < 1$, 下列不等式一定成立的是【 】。

- (A) $|\log_{(1+a)}(1-a)| + |\log_{(1-a)}(1+a)| > 2$ (B) $|\log_{(1+a)}(1-a)| < |\log_{(1-a)}(1+a)|$
 (C) $|\log_{(1+a)}(1-a) + \log_{(1-a)}(1+a)| < |\log_{(1+a)}(1-a)| + |\log_{(1-a)}(1+a)|$
 (D) $|\log_{(1+a)}(1-a) - \log_{(1-a)}(1+a)| > |\log_{(1+a)}(1-a)| - |\log_{(1-a)}(1+a)|$

【巧解】 换元法、综合法

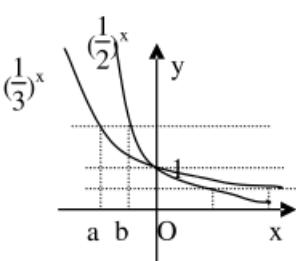
由于四个选项中只涉及两个式子 $\log_{(1+a)}(1-a)$ 和 $\log_{(1-a)}(1+a)$, 为了简化运算看清问题的本质, 不妨设 $x = \log_{(1+a)}(1-a)$, $y = \log_{(1-a)}(1+a)$, 由 $0 < a < 1$ 知, $x < 0$, $y < 0$ 且 $x \neq y$, 于是四个选项便为: A $|x| + |y| > 2$ B $|x| < |y|$ C $|x+y| < |x| + |y|$ D $|x-y| < |x| - |y|$

这样选 A 就是极自然的事了。

[答案] A。

例 5 已知实数 a, b 满足等式 $(\frac{1}{2})^a = (\frac{1}{3})^b$, 下列五个关系式:

- ① $0 < b < a$; ② $a < b < 0$; ③ $0 < a < b$; ④ $b < a < 0$; ⑤ $a=b$. 其中不可能成立的关系式有【 】。



- (A) 1个 (B) 2个 (C) 3个 (D) 4个

【巧解】数形结合法

在同一坐标系内同时画出两个函数图象: $y_1=(\frac{1}{2})^x$, $y_2=(\frac{1}{3})^x$, (如图)作直线 $y=m$ ($m>0$) 图中平行于 x 轴的三条虚线), 由图象可以看到: 当 $0<m<1$ 时, $0<b<a$; 当 $m=1$ 时, $a=b$; 当 $m>1$ 时, $a<b<0$. 所以不可能成立的有两个, 选 B。

[答案] B。

例 6 如果数列 $\{a_n\}$ 是各项都大于 0 的等差数列, 且公差 $d \neq 0$, 则 【 】.

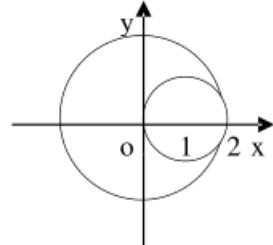
- (A) $a_1+a_8 < a_4+a_5$ (B) $a_1+a_8=a_4+a_5$ (C) $a_1+a_8 > a_4+a_5$ (D) $a_1a_8=a_4a_5$

【巧解】特例法、排除法

取 $a_n=n$, 则 $a_1=1$, $a_4=4$, $a_5=5$, $a_8=8$, $\therefore a_1+a_8=a_4+a_5$, 故选 B。

[答案] B。

例 7 条件甲: $x^2+y^2 \leq 4$, 条件乙: $x^2+y^2 \leq 2x$, 那么甲是乙的【 】



- A、充分不必要条件 B、必要不充分条件
C、充分必要条件 D、既非充分也非必要条件

【巧解】数形结合法

画示意图如图。圆面 $x^2+y^2 \leq 2x$ (包括圆周) 被另一个圆面 $x^2+y^2 \leq 4$ 包含, 结论不一目了然了吗?

[答案] B

例 8 已知 a, b, c 均为正实数, 则三个数 $a+\frac{1}{b}$, $b+\frac{1}{c}$, $c+\frac{1}{a}$ 与 2 的关系是【 】

- A、都不小于 2 B、至少有一个不小于 2
C、都不大于 2 D、至少有一个不大于 2

【巧解】整体化思想

将 $a+\frac{1}{b}$, $b+\frac{1}{c}$, $c+\frac{1}{a}$ “化整为零”, 得 $a+\frac{1}{b}+b+\frac{1}{c}+c+\frac{1}{a}=a+\frac{1}{a}+b+\frac{1}{b}+c+\frac{1}{c} \geqslant 6$, 故已知的三个数中至少有一个不小于 2。故选 B。

[答案] B

例 9 解不等式 $-1 < \frac{3x}{x^2-4} < 1$.

【巧解】数轴标根法、等价转化法

原不等式等价于 $(3x+x^2-4)(3x-x^2+4) < 0$, 即 $(x+4)(x-1)(x+1)(x-4) > 0$,

由数轴标根法, 知解集为 $\{x | x < -4 \text{ 或 } -1 < x < 1 \text{ 或 } x > 4\}$ 。

【答案】 $\{x | x < -4 \text{ 或 } -1 < x < 1 \text{ 或 } x > 4\}$

注: 可以证明不等式 $m < \frac{f(x)}{g(x)} < n$ 与不等式 $[f(x)-mg(x)][f(x)-ng(x)] < 0$ 等价。

例 10 不等式 $|x+2| \geq |x|$ 的解集是_____.

【巧解】数形结合法

由数轴上点的意义知, 上述不等式的意义是数轴上的点 x 到-2 的距离不小于到原点的距离。由图形, 易知, $x \geq -1$ 。

【答案】 $\{x | x \geq -1\}$

例 11 已知 $c > 0$, 不等式 $x + |x-2c| > 1$ 的解集是 R , 求 c 的取值范围。

【巧解】等价转化法

要使原不等式的解集为 R , 只需不等式中不含 x 即可, 故有 $x - x + 2c > 1 \quad \therefore c > \frac{1}{2}$ 。

【答案】 $c > \frac{1}{2}$

注: 这里将 $|x-2c|$ 中去绝对值的讨论简化为符合题意的一种, 显然简捷、精彩!

例 12 已知 $f(x) = (x-a)(x-b)-2$ ($a < b$), 方程 $f(x)=0$ 的两实根为 m, n

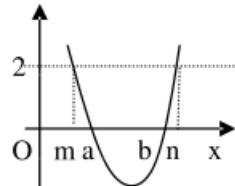
($m < n$), 试确定 a, b, m, n 的大小关系。

【巧解】数形结合法

令 $g(x) = (x-a)(x-b)$, 则 $f(x) = g(x) - 2$, 由 $f(x)=0$ 得 $g(x)=2$, 因

此 $f(x)=0$ 的两根 m, n 可看成直线 $y=2$ 与 $y=g(x)$ 交点的横坐标, 画出

$f(x), g(x)$ 的图象, 由图象容易得到 $m < a < b < n$.



【答案】 $m < a < b < n$.

例 13 若 $0 < a < b < c < d$, 且 $a^2 + d^2 = b^2 + c^2$, 求证: $a+d < b+c$.

【巧解】综合法

由 $0 < a < b < c < d$, 得 $d-a > c-b$, $\therefore (d-a)^2 > (c-b)^2$, 又 $(a+d)^2 + (a-d)^2 = (b+c)^2 + (b-c)^2$,

两式相减, 得 $(a+d)^2 < (b+c)^2$, $\therefore a+d < b+c$.

【答案】见证明过程

注: 本题的几何意义是: 在 $Rt \triangle ABC$ 与 $Rt \triangle ABD$ 中, 其中 AB 为公共的斜边。若 $BC > BD$, 则 $AC < AD$.

例 14 求证: $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 2 - \frac{1}{n}$ ($n \geq 2, n \in \mathbb{N}^*$).

【巧解】 逆用公式法、放缩法

逆用数列的前 n 项和的方法来求。设想右端 $2 - \frac{1}{n}$ 是某数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 即令 $S_n = 2 - \frac{1}{n}$, 则 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = (2 - \frac{1}{n}) - (2 - \frac{1}{n-1}) = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{n(n-1)}$, 这样问题就转化为 $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)}$, 而这显然。

\therefore 命题成立。

[答案] 见证明过程

例 15 已知 $a > b > c$, 求证: $\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} > 0$.

【巧解】 放缩法

$\because 0 < a-b < a-c$, \therefore 由倒数法则 (难点巧学) 得 $\frac{1}{a-b} > \frac{1}{a-c}$, 而 $\frac{1}{b-c} > 0$, $\therefore \frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} > \frac{1}{a-c}$, \therefore 原式得证。

[答案] 见证明过程

例 16 已知 a, b, c 均为正数, 求证: $3(\frac{a+b+c}{3} - \sqrt[3]{abc}) \geq 2(\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab})$ 。

【巧解】 比较法、基本不等式法

\because 左边 - 右边 $= 2\sqrt{ab} + c - 3\sqrt[3]{abc} = \sqrt{ab} + \sqrt{ab} + c - 3\sqrt[3]{ab} \geq 3\sqrt[3]{ab} - 3\sqrt[3]{ab} = 0$, \therefore 原式成立。

[答案] 见证明过程

例 17 已知 $-1 < a < 1$, $-1 < b < 1$, 求证: $\frac{1}{1-a^2} + \frac{1}{1-b^2} \geq \frac{2}{1-ab}$.

【巧解】 构造法、综合法

由无穷等比数列 ($|q| < 1$) 所有项和公式 $S = \frac{a_1}{1-q}$, 得

$$\frac{1}{1-a^2} = 1 + a^2 + a^4 + a^6 + \dots; \quad \frac{1}{1-b^2} = 1 + b^2 + b^4 + b^6 + \dots,$$

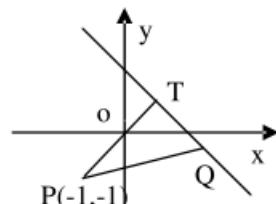
$$\therefore \frac{1}{1-a^2} + \frac{1}{1-b^2} = 2 + (a^2 + b^2) + (a^4 + b^4) + (a^6 + b^6) + \dots \geq 2 + 2ab + 2a^2b^2 + 2a^3b^3 + \dots = \frac{2}{1-ab}.$$

[答案] 见证明过程

例 18 已知 $a+b=1$ ($a, b \in \mathbb{R}$), 求证: $(a+1)^2 + (b+1)^2 \geq \frac{9}{2}$ 。

【巧解】 数形结合法。

显然 $Q(a, b)$ 是直线 $L: x+y=1$ 上的点, $(a+1)^2 + (b+1)^2$ 表示点



Q 与 $P(-1, 1)$ 的距离的平方。如图，设 $PT \perp$ 直线 L 于 T ，所以 $|PQ|^2 \geq |PT|^2$ ，又 $|PT|^2 = (\frac{|-1-1-1|}{\sqrt{1+1}})^2 = \frac{9}{2}$ ， $\therefore |PQ|^2 \geq \frac{9}{2}$
 \therefore 原式成立。

[答案] 见证明过程

例 19 若 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ ，求证： $\cos(\sin \theta) > \sin(\cos \theta)$ 。

【巧解】单调性法、放缩法

$$\begin{aligned} \because \cos \theta + \sin \theta &= \sqrt{3} \sin(\theta + \frac{\pi}{4}) \leq \sqrt{2} < \frac{\pi}{2}, \therefore \cos \theta < \frac{\pi}{2} - \sin \theta, \\ \text{又} \because 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \therefore \cos \theta \in [0, 1], \quad \frac{\pi}{2} - \sin \theta \in [\frac{\pi}{2} - 1, \frac{\pi}{2}], \\ \therefore \sin(\cos \theta) &< \sin(\frac{\pi}{2} - \sin \theta) = \cos(\sin \theta). \text{ (单调性)} \end{aligned}$$

[答案] 见证明过程

例 20 已知 $f(x) = \frac{x}{x+1}$ ，若 $a > b > 0$, $c = 2\sqrt{\frac{1}{b(a-b)}}$ ，求证： $f(a) + f(c) > 1$ 。

【巧解】基本不等式法、放缩法

可以证明 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数。

$$\begin{aligned} \because c &= 2\sqrt{\frac{1}{b(a-b)}} \geq 2\sqrt{\frac{1}{(\frac{a-b+b}{2})^2}} = 2\sqrt{\frac{4}{a^2-a}} > 0, \therefore c \geq \frac{4}{a}, \\ \therefore f(c) &\geq f\left(\frac{4}{a}\right), \text{ 而 } f(a) + f(c) \geq f(a) + f\left(\frac{4}{a}\right) = \frac{a}{a+1} + \frac{\frac{4}{a}}{\frac{4}{a}+1} = \frac{a}{a+1} + \frac{4}{a+4} > \frac{a}{a+4} + \frac{4}{a+4} = 1. \end{aligned}$$

[答案] 见证明过程

例 21 若关于 x 的不等式 $x^2 + 2ax - 2b + 1 \leq 0$ 与不等式 $-x^2 + (a-3)x + b^2 - 1 \geq 0$ 有相同的非空解集，求 a, b 的值。

【巧解】等价转化法、数形结合法

将 $y = x^2 + 2ax - 2b + 1$ 与 $y = -x^2 + (a-3)x + b^2 - 1$ 两式相加，得 $2y = (3a-3)x + b^2 - 2b$ ，此即为直线 MN 的方程（其中 M, N 分别为两函数图象与 x 轴的两个交点）；另一方面，由题意知， MN 即 x 轴，其方程为 $y=0$ ，比较两式的系数得， $3a-3=0, b^2-2b=0$ ，从而易得 $a=1, b=0$ 或 2 ，特别地当 $a=1, b=0$ 时，两不等式的解集为 $\{-1\}$ ，也符合题意。

[答案] $a=1, b=0$ 或 2 。

例 22 设定义在 $[-2, 2]$ 上的偶函数在区间 $[0, 2]$ 上单调递减，若 $f(1-m) < f(m)$ ，求实数 m 的

取值范围。

【巧解】等价转化法

解: $\because f(x)$ 是偶函数, $\therefore f(-x)=f(x)=f(|x|)$, $\therefore f(1-m) < f(m)$ 等价于 $f(|1-m|) < f(|m|)$

又当 $x \in [0, 2]$ 时, $f(x)$ 单调递减, $\therefore |1-m| > |m|$ 且 $-2 \leq 1-m \leq 2$ 且 $-2 \leq m \leq 2$

解得 $-1 \leq m < \frac{1}{2}$ 。

[答案] $-1 \leq m < \frac{1}{2}$.

注: 本题应用了偶函数的一个简单的性质, 从而避免了一场“大规模”的讨论, 值得关注。

例 23 解不等式: $\frac{1}{2} < \frac{x^3+2x+3}{2x^3+x+1} < 3$.

【巧解】构造法, 定比分点法

把 $\frac{1}{2}$ 、 $\frac{x^3+2x+3}{2x^3+x+1}$ 、3 看成是数轴上的三点 A、P、B, 由定比分点公式知 P 分所成的比 $t > 0$,

即 $\frac{\frac{x^3+2x+3}{2x^3+x+1}-1}{\frac{x^3+2x+3}{2x^3+x+1}-2} > 0$, 化简得 $x(3x+5) > 0$, $\therefore x \in (-\infty, -\frac{5}{3}) \cup (0, +\infty)$ 。

[答案] $x \in (-\infty, -\frac{5}{3}) \cup (0, +\infty)$ 。

例 24 已知 x, y, z 均是正数, 且 $x+y+z=1$, 求证: $\sqrt{1-3x^2}+\sqrt{1-3y^2}+\sqrt{1-3z^2} \leq \sqrt{6}$ 。

【巧解】配凑法、升幂法

不等式两边配上 $\sqrt{\frac{2}{3}}$, 再运用均值不等式升幂。(你知道为什么要配 $\sqrt{\frac{2}{3}}$ 吗?)

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{1-3x^2}+\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{1-3y^2}+\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{1-3z^2} &\leqslant \frac{\frac{2}{3}+1-3x^2}{2}+\frac{\frac{2}{3}+1-3y^2}{2}+\frac{\frac{2}{3}+1-3z^2}{2} \\ &= \frac{5-3(x^2+y^2+z^2)}{2} \leqslant \frac{5-3 \times \frac{1}{3}}{2}=2, \quad \therefore \text{原式成立。} \end{aligned}$$

[答案] 见证明过程

例 25 设 a, b, c 为 $\triangle ABC$ 的三条边, 求证: $a^2+b^2+c^2 < 2(ab+bc+ca)$.

【巧解】综合法

$\because a+b > c, b+c > a, c+a > b$, \therefore 三式两边分别乘以 c, a, b 得 $ac+bc > c^2, ab+ac > a^2, bc+ab > b^2$, 三式

相加并整理得, $a^2+b^2+c^2 < 2(ab+bc+ca)$.

[答案] 见证明过程

例 26 解不等式 $\frac{8}{(x+1)^3} + \frac{10}{x+1} - x^3 - 5x > 0$.

【巧解】构造法, 综合法

原不等式等价于 $(\frac{2}{x+1})^3 + 5(\frac{2}{x+1}) > x^3 + 5x$, 构造函数 $f(x) = x^3 + 5x$, 则原不等式即为 $f(\frac{2}{x+1}) > f(x)$, 又 $f(x)$ 在 R 上是增函数, $\therefore \frac{2}{x+1} > x$, 解此不等式得 $x < -2$ 或 $-1 < x < 1$.

[答案] $\{x \mid x < -2 \text{ 或 } -1 < x < 1\}$.

例 27 已知函数 $f(x) = x^2 + ax + b$ ($a, b \in R$), $x \in [-1, 1]$, 求证: $|f(x)|$ 的最大值 $M \geq \frac{1}{2}$.

【巧解】反证法

假设 $M < \frac{1}{2}$, 则 $|f(x)| < \frac{1}{2}$ 恒成立, $\therefore -\frac{1}{2} < f(x) < \frac{1}{2}$, 即 $-\frac{1}{2} < x^2 + ax + b < \frac{1}{2}$,

令 $x=0, 1, -1$, 分别代入上式, 得 $-\frac{1}{2} < b < \frac{1}{2}$ ①, $-\frac{1}{2} < 1-a+b < \frac{1}{2}$ ②, $-\frac{1}{2} < 1+a+b < \frac{1}{2}$ ③,

由②+③得 $-\frac{3}{2} < b < \frac{1}{2}$, 这与①式矛盾, 故假设不成立, \therefore 原命题成立.

[答案] 见证明过程

例 28 已知二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$, 且方程 $f(x)=0$ 的两根 x_1, x_2 都在 $(0, 1)$ 内, 求证: $f(0)f(1) \leq \frac{a^2}{16}$.

【巧解】待定系数法、基本不等式法

因方程有两个实根为 x_1, x_2 , 故可设 $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$, 于是

$$f(0)f(1) = ax_1x_2 \cdot a(1-x_1)(1-x_2) = a^2x_1(1-x_1)x_2(1-x_2) \leq a^2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \leq \frac{a^2}{16}.$$

[答案] 见证明过程

例 29 若 a_1, a_2, \dots, a_{11} 成等差数列, 且 $a_1^2 + a_{11}^2 \leq 100$, 求 $S = a_1 + a_2 + \dots + a_{11}$ 的最大值和最小值。

【巧解】基本不等式法、综合法

$$(a_1 + a_{11})^2 = a_1^2 + 2a_1a_{11} + a_{11}^2 \leq 2(a_1^2 + a_{11}^2) \leq 200, \therefore |a_1 + a_{11}| \leq 10\sqrt{2},$$

又 a_1, a_2, \dots, a_{11} 成等差数列, $\therefore S = a_1 + a_2 + \dots + a_{11} = \frac{11}{2}(a_1 + a_{11})$,

$$\therefore S_{\max} = 55\sqrt{2}, S_{\min} = -55\sqrt{2}.$$

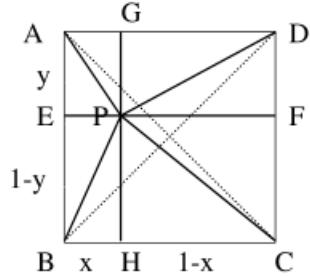
[答案] $S_{\max} = 55\sqrt{2}$, $S_{\min} = -55\sqrt{2}$.

例 30 若 $0 \leq x, y \leq 1$, 求证: $\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{(1-x)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + (1-y)^2} + \sqrt{(1-x)^2 + (1-y)^2} \geq 2\sqrt{2}$ 等号

当且仅当 $x=y=\frac{1}{2}$ 时成立。

【巧解】构造法

如图，设正方形 ABCD 的边长为 1，BH=x, AE=y，则 HC=1-x, BE=1-y, 于是 $AP=\sqrt{x^2+y^2}$, $BP=\sqrt{x^2+(1-y)^2}$,
 $DP=\sqrt{(1-x)^2+y^2}$, $PC=\sqrt{(1-x)^2+(1-y)^2}$, 由 $AP+PC \geq AC$, $BP+DP \geq BD$,
而 $AC=BD=\sqrt{2}$ 。看，此时结论是不是显然的了？



[答案] 见证明过程

例 31 设 m 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的实根，且 $a>b>c>0$, 求证: $|m|<1$.

【巧解】综合法

设方程的另一根为 n , 则由韦达定理得 $m+n=-\frac{b}{a}<0$, $mn=\frac{c}{a}>0$, $\therefore m, n$ 同为负数,

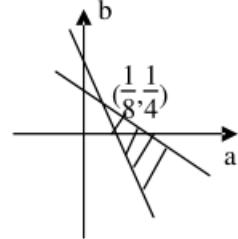
$\therefore 1 > \frac{b}{a} = |m+n| = |m| + |n|$, $\therefore |m| < 1, |n| < 1$. \therefore 结论成立。

[答案] 见证明过程

例 32 已知二次函数 $f(x)=ax^2+bx+1$ ($a, b \in \mathbb{R}, a>0$), 设方程 $f(x)=x$ 的两实根为 x_1 和 x_2 , 如果 $x_1<2< x_2<4$, 且函数 $f(x)$ 的对称轴为 $x=x_0$, 求证: $x_0>-1$.

【巧解】数形结合法

设 $g(x)=f(x)-x=ax^2+(b-1)x+1$, 由题意得 $\begin{cases} g(2)<0 \\ g(4)>0 \end{cases}$, 即
 $\begin{cases} 4a+2b-1<0 \\ 16a+4b-3>0 \end{cases}$, 目标是证明 $-\frac{b}{2a}>-1$, 即 $\frac{b}{a}<2$. 如图作出约束条件下的平面区域 (不含边界), 而 $\frac{b}{a}$ 表示区域内的点 (a, b) 与坐标原点连线的斜率, 易见 $\frac{b}{a}<2$, 故命题成立。



[答案] 见证明过程

例 33 已知 $\frac{1}{2} \leq a_k \leq 1$ ($k \in \mathbb{N}_+$), 求证: $a_1 a_2 \cdots a_n + (1-a_1)(1-a_2) \cdots (1-a_n) \geq \frac{1}{2^{n-1}}$.

【巧解】增量法、换元法

设令 $a_k=\frac{1}{2}+b_k$ ($0 \leq b_k \leq \frac{1}{2}$), 则原式左边 $= (\frac{1}{2}+b_1)(\frac{1}{2}+b_2) \cdots (\frac{1}{2}+b_n) + (\frac{1}{2}-b_1)(\frac{1}{2}-b_2) \cdots (\frac{1}{2}-b_n) = [(\frac{1}{2})^n + M] + [(\frac{1}{2})^n + N] = (\frac{1}{2})^{n-1} + M + N \geq (\frac{1}{2})^{n-1} =$ 右边, \therefore 原式成立。

[答案] 见证明过程

(注: 多项式 M 和 N 正负抵消部分项后, 所余部分和必为非负数。)

例 34 记椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$), A、B 是椭圆上的两点, 线段 AB 的垂直平分线与 x 轴相交于 $P(x_0, 0)$, 证明: $-\frac{a^2 - b^2}{a} < x_0 < \frac{a^2 - b^2}{a}$.

【巧解】 数形结合法、等价转化法

记 Q(x, y) 是椭圆上的任一点, 则 $|PQ|^2 = (x - x_0)^2 + y^2 = (x - x_0)^2 + b^2(1 - \frac{x^2}{a^2})$, $x \in [-a, a]$, 得二次函数, $f(x) = \frac{a^2 - b^2}{a}(x - \frac{a^2}{a^2 - b^2}x_0)^2 + b^2 - \frac{a^2}{a^2 - b^2}x_0^2$ 且由 $|PA| = |PB|$, 知 $f(x_A) = f(x_B)$, 即 $f(x)$ 在 $[-a, a]$ 上不单调, 由二次函数最小值的唯一性知 $-a < \frac{a^2}{a^2 - b^2}x_0 < a$, 变形即得所求。

[答案] 见证明过程

例 35 已知 $a, b, c \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$. 若 $a+c=0$, $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上的最大值是 2, 最小值是 $-\frac{5}{2}$. 证明: $a \neq 0$ 且 $|\frac{b}{a}| < 2$.

【巧解】 反证法

假设 $a=0$ 或 $|\frac{b}{a}| \geq 2$.

(1) 若 $a=0$, 则由 $a+c=0$, 得 $c=0$, $\therefore f(x)=bx$. 由题设知 $b \neq 0$, $\therefore f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 是单调函数, 从而 $f(x)_{\max}=|b|$; $f(x)_{\min}=-|b|$, 于是 $|b|=2$, $-|b|=-\frac{5}{2}$, 由此得矛盾;

(2) 若 $|\frac{b}{a}| \geq 2$, 则 $|\frac{-b}{2a}| \geq 1$ 且 $a \neq 0$, 因此区间 $[-1, 1]$ 在抛物线 $f(x)=ax^2+bx-a$ 的对称轴 $x=\frac{-b}{2a}$ 的左侧或右侧, \therefore 函数 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上是单调函数, 从而 $f(x)_{\max}=|b|$; $f(x)=-|b|$, 由 (1) 知这是不可能的。

综合 (1) (2) 知, 命题成立。

[答案] 见证明过程

例 36 是否存在常数 C, 使得不等式 $\frac{x}{2x+y} + \frac{y}{x+2y} \leq C \leq \frac{x}{x+2y} + \frac{y}{2x+y}$, 对任意正数 x, y 恒成立?

试证明你的结论。

【巧解】 分析法

令 $x=y=1$, 得 $\frac{2}{3} \leq C \leq \frac{2}{3}$, 所以 $C=\frac{2}{3}$. 下面给出证明:

(1) 先证明: $\frac{x}{2x+y} + \frac{y}{x+2y} \leq \frac{2}{3}$, 因为 $x>0, y>0$, 要证: $\frac{x}{2x+y} + \frac{y}{x+2y} \leq \frac{2}{3}$, 只要证

$3x(x+2y) + 3y(2x+y) \leq 2(2x+y)(x+2y)$, 即证: $x^2 + y^2 \geq 2xy$, 这显然成立,

$\therefore \frac{x}{2x+y} + \frac{y}{x+2y} \leq \frac{2}{3}$;

(2) 再证: $\frac{x}{x+2y} + \frac{y}{2x+y} \geq \frac{2}{3}$, 只需证: $3x(2x+y) + 3y(x+2y) \geq 2(x+2y)(2x+y)$,

即证: $x^2 + y^2 \geq 2xy$, 这显然成立, $\therefore \frac{x}{x+2y} + \frac{y}{2x+y} \geq \frac{2}{3}$ 。

综合(1)、(2)得, 存在常数 $C = \frac{2}{3}$, 使对于任何正数 x, y 都有 $\frac{x}{2x+y} + \frac{y}{x+2y} \leq \frac{2}{3} \leq \frac{x}{x+2y} + \frac{y}{2x+y}$ 成立。

[答案] 存在常数 $C = \frac{2}{3}$, 证明略.