由①②③得 $g(t)=\begin{cases}t^2+2t+2(t<-1),\\1(-1\leqslant t\leqslant 1),\\t^2-2t+2(t>1).\end{cases}$

三、借助二次函数图象，解决有关二次函数应用问题

例 6　已知 $f(x)=ax^2+bx(a\neq 0)$，a、b 是常数，且 $f(2)=0$，并使方程 $f(x)=x$ 有相等实根. (1)求 $f(x)$ 的解析式. (2)问是否存在实数 m、n，当 $m<n$ 时，$f(x)$ 的定义域和值域分别是 $[m,n]$ 和 $[2m,2n]$.

解：(1)由 $f(x)=ax^2+bx$ 且 $f(2)=0$，得 $4a+2b=0$，即 $2a+b=0$ ①. 又方程 $f(x)=x$，即 $ax^2+(b-1)x=0$ 有等根，得 $(b-1)^2=0$　②.

由①②联立解得 $a=-\frac{1}{2}$，$b=1$，故 $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+x$.

(2)由 $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+x=-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{2}\leqslant\frac{1}{2}$，可得 $2n\leqslant\frac{1}{2}$，即 $n\leqslant\frac{1}{4}$.

$f(x)$ 的对称轴是直线 $x=1$，由图 8 可知 $f(x)$ 在区间 $[m,n]$ 上是增函数.

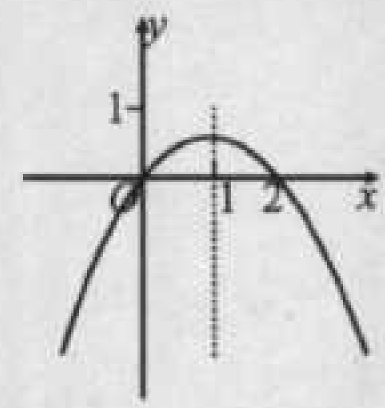

图 8

$$\therefore\quad\begin{cases}m<n\leqslant\frac{1}{4},\\f(m)=2m,\\f(n)=2n\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m=-2,\\n=0.\end{cases}$$

∴　存在实数 $m=-2$、$n=0$，使 $f(x)$ 在 $[-2,0]$ 上值域是 $[-4,0]$.

点评：以二次方程形式出现的函数问题，利用二次函数特有的性质，可在疑难的困惑中求得简捷的突破.

（责任编辑　郭正华）

会要，会学习，才能立足于社会。

——wangsen_7518503@126.com