数学问题的巧解策略

四川绵阳师范学院数理学院(621000) 胡小平

四川德阳市罗江区七一潺亭中学(618500) 周 茜

[摘 要]利用数学的理论、公式,构造出满足数学问题的条件或者结论的一种数学模型,体现其解法为“打破常规、另辟蹊径”的情境,让所求数学问题获得巧解,从而达到妙解数学问题,以此培养学生思维的独创性,发展学生的创新思维与创新能力.

[关键词]数学问题;模型;巧解

[中图分类号] G633.6 [文献标识码] A [文章编号] 1674-6058(2020)29-0025-02

对于一些数学问题,若能充分抓住“已知题干”的结构,挖掘出它的显性或隐性条件,巧妙地构造相适应的数学模型,就可以简捷地求得问题的解.

一、构圆锥曲线模型,巧解数学问题

[例1]已知锐角α、β满足下列条件$\dfrac{\cos^4\alpha}{\sin^2\beta}+\dfrac{\sin^4\alpha}{\cos^2\beta}=1$.求证$\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}$.

证明:由已知点$A(\cos^2\alpha,\sin^2\alpha)$,点$B(\sin^2\beta,\cos^2\beta)$都在椭圆$\dfrac{x^2}{\sin^2\beta}+\dfrac{y^2}{\cos^2\beta}=1$上,过点$B$的切线方程为$x+y=1$.而点$A$又在此切线上,由切点的唯一性知,点$A$与点$B$重合.

$\therefore\ \cos^2\alpha=\sin^2\beta,\sin^2\alpha=\cos^2\beta$,

$\therefore\ \cos\alpha=\sin\beta=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\beta\right)$.

$\because\ \alpha、\dfrac{\pi}{2}-\beta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$,

$\therefore\ \alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}$.

评注:该证法“抓住”已知式的结构,深入挖掘出它的几何背景,巧妙地构造圆锥曲线(椭圆)模型,简捷地将问题解决.应用构造法解题,见解独特,不循常规,妙趣横生.

二、构矩形模型,巧解数学问题

[例2]证明对于正数x、y,有不等式$\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}+\dfrac{1}{\sqrt[4]{y}}\geqslant\dfrac{2^{\frac{5}{4}}}{\sqrt[4]{x+y}}$.

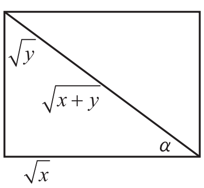

图1

证明:以$\sqrt{x}$,$\sqrt{y}$为边构造矩形(如图1),原不等式等价于

$\sqrt[4]{\dfrac{x+y}{x}}+\sqrt[4]{\dfrac{x+y}{y}}\geqslant 2^{\frac{5}{4}}$

$\Leftrightarrow\sqrt[4]{\sec^2\alpha}+\sqrt[4]{\csc^2\alpha}\geqslant 2^{\frac{5}{4}}$

$\Leftrightarrow\sqrt[4]{1+\tan^2\alpha}+\sqrt[4]{1+\cot^2\alpha}$

$\geqslant 2\sqrt[8]{(1+\tan^2\alpha)\cdot(1+\cot^2\alpha)}$

$=\sqrt[8]{2+\tan^2\alpha+\cot^2\alpha}\geqslant 2^{\frac{5}{4}}$.

故,原不等式得证.

三、构配对数式模型,巧解数学问题

[例3]求$(\sqrt{x}+2)^{2n+1}$展开式中x的整数次幂项的系数之和.

分析:展开式中哪些项是整数次幂项,难以厘清.但若能想办法把非整数次幂项抵消,问题就可以解决了.

解:设$A=(\sqrt{x}+2)^{2n+1}$,添加一个配对数式$B=(-\sqrt{x}+2)^{2n+1}$.由二项式定理有,A和B中展开式x的整数次幂项之和相同,记为$P(x)$;非整数次幂项之和互为相反数.

那么有$2P(x)=(\sqrt{x}+2)^{2n+1}+(-\sqrt{x}+2)^{2n+1}$.

令$x=1$,则有$2P(1)=(1+2)^{2n+1}+(-1+2)^{2n+1}=3^{2n+}+1$.

故所求系数和为$P(1)=\dfrac{1}{2}(3^{2n+1}+1)$.

评注:配对思想是数学的重要思想之一,在求解某些数学问题时,合适的配对方式往往能使计算或计数的过程简化,起到事半功倍的效果.该题的解法主要是在观察数学问题的结构的指引,诱发创新思维与创新潜能,从而联想到利用构造法配对数式来解决.

四、构三角形模型,巧解数学问题

[例4]解方程$\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-24x+160}=13$.

分析:由于$\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-24x+160}=13$可

[基金项目]四川省哲学社会科学重点研究基地——西华师范大学四川省教育发展研究中心项目:构建师范生与中小学教师现代学徒制模式的实践研究(CJF19024).

[通信作者]胡小平(1964-),教授,研究方向:数学教育、试题分析与研究.

变形为$\sqrt{x^2+1}+\sqrt{(12-x)^2+16}=13$.

$\sqrt{x^2+1}$、$\sqrt{(12-x)^2+16}$、13均为正实数，可以看作线段的长，巧构三角形（直角），利用三角形的性质妙解此类数学问题.

解：由于$\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-24x+160}=13$可变形为$\sqrt{x^2+1}+\sqrt{(12-x)^2+16}=13$.

令$y=12-x$，则有$\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+16}=13$.

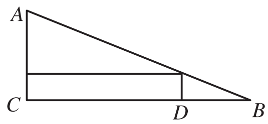

图2

如图2，构造直角Rt$\triangle ABC$，使$\angle C=90°$，$AC=12$，$AB=13$，则$BC=5$.

在BC上取$CD=4$，作$DM\parallel AC$交AB于M点，作$MN\parallel BC$交AC于N点.

设$NC=MD=x$，$NA=y$，

则$BM+MA=\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+16}=13$.

由$\triangle BDM\sim\triangle MNA$可得$\frac{x}{y}=\frac{1}{4}$，$\therefore\ y=4x$.

解方程组$\begin{cases}x+y=12,\\ y=4x,\end{cases}$得$x=\frac{12}{5}$，$y=\frac{48}{5}$.

经检验$x=\frac{12}{5}$是原方程的解.

评注：此解法可以拓展：对形如$\sqrt{(x-a)^2+b}+\sqrt{(c-y)^2+d}=m$的无理方程，可构造直角三角形模型，应用勾股定理和相似形，使之转化为简单的方程组来解.

五、构非负数模型，巧解数学问题

[**例5**]解方程$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{1+x^2}=\frac{5}{4}$.

分析：该题从外形来看，解该方程并不难，似乎很容易去根号，去分母转化为整式方程.事实上，转化后是一个一元四次方程，解此四次方程却不容易.若适当变形（配方），构成非负数模型后，就能巧妙解之.

解：方程$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{1+x^2}=\frac{5}{4}$可变形为

$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\left(\frac{1}{1+x^2}-1\right)-\frac{1}{4}=0$，

即$-\frac{x^2}{1+x^2}+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{1}{4}=0$，

所以$\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{1}{2}\right)^2=0$.

故$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{1}{2}$，解得$x_1=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$x_2=-\frac{\sqrt{3}}{3}$（舍去）.

评注：对于许多数学问题，比如求代数式的值，解方程（组），解不等式，证明条件等式，由于其“证解方法”因题而异，因而难度较大.若能对已知的式子巧妙地构造成非负数的模型，再利用非负数的知识，从而使问题迅速被巧解.

六、构恒等式模型，巧解数学问题

[**例6**]已知实数a、b、c、d满足$a^2+b^2+c^2+d^2\leqslant 1$，

求证：$(a+b)^4+(a+c)^4+(a+d)^4+(b+c)^4+(b+d)^4+(c+d)^4\leqslant 6$.

分析：由于$(a-b)^4+(a-c)^4+(a-d)^4+(b-c)^4+(b-d)^4+(c-d)^4\geqslant 0$，从而有结论$(a+b)^4+(a+c)^4+(a+d)^4+(b+c)^4+(b+d)^4+(c+d)^4\leqslant(a+b)^4+(a+c)^4+(a+d)^4+(b+c)^4+(b+d)^4+(c+d)^4+(a-b)^4+(a-c)^4+(a-d)^4+(b-c)^4+(b-d)^4+(c-d)^4$，所以适当变形（添项），构成恒等式模型后，就能巧妙解之.

证明 $\because(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$，

$(a-b)^4=a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4$，

$\therefore(a+b)^4+(a-b)^4=2a^4+12a^2b^2+2b^4$，

$\because\ (a+b)^4+(a+c)^4+(a+d)^4+(b+c)^4+(b+d)^4+(c+d)^4+(a-b)^4+(a-c)^4+(a-d)^4+(b-c)^4+(b-d)^4+(c-d)^4$

$=6(a^4+b^4+c^4+d^4+2a^2b^2+2a^2c^2++2a^2c^2+2b^2c^2+2b^2d^2+2c^2d^2)$

$=6(a^2+b^2+c^2+d^2)^2$.

$\because a^2+b^2+c^2+d^2\leqslant 1$，

$\therefore 6(a^2+b^2+c^2+d^2)^2\leqslant 6$，

$\therefore(a+b)^4+(a+c)^4+(a+d)^4+(b+c)^4+(b+d)^4+(c+d)^4+(a-b)^4+(a-c)^4+(a-d)^4+(b-c)^4+(b-d)^4+(c-d)^4\leqslant 6$.

$\because(a-b)^4+(a-c)^4+(a-d)^4+(b-c)^4+(b-d)^4+(c-d)^4\geqslant 0$，

$\therefore(a+b)^4+(a+c)^4+(a+d)^4+(b+c)^4+(b+d)^4+(c+d)^4\leqslant 6$.

评注：该证明方法巧妙借助了所给条件以外的数学结论：$(a+b)^4+(a+c)^4+(a+d)^4+(b+c)^4+(b+d)^4+(a-b)^4+(a-c)^4+(a-d)^4+(b-c)^4+(b-d)^4+(c-d)^4=6(a^2+b^2+c^2+d^2)^2$.将此难度较大的不等式证明，简明扼要地解决了，其证法真让人称“绝”.

七、构定理模型，巧解数学问题

[**例7**]已知$\triangle ABC$的顶点A在圆O上，$\triangle ABC$三边AB，AC，BC上的中线分别与圆O相交于点B_1，C_1，D_1

（下转第43页）

的科学素养,笔者提出以下两点思考。

1. 注重个体独特的生命体验,强调实践活动在学生发展中的价值

学生是身心合一的完整生命体,他们在教学活动中获得知识经验的过程也是学生独特的生命体验过程。实践活动是生命体验的有效方式。首先,实践活动是学生获得直接经验的重要途径。其次,实践活动为学生间接感受情意价值提供了丰富的情境。体验是建立在已有的经验之上的,经验积累得越丰富,体验也就越深刻,而体验出具有指导意义的知识结构又可以促进新经验的形成。强调实践活动在学生发展中的价值,有利于在追求教学目标的同时促进学生独特的生命体验,有利于构建学生发展结果与发展过程相统一的内循环,促进学生科学素养的发展。

2. 注重个体思维的整合,强调直觉思维在形成科学素养中的作用

从结构上看,个体思维包括概念思维和直觉思维。直觉思维在处理创造性问题及情感态度与价值观等问题上有着概念思维达不到的效果,但直觉思维是以概念思维为基础的,由直接思维所产生的新知最终仍需概念思维去检验和论证,正是在两种思维互补协作下,学生的认知水平才能螺旋上升。在教学中,教师既要肯定直觉思维的作用,也要有效整合两种思维方式,只有这样才能促进学生科学素养的有效提升。

[参 考 文 献]

[1] 中华人民共和国教育部. 全日制义务教育物理课程标准(2011年版)[S]. 北京:北京师范大学出版社,2012.

[2] 刘炳生,李容. 义务教育教科书·物理:八年级下册)[M]. 南京:江苏科学技术出版社,2013.

[3] 张华龙. 课程目标一体化与体悟教学[J]. 课程·教材·教法,2004(4):18-22.

[4] 张华龙. 体悟学习:塑造人文精神的基本学习方式[J]. 教程·教材·教法,2003(3):47-51.

[5] 齐军. 体悟教学研究[D]. 南京:南京师范大学,2012.

(责任编辑 南 宾)

(上接第26页)

(如图3). 试证:$AB \times AB_1, AD \times AD_1, AC \times AC_1$ 成等差数列.

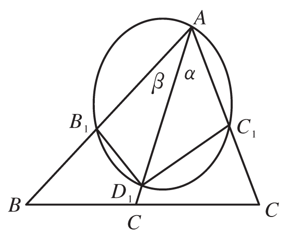

图3

分析:显然这道题要求较高,从常规思路去思考往往很难寻找到突破口,但是考虑到题中的位置关系——圆与四边形$AB_1C_1D_1$,再运用Ptolemy定理问题获证.

证明:如图3,联结B_1D_1、C_1D_1、B_1C_1.

设$\angle CAD = \alpha, \angle BAD = \beta$,圆$O$的半径为$R$.

由于AD为BC上的中线.

所以$S_{\triangle ABD} = S_{\triangle ADC} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC}$.

由正弦定理可得

$B_1D_1 = 2R\sin\beta, C_1D_1 = 2R\sin\alpha$,

$B_1C_1 = 2R\sin(\alpha + \beta)$.

$\because$ 四边形$AB_1C_1D_1$是圆O的内接四边形.

$\therefore$ 根据Ptolemy定理可得$AB_1 \times C_1D_1 + B_1D_1 \times AC_1 = AD_1 \times B_1C_1$.

即$AB_1 \times 2R\sin\alpha + AC_1 \times 2R\sin\beta = AD_1 \times 2R\sin(\alpha+\beta)$,

$AB_1\sin\alpha + AC_1\sin\beta = AD_1\sin(\alpha + \beta)$,

$\frac{1}{2} AB \times AC \times AD(AB_1\sin\alpha + AC_1\sin\beta) = \frac{1}{2} AB \times AC \times AD \times AD_1\sin(\alpha + \beta)$,

$AB_1 \times AB \times S_{\triangle ACD} + AC_1 \times AC \times S_{\triangle ABD} = AD_1 \times AD \times S_{\triangle ABC}$,

$AB_1 \times AB \times S_{\triangle ACD} + AC_1 \times AC \times S_{\triangle ABD} = 2AD_1 \times AD \times \frac{1}{2} S_{\triangle ABC}$.

$\because \ S_{\triangle ABD} = S_{\triangle ADC} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC}$.

$\therefore \ AB_1 \times AB + AC_1 \times AC = 2AD_1 \times AD$.

故 $AB \times AB_1, AD \times AD_1, AC \times AC_1$ 成等差数列.

评注:对于这道涉及几何与代数的综合问题,巧妙借助了题中暗含的数的信息,灵活构造三角形的面积参量,巧妙借用Ptolemy定理这一座"桥"顺利地利用"形"把"数"综合的问题解决了,其解法让人称"绝".

总之,数学问题涉及内容丰富多彩,呈现的形式千姿百态,解题策略自然也会多种多样.教者要引导学生充分联想所学数学方法,巧妙构造典型的数学模型,从而给出数学问题的妙解.这样既可以启迪和拓展学生的思维,又能提升学生的数学素养.

(责任编辑 黄桂坚)