**《数学建模第一次作业》**

论文题目：基于整数规划和0-1规划的工人人数分配问题

姓名（学号）：王岚(20191682310070)

年级专业： 2019级 数学类专业

2019级 电子信息类专业

2019级 旅游管理类专业

联系电话：

基于整数规划和0-1规划的工人人数分配问题

摘 要

本文研究的是建筑公司如何雇用装修员工的问题，主要是各个工地需要雇用不同经验值的员工的数量各为多少的问题，目的是在各个工地对于不同经验值的装修人员的需求量得到满足的条件下，在各个装修队可以提供的不同经验值的人数范围内，制定出合适的方案对工人分数进行分配使建筑公司承担的费用最小。

问题一中，主要解决了11个装修队去8个工地的人数分配问题。通过分析知每个经验值的人数分配问题是相互独立的，将它们分开考虑，最后将每个经验值的最小费用左和，得到一个简单的易于求解的线性规划问题，并且每个决策变量都是整数。通过假设建筑公司在制定方案时会按照需求量严格配备不同经验值的装修人员数，进而得到装修人员工资以及午餐费用之和为整数，将总费用最小简化成了花费在出租车上的费用，使目标函数更加简单。最终用Lingo软件实现相关式子，得到了

问题二中，主要解决了将8个楼盘分为4个工地之后，11个装修队去4个工地的人数分配问题。为了用变量表示出楼盘之间是否被划分为同一工地，我们引入了0-1变量来刻画楼盘之间的关系，得到了一个对角线元素全为0的只含有0和1两个数的对称矩阵；将来自不同装修队的不同经验值的装修员工去到各个楼盘的人数看成4个未知数都为整数的矩阵并以此作为决策矩阵；由于装修队到任一楼盘乘坐出租车行驶的实际距离为此装修队到该楼盘的距离和此装修队到与该楼盘在同一工地上的另一楼盘的距离的较小值，进而巧妙地用0-1变量表示出了这个实际距离，得到一个距离矩阵。此模型综合使用了0-1规划和整数规划这两个算法，将题中给出的关于楼盘需求人数和装修队能提供人数数量以及所构造的对称矩阵的需要满足的条件一起作为此优化模型的约束条件，将利用上述三个矩阵计算得到的出租车的总费用连同固定费用一起作为此优化模型的目标函数，用lingo软件进行实现，得到了

关键词：整数规划 0-1规划 人数分配 优化模型

# 问题重述

海口某建筑公司8个楼盘已经建筑完毕，现在需要进行内部精装修，由于公司员工有限，故需要从集散在海口市的装修队雇用一定数量的员工。已知某日建筑公司一共需要雇用212名装修员工，并且各楼盘对于不同经验值的装修员工的需求量已知。装修公司拟定了两套装修方案：方案A是将8个楼盘划分为8个工地，安排各装修队被雇用人员从装修队出发，到达指定的工地（楼盘）进行装修；方案B是将8个楼盘划分为4个工地，安排各装修队被雇用的员工从装修队出发，到工地的最近的一个楼盘，接下来完成该工地2个楼盘的装修任务。建筑公司需要支付的费用包括员工从装修队到给个楼盘的费用，员工工资，各员工午餐费用。试从节省费用的角度出发，针对不同的方案建立数学模型研究下面的问题：

（1）若按照方案A，从各装修队雇用各类经验值的人员各多少，分别派往哪些工地？

（2）若按照方案B，怎样划分4个工地？从各装修队雇用各类经验值的人员各多少，分别派往哪个工地，各工地的开工楼盘是哪个楼盘？

# 问题分析

## 问题一的分析

方案A中将8个楼盘分为8个工地，来自不同装修队的装修人员需要分别前往这8个工地，要求我们在节省费用的条件下对不同工地应当分配不同经验值的装修工人数量进行规划。

建筑公司需要的支付的费用可以分为两类：一是各员工到达楼盘的费用，假设坐出租车为一人一趟，那么这部分费用与工人人数以及装修队到楼盘的距离两个因素有关；另一部分是固定的费用，主要包括各员工工资以及午餐费用，由于建筑公司各个楼盘以及不同经验值的人数是已经确定，因此这部分费用可以直接得出，是一个常量。

由于每个楼盘对于不同经验值需要的人数不同，各个装修队能够提供的不同经验值的人数也有上限，并且不同楼盘和不同装修队的距离也有远有近，如果某个楼盘决定某个装修队多少人，就意味着出租车要在这两地之间走多少趟，这就要求我们把每个楼盘需要各个装修队各个经验值的人数设为整数变量，运用整数规划算法，建立一个优化模型。

## 问题二的分析

方案B中将把个楼盘分为4个工地，来自不同装修队的装修人员只需要分别前往这四个工地中较近的一个楼盘，再完成工地中2个楼盘的装修任务。相对于方案A，此方案的优点在于，对于任何一个工地，装修队可以选择先去较近的一个楼盘，从同一个工地中一个楼盘到另一个楼盘之间有专车接送，不需要额外花费，进而可以节省费用。

因此，问题就变成了应当如何将8个楼盘划分成4个工地，使得一些装修队可以就近出行减少费用。为了表示出8个楼盘之间哪两个楼盘在同一个工地，我们引入0-1变量，将要去往同一工地的装修工人合并在一起考虑，建立了一个以费用最小为目标的优化模型。

# 模型假设

1.每个工地的两个楼盘之间的工人转运，建筑公司有专车运送，不计费用。

2.一人乘坐一辆出租车，假设出租车数量大于人数，海口出租车价格为10元/3公里，超过三公里的2.1元/公里，为出租车的费用，在模型中，不考虑时间对出租车收费的影响。

3.不考虑其他时间，只要按照楼盘所需要的人数配备，一天就可以完成任务。

4.建筑公司在制定方案时只考虑费用最小这一目标,而总费用中工人工资以及工人午餐费用是固定的。

5.假设严格按照各个楼盘对于各个经验值的需求量进行配备，不会因为装修队能提供的装修人数有限而改变方案。

6.假设装修工人严格遵从制定的计划去到相应楼盘工作，一名工人只去一个楼盘，同一工地两个楼盘不相互帮助。

7.不考虑交税问题。

# 符号说明

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **符号** | **说明** | **单位** |
|  | 第i个装修队去第j个楼盘的经验值分别为为0.4,0.6,0.8,1的工人数 | 人 |
|  | 装修队到楼盘的距离 | 公里 |
| S | 花费在打出租车上的总费用 | 元 |
|  | 经验值分别为为0.4,0.6,0.8,1的装修人员花费在出租车上的总费用 | 人 |
|  | 第i个装修队能够提供的经验值分别为为0.4，0.6，0.8，1的工人上限 | 人 |
|  | 第j个楼盘当日需求的经验值分别为0.4，0.6，0.8，1的  人数 | 人 |
|  | 0-1变量 |  |

# 模型的建立与求解

## 问题一模型的建立与求解

### 模型的建立

由于各经验值的分配是独立的，因此我们将经验值分别为0.4，0.6，0.8，1的分开考虑，分别求出不同经验值的人出租车的费用最小值，再把四个最小值相加，即为在出租车上花费的总费用。不妨先考虑经验值为0.4的人数分配问题，其他经验值的情况只给出最终结果。

1.决策变量

若设装修队到楼盘派出的经验值为0.4的人数为,得出如下决策矩阵

|  |  |
| --- | --- |
|  | () |

2.目标函数

优化的目标是使建筑公司的费用最小，假设花费在打出租车上的总费用为S,工人工资以及工人午餐费用之和为R。

工人工资以及工人午餐费用之和是固定费用，通过计算得(元)

对于出租车的费用，将出租车的费用分为起步价的花费和三公里以后每公里2.1元的花费两部分。

(1).由图中数据看出，装修队和工地之间的距离都超过3公里，因此任意一趟前三公里的价格都为10元，可以得出，需要花费的起步价一共为

|  |  |
| --- | --- |
|  | () |

(2).三公里之后，出租车的的费用为每公里2.1元，这一部分的花费为

|  |  |
| --- | --- |
|  | () |

其中为装修队到楼盘的距离。

因此，经验值为0.4的人在出租车上花费的总费用，亦即目标函数为

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | () | |
| 考虑四种经验值装修人员在出租车上花费的总费用，得到最终的最小费用为 | |
|  | | () | |

目标函数为

3.约束条件

(1)对于每一个装修队来说，能够提供的经验值为0.4的人数是有限的，因此，对于每一个,派去所有的和应有上限,也就是说矩阵的每一行的和要小于某一特定的值，即

|  |  |
| --- | --- |
|  | () |

(2)由于每一个楼盘需要的装修人员的数量为一定值，也就是说，对于每一个楼盘，所有装修队派去的人数之和为一定值，即矩阵的每一列要等于一个定值，即

|  |  |
| --- | --- |
|  | () |

其中是指每个装修队能够提供的经验值为0.4的工人上限，是指各个楼盘当日需求的经验值为0.4的人数。

则约束条件为：

|  |  |
| --- | --- |
|  | () |

### 模型的求解

把实际问题归结为一定的数学模型后，就要利用数学模型求解所提出的实际问题了。一般需要借助计算机软件进行求解，例如常用的软件有Matlab, Spss, Lingo, Excel, Stata, Python等。求解完成后，得到的求解结果应该规范准确并且醒目，若求解结果过长，最好编入附录里。（注意：如果使用智能优化算法或者数值计算方法求解的话，需要简要阐明算法的计算步骤）

## 问题二模型的建立与求解

由于工地的划分会同时影响经验值为0.4，0.6，0.8，1的装修员工的分配问题，它们之间不是像问题一中楼盘之间相互独立的关系，因此我们要综合考虑四种经验值的分配问题，将他们用于出租车的费用的总和作为目标函数建立优化模型。

1.决策变量

设分别表示经验值为0.4，0.6，0.8，1的装修工人从第i个装修队到第j个楼盘的人数。

对于任一经验值，装修工人从第i个装修队到第j个楼盘的人数可以表示成4个的矩阵，得到如下决策矩阵

其中

为此优化问题的决策矩阵，其中每个元素都为整数。

2.目标函数

因为租车费用和装修队距离楼盘的距离有关，由题目可知，在一个工地中的两个楼盘，只需要计算装修队与较近的楼盘之间的距离，楼盘与楼盘之间的距离，因为是包车接送，不包含在费用中，所以不予以考虑

设表示第i个楼盘和第j个楼盘组成一个工地，引入0-1变量

|  |  |
| --- | --- |
|  | () |

由于楼盘之间是相互独立的，且每个楼盘都只有一个，则楼盘之间的组合关系可以用矩阵A来表示

其中矩阵A满足如下特征：

(1)当,,即对角线上的元素为0，实际意义为一个工地由两个不同的楼盘组成。

(2),矩阵是一个对称矩阵，则针对下方讨论，只需要考虑i>.j的情况。

(3)

由于装修队到任意一个楼盘乘坐出租车行驶的实际距离为此装修队到该楼盘的距离和此装修队到与该楼盘在同一工地上的另一楼盘的距离的较小值，得到如下公式：

|  |  |
| --- | --- |
|  | () |

设表示第个装修队到第个楼盘所在工地中两个楼盘的较短距离，为装修队到楼盘的距离。

则整个的距离可表示为一个的矩阵，称为距离矩阵。

根据第一问中对于出租车费用的讨论，把各个经验值的关于出租车的费用综合考虑，得到

|  |  |
| --- | --- |
|  | () |

则目标函数为

|  |  |
| --- | --- |
|  | () |

2.约束条件

约束条件主要分为两部分，一部分与问题一基本相同，包括装修队提供的装修工人上限和每一工地对不同经验值的需求量为定值，另一部分是对称矩阵的约束条件。

(1)其中满足以下条件（与模型一的约束条件基本一致）：

|  |  |
| --- | --- |
|  | () |

其中是指第个装修队能够提供的经验值分别为为0.4，0.6，0.8，1的工人上限，是指第个楼盘当日需求的经验值分别为0.4，0.6，0.8，1的人数。

(2)对每一个楼盘，有且只有其他一个楼盘与它被划分为同一工地，得到

|  |  |
| --- | --- |
|  | () |

(3)表示的意义相同，都是楼盘和楼盘是否被划分为同一工地,得到

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 则约束条件为   |  |  | | --- | --- | |  |  | | () |

### 模型的求解

# 模型的分析与检验

模型的分析与检验的内容也可以放到模型的建立与求解部分，这里我们单独抽出来进行讲解，因为这部分往往是论文的加分项，很多优秀论文也会单独抽出一节来对这个内容进行讨论。

模型的分析 ：在建模比赛中模型分析主要有两种，一个是灵敏度(性)分析，另一个是误差分析。灵敏度分析是研究与分析一个系统（或模型）的状态或输出变化对系统参数或周围条件变化的敏感程度的方法。其通用的步骤是：控制其他参数不变的情况下，改变模型中某个重要参数的值，然后观察模型的结果的变化情况。误差分析是指分析模型中的误差来源，或者估算模型中存在的误差，一般用于预测问题或者数值计算类问题。

模型的检验：模型检验可以分为两种，一种是使用模型之前应该进行的检验，例如层次分析法中一致性检验，灰色预测中的准指数规律的检验，这部分内容应该放在模型的建立部分；另一种是使用了模型后对模型的结果进行检验，数模中最常见的是稳定性检验，实际上这里的稳定性检验和前面的灵敏度分析非常类似，等会大家看到例子就明白了。

(大家尽量在论文中使用灵敏度分析，视频中有详细的讲解)

# 模型的评价、改进与推广

## 模型的优点

1）模型统一，通用性强

模型使用整数规划和0-1规划，仅需代入数据即可求解

2）优化合理，结果可靠

本文建立的0-1规划模型能够与实际紧密联系，结合实际情况对问题进行求解，能得到最优解，结果比较可靠

3）模型简单，通俗易懂，具有较强的推广性

## 模型的缺点

程序运行时间较长，由于是非线性的0-1规划，对于计算机的要求比较高，需要提高计算机配置才能快速求解，不够简便，多组数据较为复杂。

## 模型的改进

模型未考虑实际缴纳税的问题，在我国法律前提下，有点不现实，所以模型具有局限性，可在此模型的基础上，考虑缴纳税对于模型的影响。

## 模型的推广

本文中的0-1规划模型由于方法灵活，且便于用计算机求解，可用于工厂选址问题、管道运输问题、计算最短路径问题，甚至可以继续优化，继而可用于关于人工智能方面，比如机器人的自动驾驶等方面，虽然模型较为简陋，但有着较强的推广性。

# 参考文献

所有引用他人或公开资料(包括网上资料)的成果必须按照科技论文的规范列出参考文献，并在正文引用处予以标注。

常见的三种参考文献的表达方式（标准不唯一）：

书籍的表述方式为： [编号] 作者，书名，出版地：出版社，出版年月。

期刊杂志论文的表述方式为： [编号] 作者，论文名，杂志名，卷期号：起止页码，出版年。

网上资源(例如数据库、政府报告)的表述方式为： [编号] 作者，资源标题，网址，访问时间。

附录

|  |
| --- |
| 附录1 |
| 介绍：支撑材料的文件列表 |
| 这是最近国赛要求加入的一个部分，大家可以看我讲的论文写作视频。  <https://www.bilibili.com/video/BV1Na411w7c2> |

|  |
| --- |
| 附录2 |
| 介绍：该代码是某某语言编写的，作用是什么 |
|  |

|  |
| --- |
| 附录3 |
| 介绍：该代码是某某语言编写的，作用是什么 |
|  |

除了支撑材料的文件列表和源程序代码外，附录中还可以包括下面内容：

* 某一问题的详细证明或求解过程；
* 自己在网上找到的数据；
* 比较大的流程图；
* 较繁杂的图表或计算结果