**辙叉铣床坐标变换**

**推导过程**



**2019.5.14**

**目录**

[**1 坐标变换原理介绍** 1](#_Toc8747893)

[1.1 坐标平移与坐标旋转 1](#_Toc8747894)

[1.2 齐次坐标和齐次变换 3](#_Toc8747895)

[**2 辙叉铣床坐标变换推导** 5](#_Toc8747896)

[**3 坐标变换存在的问题** 13](#_Toc8747897)

# 坐标变换原理介绍

## 坐标平移与坐标旋转

空间中任意一点***p***在不同坐标系中的描述是不同的。假设坐标系{***A***}和{***B***}具有相同的方位，但是{***B***}的坐标原点与{***A***}的不重合，用位置矢量*A****p****Bo*表示{***B***}相对于{***A***}的位置，如图 1‑1所示。把*A****p****Bo*称为{***B***}相对于{***A***}的平移矢量。如果点***p***在坐标系{***B***}中的位置为*B****p***，则它相对于坐标系{***A***}的位置矢量*A****p***可由矢量相加得出，如公式所示。



上式称为坐标平移或平移映射，其中*A****p****Bo*为公式所示。



*p*x、*p*y、*p*z分别为坐标系{***B***}相对于坐标系{***A***}在X、Y、Z方向的坐标值，或者可以理解为坐标系{***B***}的坐标系原点在坐标系{***A***}中的坐标值。



图 1‑1 坐标平移

假设坐标系{***A***}和{***B***}具有相同的坐标原点，但是{***B***}与{***A***}的坐标轴方向不同，如图 1‑2所示。用旋转矩阵*A B****R***表示坐标系{***B***}相对于{***A***}的姿态。那么同一点***p***在两个坐标系{***A***}和{***B***}中的描述*A****p***和*B****p***具有如公式所示的关系。



上式称为坐标旋转或旋转映射。其中*A B****R***是由旋转矩阵的基本公式相乘得到的。旋转矩阵的基本公式如公式所示。





图 1‑2 坐标旋转

同理，*B* *A****R***用来表示坐标系{***A***}相对于{***B***}的方位。*A B****R***和*B* *A****R***都是正交矩阵，二者互逆。根据正交矩阵的性质，可以得出公式。



对于一般情况，坐标系{***A***}和坐标系{***B***}既不原点重合，坐标轴方向也不相同。结合上面的坐标平移与坐标旋转，我们用位置矢量*A****p****Bo*表示{***B***}的坐标原点相对于{***A***}的位置，如图 1‑3所示；用旋转矩阵*A B****R***描述{***B***}相对于{***A***}的方位。那么任意一点***p***在两个坐标系{***A***}和{***B***}中的描述*A****p***和*B****p*** 具有以下变换关系：



式就是复合变换。



图 1‑3 复合变换

## 齐次坐标和齐次变换

坐标变换不只有前方所述的平移变换和旋转变换两种形式。假如一个坐标系要经过多次复合变换变成另外一个坐标系，那么用式的形式则会出现多级嵌套的情况，不便于计算。我们可以将其变成齐次的形式，如式所示：



或是写成矩阵的形式，如式所示：



在式中，*A****p***和*B****p***是4×1的列矢量。它们称为点***p***的齐次坐标。*A B****T***被称为齐次变换矩阵，它是4×4方阵，具有如式所示的形式，它综合地表示了平移变换和旋转变换两者的复合。



4×4的齐次变换矩阵***T***具有多种不同的物理解释：

（1）坐标系的描述：*A B****T***描述坐标系{***B***}相对于参考系{***A***}的位姿。其中*A B****R***的各列分别描述{***B***}的三个坐标主轴的方向；*A****p****Bo*描述{***B***}的坐标原点的位置。齐次变换矩阵*A B****T***的前三列表示坐标系{***B***}相对于参考系{***A***}的三个坐标轴的方向；最后一列表示{***B***}的坐标原点。

（2）坐标映射：*A B****T***代表同一点***p***在两个坐标系{***A***}和{***B***}中描述之间的映射关系。*A B****T***将*B****p***映射为*A****p***。其中*A B****R***称为旋转映射，称为*A****p****Bo*平移映射。

（3）运动算子：***T***表示在同一坐标系中，点***p***运动前、后的算子关系。算子***T***作用于***p***1得出***p***2。任一算子均可分解为平移算子与旋转算子的复合。

另外，矩阵符合如式所示的乘法运算：



综上，我们可以利用式的形式来进行坐标变换求解，只需要算出中间算子最终相乘就可以得到最终坐标。



# 辙叉铣床坐标变换推导

根据齐次坐标变换原理，对辙叉铣床进行坐标变换，寻找初始刀位点坐标系到变换后机床刀位点坐标系的关系。在机床多处建立坐标系，依次推导坐标系之间的运动算子，将算子相乘就得到了首尾坐标系之间的关系。

在机床各处分别建立起{***A***}{***B***}{***B1***}{***C***}{***D***}{***E***}五个坐标系，其中坐标系{***A***}是原始刀位点坐标系，即工件坐标系，坐标系{***E***}是A/C轴旋转以后机床新刀位点坐标系，坐标系{***B***}{***B1***}{***C***}{***D***}均为中间坐标系，起桥梁连接作用。那么换算公式为式所示。



式中*A****p***为点在工件坐标系下的坐标，*E****p***为点在新机床坐标系下的坐标。以下是一些参数的介绍以及各运动算子的推导过程。

表 2‑1 参数介绍

|  |  |
| --- | --- |
| 参数名称 | 参数含义 |
| L1 | 机床归零后，主轴旋转中心到旋转轴C的X方向距离 |
| L2 | 机床归零后，旋转轴A到旋转轴C的Y方向距离  （正对机床，A轴在C轴左侧值为正，右侧值为负，理想情况此值为0） |
| L3 | 机床归零后，主轴轴线到A轴的Y方向距离  （正对机床，主轴轴线在A轴左侧值为正，右侧值为负，理想情况此值为0） |
| L4 | 机床归零后，主轴端面到旋转轴A的Z方向距离 |
| Xw | 工件坐标系原点相对于机床原点的X方向偏置值 |
| Yw | 工件坐标系原点相对于机床原点的Y方向偏置值 |
| Zw | 工件坐标系原点相对于机床原点的Z方向偏置值 |
| Xm | 机床处于工件坐标系零点位置时的X方向偏置值 |
| Ym | 机床处于工件坐标系零点位置时的Y方向偏置值 |
| Zm | 机床处于工件坐标系零点位置时的Z方向偏置值 |
| La1 | 直角铣头的Z方向长度 |
| La2 | 直角铣头的Y方向长度 |
| LC | 现在所使用的刀具长度 |
| R | 现在所使用的刀具半径 |
| A | A轴旋转角度 |
| C | C轴旋转角度 |
| x1/△x1 | 工件坐标系下的X轴坐标值或增量 |
| y1/△y1 | 工件坐标系下的Y轴坐标值或增量 |
| z1/△z1 | 工件坐标系下的Z轴坐标值或增量 |
| x2/△x2 | 新坐标系下的X轴坐标值或增量 |
| y2/△y2 | 新坐标系下的Y轴坐标值或增量 |
| z2/△z2 | 新坐标系下的Z轴坐标值或增量 |



图 2‑1 参数L1~L4图示



图 2‑2 直角铣头参数图示

（1）运动算子B A***T***



图 2‑3 {***A***}{***B***}坐标系

如图 2‑3所示，在如图所示位置建立{***A***}{***B***}坐标系。{***A***}坐标系即为工件坐标系，坐标系{***B***}原点处于C轴上，高度与A轴同高。

可以得到{***A***}{***B***}坐标系之间的运动算子为



（2）运动算子B1 B***T***



图 2‑4 {***B***}{***B1***}坐标系

如图 2‑4所示，在如图所示位置建立{***B***}{***B1***}坐标系。坐标系{***B***}和坐标系{***B1***}原点相同，姿态不同，坐标系{***B***}绕Z轴旋转角度C得到坐标系{***B1***}。

可以得到{***B***}{***B1***}坐标系之间的运动算子为



（3）运动算子C B1***T***



图 2‑5 {***B1***}{***C***}坐标系

如图 2‑5所示，在如图所示位置建立{***B1***}{***C***}坐标系。两坐标系的三轴方向相同，坐标原点不同，其中坐标系{***C***}的原点在刀具端面中心处。这里要分使用直角铣头和不使用直角铣头两种情况。

① 新坐标系下机床不使用直角铣头

可以得到{***B1***}{***C***}坐标系之间的运动算子为



② 新坐标系下机床使用直角铣头

可以得到{***B1***}{***C***}坐标系之间的运动算子为



（4）运动算子D C***T***

D C***T***算子是为了进行刀具半径补偿而建立的。在A轴和C轴不旋转的时候，机床的刀具补偿实际就是由西门子数控系统控制，使其在X-Y平面内建立刀具补偿。当A轴或C轴发生旋转的时候，此时根据西门子数控系统建立的刀具补偿并不是正确的刀具补偿，所以此时不能使用系统的刀补，而必须在后置处理软件中将刀补因素考虑进去。由于A/C轴角度确定，则机床加工轨迹唯一确定，而此软件是根据点的坐标变换来建立坐标系变换的，因此A/C轴角度一旦确定，刀具轨迹点就只有两种可能。这两个可能点就是与轨迹线垂直的平面和刀具轴线相交得到的两点。这里将它们命名为正刀补点和负刀补点。



图 2‑6 {***C***}{***D***}坐标系

如图 2‑6所示为坐标系{***C***}{***D***}两坐标系的原点位置，此图平面垂直于加工轨迹。两坐标三轴方向相同，仅坐标原点不同。坐标系{***C***}的原点在刀具端面中点，坐标系{***D***}的原点在刀具上端点或下端点。结合是否使用直角铣头将情况分为四种，如式~式。

① 新坐标系下机床不使用直角铣头

正刀补时{***C***}{***D***}坐标系之间的运动算子为



负刀补时{***C***}{***D***}坐标系之间的运动算子为



② 新坐标系下机床使用直角铣头

正刀补时{***C***}{***D***}坐标系之间的运动算子为



负刀补时{***C***}{***D***}坐标系之间的运动算子为



（5）运动算子E D***T***

运动算子E D***T***将正交坐标系转换为非正交坐标系。坐标系{***D***}{***E***}坐标系原点相同，坐标轴方向Y方向相同，X、Z方向不同。如图 2‑7所示为两坐标系之间的关系。



图 2‑7 {***D***}{***E***}坐标系

易得{***D***}{***E***}坐标系之间的运动算子为



这里要注意A和C的值不能为90°或270°。若为90°或270°，则运动算子D E***T***的行列式为0，此时它为奇异矩阵，也就不存在可逆矩阵，也就是说 D E***T*** E D***T*** = I 无解。一个比较好的理解方式为当A和C的值不能为90°或270°时，{***E***}坐标系的两个坐标轴同轴了，坐标系{***D***}的坐标是三维的，而{***E***}的坐标是二维的，那么三维坐标系下的点是不能用二维坐标系来表示的。因此A和C的值不能为90°或270°。

综上，五个运动算子全部得到，再按照式进行计算。可得出公式：



其中，x1、y1、z1分别是工件坐标系下的点坐标，x2、y2、z2分别是新机床坐标系下的点坐标。公式可以用于绝对编程模式下机床坐标变换。此外，根据矩阵分配律我们还可以得到公式：



其中，△x1、△y1、△z1分别是工件坐标系下的坐标增量，△x2、△y2、△z2分别是新机床坐标系下的坐标增量。公式可以用于相对编程模式下机床坐标变换。

# 坐标变换存在的问题

坐标变换中的刀具半径补偿并不是真正意义上的刀具补偿。

真正的刀补是会预先读取程序的下一段路径，所以对直线与直线转接、直线与圆弧转接、圆弧与直线转接、圆弧与圆弧转接这4种情况有缩短型、伸长型、插入型三种之一的过渡方式。

而此后置处理所做的工作只是让现在机床上刀具上的某一点（确切的说是正刀补点或负刀补点二者之一）到达工件坐标系上的我们预想的点位置。因此当走多段直线轨迹时，它走的轨迹并不是我们预想的那样，这点要尤其注意。