

# Отчёт по лабораторной работе 8

## Простейший вариант 54

Еленга Невлора Люглеш

### Содержание

1	Цель работы .....	1
2	Теоретическая справка .....	1
3	Задание.....	7
4	Выполнение лабораторной работы .....	8
4.1	код.....	8
4.1.1	Решение для случая 1 .....	8
4.1.2	Решение для случая 2 .....	11
5	Выводы.....	13
6	Список литературы.....	13

## 1 Цель работы

Рассмотреть модель конкуренции двух фирм. Построить графики изменения оборотных средств.

## 2 Теоретическая справка

### 1. Модель одной фирмы

Для построения модели конкуренции хотя бы двух фирм необходимо рассмотреть модель одной фирмы. Вначале рассмотрим модель фирмы, производящей продукт долговременного пользования, когда цена его определяется балансом спроса и предложения. Примем, что этот продукт занимает определенную нишу рынка и конкуренты в ней отсутствуют. Обозначим:

$N$

– число потребителей производимого продукта.

$S$

– доходы потребителей данного продукта. Считаем, что доходы всех потребителей одинаковы. Это предположение справедливо, если речь идет об одной рыночной нише, т.е. производимый продукт ориентирован на определенный слой населения.

$$M$$

– оборотные средства предприятия.

$$\tau$$

– длительность производственного цикла.

$$p$$

– рыночная цена товара.

$$\tilde{p}$$

– себестоимость продукта, то есть переменные издержки на производство единицы продукции.

$$\delta$$

– доля оборотных средств, идущая на покрытие переменных издержек.

$$k$$

– постоянные издержки, которые не зависят от количества выпускаемой продукции.

$$Q(S/p)$$

– функция спроса, зависящая от отношения дохода  $S$  к цене  $p$ . Она равна количеству продукта, потребляемого одним потребителем в единицу времени.

Функцию спроса товаров длительного использования часто представляют в простейшей форме:

$$Q = q - k \frac{P}{S} = q \left( 1 - \frac{p}{p_{cr}} \right)$$

где  $q$  – максимальная потребность одного человека в продукте в единицу времени.

Эта функция падает с ростом цены и при

$$p = p_{cr}$$

(критическая стоимость продукта) потребители отказываются от приобретения товара. Величина

$$p_{cr} = Sq/k$$

Параметр  $k$  – мера эластичности функции спроса по цене. Таким образом, функция спроса в форме (1) является пороговой, то есть

$$Q(S/p) = 0, p \geq p_{cr}$$

и обладает свойствами насыщения.

Уравнения динамики оборотных средств можно записать в виде

$$\frac{\partial M}{\partial t} = -\frac{M\delta}{\tau} + NQp - \kappa = -\frac{M\delta}{\tau} + NQ\left(1 - \frac{p}{p_{cr}}\right)p - \kappa$$

Уравнение для рыночной цены  $p$  представим в виде

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \gamma \left( -\frac{M\delta}{\tau \tilde{p}} + NQ \left( 1 - \frac{p}{p_{cr}} \right) \right)$$

Первый член соответствует количеству поставляемого на рынок товара (то есть, предложению), а второй член – спросу.

Параметр

$$\gamma$$

зависит от скорости оборота товаров на рынке. Как правило, время торгового оборота существенно меньше времени производственного цикла

$$\tau$$

При заданном  $M$  уравнение (3) описывает быстрое стремление цены к равновесному значению цены, которое устойчиво.

В этом случае уравнение (3) можно заменить алгебраическим соотношением

$$-\frac{M\delta}{\tau \tilde{p}} + NQ \left( 1 - \frac{p}{p_{cr}} \right) = 0$$

Из (4) следует, что равновесное значение цены  $p$  равно

$$p = p_{cr} \left( 1 - \frac{M\delta}{\tau \tilde{p} Nq} \right)$$

Уравнение (2) с учетом (5) приобретает вид

$$\frac{\partial M}{\partial t} = M \frac{\delta}{\tau} \left( \frac{p_{cr}}{\tilde{p}} - 1 \right) - M^2 \left( \frac{\delta}{\tau \delta p} \right)^2 \frac{p_{cr}}{Nq} - \kappa$$

Уравнение (6) имеет два стационарных решения, соответствующих условию:

$$\frac{\partial M}{\partial t} = 0$$

где

$$a = Nq \left(1 - \frac{\tilde{p}}{p_{cr}}\right) \tilde{p} \frac{\tau}{\delta}, b = \kappa Nq \frac{(\tau \tilde{p})^2}{p_{cr} \delta^2}$$

Из (7) следует, что при больших постоянных издержках, в случае

$$a^2 < 4b,$$

стационарных состояний нет. Это означает, что в этих условиях фирма не может функционировать стабильно, то есть, терпит банкротство. Однако, как правило, постоянные затраты малы по сравнению с переменными

$$b \ll a^2$$

и играют роль, только в случае, когда оборотные средства малы. При

$$b \ll a$$

стационарные значения  $M$  равны

$$\tilde{M}_+ = Nq \frac{\tau}{\delta} \left(1 - \frac{\tilde{p}}{p_{cr}}\right) \tilde{p}, \tilde{M}_- = \kappa \tilde{p} \frac{\tau}{\delta(p_{cr} - \tilde{p})}$$

Первое состояние

$$\tilde{M}_+$$

устойчиво и соответствует стабильному функционированию предприятия. Второе состояние

$$\tilde{M}_-$$

неустойчиво, так что при

$$M < \tilde{M}_-$$

оборотные средства падают

$$\partial M / \partial t < 0$$

то есть, фирма идет к банкротству.

По смыслу

$$\tilde{M}_-$$

соответствует начальному капиталу, необходимому для входа в рынок.

В обсуждаемой модели параметр

$$\delta$$

всюду входит в сочетании с

$$\tau$$

Это значит, что уменьшение доли оборотных средств, вкладываемых в производство, эквивалентно удлинению производственного цикла. Поэтому мы в дальнейшем положим:

$$\delta = 1$$

а параметр

$$\tau$$

будем считать временем цикла, с учётом сказанного.

## 2. Конкуренция двух фирм

### 2.1. Случай 1

Рассмотрим две фирмы, производящие взаимозаменяемые товары одинакового качества и находящиеся в одной рыночной нише. Последнее означает, что у потребителей в этой нише нет априорных предпочтений, и они приобретут тот или иной товар, не обращая внимания на знак фирмы. В этом случае, на рынке устанавливается единая цена, которая определяется балансом суммарного предложения и спроса. Иными словами, в рамках нашей модели конкурентная борьба ведётся только рыночными методами. То есть, конкуренты могут влиять на противника путем изменения параметров своего производства: себестоимость, время цикла, но не могут прямо вмешиваться в ситуацию на рынке («назначать» цену или влиять на потребителей каким либо иным способом).

Уравнения динамики оборотных средств запишем по аналогии с (2) в виде

$$\frac{\partial M_1}{\partial t} = -\frac{M_1}{\tau_1} + N_1 q \left(1 - \frac{p}{p_{cr}}\right) p - \kappa_1; \quad \frac{\partial M_2}{\partial t} = -\frac{M_2}{\tau_2} + N_2 q \left(1 - \frac{p}{p_{cr}}\right) p - \kappa_2$$

где использованы те же обозначения, а индексы 1 и 2 относятся к первой и второй фирме, соответственно. Величины

$$N_1, N_2$$

– числа потребителей, приобретших товар первой и второй фирмы.

Учтем, что товарный баланс устанавливается быстро, то есть, произведенный каждой фирмой товар не накапливается, а реализуется по цене  $p$ . Тогда

$$\frac{M_1}{\tau_1 \tilde{p}_1} = N_1 q \left(1 - \frac{p}{p_{cr}}\right); \quad \frac{M_2}{\tau_2 \tilde{p}_2} = N_2 q \left(1 - \frac{p}{p_{cr}}\right)$$

где

$$\tilde{p}_1, \tilde{p}_2$$

– себестоимости товаров в первой и второй фирме.

С учетом (10) представим (11) в виде

$$\frac{\partial M_1}{\partial t} = -\frac{M_1}{\tau_1} \left(1 - \frac{p}{\tilde{p}_1}\right) - \kappa_1; \frac{\partial M_2}{\partial t} = -\frac{M_2}{\tau_2} \left(1 - \frac{p}{\tilde{p}_2}\right) - \kappa_2$$

Уравнение для цены, по аналогии с (3),

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\gamma \left( \frac{M_1}{\tau_1 \tilde{p}_1} + \frac{M_2}{\tau_2 \tilde{p}_2} - Nq \left(1 - \frac{p}{pcr}\right) \right)$$

Считая, как и выше, что ценовое равновесие устанавливается быстро, получим:

$$p = pcr \left( 1 - \frac{1}{Nq} \left( \frac{M_1}{\tau_1 \tilde{p}_1} + \frac{M_2}{\tau_2 \tilde{p}_2} \right) \right)$$

Подставив (14) в (12) имеем:

$$\frac{\partial M_1}{\partial t} = c_1 M_1 - b M_1 M_2 - a_1 M_1^2 - \kappa_1; \frac{\partial M_2}{\partial t} = c_2 M_2 - b M_1 M_2 - a_2 M_2^2 - \kappa_2$$

где

$$a_1 = \frac{pcr}{\tau_1^2 \tilde{p}_1^2 Nq}, a_2 = \frac{pcr}{\tau_2^2 \tilde{p}_2^2 Nq}, b = \frac{pcr}{\tau_1^2 \tilde{p}_1^2 \tau_2^2 \tilde{p}_2^2 Nq}, c_1 = \frac{pcr - \tilde{p}_1}{\tau_1 \tilde{p}_1}, c_2 = \frac{pcr - \tilde{p}_2}{\tau_2 \tilde{p}_2}$$

Исследуем систему (15) в случае, когда постоянные издержки ( $\kappa_1, \kappa_2$ ) пренебрежимо малы. И введем нормировку

$$t = c_1 \theta$$

Получим следующую систему:

$$\frac{\partial M_1}{\partial \theta} = M_1 - \frac{b}{c_1} M_1 M_2 - \frac{a_1}{c_1} M_1^2; \frac{\partial M_2}{\partial \theta} = \frac{c_2}{c_1} M_2 - \frac{b}{c_1} M_1 M_2 - \frac{a_2}{c_1} M_2^2$$

Чтобы решить систему (17) необходимо знать начальные условия.

## 2.2. Случай 2

Рассмотрим модель, когда, помимо экономического фактора влияния (изменение себестоимости, производственного цикла, использование кредита и т.п.), используются еще и социально-психологические факторы – формирование общественного предпочтения одного товара другому, не зависимо от их качества и цены. В этом случае взаимодействие двух фирм будет зависеть друг от друга, соответственно коэффициент перед

$$M_1 M_2$$

будет отличаться.

Получим следующую модель:

$$\frac{\partial M_1}{\partial \theta} = M_1 - \left( \frac{b}{c_1} + 0,002 \right) M_1 M_2 - \frac{a_1}{c_1} M_1^2; \frac{\partial M_2}{\partial \theta} = \frac{c_2}{c_1} M_2 - \frac{b}{c_1} M_1 M_2 - \frac{a_2}{c_1} M_2^2$$

### 3 Задание

Вариант 54

Случай 1. Рассмотрим две фирмы, производящие взаимозаменяемые товары одинакового качества и находящиеся в одной рыночной нише. Считаем, что в рамках нашей модели конкурентная борьба ведётся только рыночными методами. То есть, конкуренты могут влиять на противника путем изменения параметров своего производства: себестоимость, время цикла, но не могут прямо вмешиваться в ситуацию на рынке («назначать» цену или влиять на потребителей каким-либо иным способом.) Будем считать, что постоянные издержки пренебрежимо малы, и в модели учитывать не будем. В этом случае динамика изменения объемов продаж фирмы 1 и фирмы 2 описывается следующей системой уравнений:

$$\frac{\partial M_1}{\partial \theta} = M_1 - \frac{b}{c_1} M_1 M_2 - \frac{a_1}{c_1} M_1^2; \frac{\partial M_2}{\partial \theta} = \frac{c_2}{c_1} M_2 - \frac{b}{c_1} M_1 M_2 - \frac{a_2}{c_1} M_2^2$$

где

$$a_1 = \frac{p_{cr}}{\tau_1^2 \tilde{p}_1^2 N q}, a_2 = \frac{p_{cr}}{\tau_2^2 \tilde{p}_2^2 N q}, b = \frac{p_{cr}}{\tau_1^2 \tilde{p}_1^2 \tau_2^2 \tilde{p}_2^2 N q}, c_1 = \frac{p_{cr} - \tilde{p}_1}{\tau_1 \tilde{p}_1}, c_2 = \frac{p_{cr} - \tilde{p}_2}{\tau_2 \tilde{p}_2}$$

Также введена нормировка

$$t = c_1 \theta$$

Случай 2. Рассмотрим модель, когда, помимо экономического фактора влияния (изменение себестоимости, производственного цикла, использование кредита и т.п.), используются еще и социально-психологические факторы – формирование общественного предпочтения одного товара другому, не зависимо от их качества и цены. В этом случае взаимодействие двух фирм будет зависеть друг от друга, соответственно коэффициент перед

$$M_1 M_2$$

будет отличаться. Пусть в рамках рассматриваемой модели динамика изменения объемов продаж фирмы 1 и фирмы 2 описывается следующей системой уравнений:

$$\frac{\partial M_1}{\partial \theta} = M_1 - \left( \frac{b}{c_1} + 0.00044 \right) M_1 M_2 - \frac{a_1}{c_1} M_1^2; \frac{\partial M_2}{\partial \theta} = \frac{c_2}{c_1} M_2 - \frac{b}{c_1} M_1 M_2 - \frac{a_2}{c_1} M_2^2$$

Для обоих случаев рассмотрим задачу со следующими начальными условиями и параметрами:

$$M_0^1 = 7.7, M_0^2 = 9.7, p_{cr} = 47, N = 50, q = 1, \tau_1 = 33, \tau_2 = 27, \tilde{p}_1 = 9.7, \tilde{p}_2 = 11.7$$

**Замечание:** Значения

$$p_{cr}, \tilde{p}_{1,2}, N$$

указаны в тысячах единиц, а значения

$$M_{1,2}$$

указаны в млн. единиц.

Обозначения:

$$N$$

– число потребителей производимого продукта

$$\tau$$

– длительность производственного цикла

$$p$$

– рыночная цена товара

$$\tilde{p}$$

– себестоимость продукта, то есть переменные издержки на производство единицы продукции

$$q$$

– максимальная потребность одного человека в продукте в единицу времени

$$\theta = \frac{t}{c_1}$$

– безразмерное время

1. Постройте графики изменения оборотных средств фирмы 1 и фирмы 2 без учета постоянных издержек и с введенной нормировкой для случая 1.

2. Постройте графики изменения оборотных средств фирмы 1 и фирмы 2 без учета постоянных издержек и с введенной нормировкой для случая 2.

## 4 Выполнение лабораторной работы

### 4.1 код

#### 4.1.1 Решение для случая 1

- Julia

```
using Plots
using DifferentialEquations
```



```

p_cr = 47
N = 50
q = 1
tau1 = 33
tau2 = 27
p1 = 9.7
p2 = 11.7
M01 = 7.7
M02 = 9.7

a1 = p_cr/(tau1*tau1*p1*p1*N*q)
a2 = p_cr/(tau2*tau2*p2*p2*N*q)
b = p_cr/(tau1*tau1*tau2*tau2*p1*p1*p2*p2*N*q)
c1 = (p_cr-p1)/(tau1*p1)
c2 = (p_cr-p2)/(tau2*p2)

function ode_f(du, u, p, t)
    m1, m2 = u
    du[1] = (c1/c1)*u[1]-(a1/c1)*u[1]*u[1]-(b/c1)*u[1]*u[2]
    du[2] = (c2/c1)*u[2]-(a2/c1)*u[2]*u[2]-(b/c1)*u[1]*u[2]
end

u0 = [M01, M02]
tspan = (0.0, 30.0)
prob1 = ODEProblem(ode_f, u0, tspan)
sol1 = solve(prob1, dtmax=0.1)

M1 = [u[1] for u in sol1.u]
M2 = [u[2] for u in sol1.u]
T = [t for t in sol1.t]

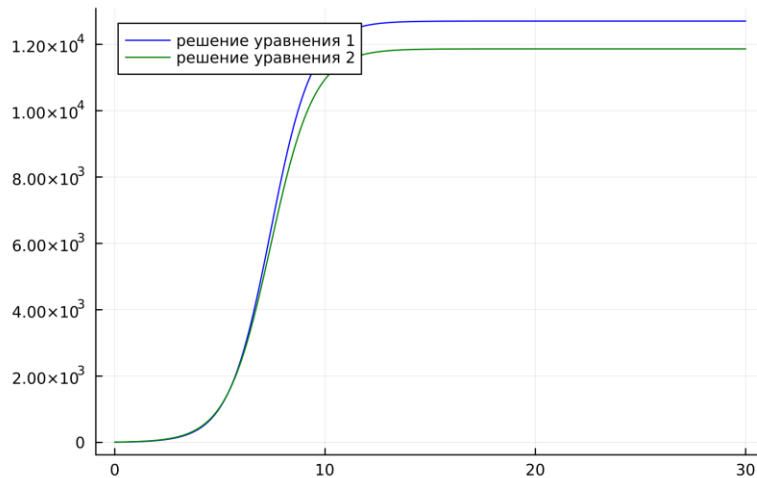
plt =
    plot(
        layout=(1),
        dpi=300,
        legend=true)
    plot!(
        plt[1],
        T,
        M1,
        title="график M Случай 1",
        label="решение уравнения 1",
        color=:blue)
    plot!(
        plt[1],
        T,
        M2,
        label="решение уравнения 2",

```

```
color=:green)
```

```
savefig("lab8_1.png")
```

график М Случай 1



*график Конкуренции двух фирм*

- Openmodelica

```
model lab8mod1
```

```
constant Real N=50;
```

```
constant Real q=1;
```

```
constant Real p_cr=47;
```

```
constant Real p1=9.7;
```

```
constant Real p2=11.7;
```

```
constant Real tau1=33;
```

```
constant Real tau2=27;
```

```
constant Real a1 = p_cr/(tau1*tau1*p1*p1*N*q);
```

```
constant Real a2 = p_cr/(tau2*tau2*p2*p2*N*q);
```

```
constant Real b = p_cr/(tau1*tau1*tau2*tau2*p1*p1*p2*p2*N*q);
```

```
constant Real c1 = (p_cr-p1)/(tau1*p1);
```

```
constant Real c2 = (p_cr-p2)/(tau2*p2);
```

```
Real M1;
```

```
Real M2;
```

```
initial equation
```

```
M1=7.7;
```

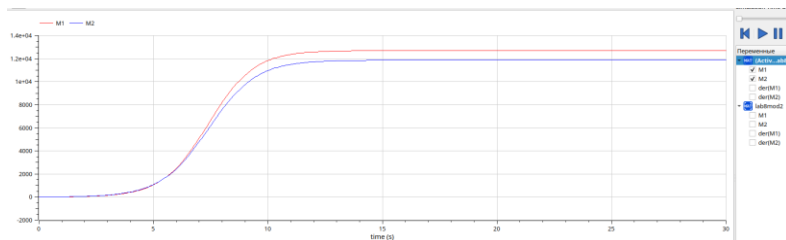
```
M2=9.7;
```

```
equation
```

```
der(M1)=M1-(b/c1)*M1*M2-(a1/c1)*M1*M1;
```

```
der(M2)=(c2/c1)*M2-(b/c1)*M1*M2-(a2/c1)*M2*M2;
```

```
end lab8mod1;
```



*график Конкуренции двух фирм*

По графику видно, что рост оборотных средств предприятий идет независимо друг от друга. Каждая фирма достигает свое максимальное значение объема продаж и остается на рынке с этим значением, то есть каждая фирма захватывает свою часть рынка потребителей, которая не изменяется.

#### 4.1.2 Решение для случая 2

- Julia

using Plots

using DifferentialEquations

p\_cr = 47

N = 50

q = 1

tau1 = 33

tau2 = 27

p1 = 9.7

p2 = 11.7

M01 = 7.7

M02 = 9.7

a1 = p\_cr/(tau1\*tau1\*p1\*p1\*N\*q)

a2 = p\_cr/(tau2\*tau2\*p2\*p2\*N\*q)

b = p\_cr/(tau1\*tau1\*tau2\*tau2\*p1\*p1\*p2\*p2\*N\*q)

c1 = (p\_cr-p1)/(tau1\*p1)

c2 = (p\_cr-p2)/(tau2\*p2)

function ode\_f(du, u, p, t)

    m1, m2 = u

    du[1] = (c1/c1)\*u[1]-(a1/c1)\*u[1]\*u[1]-((b/c1)+0.00044)\*u[1]\*u[2]

    du[2] = (c2/c1)\*u[2]-(a2/c1)\*u[2]\*u[2]-(b/c1)\*u[1]\*u[2]

end

u0 = [M01, M02]

tspan = (0.0, 30.0)

prob1 = ODEProblem(ode\_f, u0, tspan)

sol1 = solve(prob1, dtmax=0.1)

M1 = [u[1] for u in sol1.u]

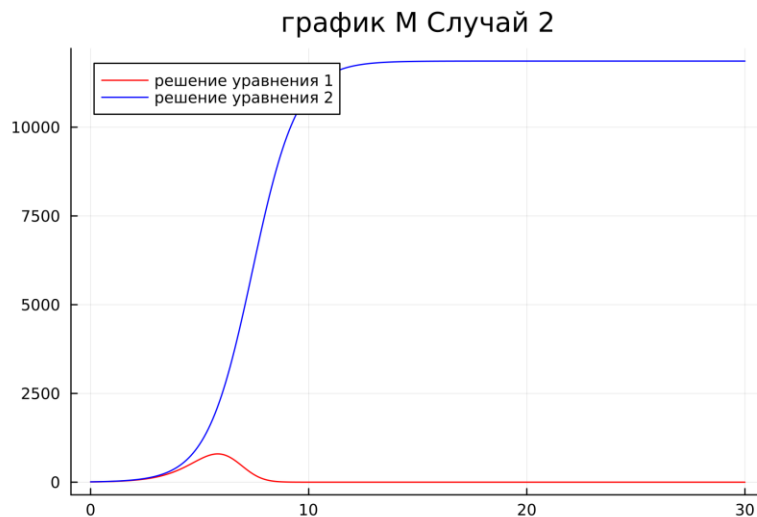
```

M2 = [u[2] for u in sol1.u]
T = [t for t in sol1.t]

plt =
    plot(
        layout=(1),
        dpi=300,
        legend=true)
    plot!(
        plt[1],
        T,
        M1,
        title="график М Случай 2",
        label="решение уравнения 1",
        color=:red)
    plot!(
        plt[1],
        T,
        M2,
        label="решение уравнения 2",
        color=:blue)

    savefig("lab8_2.png")

```



*график Конкуренции двух фирм*

- Openmodelica

model lab8mod2

constant Real N=50; //число потребителей производимого продукта

constant Real q=1; //максимальная потребность одного человека в продукте в единицу времени

constant Real p\_cr=47; //критическая стоимость продукта

constant Real p1=9.7; //себестоимость продукта (переменные издержки на производство единицы продукции) фирмы 1

```

constant Real p2=11.7;//себестоимость продукта (переменные издержки на
производство единицы продукции) фирмы 2
constant Real tau1=33;//длительность производственного цикла фирмы 1
constant Real tau2=27;//длительность производственного цикла фирмы 2
constant Real a1=p_cr/(tau1*tau1*p1*p1*N*q);
constant Real a2=p_cr/(tau2*tau2*p2*p2*N*q);
constant Real b=p_cr/(tau1*tau1*tau2*tau2*p1*p1*p2*p2*N*q);
constant Real c1=(p_cr-p1)/(tau1*p1);
constant Real c2=(p_cr-p2)/(tau2*p2);

```

```

Real M1;//оборотные средства предприятия фирмы 1
Real M2;//оборотные средства предприятия фирмы 2

```

```

initial equation
M1=7.7;//начальное условие M1
M2=9.7;//начальное условие M2

```

```

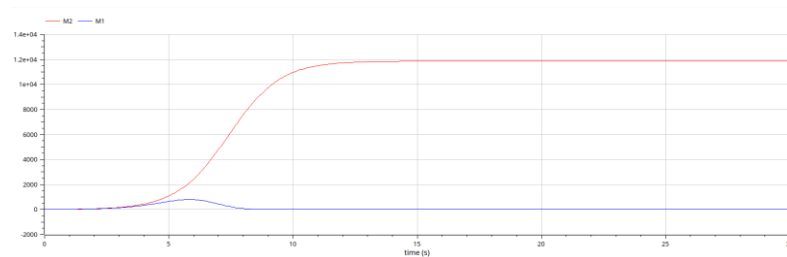
equation
der(M1)=(b/c1)+0.00044)*M1*M2-(a1/c1)*M1*M1;
der(M2)=(c2/c1)*M2-(b/c1)*M1*M2-(a2/c1)*M2*M2;

```

```

end lab8mod2;

```



*график Конкуренции двух фирм*

По графику видно, что фирма M2, несмотря на начальный рост, достигнув своего максимального объема продаж, начинает нести убытки и, в итоге, терпит банкротство. Динамика роста объемов оборотных средств фирмы M1 остается без изменения: достигнув максимального значения, остается на этом уровне.

## 5 Выводы

В ходе выполнения лабораторной работы я рассмотрела модель конкуренции двух фирм. Построила графики изменения оборотных средств и проанализировала их.

## 6 Список литературы

Кулябов Д. С. Лабораторная работа №7:  
[https://esystem.rudn.ru/pluginfile.php/1971582/mod\\_resource/content/2/%D0%9B%D](https://esystem.rudn.ru/pluginfile.php/1971582/mod_resource/content/2/%D0%9B%D)

0%B0%D0%B1%D0%BE%D1%80%D0%B0%D1%82%D0%BE%D1%80%D0%BD%D0%  
B0%D1%8F%20%D1%80%D0%B0%D0%B1%D0%BE%D1%82%D0%B0%20%E2%84  
%96%206.pdf