Отчёт по лабораторной работе 5

Простейший вариант 54

Еленга Невлора Люглеш

Содержание

1 Цель работы

Построить график зависимости численности хищников от численности жертв, а также графики изменения численности хищников и численности жертв при заданных начальных условиях. Найти стационарное состояние системы.

2 Задание

Формула определения номера задания: (SnmodN)+1, где Sn — номер студбилета, N — количество заданий.

Вариант 54

Для модели «хищник-жертва»:

$$dx/dt = -0{,}13x(t) + 0{,}041x(t)y(t); dy/dt = 0{,}31y(t) - 0{,}042x(t)y(t)$$

Постройте график зависимости численности хищников от численности жертв, а также графики изменения численности хищников и численности жертв при следующих начальных условиях:

$$x_0 = 7, y_0 = 20$$

Найдите стационарное состояние системы.

3 Выполнение лабораторной работы

Решение

Простейшая модель взаимодействия двух видов типа «хищник — жертва» - модель Лотки-Вольтерры. Данная двувидовая модель основывается на следующих предположениях:

1.Численность популяции жертв x и хищников y зависят только от времени (модель не учитывает пространственное распределение популяции на занимаемой территории)

2.В отсутствии взаимодействия численность видов изменяется по модели Мальтуса, при этом число жертв увеличивается, а число хищников падает

3.Естественная смертность жертвы и естественная рождаемость хищника считаются несущественными

4.Эффект насыщения численности обеих популяций не учитывается

5.Скорость роста численности жертв уменьшается пропорционально численности хищников

$$dx/dt = ax(t) - bx(t)y(t); dy/dt = -cy(t) + dx(t)y(t)$$

В этой модели x — число жертв, y — число хищников. Коэффициент a описывает скорость естественного прироста числа жертв в отсутствие хищников, c — естественное вымирание хищников, лишенных пищи в виде жертв. Вероятность взаимодействия жертвы и хищника считается пропорциональной как количеству жертв, так и числу самих хищников (xy). Каждый акт взаимодействия уменьшает популяцию жертв, но способствует увеличению популяции хищников (члены — bxy и dxy в правой части уравнения). (рис.1)

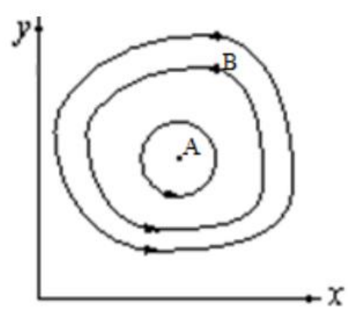


Рисунок 3.1. Эволюция популяции жертв и хищников модели Лотки-Вольтерры.

(рис.1)

Математический анализ этой (жесткой) модели показывает, что имеется стационарное состояние (A на рис.1), всякое же другое начальное состояние (B) приводит к периодическому колебанию численности как жертв, так и хищников, так что по прошествии некоторого времени система возвращается в состояние В.

Стационарное состояние системы (положение равновесия, не зависящее от времени решение) будет в точке:

$$x_0 = c/d; y_0 = a/b$$

Если начальные значения задать в стационарном состоянии

$$x(0) = x_0, y(0) = y_0$$

то в любой момент времени численность популяций изменяться не будет. При малом отклонении от положения равновесия численности как хищника, так и жертвы с течением времени не возвращаются к равновесным значениям, а совершают периодические колебания вокруг стационарной точки. Амплитуда колебаний и их период определяется начальными значениями численностей x(0), y(0). Колебания совершаются в противофазе.

При малом изменении модели

$$dx/dt = ax(t) - bx(t)y(t) + \varepsilon f(x,y); dy/dt = -cy(t) + dx(t)y(t) + \varepsilon g(x,y), \varepsilon \ll 1$$

(прибавление к правым частям малые члены, учитывающие, например, конкуренцию жертв за пищу и хищников за жертв), вывод о периодичности (возвращении системы в исходное состояние В), справедливый для жесткой системы Лотки-Вольтерры, теряет силу. Таким образом, мы получаем так называемую мягкую модель «хищник-жертва». В зависимости от вида малых поправок f и g возможны следующие сценарии 1-3 (рис.2).

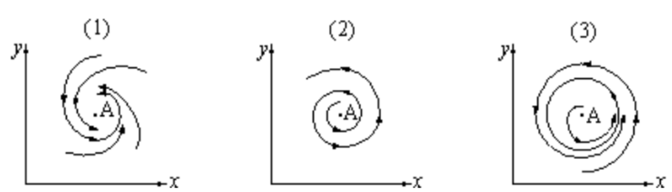


Рисунок 3.2. Мягкая модель борьбы за существование. (рис.2)

В случае 1 равновесное состояние А устойчиво. При любых других начальных условиях через большое время устанавливается именно оно.

В случае 2 система стационарное состояние неустойчиво. Эволюция приводит то к резкому увеличению числа хищников, то к их почти полному вымиранию. Такая система в конце концов попадает в область столь больших или столь малых значений x и y, что модель перестает быть применимой.

В случае 3 в системе с неустойчивым стационарным состоянием А с течением времени устанавливается периодический режим. В отличие от исходной жесткой модели Лотки-Вольтерры, в этой модели установившийся периодический режим не зависит от начального условия. Первоначально незначительное отклонение от стационарного состояния А приводит не к малым колебаниям около А, как в модели Лотки-Вольтерры, а к колебаниям вполне определенной (и не зависящей от малости отклонения) амплитуды. Возможны и другие структурно устойчивые сценарии (например, с несколькими периодическими режимами).

Вывод: жесткую модель всегда надлежит исследовать на структурную устойчивость полученных при ее изучении результатов по отношению к малым изменениям модели (делающим ее мягкой).

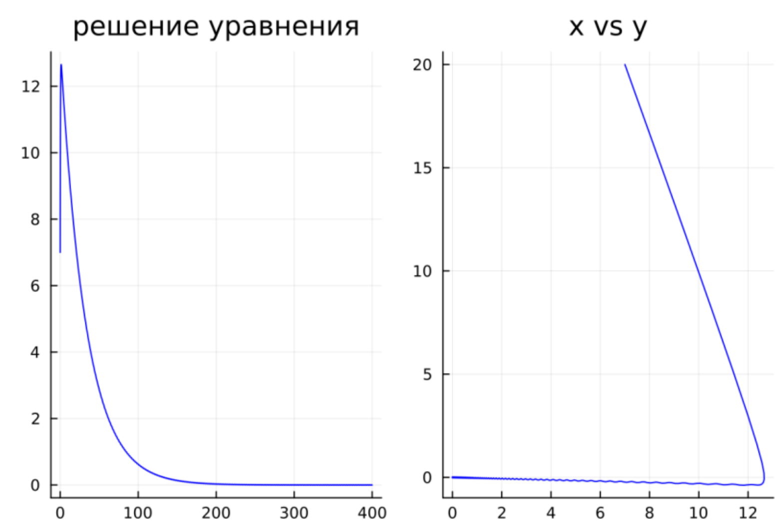
В случае модели Лотки-Вольтерры для суждения о том, какой же из сценариев 1-3 (или иных возможных) реализуется в данной системе, совершенно необходима дополнительная информация о системе (о виде малых поправок f и g в нашей формуле). Математическая теория мягких моделей указывает, какую именно информацию для этого нужно иметь. Без этой информации жесткая модель может привести к качественно ошибочным предсказаниям. Доверять выводам, сделанным на основании жесткой модели, можно лишь тогда, когда они подтверждаются исследованием их структурной устойчивости.

3.1 код

Julia

```
using Plots
using DifferentialEquations

x0 =7
y0 = 20

a = 0.14
b = 0.041
c = 0.31
h = 0.042

function ode_fn(du, u, t)
    x, y = u
    du[1] = -a * u[1] + c * [u1] * u[2]
    du[2] = b * u[2] - d * [u1] * u[2]
end

u0 = [x0; y0]
t=collect(LinRange(0,0.1,400))
tspan = (0.0, 400.0)
prob = ODEProblem(ode_fn, u0, tspan)
sol = solve(prob)

X = [u[1] for u in sol.u]
Y = [u[2] for u in sol.u]
T = [t for t in sol.t]
```

```
plt =
    plot(
        layout=(1,2),
        dpi=200,
        legend=false)
    plot!(
        plt[1],
        T,
        X,
        title="решение уравнения x",
        color=:blue)
    plot!(
        plt[2],
        X,
        Y,
        title="x vs y",
        color=:blue)

        savefig("lab5-3.png")
```



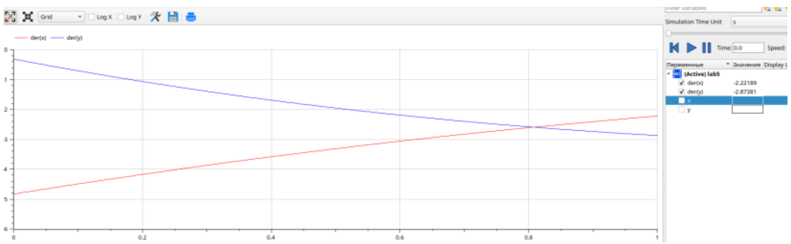
Название рисунка

Openmodelica

```
model lab5
constant Real a=0.13;
constant Real b=0.041;
constant Real c=0.31;
constant Real d=0.042;

Real x;
Real y;

initial equation
```

```
x=7;
y=20;

equation
der(x)=a*x-b*x*y;
der(y)=-c*y+d*x*y;

end lab5;
```

??).



Название рисунка

Найдем стационарное состояние системы:

$$x_0 = 0{,}31/0{,}042 = 7{,}38; y_0 = 0{,}13/0{,}041 = 3{,}17$$

4 Выводы

В ходе выполнения лабораторной работы я научилась строить график зависимости численности хищников от численности жертв, а также графики изменения численности хищников и численности жертв при заданных начальных условиях. Нашла стационарное состояние системы.

Список литературы

Кулябов Д. С. Лабораторная работа №5: https://esystem.rudn.ru/pluginfile.php/1971574/mod_resource/content/2/Лабораторная%20работа%20№%204.pdf