

SAD - Projekt 2

Bartosz Latosek, Mikołaj Olczak

April 2024

1 Problem 1 – badanie testów porównujących wartości średnie prób

Przyjmijmy, że n -elementowe próby losowe X i Y z są z rozkładów normalnych potencjalnie różniących się wartościami oczekiwanymi i wariancjami. Chcemy zweryfikować hipotezę o niezerowości tej różnicy.

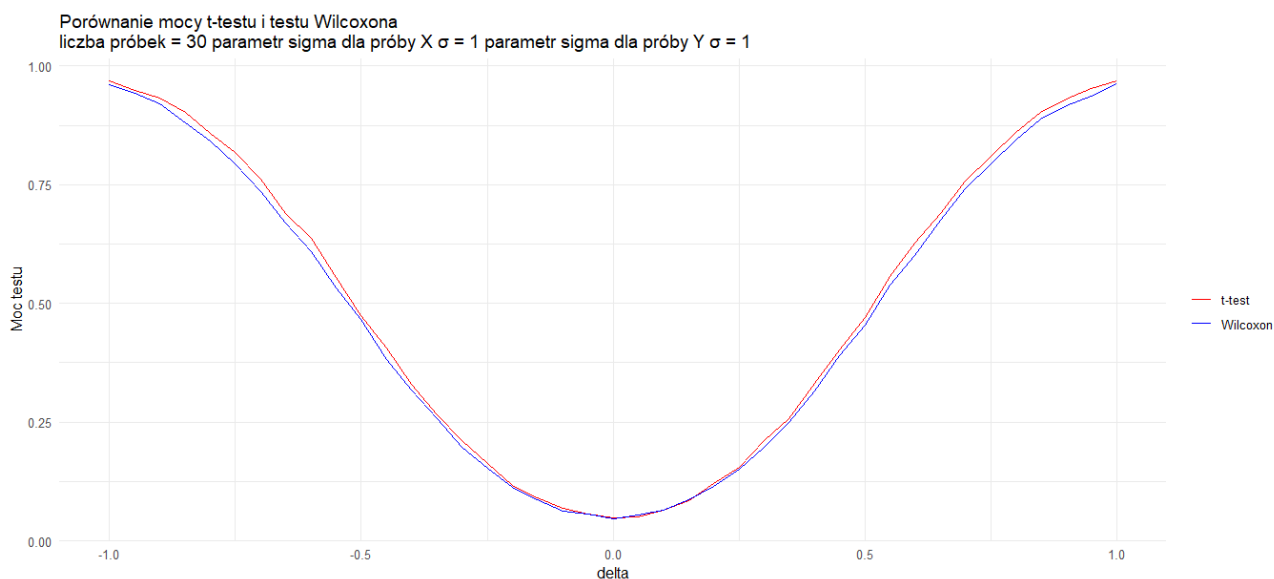
- a. Określić właściwy test zakładający rozkłady normalne. Wykorzystując symulacje komputerowe, sprawdzić moc tego testu w zależności od różnicy Δ wartości oczekiwanych obu prób. Określić sensowne kryterium wykrywalności i na podstawie wyników symulacji wskazać jaka jest minimalna wykrywalna różnica Δ .
- b. Powtórzyć (a) dla testu sumy rang Wilcoxona i wyciągnąć odpowiednie wnioski. W szczególności przedyskutować założenie normalności:
 - i. Jaki jest widoczny zysk z wykorzystania testu zakładającego normalność prób losowych
 - ii. Jakie jest ryzyko (co stanie się gdy rzeczywiste rozkłady jednak nie będą normalne).

1.1 Metoda rozwiązania problemu

W celu weryfikacji hipotezy o niezerowej różnicy średnich dwóch prób losowych z rozkładów normalnych, zastosowano dwa testy statystyczne: test t Studenta oraz test sumy rang Wilcoxona. W celu określenia minimalnej wykrywalnej różnicy Δ , przeprowadzono 10000 symulacji komputerowych dla różnych wartości Δ . Na początku testu są generowane losowe próbki, następnie jest wykonywany odpowiedni test oraz są zliczane przypadki, w których hipoteza zerowa jest odrzucana. Następnie jest obliczana moc testu jako stosunek liczby istotnych wyników do liczby przeprowadzonych symulacji. Symulacje przeprowadzono dla różnych liczebności prób (30, 50, 70) oraz różnych wartości odchyleń standardowych (0.5, 0.75, 1, 1.25, 1.5).

1.2 Otrzymane wyniki

1.2.1 Zmiana parametru liczebności prób

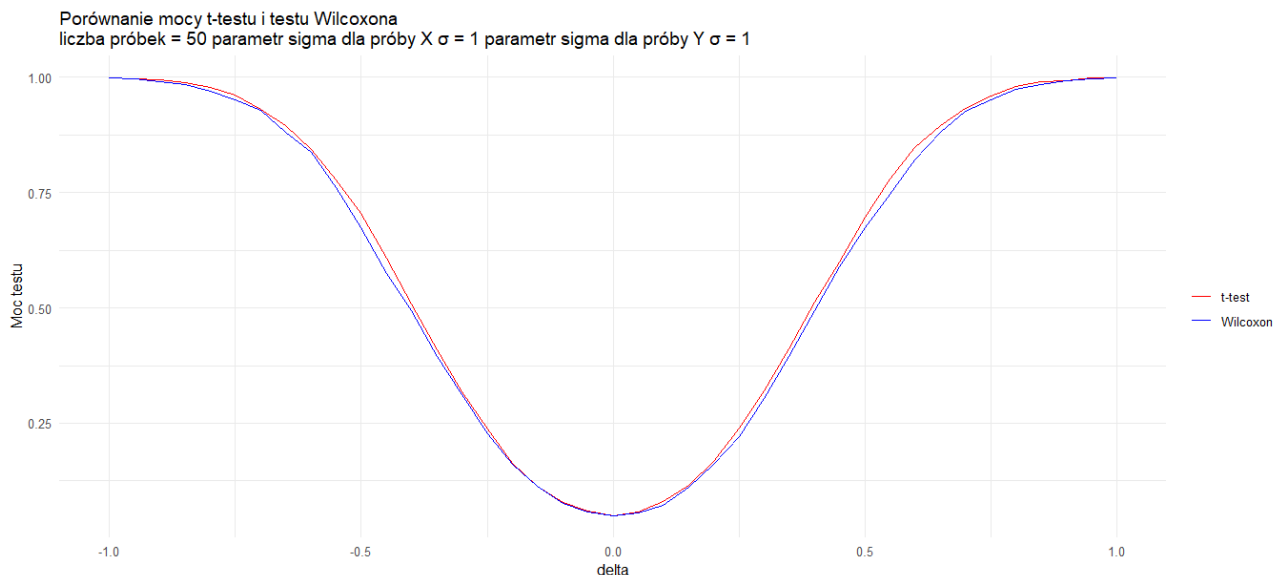


Rysunek 1: Porównanie mocy testu t Studenta i testu sumy rang Wilcoxona (liczba próbek = 30, odchylenie standardowe próby X $\sigma_X = 1$, odchylenie standardowe próby Y $\sigma_Y = 1$)

Minimalne wykrywalne różnice Δ :

Δ_{min} dla testu t Studenta - ± 0.75

Δ_{min} dla testu sumy rang Wilcoxona - ± 0.75

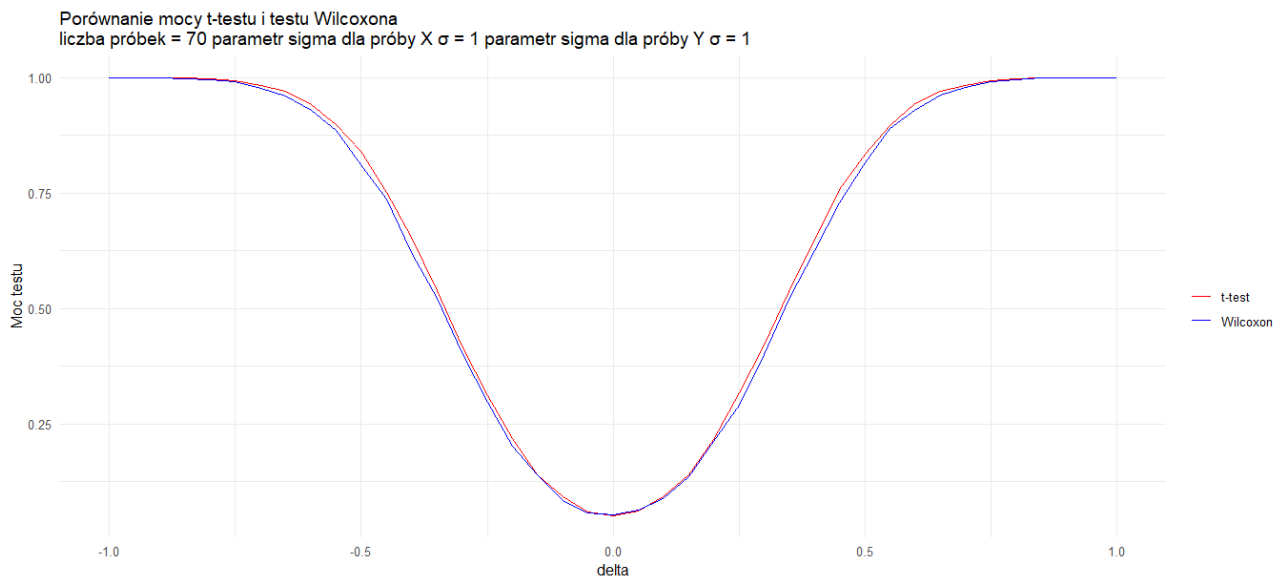


Rysunek 2: Porównanie mocy testu t Studenta i testu sumy rang Wilcoxona (liczba próbek = 50, odchylenie standardowe próby X $\sigma_X = 1$, odchylenie standardowe próby Y $\sigma_Y = 1$)

Minimalne wykrywalne różnice Δ :

Δ_{min} dla testu t Studenta - ± 0.55

Δ_{min} dla testu sumy rang Wilcoxona - ± 0.6



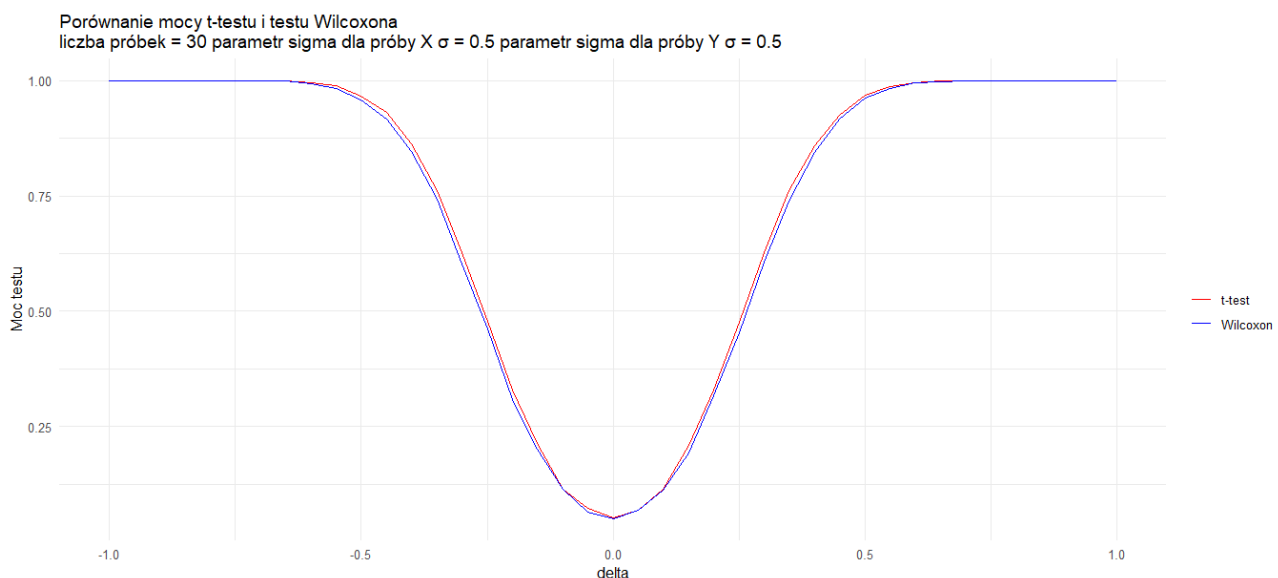
Rysunek 3: Porównanie mocy testu t Studenta i testu sumy rang Wilcoxona (liczba próbek = 70, odchylenie standardowe próby X $\sigma_X = 1$, odchylenie standardowe próby Y $\sigma_Y = 1$)

Minimalne wykrywalne różnice Δ :

Δ_{min} dla testu t Studenta - ± 0.5

Δ_{min} dla testu sumy rang Wilcoxona - ± 0.5

1.2.2 Zmiana parametrów odchyłeń standardowych rozkładów X i Y ($\sigma_X = \sigma_Y$)

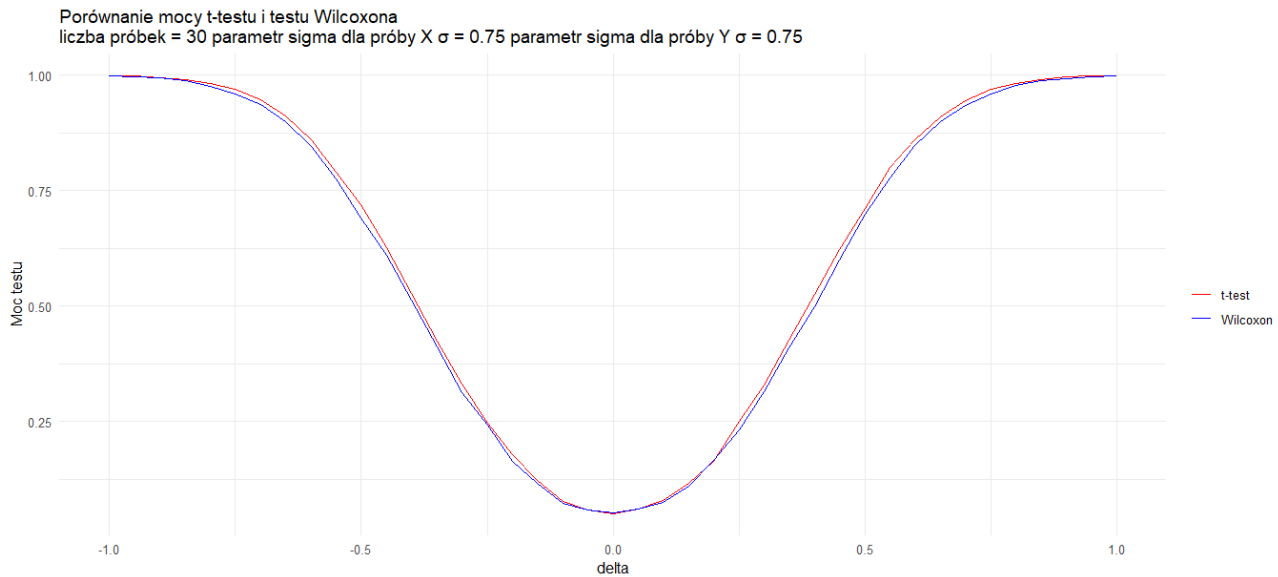


Rysunek 4: Porównanie mocy testu t Studenta i testu sumy rang Wilcoxona (liczba próbek = 30, odchylenie standardowe próby X $\sigma_X = 0.5$, odchylenie standardowe próby Y $\sigma_Y = 0.5$)

Minimalne wykrywalne różnice Δ :

Δ_{min} dla testu t Studenta - ± 0.35

Δ_{min} dla testu sumy rang Wilcoxona - ± 0.4

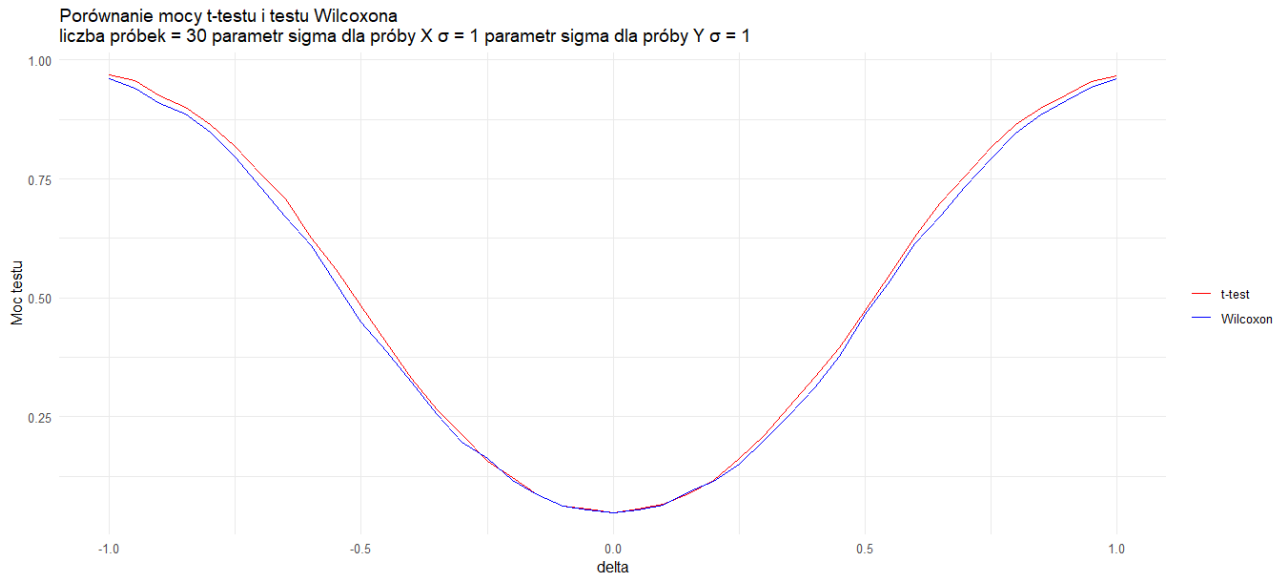


Rysunek 5: Porównanie mocy testu t Studenta i testu sumy rang Wilcoxona (liczba próbek = 30, odchylenie standardowe próby X $\sigma_X = 0.75$, odchylenie standardowe próby Y $\sigma_Y = 0.75$)

Minimalne wykrywalne różnice Δ :

Δ_{min} dla testu t Studenta - ± 0.55

Δ_{min} dla testu sumy rang Wilcoxona - ± 0.55

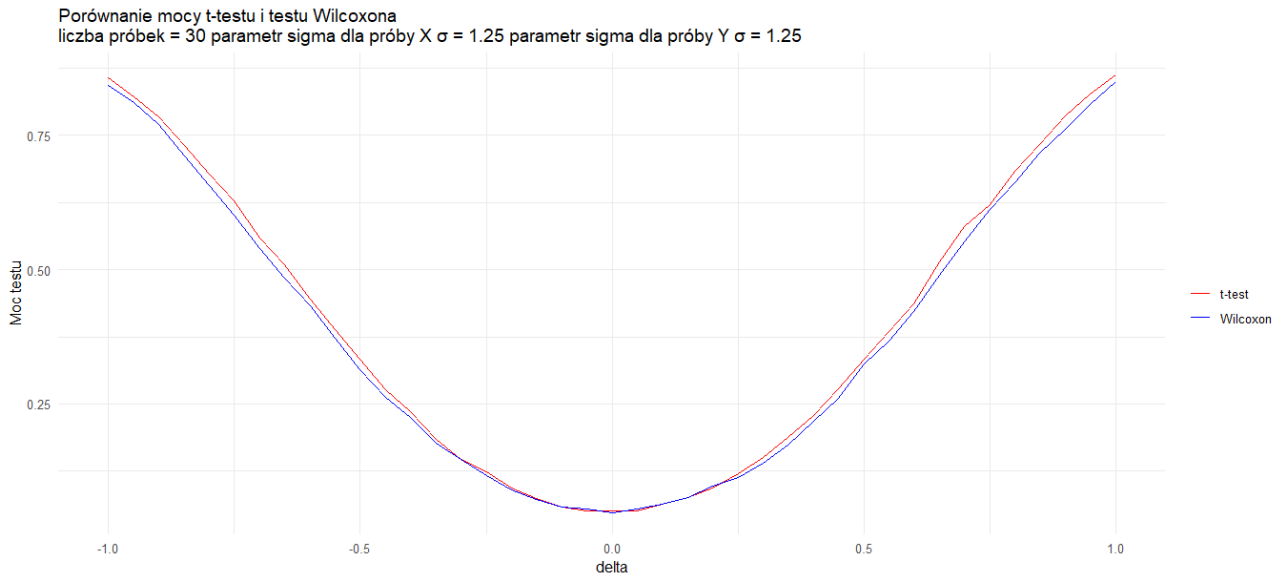


Rysunek 6: Porównanie mocy testu t Studenta i testu sumy rang Wilcoxona (liczba próbek = 30, odchylenie standardowe próby X $\sigma_X = 1$, odchylenie standardowe próby Y $\sigma_Y = 1$)

Minimalne wykrywalne różnice Δ :

Δ_{min} dla testu t Studenta - ± 0.75

Δ_{min} dla testu sumy rang Wilcoxona - ± 0.75

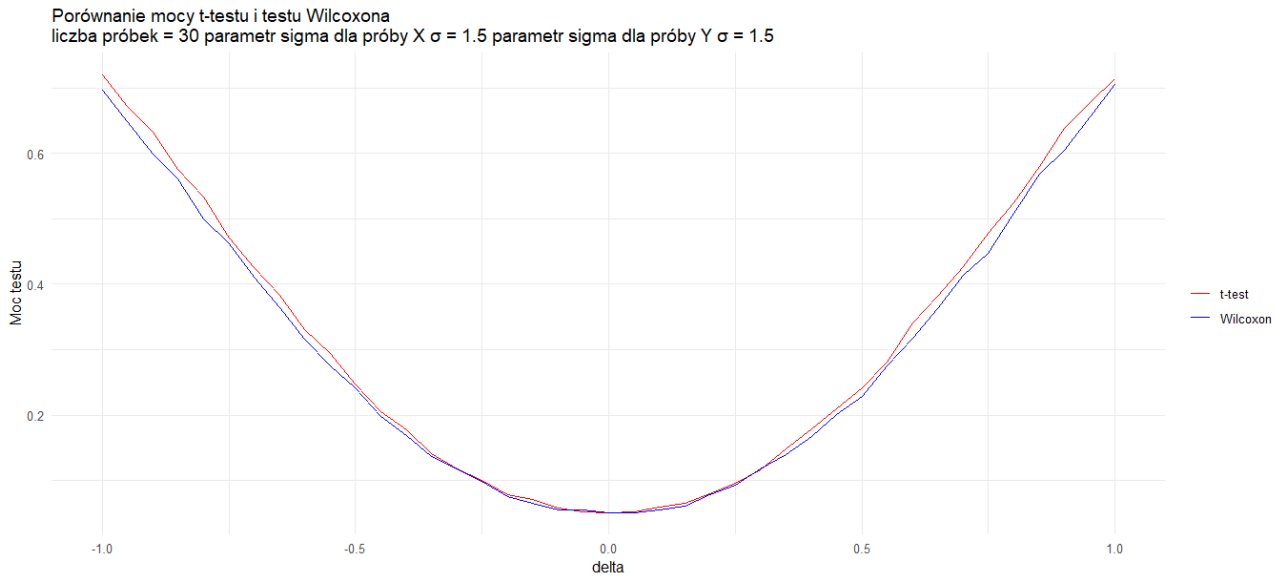


Rysunek 7: Porównanie mocy testu t Studenta i testu sumy rang Wilcoxona (liczba próbek = 30, odchylenie standardowe próby X $\sigma_X = 1.25$, odchylenie standardowe próby Y $\sigma_Y = 1.25$)

Minimalne wykrywalne różnice Δ :

Δ_{min} dla testu t Studenta - ± 0.9

Δ_{min} dla testu sumy rang Wilcoxona - ± 0.95



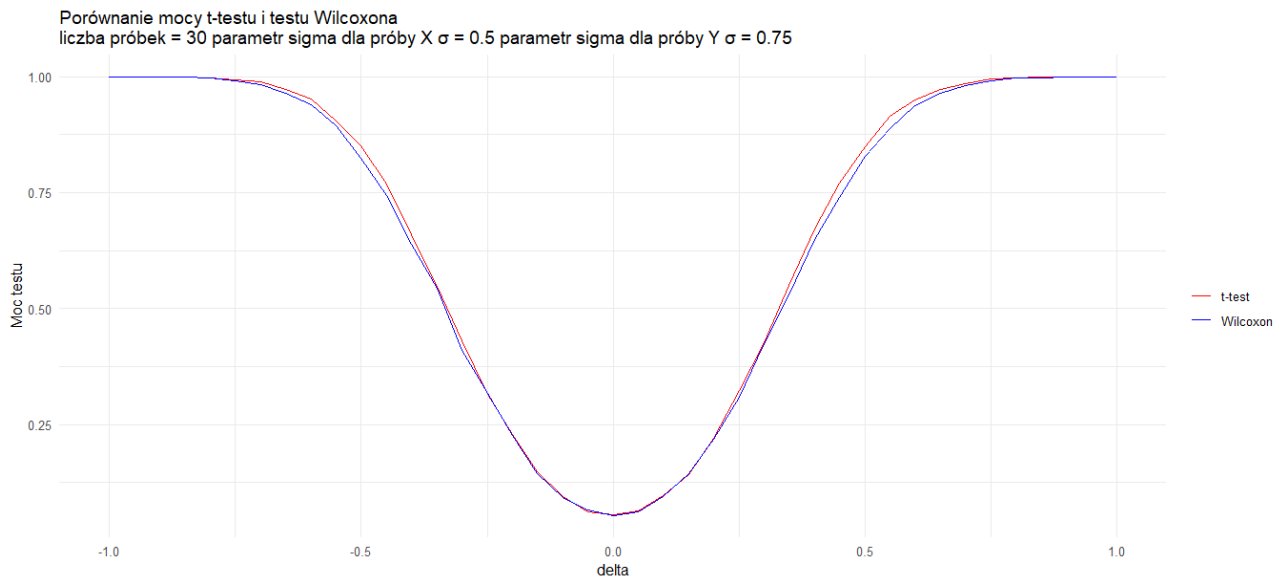
Rysunek 8: Porównanie mocy testu t Studenta i testu sumy rang Wilcoxona (liczba próbek = 30, odchylenie standardowe próby X $\sigma_X = 1.5$, odchylenie standardowe próby Y $\sigma_Y = 1.5$)

Minimalne wykrywalne różnice Δ :

Δ_{min} dla testu t Studenta - ± 1

Δ_{min} dla testu sumy rang Wilcoxona - ± 1

1.2.3 Zmiana parametrów odchyłeń standardowych rozkładów X i Y ($\sigma_X \neq \sigma_Y$)

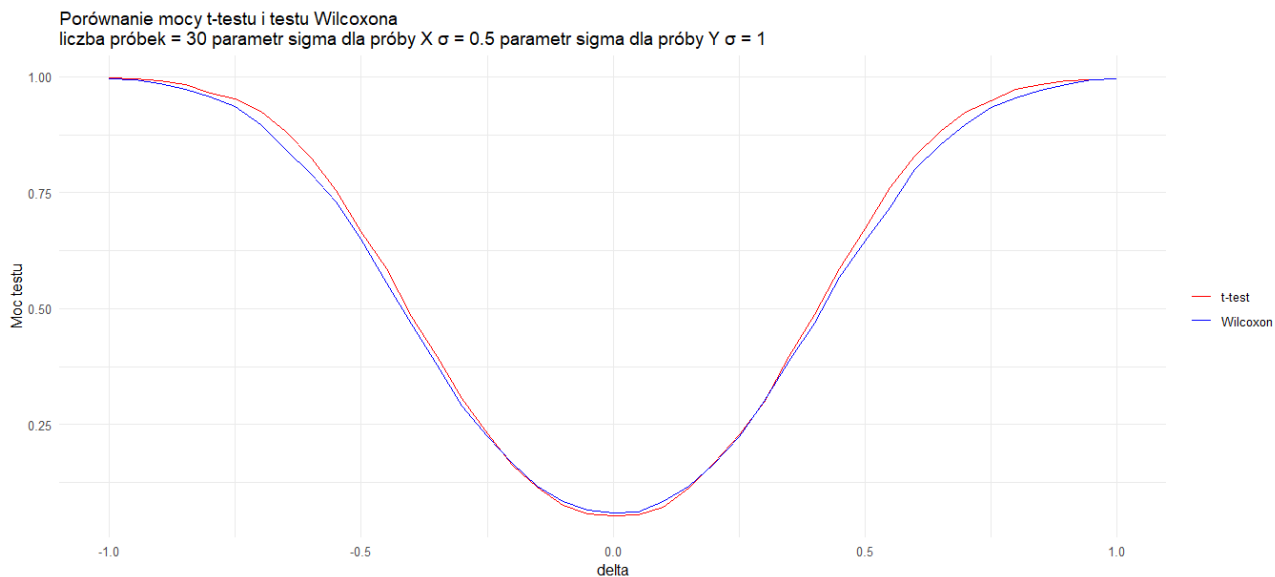


Rysunek 9: Porównanie mocy testu t Studenta i testu sumy rang Wilcoxona (liczba próbek = 30, odchylenie standardowe próby X $\sigma_X = 0.5$, odchylenie standardowe próby Y $\sigma_Y = 0.75$)

Minimalne wykrywalne różnice Δ :

Δ_{min} dla testu t Studenta - ± 0.45

Δ_{min} dla testu sumy rang Wilcoxona - ± 0.5

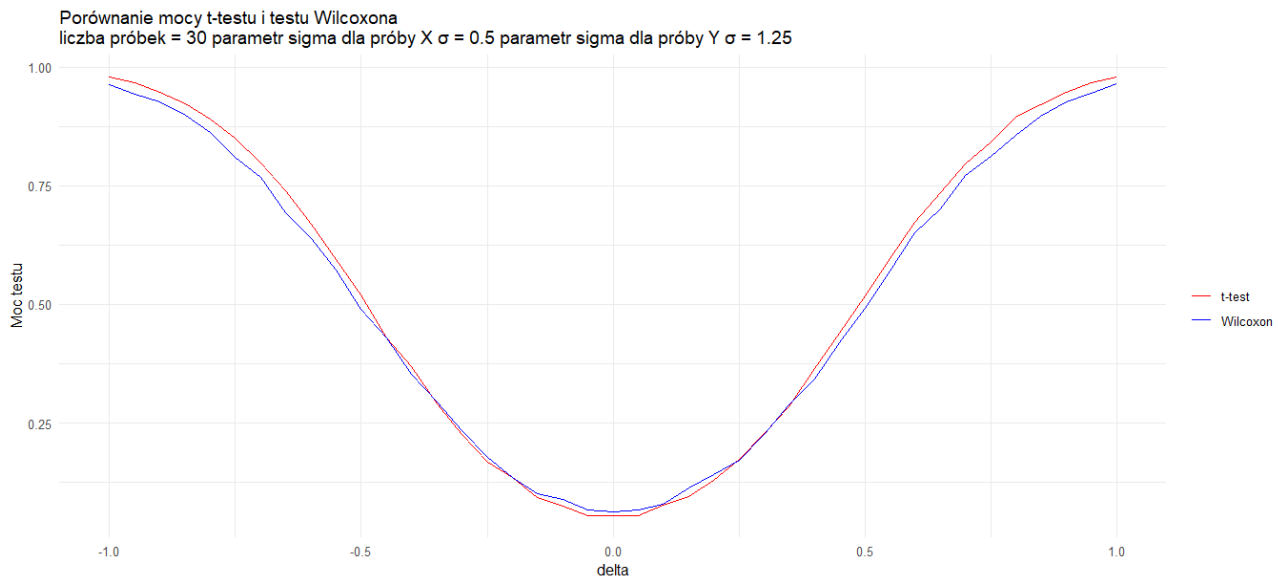


Rysunek 10: Porównanie mocy testu t Studenta i testu sumy rang Wilcoxona (liczba próbek = 30, odchylenie standardowe próby X $\sigma_X = 0.5$, odchylenie standardowe próby Y $\sigma_Y = 1$)

Minimalne wykrywalne różnice Δ :

Δ_{min} dla testu t Studenta - ± 0.6

Δ_{min} dla testu sumy rang Wilcoxona - ± 0.6

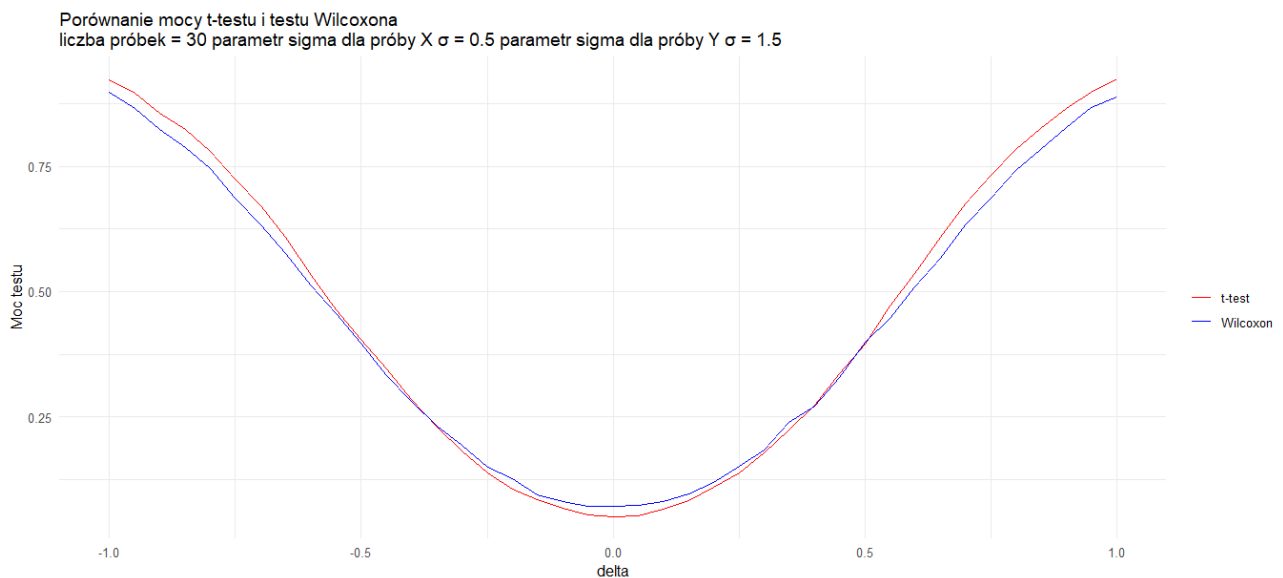


Rysunek 11: Porównanie mocy testu t Studenta i testu sumy rang Wilcoxona (liczba próbek = 30, odchylenie standardowe próby X $\sigma_X = 0.5$, odchylenie standardowe próby Y $\sigma_Y = 1.25$)

Minimalne wykrywalne różnice Δ :

Δ_{min} dla testu t Studenta - ± 0.7

Δ_{min} dla testu sumy rang Wilcoxona - ± 0.75

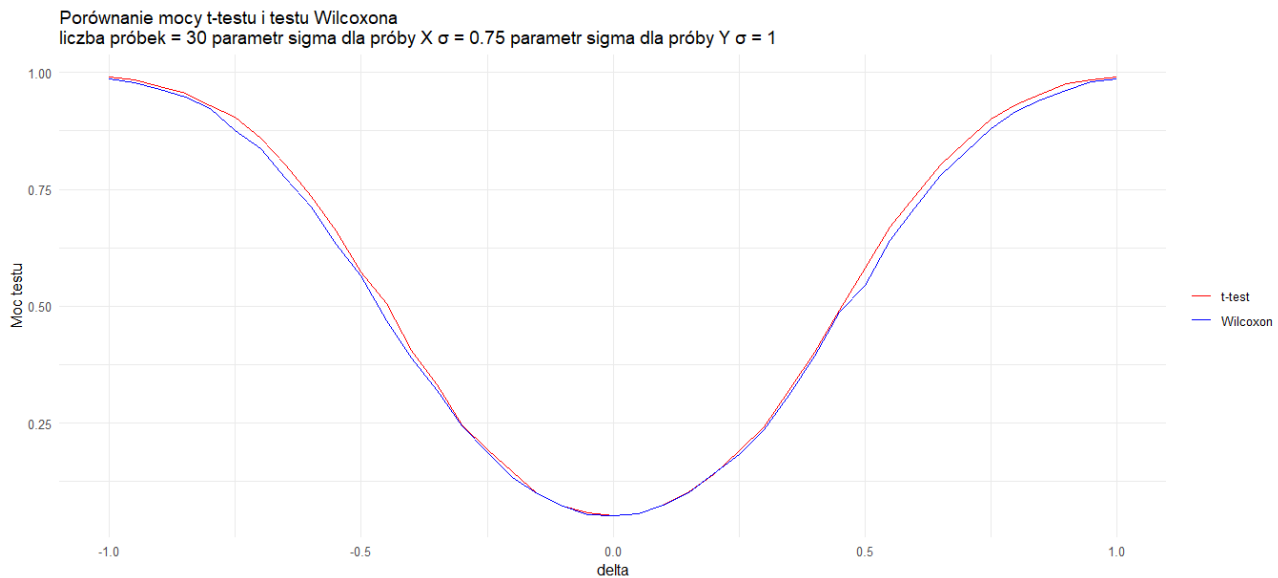


Rysunek 12: Porównanie mocy testu t Studenta i testu sumy rang Wilcoxona (liczba próbek = 30, odchylenie standardowe próby X $\sigma_X = 0.5$, odchylenie standardowe próby Y $\sigma_Y = 1.5$)

Minimalne wykrywalne różnice Δ :

Δ_{min} dla testu t Studenta - ± 0.85

Δ_{min} dla testu sumy rang Wilcoxona - ± 0.85

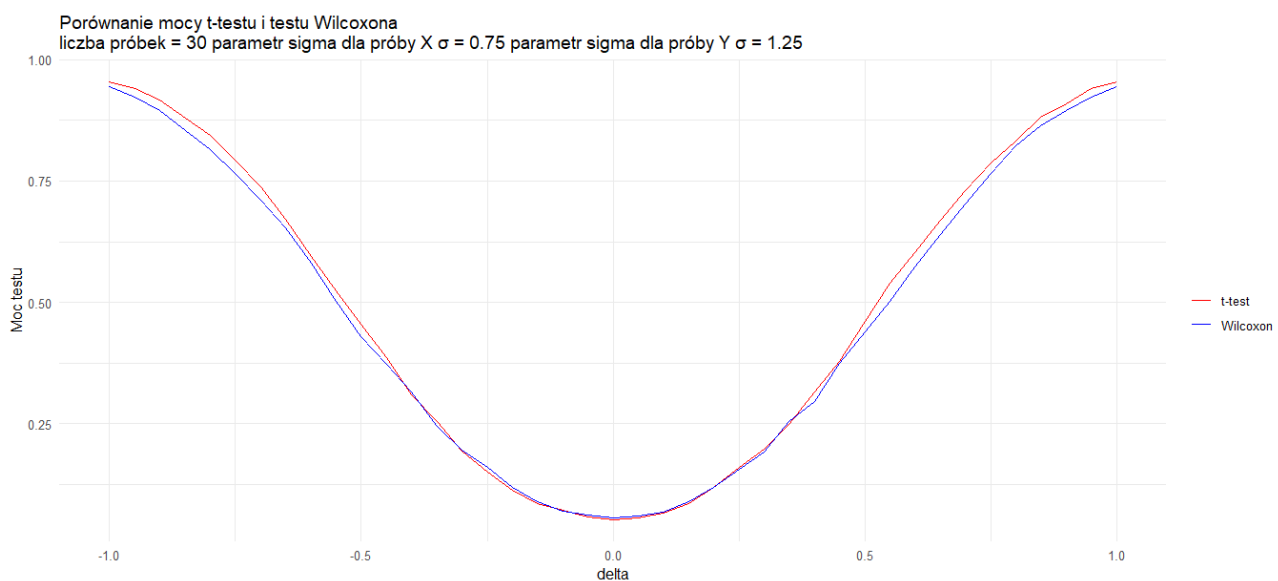


Rysunek 13: Porównanie mocy testu t Studenta i testu sumy rang Wilcoxona (liczba próbek = 30, odchylenie standardowe próby X $\sigma_X = 0.75$, odchylenie standardowe próby Y $\sigma_Y = 1$)

Minimalne wykrywalne różnice Δ :

Δ_{min} dla testu t Studenta - ± 0.65

Δ_{min} dla testu sumy rang Wilcoxona - ± 0.65

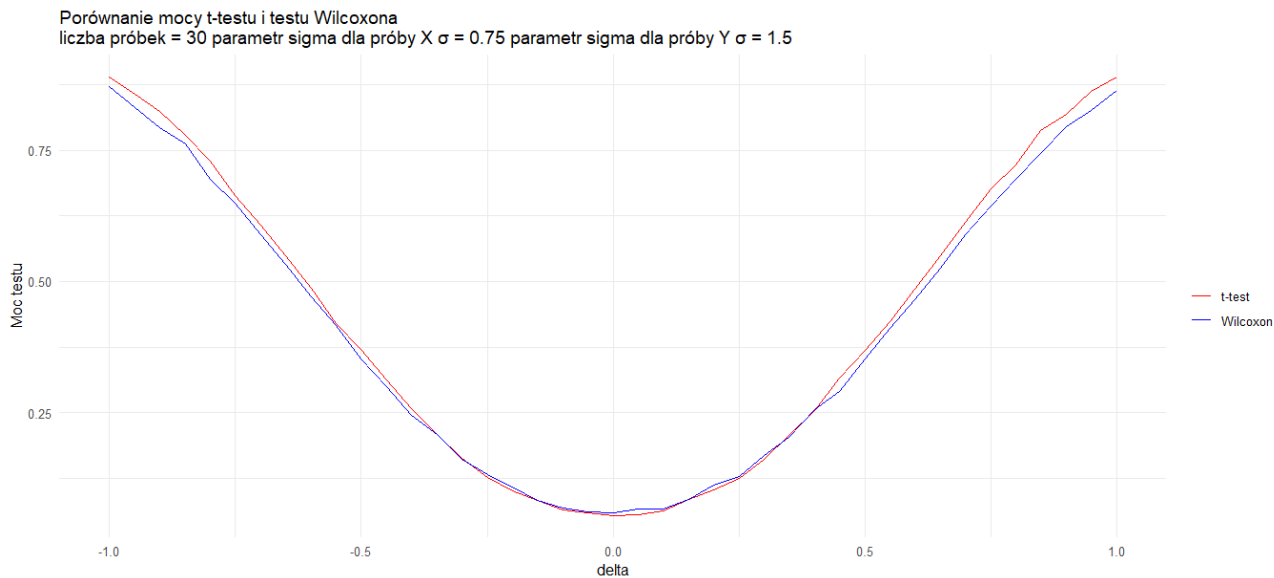


Rysunek 14: Porównanie mocy testu t Studenta i testu sumy rang Wilcoxona (liczba próbek = 30, odchylenie standardowe próby X $\sigma_X = 0.75$, odchylenie standardowe próby Y $\sigma_Y = 1.25$)

Minimalne wykrywalne różnice Δ :

Δ_{min} dla testu t Studenta - ± 0.75

Δ_{min} dla testu sumy rang Wilcoxona - ± 0.8

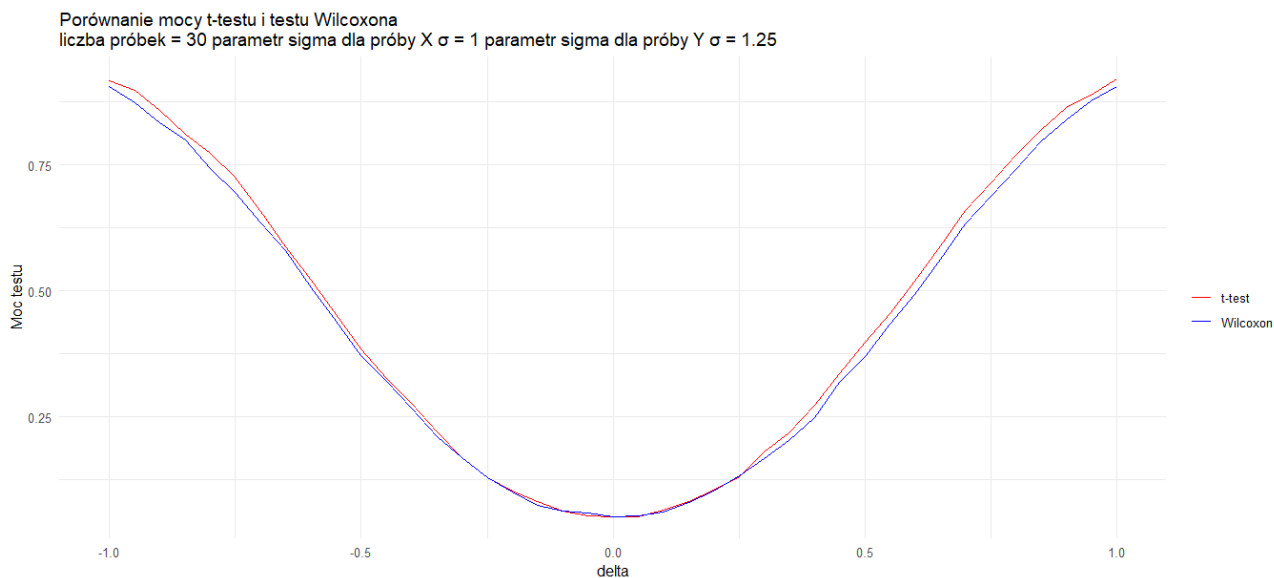


Rysunek 15: Porównanie mocy testu t Studenta i testu sumy rang Wilcoxona (liczba próbek = 30, odchylenie standardowe próby X $\sigma_X = 0.75$, odchylenie standardowe próby Y $\sigma_Y = 1.5$)

Minimalne wykrywalne różnice Δ :

Δ_{min} dla testu t Studenta - ± 0.85

Δ_{min} dla testu sumy rang Wilcoxona - ± 0.9

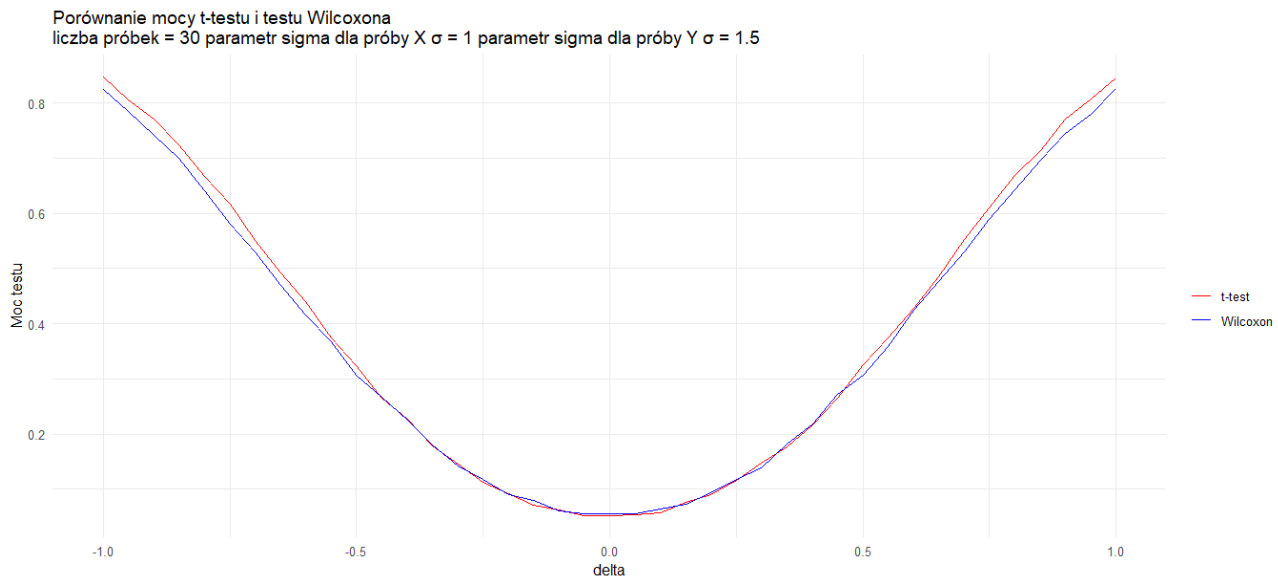


Rysunek 16: Porównanie mocy testu t Studenta i testu sumy rang Wilcoxona (liczba próbek = 30, odchylenie standardowe próby X $\sigma_X = 1$, odchylenie standardowe próby Y $\sigma_Y = 1.25$)

Minimalne wykrywalne różnice Δ :

Δ_{min} dla testu t Studenta - ± 0.85

Δ_{min} dla testu sumy rang Wilcoxona - ± 0.85

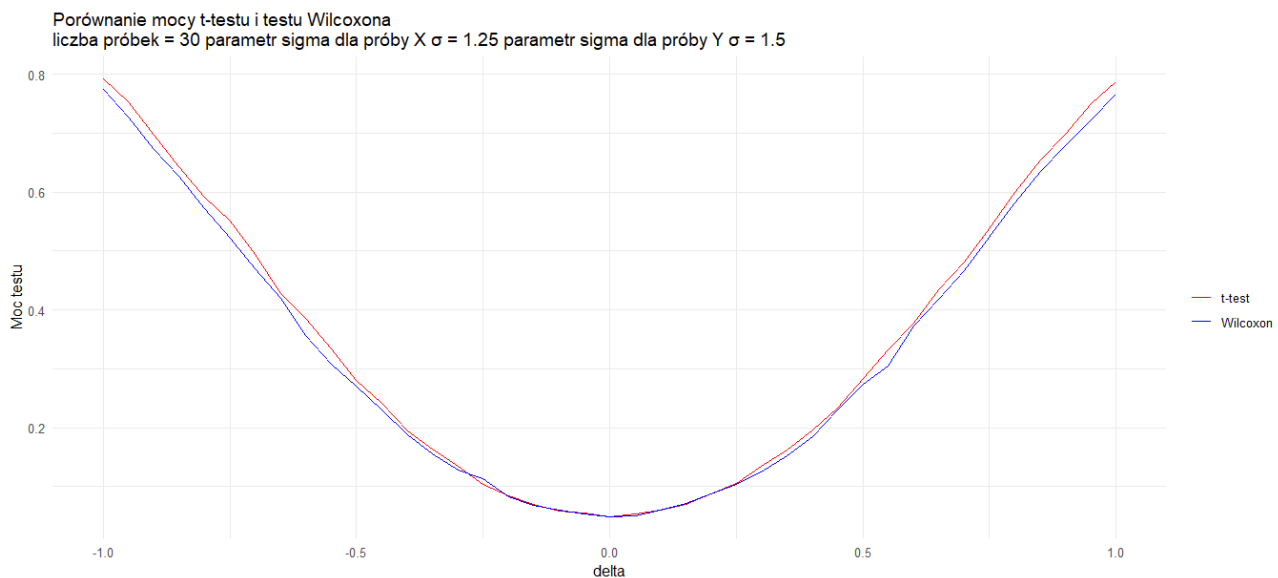


Rysunek 17: Porównanie mocy testu t Studenta i testu sumy rang Wilcoxona (liczba próbek = 30, odchylenie standardowe próby X $\sigma_X = 1$, odchylenie standardowe próby Y $\sigma_Y = 1.5$)

Minimalne wykrywalne różnice Δ :

Δ_{min} dla testu t Studenta - ± 0.95

Δ_{min} dla testu sumy rang Wilcoxona - ± 0.95



Rysunek 18: Porównanie mocy testu t Studenta i testu sumy rang Wilcoxona (liczba próbek = 30, odchylenie standardowe próby X $\sigma_X = 1.25$, odchylenie standardowe próby Y $\sigma_Y = 1.5$)

Minimalne wykrywalne różnicę Δ :

Δ_{min} dla testu t Studenta - ± 1

Δ_{min} dla testu sumy rang Wilcoxona - ± 1

1.3 Interpretacja wyników

Wzrost liczby próbek w próbach losowych X i Y zmniejsza minimalną wykrywalną różnicę Δ zarówno w teście t-Studenta, jak i w teście sumy rang Wilcozona. Oznacza to że przy większej liczbie próbek, oba testy wykazują większą czułość. Zaobserwowano, że przy liczbie próbek wynoszącej 50, minimalna wykrywalna różnica Δ dla testu Wilcozona była większa niż dla testu t-Studenta. W pozostałych badanych wartościach liczby próbek, minimalne wykrywalne różnice dla obu testów były jednakowe.

Wzrost odchylenia standardowego dla obu prób losowych X i Y ($\sigma_X = \sigma_Y$) powoduje wzrost minimalnej wykrywalnej różnicy Δ dla obu testów. świadczy to o ogólnym zwiększeniu trudności w wykrywaniu małych różnic między średnimi wraz ze wzrostem odchylenia standardowego. Przy odchyleniu standardowym $\sigma_X = \sigma_Y = 1.25$, minimalna wykrywalna różnica Δ dla testu Wilcozona była większa niż dla testu t-Studenta. W pozostałych przypadkach, minimalne wykrywalne różnice były jednakowe.

Wzrost odchylenia standardowego dla obu prób losowych X i Y ($\sigma_X \neq \sigma_Y$) powoduje ogólny wzrost minimalnej wykrywalnej różnicy Δ . Im większe były odchylenia standardowe prób losowych X i Y, tym większa była minimalna wykrywalna różnica Δ . Dodatkowo, zwiększenie różnicy pomiędzy odchyleniami standardowymi prób losowych X i Y powodowało zwiększenie różnicy między mocami testów.

2 Problem 2 – zbadanie różnic inflacji „studenckiej” i oficjalnej

W projekcie 1 analizowana była inflacja „własna studencka” w odniesieniu do oficjalnej. Teraz należy dokładniej przeanalizować ich różnicę (należy posłużyć się wynikami projektu 1 wybranej osoby z zespołu; inflacja własna to próba X, inflacja oficjalna to Y, czas określa nam kolejne elementy obu prób)

- narysować wykresy pudełkowe obu inflacji i wyciągnąć wnioski
- narysować wykres pudełkowy różnic $X_i - Y_i$
- sformułować odpowiednią hipotezę o tym, że jedna z tych inflacji jest większa od drugiej, przeprowadzić test i zinterpretować wynik. Proszę pamiętać, aby przy wyborze testu przemyśleć założenia – w szczególności czy należy zakładać rozkład normalny prób

2.1 Metoda rozwiązania problemu

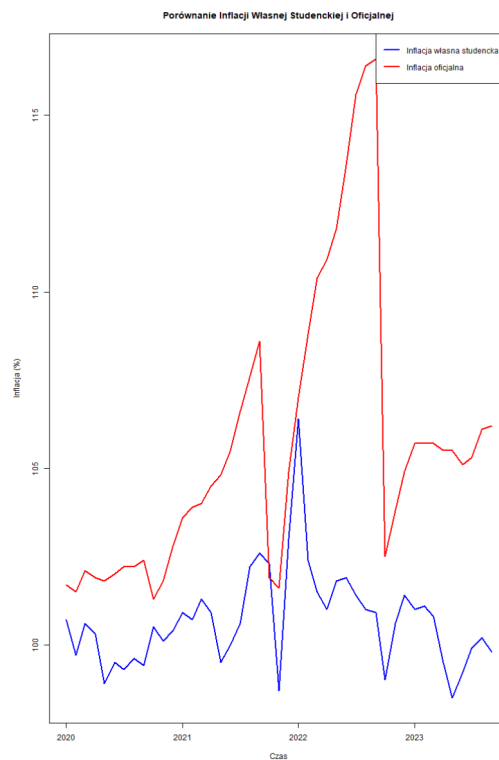
W pierwszej kolejności wymagane było odpowiednie spreparowanie danych na potrzeby niniejszego problemu. Dane pochodzące z portalu <https://stat.gov.pl> dotyczące inflacji cen żywności, wykorzystane w projekcie pierwszym zostały uśrednione po okresach. W wyniku tego powstał wektor uśrednionych cen produktów, tworzący szereg czasowy. Oficjalne wskaźniki inflacyjne w poszczególnych miesiącach na przestrzeni lat 2020 - 2023 są dostarczane w formie punktów inflacyjnych obrazujących poziom inflacji - np. **113** punktów inflacyjnych oznacza, że ceny w danym okresie są **13%** wyższe od tych z poprzedniego okresu. W związku z tym, średnie ceny produktów w kolejnych okresach zostały zmodyfikowane tak, by odpowiadać formie narzuconej przez oficjalne wskaźniki inflacji. Cena za dany okres była dzielona przez jej wartość z okresu poprzedniego a następnie dla wyrównania - mnożona przez 100.

Odpowiednio spreparowane dane zostały następnie poddane analizie na podstawie ich wykresów pudełkowych. W ostatniej części niniejszego zadania, sformułowana została i przetestowana odpowiednia hipoteza dotycząca stopnia podobieństwa obydwu inflacji.

2.2 Otrzymane wyniki i ich interpretacja

2.2.1 Wizualizacja danych

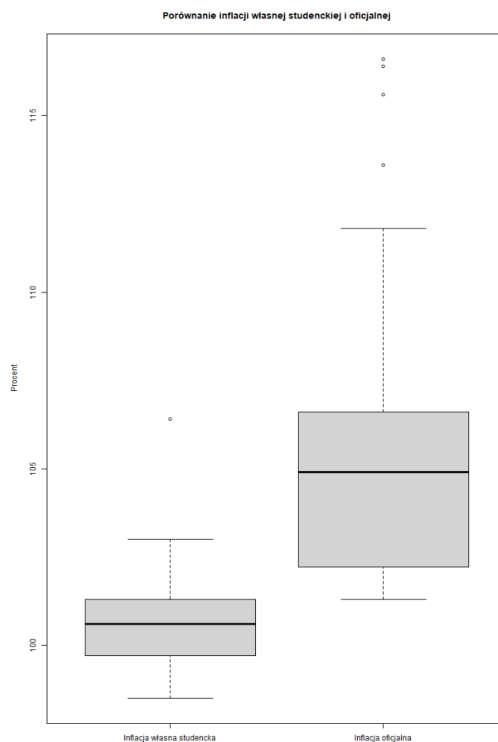
W celu wizualizacji danych, zostały one zestawione na prostym wykresie liniowym widocznym poniżej:



Rysunek 19: Porównanie wskaźników inflacji własnych i oficjalnych

Już na podstawie powyższego wykresu możemy stwierdzić, że oficjalne i własne wartości wskaźników znacznie od siebie odbiegają.

2.2.2 Porównanie wykresów pudełkowych obu inflacji



Rysunek 20: Porównanie wykresów pudełkowych inflacji własnych i oficjalnych

Inflacja własna studencka

- **Mediana:** Znajduje się w środku części pudełka.
- **Zakres międzykwartylowy (IQR):** Relatywnie mały, co oznacza, że rozkład wartości inflacji studenckiej jest bardziej skoncentrowany.
- **Wąsy:** Wąsy są krótkie, co wskazuje na mniejszą zmienność danych.
- **Wartości odstające:** Kilka wartości odstających znajduje się powyżej pudełka, ale są one bliżej siebie niż w przypadku inflacji oficjalnej.

Inflacja oficjalna

- **Mediana:** Znajduje się w górnej części pudełka.
- **Zakres międzykwartylowy (IQR):** Duży, co oznacza, że rozkład wartości inflacji oficjalnej jest bardziej rozproszony.
- **Wąsy:** Wąsy są dłuższe, co sugeruje większą zmienność danych.
- **Wartości odstające:** Znacznie więcej wartości odstających znajdujących się powyżej pudełka, a ich zakres jest szerszy.

Porównanie

- **Mediana:** Mediana inflacji własnej studenckiej jest niższa niż mediana inflacji oficjalnej.

- **Zmienność:** Inflacja oficjalna ma większą zmienność i szerszy zakres międzykwartylowy w porównaniu do inflacji własnej studenckiej.
- **Wartości odstające:** Inflacja oficjalna ma więcej wartości odstających i są one bardziej rozproszone w porównaniu do inflacji studenckiej.

Na podstawie tego wykresu pudełkowego można wnioskować, że inflacja własna studencka jest bardziej stabilna i ma mniejszą zmienność niż inflacja oficjalna, która jest bardziej rozproszona i zmienna. Może mieć to związek z tym, że do wyznaczenia własnej inflacji studenckiej wykorzystane zostały uśrednione ceny dostępnych produktów - generalnie uśrednianie zacierza zmienność wynikającą z inflacji (razem zestawiane są produkty, których cena w mniejszym lub w większym stopniu zmienia się wraz z inflacją, więc wyniki są uśredniane).

2.2.3 Wykres pudełkowy różnic Xi-Yi



Rysunek 21: Wykres pudełkowy różnic Xi-Yi

2.2.4 Wykres pudełkowy różnic Xi-Yi

- **Mediana:** Mediana różnic jest ujemna, co oznacza, że w większości przypadków inflacja własna studencka jest niższa od inflacji oficjalnej.
- **Zakres międzykwartylowy (IQR):** IQR jest umiarkowanej wielkości, co wskazuje, że różnice są dość skoncentrowane wokół mediany, ale z pewnym rozproszeniem.
- **Wąsy:** Górny wąs sięga blisko zera, co sugeruje, że niektóre różnice są bliskie zeru (czyli inflacja własna studencka jest bardzo zbliżona do inflacji oficjalnej w tych przypadkach). Dolny wąs sięga około -10, co wskazuje, że w niektórych przypadkach inflacja własna studencka była znacznie niższa niż inflacja oficjalna.
- **Outliery (wartości odstające):** Istnieje kilka wartości odstających poniżej dolnego wąsa. Są to przypadki, w których różnica jest jeszcze bardziej ujemna (czyli inflacja własna studencka jest znacznie niższa od inflacji oficjalnej). Najniższa wartość odstająca jest blisko -15, co wskazuje na najbardziej skrajny przypadek, w którym inflacja własna studencka była znacznie niższa niż inflacja oficjalna.

2.2.5 Hipoteza dotycząca stopnia podobieństwa obydwu inflacji

Została określona następująca hipoteza zerowa i alternatywna:

- **H₀**: $\mu_X \leq \mu_Y$ - Średnia inflacji studenckiej (własnej) jest mniejsza lub równa średniej inflacji oficjalnej
- **H_A**: $\mu_X > \mu_Y$ - Średnia inflacji studenckiej (własnej) jest większa od średniej inflacji oficjalnej

Próg istotności dla wszystkich testów został ustalony na 0.05.

Na wstępie przeprowadzony został test Shapiro-Wilka - w celu ustalenia normalności rozkładów inflacji własnej i oficjalnej.

```
Shapiro-Wilk normality test
data:  X
W = 0.89626, p-value = 0.0007261

Shapiro-Wilk normality test
data:  Y
W = 0.84747, p-value = 3.153e-05
```

Rysunek 22: Wyniki testów Shapiro-Wilka dla inflacji oficjalnej i własnej

- **Inflacja własna (X)** - Ponieważ p-value ≤ 0.05 , odrzucamy hipotezę zerową o normalności rozkładu danych X. Oznacza to, że dane X (inflacja studencka) nie są rozkładu normalnego.
- **Inflacja Oficjalna (Y)** - Ponieważ p-value ≤ 0.05 , odrzucamy hipotezę zerową o normalności rozkładu danych Y. Oznacza to, że dane Y (inflacja oficjalna) również nie są rozkładu normalnego.

Na podstawie powyższych wyników można stwierdzić, że rozkłady inflacji nie są normalne. W związku z powyższym, do sprawdzenia ustalonych hipotez zostanie wykorzystany nieparametryczny test Wilcoxona, który nie wymaga normalności rozkładów danych.

```
Wilcoxon signed rank test with continuity correction
data:  X and Y
V = 1, p-value = 1
```

Rysunek 23: Wyniki testów Wilcoxona dla inflacji oficjalnej i własnej

Ponieważ wartość p (1) jest znacznie większa niż 0.05, nie mamy podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej (H₀).

3 Problem 3 – estymacja

Wiadomo, że estymatory największej wiarygodności mają asymptotycznie rozkład normalny. Proszę zilustrować tę cechę dowolnym przykładem (próby można tworzyć generatorem liczb losowych).

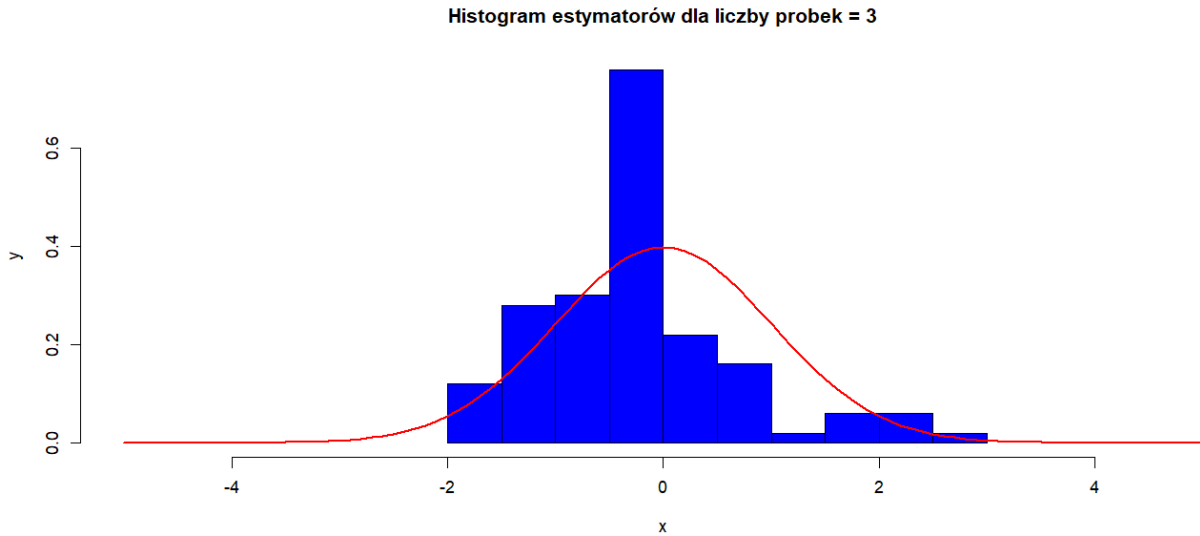
3.1 Metoda rozwiązania problemu

1. Wygenerowanie próbek z rozkładu Poissona z parametrem $\lambda = 2$. Wybrane zostały liczebności próbek w próbie: 3, 100, 1000.
2. Dla każdej liczebności próbek wykonano 100 prób .

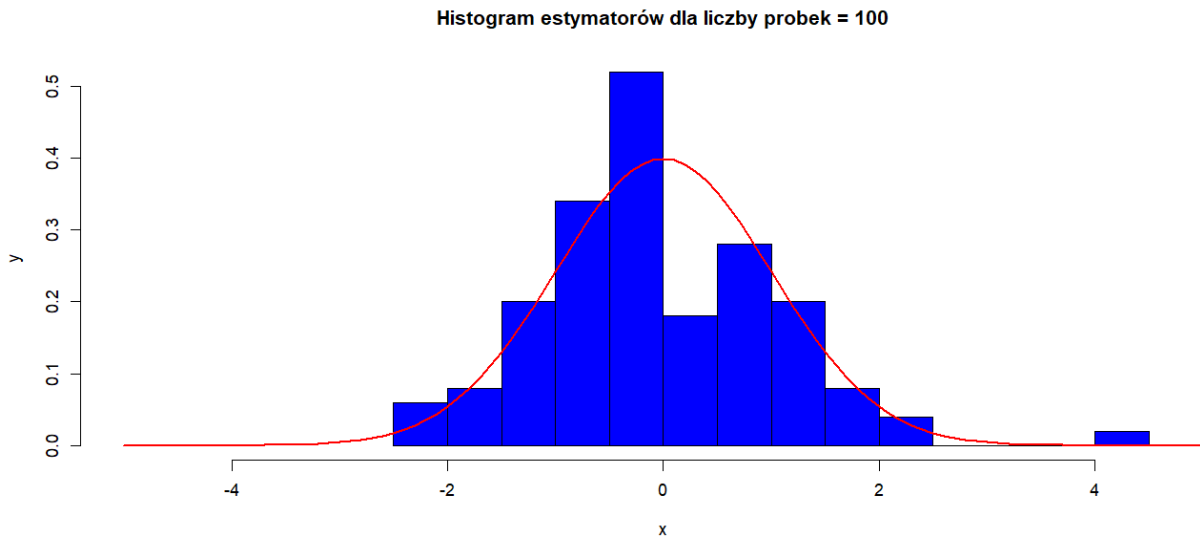
3. Z wygenerowanych próbek obliczono średnią a następnie obliczono: $\sqrt{nI(\theta)}(\hat{\theta}_{(n)} - \theta)$ gdzie $\hat{\theta}_{(n)}$ to średnia z próby, θ to wartość oczekiwana rozkładu Poissona o wielkości λ , $I(\theta)$ to informacja Fishera w przypadku rozkładu Poissona jest ona równa $\frac{1}{\lambda}$.
4. Do każdej liczby próbek narysowano histogram znormalizowanych estymatorów.

3.2 Otrzymane wyniki

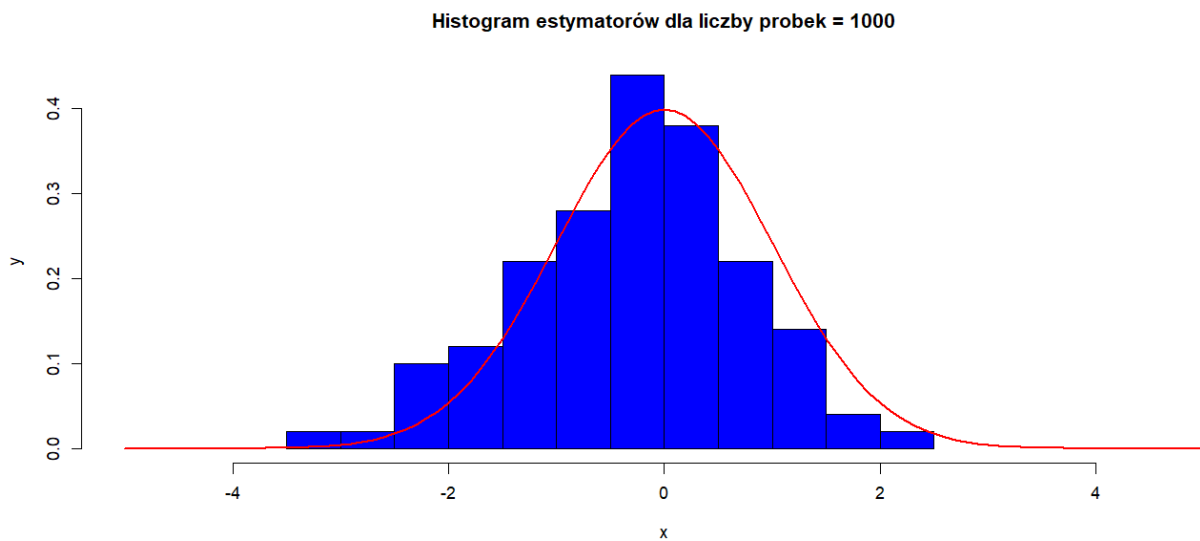
Wygenerowano trzy histogramy dla każdej liczebności próbek w próbie.



Rysunek 24: Histogram estymatorów dla liczby próbek = 3



Rysunek 25: Histogram estymatorów dla liczby próbek = 100



Rysunek 26: Histogram estymatorów dla liczby próbek = 100

3.3 Interpretacja wyników

W przedstawionych histogramach estymatorów największej wiarygodności zilustrowano, jak rozkład tych estymatorów zmienia się w zależności od wielkości próby. Zgodnie z teorią, estymatory największej wiarygodności (MLE) mają asymptotycznie rozkład normalny, co oznacza, że w miarę zwiększania się liczby obserwacji w próbie, rozkład estymatorów powinien zbliżać się do rozkładu normalnego. Przy bardzo małej liczbie próbek (liczba próbek = 3), rozkład estymatorów jest dość nieregularny i znacznie różni się od rozkładu normalnego. Widać dużą wariancję i brak wyraźnej symetrii. Przy średniej liczbie próbek (liczba próbek = 100) rozkład estymatorów staje się bardziej symetryczny i przypomina rozkład normalny, choć nadal można zauważyć pewne odchylenia. Widać, że kształt rozkładu zaczyna być bardziej dzwonowy. Przy dużej liczbie próbek (liczba próbek = 1000) rozkład estymatorów jest bardzo zbliżony do rozkładu normalnego. Histogram pokazuje wyraźny, symetryczny kształt dzwonu, co potwierdza asymptotyczną normalność estymatorów największej wiarygodności. Zaobserwowano w tym przypadku najmniejszą wariancję oraz najbardziej wyraźną symetrię.

Z obserwacji wykonanych histogramów wynika, że estymatory największej wiarygodności faktycznie mają asymptotycznie rozkład normalny. W miarę zwiększania się liczby próbek, rozkład estymatorów staje się coraz bardziej symetryczny i przypomina rozkład normalny.