金融风险管理

阅读随记

学院　　未来科学与工程学院

2025 年 3 月 25 日

目录

第一部分：风险管理基础

第 1 章：风险管理

1. 风险测量

一些基础概念:

标准差就是波动率

VAR(The value at risk): 较大损失发生概率很小的临界点。

绝对风险（Absolute risk ）：以相对于初始投资价值的差额来衡量。absolute risk in dollar terms is

$$\sigma(\triangle P) = \sigma(\triangle P/P) \times P = \sigma(R_P) \times P$$

相对风险 (Relative risk): 相对于基准指数 B 来衡量的。偏差/追踪错误

$$e = R_P - R_B$$

相对风险为:$\sigma(e)P = [\sigma(R_P - R_B)] \times P = \omega \times P \quad \omega$ 是跟踪误差波动率 (TEV)

2. 风险管理过程的评

风险管理的一个主要作用是估计未来收益和损失的分布. **建立未来收益率的分布？**

将风险进行**分类**: **已知的已知风险**（由可确定并可度量的风险组成）、**已知的未知风险** (风险已知或者应当已知但却没有被风险经理恰当度量的模型缺陷: **模型风险**、**流动性风险**) 以及**未知的未知风险**

3. 投资组合构建

多种资产比较: 投资组合的构建过程，这涉及期望收益率和风险的结合

如何在单一衡量标准中根据风险调整绩效?(某种资产上的单独投资选择)

同样的方法可应用于过去或者未来的业绩调整，过去的业绩调整要用到历史平均业绩值，未来的业绩调整要用到预测的数值。

1. Sharpe ratio (SR) 最简单的度量

$SR = \frac{[\mu(R_P) - R_F]}{\sigma(R_P)}$, 平均收益率 $\mu(R_P)$ 超过无风险收益率 R_F 的比例. 结果表示每增加 1 单位标准差的风险，可以获得多少超额收益数值越大，说明收益相对风险更高，投资更优。

重点考虑以绝对形式度量的总体风险。这种方法可以扩展到将 VAR 或者收益率的分位数作为分母来代替收益率的波动率。

【代码 *1.1*】: 我们基于（2022.1.1 到 2025.1.1）AAPL 和 SPY 真实的股票数据进行上述 SR 的计算和数据可视化分析，并进行两者的比较

2. 推广到相对风险度量上:The information ratio (IR): 平均收益率 P 超过基准收益率 B 的部分与 TEV 之间的比率:

$$IR = \frac{[\mu(R_P) - \mu(R_B)]}{\sigma(R_P - (R_B))}$$

追踪误差波动率可以从投资组合收益率和基准收益率的波动率 σ_P 和 σ_B 以及它们的相关系数 ρ 得到, 就差异而言方差为 $\omega^2 = \sigma_P^2 - 2\rho\sigma_P\sigma_B + \sigma_B^2$

IR(信息比率) 一般被用来在同一组中比较各个主动型基金经理, 缺点是 TEV (跟踪误差波动率) 无法对平均收益率进行调整

【代码 *1.2*】: 使用 AAPL 和 S&P 500 2022.1.2 到 2025.1.1 真实的数据**; Apple（AAPL）**股票的历史交易数据，计算两者的 **平均收益率和波动率，**通过信息比率（IR）比较其表现

混合资产

一个投资组合可以分配在两种资产上.Define w_i 为资产 i 的分配权重, 在完全投资情形下,$\sum_{i=1}^{N} w_i = 1$,N 为资产的数目. 即, 投资组合的权重之和必须等于 1.

通过权重来调节**投资组合的预期回报**和**波动率**这两个指标:

$$\sigma_p^2 = w_1^2\sigma_1^2 + 2w_1w_2\rho\sigma_1\sigma_2 + w_2^2\sigma_2^2 \qquad \mu_p = w_1\mu_1 + w_2\mu_2$$

可追踪一条代表混合投资组合风险和期望收益率的曲线，该曲线随权重改变。

【代码 *1.3*】展示了如何在股票和债券之间分配资产，以实现不同的风险-回报目标。

有效投资组合

更一般的问题，即大量股票 (例如在标准普尔 500 指数中的 N=500 只股票) 中的分散性如何计算。

假设条件: 所有资产遵循联合正态分布: 假设所有资产的回报分布是正态分布的, 因此, 投资组合的回报分布也可以通过 **两个参数**来总结: 即 **均值（预期回报）**和 **方差（波动率）**。

目标: 通过识别投资组合的**有效集**来解决多样化问题。有效集是指在给定预期回报的条件下，能够最小化风险（波动性）的投资组合集合。(**有效集** : 在**均值-方差空间**中的点, 代表了具有 **最佳风险-回报特征**的投资组合。有效集中的每个点对应一个特定的投资组合, 它通过权重（w）来定义，且在给定预期回报 μ_p 的情况下，能够最小化风险.)

最小化投资组合波动率

$\min_w \sigma_p^2$　其中:σ_p^2 是 **投资组合的方差**，也就是 **风险（波动率的平方）**。

目标 ：在**预期回报**为特定值 μ_p 的情况下，最小化 **投资组合的波动性** 。

约束条件: **条件 1：**投资组合的回报必须等于指定的值 k（给定预期回报）；**条件 2**：投资组合的权重之和必须为 1，保证了全额投资。

4. 资产定价理论

资本资产定价模型 CAPM

将股票的协方差结构简化成一个单因子模型，模型定义了股票 i 在 t 时刻的超额回报与市场回报的关系:

$$R_{i,t} - R_{f,t} = \alpha_i + \beta_i \left(R_{M,t} - R_{f,t}\right) + \epsilon_{i,t}, \quad t = 1, 2, \ldots, T$$

其中:$R_{i,t}$：股票 i 在时刻 t 的回报;　$R_{f,t}$: 无风险利率;　$R_{M,t}$：市场回报;　α_i: 截距项，表示管理技能 (对于主动管理的投资组合);　β_i: 斜率系数，表示系统性风险;　$\epsilon_{i,t}$: 误差项，代表个股特有的风险。

CAPM 假设:(1) 投资者具有相同的期望收益率，(2) 收益率的分布是正态的，(3) 资本市场是完美的，(4) 市场是均衡的。

协方差计算公式

有助于简化计算过程和风险分析

$$\mathrm{Cov}(R_i, R_j) = \mathrm{Cov}(\beta_i R_M + \epsilon_i, \beta_j R_M + \epsilon_j)$$

$$= \beta_i\beta_j \mathrm{Cov}(R_M, R_M) + \beta_i \mathrm{Cov}(R_M, \epsilon_j) + \beta_j \mathrm{Cov}(R_M, \epsilon_i) + \mathrm{Cov}(\epsilon_i, \epsilon_j) = \beta_i\beta_j\sigma^2(R_M)$$

在 CAPM 模型中，投资者的风险仅来自于市场风险，个股特有的风险是可以通过分散化得到规避的。

CML(capital market line)

表示了从无风险资产到市场投资组合的线性关系,CML 的斜率代表了市场组合的 Sharpe 比率。这个线条展示了投资者可以如何在现金和股票之间分配投资。

$$E(R_i) = R_F + \beta_i \left[E(R_M) - R_F\right]$$

$E(R_i)$: 资产 i 的预期收益;　R_F: 无风险利率;　β_i: 资产 i 的贝塔系数（衡量资产相对于市场的波动性）;　$E(R_M)$: 市场的预期收益;

CAPM 说明了任何有效的投资组合都应该位于这条直线上（CML），并且可以通过投资于无风险资产和市场组合来实现。

Treynor ratio (TR)（第二个业绩度量）

用于衡量投资组合的系统性风险调整后的回报。它与 Sharpe 比率类似，但区别在于，特雷诺比率更侧重于系统性风险。

$$TR = \frac{[\mu(R_P) - R_F]}{\beta_P}$$

$\mu(R_P)$: 投资组合的平均回报。　β_P: 投资组合的市场风险暴露。

如果 CAPM 成立，这个比率应当对所有资产都一样

TR 对于高 β 进行惩罚，SR 是对高 α 进行惩罚。β 度量了投资组合的风险贡献, 是一个对充分分散的投资组合的很好的业绩度量。SR 可以用来调整未充分分散的投资组合的业绩。因此，SR 和 IR 的一个主要缺陷是它们对系统风险无法进行惩罚。因此，产生了第三个业绩度量: Jensen’s alpha

【代码 1.4】和【代码 1.5】：沿用【代码 *1.1*】*Sharpe ratio (SR)* 的数据集，分别进行 TR 和 Jensen’s alpha 的计算。

Jensen’s alpha（第三个业绩度量）

$$\alpha_P = \mu(R_P) - R_f - \beta_P\left[\mu(R_M) - R_f\right]$$

可以从 CAPM 中直接得出（一个合适的业绩度量）

CAPM 起源于一个单因子模型。

这可以推广到多因子的情形

1. 建立一个风险结构，假设资产收益率的变动归因于多种风险来源。假设有 K 个风险因子，CAMP 公式可以推广为:

$$R_i = \alpha_i + \beta_{i,1}y_1 + ... + \beta_{i,K}y_K + \epsilon_i$$

同样假设残差项 ϵ 和结构中的各因子以及彼此之间不相关

2. APT 进一步假设资产的预期回报可以通过以下公式来表示:

$$E[R_i] = R_f + \sum_{k=1}^{K} \beta_{ik}\lambda_k$$

其中:$E[R_i]$ 是资产 i 的预期回报； R_f 是无风险利率; λ_k 是第 k 个风险因子的市场价格； β_{ik} 是资产 i 对因子 k 的敏感度。

【代码 1.6】通过多个因子（MSFT、AAPL、GOOGL）来预测资产的期望回报: 通过回归分析来计算超额收益，回归模型估计每个因子的敏感度 β_{ik} 以及因子的风险溢价 λ_k

5. 风险管理的评估

CAPM 强调，投资者不喜欢系统性风险。因此，**系统性风险**是唯一需要考虑的定价风险。

MM 定理（Modigliani-Miller 定理）基于多个假设：不存在金融摩擦，如财务困境成本、税收、资本市场准入等；金融市场参与者之间不存在信息不对称。

然而，在实际操作中，如果这些假设不成立，风险管理可以增加企业的价值。

风险管理如何增加价值

1. **对冲可以增加价值**, 有助于避免财务困境成本（cost of financial distress）；
2. **企业所得税（Corporate income taxes）**可能是一种摩擦。假设没有税收结转（carry-over provisions)，那么在好年景时，企业所得税很高，而在亏损年份时无法获得税收抵扣。稳定收益有助于降低平均税负，从而增加企业价值。
3. **外部融资（External financing）**的成本通常高于企业内部资金。若企业未进行风险对冲，可能导致利润波动较大：**好年景时**，项目可通过内部资金融资；**坏年景时**，企业通常依赖外部融资；若外部融资成本过高，一些有潜力的项目可能无法获得资金支持，从而导致投资不足。
4. **信息不对称**（Information asymmetry）的一种形式归因于管理权的代理成本，投资者雇佣经理人作为代理人，赋予他们一定的经营决策权。另一种由大股东具有决定公司业务的权力引起的。

第二部分: 定量分析

第 2 章：概率论基础

概率论是金融风险管理中的核心工具之一，它为理解和量化金融市场中的不确定性提供了数学基础。无论是股票价格的波动、汇率的变动，还是信用违约事件的发生，都可以通过概率论中的随机变量和分布函数来描述和分析。本章介绍概率论的基本概念和工具，帮助掌握如何刻画随机变量的行为，并理解不同分布函数在金融风险管理中的应用。

首先，从一元分布函数开始，介绍随机变量的基本性质，包括均值、方差、偏度和峰度等矩的概念。这些矩不仅能够描述随机变量的中心位置和离散程度，还能反映其分布的形状特征。接着，探讨多元分布函数，特别是联合分布和协方差的概念，这些工具在分析多个随机变量之间的关系时尤为重要。

最后，介绍一些重要的分布函数，包括均匀分布、正态分布、对数正态分布、学生 t 分布、二项分布和泊松分布。每种分布都有其独特的性质和应用场景。例如，正态分布在资产收益率建模中占据重要地位，而对数正态分布则常用于描述股票价格的变化。学生 t 分布适用于小样本数据分析，而泊松分布则用于描述稀有事件的发生次数。

1. 刻画随机变量

1.1 一元分布函数

随机变量：在金融市场中，股票价格、汇率、收益率等均可视为随机变量。随机变量可以是离散的（如掷骰子的结果）或连续的（如股票收益率）。

分布函数：描述随机变量 X 的累积分布函数 $F(x) = P(X \leq x)$。分布函数是单调递增的，且满足 $F(-\infty) = 0$ 和 $F(\infty) = 1$。

密度函数：对于连续随机变量，密度函数 $f(x)$ 是分布函数的导数，即 $f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$。密度函数满足 $f(x) \geq 0$ 且 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$。

1.2 矩

均值：随机变量的期望值 $\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$。均值是随机变量的中心位置，反映了随机变量的“平均”行为。

方差：衡量随机变量的离散程度 $\sigma^2 = V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - E(X)]^2 f(x)dx$。方差越大，随机变量的波动性越大。

偏度：衡量分布的不对称性 $\gamma = \left(\int_{-\infty}^{\infty}[x-E(X)]^3 f(x)dx\right)/\sigma^3$。偏度为 0 表示分布对称，正偏度表示右尾较长，负偏度表示左尾较长。

峰度：衡量分布的尾部厚度 $\delta = \left(\int_{-\infty}^{\infty}[x-E(X)]^4 f(x)dx\right)/\sigma^4$。峰度为 3 表示与正态分布相同，大于 3 表示尾部较厚，小于 3 表示尾部较薄。

2. 多元分布函数

2.1 联合分布

联合分布函数：描述两个随机变量 X_1 和 X_2 的联合分布 $F_{12}(x_1,x_2) = P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2)$。联合分布函数反映了两个随机变量同时取值的概率。

联合密度函数：对于连续随机变量，联合密度函数 $f_{12}(x_1,x_2)$ 是联合分布函数的导数。联合密度函数满足 $f_{12}(x_1,x_2) \geq 0$ 且 $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{12}(x_1,x_2)dx_1dx_2 = 1$。

2.2 协方差和相关系数

协方差：衡量两个随机变量的线性关系 $\mathrm{Cov}(X_1,X_2) = \sigma_{12} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[x_1-E(X_1)][x_2-E(X_2)]f_{12}(x_1,x_2)dx_1dx_2$。协方差为正表示两个变量同向变化，为负表示反向变化。

相关系数：标准化协方差 $\rho(X_1,X_2) = \frac{\mathrm{Cov}(X_1,X_2)}{\sigma_1\sigma_2}$，取值范围为 $[-1,1]$。相关系数为 1 表示完全正相关，为-1 表示完全负相关，为 0 表示不相关。

3. 随机变量函数

3.1 随机变量的线性变换

线性变换：对于随机变量 $Y = a + bX$，期望和方差分别为 $E(Y) = a + bE(X)$ 和 $V(Y) = b^2V(X)$。线性变换不改变随机变量的分布形状，但会改变其位置和尺度。

3.2 随机变量之和

期望和方差：对于随机变量之和 $Y = X_1 + X_2$，期望为 $E(Y) = E(X_1) + E(X_2)$，方差为 $V(Y) = V(X_1) + V(X_2) + 2\mathrm{Cov}(X_1,X_2)$。如果 X_1 和 X_2 不相关，则方差简化为 $V(Y) = V(X_1) + V(X_2)$。

3.3 随机变量的投资组合

投资组合收益率:对于多个随机变量的线性组合 $Y=\sum_{i=1}^{N} w_i X_i$,期望收益率为 $E(Y)=\sum_{i=1}^{N} w_i \mu_i$，方差为 $\sigma_p^2=\sum_{i=1}^{N} w_i^2 \sigma_i^2+2\sum_{i=1}^{N}\sum_{j<i}^{N} w_i w_j \sigma_{ij}$。投资组合的方差不仅取决于单个资产的方差，还取决于资产之间的协方差。

3.4 随机变量的乘积

期望和方差:对于随机变量的乘积 $Y=X_1X_2$,期望为 $E(Y)=E(X_1)E(X_2)+\mathrm{Cov}(X_1,X_2)$,方差为 $V(Y)=E(X_1)^2V(X_2)+V(X_1)E(X_2)^2+V(X_1)V(X_2)$。如果 X_1 和 X_2 独立，则期望简化为 $E(Y)=E(X_1)E(X_2)$，方差简化为 $V(Y)=E(X_1)^2V(X_2)+V(X_1)E(X_2)^2$。

4. 重要的分布函数

4.1 均匀分布

密度函数：$f(x)=\frac{1}{b-a}$，均值为 $\frac{a+b}{2}$，方差为 $\frac{(b-a)^2}{12}$。均匀分布在区间 $[a,b]$ 内每个点的概率密度相等。

应用场景：均匀分布常用于模拟随机事件的发生时间，例如在某个时间段内随机到达的顾客数量。在金融领域，均匀分布可用于模拟随机利率或随机波动率。

4.2 正态分布

密度函数：$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right]$，均值为 μ，方差为 σ^2。正态分布是对称的，且其形状由均值和方差决定。

应用场景：正态分布在金融领域广泛应用，例如股票收益率、汇率波动等。正态分布假设资产收益率服从正态分布，这使得风险管理和资产定价模型（如 CAPM）得以简化。

4.3 对数正态分布

密度函数：$f(x)=\frac{1}{x\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(\ln(x)-\mu)^2\right]$，均值为 $\exp[\mu+\frac{1}{2}\sigma^2]$。对数正态分布适用于描述正随机变量，如股票价格。

应用场景：对数正态分布常用于模拟股票价格、房地产价格等正随机变量。由于股票价格不能为负，且其波动性随价格增加而增加，对数正态分布能够很好地描述这些特征。

4.4 学生 t 分布

密度函数：$f(x)=\frac{\Gamma[(k+1)/2]}{\Gamma(k/2)}\cdot\frac{1}{\sqrt{k\pi}}\cdot\frac{1}{(1+x^2/k)^{(k+1)/2}}$，方差为 $\frac{k}{k-2}$。学生 t 分布比正态分布具有更厚的尾部，适用于小样本数据的分析。

应用场景：学生 t 分布常用于小样本数据的统计分析，例如在金融领域，当样本数据较少时，使用学生 t 分布可以更好地估计资产收益率的分布。此外，学生 t 分布也用于构建置信区间和假设检验。

4.5 二项分布

密度函数：$f(x)=\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}$，均值为 pn，方差为 $p(1-p)n$。二项分布描述了 n 次独立伯努利试验中成功的次数。

应用场景：二项分布常用于描述离散事件的发生次数，例如在金融领域，二项分布可用于模拟信用违约事件的发生次数。假设每个借款人违约的概率为 p，那么在 n 个借款人中，违约人数的分布可以用二项分布来描述。

4.6 泊松分布

密度函数：$f(x)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$，均值和方差均为 λ。泊松分布适用于描述在固定时间或空间内事件发生的次数。

应用场景：泊松分布广泛应用于描述稀有事件的发生次数，例如电话接线员接电话的频数、网站访问量、保险索赔次数等。在金融领域，泊松分布可用于模拟市场冲击事件的发生次数，例如金融危机或市场崩盘的次数。

5. 均值分布

中心极限定理

定理内容：对于 n 个独立同分布的随机变量，其均值 $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 的分布收敛于正态分布 $N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$。中心极限定理是统计学中最重要的定理之一，它解释了为什么许多自然现象服从正态分布。

应用场景：中心极限定理在金融领域的应用非常广泛。例如，投资组合的收益率可以看作是多个资产收益率的加权平均，根据中心极限定理，当资产数量足够大时，投资组合的收益率分布将趋近于正态分布。这使得风险管理模型（如 VaR）能够基于正态分布假设进行计算。

第 3 章: 统计学基础

在概率论的理论框架中，我们通常假设随机现象的分布形式已知，并在此基础之上构建严谨的数学推演。然而现实世界的复杂性往往超越这一理想假设——风险管理者面对的实际问题中，概率模型可能完全未知，或虽知其分布类型却难以确定具体参数。例如在分析股票市场收益率时，我们不仅需要判断其服从正态分布还是厚尾的 t 分布，还需从历史数据中估计波动率等关键参数。这种从有限观测数据反推总体特征的过程，正是统计学区别于概率论的核心使命。

统计推断的实现往往依赖于抽样的艺术：通过对研究对象全体（如全球股指收益变动）的局部观测，我们试图穿透随机性的迷雾捕捉其内在规律。这一过程必然伴随着不确定性——当我们基于样本数据判断美国与欧洲股票指数的相关性是否显著，或评估风险因子波动率的时变特性时，结论的可靠性需要用概率度量。这种量化不确定性的智慧，孕育了统计推断的两大基石：参数估计与假设检验。

参数估计致力于从样本数据中提炼未知参数的合理取值，如同考古学家从残片复原古器全貌；假设检验则像法庭上的举证交锋，通过概率计算评估经验推测的可信度。这两大工具共同构成了风险管理的统计基石：前者帮助我们构建风险模型，后者则验证模型假设的合理性。

这一章将系统梳理统计推断的核心工具。首先将深入探讨参数估计的原理与假设检验的逻辑框架；然后则转向更具综合性的回归分析方法，揭示统计解释的常见误区。通过对统计理论的重新审视，旨在为风险管理实践构建更坚实的分析基础。

1. 参数估计

1.1 参数定义与分布假设

风险管理始于风险因子的定义（如股价、利率变动），并为其选取概率分布模型。设风险因子为随机变量 X，观测序列为 $x_1, x_2, \ldots, x_T$。例如，假设 $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$，需估计未知参数 μ（均值）和 σ（标准差）。独立同分布（i.i.d.）假设常被采用，但需通过数据预处理（如将价格序列转为收益率序列）满足条件。

分布验证：若假设正态分布，其峰度应等于 3。通过计算样本峰度 $\hat{\kappa}$ 并检验其与 3 的偏离程度，可评估分布假设的合理性。

1.2 估计量的性质与构造

点估计：均值与方差的估计量分别为：

$$\hat{\mu} = \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T} x_i, \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{T-1}\sum_{i=1}^{T}(x_i - \hat{\mu})^2 \tag{1}$$

其中，$T-1$ 确保无偏性。

估计量评价准则：

1. **无偏性**：$\mathbb{E}[\hat{\theta}]=\theta$（如样本均值无偏，但若权重为 $\frac{T}{T+1}$ 则渐近无偏）；
2. **有效性**：方差最小化；
3. **一致性**：$\hat{\theta} \xrightarrow{T\to\infty} \theta$。

样本均值的分布：

$$\hat{\mu} \sim \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{T}\right) \quad \text{(依中心极限定理渐近成立)} \tag{2}$$

1.3 假设检验与置信区间

t 检验：当总体方差未知时，构造统计量：

$$t = \frac{\hat{\mu}-\mu_0}{\hat{\sigma}/\sqrt{T}} \sim t(T-1) \tag{3}$$

拒绝域由显著性水平 α（常取 5%）决定。

置信区间：

$$\mu \in \left[\hat{\mu} \pm z_{\alpha/2} \cdot \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{T}}\right] \tag{4}$$

其中 $z_{\alpha/2}$ 为标准正态分布分位数（如 95% 置信水平对应 1.96）。

方差检验：若 $X \sim \mathcal{N}(\mu,\sigma)$，则：

$$\frac{(T-1)\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(T-1) \tag{5}$$

置信区间通过卡方分布分位数构造。

1.4 实例：日元汇率波动分析

数据：1990–2009 年月度日元/美元汇率变动（$T=240$），得 $\hat{\mu}=-0.18\%$，$\hat{\sigma}=3.24\%$。

1. **均值检验**：
$$\mathrm{se}(\hat{\mu}) = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{T}} = 0.21\%, \quad t = \frac{-0.18\%}{0.21\%} = -0.86 \tag{6}$$
因 $|t|<1.96$，不拒绝 $\mu=0$ 的假设。

2. **波动率置信区间**：
$$\sigma \in \left[3.24\% \pm 1.96 \times \frac{3.24\%}{\sqrt{2\times 240}}\right] = [2.95\%, 3.53\%] \tag{7}$$
卡方分布修正后区间为 $[2.949\%, 3.530\%]$，验证正态近似有效性。

1.5 显著性水平与两类错误

决策风险的本质:

假设检验的核心矛盾体现为两类错误的权衡:

- **第一类错误(Type I Error)**: 拒绝正确的零假设,概率记为 α。例如,VAR 模型实际有效却被误判为失效,导致不必要的模型调整成本。
- **第二类错误(Type II Error)**: 接受错误的零假设,概率记为 β。例如,低估风险的缺陷模型未被识别,可能引发重大财务损失。

权衡: 降低 α 会增加 β。监管需权衡两类错误的成本。

表 1: 两类错误决策矩阵

决策	模型正确	模型错误
接受	OK	第二类错误(纳伪)
拒绝	第一类错误(拒真)	OK

1.6 分布假设检验 Jarque-Bera 检验:

$$\mathrm{JB} = T\left(\frac{\hat{\gamma}^2}{6} + \frac{(\hat{\kappa}-3)^2}{24}\right) \sim \chi^2(2) \tag{8}$$

若 JB 统计量超过临界值(如 5.99),则拒绝正态假设。

日元汇率案例: 样本偏度 $\hat{\gamma} = -0.47$,峰度 $\hat{\kappa} = 5.82$,计算得 $\mathrm{JB} = 88.4$,显著拒绝正态性,表明收益率呈厚尾分布。

【*代码 3.1*】我们基于模拟的日元汇率收益率数据,分别进行了提到的参数估计、假设检验和分布验证,并通过可视化手段直观呈现统计特征。

2. 回归分析:变量关系的统计建模

在风险管理中,揭示变量间的因果关系或统计关联是构建风险映射的核心任务。回归分析通过量化自变量对因变量的解释力,为风险暴露的替代、投资组合对冲及预测提供了系统工具。本节将回归分析纳入统计推断框架,阐释其参数估计逻辑与模型验证方法。

2.1 二元线性回归与最小二乘估计

对于二元关系 $y_t = \alpha + \beta x_t + \epsilon_t$,核心目标是从观测数据 $\{x_t, y_t\}_{t=1}^T$ 中估计参数 α(截距)和 β(斜率)。普通最小二乘法(OLS)通过最小化残差平方和 $\sum \epsilon_t^2$ 求解最优参数:

$$\hat{\beta} = \frac{\sum(x_t-\bar{x})(y_t-\bar{y})}{\sum(x_t-\bar{x})^2}, \quad \hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta}\bar{x}$$

该估计量在高斯-马尔可夫假设（误差与自变量独立、同方差）下满足无偏性、有效性，且服从正态分布：

$$\hat{\beta} \sim \mathcal{N}\left(\beta, \frac{\sigma_\epsilon^2}{\sum(x_t - \bar{x})^2}\right)$$

2.2 模型拟合与假设检验

拟合优度：决定系数 $R^2 = 1 - \frac{\text{SSE}}{\text{SSY}}$ 度量模型解释力，其中 $R^2 = \rho(y, x)^2$。调整 R^2 修正变量数增加导致的过拟合：

$$R_{\text{adj}}^2 = 1 - \frac{\text{SSE}/(T-N)}{\text{SSY}/(T-1)}$$

系数显著性检验：斜率系数 β 的 t 统计量：

$$t = \frac{\hat{\beta}}{\text{se}(\hat{\beta})} \sim t(T-2)$$

若 $|t| > 2$（5% 显著性水平），拒绝 $\beta = 0$ 的假设，表明变量间存在统计显著关系。

模型假设验证：需检验残差是否满足：

- 无自相关（Durbin-Watson 检验）；
- 同方差性（White 检验）；
- 正态性（Jarque-Bera 检验）。

2.3 自回归与风险的时间依赖性

一阶自回归模型 $y_t = \alpha + \beta y_{t-1} + \epsilon_t$ 可捕捉风险因子的时间持续性。若 $\beta > 0$，冲击具有持续性，风险随时间累积速度超过 $\sqrt{T}$；若 $\beta < 0$，则呈现均值回复特性。例如，日元汇率日收益率的自回归系数若为 0.10，则今日 2% 的涨幅将预测明日 0.2% 的上涨。

2.4 多元回归与多重共线性挑战

拓展至多元模型 $y = X\beta + \epsilon$，参数估计为：

$$\hat{\beta} = (X^\top X)^{-1} X^\top y$$

当自变量高度相关（多重共线性）时，$X^\top X$ 接近奇异矩阵，导致估计方差膨胀，系数稳定性下降。可通过方差膨胀因子（VIF）诊断：

$$\text{VIF}_j = \frac{1}{1 - R_j^2}$$

其中 R_j^2 为第 j 个自变量对其他自变量的回归 R^2。若 VIF > 10，需剔除变量或采用正则化方法。

2.5 回归分析与统计推断的衔接

回归模型本质是条件期望的参数化表达，其估计与检验可视为统计推断的综合应用：

- **参数估计**：OLS 是矩估计的特例，利用样本矩 $\mathbb{E}[x\epsilon] = 0$ 构建方程；
- **假设检验**：t 检验验证变量关联性，F 检验评估模型整体显著性；
- **分布外推**：中心极限定理保证大样本下系数估计的正态性，与前期均值检验逻辑一致。

总结：回归分析通过结构化建模将风险管理中的复杂关系降维，但其有效性依赖于统计假设的验证。从二元到多元的拓展揭示了变量交互的复杂性，而自回归模型则凸显了时间维度风险的动态特征。这些工具与参数估计、假设检验共同构成风险量化管理的统计基石，为从数据噪声中提取稳健规律提供了方法论支持。

【代码 *3.2*】我们基于基于模拟的股票收益率数据，展示回归分析的全流程，涵盖参数估计、假设检验、模型诊断与风险管理应用。

第 4 章: 蒙特卡洛方法

蒙特卡洛模拟：出于风险管理的目的进行随机变量的模拟。

1. 随机变量的模拟

模拟涉及人工变量的生成, 包括股票价格、汇率、债券收益率以及商品价格。

模拟马尔可夫过程

在有效市场里, 价格遵循特别的随机过程 (马尔可夫过程), **未来价格的分布仅仅依赖于当前价格，与过去的历史信息没有任何关系**。

这些流程由以下部分组成 (从简单到复杂):

(1) 维纳过程描述了一个变量 Δz 在时间间隔 Δt 内的变化，其均值变化为零，方差与 Δt 成正比：

$$\Delta z \sim N(0, \Delta t)$$

如果 ϵ 是标准正态分布变量 $N(0,1)$，则可以写成：

$$\Delta z = \epsilon\sqrt{\Delta t}$$

此外，增量 Δz 在不同时间区间内是相互独立的。

(2) 广义维纳过程是在维纳过程的基础上，增加了一个确定性趋势 a 和波动性 b：

$$\Delta x = a\Delta t + b\Delta z$$

特殊情况：鞅过程（Martingale） 如果 $a = 0$，即无漂移项，则：$E(\Delta x) = 0$

这意味着未来值的期望等于当前值：$E(x_T) = x_0$

(3) 伊藤过程 (Ito Process) 是在广义维纳过程的基础上, 让漂移项 $a(x,t)$ 和波动项 $b(x,t)$ 依赖于当前变量值 x 和时间 t：

$$\Delta x = a(x,t)\Delta t + b(x,t)\Delta z$$

由于此过程的分布仅依赖于当前状态 x 和时间 t，而不依赖于过去的数据，因此它是一个马尔可夫过程（Markov Process）。此外，该过程的创新部分（变化）仍然服从正态分布。

The Geometric Brownian Motion(几何布朗运动)

几何布朗运动 (GBM)**【代码 *4.1*】是伊藤过程的一个特殊例子**, 对变量 S 的描述为:

$$\Delta S = \mu S \Delta t + \sigma \Delta z$$

因为其趋势和波动率与 S 的当前价值成比例, 这个过程是几何的.

Drawing Random Variables(生成随机变量)

生成随机变量的方法涉及累积概率分布函数的逆函数。

服从任意分布函数的随机变量都可以通过累积分布函数的逆函数得到

Simulating Yields(模拟收益率)

几何布朗运动广泛用于股票和货币价格的建模，但不适用于债券市场。债券价格通常显示出长期回归到面值的特性（即假设没有违约的情况下，到期时本金会返还），而 GBM 模型不适合这种行为（没有这样的均值回归）。

利率动态可以通过如下方程建模：(单因子模型 (one-factor model))

$$\Delta r_t = \kappa(\theta - r_t)\Delta t + \sigma r_t^{\gamma} \Delta z_t \quad \Delta z_t\textbf{是标准的维纳过程}$$

该公式更具有普遍性，因为它在方差函数中包括了收益率的幂

该模型的性质:

(1) 对 θ 的长期价值显示了均值回归性质, 参数 k 控制了均值回归的速度。(利率升高产生一个负漂移)

(2) 波动过程: 这个模型包括 Vasicek model(瓦西塞克模型)$\gamma = 0$. 收益率变化被认为服从正态分布。这个模型特别适合于推导许多固定收益产品的闭式解。

$\gamma = 1$, 对数正态模型, 在初始收益率接近于零时比正态模型更合适

$\gamma = 0.5$,**Cox-Ingersoll-Ross（CIR）模型**. 这个模型假定收益率呈现均值回归，并且波动性会随利率水平而变化。研究表明，此时，它为数据提供了很好的拟合。

这类模型被称为**均衡模型** (equilibrium model)。这种模型基于经济变量的假设，推导出短期利率的过程。模型生成一个预测的期限结构，其形态依赖于模型参数和初始短期利率。然而，这类模型的缺点在于它们不够灵活，无法提供一个很好的拟合，以适应今天的期限结构。

无套利模型：这类模型设计目的是与今天的期限结构保持一致，收益率曲线作为输入来估计参数。

早期的无套利模型之一是 Ho-Lee 模型：

$$\Delta r_t = \theta(t)\Delta t + \sigma \Delta z_t \quad \theta(t)\text{是选择的时间函数使得模型与初始期限结构一致}$$

随后发展出了 Hull-White 模型，加入了均值回归:

$$\Delta r_t = [\theta(t) - ar_t]\Delta t + \sigma \Delta z_t$$

Heath-Jarrow-Morton (HJM) 模型进一步假设波动性也是时间的函数。

HJM 模型是一个用于建模利率曲线（即收益率曲线）的动态模型，尤其在固定收益领域中广泛应用。它是无套利定价理论的一部分，旨在确保在利率的变动过程中没有机会进行无风险套利。

假设利率曲线的每个点都随时间而变化，且在每个时刻，利率曲线的变动受到某些市场因素的影响。这些因素在 HJM 模型中通过随机过程来描述，通常使用维纳过程（Wiener Process）来捕捉不确定性。

利率曲线的动态演变：HJM 模型的核心方程可以表示为：

$$\frac{\partial F(t,T)}{\partial t} = \mu(t,T) + \sigma(t,T) \cdot \epsilon(t,T)$$

其中： $F(t,T)$ 表示到期日为 T 的远期利率（forward rate）。(t,T) 是远期利率的漂移项，代表利率曲线的趋势性变化。$\sigma(t,T)$ 是波动性函数，代表利率曲线的随机性或不确定性。$\epsilon(t,T)$ 是一个标准的随机过程，通常表示为维纳过程（Wiener Process）。

应用：

定价和对冲： HJM 模型广泛用于定价固定收益产品，如债券、利率期货、利率互换等。

期限结构建模： 用于建模长期利率的演变，帮助金融机构和投资者预测利率的未来变化。

无套利模型的优缺点：

优点：能够根据当前的市场数据调整，并适应实时变化。

缺点：这些模型的参数不一定在不同的日期之间保持一致，这可能导致一些不合理的假设。

Binomial Trees(二叉树)

在某些场景下，使用离散树模型来描述价格的不确定性更加适合。特别是在**价格只能向上或向下波动的情况下**，二叉树模型为常用的**离散模型**。

二叉树模型可以视为几何布朗运动在离散情况下的等价模型。在二叉树模型中，时间范围 T 被分割为 n 个时间间隔（每个时间间隔为 $\Delta t = \frac{T}{n}$）。在每一个节点，价格被假定以概率 p 向上波动，或以概率 $1-p$ 向下波动。

在模型中，u 代表价格上升的比例，d 代表价格下降的比例，p 是价格向上波动的概率。通过以下公式进行选择，使得在一个小时间间隔内，模型的期望回报和方差与连续模型相匹配：

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}, \quad d = \frac{1}{u}, \quad p = \frac{e^{\mu\Delta t} - d}{u - d}$$

这些参数的选择是为了确保在每个时间间隔内，价格的期望回报和方差与连续模型（例如几何布朗运动）相等。