金融风险管理

阅读随记

学院　　未来科学与工程学院

2025 年 2 月 1 日

目录

PART ONE : Foundations of Risk Management （风险管理基础）

CHAPTER 1：Foundations of Risk Management（风险管理）

1.Risk measurement （风险测量）

一些基础概念:

标准差就是波动率

The value at risk (VAR): 较大损失发生概率很小的临界点。

Absolute risk （绝对风险）：以相对于初始投资价值的差额来衡量。absolute risk in dollar terms is

$$\sigma(\triangle P) = \sigma(\triangle P/P) \times P = \sigma(R_P) \times P$$

Relative risk (相对风险): 相对于基准指数 B 来衡量的。偏差/追踪错误

$$e = R_P - R_B$$

相对风险为:$\sigma(e)P = [\sigma(R_P - R_B)] \times P = \omega \times P \quad \omega$ 是跟踪误差波动率 (TEV)

2.Evaluation of the risk measurement process(风险管理过程的评估)

风险管理的一个主要作用是估计未来收益和损失的分布. **建立未来收益率的分布？**

将风险进行**分类**: **已知的已知风险**（由可确定并可度量的风险组成）、**已知的未知风险**(风险已知或者应当已知但却没有被风险经理恰当度量的模型缺陷: **模型风险**、**流动性风险**) 以及**未知的未知风险**

3.Portfolio Construction(投资组合构建)

多种资产比较: 投资组合的构建过程，这涉及期望收益率和风险的结合

如何在单一衡量标准中根据风险调整绩效?(某种资产上的单独投资选择)

同样的方法可应用于过去或者未来的业绩调整，过去的业绩调整要用到历史平均业绩值，未来的业绩调整要用到预测的数值。

1. Sharpe ratio (SR) 最简单的度量 【代码 *1.1*】

$SR = \frac{[\mu(R_P)-R_F]}{\sigma(R_P)}$, 平均收益率 $\mu(R_P)$ 超过无风险收益率 R_F 的比例. 结果表示每增加 1 单位标准差的风险，可以获得多少超额收益数值越大，说明收益相对风险更高，投资更优。

重点考虑以绝对形式度量的总体风险。这种方法可以扩展到将 VAR 或者收益率的分位数作为分母来代替收益率的波动率。

2. 推广到相对风险度量上:The information ratio (IR): 【代码 *1.2*】平均收益率 P 超过基准收益率 B 的部分与 TEV 之间的比率:

$$IR = \frac{[\mu(R_P) - \mu(R_B)]}{\sigma(R_P - (R_B))}$$

追踪误差波动率可以从投资组合收益率和基准收益率的波动率 σ_P 和 σ_B 以及它们的相关系数 ρ 得到, 就差异而言方差为 $\omega^2 = \sigma_P^2 - 2\rho\sigma_P\sigma_B + \sigma_B^2$

IR(信息比率) 一般被用来在同一组中比较各个主动型基金经理, 缺点是 TEV (跟踪误差波动率) 无法对平均收益率进行调整

混合资产

一个投资组合可以分配在两种资产上.Define w_i 为资产 i 的分配权重, 在完全投资情形下,$\sum_{i=1}^{N} w_i = 1$,N 为资产的数目. 即, 投资组合的权重之和必须等于 1.

通过权重来调节**投资组合的预期回报**和**波动率**这两个指标:

$$\sigma_p^2 = w_1^2\sigma_1^2 + 2w_1w_2\rho\sigma_1\sigma_2 + w_2^2\sigma_2^2 \qquad \mu_p = w_1\mu_1 + w_2\mu_2$$

可追踪一条代表混合投资组合风险和期望收益率的曲线，该曲线随权重改变，【代码 *1.3*】展示了如何在股票和债券之间分配资产，以实现不同的风险-回报目标。

有效投资组合

更一般的问题，即大量股票 (例如在标准普尔 500 指数中的 N=500 只股票) 中的分散性如何计算。

假设条件: 所有资产遵循联合正态分布: 假设所有资产的回报分布是正态分布的, 因此, 投资组合的回报分布也可以通过 **两个参数**来总结: 即 **均值（预期回报）**和 **方差（波动率）**。

目标: 通过识别投资组合的**有效集**来解决多样化问题。有效集是指在给定预期回报的条件下，能够最小化风险（波动性）的投资组合集合。(**有效集** : 在**均值-方差空间**中的点, 代表了具有 **最佳风险-回报特征**的投资组合。有效集中的每个点对应一个特定的投资组合, 它通过权重（w）来定义，且在给定预期回报 μ_p 的情况下，能够最小化风险.)

最小化投资组合波动率

$\min_w \sigma_p^2$ 其中:σ_p^2 是 **投资组合的方差**，也就是 **风险（波动率的平方）**。

目标 ：在**预期回报**为特定值 μ_p 的情况下，最小化 **投资组合的波动性** 。

约束条件: **条件 1：**投资组合的回报必须等于指定的值 k（给定预期回报）；**条件 2**：投资组合的权重之和必须为 1，保证了全额投资。

4.Asset Pricing Theory(资产定价理论)

资本资产定价模型 CAPM

将股票的协方差结构简化成一个单因子模型，模型定义了股票 i 在 t 时刻的超额回报与市场回报的关系:

$$R_{i,t} - R_{f,t} = \alpha_i + \beta_i \left(R_{M,t} - R_{f,t}\right) + \epsilon_{i,t}, \quad t = 1, 2, \ldots, T$$

其中:$R_{i,t}$：股票 i 在时刻 t 的回报； $R_{f,t}$: 无风险利率； $R_{M,t}$：市场回报； α_i: 截距项，表示管理技能 (对于主动管理的投资组合); β_i: 斜率系数，表示系统性风险； $\epsilon_{i,t}$: 误差项，代表个股特有的风险。

CAPM 假设:(1) 投资者具有相同的期望收益率，(2) 收益率的分布是正态的，(3) 资本市场是完美的，(4) 市场是均衡的。

协方差计算公式

有助于简化计算过程和风险分析

$$\mathrm{Cov}(R_i, R_j) = \mathrm{Cov}(\beta_i R_M + \epsilon_i, \beta_j R_M + \epsilon_j)$$

$$= \beta_i\beta_j \mathrm{Cov}(R_M, R_M) + \beta_i \mathrm{Cov}(R_M, \epsilon_j) + \beta_j \mathrm{Cov}(R_M, \epsilon_i) + \mathrm{Cov}(\epsilon_i, \epsilon_j) = \beta_i\beta_j\sigma^2(R_M)$$

在 CAPM 模型中，投资者的风险仅来自于市场风险，个股特有的风险是可以通过分散化得到规避的。

CML(capital market line)

表示了从无风险资产到市场投资组合的线性关系,CML 的斜率代表了市场组合的 Sharpe 比率。这个线条展示了投资者可以如何在现金和股票之间分配投资。【代码 *1.4*】

$$E(R_i) = R_F + \beta_i \left[E(R_M) - R_F\right]$$

$E(R_i)$: 资产 i 的预期收益;　R_F: 无风险利率;　β_i: 资产 i 的贝塔系数（衡量资产相对于市场的波动性）;　$E(R_M)$: 市场的预期收益;

CAPM 说明了任何有效的投资组合都应该位于这条直线上（CML），并且可以通过投资于无风险资产和市场组合来实现。

Treynor ratio (TR)（第二个业绩度量）

用于衡量投资组合的系统性风险调整后的回报。它与 Sharpe 比率类似，但区别在于，特雷诺比率更侧重于系统性风险。

$$TR = \frac{[\mu(R_P) - R_F]}{\beta_P}$$

$\mu(R_P)$: 投资组合的平均回报。　β_P: 投资组合的市场风险暴露。

如果 CAPM 成立，这个比率应当对所有资产都一样

TR 对于高 β 进行惩罚，SR 是对高 α 进行惩罚。β 度量了投资组合的风险贡献, 是一个对充分分散的投资组合的很好的业绩度量。SR 可以用来调整未充分分散的投资组合的业绩。因此，SR 和 IR 的一个主要缺陷是它们对系统风险无法进行惩罚。因此，产生了第三个业绩度量: Jensen’s alpha:

Jensen’s alpha（第三个业绩度量）

$$\alpha_P = \mu(R_P) - R_f - \beta_P\,[\mu(R_M) - R_f]$$

可以从 CAPM 中直接得出（一个合适的业绩度量）

CAPM 起源于一个单因子模型。

这可以推广到多因子的情形

1. 建立一个风险结构，假设资产收益率的变动归因于多种风险来源。假设有 K 个风险因子，CAMP 公式可以推广为:

$$R_i = \alpha_i + \beta_{i,1}y_1 + ... + \beta_{i,K}y_K + \epsilon_i$$

同样假设残差项 ϵ 和结构中的各因子以及彼此之间不相关

2. APT 进一步假设资产的预期回报可以通过以下公式来表示:

$$E[R_i] = R_f + \sum_{k=1}^{K} \beta_{ik}\lambda_k$$

其中:$E[R_i]$ 是资产 i 的预期回报;　R_f 是无风险利率;　λ_k 是第 k 个风险因子的市场价格;　β_{ik} 是资产 i 对因子 k 的敏感度。

5.Value of risk management(风险管理的评估)

CAPM 强调，投资者不喜欢系统性风险。因此，**系统性风险**是唯一需要考虑的定价风险。

MM 定理（Modigliani-Miller 定理）基于多个假设：不存在金融摩擦，如财务困境成本、税收、资本市场准入等；金融市场参与者之间不存在信息不对称。

然而，在实际操作中，如果这些假设不成立，风险管理可以增加企业的价值。

风险管理如何增加价值

1. **对冲可以增加价值**, 有助于避免财务困境成本（cost of financial distress）；
2. **企业所得税（Corporate income taxes）**可能是一种摩擦。假设没有税收结转（carry-over provisions），那么在好年景时，企业所得税很高，而在亏损年份时无法获得税收抵扣。稳定收益有助于降低平均税负，从而增加企业价值。
3. **外部融资（External financing）**的成本通常高于企业内部资金。若企业未进行风险对冲，可能导致利润波动较大：**好年景时**，项目可通过内部资金融资；**坏年景时**，企业通常依赖外部融资；若外部融资成本过高，一些有潜力的项目可能无法获得资金支持，从而导致投资不足。
4. **信息不对称（**Information asymmetry）的一种形式归因于管理权的代理成本，投资者雇佣经理人作为代理人，赋予他们一定的经营决策权。另一种由大股东具有决定公司业务的权力引起的。

PART TWO:Quantitative Analysis （定量分析）

CHAPTER 2:Fundamentals of Probability（概率论基础）

CHAPTER 3: Fundamentals of Statistics（统计学基础）

CHAPTER 4:Monte Carlo Methods(蒙特卡洛方法)

蒙特卡洛模拟：出于风险管理的目的进行随机变量的模拟。

1.Simulation with one random variable(随机变量的模拟)

模拟涉及人工变量的生成, 包括股票价格、汇率、债券收益率以及商品价格。

模拟马尔可夫过程

在有效市场里, 价格遵循特别的随机过程 (马尔可夫过程), **未来价格的分布仅仅依赖于当前价格，与过去的历史信息没有任何关系**。

这些流程由以下部分组成 (从简单到复杂):

(1)The Wiener process(维纳过程) 描述了一个变量 Δz 在时间间隔 Δt 内的变化，其均值变化为零，方差与 Δt 成正比：

$$\Delta z \sim N(0, \Delta t)$$

如果 ϵ 是标准正态分布变量 $N(0,1)$，则可以写成：

$$\Delta z = \epsilon\sqrt{\Delta t}$$

此外，增量 Δz 在不同时间区间内是相互独立的。

(2) 广义维纳过程（Generalized Wiener Process）是在维纳过程的基础上，增加了一个确定性趋势 a 和波动性 b：

$$\Delta x = a\Delta t + b\Delta z$$

特殊情况：鞅过程（Martingale） 如果 $a = 0$，即无漂移项，则：$E(\Delta x) = 0$

这意味着未来值的期望等于当前值：$E(x_T) = x_0$

(3) 伊藤过程 (Ito Process) 是在广义维纳过程的基础上, 让漂移项 $a(x,t)$ 和波动项 $b(x,t)$ 依赖于当前变量值 x 和时间 t：

$$\Delta x = a(x,t)\Delta t + b(x,t)\Delta z$$

由于此过程的分布仅依赖于当前状态 x 和时间 t，而不依赖于过去的数据，因此它是一个马尔可夫过程（Markov Process）。此外，该过程的创新部分（变化）仍然服从正态分布。

The Geometric Brownian Motion(几何布朗运动)

几何布朗运动 (GBM)**【代码 *4.1*】是伊藤过程的一个特殊例子**, 对变量 S 的描述为:

$$\Delta S = \mu S\Delta t + \sigma\Delta z$$

因为其趋势和波动率与 S 的当前价值成比例, 这个过程是几何的.

Drawing Random Variables(生成随机变量)

生成随机变量的方法涉及累积概率分布函数的逆函数。

服从任意分布函数的随机变量都可以通过累积分布函数的逆函数得到

Simulating Yields(模拟收益率)

几何布朗运动广泛用于股票和货币价格的建模，但不适用于债券市场。债券价格通常显示出长期回归到面值的特性（即假设没有违约的情况下，到期时本金会返还），而 GBM 模型不适合这种行为（没有这样的均值回归）。

利率动态可以通过如下方程建模：(单因子模型 (one-factor model))

$$\Delta r_t = \kappa(\theta - r_t)\Delta t + \sigma r_t^{\gamma}\Delta z_t \quad \Delta z_t\textbf{是标准的维纳过程}$$

该公式更具有普遍性，因为它在方差函数中包括了收益率的幂

该模型的性质:

(1) 对 θ 的长期价值显示了均值回归性质, 参数 k 控制了均值回归的速度。(利率升高产生一个负漂移)

(2) 波动过程: 这个模型包括 Vasicek model(瓦西塞克模型)$\gamma = 0$. 收益率变化被认为服从正态分布。这个模型特别适合于推导许多固定收益产品的闭式解。

$\gamma = 1$, 对数正态模型, 在初始收益率接近于零时比正态模型更合适

$\gamma = 0.5$,**Cox-Ingersoll-Ross（CIR）模型**. 这个模型假定收益率呈现均值回归，并且波动性会随利率水平而变化。研究表明，此时，它为数据提供了很好的拟合。

这类模型被称为**均衡模型** (equilibrium model)。这种模型基于经济变量的假设，推导出短期利率的过程。模型生成一个预测的期限结构，其形态依赖于模型参数和初始短期利率。然而，这类模型的缺点在于它们不够灵活，无法提供一个很好的拟合，以适应今天的期限结构。

无套利模型：这类模型设计目的是与今天的期限结构保持一致，收益率曲线作为输入来估计参数。

早期的无套利模型之一是 Ho-Lee 模型：

$$\Delta r_t = \theta(t)\Delta t + \sigma\Delta z_t \quad \theta(t)\text{是选择的时间函数使得模型与初始期限结构一致}$$

随后发展出了 Hull-White 模型，加入了均值回归:

$$\Delta r_t = [\theta(t) - ar_t]\Delta t + \sigma\Delta z_t$$

Heath-Jarrow-Morton (HJM) 模型进一步假设波动性也是时间的函数。

HJM 模型是一个用于建模利率曲线（即收益率曲线）的动态模型，尤其在固定收益领域中广泛应用。它是无套利定价理论的一部分，旨在确保在利率的变动过程中没有机会进行无风险套利。

假设利率曲线的每个点都随时间而变化，且在每个时刻，利率曲线的变动受到某些市场因素的影响。这些因素在 HJM 模型中通过随机过程来描述，通常使用维纳过程（Wiener Process）来捕捉不确定性。

利率曲线的动态演变：HJM 模型的核心方程可以表示为：

$$\frac{\partial F(t,T)}{\partial t} = \mu(t,T) + \sigma(t,T)\cdot\epsilon(t,T)$$

其中： $F(t,T)$ 表示到期日为 T 的远期利率（forward rate）。(t,T) 是远期利率的漂移项，代表利率曲线的趋势性变化。$\sigma(t,T)$ 是波动性函数，代表利率曲线的随机性或不确定性。$\epsilon(t,T)$ 是一个标准的随机过程，通常表示为维纳过程（Wiener Process）。

应用：

定价和对冲： HJM 模型广泛用于定价固定收益产品，如债券、利率期货、利率互换等。

期限结构建模： 用于建模长期利率的演变，帮助金融机构和投资者预测利率的未来变化。

无套利模型的优缺点：

优点：能够根据当前的市场数据调整，并适应实时变化。

缺点：这些模型的参数不一定在不同的日期之间保持一致，这可能导致一些不合理的假设。

Binomial Trees(二叉树)

在某些场景下，使用离散树模型来描述价格的不确定性更加适合。特别是在**价格只能向上或向下波动的情况下**，二叉树模型为常用的**离散模型**。

二叉树模型可以视为几何布朗运动在离散情况下的等价模型。在二叉树模型中，时间范围 T 被分割为 n 个时间间隔（每个时间间隔为 $\Delta t = \frac{T}{n}$）。在每一个节点，价格被假定以概率 p 向上波动，或以概率 $1-p$ 向下波动。

在模型中，u 代表价格上升的比例，d 代表价格下降的比例，p 是价格向上波动的概率。通过以下公式进行选择，使得在一个小时间间隔内，模型的期望回报和方差与连续模型相匹配：

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}, \quad d = \frac{1}{u}, \quad p = \frac{e^{\mu\Delta t} - d}{u - d}$$

这些参数的选择是为了确保在每个时间间隔内，价格的期望回报和方差与连续模型（例如几何布朗运动）相等。

2.Implementation simulation(模拟实现)