



金融风险管理

代码结果展示分析

未来科学与工程学院

目录

第一部分: 风险管理基础	1
第 1 章: 风险管理	1
【代码 1.1】 Sharpe ratio (SR)	1
【代码 1.2】 The information ratio (IR)	2
【代码 1.3】 Mixing Assets	3
【代码 1.4】 TR	5
【代码 1.5】 Jensen' s alpha	6
【代码 1.6】 APT	6
第二部分: 定量分析	9
第 2 章: 概率论基础	9
【代码 2.1】 偏度与峰度分析 (FRM 试题 2009——第 2-3 题)	9
【代码 2.2】 正态分布概率计算 (FRM 试题 2009——第 2-18 题)	10
【代码 2.3】 对数正态分布置信区间 (FRM 试题 2002——第 125 题)	12
【代码 2.4】 二项分布概率计算 (FRM 试题 2006——第 84 题)	13
第 3 章: 统计学基础	15
【代码 3.1】 基于模拟数据的简单统计方法展示	15
【代码 3.2】 基于模拟数据的回归分析与统计推断	17
第 4 章: 蒙特卡洛方法	22
【代码 4.1】 GBM(几何布朗运动)	22

第一部分：风险管理基础

第 1 章：风险管理

【代码 1.1】Sharpe ratio (SR)

选取 AAPL 和 SPY 2022.1.1 到 2025.1.1 真实的股票数据进行 SR 的计算和数据可视化分析，并进行两者的比较

得到：

AAPL 夏普比率: 0.51, 年化收益率: 16.22%, 年化标准差: 28.03%

SPY 夏普比率: 0.47, 年化收益率: 10.19%, 年化标准差: 17.57%

可视化结果：

价格走势：AAPL vs SPY 价格随时间化。(图1)

收益率分布：直方图显示每日收益率的分布情况。(图2)

累计收益率：累乘累计收益率，展示长期表现。(图3)

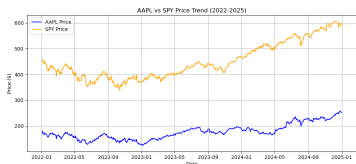


图 1: Price trend

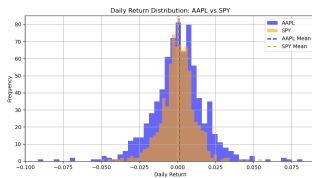


图 2: Daily return distribution



图 3: Cumulative return

两张图的夏普比率比较，见下图4：

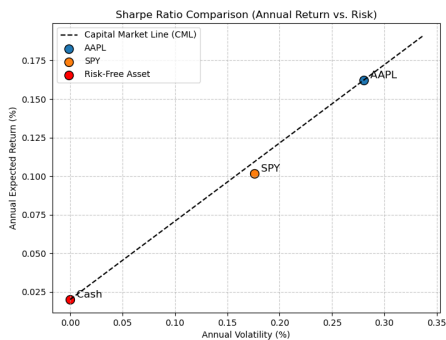


图 4: Sharpe Ratio Comparison

X 轴：年波动率（Annual Volatility, 代表风险）即价格的波动性。

Y 轴：年期望收益率（Annual Expected Return, 代表收益）。期望收益率越高，意味着资产长期上涨的可能性更大。

虚线：绘制一条从无风险利率起始的直线（资本市场线, CML），代表了风险资产与无风险资产的最优组合。斜率等于 AAPL 的 Sharpe Ratio。

展示了 AAPL（苹果）和 SPY（标普 500 ETF）在风险和收益上的关系，同时绘制了**资本市场线 (CML)**，用于衡量资产的风险调整收益。

AAPL（苹果，蓝色点）：波动率较高（约 0.28）；期望收益率最高（约 16%）；远离无风险资产，说明风险较高但潜在收益大。

SPY（标普 500 ETF，橙色点）：波动率较低（约 0.18）；期望收益率较低（约 10%）；在 CML 上，说明风险调整收益较合理。

无风险资产（Cash，红色点）：无波动性（0%），收益率固定（约 2%），代表美国国债、现金存款等低风险投资。

结论：AAPL，虽然风险更大，但回报率更高；SPY，虽然回报较低，但更稳定。无风险资产（Cash）收益率仅 2%。

【代码 1.2】The information ratio (IR)

数据集：

使用 AAPL 和 S&P 500 2022.1.2 到 2025.1.1 真实的数据；**Apple (AAPL)** 股票的历史交易数据，用于分析 Apple 股票的价格波动，计算其收益率，并与 S&P 500 进行比较；**S&P 500** 数据此数据集包含了 S&P 500 指数的历史数据，此数据集代表美国股市的整体表现，是一个广泛使用的市场基准。用于与单一股票（Apple）进行比较，衡量其超越市场表现的能力。

通过这两个数据集，计算了 **AAPL 股票**（Portfolio P）的 **平均收益率**和 **波动率**；计算了 **S&P 500 指数**（Benchmark B）的 **平均收益率**和**波动率**；通过信息比率（IR）比较了 AAPL 与 S&P 500 的表现，了解它们的风险调整后超额回报。

结果：

表 1: IR 结果

	Average	Volatility	Performance
Portfolio P (AAPL)	0.000446	0.017038	0.008608
Benchmark B (S&P 500)	0.000271	0.011032	NaN

结果分析：

平均收益率 (Average)：

Portfolio P (AAPL) 的平均收益率为 0.000446，即 AAPL 每日的平均收益率约为 0.0446%。

Benchmark B (S&P 500) 的平均收益率为 0.000271，即 S&P 500 每日的平均收益率约为 0.0271%。

从这些数据来看，AAPL 的平均收益率略高于 S&P 500，表明在所选时间段内，AAPL 的表现优于整体市场。

波动率 (Volatility):

Portfolio P (AAPL) 的波动率为 0.017038，意味着 AAPL 的价格波动较大，相较于基准 S&P 500 来说，风险略高。

Benchmark B (S&P 500) 的波动率为 0.011032，说明 S&P 500 的波动性相对较低。

这表明，尽管 AAPL 的平均回报率高于 S&P 500，但其波动性较大，投资 AAPL 可能面临更高的风险。

信息比率 (Performance / IR):

Portfolio P (AAPL) 的信息比率为 0.008608，意味着 AAPL 超越基准 S&P 500 的回报与其波动性之比。

Benchmark B (S&P 500) 的信息比率为 'NaN'，因为基准本身没有超越自己的回报，因此无法计算。

信息比率表明 AAPL 在相对于其风险的超额回报方面的表现。0.008608 说明，尽管 AAPL 的波动性较高，但它仍提供了一个相对较小的超额回报。

【代码 1.3】Mixing Assets

使用 *AAPL_data.csv* 和 *US_national_debt_data.csv* 2022.1.2 到 2025.1.1 真实的数据，*US_national_debt_data.csv* 数据集包含了美国国债的历史市场数据。

得到结果:

表 2: Mixing Assets 结果

AAPL Expected Return:	0.04%
AAPL Volatility:	1.70%
US Debt Expected Return:	0.58%
US Debt Volatility:	3.99%
Correlation between AAPL and US Debt:	-0.02

以下是对 AAPL (Apple) 和 US Debt (美国国债) 的分析:

1. **AAPL (Apple):** 预期回报: 0.04% 波动率: 1.70%

AAPL 的预期回报率非常低，为 0.04%（每日），波动率较高。虽然报率相对较低，但 AAPL 是一个高波动性股票，它的回报通常会有较大波动，可能在其他时间段表现得更好。

2. US Debt (美国国债): 预期回报: 0.58% 波动率: 3.99%

US Debt (美国国债) 的预期回报为 0.58%（每日），比 AAPL 的回报要高。在正常情况下，债券的回报通常较为平稳，回报较低，因为它们通常是低风险的资产。然而，这个结果表明，在所选的时间段内，美国国债的回报超过了 AAPL，这是因为美国国债作为一个低波动性资产，提供了更稳定的回报。

AAPL 的预期回报结果看起来不太合理，尤其是在股票的长期收益率预期通常较高的情况下，这可能是受到数据时间段比较短等个因素的影响

3. 相关性: -0.02

AAPL 和 US Debt 之间的相关性为 -0.02，表示这两个资产之间几乎没有相关性回报几乎是独立的。即，当 AAPL 表现较好时，US Debt 并没有显著的反向表现，反之亦然。

组合优化:

要将 AAPL 和 US Debt 作为组合的资产，并在这两者之间进行权重配置，可以根据不同的投资目标（如最大化回报或最小化风险）来调整投资组合的权重。

风险-回报分析图（图5）：展示了不同资产组合的预期回报和波动性（风险）

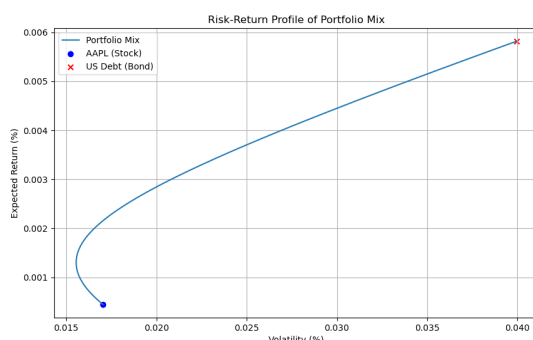


图 5: Risk-Reward Analysis

图5分析:

X 轴: 波动率 (Volatility %) 通常也称为风险。波动率越大，资产的价格变动幅度越大，投资风险越高。图中显示的波动率范围大约是从 **0.015% 到 0.040%**。

Y 轴: 预期回报 (Expected Return %)，预期回报是通过加权平均各资产的回报率计算的，显示了投资组合所期望的收益。图表的预期回报范围大约是从 **0.0001% 到 0.005%**。

蓝色曲线：投资组合混合 (Portfolio Mix) 展示了 **AAPL 和 US Debt 在不同权重组合下的风险-回报关系**。这条曲线代表了资产配置的不同权重下，投资组合的风险与回报。曲线的形状表明，当组合中 AAPL 和 US Debt 的权重发生变化时，投资组合的回报和波动率会发生相应的变化。

蓝色点：AAPL (股票) 单独作为资产的点。该点的波动率较大，预期回报较低，显示了 AAPL 股票的风险和回报特性。AAPL 在图中的位置表示它具有相对较高的波动性，但其预期回报较低。

红色叉：US Debt (美国国债) 单独作为资产的点。该点的波动率较低，预期回报较高，显示了美国国债作为低风险资产的特性。由于美国国债是低风险资产，它的波动率较低，回报率较稳定。

【代码 1.4】TR

沿用【代码 1.1】*Sharpe ratio (SR)* 的数据集进行 TR 的计算，通过计算每日收益率、回归分析：计算 AAPL 的 Beta 值、计算每日平均回报、计算 Treynor 比率等步骤，得到结果：

表 3: TR 结果

Asset	β	每日平均回报	Treynor 比率
AAPL	1.2256	0.0006	0.0005
SPY	1.0000	0.0004	0.0003

结果分析：

AAPL 的 β 值：1.2256 AAPL 的 β 值大于 1，表示其相对于市场的波动性更大，即 AAPL 的回报变化大于市场的回报变化。

SPY 的 β 值：1.0000 由于 SPY 是一个指数基金，代表市场的整体表现，因此其 β 值为 1。它的波动性与市场完全一致。

AAPL 的 Treynor 比率：0.0005 表明每单位的系统性风险 (β) 所带来的回报是相对较小的。由于 AAPL 的 β 比 SPY 更大，所以它的 Treynor 比率自然也比 SPY 更高。

SPY 的 Treynor 比率：0.0003，表示它的系统性风险调整后的回报相对较低，因为 SPY 的 β 值是 1，代表市场的风险。

【代码 1.5】Jensen's alpha

沿用【代码 1.1】*Sharpe ratio (SR)* 的数据集，经过计算每日收益率、回归分析来计算 β 、计算每个资产的平均回报等步骤计算 Jensen's Alpha，**得到结果：AAPL 的 Jensen's Alpha: 0.0002**。

Jensen's Alpha 为正，意味着 AAPL 的回报超出了 CAPM 模型预期的回报。这表示 AAPL 的风险调整后回报相对于市场回报（根据 CAPM 模型计算）有轻微的超额收益。

【代码 1.6】APT

表 4: APT 数据集

	角色	作用
AAPL, MSFT, GOOGL	股票回报数据（因变量）	计算每只股票的回报率，作为回归模型的因变量
market_data	市场回报（风险因子）	用于计算市场回报率，作为回归模型中的第一个因子
risk_free_rate	无风险利率	用于计算市场风险溢价（市场回报减去无风险利率）
inflation_rate	通货膨胀率（风险因子）	作为额外的风险因子，参与回归分析
gdp_data	GDP（风险因子）	作为额外的宏观经济风险因子，参与回归分析
unemployment_rate	失业率（风险因子）	作为额外的宏观经济风险因子，参与回归分析

通过多个因子来预测资产的期望回报: 通过回归分析来计算超额收益 (MSFT、AAPL、GOOGL)，回归模型估计每个因子的敏感度 β_{ik} 以及因子的风险溢价 λ_k

得到结果:

结果分析:

1. MSFT (微软)

R-squared: 0.639 表示模型可以解释 63.9% 的超额回报波动。这表明宏观经济因素对 MSFT 超额回报的解释能力较强。

常数项 (const): 0.1637 表示当所有宏观经济因素为零时，MSFT 的预期超额回报为 16.37%。

无风险利率 (GS10): -0.0081 (10 年期国债收益率) 的系数为负，表示无风险利率上升时，MSFT 的回报会减少。每增加 1 个基点 (即 0.01%) 的无风险利率，MSFT 的超额

MSFT回归结果

OLS Regression Results

Dep. Variable:	Excess_Return_MSFT	R-squared:	0.639			
Model:	OLS	Adj. R-squared:	0.583			
Method:	Least Squares	F-statistic:	11.69			
Date:	Tue, 21 Jan 2025	Prob (F-statistic):	1.66e-05			
Time:	16:50:52	Log-Likelihood:	184.36			
No. Observations:	31	AIC:	-198.7			
Df Residuals:	26	BIC:	-191.5			
Df Model:	4					
Covariance Type:	nonrobust					
	coef	std err	t	P> t	[0.025	0.975]
const	0.1637	0.071	2.309	0.029	0.018	0.309
GS10	-0.0081	0.002	-3.779	0.001	-0.013	-0.004
UNRATE	-0.0020	0.001	-2.141	0.042	-0.004	-0.000
CPIAUCSL	-0.0012	0.001	-1.921	0.066	-0.003	0.001
GDP	7.852e-06	4.33e-06	1.815	0.081	-1.84e-06	1.67e-05
Omnibus:	1.749	Durbin-Watson:		1.909		
Prob(Omnibus):	0.417	Jarque-Bera (JB):		1.015		
Skew:	-0.439	Prob(JB):		0.602		
Kurtosis:	3.130	Cond. No.				

图 6: MSFT 回归结果

AAPL回归结果						
OLS Regression Results						
Dep. Variable:	Excess_Return_AAPL	R-squared:	0.349			
Model:	OLS	Adj. R-squared:	0.249			
Method:	Least Squares	F-statistic:	3.483			
Date:	Tue, 21 Jan 2025	Prob (F-statistic):	0.0289			
Time:	16:50:52	Log Likelihood:	91.341			
No. Observations:	31	AIC:	-172.7			
Df Residuals:	26	BIC:	-165.5			
Df Model:	4					
Covariance Type:	nonrobust					
	coef	std err	t	P> t	[0.025	0.975]
const	0.1978	0.108	1.833	0.078	-0.024	0.428
GS10	-0.0042	0.003	-1.278	0.213	-0.011	0.003
UNRATE	-0.0020	0.001	-1.414	0.169	-0.005	0.001
CPIAUCSL	-0.0015	0.001	-1.485	0.149	-0.003	0.001
GDP	8.38e-06	6.58e-06	1.273	0.214	-5.15e-06	2.19e-05
=====						
Omnibus:	0.463	Durbin-Watson:		1.889		
Prob(Omnibus):	0.797	Jarque-Bera (JB):		0.467		
Skew:	0.256	Prob(JB):		0.792		
Kurtosis:	2.684	Cond. No.		8.84e+05		

图 7: AAPL 回归结果

GOOGL回归结果									
OLS Regression Results									
Dep. Variable:		Excess_Return_GOOGL		R-squared:		0.352			
Model:		OLS		Adj. R-squared:		0.252			
Method:		Least Squares		F-statistic:		3.557			
Date:		Tue, 21 Jan 2025		Prob (F-statistic):		0.0199			
Time:		16:50:52		Log-Likelihood:		91.889			
No. Observations:		31		AIC:		-173.8			
Df Residuals:		26		BIC:		-166.6			
Df Model:		4							
Covariance Type:		nonrobust							
	coef	std err	t	P> t	[0.025	0.975]			
const	0.1802	0.106	1.788	0.101	-0.038	0.398			
GS10	-0.0062	0.003	-1.921	0.066	-0.013	0.000			
UNRATE	-0.0009	0.001	-0.637	0.530	-0.004	0.002			
CPIAUCSL	-0.0014	0.001	-1.474	0.152	-0.003	0.001			
GDP	8.868e-06	6.47e-06	1.371	0.182	-4.43e-06	2.22e-05			
=====									
Omnibus:	0.158	Durbin-Watson:		1.842					
Prob(Omnibus):	0.924	Jarque-Bera (JB):		0.136					
Skew:	0.127	Prob(JB):		0.934					
Kurtosis:	2.888	Cond. No.		8.86e+05					

图 8: GOOGL 回归结果

回报将减少 0.0081。

失业率 (UNRATE): -0.0020 对 MSFT 回报有显著的负向影响，P 值为 0.042，表明失业率上升时，MSFT 的回报会下降。

通货膨胀率 (CPIAUCSL): -0.0012 对 MSFT 回报有负向影响，P 值为 0.066，接近常规显著性水平 (0.05)，表明它可能对 MSFT 回报产生一定影响，但影响较小。

GDP 增长 (GDP): 7.852e-06 GDP 的影响对 MSFT 超额回报较小，但系数为正 (7.852e-06)，表示 GDP 增长对 MSFT 的回报有轻微的正向影响，P 值为 0.081，接近 0.05，表明这一影响可能在某些情况下显著。

统计显著性:

P 值：无风险利率 (GS10) 和失业率 (UNRATE) 的影响具有显著性，P 值小于 0.05。通货膨胀率和 GDP 的影响接近显著性 (P 值接近 0.05)。

Durbin-Watson: 1.909，表明回归模型没有明显的自相关问题。

2. AAPL (苹果)

R-squared: 0.349 表示模型可以解释 AAPL 超额回报波动的 34.9%。这表明宏观经济因素对 AAPL 超额回报的解释能力较弱。

常数项 (const): 0.1978 表示当所有宏观经济因素为零时，AAPL 的预期超额回报为 19.78%。

无风险利率 (GS10): -0.0042 负系数表明无风险利率上升时，AAPL 的回报会减少，然而 P 值为 0.213，表明这一影响在统计上并不显著。

失业率 (UNRATE): -0.0020 对 AAPL 超额回报的影响不显著 (P 值 =0.169)，表明失业率对 AAPL 的回报影响较小。

通货膨胀率 (CPIAUCSL): -0.0015 CPI 的负系数表明通货膨胀率上升时，AAPL 的回报会下降，但 P 值为 0.149，表示这一影响不显著。

GDP 增长 (GDP): 8.38e-06 GDP 对 AAPL 的影响也不显著 (P 值 =0.214)，说明

GDP 增长对 AAPL 的回报影响微弱。

统计显著性：

P 值：大部分宏观经济因子（如无风险利率、失业率、通货膨胀率和 GDP）的影响不显著（P 值较大），表明这些因子对 AAPL 超额回报的影响较小。

Durbin-Watson：1.809，表明模型没有显著的自相关问题。

3. GOOGL（谷歌）

R-squared：0.352 表示模型可以解释 GOOGL 超额回报波动的 35.2%。与 AAPL 相比，这个值稍微更高，但仍表明宏观经济因素对 GOOGL 超额回报的解释能力较弱。

常数项 (const)：0.1802 表示当所有宏观经济因素为零时，GOOGL 的预期超额回报为 18.02%。

无风险利率 (GS10)：-0.0062 GS10 对 GOOGL 的回报有负向影响，P 值为 0.066，接近 0.05，表明无风险利率的变化对 GOOGL 超额回报有一定影响。

失业率 (UNRATE)：-0.0009 对 GOOGL 的回报影响不显著（P 值 = 0.530），表明失业率对 GOOGL 的回报没有明显影响。

通货膨胀率 (CPIAUCSL)：-0.0014 CPI 对 GOOGL 回报的影响不显著（P 值 = 0.152），表明通货膨胀率对 GOOGL 超额回报的影响较小。

GDP 增长 (GDP)：8.868e-06 GDP 对 GOOGL 的影响也不显著（P 值 = 0.182），意味着 GDP 的变化对 GOOGL 超额回报没有显著影响。

统计显著性：

P 值：无风险利率的影响接近显著性（P 值 = 0.066），但其他宏观经济因子的影响并不显著。

Durbin-Watson：1.842，表明模型没有显著的自相关问题。

总结：

1. **MSFT（微软）**的回报受宏观经济因素的影响较大，尤其是无风险利率（GS10）和失业率（UNRATE）。这些因子的影响是显著的，表明 MSFT 的回报与这些宏观经济因素密切相关。

2. **AAPL（苹果）和 GOOGL（谷歌）**的回报对宏观经济因子的反应较小。大多数宏观经济因子（如无风险利率、失业率、通货膨胀率和 GDP）的影响在统计上不显著，表明它们对这两只股票的回报影响较弱。

从回归结果来看，MSFT 受宏观经济因素影响的程度更大，而 AAPL 和 GOOGL 受这些因素的影响较小，可能需要更多的公司特定因素来解释它们的回报波动。

第二部分：定量分析

第 2 章：概率论基础

【代码 2.1】偏度与峰度分析（FRM 试题 2009——第 2-3 题）

问题描述： 分析师获得两个投资组合的收益率分布特征：

投资组合	偏度 (Skewness)	峰度 (Kurtosis)
A	-1.6	1.9
B	0.8	3.2

分析师声明：

- 组合 A 的峰度高于正态分布（即具有尖峰特征）
- 组合 B 具有较厚的左尾（即左偏分布）

选项：

- (a) 两个说法都正确
- (b) 仅 A 的说法正确
- (c) 仅 B 的说法正确
- (d) 两个说法都不正确

分析过程：

1. 峰度分析：

- 正态分布的峰度为 3（超额峰度为 0）
- 组合 A 峰度 = 1.9 < 3 → 实际为低峰态 (platykurtic)
- 结论：分析师对 A 的陈述错误

2. 偏度分析：

- 负偏度 (<0) 表示左尾厚，正偏度 (>0) 表示右尾厚
- 组合 B 偏度 = 0.8 > 0 → 实际为右偏分布
- 结论：分析师对 B 的陈述错误

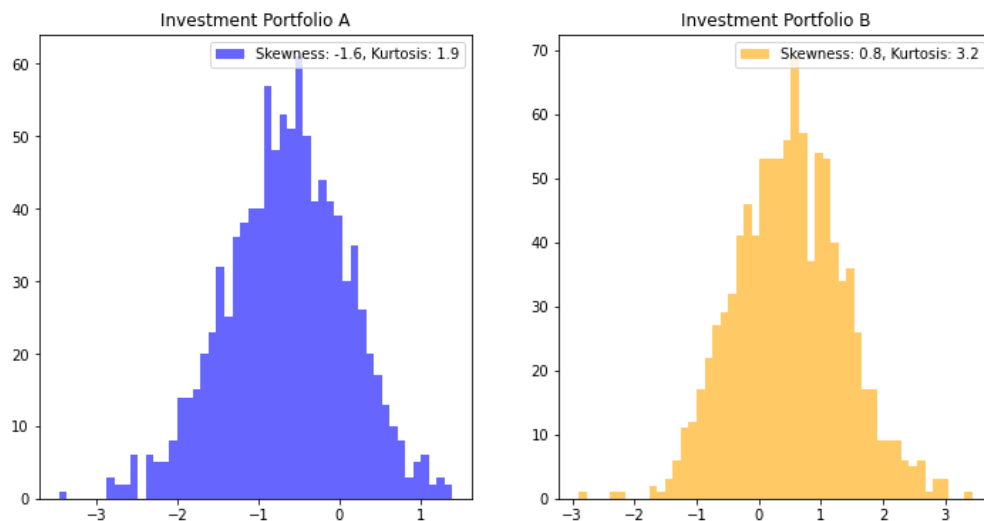


图 9: 投资组合分布特征对比 (红色虚线表示正态分布)

最终结论：两个陈述均不正确，正确答案为 d 。

【代码 2.2】正态分布概率计算 (FRM 试题 2009——第 2-18 题)

问题描述：给定 $X \sim N(\mu = 80, \sigma = 24)$ ，求 $P(X < 32 \cup X > 116)$ 的概率值。

选项：

- (a) 4.56%
- (b) 8.96%
- (c) 13.36%
- (d) 18.15%

解题步骤：

1. 标准化计算：

$$Z_{32} = \frac{32 - 80}{24} = -2.0$$

$$Z_{116} = \frac{116 - 80}{24} = 1.5$$

2. 查表求概率：

- $P(X < 32) = \Phi(-2.0) = 2.28\%$
- $P(X > 116) = 1 - \Phi(1.5) = 1 - 0.9332 = 6.68\%$

3. 概率求和：

$$\begin{aligned}\text{总概率} &= P(X < 32) + P(X > 116) \\ &= 2.28\% + 6.68\% \\ &= 8.96\%\end{aligned}$$

关键验证：

- 通过 68-95-99.7 法则验证：
- $P(\mu \pm 2\sigma) = 95\% \rightarrow$ 外部概率应为 5%
- 计算结果 8.96% 与之接近（因非对称区间）

最终结论：正确答案为 \boxed{b} 。

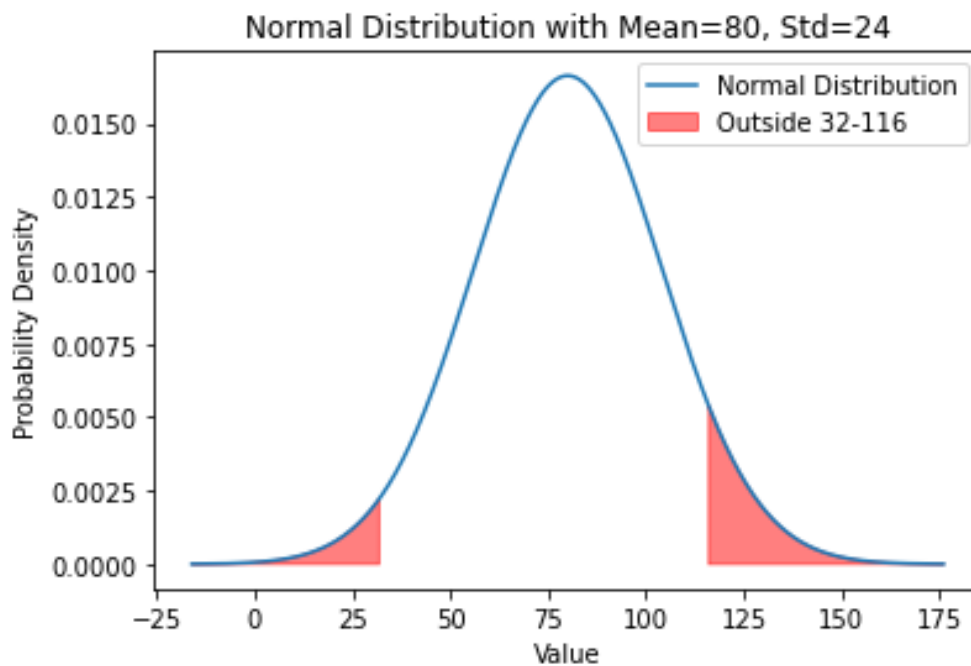


图 10: 正态分布概率计算示意图（阴影部分为所求概率）

【代码 2.3】对数正态分布置信区间 (FRM 试题 2002——第 125 题)

问题描述： 股票价格 $S = 100 \exp(r)$ ，其中 $r \sim N(\mu = 0.1, \sigma^2 = 0.2)$ 。求 95% 置信区间。

选项：

- (a) [67.57, 147.99]
- (b) [70.80, 149.20]
- (c) [74.68, 163.56]
- (d) [102.18, 119.53]

推导过程：

1. 参数转换：

$$\sigma = \sqrt{0.2} \approx 0.4472$$

$$\text{关键值} : z_{0.025} = 1.96$$

2. 置信区间计算：

$$\begin{aligned}\text{下限} &= 100 \times \exp(0.1 - 1.96 \times 0.4472) \\ &= 100 \times \exp(-0.7765) \approx 74.68 \\ \text{上限} &= 100 \times \exp(0.1 + 1.96 \times 0.4472) \\ &= 100 \times \exp(0.9765) \approx 163.56\end{aligned}$$

经济意义解释：

- 由于 σ 较大 (0.4472)，导致价格区间宽度大
- 均值 0.1 对应 $S_0 e^{0.1} = 110.52$ ，但分布右偏

最终结论： 正确答案为 \boxed{c} 。

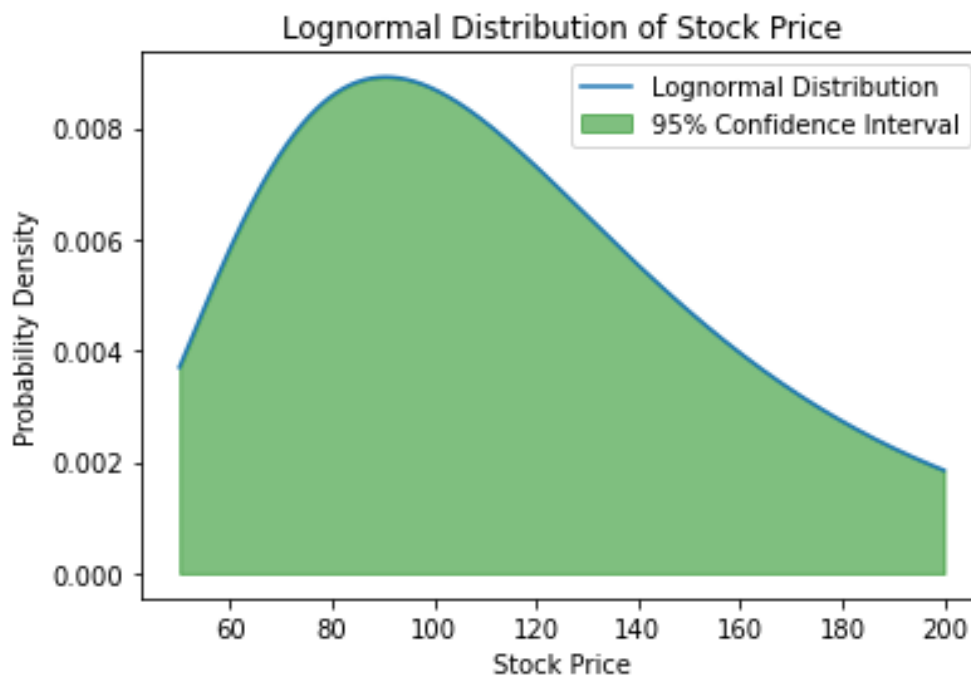


图 11: 股票价格的对数正态分布 (红色虚线标记 95%CI)

【代码 2.4】二项分布概率计算 (FRM 试题 2006——第 84 题)

问题描述: 6 道四选一选择题 (每题正确概率 $p = 0.25$), 求猜对少于 2 题的概率。

选项:

- (a) 0.46%
- (b) 23.73%
- (c) 35.60%
- (d) 53.39%

计算方法:

1. 二项分布公式:

$$P(k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$$

2. 具体计算：

$$P(k=0) = C_6^0(0.25)^0(0.75)^6 = 1 \times 1 \times 0.1780 = 17.80\%$$

$$P(k=1) = C_6^1(0.25)^1(0.75)^5 = 6 \times 0.25 \times 0.2373 = 35.60\%$$

$$P(k < 2) = 17.80\% + 35.60\% = 53.40\%$$

近似验证：

- 当 n 较大时可用正态近似，但本题 $n = 6$ 更适合精确计算
- 通过概率总和验证： $\sum_{k=0}^6 P(k) = 1$

最终结论：正确答案为 \boxed{d} 。

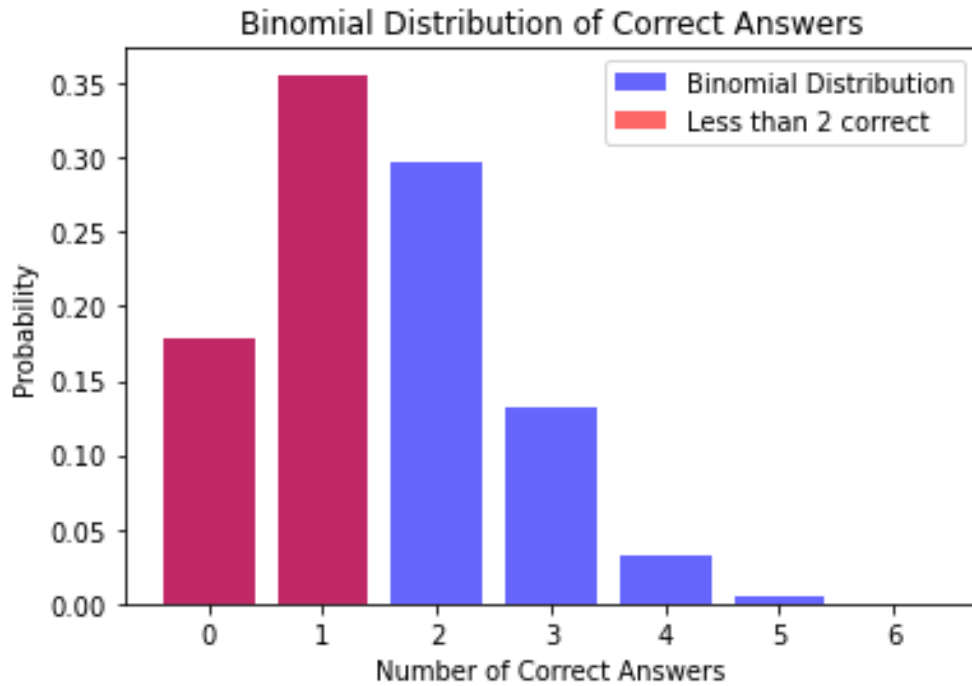


图 12: 二项分布概率质量函数（红色标注 $k < 2$ 区域）

第 3 章：统计学基础

【代码 3.1】基于模拟数据的简单统计方法展示

本节通过模拟数据展示基本的统计分析方法，涵盖参数估计、假设检验和分布验证等内容。研究对象为 240 期（即 240 天）模拟的日元兑美元汇率收益率数据，旨在帮助没有统计学背景的金融专业学生理解这些方法的应用。

数据模拟与分析目标

在金融学中，资产价格的变动通常用收益率（return）衡量，其定义为：

$$R_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}$$

其中， P_t 代表第 t 期的资产价格。由于真实市场数据往往具有非正态性（即呈现厚尾特性和偏斜），本研究采用 t 分布（自由度 5）生成模拟数据，以更贴近实际金融市场的表现。

模拟数据设定如下：

真实均值（ μ ）设定为 -0.18%，即长期来看收益率略微为负，以模拟外汇市场的自然波动。

真实波动率（ σ ）设定为 3.24%，即收益率的标准差，衡量市场价格的波动程度。

厚尾特性：市场上的汇率波动往往比正态分布预测的更剧烈，因此本研究使用 t 分布（自由度 5）来模拟极端价格变动的可能性。

本次模拟的主要目的是：1. 计算样本统计量（均值、标准差、偏度、峰度），分析数据的基本特征。2. 进行假设检验（均值 t 检验、方差卡方检验、正态性 Jarque-Bera 检验），判断数据是否符合某些统计假设。3. 可视化分析，通过直方图、Q-Q 图等方式直观展示数据特征，以便更好地理解统计分析的结果。

基于该数据，我们依次进行了参数估计、假设检验和分布验证，并使用可视化工具呈现统计特征，详细内容如下：

1. 参数估计

对模拟数据计算得出的样本统计量如下：

样本均值与真实均值（-0.18%）有一定偏差，但总体仍较接近。偏度为正，表明收益率分布呈现右偏，而峰度远大于 3，意味着收益率分布存在显著的厚尾特性，这与金融市场数据的实际特征一致。

2. 均值检验（ t 检验）

假设检验的原假设 H_0 为均值为 0，即收益率无系统性偏离。 t 统计量计算如下：

$$t = 0.44, \quad P\text{值} = 0.6617$$

统计量	估计值
样本均值 ($\hat{\mu}$)	0.0009
样本标准差 ($\hat{\sigma}$)	0.0312
偏度	0.83
峰度	5.99

表 5: 样本统计量

由于 P 值远大于 0.05，因此在 95% 置信水平下，不拒绝 H_0 ，即数据不支持收益率显著偏离 0 的结论。

此外，计算出的 95% 置信区间为：

$$[-0.0031, 0.0048]$$

均值的真实值 (-0.18%) 落在该区间内，进一步表明均值估计的合理性。

3. 方差检验 (卡方检验)

假设收益率波动率为 3.24% ，计算得到的卡方统计量为：

$$\chi^2 = 221.20$$

95% 置信区间对应的卡方分布临界值为 $[198.07, 283.71]$ ，由于统计量落在该区间内，因此不拒绝原假设，即数据支持方差等于 3.24% 的假设。

进一步计算波动率的 95% 置信区间：

$$[0.0286, 0.0342]$$

表明波动率估计值在 2.86% 到 3.42% 之间，符合预期，且估计稳定。

4. 正态性检验 (Jarque-Bera 检验)

Jarque-Bera 统计量计算如下：

$$JB = 116.81, \quad P\text{值} = 0.0000$$

P 值几乎为 0，显著拒绝正态性假设。这意味着收益率数据具有更厚的尾部（即更高的极端风险），符合金融市场的典型特征。

5. 可视化分析

图 13 直观呈现了数据特性：

- 左上：收益率直方图与正态拟合曲线对比，显示出更陡峭的峰部和厚尾特征。

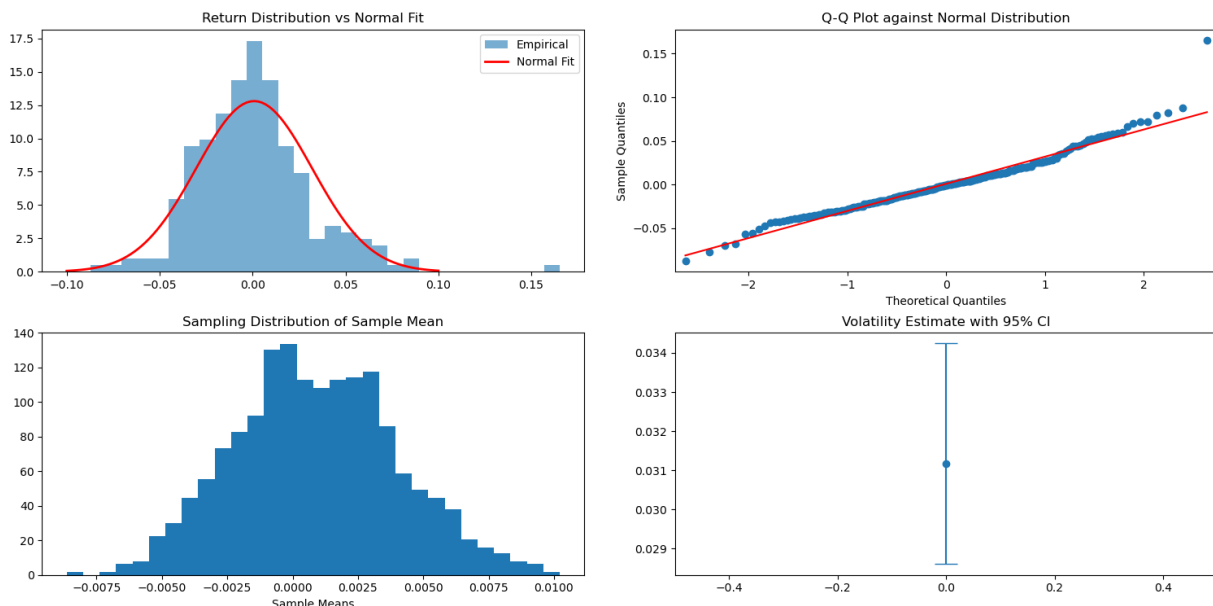


图 13: 收益率分布分析可视化

- 右上: Q-Q 图表明极端收益偏离正态假设。
- 左下: 样本均值的抽样分布符合中心极限定理的预期。
- 右下: 波动率估计的 95% 置信区间较窄, 表明估计稳定。

本次模拟研究表明, 在 240 期数据下, 参数估计结果较为稳定, 均值检验未能拒绝 0 假设, 方差估计合理, 但 Jarque-Bera 检验表明收益率分布显著偏离正态性, 表现出厚尾特征。这与真实金融市场的收益率分布特性一致, 说明简单的正态分布假设可能不足以描述汇率收益的实际波动, 应考虑更符合实际的分布 (如 t 分布或广义误差分布)。

【代码 3.2】基于模拟数据的回归分析与统计推断

本节通过模拟的股票收益率数据 (样本量 $T = 100$) 演示回归分析的完整流程, 包括参数估计、假设检验、模型诊断及其在风险管理中的应用。该部分的目标是帮助金融专业的学习者理解回归模型如何用于量化市场风险与个股表现。

数据生成与研究背景

在金融市场分析中, 个股的收益率往往受到市场整体走势的影响, 即:

$$R_{\text{股票},t} = \alpha + \beta R_{\text{市场},t} + \epsilon_t$$

其中： $R_{股票,t}$ 是个股在第 t 期的收益率； $R_{市场,t}$ 代表市场收益率（例如股指收益）； α 是截距项，表示市场无关的收益成分（超额收益）； β 是斜率系数，衡量个股对市场的敏感度（即市场风险暴露）； ϵ_t 是误差项，表示未被市场解释的个股特质收益。

本模拟数据的设定如下：

- 市场收益率 $R_{市场,t}$ 服从均值为 0、标准差为 0.3 的正态分布；
- 误差项 ϵ_t 服从均值为 0、标准差为 0.2 的正态分布；
- 真实参数设定为 $\alpha = 0.1$, $\beta = 1.5$ ，即股票收益率对市场收益率存在较强的线性依赖关系。

研究目标

在本实验中，我们希望：1. 使用最小二乘法（OLS）估计回归系数，判断回归结果是否能有效恢复真实参数；2. 进行假设检验（如 t 检验、异方差检验、自相关检验等），验证模型的统计合理性；3. 可视化回归分析结果，直观理解个股收益率与市场收益率的关系；4. 探讨风险管理应用，计算市场风险暴露（ β 系数）、VaR 以及对冲策略。

基于该数据，以下内容将详细介绍回归分析的步骤及结果解读。

1. 参数估计与回归结果

通过最小二乘法估计回归模型 $y_t = \alpha + \beta x_t + \epsilon_t$ ，结果如下：

变量	估计值	标准误	t 统计量	p 值	95% 置信区间
截距项 (α)	0.1074	0.0200	5.38	0.000	[0.068, 0.147]
斜率系数 (β)	1.5656	0.0591	26.47	0.000	[1.449, 1.683]

表 6: 回归系数估计结果

关键解读：

- **截距项**：估计值 $\hat{\alpha} = 0.1074$ 接近真实值 0.1，置信区间窄（[0.068, 0.147]），表明估计稳定。
- **斜率系数**： $\hat{\beta} = 1.5656$ 略高于真实值（1.5），误差在合理范围内，高 t 值（26.47）显示市场风险暴露高度显著。
- **模型解释力**： $R^2 = 0.8773$ ，表明市场因素解释了 87.7% 的个股收益率波动。

2. 模型假设检验

- **正态性检验 (Jarque-Bera):** 统计量 $JB = 0.45$ (p 值 = 0.2753), 不拒绝残差正态性假设, 支持 OLS 有效性。
- **同方差性检验 (Breusch-Pagan):** 统计量 $BP = 0.22$ (p 值 = 0.6384), 无异方差迹象, 满足同方差假设。
- **自相关检验 (Durbin-Watson):** DW 统计量 = 1.90 (接近 2), 表明残差无显著自相关, 时间独立性假设成立。

3. 可视化分析



图 14: 市场收益率与股票收益率散点图及回归线



图 15: 残差分布图

图表解读:

- **图14:** 数据点紧密围绕回归线分布, 直观验证高 R^2 值, 表明线性关系显著。
- **图15:** 残差随机散布在零线附近, 无趋势或异方差模式, 支持模型假设成立。

4. 风险管理应用

- **风险暴露计算:** 斜率 $\beta = 1.5656$ 表明个股系统风险为市场的 1.57 倍。若市场 VaR 为 5%, 则个股 VaR 为:

$$\text{VaR}_{\text{个股}} = 1.5656 \times 5\% = 7.83\%$$

- **对冲策略设计:** 每 1 单位个股头寸需做空 1.57 倍市场指数, 可对冲约 87.7% 的系统风险 (由 R^2 解释)。
- **特质风险度量:** 残差标准差 $\hat{\sigma}_\epsilon = 0.2$, 反映非系统性风险, 需通过分散化投资管理。

5. 模型局限性及改进方向

- **非线性关系:** 若散点图显示非线性趋势, 需引入多项式项或非线性变换 (如取对数转换)。
- **时变波动率:** 假设同方差可能低估极端风险, 可扩展为 GARCH 模型捕捉波动率聚类。

-
- **厚尾分布**：尽管残差正态性成立，真实市场常呈现厚尾特征，建议采用稳健标准误或 t 分布假设。

本模拟验证了回归分析在风险管理中的核心作用：

- **参数估计**：OLS 能准确还原真实参数，误差可控 ($\hat{\beta}$ 误差仅 4.4%)。
- **统计推断**：高显著性 t 值 ($p < 0.001$) 支持变量强相关性，置信区间覆盖真实值。
- **模型稳健性**：残差满足正态性、同方差性与独立性假设，结果可信。
- **应用价值**：直接服务于风险量化、对冲策略设计与特质风险识别。

然而，金融数据常表现出非线性、时变性与厚尾特征，需结合更复杂模型（如分位数回归、GARCH）以提升风险预测精度。此案例为从理论到实践的统计建模提供了完整范式。

第 4 章: 蒙特卡洛方法

【代码 4.1】GBM(几何布朗运动)

选取 AAPL 2023.1.1 到 2024.1.1 真实的股票数据进行, 该数据集包含 AAPL 股票在多个交易日内的历史数据, 包括每个交易日的开盘价、收盘价、最高价、最低价和成交量等信息。

经过数据预处理和清理、计算日收益率、设置模拟参数等步骤, 模拟了 3 条股票价格路径, 通过几何布朗运动模型生成未来股价。
得到结果:

表 7: 模拟价格路径数据

Step	Uniform	Normal	Price Increment	Price
0	-	-	-	191.5914
1	0.186853	-0.000515	-0.000983	191.8812
2	0.067704	-0.000876	0.000381	191.6972
3	0.608220	-0.000409	0.000790	191.8734
4	0.775236	-0.000409	0.000361	191.8357
5	0.450333	0.000837	-0.000307	191.8812
...
99	0.221834	0.000781	-0.001029	191.8343
100	0.421483	0.000985	-0.000902	191.9935

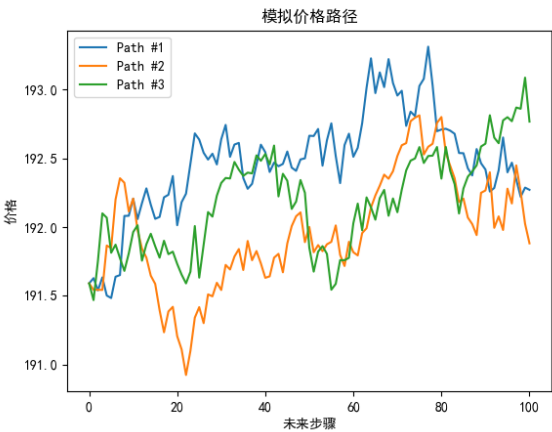


图 16: 模拟价格路径

结果分析:

图16，显示了 3 条模拟路径 (Path #1, Path #2, Path #3)，并且从图的趋势来看：
股价波动：

三条路径都展示了明显的波动性。股价有时剧烈波动，有时较为平稳，这显示了市场的随机性和不确定性。

路径 1（蓝色）总体呈现出上涨趋势，路径 2（橙色）和路径 3（绿色）则表现出不同程度的波动和回撤，尤其是在后期。

模拟路径的差异：

虽然三条路径的初始价格相同，但由于随机因素（标准正态分布的随机变量），它们在后续的模拟步骤中表现出不同的价格变化。

Path #1 显示出相对更为平稳的增长，而 Path #2 和 Path #3 则经历了一些较大的波动，特别是在第 50 步左右，股价开始出现较大幅度的波动。