Sprawozdanie Lista 2

Paweł Krzyszczak

November 2024

1 Zadanie 1

1.1 Opis problemu

Rozważmy problem zakupu paliwa od dostawców i jego dystrybucji na lotniska, aby zminimalizować łączny koszt dostaw przy uwzględnieniu ograniczeń dostępności oraz zapotrzebowania na paliwo.

1.2 Opis modelu

- n - liczba firm paliwowych (dostawców)
- m - liczba lotnisk (odbiorców)
- d_j - zapotrzebowanie na paliwo na lotnisku j
- s_i - maksymalna ilość paliwa dostępna od dostawcy i
- c_{ij} - koszt dostarczenia galonu paliwa od dostawcy i na lotnisko j

1.3 Zmienne decyzyjne

Definiujemy zmienną decyzyjną x_{ij}, która reprezentuje ilość paliwa dostarczoną przez firmę i na lotnisko j.

1.4 Ograniczenia

- Dostarczona ilość paliwa przez firmę i na lotnisko j musi być nieujemna:

$$\forall_{i,j}\ x_{ij} \geq 0$$

- Zapotrzebowanie lotnisk na paliwo musi być zaspokojone:

$$\forall_j \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j$$

- Każdy dostawca ma ograniczoną ilość paliwa, którą może dostarczyć:

$$\forall_i \sum_{j=1}^{n} \leq s_i$$

1.5 Funkcja celu

Dążymy do minimalizacji kosztów zakupu i dostarczenia paliwa. Funkcja celu jest wyrażona jako:

$$\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij}$$

gdzie c_{ij} to koszt dostarczenia galonu paliwa przez dostawcę i na lotnisko j, a x_{ij} to ilość paliwa dostarczona przez dostawcę i na lotnisko j.

1.6 Dane

j	**Lotnisko 1**	**Lotnisko 2**	**Lotnisko 3**	**Lotnisko 4**
d_j	110 000	220 000	330 000	440 000

Tabela 1: Zapotrzebowanie na paliwo na lotnisku j

i	**Firma 1**	**Firma 2**	**Firma 3**
s_i	275 000	550 000	660 000

Tabela 2: Maksymalna ilość paliwa dostępna od firmy i

c_{ij}	**Firma 1**	**Firma 2**	**Firma 3**
Lotnisko 1	10	7	8
Lotnisko 2	10	11	14
Lotnisko 3	9	12	4
Lotnisko 4	11	13	9

Tabela 3: Koszt dostarczenia galonu paliwa od dostawcy i na lotnisko j

1.7 Rozwiązanie

Optymalne rozwiązanie przedstawiono w tabeli:

x_{ij}	**Firma 1**	**Firma 2**	**Firma 3**
Lotnisko 1	0	110 000	0
Lotnisko 2	165 000	55 000	0
Lotnisko 3	0	0	330 000
Lotnisko 4	110 000	0	330 000

Tabela 4: Optymalna liczba galonów paliwa dostarczana przez dostawcę i na lotnisko j

(a) **Jaki jest minimalny łączny koszt dostaw wymaganych ilości paliwa na wszystkie lotniska?**

Minimalny łączny koszt dostaw wynosi 8 525 000 $.

(b) **Czy wszystkie firmy dostarczają paliwo?**

Tak, wszystkie firmy dostarczają paliwo, przy czym każda obsługuje dwa lotniska.

(c) **Czy możliwości dostaw paliwa przez firmy są wyczerpane?**

Tak, możliwości dostaw paliwa są w pełni wyczerpane przez Firmę 1 oraz Firmę 3.

2 Zadanie 2

2.1 Opis problemu

Zakład produkcyjny wytwarza n różnych wyrobów, oznaczonych jako P_i. Produkcja każdego wyrobu wymaga określonego czasu pracy na m maszynach, które są dostępne przez ograniczoną liczbę godzin w tygodniu. Każdy produkt ma ustaloną cenę sprzedaży oraz zmienne koszty produkcji. Celem jest opracowanie optymalnego tygodniowego planu produkcji, który maksymalizuje zysk.

2.2 Opis modelu

- m - liczba wyrobów, które może produkować zakład
- n - liczba maszyn
- p_i - cena po jakiej może być sprzedany kilogram wyrobu P_i
- m_i - wartość kosztów materiałowych na kilogram wyrobu P_i
- d_i - maksymalny popyt na wyrób P_i (w kilogramach)
- a_j - tygodniowy dostępny czas pracy dla maszyny M_j w godzinach
- c_j - wartość kosztów zmiennych dla maszyny M_j za minutę
- t_{ij} - czas obróbki wyrobu P_i na maszynie M_j (w minutach na kilogram wyrobu)

2.3 Zmienne decyzyjne

Definiujemy zmienną decyzyjną x_i, która reprezentuje liczbę kilogramów produktu P_i, która należy wyprodukować.

2.4 Ograniczenia

- Wyprodukowana ilość wyrobu P_i musi być nieujemna:

$$\forall_i \; x_i \geq 0$$

- Każda z maszyn M_j ma ograniczony tygodniowy czas pracy a_j:

$$\forall_j \; \sum_{i=1}^{n} t_{ij} \cdot x_i \leq a_j$$

- Na każdy z produktów P_i jest ograniczony popyt:

$$\forall_i \; x_i \leq d_i$$

2.5 Funkcja celu

Chcemy zmaksymalizować zysk, czyli różnicę między przychodem ze sprzedaży produktów, a kosztami ich wyprodukowania. Funkcja celu:

$$\max \left(\sum_{i=1}^{m} (p_i - m_i) x_i - \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot \sum_{i=1}^{m} t_{ij} \cdot x_i \right)$$

2.6 Dane

Maszyna i	**Dostępność w tygodniu (w minutach)** a_j	**Koszt pracy (w \$ na h)** c_j
M_1	3600	2
M_2	3600	2
M_3	3600	3

Tabela 5: Dane dotyczące maszyn M_j

t_{ij}	**Maszyna 1**	**Maszyna 2**	**Maszyna 3**
P_1	5	10	6
P_2	3	6	4
P_3	4	5	3
P_4	4	2	1

Tabela 6: Czas obróbki wyrobu P_i na każdej z maszyn M_j (w minutach)

Wyrób i	**Cena za kg (w $)** p_i	**Wartość kosztów materiałowych (w $)** m_i	**Popyt tygodniowy (w kg)** d_i
P_1	9	4	400
P_2	7	1	100
P_3	6	1	150
P_4	5	1	500

Tabela 7: Dane dotyczące wyrobów P_i

2.7 Rozwiązanie

Znalezione optymalne rozwiązanie:

	Wyrób 1	**Wyrób 2**	**Wyrób 3**	**Wyrób 4**
x_i	125	100	150	500

Tabela 8: Optymalna liczba kilogramów wyrobu P_i

Maksymalny zysk wynosi 3632.50 $.

3 Zadanie 3

3.1 Opis problemu

Problem dotyczy planowania produkcji i magazynowania towarów w różnych okresach. Celem jest minimalizacja całkowitych kosztów produkcji i magazynowania przy jednoczesnym zapewnieniu zaspokojenia zapotrzebowania na towar w każdym okresie.

3.2 Opis modelu

- K: liczba okresów
- c_j: koszt produkcji w trybie podstawowym w okresie j

- o_j: koszt produkcji w trybie dodatkowym w okresie j
- k: koszt magazynowania towaru przez jeden okres
- b_j: maksymalna produkcja w trybie podstawowym w okresie j
- a_j: maksymalna produkcja w trybie dodatkowym w okresie j
- d_j: zapotrzebowanie w okresie j
- s_0: początkowy stan magazynu
- S: maksymalna pojemność magazynu

3.3 Zmienne decyzyjne

Definiujemy następujące zmienne decyzyjne:

- x_j: liczba jednostek wyprodukowanych w okresie j w trybie podstawowym
- y_j: liczba jednostek wyprodukowanych w okresie j w trybie dodatkowym
- s_j: liczba jednostek towaru przechowywanych w magazynie na koniec okresu j

3.4 Ograniczenia

- Liczba jednostek wyprodukowanych w okresie j w trybie podstawowym jest nieujemna:
$$\forall_j \; x_j \geq 0$$
- Liczba jednostek wyprodukowanych w okresie j w trybie dodatkowym jest nieujemna:
$$\forall_j \; y_j \geq 0$$
- Liczba jednostek towaru przechowywanych w magazynie na koniec okresu j jest nieujemna:
$$\forall_j \; s_j \geq 0$$
- Produkcja w trybie podstawowym w okresie j nie może przekraczać maksymalnej możliwej wielkości:
$$\forall_j \; x_j \leq b_j$$
- Produkcja w trybie dodatkowym w okresie j nie może przekraczać maksymalnej możliwej wielkości:
$$\forall_j \; y_j \leq a_j$$

- Liczba jednostek przechowywanych w magazynie na koniec okresu j nie może przekroczyć jego pojemności:

$$\forall_j \; s_j \leq S$$

- Stan magazynu na koniec okresu j wynika z bilansu produkcji, zapasów i zaspokojonego zapotrzebowania:

$$\forall_j \; s_{j+1} = x_j + y_j + s_j - d_j$$

- Na koniec ostatniego okresu magazynowanie jednostek jest zbędne, aby uniknąć dodatkowych kosztów:

$$s_{K+1} = 0$$

- Stan magazynu w pierwszym okresie wynika z początkowego zapasu:

$$s_1 = s_0$$

3.5 Funkcja celu

Chcemy zminimalizować łączne koszty produkcji i magazynowania jednostek:

$$\min \sum_{j=1}^{K} (c_j x_j + o_j y_j + k s_j)$$

3.6 Dane

$S = 70$ - pojemność magazynu

$s_0 = 15$ - stan magazynu na początku pierwszego okresu

$k = 1500$ - koszt magazynowania jednostki towaru przez jeden okres

j	**maksymalna produkcja podstawowa** c_j	**koszt produkcji podstawowej** b_j	**maksymalna produkcja dodatkowa** a_j	**koszt produkcji dodatkowej** o_j	**zapotrzebowanie** d_j
1	100	6 000	60	8 000	130
2	100	4 000	65	6 000	80
3	100	8 000	70	10 000	125
4	100	9 000	60	11 000	195

3.7 Rozwiązanie

Znalezione optymalne rozwiązanie:

Okres	Wyprodukowane jednostki w trybie podstawowym	Wyprodukowane jednostki w trybie dodatkowym	Stan magazynu na początku okresu
1	100	15	15
2	100	50	0
3	100	0	70
4	100	50	45

Tabela 9: Optymalne wielkości produkcji i stany magazynu

(a) **Jaki jest minimalny łączny koszt produkcji i magazynowania towaru?**

Minimalny łączny koszt produkcji i magazynowania wynosi 3 865 000 $.

(b) **W których okresach firma musi zaplanować produkcję ponadwymiarową?**

Produkcja ponadwymiarowa jest konieczna w okresach 1, 2 oraz 4.

(c) **W których okresach możliwości magazynowania towaru są wyczerpane?**

Maksymalne możliwości magazynowania towaru zostały wyczerpane w okresie 3.

4 Zadanie 4

4.1 Opis problemu

Dany jest skierowany graf $G = (N, A)$, gdzie N reprezentuje zbiór miast, a A – zbiór połączeń między nimi. Każde połączenie $(i, j) \in A$ ma przypisany koszt przejazdu c_{ij} oraz czas przejazdu t_{ij}.

Zadanie polega na znalezieniu najtańszej ścieżki pomiędzy wybranymi miastami i° i j°, przy spełnieniu ograniczenia, że całkowity czas podróży nie może przekroczyć ustalonej wartości T. Celem jest minimalizacja kosztu podróży z miasta i° do miasta j°.

4.2 Opis modelu

- N: zbiór miast
- A: zbiór połączeń między miastami

- c_{ij}: koszt przejazdu między miastami i i j
- t_{ij}: czas przejazdu między miastami i i j
- T: maksymalny dopuszczalny czas przejazdu
- i°: miasto początkowe
- j°: miasto końcowe

4.3 Zmienne decyzyjne

Definiujemy zmienną decyzyjną x_{ij}, która przyjmuje wartość 1, jeśli krawędź (i, j, c_{ij}, t_{ij}) należy do optymalnej ścieżki, a 0 w przeciwnym przypadku.

4.4 Ograniczenia

- Jeśli nie istnieje połączenie między miastami i i j, to wartość x_{ij} jest równa 0:
$$\forall_{(i,j)\notin A}\ x_{ij} = 0$$
- Z miasta początkowego i° wychodzi dokładnie jedno połączenie, ścieżka zaczyna się w tym mieście i nie ma rozgałęzień:
$$\sum_{j:(i^\circ,j)\in A} x_{i^\circ j} = 1$$
$$\sum_{j:(j,i^\circ)\in A} x_{ji^\circ} = 0$$
- Do miasta docelowego j° dochodzi dokładnie jedno połączenie, ścieżka kończy się w tym mieście i nie ma rozgałęzień:
$$\sum_{i:(i,j^\circ)\in A} x_{ij^\circ} = 1$$
$$\sum_{j:(j^\circ,i)\in A} x_{j^\circ i} = 0$$
- Każde miasto poza i° i j° ma tyle samo połączeń wchodzących co wychodzących:
$$\sum_{j:(k,j)\in A} x_{kj} = \sum_{i:(i,k)\in A} x_{ik}, \quad \forall_{k\in N\setminus\{i^\circ,j^\circ\}}$$
- Całkowity czas przejazdu nie może być większy niż T:
$$\sum_{(i,j)\in A} t_{ij}x_{ij} \leq T$$

4.5 Funkcja celu

Chcemy zminimalizować całkowity koszt przejazdu:

$$\min \sum_{(i,j)\in A} c_{ij} x_{ij}$$

4.6 Dane

(a)

$$N = \{1, 2, \ldots, 10\}$$
$$i^\circ = 1$$
$$j^\circ = 10$$
$$T = 15$$

i	1	1	1	1	2	3	3	3	4	4	5	5	5	6	6	6	7	7	7	8	9
j	2	3	4	5	3	4	5	10	5	7	6	7	10	1	7	10	3	8	9	9	10
c_{ij}	3	4	7	8	2	4	2	6	1	3	5	3	5	5	2	7	4	3	1	1	2
t_{ij}	4	9	10	12	3	6	2	11	1	5	6	3	8	8	2	11	6	5	1	2	2

(b)

$$N = \{1, 2, \ldots, 10\}$$
$$i^\circ = 1$$
$$j^\circ = 10$$
$$T = 18$$

i	1	1	1	1	2	2	3	3	4	4	5	6	7	7	8	9
j	2	3	4	7	5	6	5	6	6	7	8	9	9	10	10	10
c_{ij}	3	5	8	2	2	4	3	4	1	2	3	6	7	1	5	2
t_{ij}	4	6	7	10	3	6	2	4	2	5	3	5	3	10	6	3

4.7 Rozwiązanie

(a) Wykorzystane krawędzie:

i	j	c_{ij}	t_{ij}
1	2	3	4
2	3	2	3
3	5	2	2
5	7	1	1
7	9	1	1
9	10	2	2

$$\text{Czas} = 15$$
$$\text{Koszt} = 13$$

(b) Wykorzystane krawędzie:

i	j	c_{ij}	t_{ij}
1	7	2	10
7	9	7	3
9	10	2	3

$$\text{Czas} = 16$$

$$\text{Koszt} = 11$$

(c) **Czy ograniczenie na całkowitoliczbowość zmiennych decyzyjnych jest potrzebne? Jeżeli nie, to uzasadnij dlaczego. Jeżeli tak, to zaproponuj kontrprzykład, w którym po usunięciu ograniczenia na całkowitoliczbowość (tj. mamy przypadek, w którym model jest modelem programowania liniowego) zmienne decyzyjne w rozwiązaniu optymalnym nie mają wartości całkowitych.**

Tak, ograniczenie na całkowitoliczbowość zmiennych decyzyjnych jest konieczne, ponieważ zmienne $x[i, j]$ reprezentują obecność krawędzi w ścieżce i muszą przyjmować wartości 0 lub 1. Usunięcie tego ograniczenia mogłoby prowadzić do wartości ułamkowych zmiennych, co jest nieadekwatne w kontekście tego problemu. Przykładowo, w przypadku mojego grafu, po zdjęciu tego ograniczenia zmienne $x[i, j]$ zaczynają przyjmować wartości ułamkowe, co jest niepoprawne w tej sytuacji.

(d) **Czy po usunięciu ograniczenia na czasy przejazdu w modelu bez ograniczeń na całkowitoliczbowość zmiennych decyzyjnych i rozwiązaniu problemu otrzymane połączenie zawsze jest akceptowalnym rozwiązaniem? Uzasadnij odpowiedź.**

Jeśli w modelu bez ograniczeń na całkowitoliczbowość zmiennych decyzyjnych usuniemy również ograniczenie na czasy przejazdu, otrzymane połączenie zawsze będzie akceptowalnym rozwiązaniem. Wynika to z faktu, że po zniesieniu ograniczeń czasowych zadanie sprowadza się do znalezienia ścieżki o najmniejszej sumie kosztów. W związku z tym nie ma potrzeby, aby model rozgałęział ścieżki.

5 Zadanie 5

5.1 Opis problemu

Mamy określoną liczbę dzielnic, do których należy przypisać radiowozy na poszczególne zmiany. Należy uwzględnić minimalne wymagania dotyczące liczby radiowozów dla każdej dzielnicy i zmiany, a także określone limity minimalnej i maksymalnej liczby radiowozów przydzielanych do danej dzielnicy i zmiany.

5.2 Opis modelu

- n: liczba zmian
- m: liczba dzielnic
- $rMIN_{ij}$: minimalna liczba radiowozów dla i-tej dzielnicy i j-tej zmiany
- $rMAX_{ij}$: maksymalna liczba radiowozów dla i-tej dzielnicy i j-tej zmiany
- d_i: minimalna liczba radiowozów dla i-tej dzielnicy
- z_j: minimalna liczba radiowozów dla j-tej zmiany

5.3 Zmienne decyzyjne

Definiujemy zmienną decyzyjną x_{ij}, która reprezentuje liczbę radiowozów przydzielonych do i-tej dzielnicy na j-tą zmianę.

5.4 Ograniczenia

- Liczba radiowozów przydzielonych do i-tej dzielnicy na j-tą zmianę musi być nieujemna:
$$\forall_{i,j}\ x_{ij} \geq 0$$
- Dla każdej j-tej zmiany musi być dostępne więcej radiowozów niż minimalna liczba radiowozów dla tej zmiany:
$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq z_j$$
- Dla każdej i-tej dzielnicy musi być dostępne więcej radiowozów niż minimalna liczba radiowozów dla tej dzielnicy:
$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \geq d_i$$
- Dla każdej i-tej dzielnicy i j-tej zmiany dostępna liczba radiowozów nie może być mniejsza niż wymagana minimalna liczba i większa niż wymagana maksymalna liczba:
$$\forall_{i,j}\ rMIN_{ij} \geq x_{ij} \geq rMAX_{ij}$$

5.5 Funkcja celu

Chcemy zminimalizować całkowitą liczbę potrzebnych radiowozów:

$$\min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij}$$

5.6 Dane

	1	**2**	**3**
z_j	10	20	18

	1	**2**	**3**
d_i	10	14	13

$rMIN_{ij}$	**1**	**2**	**3**
1	2	4	3
2	3	6	5
3	5	7	6

$rMAX_{ij}$	**1**	**2**	**3**
1	3	7	5
2	5	7	10
3	8	12	10

5.7 Rozwiązanie

Minimalna liczba radiowozów to 48.

x_{ij}	**1**	**2**	**3**
1	2	5	5
2	3	7	5
3	5	8	8

Tabela 10: Optymalne liczby radiowozów dla dzielnic i oraz zmian j

6 Zadanie 6

6.1 Opis problemu

Firma przeładunkowa składuje kontenery na terenie podzielonym na siatkę kwadratów, gdzie każdy kwadrat może pomieścić najwyżej jeden kontener. Aby monitorować kontenery, firma musi rozmieszczać kamery, które mają określony zasięg obserwacji w poziomie i pionie. Kamery nie mogą być ustawione na kwadracie zajętym przez kontener. Celem jest rozmieszczenie minimalnej liczby kamer, aby każdy kontener był objęty obserwacją przynajmniej jednej kamery.

6.2 Opis modelu

- C_{ij} - macierz $m \times n$ reprezentująca pozycje kontenerów. Jeśli w kwadracie (i, j) znajduje się kontener to $C_{ij} = 1$, w przeciwnym przypadku $c_{ij} = 0$.
- m: liczba wierszy terenu
- n: liczba kolumn terenu
- k: zasięg obserwacji kamery w każdą stronę

6.3 Zmienne decyzyjne

Definiujemy zmienną decyzyjną x_{ij}, która przyjmuje wartość 1, jeśli w kwadracie (i, j) znajduje się kamera, w przeciwnym przypadku przyjmuje wartość 0.

6.4 Ograniczenia

- Kamery mogą być umieszczane jedynie w pustych kwadratach:

$$\forall_{(i,j):C_{ij}=1}\ x_{ij} = 0$$

- Każdy kwadrat z kontenerem musi być monitorowany przez co najmniej jedną kamerę w jej zasięgu:

$$\forall_{(i,j):C_{ij}=1} \sum_{a=max(1,i-k)}^{min(i+k,m)} x_{aj} + \sum_{b=max(1,j-k)}^{min(j+k,n)} x_{ib} \geq 1$$

6.5 Funkcja celu

Chcemy zminimalizować liczbę kamer:

$$\min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij}$$

6.6 Dane

(a) $k = 3$

0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	0	0
1	0	0	0	0	0	1
1	0	0	1	0	0	0
0	0	1	0	0	0	1
1	0	0	0	0	0	0

Tabela 11: Rozmieszczenie kontenerów w terenie

(b) $k = 4$

0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	0	0
1	0	0	0	0	0	1
1	0	0	1	0	0	0
0	0	1	0	0	0	1
1	0	0	0	0	0	0

Tabela 12: Rozmieszczenie kontenerów w terenie

6.7 Rozwiązanie

(a) $k = 3$
Minimalna liczba kamer: 5

0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1
1	0	K	0	1	0	K
1	0	0	0	0	0	1
1	K	0	1	0	0	0
K	0	1	0	K	0	1
1	0	0	0	0	0	0

Tabela 13: Rozmieszczenie kontenerów i kamer w terenie, kontenery oznaczono cyfrą 1, a kamery literą K

(b) $k = 4$
Minimalna liczba kamer: 3

0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	0	K
1	0	0	0	0	0	1
1	0	K	1	0	0	0
K	0	1	0	0	0	1
1	0	0	0	0	0	0

Tabela 14: Rozmieszczenie kontenerów i kamer w terenie, kontenery oznaczono cyfrą 1, a kamery literą K