Movimiento Browniano Geométrico

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Procesos Estocásticos II

Mayo 2024

Contenido

Movimiento Browniano

En 1827, el médico y botánico **R. Brown** observó que cuando las partículas de polen se encontraban suspendidas sobre el agua y en otros líquidos, éstas se movían, sin cesar, de forma irregular.

En 1905, el físico **A. Einstein** publica un artículo sobre mecánica estadística que proporciona la formulación matemática del movimiento Browniano (en honor a *R. Brown*).

Los fundamentos matemáticos para el movimiento Browniano como un proceso estocástico fueron hechos por **N. Wiener** en 1931. En un sentido estricto, el movimiento Browniano es el fenómeno físico, mientras que su modelo matemático es el *proceso de Wiener*, aunque es común llamar a amabas cosas por el mismo nombre: *movimiento Browniano*.

A continuación, recordamos la definición de movimiento Browniano.

Definición: (Movimiento Browniano)

Un proceso $\{B_t : t \geq 0\}$ es un **movimiento Browniano** (o **proceso de Wiener**) de parámetro σ^2 si cumple las siguientes propiedades:

1. $B_0 = 0 \; c.s$
2. *Incrementos independientes:*

   Para $0 \leq s < t, B_t - B_s$ es independiente de $\mathscr{F}_s^B$

3. *Incrementos normales:*

   $$\text{Para } 0 \leq s < t, B_t - B_s \sim \eta(0, \sigma^2(t-s))$$

4. *Trayectorias continuas:*

   Las trayectorias $t \mapsto B_t$ son continuas.

Nótese que el parámetro σ^2 es tal que $\sigma > 0$. Como caso particular, si $\sigma^2 = 1$ se dice que (B_t) es un **movimiento Browniano estándar.**

De las condiciones **2) y 3)** se deriva el siguiente resultado.

(Propiedad de escalamiento.)

El movimiento Browniano es *0.5-autosimilar*. Por lo tanto, se cumple que

$$(\sqrt{\tau}B_t) \stackrel{d}{=} (B_{t\tau})$$

Más aún, se cumple la propiedad

$$(\sqrt{\tau}B_{\frac{t}{\tau}}) \stackrel{d}{=} (B_t), \text{ para cualquier } \tau > 0,$$

la cual es conocida como *propiedad de escalamiento.*

MB con Deriva

El movimiento Browniano se ha usado tanto para la introducción de nuevos objetos matemáticos como en la modelación de fenómenos aleatorios. Una primera importante generalización del movimiento Browniano es la que a continuación se define.

Definición: (Movimiento Browniano con Deriva)

Sea (B_t) un movimiento Browniano. El proceso (X_t) definido por

$$X_t = \sigma B_t + \mu t, \quad \mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0,$$

se conoce como **movimiento Browniano con deriva** μ. La constante σ^2 se conoce como coeficiente de difusión (o *coeficiente de variación.*)

Observación:

Nótese que para cada $t \in T, \mathbb{E}[X_t] = \mu t$. Esta función determinista influye esencialmente en la forma de las trayectorias del proceso, de aquí que el proceso recibe el nombre.
Por otra parte, el termino *"coeficiente de difusión"* proviene del hecho de que σ^2 coincide con cierto límite que definen a un proceso de difusión.

MB Generalizado.

En el Movimiento Browniano Generalizado se asume que el cambio en una unidad de tiempo en una variable tiene dos componentes:

Media o Determinístico.

Varianza o Difusión.

En el caso de dB, tiene un componente de media 0 y varianza anual de 1. De manera formal.

Definición: *(Movimiento Browniano Generalizado)*

Sean μ y $\sigma > 0$ dos constantes. El Movimiento Browniano Generalizado puede expresarse como:

$$dx = \mu dt + \sigma dB_t$$

Donde, dB_t es el diferencial de un Movimiento Browniano.

Para comenzar el análisis supongamos que $\sigma = 0$, esto implica que *no existe componente de varianza*. De esta manera lo anterior puede reescribirse como

$$dx = \mu dt$$

$$\text{Donde, } \mu = \frac{dx}{dt} \underset{\text{Discretizando}}{\rightarrow} \mu = \frac{x_t - x_{(t-1)}}{t-(t-1)}$$

Con lo cual μ representa la pendiente de la variable x en cuanto al tiempo. Por el contrario el termino dBt, denota un **Componente de Ruido**, el cual es capaz de desviar en el corto plazo la trayectoria de la variable de la media. La **magnitud o severidad del componente** de difusión esta dada por σ.

Nota

En términos discretos el cambio en la variable x está dado por:

$$\Delta x = \mu \Delta t + \sigma \epsilon \sqrt{\Delta t}$$

De esta manera los momentos de Δx son:

$$\mathbb{E}[\Delta x] = \mu \Delta t$$
$$\mathbb{V}ar[\Delta x] = \sigma^2 \Delta t$$

Algoritmo 2: *Simulación de un MB Generalizado.*

```
set.seed(12047)
T ← 1
delta_t ← 1/252
N ← T/delta_t
B ← numeric(N + 1)
B[1] ← 10
tiempo ← seq(1, (N+1), 1)

mu ← 0.1
sigma ← 0.2


for (t in 2:(N + 1)) {
  incremento ← mu * delta_t + sigma * rnorm(1) * sqrt(delta_t)
  B[t] ← B[t - 1] + incremento
}

lm_model ← lm(B ~ tiempo)
intercepto ← coef(lm_model)[1]
pendiente ← coef(lm_model)[2]

y1 ← intercepto + pendiente * tiempo

matplot(cbind(B, y1), type="l", lwd=2, col=c("black", "blue"),
        xlab="Tiempo", ylab="Valor del proceso",
        main="Movimiento Browniano Generalizado")
legend("topleft", inset=0.05, legend=c("Variación", "Media"),
       lwd=2, lty=c(1, 1),
       col=c("black", "blue"), bty="n")
```

En la siguiente página se muestra la salida.

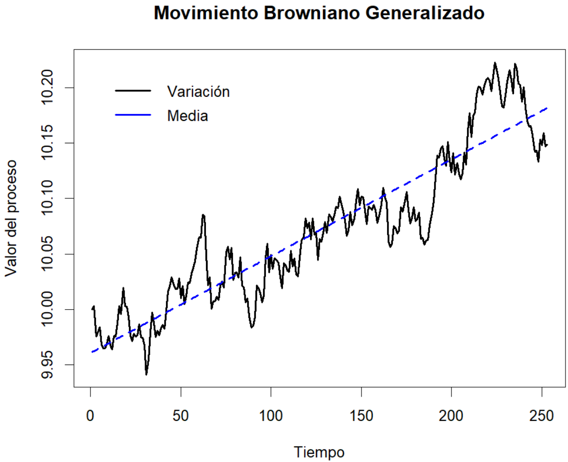

Figure: Simulación de un Proceso Browniano Generalizado.

MBG Definición.

En 1973, **Black, Scholes y Merton** sugirieron otro proceso como modelo para la especulación de precios, el cual se conoce como *movimiento Browniano geométrico.*

Definición: (Movimiento Browniano Geométrico.)

Sea (X_t) un movimiento Browniano con deriva μ y coeficiente de difusión σ^2.Entonces, el proceso (Y_t) definido por

$$Y_t = exp(X_t) = exp(\sigma B_t + \mu t),$$

se llama **movimiento Browniano geométrico**.

A continuación se presenta un bosquejo de como se obtiene el MBG

El movimiento Browniano geométrico se obtiene por una transformación exponencial del movimiento Browniano. Para un t fijo, la **variable aleatoria** Y_t tiene una **distribución lognormal**, con media μt y varianza $\sigma^2 t$ i.e,

$$ln(Y_t) \sim \eta(\mu t, \sigma^2 t).$$

Se puede generalizar la definición del movimiento Browniano geométrico (Y_t) al definir

$$Y_t = Y_0 exp(X_t),$$

donde Y_0 puede ser una variable aleatoria.
Dado que el movimiento Browniano es independiente del pasado y tiene incrementos estacionarios, entonces se cumple el siguiente resultado.

MBG es un proceso de Markov.

Teorema: (El Movimiento Browniano Geométrico es un Proceso de Markov)

El M.B. Geométrico es un proceso de Markov con respecto a la filtración $(\mathscr{F}_t^B)$

Demostración:

Sea (Y_t) un movimiento Browniano geométrico definido en su forma general por,

$$Y_t = Y_o exp(X_t).$$

Por demostrar que (Y_t) cumple con la propiedad de Markov. En efecto,

$$\mathbb{P}\left(Y_{t+s} \leq y | \mathscr{F}_t^B\right) = \mathbb{P}\left(Y_o exp(X_{t+s}) \leq y | \mathscr{F}_t^B\right)$$

Proof.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(Y_{t+s} \leq y | \mathscr{F}_t^B\right) &= \mathbb{P}\left(Y_o exp(X_{t+s}) \leq y | \mathscr{F}_t^B\right) \\
&= \mathbb{P}\left(Y_t exp(X_{t+s} - X_t) \leq y | \mathscr{F}_t^B\right) \\
&= \mathbb{P}\left(exp(X_{t+s} - X_t) \leq \frac{y}{Y_t} | \mathscr{F}_t^B\right) \\
&= \mathbb{P}\left(exp(X_{t+s} - X_t) \leq \frac{y}{Y_t} | Y_t\right) \\
&= \mathbb{P}\left(Y_t exp(X_{t+s} - X_t) \leq y | Y_t\right) \\
&= \mathbb{P}\left(Y_{t+s} \leq y | Y_t\right)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el movimiento Browniano geométrico es un proceso de Markov. $\square$

Nótese que si $Z \sim \eta(0,1)$, entonces

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[exp(\lambda Z)] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} exp(\lambda z) exp(-\frac{z^2}{2}) dz \\
&= exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} exp\left(-\frac{(z-\lambda)^2}{2}\right) dz \\
&= exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\right)
\end{aligned}$$

Luego, como el movimiento Browniano es 0.5 similar,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y_t] &= Y_0 exp(\mu t) \mathbb{E}[exp(\sigma B_t)] \\
&= Y_0 exp(\mu t) \mathbb{E}[exp(\sigma t^{1/2} B_1)] \\
&= Y_0 exp\left(\left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right) t\right)
\end{aligned}$$

Esto es, bajo el modelo del movimiento Browniano geométrico, dado un precio inicial Y_0, se espera que el precio del activo aumente en una tasa de $\mu + \dfrac{\sigma^2}{2}$

El MBG es una Martingala

Teorema: (El Movimiento Browniano Geométrico es una Martingala)

Supóngase que (B_t) es un movimiento Browniano con respecto a la filtración $(\mathscr{F}_t)$. Entonces

$$\left(exp\left(\sigma B_t - \frac{\sigma^2}{2}t\right)\right) \text{ es una } \mathscr{F}_t\text{-martingala.}$$

Demostración:

En efecto, si $s < t$, entonces,

$$\mathbb{E}\left[exp\left(\sigma B_t - \frac{\sigma^2}{2}t\right)|\mathscr{F}_s\right] = exp\left(\sigma B_s - \frac{\sigma^2}{2}t\right)\mathbb{E}\left[exp(\sigma(B_t - B_s))|\mathscr{F}_s\right]$$

Y utilizando el hecho de que X_s es $\mathscr{F}_s$-medible, se sigue que

Proof.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[exp\left(\sigma B_t - \frac{\sigma^2}{2}t\right)|\mathscr{F}_s\right] &= exp\left(\sigma B_s - \frac{\sigma^2}{2}t\right)\mathbb{E}\left[exp(\sigma(B_t - B_s))\right] \\
&= exp\left(\sigma B_s - \frac{\sigma^2}{2}t\right)\mathbb{E}\left[exp(\sigma B_{t-s})\right] \\
&= exp\left(\sigma B_s - \frac{\sigma^2}{2}t\right)\mathbb{E}\left[exp(\sigma Z\sqrt{t-s})\right] \\
&= exp\left(\sigma B_s - \frac{\sigma^2}{2}t\right) exp\left(\frac{1}{2}\sigma^2(t-s)\right) \\
&= exp\left(\sigma B_s - \frac{\sigma^2}{2}t\right)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\left(exp\left(\sigma B_t - \frac{\sigma^2}{2}t\right)\right)$ es una martingala. □

Ejemplo

Example

Sea Δt un incremento pequeño. Supongamos que en cada unidad de tiempo Δt el precio del activo aumenta su valor por un factor u con probabilidad p, o disminuye por un factor d con probabilidad $1-p$, donde

$$u = exp(\sigma\sqrt{\Delta t}) \qquad d = exp(-\sigma\sqrt{\Delta t})$$

$$p = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\mu}{\sigma}\sqrt{\Delta t}\right)$$

Todo lo anterior muestra que cuando $\Delta t << 0, ln\left(\frac{S(t)}{S(0)}\right)$ tiende a comportarse como una v.a normal con media μt y varianza $\sigma^2 t$. Además, ya que los cambios de precio en lo sucesivo son independientes y tienen la misma probabilidad de aumentar o disminuir, entonces se sigue que $\frac{S(t+y)}{S(y)}$ es independiente de los cambios de precios anteriores al tiempo y. De aquí que, cuando $\Delta t \to 0$, el modelo $S(t)$ se aproxima a un movimiento Browniano geométrico

MBG Definición Alternativa.

Este modelo es de amplio uso en finanzas y sirve para representar el precio de algunos bienes que fluctúan siguiendo los vaivenes de los mercados financieros. Su definición es la siguiente.

Definición: *(Movimiento Browniano Geométrico.)*

Sean μ y $\sigma > 0$ dos constantes y $x_0 > 0$. El Movimiento Browniano Geométrico es el proceso $\{X_t : t \geq 0\}$ solución de la ecuación estocástica

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dB_t \quad (1)$$

$$X_0 = x_0 \quad (2)$$

y puede escribirse como sigue:

$$X_t = x_o exp\left[\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t + \sigma B_t\right] \quad (3)$$

La ecuación (1) puede interpretarse de la siguiente manera: en ausencia del término estocástico, la ecuación se reduce a $dX_t = \mu X_t dt$, cuya solución es $X_t = x_o e^{\mu t}$.Esta función representa el **comportamiento en el tiempo de un capital inicial** positivo x_0 que crece de manera continua y determinista a una tasa efectiva del $100\mu\%$, suponiendo $\mu > 0$ Por otro lado, la **parte estocástica corresponde a la volatilidad** de una inversión con riesgo sujeta a las fluctuaciones de los mercados financieros.

El modelo supone que dicha variabilidad es proporcional al valor de la inversión. A este proceso se le conoce también con el nombre de **movimiento Browniano Exponencial.**

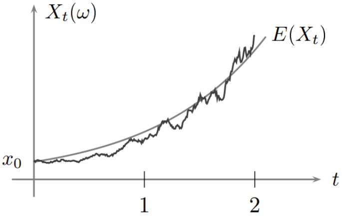

Figure: Trayectoria de MBG

Momentos del Movimiento Browniano Geométrico.

Mencionaremos ahora algunas características numéricas de este proceso.

Proposición: *(Momentos de MBG)*

Para el movimiento Browniano se cumple lo siguiente:

1. $\mathbb{E}[X_t] = x_0 e^{\mu t}$
2. $\mathbb{V}[X_t] = x_0^2 e^{2\mu t}(e^{\sigma^2 t} - 1)$
3. $\mathbb{C}ov[X_t, X_s] = x_0^2 e^{\mu(s+t)}(e^{\sigma^2 s} - 1)$

En las siguientes 3 diapositivas se demostraran cada uno de los puntos de la *Proposición*.

Demostración (1) *Esperanza*

Usaremos el hecho de que la función generadora de momentos de la distribución $\eta(\mu, \sigma^2)$ es $M(s) = exp(\mu s + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2)$

1. Para la esperanza se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_t] &= E(x_0 exp[(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B_t]) \\
&= x_0 exp[(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t] E(exp[\sigma B_t]) \\
&= x_0 exp[(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t] exp[\sigma B_t] \\
&= x_0 e^{\mu t}
\end{aligned}$$

Continúa en la siguiente página.

Demostración (2) *Varianza*

2. Ahora calcularemos la varianza

$$
\begin{aligned}
\mathbb{V}ar[X_t] &= Var(x_0 exp[(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B_t]) \\
&= x_0^2 exp[2(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t] Var(exp[\sigma B_t]) \\
&= x_0^2 exp[2(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t](E(exp[2\sigma B_t]) - E^2(exp[\sigma B_t] \\
&= x_0^2 exp[2(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t]((exp[\frac{1}{2}t(2\sigma)^2 - exp[2(\frac{1}{2}t\sigma^2)]]) \\
&= x_0^2 e^{2\mu t(e^{\sigma^2 t}-1)}
\end{aligned}
$$

Continúa en la siguiente página.

[

Demostración (3) *Covarianza*] 3. Calculamos primero $\mathbb{E}[X_t X_s]$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_t X_s] &= E(x_0^2 exp[(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(t+s) + \sigma(B_t + B_s)]) \\
&= x_0^2 exp[(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(t+s) E(exp[\sigma(B_t + B_s)])] \\
&= x_0^2 exp[(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(t+s) E(e^{2\sigma B_s}) E(e^{\sigma(B_t - B_s)})] \\
&= x_0^2 exp[(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(t+s) e^{2s\sigma^2} e^{\frac{1}{2}(t-s)\sigma^2}] \\
&= x_0^2 exp[\mu(t+s) + s\sigma^2]
\end{aligned}$$

Continúa en la siguiente página.

Demostración (3) *Continua...*

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}ov[X_t, X_s] &= E(X_s X_t) - E(X_s)E(X_t) \\
&= x_0^2 exp[\mu(t+s) + s\sigma^2] - x_0^2 exp(\mu(t+s)) \\
&= x_0^2 exp(\mu(t+s)) exp(s\sigma^2 - 1)
\end{aligned}$$

$\square$

Usando la Definición de **Movimiento Browniano Geométrico**, y lo visto en las secciones 1 y 2. Tenemos la siguiente observación:

Observación:

Vea que cuando $\Delta t \to 0$, nos lleva a la **Definición:** *(Movimiento Browniano Geométrico.)*. Por otra lado, con ausencia de este supuesto, tendremos que:

$$X_t = x_o exp\left[\mu\Delta t + \sigma\epsilon\sqrt{\Delta t}\right] \tag{4}$$

$$X_t = x_{t-1} exp\left[\mu\Delta t + \sigma\epsilon\sqrt{\Delta t}\right] \tag{5}$$

Example

Suponga que una acción que no paga dividendos cuyo rendimiento anual (μ) es del 7% y su volatilidad anual (σ) del 25%. Se tiene que el precio incial de la acción es de $\$25,400.00um.$. Encuentre los precios de la acción X_t para los siguientes cuatro dias.

SOLUCIÓN: El MBG asociado es:

$$X_t = X_{t-1} exp[0.07\Delta t + 0.25\epsilon\sqrt{\Delta t}]$$

Considerando un intervalo de tiempo diario, la ecuación puede reescribirse como:

$$X_t = X_{t-1} exp\left[0.07\left(\frac{1}{252}\right) + 0.25\epsilon\sqrt{\frac{1}{252}}\right]$$

Si $\epsilon \sim \eta(0,1)$

Consideramos que el precio inicial de la acción es de $\$25,400$ u.m, de esta manera,

$$
\begin{aligned}
X_1 &= (25400) exp[0.07\left(\frac{1}{252}\right) \\
&+ 0.25(-0.7849082)\sqrt{\frac{1}{252}}] \\
&= 25094.93
\end{aligned}
$$

Días	ϵ	X_t
0		25400
1	-0.7849082	25094.93
2	-0.2795144	24991.65
3	-0.1614579	24935.11
4	-0.2905966	24828.15

Table: X_t para los siguientes 4 días.

A continuación se muestra un código en R, para la simulación del ejemplo.

```
set.seed(345)
epsilon <- rnorm(4, 0, 1)
mu <- 0.07
sigma <- 0.25
delta_t <- 1/252
S <- NULL
S[1] <- 25400
simulate_prices <- function(n)
    {
  for (t in 2:n) {
    S[t] <- S[t - 1] * exp(mu
    * delta_t + sigma *
    epsilon[t - 1] * sqrt(
    delta_t))}
  return(S[1:n])}
n_simulations <- 5
simulated_prices <- simulate_
    prices(n_simulations)
print(simulated_prices)
```

Bibliografía

- Rincón, L. (2012). Introducción a los procesos estocásticos. Universidad Nacional Autónoma de México. http://lya.fciencias.unam.mx/lars/libros/procesos2012.pdf
- Velásquez-Gaviria, D. (2019). Introducción al Movimiento Browniano para Finanzas en R. ResearchGate.https://www.researchgate.net/publication/335057406