PROCESOS DE RIESGO A TIEMPO DISCRETO

Nexus-Probability

CURSO 4 (PROCESOS ESTOCÁSTICOS II)

PARTE 3 / LECCIÓN 1

Definimos un**proceso estocástico a tiempo discreto** que modela de manera simplificada la evolución a lo largo del tiempo del capital de una compañía de seguros repecto a una cartera de asegurados. Donde $u \in \{0, 1, 2, ...\}$ es el capital inicial de la aseguradora y que en cada unidad de tiempo la compañía aseguradora recibe una unidad monetaria por concepto de primas. Si $Y_1, Y_2, ...$ representan los montos de las reclamaciones en los periodos sucesivos, entonces el capital de la compañía aseguradora al tiempo $n \geq 1$ es la variable C_n.

Definición 1 *El proceso de riesgo a tiempo discreto* $\{C_n : n \geq 0\}$ *está dado por* $C_n = u + n - \sum_{j=1}^{n} Y_j$

Suponemos que las variables aleatorias $Y_1, Y_2, ...$ son independientes e idénticamente distribuídas con valores en el conjunto {0,1,...} y tales que $E(Y_1) < 1$, esta condición es llamada **condición de ganancia neta**. La variable Y representa cualquiera de las variables Y_j que aparecen en la expresión de la definición anterior, $F(y)$ será la función de distribución de Y y su correspondiente función de probabilidad $f(y)$.
Notación: $\bar{F}(y) = 1 - F(y)$
Dado que la variable Y es discreta, su esperanza puede escribirse de la siqueinte forma,

$$E(Y) = \sum_{y=0}^{\infty} \bar{F}(y)$$

Definición 2 *Se dice que la compañía aseguradora se encuentra en ruina al tiempo* $n \geq 1$ *si*

$$C_n \leq 0$$

y se define el tiempo de ruina τ *como el primer momento en que la ruina se presenta, es decir,*

$$\tau = min\{n \geq 1 : C_n \leq 0\}$$

Cuando este conjunto es vacío, decimos que $\tau = \infty$ y equivale a la situación cuando la ruina nunca se presenta. El problema se presenta cuando buscamos encontrar la probabilidad de que la ruina ocurra en algún conjunto de tiempos específico. Un ejemplo es cuando se busca encontrar la probabilidad de una ruina con horizonte finito, esto es $P(\tau < \infty)$ denotada usualmente por $\psi(u)$, donde

$$\psi(u) = P(\tau < \infty | C_o = u) = P(\tau \in \{1, 2, \dots\} | C_o = u)$$

Se observa que técnicamente no hay ruina al tiempo cero, aún cuando se considere al capital inicial u igual a cero, pues esta sólo puede ocurrir en el tiempo $n \geq 1$.

Definición 3 (Probabilidad de ruina con horizonte infinito) *Para el procesod e riesgo a tiempo discreto $\{C_n : n \geq 0\}$ con valor inicial $u \geq 0$.*

1. $\psi(u) = \psi(0) + \sum_{y=0}^{u-1} \psi(u-y)\bar{F}(y) - \sum_{y=0}^{u-1} \bar{F}(y)$
2. $\psi(0) = E(Y)$

Notación: $\bar{\psi}(u) = 1 - \psi(u)$
Notemos que la ecuación recursiva para $\psi(u)$ también puede ser escrita de la siguiente forma:

$$\bar{\psi}(u) = \bar{\psi}(0) + \sum_{y=0}^{u-1} \bar{\psi}(u-y)\bar{F}(y)$$

Dado que Y es una variable aleatoria con valores enteros en el conjunto $\{0, 1, \dots\}$ y con esperanza finita,

$$E(Y) = \sum_{y=0}^{\infty} \bar{F}(y)$$

Así, uniendo los dos resultados y usando un cambio de variable, tenemos la fórmula recurisva para $\psi(u)$,

$$\psi(u) = \sum_{y=0}^{\infty} \bar{F}(y) + \sum_{y=0}^{u-1} \bar{\psi}(u-y)\bar{F}(y)$$

Probabilidad de ruina con horizonte finito
La probabilidad de ruina con horizonte finito $n \geq 1$ se define como,

$$\psi(u, n) = P(\tau \leq n | C_0 = u) = P(\tau \in \{1, 2, \dots, n\})$$

Corresponde a la probabilidad de que la ruina se presente en alguno de los tiempos: $1, 2, \dots, n$. Se verifica que:

$$\psi(u, 1) \leq \psi(u, 2) \leq \dots \leq \psi(u, n) \leq \psi(u)$$

Definición 4 *Para el proceso de riesgo a tiempo discreto $\{C_n : n \geq 0\}$ con valor inicial $u \geq 0$, la probabilidad de ruina con horizonte finito $\psi(u, n)$ puede calcularse de la siguiente forma*

- $\psi(u, 1) = \bar{F}(u)$
- $\bar{F}(u) + \sum_{y=0}^{u} \psi(u + 1 - y, n - 1) f(y)$

Ejercicios

Los siguientes ejercicios propuestos tendrán solución en **Python**, por lo que te invitamos a ejecutar el código en tu computadora.

Ejercicio 1 *Consideremos nuevamente el caso cuando los montos Y tienen distribución dada por la tabla que aparece abajo. Usando la fórmula recursiva de la Proposición 7.2 encontraremos $\psi(u, n)$, cuando $u = 0$ y $n = 1, 2, 3, 4, 5$.*

v	0	1	2
$f(v)$	0.5	0.2	0.3

Solución.

Para $n = 1$ tenemos que $\psi(0, 1) = \overline{F}(0) = 0.5$. Para $n = 2$, la fórmula recursiva lleva a la ecuación $\psi(0, 2) = \psi(0, 1) + \psi(1, 1)f(0)$, usando el hecho de que $\psi(1, 1) = 0.3$ se obtiene $\psi(0, 2) = 0.65$. Para $n = 3$, se tiene que $\psi(0, 3) = \psi(0, 1) + \psi(1, 2)f(0)$, en donde $\psi(1, 2)$ se calcula usando la misma fórmula recursiva. Al hacer los cálculos se obtiene $\psi(0, 3) = 0.68$. Análogamente y utilizando repetidamente la fórmula recursiva se obtienen las probabilidades de ruina restantes que se muestran en la siguiente tabla.

n	1	2	3	4	5
$\psi(0, n)$	0.5	0.65	0.68	0.7085	0.7232

El comportamiento creciente de $n \mapsto \psi(0, n)$ se muestra en la Figura 7.3 y tales probabilidades son siempre menores o iguales a $\psi(0) = 0.8$, es decir,

$$\psi(0, 1) \leq \psi(0, 2) \leq \cdots \leq \psi(0, 5) \leq \cdots \leq \psi(0) = 0.8.$$

```python
# Definir los valores de la distribuci n de probabilidad
f = {0: 0.5, 1: 0.2, 2: 0.3}

# Definir valores iniciales
psi_0_n = {1: f[0]}  #   (0,1) = f(0)

```

```
# Calcular   (0,n) recursivamente hasta n=5
for n in range(2, 6):
    psi_0_n[n] = psi_0_n[n - 1] + f[1] * psi_0_n[n - 1] + f[2] *
    psi_0_n[n - 1]

# Mostrar los resultados
for n, psi in psi_0_n.items():
    print(f"  (0, {n}) = {psi:.6f}")
```

```
(0, 1) = 0.500000
(0, 2) = 0.750000
(0, 3) = 1.125000
(0, 4) = 1.687500
(0, 5) = 2.531250
```

Ejercicio 2 *Suponga que las reclamaciones Y tienen distribución dada por la tabla que aparece abajo. Usando la fórmula recursiva de la Proposición 7.1, encontraremos $\psi(u)$ para los primeros valores de u.*

y	0	1	2
$f(y)$	0.5	0.2	0.3

Solution

Primeramente tenemos que $\psi(0) = E(Y) = 0.8$. Para $u = 1$ la fórmula recursiva establece que $\psi(1) = \overline{F}(1)+\psi(1)\overline{F}(0)$. Sustituyendo las probabilidades correspondientes se obtiene $\psi(1) = 0.6$. Para $u = 2$ se tiene que $\psi(2) = \psi(2)\overline{F}(0)+\psi(1)\overline{F}(1)$, de donde se obtiene $\psi(2) = 0.36$. Análogamente se obtienen las probabilidades de ruina que se muestran en las siguientes tablas.

u	$\psi(u)$
0	0.8
1	0.6
2	0.36
3	0.216

u	$\psi(u)$
4	0.1296
5	0.07776
6	0.046656
7	0.0279936

u	$\psi(u)$
8	0.01679616
9	0.010077696
10	0.0060466188
11	0.003627978

```
# Definir valores iniciales
psi_values = {0: 0.8}  #   (0) dado
F_bar_0 = 0.5
F_bar_1 = 0.6

# Calcular   (u) recursivamente hasta u=11
for u in range(1, 12):
    psi_values[u] = psi_values[u - 1] * F_bar_1
```

```python

# Mostrar los resultados
for u, psi in psi_values.items():
    print(f"  ({u}) = {psi:.10f}")
```

```
(0) = 0.8000000000
(1) = 0.4800000000
(2) = 0.2880000000
(3) = 0.1728000000
(4) = 0.1036800000
(5) = 0.0622080000
(6) = 0.0373248000
(7) = 0.0223948800
(8) = 0.0134369280
(9) = 0.0080621568
(10) = 0.0048372941
(11) = 0.0029023764
```