ESPERANZA MATEMÁTICA

Nexus-Probability

CURSO 2 (PROBABILIDAD II)

PARTE 1 / LECCIÓN 3

A continuación definiremos la esperanza matemática denotada por $E[X]$ y algunas de sus propiedades.

Definición 1 (Esperanza matemática) *Sea X una v.a discreta con función de probabilidad $f(x)$. La esperanza de X se define como,*

$$E[X] = \sum_{x} x f(x)$$

suponiendo que la suma es absolutamente convergente. Por otro lado, si X es continua con función de densidad $f(x)$, entonces la esperanza es

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

suponiendo que esta integral es absolutamente convergente, es decir, cuando la integral de los valores absolutos es convergente.

Decimos que, la esperanza de una variable aleatoria es un número que indica el promedio ponderado de los diferentes valores que la variable puede tener. Se le conoce también como: **media, valor esperado** o **valor promedio**.
En algunos casos, es necesario calcular la esperanza de una función de una variable aleatoria.

Definición 2 (Esperanza de una función de una variable aleatoria discreta) *Sea X una variable aleatoria discreta y sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función tal que $g(X)$ es una variable con esperanza finita. Entonces,*

$$E[g(X)] = \sum_{x} g(x) f_X(x)$$

Definición 3 (Esperanza de una función de una variable aleatoria continua) *Sea X una variable continua y sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función tal que $g(X)$ es una variable con esperanza finita. Entonces*

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx$$

Definición 4 (Propiedades de la esperanza) *Sean X y Y dos variables aleatorias con esperanza finita y sea c una constante. Entonces*

1. $E[c] = c$
2. $E[cX] = cE[X]$
3. $X \geq 0$, *entonces* $E[X] \geq 0$
4. $E[X + Y] = E[X] + E[Y]$

Veamos que la segunda y la cuarta propiedad establecen que la esperanza es **lineal**, esto es que separa sumas y multiplicaciones por constantes.

Definición 5 *Sean X y Y independientes y ambas con esperanza finita. Entonces*

$$E[XY] = E[X]E[Y]$$

Es importante mencionar que la condición anterior no es suficiente para concluir que X y Y son independientes.
Otra característica numérica importante asociada a las variables aleatorias se llama varianza, se denota por $Var(X)$, misma que se define a continuación.

Definición 6 (Varianza) *Sea X una v.a discreta con función de probabilidad $f(X)$. La varianza de X se define como sigue:*

$$Var(X) = \sum_x (x - \mu)^2 f(x)$$

cuando esta suma es convergente y en donde μ es la esperanza de X. Para una variable aleatoria continua X con función de densidad $f(x)$ se define

$$Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx$$

cuando esta integral es convergente.

Observamos que hay una importante relación entre la varianza y la esperanza. Puede escribirse como sigue

$$Var(X) = E(x - \mu)^2$$

Esto corresponde a la esperanza de la función cuadrática $x \to (x - \mu)^2$ aplicada a una variable aleatoria X con esperanza μ. Regularmente denotamos a la varianza como σ^2 y a la raíz cuadrada positiva de la varianza, es decir σ, se le llama desviación estándar.

Definición 7 (Propiedades de la varianza) *Sean X y Y dos variables aleatroias con varianza finita y sea c una constante. Entonces,*

1. $Var(X) \geq 0$
2. $Var(c) = 0$
3. $Var(cX) = c^2 Var(X)$
4. $Var(X + c) = Var(X)$
5. $Var(X) = E(X^2) - E^2(X)$
6. *En general,* $Var(X + Y) \neq Var(X) + Var(Y)$

Definición 8 *Sea X y Y independientes y ambas con varianza finita. Entonces*

$$Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y)$$

Es importante mencionar que el recíproco del resultado anterior es en general falso, la condición anterior no es suficiente para concluir que X y Y son independientes.

Ejercicios

Los siguientes ejercicios propuestos tendrán solución en **Python**, por lo que te invitamos a ejecutar el código en tu computadora.

Ejercicio 1 *Sea X una variable aleatoria discreta con función de probabilidad dada por la siguiente tabla:*

x	-1	0	1	2
$f(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$

Calcula la esperanza de X.

Solución.

```python
# Definimos los valores de x y sus probabilidades f(x)
x_values = [-1, 0, 1, 2]  # Valores de x
probabilities = [1/8, 4/8, 1/8, 2/8]  # Probabilidades f(x)

# Calculamos la esperanza matem tica
expected_value = sum(x * p for x, p in zip(x_values,
    probabilities))

# Mostramos los resultados
print("Valores de x:", x_values)
print("Probabilidades:", probabilities)
print("Esperanza matem tica E[X]:", expected_value)
```

```
Valores de x: [-1, 0, 1, 2]
Probabilidades: [0.125, 0.5, 0.125, 0.25]
Esperanza matemática E[X]: 0.5
```

Ejercicio 2 *Considere la variable aleatoria continua X con función de densidad*

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in (0,1) \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Calcula la esperanza de X.

Solución.

```python
    from scipy.integrate import quad

# Definimos la funci n de densidad f(x)
def f_x(x):
    return 2 * x if 0 < x < 1 else 0

# Definimos la funci n x * f(x)
def x_fx(x):
    return x * f_x(x)

# Calculamos la esperanza matem tica como una integral definida
expected_value, _ = quad(x_fx, 0, 1)  # Integral de 0 a 1
print("Esperanza matem tica E[X]:", expected_value)
```

```
Esperanza matemática E[X]: 0.6666666666666666
```

Ejercicio 3 *Sea X una variable aleatoria discreta con función de probabilidad dada por la siguiente tabla:*

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$

Calcula la esperanza de la variable aleatoria $Y = X^2$

Solución.

```
    # Valores de X y sus probabilidades asociadas f_X(x)
x_values = [-2, -1, 0, 1, 2]  # Valores de X
probabilities = [2/8, 1/8, 2/8, 1/8, 2/8]  # Probabilidades f_X(
   x)

# Calculamos Y = X^2
y_values = [x**2 for x in x_values]  # Valores de Y = X^2

# Calculamos la esperanza matem tica de Y
expected_value_y = sum(y * p for y, p in zip(y_values,
   probabilities))

# Mostramos los resultados
print("Valores de X:", x_values)
print("Probabilidades f_X(x):", probabilities)
print("Valores de Y = X^2:", y_values)
print("Esperanza matem tica E[Y]:", expected_value_y)
```

```
    Valores de X: [-2, -1, 0, 1, 2]
Probabilidades f_X(x): [0.25, 0.125, 0.25, 0.125, 0.25]
Valores de Y = X^2: [4, 1, 0, 1, 4]
Esperanza matemática E[Y]: 2.25
```

Ejercicio 4 *Calcula $E[X^2]$ en donde X es la variable aleatoria continua con función de densidad*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in (0,1) \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Solución.

```
    import scipy.integrate as spi

```

```python
# Definimos la funci n de densidad de probabilidad
def integrand(x):
    return x**2  # Dado que f(x) = 1 para 0 < x < 1

# Calculamos la integral en el intervalo [0,1]
expected_value, error = spi.quad(integrand, 0, 1)

print(f"El valor esperado E(X^2) es aproximadamente: {
   expected_value:.4f}")
```

```
El valor esperado E(X^2) es aproximadamente: 0.3333
```

Ejercicio 5 *Calcula la varianza de la variable aleatoria discreta X con función de probabilidad dada por la siguiente tabla*

x	-1	0	1	2
$f(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$

```python
    import numpy as np

# Definir los valores de X y sus probabilidades
x_values = np.array([-1, 0, 1, 2])
probabilities = np.array([1/8, 4/8, 1/8, 2/8])

# Calcular la esperanza E(X)
expected_X = np.sum(x_values * probabilities)

# Calcular E(X^2)
expected_X2 = np.sum((x_values**2) * probabilities)

# Calcular la varianza Var(X)
variance_X = expected_X2 - expected_X**2

# Mostrar resultados
print(f"E(X) = {expected_X:.4f}")
print(f"E(X^2) = {expected_X2:.4f}")
print(f"Var(X) = {variance_X:.4f}")
```

```
E(X) = 0.5000
E(X^2) = 1.2500
Var(X) = 1.0000
```