DEFINICIÓN DE VARIABLES ALEATORIAS

Nexus-Probability

CURSO 1 (PROBABILIDAD I)

PARTE 3 / LECCIÓN 1

Frecuentemente sucede que al realizar un experimento estamos más interesados en algunas funciones del resultado en lugar del resultado en sí. Por ejemplo, al lanzar dados, a menudo nos interesa la suma de los dos dados y no nos preocupamos por el resultado exacto. Es decir, podemos estar interesados en saber que la suma es siete y no preocuparnos por si el resultado real fue (1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2) o (6, 1). Estas cantidades de interés, o más formalmente, estas funciones reales definidas sobre el espacio muestral, se conocen como **variables aleatorias**.

Dado que el valor de una variable aleatoria está determinado por el resultado del experimento, podemos asignar probabilidades a los posibles valores de la variable aleatoria.

Definición 1 (Variable Aleatoria) *Una **variable aleatoria** es una función que asigna un número real a cada posible resultado de un experimento aleatorio. Existen dos tipos principales de variables aleatorias: discretas y continuas. Formalmente, si $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ es un espacio de probabilidad, una variable aleatoria $X : \Omega \to \mathbb{R}$ es una función que es medible, es decir, cumple con la condición de que:*

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Propiedades de Variables Aleatorias

A continuación se inunciarán unos conceptos que se profundizarán en lecciones posteriores, pero servirá para los entusiastas.

- **Esperanza Matemática o Valor Esperado**. La esperanza matemática de una variable aleatoria X, denotada por E (X), es el valor promedio ponderado que X tomaría a lo largo de muchas repeticiones del experimento aleatorio.

- **Varianza**. La varianza de una variable aleatoria X, denotada Var(X), mide la dispersión de los valores de X respecto a su esperanza.
- **Función de distribución acumulativa**. La función de distribución acumulada de una variable aleatoria X es una función que da la probabilidad de que X tome un valor menor o igual a x. Se denota como F(x).
- **Independencia**. Dos variables aleatorias X y Y son **independientes** si el hecho de que una tome un valor particular no afecta la distribución de probabilidad de la otra. Esto se formaliza como:

  $$P(X \leq x, Y \leq y) = P(X \leq x) \cdot P(Y \leq y) \quad \text{para todo} \quad x, y$$

  Si las variables son independientes, se cumple también:

  $$E(XY) = E(X) \cdot E(Y)$$

- **Covarianza**. La covarianza entre dos variables aleatorias X y Y mide cómo varían conjuntamente.

  $$\text{Cov}(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))] = E(XY) - E(X)E(Y)$$

  Si $\text{Cov}(X, Y) = 0$, se dice que X y Y son incorreladas, pero esto no implica que sean independientes.

Ejercicios

Los siguientes ejercicios propuestos tendrán solución en **Python**, por lo que te invitamos a ejecutar el código en tu computadora.

Ejercicio 1 *Vamos a realizar una simulación en Python que modele el lanzamiento de una moneda, donde X = 1 representa que salió águila, y X = 0 que salió sol.*

Solución.

```python
import random

# Funcion que simula un lanzamiento de moneda
def lanzar_moneda():
    resultado = random.choice(["Aguila", "Sol"])
    if resultado == "Aguila":
        return 1  # Representa el valor de X(Aguila)
    else:
```

```python
            return 0  # Representa el valor de X(Sol)

    # Simulamos n lanzamientos
    n = 1000
    lanzamientos = [lanzar_moneda() for _ in range(n)]

    # Resultados de los lanzamientos
    aguilas = sum(lanzamientos)
    soles = n - aguilas

    print(f"Total de lanzamientos: {n}")
    print(f"Aguilas: {aguilas}")
    print(f"Soles: {soles}")

```

Ejercicio 2 *Consideremos un examen de opción múltiple con 10 preguntas, cada una con 4 posibles respuestas, de las cuales solo una es correcta. Si un estudiante selecciona las respuestas al azar, podemos modelar el número de respuestas correctas como una variable aleatoria.*
Sean:

- X*: número de respuestas correctas.*
- $n = 10$*: número de preguntas.*
- $p = \frac{1}{4}$*: probabilidad de acertar una pregunta.*

Solución.

En este caso, X sigue una distribución binomial con parámetros n y p. La probabilidad de obtener k respuestas correctas es:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

La variable aleatoria X puede tomar valores de 0 a 10, dependiendo de cuántas respuestas correctas obtiene el estudiante al azar.

```python
    # Examen de opcion multiple (Distribucion Binomial)

    def binomial_probability(n, k, p):
    """Calcula la probabilidad binomial P(X = k)"""
    coef_binom = math.comb(n, k)
    return coef_binom * (p ** k) * ((1 - p) ** (n - k))

```

```
# Parametros del ejemplo 1
n = 10  # Numero de preguntas
p = 1/4  # Probabilidad de acertar una pregunta
k_values = np.arange(0, n+1)  # Valores de k (respuestas correctas)

# Calculo de la probabilidad para cada valor de k
binomial_probabilities = [binomial_probability(n, k, p) for k in k_values]
```

Ejercicio 3 *Consideremos el número de coches que pasan por una intersección en una hora. Este número puede variar cada día y es un ejemplo de una variable aleatoria discreta.*
Sean:

- Y*: número de coches que pasan por la intersección en una hora.*
- *El valor de* Y *puede variar dependiendo del tráfico, pero asumiendo que en promedio pasan 150 coches por hora, podemos modelar este proceso utilizando una distribución de Poisson.*

Solución.

La probabilidad de observar k coches en una hora es:

$$P(Y = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

donde $\lambda = 150$ es el número promedio de coches que pasan por la intersección en una hora.

```
def poisson_probability(lambd, k):
"""Calcula la probabilidad de Poisson P(Y = k)"""
return (lambd ** k) * math.exp(-lambd) / math.factorial(k)

# Parametros del ejemplo 2
lambda_poisson = 150  # Numero promedio de coches por hora
k_values_poisson = np.arange(0, 300, 10)  # Valores de k para el numero de coches

# Calculo de la probabilidad para cada valor de k
poisson_probabilities = [poisson_probability(lambda_poisson, k) for k in k_values_poisson]
```