TIEMPOS DE PARO

Nexus-Probability

CURSO 3 (PROCESOS ESTOCÁSTICOS I)

PARTE 1 / LECCIÓN 1

Desde un punto de vista intuitivo, los tiempos de parada actúan como mecanismos de truncamiento para las realizaciones de un proceso estocástico. En esta sección, introducimos la definición formal de tiempo de parada y exploramos algunas de sus propiedades en el contexto de las martingalas.

1. Tiempo de Paro.

Definición 1 (Tiempo de Paro) *Una variable aleatoria $T : \Omega \to \mathbb{N}\bigcup\{\infty\}$ se llama tiempo de paro con respecto a la filtración $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, si $\{w : T(w) \leq n\} \in \mathcal{F}_n$ para todo $n \geq 0$ (o equivalentemente $\{w : T(w) = n\} \in \mathcal{F}_n$ para todo $n \geq 0$).*

El ejemplo clásico de tiempo de paro es el tiempo de la primera visita de una sucesión aleatoria $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a un conjunto medible $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, definido por

$$T_B = \begin{cases} \inf\{n \in \mathbb{N} : \{X_n \in B\}\} & \text{si } \{n \in \mathbb{N} : X_n \in B\} \neq \varnothing, \\ \infty & \text{si } \{n \in \mathbb{N} : X_n \in B\} = \varnothing. \end{cases}$$

En efecto, se tiene que T_B es un tiempo de paro con respecto a la filtración natural de X: $\mathcal{F}_n^X = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$, pues $\{w : T_B(w) \leq n\} = \bigcup\limits_{k\leq n} \{w : X_k(w) \in B\} \in \mathcal{F}_n^X$.

También, si T es un tiempo de paro y $m \in \mathbb{N}$, entonces $S = T \wedge m = \min\{T, m\}$ es un tiempo de paro, pues $\{S \leq n\} = \{T \leq n\} \cup \{m \leq n\} \in \mathcal{F}_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Si T es un tiempo de paro con respecto a la filtración $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de variables aleatorias, entonces la función X_T dada por

$$X_T(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(\omega) I_{\{T=n\}}(\omega),$$

donde $X_T = 0$ sobre el conjunto $\{\omega : T = \infty\}$, es una variable aleatoria ($\mathcal{F}$-medible). En efecto, para cada $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ se tiene

$$\{\omega \in \Omega : X_T(\omega) \in B\} = \bigcup_{n \geq 1} \{(\omega \in \Omega : X_n(\omega) \in B\} \cap \{\omega \in \Omega : T(\omega) = n\}) \in \mathcal{F}.$$

Por definición, si $\{X_n,\ \mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una martingala (submartingala, supermartingala), entonces $E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = X_n$ ($E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) \geq X_n$, $E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) \leq X_n$, respectivamente). Por lo tanto, $E(X_{n+1}) = E(X_n)$ ($E(X_{n+1}) \geq E(X_n)$, $E(X_{n+1}) \leq E(X_n)$; respectivamente). De aquí que $E(X_n) = E(X_1)$ ($E(X_n) \geq E(X_1)$, $E(X_n) \leq E(X_1)$) para todo $n \in \mathbb{N}$. Si T es un tiempo de paro, es importante saber bajo qué condiciones se mantiene la igualdad cuando reemplazamos n por el tiempo de paro T, esto es, $E(X_T) = E(X_1)$ ($E(X_T) \geq E(X_1)$, $E(X_T) \leq E(X_1)$, respectivamente), cuestión que se trata en lo que sigue.

Teorema 1 (Martingalas Frenadas.) *Sean $X = \{X_n,\ \mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión estocástica y T un tiempo de paro con respecto a la filtración $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.*

Demostración.

(1) Si $\{X_n,\ \mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una submartingala, entonces $X^T = \{X_{T\wedge n},\ \mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una submartingala, y en particular $E(X_{T\wedge n}) \geq E(X_1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$

(2) Si $\{X_n,\ \mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una martingala, entonces $X^T = \{X_{T\wedge n},\ \mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una martingala, y en particular $E(X_{T\wedge n}) = E(X_1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(3) Si $\{X_n,\ \mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una supermartingala, entonces $X^T = \{X_{T\wedge n},\ \mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una supermartingala, y en particular $E(X_{T\wedge n}) \leq E(X_1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demostración.

(1) Para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$X_{T\wedge n} = X_T I_{\{T\leq n\}} + X_n I_{\{T>n\}} = \sum_{j=1}^{n} X_j I_{\{T=j\}} + X_n I_{\{T>n\}},$$

por lo que $X_{T\wedge n}$ es $\mathcal{F}_n$-medible e integrable. Puesto que

$$X_{T\wedge(n+1)} - X_{T\wedge n} = I_{\{T>n\}} \left(X_{n+1} - X_n\right),$$

tomando esperanza condicionada con respecto a $\mathcal{F}_n$ y usando (10) del Teorema 1.2, se llega a

$$E\left(X_{T\wedge n+1} - X_{T\wedge n}|\mathcal{F}_n\right) = I_{\{T>n\}} E\left(X_{n+1} - X_n|\mathcal{F}_n\right) \geq 0,$$

lo que muestra que $\{X_{T\wedge n},\ \mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una submartingala. Por lo dicho arriba, se tiene que $E(X_{T\wedge n}) \geq E(X_{T\wedge 1}) = E(X_1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Las demostraciones de (2) y (3) se hacen de forma análoga.

Ejercicios

Ejercicio 1 *Considera una caminata aleatoria simétrica* $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *definida de la siguiente manera:*

- $X_0 = 0$.
- *Para cada* $n \geq 1$, $X_n = X_{n-1} + Y_n$, *donde* Y_n *es una variable aleatoria que toma los valores* $+1$ *y* -1 *con probabilidad* $\frac{1}{2}$ *cada uno.*

Define el tiempo de paro T *como el primer momento en el que la caminata aleatoria alcanza el valor* $+5$ *o* -5*. Es decir,*

$$T = \inf\{n \in \mathbb{N} : X_n = 5 \text{ o } X_n = -5\}.$$

1. *Simula 1000 trayectorias de la caminata aleatoria y calcula el tiempo de paro* T *para cada una.*
2. *Estima la probabilidad de que la caminata alcance* $+5$ *antes que* -5*.*
3. *Calcula el tiempo promedio de paro* $E[T]$*.*

Solución:

```
import numpy as np

# Par metros
n_simulations = 1000
target = 5  # Umbral de paro (+5 o -5)

# Funcion para simular una caminata aleatoria y calcular el tiempo de paro
def simulate_random_walk(target):
    position = 0
    steps = 0
    while abs(position) < target:
        position += np.random.choice([-1, 1])  # Movimiento aleatorio
        steps += 1
    return steps, position

# Simulacion de multiples trayectorias
stopping_times = []
final_positions = []

```

```python
for _ in range(n_simulations):
    steps, final_position = simulate_random_walk(target)
    stopping_times.append(steps)
    final_positions.append(final_position)

# Calculo de la probabilidad de alcanzar +5 antes que -5
prob_positive = np.mean(np.array(final_positions) == target)
print(f"Probabilidad de alcanzar +5 antes que -5: {prob_positive
    :.4f}")

# Calculo del tiempo promedio de paro
average_stopping_time = np.mean(stopping_times)
print(f"Tiempo promedio de paro E[T]: {average_stopping_time:.2f
    }")

# Visualizacion de los tiempos de paro
import matplotlib.pyplot as plt

plt.hist(stopping_times, bins=30, edgecolor='black')
plt.title("Distribucion de los Tiempos de Paro")
plt.xlabel("Tiempo de Paro (T)")
plt.ylabel("Frecuencia")
plt.show()
```

```
Probabilidad de alcanzar +5 antes que -5: 0.4890
Tiempo promedio de paro E[T]: 25.23
```

Explicación:

- **Simulación de la Caminata Aleatoria:**
  - La función `simulate_random_walk` simula una caminata aleatoria hasta que alcanza $+5$ o -5.
  - Registra el número de pasos (tiempo de paro T) y la posición final.
- **Probabilidad de Alcanzar $+5$ antes que -5:**
  - Se calcula la proporción de simulaciones en las que la posición final es $+5$.
- **Tiempo Promedio de Paro $E[T]$:**
  - Se calcula el promedio de los tiempos de paro obtenidos en las simulaciones.
- **Visualización:**
  - Se grafica un histograma de los tiempos de paro para observar su distribución.

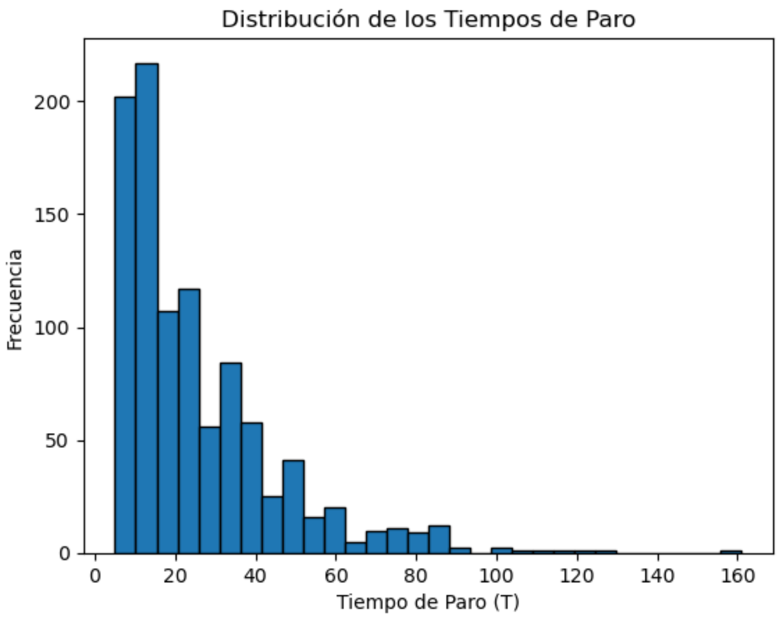

Figura 1: Distribución Tiempo de Paro.

Resultados Esperados:

- La probabilidad de alcanzar $+5$ antes que -5 debería ser cercana a 0.5 debido a la simetría de la caminata.
- El tiempo promedio de paro $E[T]$ dependerá de la volatilidad de la caminata, pero debería ser un valor finito.

Conclusión: Este ejercicio ilustra cómo los tiempos de paro pueden usarse para analizar el comportamiento de procesos estocásticos, como una caminata aleatoria, y cómo se pueden estimar probabilidades y valores esperados mediante simulación.

Ejercicio 2 (Finanzas) *Supongamos que el precio de una acción S_n sigue un modelo discreto en el tiempo $n = 0, 1, 2, \ldots$, donde:*

- $S_0 = 100$ *(precio inicial).*
- $S_n = S_{n-1} \cdot e^{Y_n}$, *con* Y_n *una variable aleatoria que toma valores* $+0.03$ *o* -0.03 *con probabilidad* $\frac{1}{2}$.

Define el tiempo de paro T *como el primer momento en el que el precio de la acción alcanza un valor de* 120 *(umbral superior) o* 80 *(umbral inferior). Es decir,*

$$T = \inf\{n \in \mathbb{N} : S_n \geq 120 \text{ o } S_n \leq 80\}.$$

1. *Simula 1000 trayectorias del precio de la acción y calcula el tiempo de paro* T *para cada una.*
2. *Estima la probabilidad de que el precio alcance* 120 *antes que* 80.
3. *Calcula el tiempo promedio de paro* $E[T]$.

Solución:

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Par metros
n_simulations = 1000
initial_price = 100
upper_threshold = 120
lower_threshold = 80
delta = 0.03  # Variaci n diaria (3%)

# Funci n para simular una trayectoria del precio y calcular el tiempo de paro
def simulate_stock_price(initial_price, upper_threshold, lower_threshold):
    price = initial_price
    steps = 0
    while lower_threshold < price < upper_threshold:
        # Generar movimiento +3% o -3% con igual probabilidad
        movement = np.random.choice([1 + delta, 1 - delta])
        price *= movement
        steps += 1
    return steps, price

```

```
# Simulaci n de m ltiples trayectorias
stopping_times = []
final_prices = []

for _ in range(n_simulations):
    steps, final_price = simulate_stock_price(initial_price, upper_threshold, lower_threshold)
    stopping_times.append(steps)
    final_prices.append(final_price)

# C lculo de la probabilidad de alcanzar 120 antes que 80
prob_upper = np.mean(np.array(final_prices) >= upper_threshold)
print(f"Probabilidad de alcanzar 120 antes que 80: {prob_upper:.4f}")

# C lculo del tiempo promedio de paro
average_stopping_time = np.mean(stopping_times)
print(f"Tiempo promedio de paro E[T]: {average_stopping_time:.2f}")

# Visualizaci n de los tiempos de paro
plt.hist(stopping_times, bins=30, edgecolor='black')
plt.title("Distribuci n de los Tiempos de Paro")
plt.xlabel("Tiempo de Paro (T)")
plt.ylabel("Frecuencia")
plt.show()
```

```
Probabilidad de alcanzar 120 antes que 80: 0.4950
Tiempo promedio de paro E[T]: 53.14
```

Explicación:

- **Simulación del Precio de la Acción:**
  - La función `simulate_stock_price` simula el precio de la acción hasta que alcanza el umbral superior 120 o el umbral inferior 80.
  - Registra el número de pasos (tiempo de paro T) y el precio final.
- **Probabilidad de Alcanzar 120 antes que 80:**
  - Se calcula la proporción de simulaciones en las que el precio final es ≥ 120.
- **Tiempo Promedio de Paro $E[T]$:**
  - Se calcula el promedio de los tiempos de paro obtenidos en las simulaciones.
- **Visualización:**

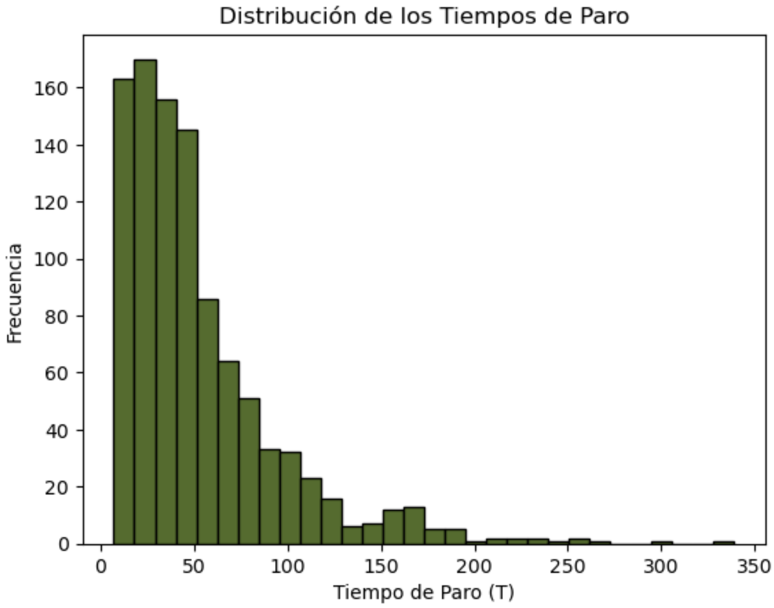

Figura 2: Distribución del Tiempo de Paro (Finanzas)

- Se grafica un histograma de los tiempos de paro para observar su distribución.

Resultados Esperados:

- La probabilidad de alcanzar 120 antes que 80 dependerá de la volatilidad y los umbrales definidos.
- El tiempo promedio de paro $E[T]$ proporciona una estimación del tiempo esperado para que el precio alcance uno de los umbrales.

Conclusión: Este ejercicio aplica el concepto de tiempos de paro en un contexto financiero, permitiendo analizar el comportamiento del precio de una acción y estimar probabilidades y tiempos esperados mediante simulación.