MODELO CLÁSICO DE CRAMÉR-LUNDBERG

Nexus-Probability

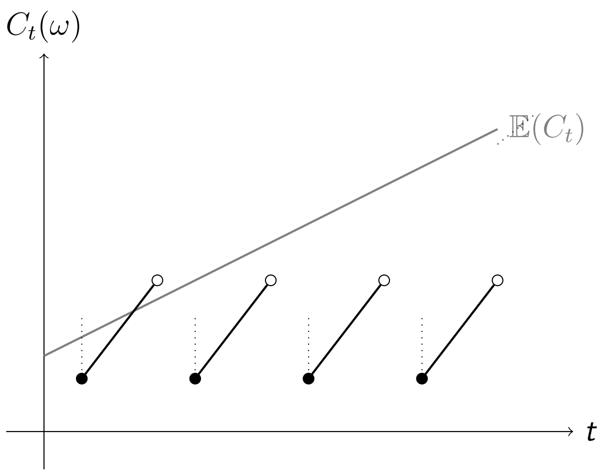
CURSO 4 (PROCESOS ESTOCÁSTICOS II)

PARTE 3 / LECCIÓN 2

Este modelo, **Cramér-Lundberg**, es la versión a tiempo continuo del modelo a tiempo discreto que estudiamos en *C4P3L1: Procesos de riesgo a tiempo discreto*. Filip Lundberg analiza el reaseguro de riesgos colectivos y presenta el proceso de Poisson compuesto. El modelo clásico que estudiaremos a continuación es el proceso estocástico a tiempo continuo $\{C_t : t \geq 0\}$ dado por,

$$C_t = u + ct - \sum_{j=1}^{N_t} Y_j$$

donde u es el capital inicial de la compañía aseguradora, ct es la entrada por primas hasta el tiempo t con c una constante positiva, Y_j es el monto de la j-ésima reclamación y $\{N_t : t \geq 0\}$ es un proceso de Poisson de parámetro λ. Observe que para un proceso de reclamaciones Poisson, la esperanza es ct y el principio de valor esperado para cálculo de prumas lleva a que el proceso de primas sea lineal como el sugerido en el modelo. La variable C_t representa el balance más sencillo de ingresos menos egresos de una compañía aseguradora. Al proceso $\{C_t : t \geq 0\}$ se le llama proceso de riesgo (risk process) o proceso de superávit (surplus process).



Observemos que estas trayectorias comienzan siempre en u. Los intervalos en donde ellas son continuas y crecientes y corresponden a periodos donde no hay reclamaciones. El crecimiento es de la forma ct, el tamaño de un salto es el tamaño de la reclamación dada por la variable Y. Suponemos que los montos $Y_1, Y_2, \ldots$ son variables aleatorias independientes, no negativas e idénticamente distribuídas con función generadora de momentos $M_Y(r)$.
La trayectoria promedio de este proceso de riesgo es la línea recta que inicia en $u > 0$ y tiene pendiente $c - \lambda\mu$, la cual es positiva por la condición o hipótesis de ganancia neta. Decimos que cuando $C_t \leq 0$ para algún $t > 0$ se dice que hay **ruina**.

Definición 1 (Condición de ganancia neta)

$$c > \lambda\mu$$

En promedio, la entrada por primas por unidad de tiempo, c, es mayor que el total de reclamaciones por unidad de tiempo $\lambda\mu$.

Sean $T_0, T_1, \ldots$ los tiempos aleatorios o tiempos de paro, donde la aseguradora recibe reclamaciones. Supondremos $T_0 = 0$. Para cada enterp $k \geq 1$ defina la variable aleatoria $X_k = c(T_k - T_{k-1}) - Y_k$, que pueden ser interpretadas como el balance de la compañía aseguradora entre dos siniestros sucesivos. La esperanza de este variable es,

$$E(X_k) = cE(T_k - T_{k-1}) - E(Y_k) = c(1/\lambda)$$

Es posible demostrar que la ruina ocurre casi seguramente si, y sólo si, $E(X_k) \leq 0$.
Ahora estamos interesados en calcular o estimar la probabilidad de una eventual ruina en el modelo de Crámer-Lundberg. Consideramos el tiempo de ruina dado por,

$$\tau = \acute{\imath}nf\{t > 0 : C_t \leq 0\}$$

Donde τ es una variable aleatoria con valores en el intervalo $(0, \infty]$, dado un valor $t > 0$ fijo, la probabilidad de ruina en el intervalo $(0, t]$ o también llamada probabilidad de ruina con horizonte finito es

$$\psi(u, t) = P(\tau \leq t | C_0 = u)$$

Mientras que la probabilidad de ruina con horizonte infinito, o simplemente probabilidad de ruina es

$$\psi(u) = lim_{t \to \infty} \psi(u, t) = P(\tau < \infty)$$

Es claro que cuando $0 < t_1 \leq t_2$

$$\psi(u, t_1) \leq \psi(u, t_2) \leq \psi(u)$$

Definición 2 *Sea $\bar{\psi}(u) = 1 - \psi(u)$. Suponga que la distribución de una reclamación en el modelo de Cramér-Lundberg es absolutamente continua con función de densidad $f(y)$. Entonces*

- $\frac{d}{du}\bar{\psi}(u) = \frac{\lambda}{\mu}[\bar{\psi}(u) - \int_0^u \bar{\psi}(u-y)f(y)dy]$
- $\psi(0) = \frac{\lambda\mu}{c}$
- $\psi(u) = \frac{\lambda}{c}[\int_u^\infty \bar{F}(y)dy + \int_0^u \psi(u-y)\bar{F}(y)dy]$

Ejercicios

Ejercicio 1 *Encontraremos la probabilidad de ruina cuando las reclamaciones son exponenciales. Este es uno de los pocos modelos para los cuales tal probabilidad puede encontrarse de manera explícita.*

Solución.

Considere entonces el modelo de Cramér-Lundberg en donde las reclamaciones tienen distribución $exp(\alpha)$. La esperanza es $\mu = 1/\alpha$, por lo anteriormente encontrado, la probabilidad de no ruina $\bar{\psi}(y) = 1 - \psi(y)$ cumple la ecuación

$$\bar{\psi}'(u) = \frac{\lambda}{c}[\bar{\psi}(u) - e^{-\alpha u}\int_0^u \bar{\psi}(y)\alpha e^{\alpha y}dy]$$

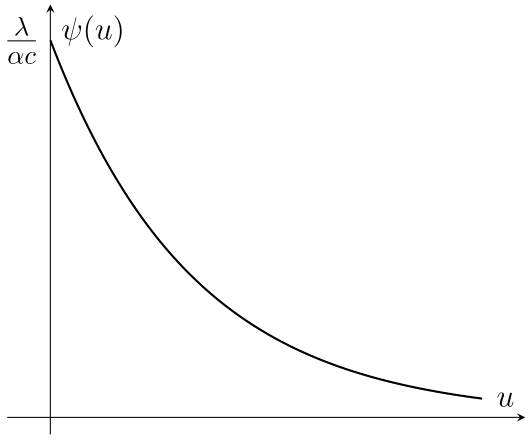
Derivando esta expresión se obtiene

$$\bar{\psi}''(u) = (\frac{\lambda}{c} - \alpha)\bar{\psi}'(u)$$

Cuya solución es $\bar{\psi}(u) = a + be^{-(\alpha-\lambda/c)u}$, en donde a y b son constantes. Usando las condiciones $\psi(0) = \lambda/(\alpha c)$ y $\psi(\infty) = 0$ se encuentra que $a = 1$ y $b = -\lambda/(\alpha c)$. Por lo tanto

$$\psi(u) = \frac{\lambda}{\alpha c}e^{-(\alpha-\lambda/c)u}$$

Veamos que debido a la condición de ganancia neta, el exponente $-(\alpha - \lambda/c)u$ es negativo, y por tanto la probabilidad de ruina decae a cero exponencialmente cuando el capital u crece a infinito.


$\frac{\lambda}{\alpha c}$
$\psi(u)$
u