

DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

Nexus-Probability

CURSO 1 (PROBABILIDAD I)

PARTE 4 / LECCIÓN 3

Definición 1 (Función de Densidad) *Un experimento binomial consiste en realizar n pruebas idénticas (o ensayos) idénticos e independientes. Y cada prueba tiene dos opciones: "éxito" o "fracaso". La probabilidad de éxito es p y la probabilidad de fracaso es $1 - p$. La v.a. se define como el número de éxitos en las n pruebas.*

El recorrido de la v.a. binomial X es:

$$X = 0, 1, 2, \dots, n$$

Una v.a. discreta X tiene distribución binomial con parámetros n y p si su función de densidad está dada por:

$$f_X(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \quad \text{para } x \in \{0, 1, 2, \dots, n\} \quad \text{y } 0 < p < 1$$

También se puede escribir como:

$$f_X(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}, \quad \text{donde } q = 1 - p \text{ y } p + q = 1$$

Teorema

Sea $X \sim \text{Binomial}(n, p)$, entonces:

- (i) $\mathbb{E}[X] = np$
- (ii) $\text{Var}[X] = np(1 - p)$
- (iii) $m_X(t) = (1 - p + pe^t)^n$

Teorema

La moda de una distribución $B(n, p)$ es un número entero M , tal que satisface la siguiente ecuación:

$$(I) \quad np - q \leq M \leq np + p$$

Ejercicios

Los siguientes ejercicios propuestos tendrán solución en **Python**, por lo que te invitamos a ejecutar el código en tu computadora.

Ejercicio 1 *La probabilidad de que a un cliente nuevo le guste la matehamburguesa de Jorge es de 0,8. Si llegan 5 clientes nuevos a la cafetería, ¿cuál es la probabilidad de que solo a 3 de ellos les guste la matehamburguesa?*

Solución.

```
1      # Ejercicio 1:
2      import math
3
4      # Parametros
5      n = 5      # Numero de clientes
6      p = 0.8    # Probabilidad de que a un cliente le guste la
matehamburguesa
7      k = 3      # Numero de clientes que les gusta la
matehamburguesa
8
9      # Calculo del coeficiente binomial
10     def coef_binomial(n, k):
11         return math.factorial(n) // (math.factorial(k) * math.
factorial(n - k))
12
13     # Calculo de la probabilidad
14     probabilidad = coef_binomial(n, k) * (p ** k) * ((1 - p) **
(n - k))
15
16     # Resultados para el Ejercicio 1
17     print(f'La probabilidad de que exactamente {k} de los {n}
clientes nuevos disfruten de la matehamburguesa es: {
probabilidad:.4f}')
18
```

Ejercicio 1:

La probabilidad de que exactamente 3 de los 5 clientes nuevos disfruten de la matehamburguesa es: 0.2048

Ejercicio 2 Se sabe que en un proceso de producción el **7.4 %** de artículos son producidos con algún defecto. Se obtiene una muestra aleatoria de **100 artículos**. Calcula la probabilidad:

1. Tener **10 artículos defectuosos**.
2. Tener **más de dos artículos defectuosos**.
3. El **promedio** y la **desviación estándar** del número de artículos defectuosos.
4. El **0.1 percentil**.
5. Encontrar la **moda**.

Solución.

```
1  import math
2
3  # Datos iniciales
4  n = 100 # Tamaño de la muestra
5  p = 0.074 # Probabilidad de defecto
6
7  # Función para calcular factorial
8  def factorial(k):
9      return 1 if k == 0 else k * factorial(k - 1)
10
11 # Función para calcular la probabilidad binomial
12 def binomial_prob(n, k, p):
13     comb = factorial(n) // (factorial(k) * factorial(n - k)) # Coeficiente binomial
14     prob = comb * (p ** k) * ((1 - p) ** (n - k)) # Fórmula de la probabilidad binomial
15     return prob
16
17 # a) Probabilidad de tener exactamente 10 artículos defectuosos
18 k = 10
19 prob_10_defectuosos = binomial_prob(n, k, p)
20
21
22 # b) Probabilidad de tener más de 2 artículos defectuosos
```

```

23     prob_mas_2_defectuosos = sum(binomial_prob(n, k, p) for k in
24     range(3, n + 1))
25
26     # c) Promedio y desviación estándar
27     promedio = n * p
28     desviacion_estandar = math.sqrt(n * p * (1 - p))
29
30
31     # d) Cálculo del 0.1 percentil
32     acumulada = 0
33     percentil = 0
34     for k in range(n + 1):
35         acumulada += binomial_prob(n, k, p)
36         if acumulada >= 0.1:
37             percentil = k
38             break
39
40     # e) Moda de la distribución binomial
41     moda = math.floor((n + 1) * p)
42
43     #Mostrar resultados
44     print(f"Probabilidad de tener 10 artículos defectuosos: {
45     prob_10_defectuosos:.6f}")
46     print(f"Probabilidad de tener más de 2 artículos
47     defectuosos: {prob_mas_2_defectuosos:.6f}")
48     print(f"Promedio: {promedio:.2f}, Desviación estándar: {
49     desviacion_estandar:.2f}")
50     print(f"0.1 percentil: {percentil}")
51     print(f"Moda: {moda}")

```

Probabilidad de tener exactamente 10 artículos defectuosos: 0.0843
 Probabilidad de tener más de 10 artículos defectuosos: 0.1210
 Promedio: 7.40
 Desviación estándar: 2.62
 Percentil del 0.1: 4.0
 Moda: 7

Ejercicio 3 Un examen tiene diez preguntas y cada una tiene tres opciones como respuesta, siendo solamente una de ellas la correcta. Si un estudiante contesta cada pregunta al azar, ¿cuál es la probabilidad de que apruebe el examen?

Si X denota el número de preguntas contestadas correctamente, entonces X tiene distribución binomial $\text{bin}(n, p)$ con $n = 10$ y $p = \frac{1}{3}$. Suponiendo que la calificación mínima aprobatoria es 6.

Solución.

```
1  import math
2
3  # Función para calcular la probabilidad de Poisson
4  def poisson_pmf(k, lambda_):
5      return (lambda_**k * math.exp(-lambda_)) / math.factorial(k)
6
7  # Parte a) Probabilidad de identificar 1 imperfección en 3
8  minutos
9  lambda_3min = 0.2 * 3
10 prob_a = poisson_pmf(1, lambda_3min)
11
12 # Parte b) Probabilidad de identificar al menos 2
13 imperfecciones en 5 minutos
14 lambda_5min = 0.2 * 5
15 prob_b = 1 - poisson_pmf(0, lambda_5min) - poisson_pmf(1,
16 lambda_5min)
17
18 # Parte c) Probabilidad de identificar como máximo 1
19 imperfección en 15 minutos
20 lambda_15min = 0.2 * 15
21 prob_c = poisson_pmf(0, lambda_15min) + poisson_pmf(1,
lambda_15min)
22
23 # Resultados de ejercicio 3
24 print(f"La probabilidad de aprobar el examen es: {
25 prob_aprobar:.6f}")
```

Ejercicio 3:

La probabilidad de aprobar el examen es: 0.076564