# ESPERANZA CONDICIONAL

*Nexus-Probability*

**CURSO 2 (PROBABILIDAD II)**

*PARTE 1 / LECCIÓN 3*

## Esperanza Condicional

Comencemos la sección recordando un par de definiciones.
Si $X$ y $Y$ son variables aleatorias conjuntas discretas, entonces se define la función de masa de probabilidad condicional de $X$ dado que $Y = y$ para todos los valores de $y$ tales que $P(Y = y) \geq 0$, como

$$P_{X|Y}(x|y) = PX = x|Y = y = \frac{p(x,y)}{p_Y(y)} \tag{1}$$

Es natural entonces definir, en este caso, la esperanza condicional de $X$ dado que $Y = y$, para todos los valores de $y$ tales que $p_Y(y) \geq 0$, por

$$E[X|Y = y] = \sum_x P[X = x|Y = y] = \sum_x x p_{X|Y}(x|y) \tag{2}$$

De manera similar, recordemos que si $X$ y $Y$ son variables aleatorias conjuntas continuas con función de densidad conjunta $f(x, y)$, entonces la función de densidad condicional de $X$, dado que $Y = y$, se define para todos los valores de $y$ tales que $f_Y(y) \geq 0$, como

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} \tag{3}$$

Entonces, en este caso se define la esperanza condicional de $X$, dado que $Y = y$, por

$$E[X|Y = y] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y}(x|y)dx \tag{4}$$

siempre que $f_Y(y) > 0$.

**Definición 1 (Valor Esperado de una Variable Aleatoria Continua)** *Si $X$ es una variable aleatoria continua con función de densidad $f(x)$ se define el valor esperado de esta variable aleatoria como*

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx \tag{5}$$

**Teorema 1** *Si $X$ es una variable aleatoria continua con función de densidad $f(x)$, entonces, para cualquien función real $g$,*

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx \tag{6}$$

## 0.1. Ejercicios:

**Ejercicio 1** *En una red de comunicaciones, hay tres servidores $A$, $B$ y $C$. La probabilidad de que el servidor $A$ esté disponible es $0.9$, la de $B$ es $0.8$ y la de $C$ es $0.7$.*
*Si los tres servidores están disponibles de manera independiente, encuentra la esperanza condicional de que $A$ esté disponible dado que $B$ está disponible.*

Solución:
Sabemos que $A$ y $B$ son eventos independientes, es decir,

$$P(A \mid B) = P(A).$$

Dado que $P(A) = 0.9$, la esperanza condicional de que $A$ esté disponible dado que $B$ está disponible es simplemente:

$$E[A \mid B] = 0.9.$$

Código:

```
import numpy as np
from scipy.stats import poisson, expon

# Ejercicio 1: Red de Comunicaciones
P_A = 0.9
P_B = 0.8
P_A_given_B = P_A  # Son independientes
print(f'Ejercicio 1: Esperanza condicional de A dado que B est
    disponible: {P_A_given_B}')

```

**Ejercicio 2** *Supón que tiras dos dados:*

- *El primer dado tiene una distribución uniforme sobre el conjunto* $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- *El segundo dado muestra un número igual al del primero más un número aleatorio con distribución uniforme sobre* $\{-1, 0, 1\}$.

*Calcula la esperanza condicional del resultado del segundo dado dado que el primer dado muestra un número impar.*

Solución:
El primer dado puede tomar valores en $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ con igual probabilidad. El segundo dado es el resultado del primero más una perturbación uniforme en $\{-1, 0, 1\}$.
Queremos encontrar:

$$E[Y \mid X \text{ impar}].$$

Los valores impares de $X$ son $\{1, 3, 5\}$. Para cada uno de ellos, $Y$ puede tomar tres valores:

$$Y = X + U, \quad U \sim \text{Uniforme}(-1, 0, 1).$$

Calculamos la esperanza condicional sumando sobre estos casos y normalizando:

$$E[Y \mid X \text{ impar}] = \frac{1}{3} \sum_{x \in \{1,3,5\}} E[Y \mid X = x].$$

Código:

```
valores_impares = [1, 3, 5]
esperanza_condicional = 0
for x in valores_impares:
    for y in [-1, 0, 1]:
        segundo_dado = x + y
        if 1 <= segundo_dado <= 6:
            esperanza_condicional += segundo_dado / len(
    valores_impares)
print(f'Ejercicio 2: Esperanza condicional del segundo dado dado
    que el primero es impar: {esperanza_condicional}')



```

**Ejercicio 3** *De una baraja estándar de 52 cartas, extraes dos cartas sin reemplazo. Si la primera carta es un as, calcula la esperanza condicional del valor de la segunda carta.*
*Asume que las cartas tienen los siguientes valores:*

- *As* $= 1$
- *Cartas del 2 al 10 tienen su valor nominal.*
- *J, Q, K tienen un valor de 10.*

Solución
Dado que la primera carta es un as, quedan 51 cartas en la baraja. Los valores posibles de la segunda carta son:

$$\{2, 3, \ldots, 10, 10, 10, 10\}.$$

Dado que cada carta tiene igual probabilidad de ser elegida, la esperanza condicional es simplemente la media de estos valores:

$$E[Y \mid X = \text{As}] = \frac{\sum_{y \in \text{valores restantes}} y}{51}.$$

Código:

```
cartas = list(range(2, 11)) + [10, 10, 10]  # Valores de 2-10, J
    , Q, K
n_cartas_totales = 51  # Ya sacamos un As
esperanza_condicional = sum(cartas) / n_cartas_totales
print(f'Ejercicio 3: Esperanza condicional del valor de la
    segunda carta dado que la primera fue un As: {
    esperanza_condicional}')



```

**Ejercicio 4** *Un proceso de llegadas Poisson ocurre con una tasa de 5 llegadas por hora. Encuentra la esperanza condicional del tiempo hasta la siguiente llegada, dado que han pasado 30 minutos desde la última llegada sin que haya ocurrido ninguna otra.*

Solución:
En un proceso Poisson con tasa $\lambda = 5$ llegadas por hora, el tiempo entre llegadas sigue una distribución exponencial con parámetro $\lambda$:

$$T \sim \text{Exp}(\lambda).$$

Usando la propiedad de **falta de memoria** de la distribución exponencial, sabemos que:

$$E[T \mid T > 0.5] = E[T] = \frac{1}{\lambda}.$$

Por lo tanto:

$$E[T \mid T > 0.5] = \frac{1}{5} \text{ horas.}$$

Código:

```
tasa = 5  # llegadas por hora
tiempo_transcurrido = 0.5  # 30 minutos en horas
esperanza_condicional = 1 / tasa
print(f'Ejercicio 4: Esperanza condicional del tiempo hasta la
    siguiente llegada: {esperanza_condicional} horas')
```

**Ejercicio 5** *Supón que las pérdidas de una compañía de seguros siguen una distribución exponencial con media* $5000$ *USD.*
*Dado que una pérdida particular supera los* $10,000$ *USD, ¿cuál es la esperanza condicional de la pérdida total?*

Solución:

Dado que $X \sim \text{Exp}(\theta)$ con $\theta = 5000$, queremos calcular:

$$E[X \mid X > 10000].$$

Para una variable exponencial, la esperanza condicional de $X$ dado que $X > c$ se calcula como:

$$E[X \mid X > c] = c + \theta.$$

Sustituyendo $c = 10000$ y $\theta = 5000$:

$$E[X \mid X > 10000] = 10000 + 5000 = 15000.$$

Código:

```
media = 5000
condicion = 10000
esperanza_condicional = expon(scale=media).expect(lambda x: x,
    lb=condicion)
print(f'Ejercicio 5: Esperanza condicional de la p rdida dado
    que supera los 10,000 USD: {esperanza_condicional} USD')
```