DISTRIBUCIÓN UNIFORME CONTÍNUA

Nexus-Probability

CURSO 1 (PROBABILIDAD I)

PARTE 4 / LECCIÓN 7

Definición 1 (Función de Densidad) *Decimos que una variable aleatoria X tiene una distribución uniforme continua en el intervalo (a, b), y escribimos $X \sim$ unif(a, b), cuando su función de densidad es*

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in (a, b), \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Esta distribución tiene como parámetros los números a y b.

Definición 2 (Función de Distribución) *Integrando la función de densidad desde menos infinito hasta un punto x cualquiera, puede encontrarse la función de distribución, la cual tiene la siguiente expresión:*

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq a, \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a < x < b, \\ 1 & \text{si } x \geq b. \end{cases}$$

Observación

Para una distribución $U(a, b)$, si $c < d$, $c \geq a$ y $d \leq b$, la probabilidad $\mathbb{P}(c \leq X \leq d)$ se puede calcular de varias formas:

1. $\displaystyle\int_c^d \frac{1}{b-a}\,dx = \frac{1}{b-a}\int_c^d dx = \frac{d-c}{b-a}.$
2. Como el área debajo de la gráfica de la función de densidad entre c y d. Lo que significa que dicha probabilidad se puede calcular como el producto de $\left(\frac{1}{b-a}\right)(d-c)$, que corresponde al área del rectángulo con dimensiones $\frac{1}{b-a}$ y $(d-c)$.
3. Por medio de la función de distribución como:

$$F_X(d) - F_X(c).$$

Teorema 4.7.1

Si $X \sim \mathrm{U}(a, b)$, entonces:

(I) $\mathbb{E}[X] = \frac{a+b}{2}$

(II) $\mathbb{V}[X] = \frac{(b-a)^2}{12}$

(III) $m_X(t) = \begin{cases} \frac{e^{bt}-e^{at}}{t(b-a)}, & \text{si } t \neq 0, \\ 1, & \text{si } t = 0. \end{cases}$

Ejercicios

Los siguientes ejercicios propuestos tendrán solución en **Python**, por lo que te invitamos a ejecutar el código en tu computadora.

Ejercicio 1 *Se sabe que un autobús llegará de forma aleatoria en un intervalo entre 0 y 15 min.*

a) La probabilidad que el autobús llegue después de 10 minutos.

b) La probabilidad de que el autobús llegue después de 10 minutos dado que se sabe que a los 5 minutos no llegó.

c) La media y desviación estándar del momento en que llegará el autobús.

Solución.

```python
# Ejercicio 1:

# Definimos los limites de la distribucion uniforme
a, b = 0, 15

# Probabilidad de que el autobus llegue despues de 10 minutos
p_x_gt_10 = 1 - stats.uniform.cdf(10, loc=a, scale=b-a)

# Probabilidad condicional P(X > 10 | X > 5)
p_x_gt_5 = 1 - stats.uniform.cdf(5, loc=a, scale=b-a)
p_x_gt_10_given_x_gt_5 = p_x_gt_10 / p_x_gt_5

# Media y desviacion estandar
mean_x = stats.uniform.mean(loc=a, scale=b-a)
std_x = stats.uniform.std(loc=a, scale=b-a)

# Resultados para el Ejercicio 1
print(f"P(X > 10) = {p_x_gt_10:.4f}")
print(f"P(X > 10 | X > 5) = {p_x_gt_10_given_x_gt_5:.4f}")
print(f"Media de X = {mean_x:.2f}")
print(f"Desviacion estandar de X = {std_x:.2f}")
```

```
Ejercicio 1:
P(X > 10) = 0.3333
P(X > 10 | X > 5) = 0.5000
Media de X = 7.50
Desviación estándar de X = 4.33
```

Ejercicio 2 *Se tiene un servicio de llamadas telefónicas donde el tiempo mínimo de espera es de 20 segundos y el máximo de 50 segundos. Si los tiempos de respuesta se distribuyen uniformemente, se desea calcular:*

a) La probabilidad de que el tiempo de respuesta esté entre 25 y 45 segundos.

b) La probabilidad de que el tiempo de respuesta sea menor a 30 segundos.

Solución.

```python
from scipy.stats import uniform

 # Definir los parametros de la distribucion
 min_time = 20  # segundos
 max_time = 50  # segundos

 # Calcular la probabilidad para el intervalo [25, 45]
 p1 = uniform.cdf(45, loc=min_time, scale=max_time -min_time)
 - uniform.cdf(25, loc=min_time, scale=max_time - min_time)

 # Calcular la probabilidad para el intervalo [20, 30]
 p2 = uniform.cdf(30, loc=min_time, scale=max_time - min_time
)

 #Mostrar resultados
 print(f"Probabilidad de que el tiempo de respuesta este
entre 25 y 45 segundos: {p1:.4f}")
 print(f"Probabilidad de que el tiempo de respuesta sea menor
 a 30 segundos: {p2:.4f}")
```

```
Probabilidad de que el tiempo de respuesta este entre 25 y 45 segundos:
 0.6667
Probabilidad de que el tiempo de respuesta sea menor a 30 segundos: 0.333
```

Ejercicio 3 *Una persona que va al seguro sabe que, para ser atendido, tiene que esperar un tiempo mínimo de 43 minutos hasta 75 minutos. Si los tiempos de respuesta para que pasen los pacientes se distribuyen uniformemente, se desea encontrar la probabilidad de que dicha persona sea atendida:*

- *A) A más tardar a los 58 minutos.*
- *B) Que al paciente lo atiendan entre los 49 y 67 minutos.*

Solución.

```python
 # Definir los limites de la distribucion uniforme
 c = 43  # tiempo minimo
 d = 75  # tiempo maximo

 # A) Probabilidad de ser atendido a mas tardar a los 58
minutos
```

```python
    a_58 = 58
    probabilidad_58 = (a_58 - c) / (d - c)

    # B) Probabilidad de ser atendido entre los 49 y 67 minutos
    a_49 = 49
    b_67 = 67
    probabilidad_49_67 = (b_67 - a_49) / (d - c)

    #Mostrar resultados
    print(f”Parte a) La probabilidad de que haya mas de 3
   personas con la enfermedad es: {prob_X_greater_3:.4f}”)
    print(f”Parte b) El numero esperado de enfermos en la ciudad
    es: {numero_esperado_enfermos}”)
```

```
Ejercicio 3:
Probabilidad de ser atendido a más tardar a los 58 minutos: 46.88%
Probabilidad de ser atendido entre los 49 y 67 minutos: 56.25%
```