DISTRIBUCIÓN POISSON

Nexus-Probability

CURSO 1 (PROBABILIDAD I)

PARTE 4 / LECCIÓN 6

Definición 1 (Función de Densidad) *La variable aleatoria discreta X tiene distribución Poisson con parámetro λ si su función de masa de probabilidad está dada por:*

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} & \textit{si } x \in \{0, 1, 2, \dots\}, \\ 0 & \textit{en otro caso.} \end{cases}$$

Teorema 4.6.1

Si $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$, entonces:

(I) $\mathbb{E}[X] = \lambda$

(II) $\mathbb{V}[X] = \lambda$

(III) $m_X(t) = e^{\lambda(e^t - 1)}$

Observación

Supongamos que existe una cantidad positiva ω tal que la variable aleatoria cumple las siguientes condiciones:

1. $\mathbb{P}$(Un suceso ocurre en un intervalo de longitud h) $= \omega h + o(h)$
2. $\mathbb{P}$(Dos o más sucesos ocurren en un intervalo de longitud h) $= o(h)$
3. El número de sucesos en intervalos de tiempos disjuntos son independientes.

Donde $o(h)$ se lee como: "una función de orden más pequeño que h" y esta satisface la siguiente propiedad:

$$\lim_{h \to 0} \frac{o(h)}{h} = 0$$

Obsérvese que la función $o(h)$ decrece más rápido a cero que h cuando h tiende a cero.
La cantidad ω se interpreta como la tasa media de ocurrencia de sucesos por unidad de tiempo.

Teorema 4.6.2

Si las tres condiciones acabadas de exponer se cumplen, la variable aleatoria, que representa el número de sucesos que ocurren en intervalos de longitud t, tiene distribución Poisson con media λt.

Teorema 4.6.3

Sea X una variable aleatoria con distribución Poisson con parámetro λ, entonces la moda cumple la siguiente desigualdad:

$$\lambda - 1 \leq M \leq \lambda$$

Proposición 4.6.1

Sean X_1 y X_2 dos variables aleatorias independientes con distribución Poisson Poisson(λ_1) y Poisson(λ_2), respectivamente. Entonces, $X_1 + X_2 \sim$ Poisson($\lambda_1 + \lambda_2$).

Ejercicios

Los siguientes ejercicios propuestos tendrán solución en **Python**, por lo que te invitamos a ejecutar el código en tu computadora.

Ejercicio 1 *En promedio, uno de cada 100 focos producidos por una máquina es defectuoso. Use la distribución Poisson para estimar la probabilidad de encontrar 5 focos defectuosos en un lote de 1000 focos.*

Solución.

```
# Ejercicio 1:
import math

# Parametro lambda para la distribucion Poisson
lambda_ = 10

# Numero de focos defectuosos que buscamos
k = 5

# Calculo de la probabilidad usando la formula de la distribucion Poisson
probabilidad = (lambda_**k * math.exp(-lambda_)) / math.factorial(k)

# Resultados para el Ejercicio 1
print(f"La probabilidad de encontrar exactamente 5 focos defectuosos en un lote de 1000 es: {probabilidad:.4f}")

```

```
Ejercicio 1:
La probabilidad de encontrar exactamente 5 focos defectuosos en un lote de 1000 es: 0.0378
```

Ejercicio 2 *En promedio, se reciben 2 peticiones de acceso a una página web durante un minuto cualquiera. Utilice el modelo Poisson para calcular la probabilidad de que en un minuto dado:*

a) Nadie solicite acceso a la página.

b) Se reciban más de dos peticiones.

Solución.

```
import math

# Parametro lambda para la distribucion Poisson
```

```
    qlambda_ = 2

    # Parte a) Probabilidad de que nadie solicite acceso (P(X =
   0))
    k_a = 0
    prob_a = (lambda_**k_a * math.exp(-lambda_)) / math.
   factorial(k_a)

    # Parte b) Probabilidad de que se reciban mas de dos
   peticiones (P(X > 2))
    # P(X > 2) = 1 - P(X <= 2)
    k_b = 2
    prob_b = 1 - sum((lambda_**k * math.exp(-lambda_)) / math.
   factorial(k) for k in range(k_b + 1))

    #Mostrar resultados
    print(f"Parte a) La probabilidad de que nadie solicite
   acceso es: {prob_a:.4f}")
    print(f"Parte b) La probabilidad de que se reciban mas de
   dos peticiones es: {prob_b:.4f}")
```

```
Parte a) La probabilidad de que nadie solicite acceso es: 0.1353
Parte b) La probabilidad de que se reciban más de dos peticiones es: 0.3233
```

Ejercicio 3 *Cierta enfermedad tiene probabilidad de ocurrir $p = \frac{1}{100000}$, lo que en Medicina se denomina prevalencia. Calcula la probabilidad de que en una ciudad de 500000 habitantes haya más de 3 personas con dicha enfermedad. ¿Cuál sería en dicha ciudad el número de enfermos esperado?*

Solución.

```
    import math

    # Parametro lambda para la distribuci n Poisson (numero
   esperado de enfermos)
    lambda_ = 5

    # Parte a) Calcular P(X > 3)
    # P(X > 3) = 1 - P(X <= 3)
    prob_X_leq_3 = sum((lambda_**k * math.exp(-lambda_)) / math.
   factorial(k) for k in range(4))
    prob_X_greater_3 = 1 - prob_X_leq_3
```

```python

# Parte b) El numero esperado de enfermos
numero_esperado_enfermos = lambda_

#Mostrar resultados
print(f"Parte a) La probabilidad de que haya mas de 3 personas con la enfermedad es: {prob_X_greater_3:.4f}")
print(f"Parte b) El numero esperado de enfermos en la ciudad es: {numero_esperado_enfermos}")

```

```
Ejercicio 3:
Parte a) La probabilidad de que haya mas de 3 personas con la
enfermedad es: 0.7350
Parte b) El número esperado de enfermos en la ciudad es: 5
```

Ejercicio 4 *Participa en un juego de azar que puede ganar o perder (no hay otras En la inspección de hojalata producida por un proceso electrolítico continuo, se identifican 0.2 imperfecciones en promedio por minuto. Determine las probabilidades de identificar:*

a) Una imperfección en 3 minutos.

b) Al menos dos imperfecciones en 5 minutos.

c) Cuando más una imperfección en 15 minutos.

Solución.

```python
import math

# Funcion para calcular la probabilidad de Poisson
def poisson_pmf(k, lambda_):
return (lambda_**k * math.exp(-lambda_)) / math.factorial(k)

# Parte a) Probabilidad de identificar 1 imperfeccion en 3 minutos
lambda_3min = 0.2 * 3
prob_a = poisson_pmf(1, lambda_3min)

# Parte b) Probabilidad de identificar al menos 2 imperfecciones en 5 minutos
lambda_5min = 0.2 * 5
```

```python
    prob_b = 1 - poisson_pmf(0, lambda_5min) - poisson_pmf(1, lambda_5min)

    # Parte c) Probabilidad de identificar como m ximo 1 imperfecci n en 15 minutos
    lambda_15min = 0.2 * 15
    prob_c = poisson_pmf(0, lambda_15min) + poisson_pmf(1, lambda_15min)

    #Resultados de ejercicio 3
    print(f"Parte a) La probabilidad de identificar 1 imperfeccion en 3 minutos es: {prob_a:.4f}")
    print(f"Parte b) La probabilidad de identificar al menos 2 imperfecciones en 5 minutos es: {prob_b:.4f}")
    print(f"Parte c) La probabilidad de identificar como maximo 1 imperfeccion en 15 minutos es: {prob_c:.4f}")

```

```
        Ejercicio 3:
Parte a) La probabilidad de identificar 1 imperfección en 3 minutos es: 0.3293
Parte b) La probabilidad de identificar al menos 2 imperfecciones en 5 minutos es: 0.2642
Parte c) La probabilidad de identificar como máximo 1 imperfección en 15 minutos es: 0.1991
```