MOMENTOS

Nexus-Probability

CURSO 2 (PROBABILIDAD II)

PARTE 1 / LECCIÓN 4

Para cada número natural n se define el n-ésimo momento de una variable para cada número natural n, se define el n-ésimo momento de una variable aleatoria x como el número $E[X^n]$, suponiendo que tal esperanza existe. Tenemos la siguiente definición.

Definición 1 *Los momentos de una variable aleatoria X son la colección de números:*

$$E[x], E[X^2], E[X^3], ...$$

correspondientes al primer momento, segundo momento, ..., cuando tales cantidades existen.

Para variables aleatorias discretas, definimos el n-ésimo momento como sigue

$$E[X^n] = \sum_x x^n f(x)$$

mientras que para variables aleatorias continuas es

$$E[X^n] = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x) dx$$

Veamos que, suponiendo su existencia, el primer momento es el valor promedio o la esperanza de la variable aleatoria. Recordando la definición de varianza, sabemos entonces que esta es el segundo momento menos el primer momento al cuadrado.
Se pueden definir también los siguientes momentos para una variable aleatoria:

- $E[(X-\mu)^n]$ n-ésimo momento central
- $E|X|^n$ n-ésimo momento absoluto
- $E|X-\mu|^n$ n-ésimo momento absoluto central (c constante)

Definición 2 (Función generadora de probabilidad) *Sea X una variable aleatoria discreta con posibles valores dentro del conjunto $\{0, 1, 2, ...\}$. A la función $G(t)$ definida como aparece abajo se le llama la **función generadora de probabilidad** de X,*

$$G(t) = E[t^X] = \sum_{x=0}^{\infty} t^x P(X = x)$$

*De forma breve se puede escribir como **f.g.p**.*

Definición 3 *Sea X discreta con función generadora de probabilidad $G(t)$. Si el k-ésimo momento de X existe entonces*

$$G^{(k)}(1-) = E[X(X-1)...(X-k+1)]$$

El siguiente resultado es bastante útil en las aplicaciones de la f.g.p y establece que la f.g.p de la suma de dos variables independientes es el producto de las f.g.p.

Definición 4 *Sean X y Y discretas e independientes con funciones generadoras de probabilidad $G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t)$*

Otra función bastante útil que puede calcularse para algunas variables aleatorias, incluyendo el caso discreto y continuo y relacionada con los momentos de la variable aleatoria es la que se define a continuación.

Definición 5 *La **función generadora de momentos** de una variable aleatoria discreta o continua X es la función $M(t)$ definida como sigue:*

$$M(t) = E[e^{tX}]$$

*, para valores reales de t en donde esta esperanza existe. De forma breve se puede escribir como **f.g.m***

Cuando sea necesario especificar la variable aleatoria en cuestión se le escribe como $M_X(t)$. En el caso discreto,

$$M(t) = \sum_x e^{tx} P(X = x)$$

y en el caso continuo

$$M(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x) dx$$

Definición 6 *Sea X una v.a con función generadora de momentos $M(t)$ finita en un intervalo no trivial alrededor del cero. Entonces*

$$M^{(n)}(0) = E[X^n]$$

Veamos a continuación, que la f.g.m de la suma de dos variables independientes es el producto de las f.g.m.

Definición 7 *Sean X y Y independientes con funciones generadoras de momentos $M_{X+Y}(T) = M_X(t)M_Y(t)$*

La f.g.m también tiene la propiedad de caracterizar a la distribución de probabilidad de manera única.

Definición 8 *Sean X y Y dos variables aleatorias con f.g.m. $M_X(t)$ y $M_Y(t)$ las cuales coinciden en un intervalo no trivial alrededor del cero. Entonces X y Y tienen la misma distribución de probabilidad.*

Ejercicios

Los siguientes ejercicios propuestos tendrán solución en **Python**, por lo que te invitamos a ejecutar el código en tu computadora.

Ejercicio 1 *Sea X una variable aleatoria discreta con función de porbabilidad como aparece abajo. Encuentre la función generadora de momentos de X y a partir de ella calcule la media y varianza de X.*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^x} & \text{si } x = 1, 2, .. \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Solución.

```
import sympy as sp

# Definir la variable simb lica
t = sp.symbols('t')

# Definir la funci n generadora de momentos M(t)
M_t = sp.exp(t) / (2 - sp.exp(t))

# Calcular la primera derivada M'(t)
```

```python
M_t_deriv1 = sp.diff(M_t, t)

# Calcular la segunda derivada M''(t)
M_t_deriv2 = sp.diff(M_t_deriv1, t)

# Evaluar en t = 0 para obtener E(X) y Var(X)
E_X = M_t_deriv1.subs(t, 0)
E_X2 = M_t_deriv2.subs(t, 0)

Var_X = E_X2 - E_X**2

# Mostrar resultados
print(f"E(X) = {E_X.evalf():.4f}")
print(f"Var(X) = {Var_X.evalf():.4f}")
```

```
E(X) = 2.0000
Var(X) = 2.0000
```

Ejercicio 2 *Se dice que la v.a X tiene distribución Poisson de parámetro $\lambda > 0$ si su función de probabilidad está dada por*

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!} & \text{para } x = 0, 1, \ldots \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Calcularemos a continuación su f.g.p.

Solución.

```python
import sympy as sp

# Definir las variables simb licas
t,    = sp.symbols('t lambda')

# Definir la funci n generadora de probabilidad G(t)
G_t = sp.exp(    * (t - 1))

# Mostrar el resultado
print(f"G(t) = {G_t}")
```

```
G(t) = exp(lambda * (t - 1))
```