DISTRIBUCIÓN NORMAL

Nexus-Probability

CURSO 1 (PROBABILIDAD I)

PARTE 4 / LECCIÓN 10

Definición 1 (Función de Densidad) *The variable aleatoria X has a normal distribution with parametro $\mu > 0$ y $\sigma^2 > 0$, and escribimos $X \sim \mathsf{N}(\mu, \sigma^2)$, cuando its density función is*

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Definición 2 (Función de Distriución)

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}} \, dy$$

Teorema 4.10.1

Si $X \sim \mathsf{N}(\mu, \sigma^2)$ y r es entero, la función de distribución es igual a:

(I) $\mathbb{E}[X] = \mu$

(II) $\mathbb{V}[X] = \sigma^2$

(III) $m_X(t) = e^{[et + \frac{\sigma^2 t^2}{2}]}$

Observación

Los puntos de inflexión de la grafica de la función de densidad de una distribucion normal se encuentra en $\mu - \sigma$ y $\mu + \sigma$ y la moda se encuentra en la media μ

Teorema 4.10.2

Si una variable aleatoria X sigue una distribución normal con parámetros μ y σ^2, es decir, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, entonces la variable estandarizada:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1).$$

En el caso particular donde $\mu = 0$ y $\sigma^2 = 1$, la función de densidad de probabilidad se reduce a:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ejercicios

Los siguientes ejercicios propuestos tendrán solución en **Python**, por lo que te invitamos a ejecutar el código en tu computadora.

Ejercicio 1 *Suponga que el tiempo promedio que le toma a una persona terminar un cierto examen de inglés es de 30 minutos, con una desviación estándar de 5 minutos. Suponiendo una distribución aproximada normal con estos parámetros, determine el tiempo que debe asignarse al examen para que el 95 % de las personas puedan terminar el examen.*

Solución.

```python
import scipy.stats as stats

# Parametros dados
mu = 30  # media en minutos
sigma = 5  # desviacion estandar en minutos

# Valor z para el percentil 95 de la distribucion normal estandar
z_95 = stats.norm.ppf(0.95)

# Calcular el tiempo necesario para que el 95% de las personas terminen el examen
t = mu + z_95 * sigma
# Resultados para el Ejercicio 1
print(f"El tiempo que debe asignarse al examen para que el 95% de las personas puedan terminar es: {t:.2f} minutos")

```

```
El tiempo que debe asignarse al examen para que el 95% de las personas
puedan terminar es: 38.22 minutos
```

Ejercicio 2 *Suponga que el tiempo de vida útil X, medido en horas, de un componente electrónico se puede modelar de manera aproximada mediante una variable aleatoria con distribución normal con parámetros $\mu = 20,000$ hrs. y $\sigma = 500$ hrs.*

1. *¿Cuál es la probabilidad de que el componente dure más de 21,000 horas?*
2. *Dado que el componente ha cubierto un tiempo de vida de 21,000 horas, ¿cuál es la probabilidad de que sobrepase 22,000 horas funcionando?*

Solución.

```python
import scipy.stats as stats

# Parametros dados
mu = 20000  # media en horas
sigma = 500  # desviacion estandar en horas

# a) Probabilidad de que el componente dure mas de 21,000 horas
prob_mas_21000 = 1 - stats.norm.cdf(21000, loc=mu, scale=sigma)

# b) Probabilidad de que, dado que el componente ha cubierto 21,000 horas, dure mas de 22,000 horas
prob_mas_22000_dado_mas_21000 = (1 - stats.norm.cdf(22000, loc=mu, scale=sigma)) / prob_mas_21000

#Mostrar resultados
print(f"a) Probabilidad de que el componente dure mas de 21,000 horas: {prob_mas_21000:.4f}")
print(f"b) Probabilidad de que, dado que el componente ha cubierto 21,000 horas, dure mas de 22,000 horas: {prob_mas_22000_dado_mas_21000:.4f}")
```

```
a) Probabilidad de que el componente dure mas de 21,000 horas: 0.0228
b) Probabilidad de que, dado que el componente ha cubierto 21,000 horas,
 dure más de 22,000 horas: 0.0014
```

Ejercicio 3 *Un estudio ha mostrado que, en un cierto barrio, el 60 % de los hogares tienen al menos dos televisores. Se elige al azar una muestra de 50 hogares en el citado barrio. Se pide:*

1. *¿Cuál es la probabilidad de que al menos 20 de los citados hogares tengan cuando menos dos televisores?*

2. *¿Cuál es la probabilidad de que entre 35 y 40 hogares tengan cuando menos dos televisores?*

Solución.

```python
import scipy.stats as stats
import math

# Parametros del problema
n = 50  # Numero de hogares
p = 0.60  # Probabilidad de que un hogar tenga al menos dos televisores

# Calcular la media y la desviacion estandar
mu = n * p
sigma = math.sqrt(n * p * (1 - p))

# Pregunta 1: Probabilidad de que al menos 20 hogares tengan al menos dos televisores
# Aproximamos con la normal: P(X >= 20) = 1 - P(X < 20)
prob_mas_20 = 1 - stats.norm.cdf(20, loc=mu, scale=sigma)

# Pregunta 2: Probabilidad de que entre 35 y 40 hogares tengan al menos dos televisores
prob_35_40 = stats.norm.cdf(40, loc=mu, scale=sigma) - stats.norm.cdf(35, loc=mu, scale=sigma)

#Mostrar resultados
print(f"Probabilidad de que al menos 20 hogares tengan al menos dos televisores: {prob_mas_20*100:.2f}%")
print(f"Probabilidad de que entre 35 y 40 hogares tengan al menos dos televisores: {prob_35_40*100:.2f}%")
```

```
Probabilidad de que al menos 20 hogares tengan al menos dos televisores: 99.81%
Probabilidad de que entre 35 y 40 hogares tengan al menos dos televisores: 7.25%
```