

DISTRIBUCIÓN UNIFORME

Nexus-Probability

CURSO 1 (PROBABILIDAD I)

PARTE 4 / LECCIÓN 1

Definición 1 (Función de Densidad) Sea X una variable aleatoria que tiene una distribución uniforme discreta sobre el conjunto de números x_1, \dots, x_n si la probabilidad de que X tome cualquiera de estos valores es constante $\frac{1}{n}$. Esta distribución surge en espacios de probabilidad equiprobables, esto es, en situaciones en donde tenemos n resultados diferentes y todos ellos tienen la misma probabilidad de ocurrir. Se escribe $X \sim \text{Unif}(x_1, x_2, \dots, x_n)$, en donde el símbolo \sim se lee "se distribuye como".

La función de probabilidad de esta variable aleatoria es:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{si } x \in \{x_1, x_2, \dots, x_n\}, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Teorema

Sea $X \sim UD\{0, 1, \dots, a_N\}$, entonces:

(i) $\mathbb{E}[X] = \frac{N+1}{2}$

(ii) $\text{Var}[X] = \frac{N^2-1}{12}$

(iii) $m_X(t) = \sum_{x=1}^N \frac{e^{xt}}{N} = \begin{cases} \frac{e^t(1-e^{tN})}{N(1-e^t)}, & \text{si } t \neq 0, \\ 1, & \text{si } t = 0. \end{cases}$

Ejercicios

Los siguientes ejercicios propuestos tendrán solución en **Python**, por lo que te invitamos a ejecutar el código en tu computadora.

Ejercicio 1 Sea X con distribución uniforme en el conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. ¿Cuál es la probabilidad de que el área del rectángulo de lados X y $6 - X$ sea mayor o igual a 8?

Solución.

```
1  # Ejercicio 1:
2  # Valores posibles de X (distribucion uniforme en el
conjunto {1, 2, 3, 4, 5})
3  X_values = [1, 2, 3, 4, 5]
4
5  # Cada valor de X es equiprobable, con una probabilidad de
6  #1/5
7
8  # Calculamos el area del rectangulo para cada valor de X
9  areas = [x * (6 - x) for x in X_values]
10
11 # Determinamos los casos donde el area es mayor o igual a 8
12 valid_cases = [area for area in areas if area >= 8]
13
14 # Como X tiene una distribucion uniforme, la probabilidad
15 #de un evento se calcula como (numero de casos favorables)
16 #/(numero total de casos posibles)
17 probability = len(valid_cases) / len(X_values)
18
19 # Resultados para el Ejercicio 1
20 print(f"Valores de X: {X_values}")
21 print(f"reas correspondientes: {areas}")
22 print(f"Numero de casos donde el area es >= 8:
23 {len(valid_cases)}")
24 print(f"Probabilidad de que el area sea >= 8: {probability
25 :.2f}")
```

Ejercicio 1:

Valores de X: [1, 2, 3, 4, 5]

Áreas correspondientes: [5, 8, 9, 8, 5]

Número de casos donde el área es ≥ 8 : 3

Probabilidad de que el área sea ≥ 8 : 0.60

Ejercicio 2 Se escogen al azar y de manera independiente dos números a y b dentro del conjunto $\{1, 2, \dots, 10\}$. Calcule la probabilidad de que:

a) a y b coincidan.

b) a sea menor a b .

Solución.

```
1
2     import itertools
3
4     # Definir el conjunto de numeros
5     conjunto = list(range(1, 11))
6
7     # Espacio muestral: todas las combinaciones posibles de a y
8     # b (10 x 10 = 100)
9     espacio_muestral = list(itertools.product(conjunto, repeat
10     =2))
11
12     # a) Calcular la probabilidad de que a y b coincidan
13     eventos_a_igual_b = [(a, b) for a, b in espacio_muestral if
14     a == b]
15     probabilidad_a_igual_b = len(eventos_a_igual_b) / len(
16     espacio_muestral)
17
18     # b) Calcular la probabilidad de que a sea menor que b
19     eventos_a_menor_b = [(a, b) for a, b in espacio_muestral if
20     a < b]
21     probabilidad_a_menor_b = len(eventos_a_menor_b) / len(
22     espacio_muestral)
23
24     # Resultados para el Ejercicio 2
25     print(f"a) Probabilidad de que a y b coincidan: {
26     probabilidad_a_igual_b:.2f}")
27     print(f"b) Probabilidad de que a sea menor que b: {
28     probabilidad_a_menor_b:.2f}")
```

Ejercicio 2:

a) Probabilidad de que a y b coincidan: 0.10

b) Probabilidad de que a sea menor que b: 0.45]

Ejercicio 3 Una persona que va al seguro, sabe que para ser atendido tiene que esperar un tiempo mínimo de 43min hasta 75min. Si los tiempos de respuesta para que pasen los pacientes se distribuyen uniformemente, encuentre la probabilidades que, dicha persona pueda ser atendida:

A) A más tardar a los 58 minutos.

B) Que al paciente lo atiendan entre los 49 y 67 minutos.

Solución.

```
1  # Parametros de la distribucion uniforme
2  min_time = 43 # Tiempo minimo
3  max_time = 75 # Tiempo maximo
4
5  # A) Probabilidad de ser atendido a mas tardar en 58 minutos
6  a = min_time # Limite inferior
7  b_a = 58     # Limite superior para este caso
8
9  # Probabilidad de a mas tardar 58 minutos
10 prob_a = (b_a - min_time) / (max_time - min_time)
11
12 # B) Probabilidad de ser atendido entre 49 y 67 minutos
13 a_b = 49 # Limite inferior
14 b_b = 67 # Limite superior
15
16 # Probabilidad de estar en el intervalo [49, 67]
17 prob_b = (b_b - a_b) / (max_time - min_time)
18
19 # Resultados para el Ejercicio 3
20 print(f"Probabilidad de ser atendido a mas tardar en 58
21 minutos: {prob_a:.4f}")
22 print(f"Probabilidad de ser atendido entre 49 y 67 minutos:
23 {prob_b:.4f}")
```

Ejercicio 3:

Probabilidad de ser atendido a más tardar en 58 minutos: 0.4688

Probabilidad de ser atendido entre 49 y 67 minutos: 0.5625