PLANTILLA DE EJEMPLO

Nexus-Probability

CURSO # (Nombre del Curso)

PARTE # / LECCIÓN #

1. EJEMPLO DE PLANTILLA.

Tenemos diferentes entornos que abarcan,**teoremas**,**definiciones**, **ejemplo**, **código** y **salida de código.**

Entorno Teorema

```
\begin{theorem}[Aqui el nombre del teorema.]
    Aquí dentro va el teorema.
\end{theorem}
```

Teorema 1 (Aqui el nombre del teorema.) *Aquí dentro va el teorema.*

Entorno Definiciones

```
\begin{definition}[Aqui el nombre de la definición.]
        Aquí dentro va la definición
\end{definition}
```

Definición 1 (Aqui el nombre de la definición.) *Aquí dentro va la definición*

Entorno Ejemplo

```
\begin{example}
        Aquí dentro el contenido del ejercicio.
\end{example}
```

Ejercicio 1 *Aquí dentro el contenido del ejercicio.*

Entorno Código

```
      Aqui el codigo de Pyhton, copiar y pegar directo el
  codigo de GOOGLE COLAB

      def f_xy(x, y):
       if 0 < x < 1 and 0 < y < 1:
          return 6 * (x ** 2) * y
      else:
          return 0
```

Entorno Salida de Código

```
En esta parte copiar solo la salida del codigo, ya sea un valor
numerico o tabla
```

2. EJEMPLO EN PRACTICA

Recordemos que la probabilidad condicional de un evento A dado un evento B está dada por:

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Esta definición puede extenderse al caso de funciones de probabilidad o de densidad y también para el caso de funciones de distribución.

Definición 2 (Función de Densidad de $X|Y = y$) *Sea (X, Y) un vector aleatorio discreto (o continuo) y con función de probabilidad (o de densidad) $f_{X,Y}(x, y)$. Sea y un valor de la variable Y tal que $f_Y(y) \neq 0$. A la función $x \mapsto f_{X|Y}(x, y)$ definida de la siguiente manera se le conoce como función de probabilidad (o densidad) de X dado que $Y = y$*

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)} \tag{1}$$

Observe que la función dada por (1) se le considera como una función de x y que el valor de y es fijo y que puede considerarse como un parámetro de dicha función, i.e., para cada valor fijo de y se tiene una función diferente. En el caso discreto de la expresión (1) es efectivamente la definición de probabilidad condicional

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)}$$

sin embargo, recordemos que en el caso continuo las expresiones $f_{X,Y}(x, y)$ y $f_Y(y)$ **no son probabilidades**. Sumando o integrando sobre los posibles valores x, es inmediato comprobar que la función dada por (1) es efectivamente un función de probabilidad o de densidad. Observe además que cuando X y Y son independientes,

$$f_{X|Y}(x|y) = f_X(x)$$

La formula (1) puede extenderse de manera análoga al caso de vectores de dimensión mayor. Por ejemplo, para un vector aleatorio de dimensión tres (X, Y, Z) pueden calcularse funciones de densidad condicionales como $f_{X|Y,Z}(x|y, z)$ o $f_{X,Z|Y}(x, z|y)$,. Por tanto podemos dar la siguiente definición mas extendida:

Definición 3 (Función de Distribución Condicional.) *Sea (X, Y) un vector aleatorio con función de probabilidad o densidad $f_{X,Y}(x, y)$. Sea y un valor de Y tal que $f_Y(y) \neq 0$. La **función de distribución condicional** de X dado $Y = y$ es la función*

$$f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} \sum_{u \leq x} f_{X,Y}(u, y) & \text{en el caso discreto,} \\ \int_{-\infty}^{x} f_{X,Y}(u, y) & \text{en el caso continuo.} \end{cases} \tag{2}$$

De esta forma la función de distribución condicional se calcula como la suma o integral de la correspondiente función de probabilidad o densidad condicional. Nuevamente observamos que cuando X y Y son independientes,

$$F_{X|Y}(x|y) = F_X(x)$$

Ejercicios

Los siguientes ejercicios propuestos tendrán solución en **Python**, por lo que te invitamos a ejecutar el código en tu computadora.

Ejercicio 2 *Sea (X,Y) un vector aleatorio continuo con función de densidad*

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 6x^2y & \text{si } 0 < x < 1, 0 < y < 1, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Calcule las siguientes funciones:

a) $f_{X|Y}(x|y)$, $0 < y < 1$.

b) $F_{X|Y}(x|y)$, $0 < y < 1$.

Solución.

```
import numpy as np
from scipy.integrate import quad

# Ejercicio 1: Calculo de densidades y funciones de distribucion

# Funcion de densidad conjunta f_{X,Y}(x, y)
def f_xy(x, y):
     if 0 < x < 1 and 0 < y < 1:
        return 6 * (x ** 2) * y
    else:
        return 0

# Funcion de densidad marginal de Y
def f_y(y):
    return quad(lambda x: f_xy(x, y), 0, 1)[0]  # Integrar respecto a x de 0 a 1

# a) Calculo de f_{X|Y}(x|y)
def f_x_given_y(x, y):
    return f_xy(x, y) / f_y(y) if f_y(y) != 0 else 0

# b) Calculo de F_{X|Y}(x|y)
def F_x_given_y(x, y):
    integral, _ = quad(lambda u: f_x_given_y(u, y), 0, x)
    return integral

 # Resultados para el Ejercicio 1
 y_val = 0.5  # Ejemplo para y = 0.5
 print("Ejercicio 1:")
  print(f"f_X|Y(x|{y_val}) = ", [f_x_given_y(x, y_val) for x in np.linspace(0, 1, 5)])
```

```
    print(f"F_X|Y(x|{y_val}) = ", [F_x_given_y(x, y_val) for x
  in np.linspace(0, 1, 5)])

```

```
Ejercicio 1:
f_X|Y(x|0.5) =  [0.0, 0.1875, 0.75, 1.6875, 0.0]
F_X|Y(x|0.5) =  [0.0, 0.015625, 0.125, 0.421875, 1.0]
```

Ejercicio 3 *Sea (X, Y) un vector discreto con función de probabilidad dada por la siguiente tabla:*

x/y	0	1	2
0	0.1	0.05	0.1
1	0.05	0.2	0.1
2	0.05	0.05	0.3

Calcule las siguientes funciones:

a) $f_{X|Y}(x|0)$

b) $f_{X|Y}(x|1)$

c) $F_{X|Y}(x|1)$

Solución.

```
# Ejercicio 2: Calculo de funciones discretas

# Matriz de probabilidades P(X, Y)
P_XY = np.array([[0.1, 0.05, 0.1],
                 [0.05, 0.2, 0.1],
                 [0.05, 0.05, 0.3]])

# a) Calculo de f_X|Y(x|0)
f_X_given_Y_0 = P_XY[:, 0] / np.sum(P_XY[:, 0])

# b) Calculo de f_X|Y(x|1)
f_X_given_Y_1 = P_XY[:, 1] / np.sum(P_XY[:, 1])

# c) Calculo de F_X|Y(x|1)
F_X_given_Y_1 = np.cumsum(f_X_given_Y_1)

# Resultados para el Ejercicio 2
```

```python
    print("\nEjercicio 2:")
    print("f_X|Y(x|0) =", f_X_given_Y_0)
    print("f_X|Y(x|1) =", f_X_given_Y_1)
    print("F_X|Y(x|1) =", F_X_given_Y_1)

```

```
Ejercicio 2:
f_X|Y(x|0) = [0.5  0.25 0.25]
f_X|Y(x|1) = [0.16666667 0.66666667 0.16666667]
F_X|Y(x|1) = [0.16666667 0.83333333 1.        ]
```

Ejercicio 4 *Se lanza un dado equilibrado dos veces. Sea X el resultado del primer lanzamiento y sea Y el mayor de los dos resultados.*

a) Encuentre la función de probabilidad conjunta de X y Y.

b) Calcule las funciones $f_{Y|X}(y|x = 3)$ y $f_{X|Y}(x|y = 3)$

Solución.

```python
# Ejercicio 3: Lanzamiento de dado
from itertools import product
from collections import Counter

# Calcular la funcion de probabilidad conjunta P(X, Y)
lanzamientos = list(product(range(1, 7), repeat=2))
xy_pairs = [(x, max(x, y)) for x, y in lanzamientos]
contador = Counter(xy_pairs)

# a) Funcion de probabilidad conjunta
P_XY_dado = {k: v / len(lanzamientos) for k, v in contador.items()}

# b) Calcular f_Y|X(y|x=3) y f_X|Y(x|y=3)
def f_y_given_x(y, x):
    prob_x = sum(v for (i, j), v in P_XY_dado.items() if i == x)
    return P_XY_dado.get((x, y), 0) / prob_x if prob_x != 0 else 0
def f_x_given_y(x, y):
    prob_y = sum(v for (i, j), v in P_XY_dado.items() if j == y)
    return P_XY_dado.get((x, y), 0) / prob_y if prob_y != 0 else 0
```

```
    # Resultados para el Ejercicio 3
    print("\nEjercicio 3:")
    print("P(X, Y) =", P_XY_dado)
    print("f_Y|X(y|x=3) =", {y: f_y_given_x(y, 3) for y in range(1, 7)})
    print("f_X|Y(x|y=3) =", {x: f_x_given_y(x, 3) for x in range(1, 7)})
```