DISTRIBUCIÓN GAMMA

Nexus-Probability

CURSO 1 (PROBABILIDAD I)

PARTE 4 / LECCIÓN 9

Definición 1 (Función de Densidad) *La variable aleatoria X tiene una distribución gamma con parametro $\alpha > 0$ y $\lambda > 0$, y escribimos $X \sim$ gamma(α, λ), cuando su función de densidad es*

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{(\lambda x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

En la expresión anterior aparece el término $\Gamma(\alpha)$, el cual se conoce como la función gama y es de este hecho que la distribución adquiere su nombre. La función gama se define por medio de la siguiente integral:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t}\, dt$$

Para cualquier número real α tal que esta integral sea convergente.

Observación

En general, no necesitaremos evaluar esta integral para cualquier valor de α, sólo para algunos pocos valores, principalmente enteros, y nos ayudaremos de las siguientes propiedades que no son difíciles de verificar:

1. $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$.
2. $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha!$ si α es un entero positivo.
3. $\Gamma(2) = \Gamma(1) = 1$.
4. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Teorema 4.9.1

Si $X \sim \text{Gamma}(r, \lambda)$ y r es entero, la función de distribución es igual a:

$$F_X(x) = 1 - \sum_{i=0}^{r-1} \frac{(\lambda x)^i}{i!} e^{-\lambda x}$$

$$\mathbf{F_X(x)} = 1 - \sum_{i=0}^{r-1} \frac{(\lambda x)^i}{i!} e^{-\lambda x}$$

Teorema 4.9.2

Si $X \sim \text{gamma}(\alpha, \lambda)$, entonces:

(I) $\mathbb{E}[X] = \frac{\alpha}{\lambda}$

(II) $\mathbb{V}[X] = \frac{\alpha}{\lambda^2}$

(III) $m_X(t) = (\frac{\lambda}{\lambda - t})^r$ si $t < \lambda$

Ejercicios

Los siguientes ejercicios propuestos tendrán solución en **Python**, por lo que te invitamos a ejecutar el código en tu computadora.

Ejercicio 1 *La duración (vida) en cientos de horas de determinado componente es una variable aleatoria con distribución Gamma con parámetros* $r = 5$ *y* $\lambda = 2$.

(a) Calcula la probabilidad de que un determinado componente dure más de 200 horas.

(b) De que dure entre 250 y 300 horas.

(c) Calcula el número de horas promedio de la vida de un componente, así como su desviación estándar.

Solución.

```python
import scipy.stats as stats

# Parametros de la distribucion Gamma
r = 5  # Parametro de forma
lam = 2  # Parametro de tasa

```

```python
    # La distribucion Gamma en scipy usa scale = 1/lambda
    scale = 1 / lam

    # a) Probabilidad de que el componente dure mas de 200 horas
    p_mas_200 = 1 - stats.gamma.cdf(200, a=r, scale=scale)


    # b) Probabilidad de que dure entre 250 y 300 horas
    p_entre_250_300 = stats.gamma.cdf(300, a=r, scale=scale) - stats.gamma.cdf(250, a=r, scale=scale)


    # c) Calculo del numero de horas promedio (esperanza matematica) y desviacion estandar
    media = stats.gamma.mean(a=r, scale=scale)
    desviacion = stats.gamma.std(a=r, scale=scale)

    # Resultados para el Ejercicio 1
    print(f"Probabilidad de que el componente dure mas de 200 horas: {p_mas_200:.6f}")
    print(f"Probabilidad de que el componente dure entre 250 y 300 horas: {p_entre_250_300:.6f}")
    print(f"Vida promedio del componente (esperanza matematica): {media:.2f} horas")
    print(f"Desviacion estandar de la vida del componente: {desviacion:.2f} horas")

```

```
Probabilidad de que el componente dure más de 200 horas: 0.000000
Probabilidad de que el componente dure entre 250 y 300 horas: 0.000000
Vida promedio del componente (esperanza matemática): 2.50 horas
Desviación estándar de la vida del componente: 1.12 horas
```

Ejercicio 2 *Supongamos que la vida útil de un dispositivo (en horas) tiene la distribución Gamma con los siguientes parámetros:*

- *Parámetro de forma (shape):* $k = 4$
- *Parámetro de escala (scale):* $b = 100$

Realiza los siguientes cálculos:

(a) *Encuentra la probabilidad de que el dispositivo dure más de 300 horas.*

(b) *Calcula la media y la desviación estándar de la vida útil del dispositivo.*

Solución.

```python
import scipy.stats as stats

 # Parametros de la distribucion Gamma
 k = 4    # (forma)
 b = 100  # (escala)

 # a) Probabilidad de que el dispositivo dure mas de 300 horas
 p_mas_300 = 1 - stats.gamma.cdf(300, a=k, scale=b)


 #b) Media y desviacion estandar de la distribucion Gamma
 media = stats.gamma.mean(a=k, scale=b)
 desviacion = stats.gamma.std(a=k, scale=b)

 #Mostrar resultados
 print(f"Probabilidad de que el dispositivo dure mas de 300 horas: {p_mas_300:.6f}")
 print(f"Media de la vida util del dispositivo: {media:.2f} horas")
 print(f"Desviacion estandar de la vida util del dispositivo: {desviacion:.2f} horas")

```

```
Probabilidad de que el dispositivo dure mas de 300 horas: 0.647232
Media de la vida util del dispositivo: 400.00 horas
Desviacion estandar de la vida util del dispositivo: 200.00 horas
```