VALOR ESPERADO Y PROPIEDADES

Nexus-Probability

CURSO 1 (PROBABILIDAD I)

PARTE 5 / LECCIÓN 1

Definición 1 (Valor esperado) *Sea X una v.a, la* ***media*** *(el promedio, esperanza, valor esperado, esperanza matemática) de X es denotada por $E[X]$ o μ_x y se define como:*

$$E[X] = \sum_x xP(x) = \sum_x xf_X(x) \quad \text{si x es discreta}$$

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf_X(x)dx \quad \text{si x es continua}$$

Esto se cumple siempre y cuando la integral o la sima sean finitas (suma convergente e integral convergente).

Definición 2 (Propiedades de la esperanza) *Sean X y Y dos variables aleatorias con esperanza finita y sea c una constante. Entonces*

1. $E[c] = c$
2. $E[cX] = cE[X]$
3. $X \geq 0$, *entonces* $E[X] \geq 0$
4. $E[X + Y] = E[X] + E[Y]$

Veamos que la segunda y la cuarta propiedad establecen que la esperanza es **lineal**, esto es que separa sumas y multiplicaciones por constantes.
Otra característica numérica importante asociada a las variables aleatorias se llama varianza, se denota por $Var(X)$, misma que se define a continuación.

Definición 3 (Varianza) *Sea X una v.a discreta con función de probabilidad $f(X)$. La varianza de X se define como sigue:*

$$Var(X) = \sum_x (x-\mu)^2 f(x)$$

cuando esta suma es convergente y en donde μ es la esperanza de X. Para una variable aleatoria continua X con función de densidad $f(x)$ se define

$$Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x) dx$$

cuando esta integral es convergente.

Observamos que hay una importante relación entre la varianza y la esperanza. Puede escribirse como sigue

$$Var(X) = E(x-\mu)^2$$

Esto corresponde a la esperanza de la función cuadrática $x \to (x-\mu)^2$ aplicada a una variable aleatoria X con esperanza μ. Regularmente denotamos a la varianza como σ^2 y a la raíz cuadrada positiva de la varianza, es decir σ, se le llama desviación estándar.

Definición 4 (Propiedades de la varianza) *Sean X y Y dos variables aleatroias con varianza finita y sea c una constante. Entonces,*

1. $Var(X) \geq 0$
2. $Var(c) = 0$
3. $Var(cX) = c^2 Var(X)$
4. $Var(X+c) = Var(X)$
5. $Var(X) = E(X^2) - E^2(X)$
6. *En general,* $Var(X+Y) \neq Var(X) + Var(Y)$

Ejercicios

Los siguientes ejercicios propuestos tendrán solución en **Python**, por lo que te invitamos a ejecutar el código en tu computadora.

Ejercicio 1 *Suponga que las calificaciones de una persona al final del curso son: 8, 8, 6, 2. Calcule el* ***promedio muestral****.*

Solución.

```python
# Lista de calificaciones
calificaciones = [8, 8, 6, 2]

# C lculo del promedio muestral
promedio_muestral = sum(calificaciones) / len(calificaciones)

# Mostrar el resultado
print(f"El promedio muestral es: {promedio_muestral}")
```

```
El promedio muestral es: 6.0
```

Ejercicio 2 *Utilizando el ejemplo de las 3 monedas, la función de densidad del número de soles está dada por:*

$$f_X(x) = \binom{3}{x}\frac{1}{8}I_{\{}0,1,2,3\}^{(x)}$$

Calcule la esperanza matemática.

Solución.

```python
from math import comb

# Definir los valores posibles de X
valores = [0, 1, 2, 3]

# Calcular la funci n de probabilidad f_X(x)
def f_X(x):
    return comb(3, x) * (1/8)

# Calcular la esperanza matem tica
esperanza = sum(x * f_X(x) for x in valores)

# Imprimir el resultado
print("Esperanza matem tica E[X]:", esperanza)
```

```
Esperanza matemática E[X]: 1.5
```

Ejercicio 3 *Sea X el resultado de lanzar un dado, entonces X toma valores $\{$1,2,3,4,5,6$\}$ con probabilidad uniforme en este conjunto. Calcula la esperanza matemática de ésta variable aleatoria.*

Solución.

Sea,

$$E[X] = \sum_{i=1}^{6} i\frac{1}{6} = \frac{21}{6} = 3.5$$

```python
   # Definir los valores posibles de X
valores = [1, 2, 3, 4, 5, 6]

# Calcular la probabilidad uniforme
probabilidad = 1 / len(valores)

# Calcular la esperanza matem tica
esperanza = sum(x * probabilidad for x in valores)

# Imprimir el resultado
print("Esperanza matem tica E[X]:", esperanza)
```

```
Esperanza matemática E[X]: 3.5
```

Ejercicio 4 *Sea X una variable aleatoria discreta con función de probabilidad dada por la siguiente tabla:*

x	-1	0	1	2
$f(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$

Calcula la esperanza de X.

Solución.

```python
# Definimos los valores de x y sus probabilidades f(x)
x_values = [-1, 0, 1, 2]  # Valores de x
probabilities = [1/8, 4/8, 1/8, 2/8]  # Probabilidades f(x)

# Calculamos la esperanza matem tica
expected_value = sum(x * p for x, p in zip(x_values,
   probabilities))

# Mostramos los resultados
print("Valores de x:", x_values)
print("Probabilidades:", probabilities)
print("Esperanza matem tica E[X]:", expected_value)
```

```
Valores de x: [-1, 0, 1, 2]
Probabilidades: [0.125, 0.5, 0.125, 0.25]
Esperanza matemática E[X]: 0.5
```

Ejercicio 5 *Sea X la variable discreta con fucnión de probabilidad*

$$p(n) = \frac{6}{\pi^2 n^2} \quad n \in \mathbb{N}$$

Solución.

Veamos que no se cumple para todas las variables que sean integrables. En este caso X no es integrable ya que la serie es divergente, observamos,

$$\sum_{n=1}^{\infty} np(n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{\pi^2 n^2}$$

esta serie es divergente, por tanto no existe la esperanza matemática.

Ejercicio 6 *Considere la variable aleatoria continua X con función de densidad*

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in (0,1) \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Calcula la esperanza de X.

Solución.

```python
    from scipy.integrate import quad

# Definimos la funci n de densidad f(x)
def f_x(x):
    return 2 * x if 0 < x < 1 else 0

# Definimos la funci n x * f(x)
def x_fx(x):
    return x * f_x(x)

# Calculamos la esperanza matem tica como una integral definida
expected_value, _ = quad(x_fx, 0, 1)  # Integral de 0 a 1
print("Esperanza matem tica E[X]:", expected_value)
```

```
Esperanza matemática E[X]: 0.6666666666666666
```