Cadenas de Markov.

Course	Procesos Estocasticos
Confidence	Not Confident
Last Edited	@February 2, 2025 3:32 PM

CONSTRUCCIÓN DE LAS CADENAS DE MARKOV

Una cadena de markov es un proceso estocastico $\{X_t| \quad t \in T\}$. Considere un sistema el cual pueda estar en un conjunto númerable o infinito numerable de estados. Defina S como el **espacio de estados** , ademas asuminos que $S \subseteq \mathbb{Z}$. Y supongamos que el sistema es observado a tiempo discreto $n = 1, 2, 3...$ y sea X_n el estado del sistema al tiempo n .

Toda cadena de Markov, cumple la siguiente propiedad:

PROPIEDAD DE MARKOV

$$\begin{aligned}&P[X_{t+1} = x_{t+1}|X_0 = x_0, X_2 = x_2, \cdots, X_t = x_t]\\&= P[X_{t+1} = x_{t+1}|X_t = x_t]\\&= P(x_t, x_{t+1})\end{aligned}$$

PROPIEDADES DE PROBABILIDADES DE TRANSICION

$$\begin{aligned}&1. \quad 0 \leq P(x, y) \leq 1, \forall (x, y) \in S \times S\\&2. \quad \sum_{y \in S} P(x, y) = 1, \forall x \in S, \text{fijo}\end{aligned}$$

FINITO DIMENSIONAL

$$P[X_0 = x_0, X_1 = x_1 X_2 = x_2, \cdots, X_t = x_t]$$
$$\pi_0(x_0) \times p(x_0, x_1) \times p(x_1, x_2) \times \cdots \times p(x_{t-1}, x_t)$$

ESTADO ABSORBENTE

Un estado a de una cadena de Markov se llama **estado absorbente** si $P(a, a) = 1$ ó de manera equivalente $P(a, y) = 0, y \neq a$

Además cumple las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}&P^n(a, a) = 1 = P(X_n = a|X_0 = a)\\&P^n(x, a) = P_x(T_a \leq n)\end{aligned}$$

CÁLCULO CON FUNCIONES DE TRANSICIÓN

Calcular facil probabilidades paso tras paso:

$$\begin{aligned}&P[X_{n+1} = y_1, \cdots, X_{n+m} = y_m|X_0 = x_0, X_1 = x_1, \cdots, X_n = x_n]\\&= P(x_n, y_1) \times P(y_2, y_3) \times \cdots \times P(y_{m-1}, y_m)\end{aligned}$$

Funcion de transicion en **m** pasos $P^m(x, y)$, esta definida como:

$$P^m(x,y) = \sum_{y_1} \cdots \sum_{y_{m-1}} P(x,y_1) \times P(y_2,y_3) \times \cdots \times P(y_{m-1},y)$$

Y como notación:

$$\begin{aligned} P^m(x,y) &= P(X_m = y | X_0 = x) \quad \text{ó bien} \\ &= P(X_{n+m} = y | X_n = x) \end{aligned}$$

Formula de Chapman-Kolmogorov

Probabilidad de transición en **m+n** paso. Considere m y n números enteros positivos.

$$P^{n+m}(x,y) = \sum_{z \in S} P^n(x,z) P^m(z,y)$$

Ahora la probabilidad de que el sistema en algún tiempo n , este en el estado y (i.e. $X_n = y$)

$$P(X_n = y) = \sum_{z \in S} \pi_0(z) P^n(z,y)$$

o de manera similar, si es que no necesariamente sabemos que la inicial:

$$P(X_{n+1} = y) = \sum_{z \in S} P(X_n = z) P(X_{n+1} = y | X_0 = z)$$

TIEMPOS DE ALCANCE

Definimos los tiempos de alcance como: El primer tiempo en el que la cadena de Markov se encuentra en A.

Si $X_n \in A$ para algún $n > 0$, entonces

$$T_A = \min\{n \geq 0 : X_n \in A\}, \text{donde}, A \subseteq S$$

Y si $X_n \notin A$, entonces $T_A = \infty$

En particular, si A es un subconjunto de un solo elemento, como nos interesa, Entonces si $A = \{a\}$

$$T_A = T_{\{a\}} = T_a = \inf\{n \geq 0 : X_n = a\}$$

Antes de seguir, note que los siguientes evento.ms son disjuntos: $\{X_n = y, T_y = m\}$, para $1 < m < n$. Entonces, es claro que:

NOTACION: $P_x(T_y = m) = P(T_y = m | X_0 = x)$

$$\{X_n = y\} = \bigcup_{m=1}^{n} \{X_n = y, T_y = m\}$$

Tenemos ahora las siguientes fomulas:

$$P^n(x,y) = \sum_{m=1}^{n} P_x(T_y = m) P^{n-m}(y,y)$$

Recuerde además que: $P_x(T_y = m) = P(T_y = m|X_0 = x)$

En particular, si y es un estado absorbente, entonces $P^n(x, a) = P_x(T_a \leq n)$

Ahora, si queremos calcular la probabilidad de que: Dado que estamos en $X_0 = x$, el sistema alcance el estado y al tiempo m, entonces:

Si $m = 1$, entonces

$$P_x(T_y = 1) = P(X_1 = y|X_0 = x) = P(x, y)$$

Si $m = 2$, entonces,

$$\begin{aligned} P_x(T_y = 2) &= P(X_1 \neq y, X_2 = y|X_0 = x), \; X_1 \text{ está en cualquier otro estado} \\ &= \sum_{z \neq y} P(X_1 = z, X_2 = y|X_0 = x) \\ &= \sum_{z \neq y} P(x, z)P(z, y) \end{aligned}$$

En general, tenemos que:

$$P_x(T_y = n + 1) = \sum_{z \neq y} P(x, z)P_z(T_y = n), \quad n \geq 1$$

> Lo anterior tiene mucho sentido, pues para ir de x a y por primera vez al tiempo $n+1$, primero es necesario que vaya a algun estado $z \neq y$ y despues ir de z a y en n pasos.

MATRICES DE TRANSICION

Suponga ahora que el espacio de estados S, es finito, digamos $S = \{0, 1, 2, \cdots, d\}$. En este caso pensamos a P como **la matriz de transición**, con $d + 1$ filas y columnas:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 0 & \cdots & d \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ d \end{array} & \begin{bmatrix} P(0,0) & \cdots & P(0,d) \\ \vdots & & \vdots \\ P(d,0) & \cdots & P(d,d) \end{bmatrix} \end{array}.$$

💡 Se puede probar que la matriz P^n **matriz de transición en n pasos.** Es la $n-esima$ potencia de la matriz P.

Una distribución inicial π_0 puede ser tomada como un vector fila $(d+1)$-dimensional:

$$\pi_0 = (\pi_0(0), \pi_0(1), \cdots, \pi_0(d))$$

Analogamente con π_n puede ser tomado como un vector fila $(d+1)$-dimensional:

$$\pi_n = (P(X_n = 0), P(X_n = 1), \cdots, P(X_n = d))$$

De donde se concluye lo siguiente

- $\pi_n = \pi_0 P$
- $\pi_{n+1} = \pi_n P$

CLASIFICACION DE ESTADOS

Estado absorbente

Un estado a de una cadena de Markov se llama **estado absorbente** si $P(a,a) = 1$ ó de manera equivalente $P(a,y) = 0, y \neq a$

Además cumple las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} P^n(a,a) &= 1 = P(X_n = a | X_0 = a) \\ P^n(x,a) &= P_x(T_a \leq n) \quad n \geq 1 \end{aligned}$$

Probabilidades de alcance

Sea $\{X_n\}$ una cadena de Markov que tiene espacio de estados S y función de transición P.

Definimos ρ_{xy} como:

$$\begin{aligned} \rho_{xy} &= P_x(T_y < \infty) \\ &= P(T_y < \infty | X_0 = x) \quad x, y \in S \end{aligned}$$

La cual denota la probabilidad de que la cadena alcance el estado y en algún instante dado que se ecuentra inicialemente en x.

Estados Recurrentes y Transitorios

Vea que ρ_{yy} denota la prob. de que la cadena que comienza en y vuelva a y en algún momento.

Entonces, podemos clasificar:

Recurrente	$\rho_{yy} = 1$
Transitorio	$0 \leq \rho_{yy} \leq 1$

Vea entonces que si z es un estado **transitorio** entonces, si la cadena comienza en z se tiene un probabilidad de $(1 - \rho_{zz})$ de **nunca regresar a** z.

> ✅ Los estados **asbsorbentes son recurrentes:** $P_y(T_y = 1) = P(y,y) = 1$ entonces $\rho_{yy} = 1$

Número de visitas a un estado y

Defina la siguiente función indicadora:

$$I_{\{y\}}(x_n) = \begin{cases} 1 \quad si \quad x_n = y \\ \\ 0 \quad si \quad x_n \neq y \end{cases}$$

Sea $N(y) = \#$ de visitas que hace la cadena al estado y.

Entonces podemos saber el **numero de visitas que hace la cadena a un estado y.** Esto es:

$$N(y) = \sum_{i=1}^{\infty} I_{\{y\}}(x_n)$$

Vea que los eventos $\{N(y) \geq 1\} = \{T_y < \infty\}$. Entonces

$$P_x(N(y) \geq 1) = P_x(T_y < \infty) = \rho_{xy}$$

Ahora, considere m, n enteros positivos. Vea que si la cadena empieza en x y visita por primera vez a y al tiempo m y despues, estando en y visita a y en n tiempos, pude ser expresada como: $P_x(T_y = m)P_y(T_y = n)$

$$\begin{aligned} P_x(N(y) \geq 2) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P_x(T_y = m)P_y(T_y = n) \\ &= \left(\sum_{m=1}^{\infty} P_x(T_y = m) \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} P_y(T_y = n) \right) \\ &= P_x(T_y < \infty)P_y(T_y < \infty) \\ &= \rho_{xy}\rho_{yy} \end{aligned}$$

En general:

$$P_x(N(y) \geq m) = \rho_{xy}(\rho_{yy})^{m-1}$$

Además, la probabilidad de empezar en x y visitar a y más de m veces. Entonces:

$$P_x(N(y) = m) = \rho_{xy}(\rho_{yy})^{m-1}(1 - \rho_{yy})$$

En palabras, para que la cadena que empieza en x visite al estado y en exactamente m ocaciones, debe visitar a y por primera vez, luego regresar a y en $m - 1$ ocaciones, y finalmente nunca regresar a y.

Promedio de visitas a un estado.

Vea que con $N(y)$ podemos contabilizar el promedio de visitas a un estado. Entonces. $E_x[N(y)]$ nos denota el promedio de visitas al estado y, dado que la cadena inicia en x.

$$\begin{aligned} E_x[N(y)] &= \sum_{i=1}^{\infty} E_x[I_y(x_i)] \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} P_x(X_n = y) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} P^n(x, y) \end{aligned}$$

Por notación: $G(x,y)=E_x[N(y)]=\sum_{i=1}^{\infty}P^n(x,y)$

> **Teorema**
>
> - **PARA ESTADOS TRANSITORIOS**
>
>   Sea y un estado transitorio, entonces:
>
> $$\begin{aligned} P_x(N(y)<\infty)&=1 && (1)\\ G(x,y)&=\frac{\rho_{xy}}{1-\rho_{yy}} \quad x\in S && (2)\end{aligned}$$
>
> - **PARA ESTADOS RECURRENTES**
>
>   Sea y un estado recurrente, entonces
>
> $$\begin{aligned} P_y(N(y)=\infty)&=1 && (3)\\ G(y,y)&=\infty && (4)\end{aligned}$$
>
>   Además.
>
> $$\begin{aligned} &P_x(N(y)=\infty)=P_x(T_y<\infty)=\rho_{xy} && (5)\\ &\text{Si } \rho_{xy}=0 \text{ entonces } G(x,y)=0 && (6)\\ &\text{Si } \rho_{xy}>0 \text{ entonces } G(x,y)=\infty && (7)\end{aligned}$$

✅ Note que si una cadena tiene espacio de estados finito, debe tener almenos un estado recurrente. Entonces una cadena de Markov no puede ser transitoria.

Descomposición del espacio de estados.

> **Definición**
>
> Sean x y y dos estados, no necesariamente distintos. Decimos que x **accede a** y **(ie** $x\longrightarrow y$**)** si $\rho_{xy}>0$

Ademas vea que:

- $x\longrightarrow y \quad \wedge \quad y\longrightarrow z \Longrightarrow x\longrightarrow z$
- No es reflexiva, ni simetrica. ie si x accede a y no necesariamente y accede a x

> **Teorema**
>
> Sea x un estado recurrente y suponga que $x\longrightarrow y$. Entonces y es recurrente y ademas $\rho_{xy}=\rho_{yx}=1$

Defina ahora las siguientes clases.

$$C_x = \{y \in S_R | x \longrightarrow y\} = C_x = \{y \in S_R | \rho_{xy} > 0)$$

> **DEFINICION**
>
> Sea $C \subset S$ decimos que C es cerrado, si ningun estado de C se comunica con algun estado fuera de C.
>
> i.e.
>
> $$\rho_{xy} = 0, x \in C, y \notin C$$
> $$ó P^n(x, y) = 0, x \in C, y \notin C$$

Sea C una clase cerrada. Decimos que C es IRREDUCIBLE si $x \longrightarrow y \quad x, y \in C$

> **COROLARIO**
>
> Sea C una clase cerrada e irreducible de estados. Entonces$\rho_{xy} = 1$, $P_x(N(y) = \infty) = 1$, y $G(x, y) = \infty$ para cualquiera $x, y \in C$

> **TEOREMA**
>
> Sea C una clase finita cerrada e irreducible de estados. Entonces, cada estado en C es recurrente

> **TEOREMA**
>
> Suponga que el conjunto S_R de estados recurrentes es no vacio. Entonces S_R es la union finita o contable finita de clases cerradas irreducibles disjuntas $C_1, C_2 \dots$

Probabilidades de Absorcion

Sea C un conjunto cerrado e irreducible de estados recurrentes. Se define la probabilidad de Absorcion de un estado $x \in S$ como:

$$\rho_C(x) = P_x(T_C < \infty)$$

Ademas, definimos para el calculo de probabilidades:

$$\rho_C(x) = \sum_{y \in C} P(x, y) + \sum_{y \in S_T} P(x, y) p_C(y)$$

Cadenas de Muerte y Nacimiento

Defina

$$u(x) = P_x(T_a < T_b) \quad a < x < b$$
$$u(a) = 1 \quad u(b) = 0$$

$$\text{Definase} \quad \gamma_0 = 1, \gamma_y = \frac{q_1 \cdots q_y}{p_1 \cdots p_y}, 0 < y < d$$

Entonces tenemos dos casos.

$$P_x(T_a < T_b) = \frac{\sum_{y=x}^{b-1} \gamma_y}{\sum_{y=a}^{b-1} \gamma_y}, \quad a < x < b$$

$$P_x(T_b < T_a) = \frac{\sum_{y=a}^{x-1} \gamma_y}{\sum_{y=a}^{b-1} \gamma_y}, \quad a < x < b$$

Matriz de transicion para dos estados

$$P = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}$$

$$P^n = \frac{1}{p+q}\begin{pmatrix} q & p \\ q & p \end{pmatrix} + \frac{(1-p-q)^n}{p+q}\begin{pmatrix} p & -p \\ -q & q \end{pmatrix}$$