VARIACIONES DEL MOVIMIENTO BROWNIANO

Nexus-Probability

CURSO 4 (PROCESOS ESTOCÁSTICOS II)

PARTE 4 / LECCIÓN 3

1. Variaciones del Movimiento Browniano

Movimiento Browniano con Deriva

Definición 1 *Movimiento Browniano con Deriva*

Decimos que $\{X(t),\, t \geq 0\}$ es un proceso de movimiento browniano con coeficiente de deriva μ y parámetro de varianza σ^2 si:

(i) $X(0) = 0$;

(ii) $\{X(t),\, t \geq 0\}$ *tiene incrementos estacionarios e independientes;*

(iii) $X(t)$ *se distribuye de forma normal con media μt y varianza $t\sigma^2$.*

Una definición equivalente es tomar $\{B(t),\, t \geq 0\}$ como movimiento browniano estándar y definir

$$X(t) = \sigma B(t) + \mu t.$$

Movimiento Browniano Geométrico

Definición 2 *Movimiento Browniano Geométrico*

Si $\{Y(t),\, t \geq 0\}$ es un proceso de movimiento browniano con coeficiente de deriva μ y parámetro de varianza σ^2, entonces el proceso $\{X(t),\, t \geq 0\}$ definido por

$$X(t) = e^{Y(t)}$$

se denomina movimiento browniano geométrico.

Para un proceso de movimiento browniano geométrico $\{X(t)\}$, calculemos el valor esperado del proceso en el tiempo t dado el historial del proceso hasta el tiempo s. Es decir, para $s < t$, consideramos

$$E\Big[X(t) \mid X(u),\, 0 \leq u \leq s\Big].$$

Ahora,

$$\begin{aligned}
E\Big[X(t) \mid X(u),\, 0 \leq u \leq s\Big] &= E\Big[e^{Y(t)} \mid Y(u),\, 0 \leq u \leq s\Big] \\
&= E\Big[e^{Y(s)+\big(Y(t)-Y(s)\big)} \mid Y(u),\, 0 \leq u \leq s\Big] \\
&= e^{Y(s)}\, E\Big[e^{Y(t)-Y(s)} \mid Y(u),\, 0 \leq u \leq s\Big] \\
&= X(s)\, E\Big[e^{Y(t)-Y(s)}\Big],
\end{aligned}$$

donde la penúltima igualdad se debe a que $Y(s)$ es conocido, y la última igualdad proviene de la propiedad de incrementos independientes del movimiento browniano. Ahora, la función generadora de momentos de una variable aleatoria normal W está dada por

$$E\Big[e^{aW}\Big] = e^{aE[W] + \frac{a^2 \operatorname{Var}(W)}{2}}.$$

Dado que $Y(t) - Y(s)$ es normal con media $\mu(t-s)$ y varianza $(t-s)\sigma^2$, se sigue, al fijar $a = 1$, que

$$E\Big[e^{Y(t)-Y(s)}\Big] = e^{\mu(t-s) + \frac{(t-s)\sigma^2}{2}}.$$

Así, obtenemos

$$E\Big[X(t) \mid X(u),\, 0 \leq u \leq s\Big] = X(s)\, e^{(t-s)\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)}.$$

El movimiento browniano geométrico es útil en el modelado de precios de acciones a lo largo del tiempo cuando se considera que los cambios porcentuales son independientes e idénticamente distribuidos. Por ejemplo, supongamos que X_n es el precio de alguna acción en el tiempo n. Entonces, podría ser razonable suponer que

$$\frac{X_n}{X_{n-1}}, \quad n \geq 1,$$

son independientes e idénticamente distribuidos. Sea

$$Y_n = \frac{X_n}{X_{n-1}},$$

de modo que

$$X_n = Y_n\, X_{n-1}.$$

Iterando esta igualdad se tiene

$$X_n = Y_n Y_{n-1} X_{n-2} = Y_n Y_{n-1} Y_{n-2} X_{n-3} \cdots = Y_n Y_{n-1} \cdots Y_1 X_0.$$

Por lo tanto,

$$\log(X_n) = \sum_{i=1}^{n} \log(Y_i) + \log(X_0).$$

Dado que $\log(Y_i)$, $i \geq 1$, son independientes e idénticamente distribuidos, la sucesión $\{\log(X_n)\}$ será, cuando se normalice adecuadamente, aproximadamente un movimiento browniano con deriva, y por lo tanto $\{X_n\}$ será aproximadamente un movimiento browniano geométrico.

2. Ejercicios

Ejercicio 1 (Con Deriva) *Simula una trayectoria de movimiento browniano con deriva $\mu = 0.5, \sigma = 1$ en $[0, 1]$ con 500 pasos y grafica la trayectoria.*

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

T = 1.0
N = 500
dt = T / N
t = np.linspace(0, T, N + 1)
np.random.seed(42)


mu = 0.5
sigma = 1.0
dW = np.sqrt(dt) * np.random.randn(N)
W = np.concatenate(([0], np.cumsum(dW)))
X = sigma * W + mu * t

plt.figure(figsize=(10, 5))
plt.plot(t, X, label=r'$X(t) = \sigma B(t) + \mu t$')
plt.title('Ejercicio 1: Movimiento Browniano con Deriva')
plt.xlabel('Tiempo')
plt.ylabel('X(t)')
plt.grid()
plt.legend()
plt.show()
```

Ejercicio 2 (Geométrico) *Simula y grafica una trayectoria de movimiento browniano geométrico con* $\mu = 0.05, \sigma = 0.2$ *y* $X(0) = 100$ *en* $[0, 1]$.

```

T = 1.0
N = 500
dt = T / N
t = np.linspace(0, T, N + 1)
np.random.seed(42)

mu = 0.05
sigma = 0.2
X0 = 100
dW = np.sqrt(dt) * np.random.randn(N)
W = np.concatenate(([0], np.cumsum(dW)))
Y = mu * t + sigma * W
X_geo = X0 * np.exp(Y)

plt.figure(figsize=(10, 5))
plt.plot(t, X_geo, label='Movimiento Browniano Geom trico')
plt.title('Ejercicio 2: Movimiento Browniano Geom trico')
plt.xlabel('Tiempo')
plt.ylabel('X(t)')
plt.grid()
plt.legend()
plt.show()
```

Ejercicio 3 (Con deriva y geométrico) *Simula 1000 trayectorias de movimiento browniano geométrico con* $\mu = 0.1, \sigma = 0.3, X(0) = 50$ *y calcula el valor esperado empírico de* $X(1)$*. Compara con la fórmula teórica.*

```
T = 1.0
N = 500
dt = T / N
t = np.linspace(0, T, N + 1)
np.random.seed(42)

mu = 0.1
sigma = 0.3
X0 = 50
M = 1000
X_T = np.zeros(M)

for i in range(M):
```

```python
    dW = np.sqrt(dt) * np.random.randn(N)
    W = np.cumsum(dW)
    Y = mu * T + sigma * W[-1]
    X_T[i] = X0 * np.exp(Y)

# Valor esperado emp rico
mean_empirical = np.mean(X_T)

# Valor esperado te rico
mean_theoretical = X0 * np.exp(mu * T)

print(f"Valor esperado emp rico de X(1): {mean_empirical:.4f}")
print(f"Valor esperado te rico de X(1): {mean_theoretical:.4f}")
```