Proceso de Poisson No-homogéneo.

Nexus-Probability

CURSO 4 (PROCESOS ESTOCÁSTICOS II)

PARTE 1 / LECCIÓN 2

Definición 1 (Proceso poisson No-homogéneo) *Es un proceso a tiempo continuo $X_t : t \geq 0$, con espacio de estados $\{0, 1, \ldots\}$, con parámetro la función positiva y localmente integrable $\lambda(t)$, y que cumple las siguientes propiedades:*

1. $X_0 = 0$.
2. *Los incrementos son independientes.*
3. *Para cualquier $t \geq 0$, y cuando $h \to 0$:*
   a) $P(X_{t+h} - X_t = 1) = \lambda(t)h + o(h)$.
   b) $P(X_{t+h} - X_t \geq 2) = o(h)$.

proposición 2.1

En un **proceso de Poisson no homogéneo** con parámetro $\lambda(t)$, la variable X_t sigue una distribución de Poisson con parámetro $\Lambda(t)$, definido como:

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(s)\, ds$$

Esto significa que la probabilidad de que X_t tome un valor n es:

$$P(X_t = n) = \frac{\Lambda(t)^n e^{-\Lambda(t)}}{n!}, \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \ldots$$

donde:

- $\lambda(t)$ es la tasa de llegada en el tiempo t.
- $\Lambda(t)$ representa la tasa acumulada hasta el tiempo t.
- La distribución de X_t sigue una **distribución de Poisson** con media $\Lambda(t)$.

proposición 2.2

En un **proceso de Poisson no homogéneo**, la variable incremento $X_t - X_s$ (es decir, el número de eventos que ocurren en el intervalo de tiempo $(s, t]$) sigue una distribución de Poisson con parámetro $\Lambda(t) - \Lambda(s)$, donde:

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(u)\, du$$

Esto significa que:

$$X_t - X_s \sim \text{Poisson}(\Lambda(t) - \Lambda(s))$$

donde:

- $\lambda(u)$ es la tasa de llegada en el tiempo u.
- $\Lambda(t)$ representa la tasa acumulada hasta el tiempo t.
- $\Lambda(t) - \Lambda(s)$ es la tasa acumulada entre los tiempos s y t, lo que determina la distribución de $X_t - X_s$.

En consecuencia, la probabilidad de observar exactamente k eventos en el intervalo $(s, t]$ es:

$$P(X_t - X_s = k) = \frac{(\Lambda(t) - \Lambda(s))^k e^{-(\Lambda(t)-\Lambda(s))}}{k!}, \quad \text{para } k = 0, 1, 2, \ldots$$

Esto se debe a la propiedad de los incrementos independientes en el proceso de Poisson.

proposición 2.3

Sea $X_t : t \geq 0$ un **proceso de Poisson no homogéneo** con parámetro $\lambda(t)$ y función de intensidad:

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(s)\, ds.$$

Definimos la función inversa de $\Lambda(t)$ como:

$$\Lambda^{-1}(t) = \text{ínf}\{u \geq 0 : \Lambda(u) \geq t\}.$$

Entonces, el proceso $X_{\Lambda^{-1}(t)} : t \geq 0$ es un **proceso de Poisson homogéneo** con parámetro $\lambda = 1$.

Ejercicios

Los siguientes ejercicios propuestos tendrán solución en **Python**, por lo que te invitamos a ejecutar el código en tu computadora.

Ejercicio 1 *Consideremos una farmacia que abre las 24 horas del día. Además, supongamos que la tasa con la que llegan los clientes sigue un **proceso de Poisson no homogéneo** con la función de tasa dada por:*

$$\lambda(x) = \frac{1}{10}(24x - x^2), \quad x \in [0, 24]$$

donde $\lambda(x)$ representa la tasa de llegada de clientes por hora en la hora x del día. Ahora, respondamos las siguientes preguntas:

*a) ¿Cuál es la probabilidad de que lleguen exactamente **5** clientes entre las **8:00** y las **9:30** horas?*

*b) ¿Cuál es la probabilidad de que lleguen exactamente **7** clientes entre las **15:00** y las **17:00** horas?*

Solución.

```
# Ejercicio 1:
import numpy as np
import scipy.stats as stats
import scipy.integrate as integrate
import math

# Definir la funcion de tasa lambda(x)
lambda_x = lambda x: (1/10) * (24*x - x**2)

# Nuevos intervalos de tiempo y valores de k
casos = [
{"intervalo": (8, 9.5), "k": 5},   # De 8:00 a 9:30, exactamente 5 clientes
{"intervalo": (15, 17), "k": 7}    # De 15:00 a 17:00, exactamente 7 clientes
]

# Calcular las probabilidades para cada caso
for caso in casos:
a, b = caso["intervalo"]
k = caso["k"]

# Calcular la integral de lambda(x) en [a, b]
Lambda_ab, _ = integrate.quad(lambda_x, a, b)

# Calcular la probabilidad de Poisson P(N = k)
```

```
    prob_k = (Lambda_ab**k * np.exp(-Lambda_ab)) / math.factorial(k)
    # Resultados de Ejercicio 1
print(f"P(N = {k}) entre {a}:00 y {b}:00 = {prob_k:.4f}")

```

```
P(N = 5) entre 8:00 y 9:30 = 0.0001
P(N = 7) entre 15:00 y 17:00 = 0.0000
```

Ejercicio 2 *El banco A y el banco B reciben clientes de acuerdo a un proceso de Poisson no homogéneo, cuya tasa está dada por:*

$$\lambda(t) = \frac{2}{200} \quad \textit{para} \quad 0 < t < 200$$

El tiempo está medido en horas, y el banco opera desde las 8:00 hasta las 16:00 horas. Sin embargo, los clientes llegan entre las 8:00 y las 16:06 hrs.
a) ¿Cuál es la probabilidad de que el primer cliente llegue entre las 9:00 y las 10:00?
b) Si todos los clientes se demoran exactamente 15 minutos dentro del banco, determine el número esperado de clientes dentro del banco en cualquier instante del día.

Solución.

```
import numpy as np
import scipy.integrate as integrate
import matplotlib.pyplot as plt

# Definimos la tasa de Poisson no homog nea con los nuevos par metros
def lambda_t(t):
return 2 / 200

# a) Probabilidad de que el primer cliente llegue entre las 9:00 y las 10:00 (1 hora)
# Tasa acumulada de clientes desde t=0 hasta t=200 horas
def probabilidad_llegada_entre_9y10():
# La integral de la tasa entre 9:00 y 10:00 (en horas)
t_inicial = 1  # 9:00 horas
t_final = 2    # 10:00 horas
integral, _ = integrate.quad(lambda t: lambda_t(t), t_inicial, t_final)
return 1 - np.exp(-integral)
```

```
# b) Numero esperado de clientes en el banco en cualquier instante del dia
# Si todos los clientes se demoran 15 minutos (0.25 horas), la tasa efectiva es la misma
def numero_esperado_clientes():
# El tiempo total de operacion es de 8 horas (desde las 8:00 hasta las 16:00)
tiempo_total = 8
integral, _ = integrate.quad(lambda t: lambda_t(t), 0, tiempo_total)
return integral

probabilidad_9_10 = probabilidad_llegada_entre_9y10()
numero_esperado = numero_esperado_clientes()

#Mostrar resultados

print(f”a) Probabilidad de que el primer cliente llegue entre las 9:00 y las 10:00: {probabilidad_9_10:.4f}”)
print(f”b) Numero esperado de clientes en el banco en cualquier instante del dia: {numero_esperado:.2f}”)
```

```
a) Probabilidad de que el primer cliente llegue entre las 9:00 y las 10:00: 0.0100
b) Número esperado de clientes en el banco en cualquier instante del día: 0.08
```