Distribución de Funciones de Variables Aleatorias

Nexus-Probability

CURSO 2 (PROBABILIDAD II)

PARTE 4 / LECCIÓN 1

Distribuciones de Funciones de Variables Aleatorias

Sean X_1 y X_2 variables aleatorias conjuntas y continuas con función de densidad conjunta f_{X_1,X_2}. Algunas veces es necesario obtener la distribución conjunta de algunas variables aleatorias Y_1 y Y_2 que a su vez son funciones de X_1 y X_2. Particularmente, suponga que $Y_1 = g_1(x_1, x_2)$ y $Y_2 = g_2(x_1, x_2)$ para algunas funciones g_1 y g_2. Supongamos que satistacen las siguientes condiciones:

- Las ecuaciones $y_1 = g_1(x_1, x_2)$ y $y_2 = g_2(x_1, x_2)$ tienen solución única para x_1 y x_2 en términos de y_1 y y_2, con soluciones dadas por, digamos, $x_1 = h_1(y_1, y_2)$ y $x_2 = h_2(y_1, y_2)$

- Las funciones g_1 y g_2 tienen derivadas parciales continuas en todos los puntos (x_1, x_2) y son tales que el determinante de 2x2

$$J(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \\ \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \end{vmatrix} \neq 0$$

  En todos los puntos (x_1, x_2)

Bajo estas dos condiciones, se puede probar que las variables aleatorias Y_1 y Y_2 conjuntamente continuas con función de densidad conjunta dada por :

$$f_{Y_1Y_2}(y_1, y_2) = f_{X_1,X_2}(x_1, x_2)|J(x_1, x_2)|^{-1}$$

donde $x_1 = h_1(y_1, y_2)$, $x_2 = h_2(y_1, y_2z)$

0.1. Ejercicios

Ejercicio 1 *Supón que $X \sim \mathcal{N}(5, 2^2)$, es decir, X tiene una distribución normal con media 5 y varianza 4. Si $Y = 3X + 1$, determina la distribución de Y, especificando su media y varianza.*

Solución: Sea $X \sim \mathcal{N}(5, 2^2)$. Definimos la transformación:

$$Y = 3X + 1$$

Si una variable aleatoria $X \sim \mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$, y aplicamos la transformación lineal $Y = aX + b$, entonces:

$$E[Y] = aE[X] + b = 3(5) + 1 = 16$$

$$\text{Var}(Y) = a^2\text{Var}(X) = 3^2(4) = 36$$

Por lo tanto, la distribución de Y es:

$$Y \sim \mathcal{N}(16, 36)$$

Código

```
import numpy as np

# Par metros de X
mu_X = 5
sigma_X = 2

# Par metros de la transformaci n
a = 3
b = 1

# Media y varianza de Y
mu_Y = a * mu_X + b
sigma_Y = a * sigma_X

mu_Y, sigma_Y


```

Ejercicio 2 *Sea $X \sim \mathcal{U}(0,1)$, es decir, X tiene una distribución uniforme en el intervalo $[0,1]$. Considera la transformación $Y = \sqrt{X}$. Encuentra la función de densidad de probabilidad de Y, es decir, determina $f_Y(y)$.*

Solución:
Sea $X \sim \mathcal{U}(0,1)$ y definimos la transformación $Y = \sqrt{X}$. La densidad de X es:

$$f_X(x) = 1, \quad 0 \leq x \leq 1$$

Despejamos X en términos de Y:

$$X = Y^2$$

Aplicamos la fórmula de transformación de variables:

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \left| \frac{d}{dy} g^{-1}(y) \right|$$

Calculamos la derivada:

$$\frac{d}{dy} Y^2 = 2Y$$

Sustituyendo:

$$f_Y(y) = 1 \cdot |2y| = 2y, \quad 0 \leq y \leq 1$$

Por lo tanto, la función de densidad de Y es:

$$f_Y(y) = 2y, \quad 0 \leq y \leq 1$$

Código

```
import sympy as sp

# Definimos la variable X
x = sp.symbols('x')

# Funci n de densidad de X (uniforme en [0, 1])
f_X = 1

# Transformaci n Y = sqrt(X)
y = sp.sqrt(x)

# Derivada de la inversa de la transformaci n
dy_dx = sp.diff(y, x)

```

```
# Calculamos la densidad de Y usando la f rmula de
   transformaci n
f_Y = f_X * abs(dy_dx.subs(x, y**2))

f_Y.simplify()


```

> **Ejercicio 3** *Sea X una variable aleatoria discreta con la siguiente distribución de probabilidad:* $P(X = 1) = 0.2, \quad P(X = 2) = 0.5, \quad P(X = 3) = 0.3$ *Considera la transformación $Y = 2X + 1$. Encuentra la distribución de probabilidad de Y.*

Solución:
Dada la variable discreta:

$$P(X = 1) = 0.2, \quad P(X = 2) = 0.5, \quad P(X = 3) = 0.3$$

Aplicamos la transformación $Y = 2X + 1$:

$$Y = 2(1) + 1 = 3, \quad Y = 2(2) + 1 = 5, \quad Y = 2(3) + 1 = 7$$

Asignamos las mismas probabilidades:

$$P(Y = 3) = P(X = 1) = 0.2, \quad P(Y = 5) = P(X = 2) = 0.5, \quad P(Y = 7) = P(X = 3) = 0.3$$

Código:

```
# Distribuci n de probabilidad de X
prob_X = {1: 0.2, 2: 0.5, 3: 0.3}

# Transformaci n Y = 2X + 1
prob_Y = {2 * x + 1: prob for x, prob in prob_X.items()}

prob_Y


```

> **Ejercicio 4** *Supón que $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, es decir, X sigue una distribución exponencial con parámetro $\lambda = 1$. Considera la transformación $Y = \ln(X)$. Encuentra la función de densidad de probabilidad de Y, es decir, determina $f_Y(y)$.*

Solución:
Sea $X \sim \mathcal{E}(1)$, es decir, X tiene densidad:

$$f_X(x) = e^{-x}, \quad x \geq 0$$

Definimos la transformación $Y = \ln(X)$, despejamos:

$$X = e^Y$$

Usamos la fórmula de cambio de variable:

$$f_Y(y) = f_X(e^y) \left| \frac{d}{dy} e^y \right|$$

Calculamos la derivada:

$$\frac{d}{dy} e^y = e^y$$

Sustituyendo:

$$f_Y(y) = e^{-e^y} \cdot e^y = e^{y - e^y}, \quad y \in \mathbb{R}$$

Código:

```python
# Distribuci n de probabilidad de X
prob_X = {1: 0.2, 2: 0.5, 3: 0.3}

# Transformaci n Y = 2X + 1
prob_Y = {2 * x + 1: prob for x, prob in prob_X.items()}

prob_Y
```

Ejercicio 5 *Dado que $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, usa la técnica de transformación inversa para generar variables aleatorias con una distribución normal estándar a partir de una distribución uniforme $U \sim \mathcal{U}(0,1)$.*

Solución:
Dado que $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, utilizamos la técnica de transformación inversa. Si $U \sim \mathcal{U}(0,1)$, aplicamos la función cuantil (inversa de la función de distribución acumulada normal Φ):

$$X = \Phi^{-1}(U)$$

donde Φ^{-1} es la función probit:

$$\Phi^{-1}(p) = \inf\{x \in \mathbb{R} \mid \Phi(x) \geq p\}$$

Este método se basa en la propiedad de que la función de distribución acumulada de la normal estándar, $\Phi(x)$, es continua y estrictamente creciente, lo que permite invertirla para transformar valores de una distribución uniforme en valores con distribución normal.

Código:

```
import scipy.stats as stats

# Generamos una variable uniforme
U = np.random.uniform(0, 1, 1000)

# Transformaci n inversa para obtener una variable normal est ndar
X_normal = stats.norm.ppf(U)

# Visualizamos el histograma
import matplotlib.pyplot as plt
plt.hist(X_normal, bins=30, density=True)
plt.title("Histograma de variable normal est ndar generada")
plt.show()
```