PRELIMINARES

Nexus-Probability

CURSO 4 (PROCESOS ESTOCÁSTICOS 2)

PARTE 2 / LECCIÓN 1

Suponga que se pone en operación un cierto componente o artículo cuya duración de vida útil se modela mediante una variable aleatoria $T_1, T_2, T_3, T_4, \ldots$. Una vez que el componente falla, se reemplaza o renueva con otro componente cuyo tiempo de vida es T_2, y así sucesivamente. La colección de variables aleatorias $T_1, T_2, \ldots$ representa la sucesión de tiempos de vida de componentes puestos en operación uno tras otro.

En este contexto, es natural suponer que las variables que modelan los tiempos de vida son no negativas, independientes y con la misma distribución de probabilidad. Un proceso de estas características se conoce con el nombre de proceso de renovación. Observe que exactamente en los tiempos en los que se efectúan las renovaciones, el proceso reinicia probabilísticamente. Empezaremos por dar una primera definición formal de un proceso de renovación basada en lo recién mencionado.

Definición 1 (Primera Definición) *Un proceso de renovación es una sucesión infinita de variables aleatorias $T_1, T_2, \ldots$ que son no negativas, independientes e idénticamente distribuidas.*

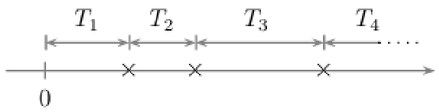

Figura 1:

Otra forma equivalente de definir a este proceso es a través del registro de los tiempos reales en los que se observan las renovaciones, o bien, a través del conteo de renovaciones observadas hasta un tiempo cualquiera. Estos puntos de vista alternativos se definen a continuación.

Ejemplo 1 *Como ejemplo de un proceso de renovación, supongamos que tenemos un suministro infinito de bombillas cuya vida útil es independiente e idénticamente distribuida. Supongamos también que usamos una sola bombilla a la vez, y cuando falla, la* *reemplazamos inmediatamente por una nueva. Bajo estas condiciones, $\{N(t), t \geq 0\}$ es un proceso de renovación cuando $N(t)$ representa el número de bombillas que han fallado hasta el tiempo t.*

Definición 2 *Dado un proceso de renovación $T_1, T_2, \ldots$, se definen los tiempos reales de renovación como $W_0 = 0$ y $W_n = T_1 + T_2 + \cdots + T_n$, para $n \geq 1$. El proceso de conteo de renovaciones es $N_t = \max\{n : W_n \leq t\}$, para cada $t \geq 0$.*

La variable aleatoria W_n representa el tiempo real en el que se realiza la n-ésima renovación, mientras que N_t indica el número de renovaciones efectuadas hasta el tiempo t. En la literatura se le denomina proceso de renovación a cualquiera de los procesos $T_n : n = 1, 2, \ldots$, $W_n : n = 0, 1, \ldots$, o $N_t : t \geq 0$, pues por construcción existe una correspondencia biunívoca entre cualesquiera dos de estos procesos.
Denotaremos por $F(t)$ a la función de distribución de los tiempos de vida. Por lo tanto, la función de distribución de W_n es la convolución de $F(t)$ consigo misma n veces, es decir,

$$F_{W_n}(t) = P(T_1 + \cdots + T_n \leq t) = F^{*n}(t) = (F * \cdots * F)(t).$$

En particular, $F^{*1}(t) = F(t)$ y cuando $n = 0$ se define

$$F^{*0}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ 1 & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

Teorema 1 *Para cualquier $n \geq 0$,*

$$P(N_t = n) = F^{*n}(t) - F^{*(n+1)}(t).$$

Demostración. Tomando en consideración que las variables W_n y T_{n+1} son independientes, tenemos que

$$\begin{aligned} P(N_t = n) &= P(W_n \leq t, W_{n+1} > t) = P(W_n \leq t, W_n + T_{n+1} > t) \\ &= P(t - T_{n+1} < W_n \leq t) = F_{W_n}(t) - F_{W_n}(t - T_{n+1}) \\ &= F^{*n}(t) - \int_0^\infty F_{W_n}|T_{n+1}(t - u|u) dF(u) \\ &= F^{*n}(t) - \int_0^\infty F^{*n}(t - u) dF(u) \\ &= F^{*n}(t) - F^{*(n+1)}(t). \end{aligned}$$

Ejemplo 2 *Un proceso de Poisson homogéneo de tasa λ es un proceso de renovación en donde los tiempos de vida tienen distribución exp(λ). En consecuencia, los tiempos reales de renovación W_n tienen distribución gama(n, λ), cuya función de distribución es, para $t > 0$,*

$$F_{W_n}(t) = \int_0^t \frac{(\lambda x)^{n-1}}{\Gamma(n)} \lambda e^{-\lambda x} dx = \sum_{k=n}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}.$$

La segunda igualdad puede obtenerse después de aplicar integración por partes varias veces. A partir de esta expresión puede recuperarse la distribución Poisson por el Teorema 1,

$$P(N_t = n) = F^{*n}(t) - F^{*(n+1)}(t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}.$$

Del mismo modo que sucedió en el caso del proceso de Poisson, para un proceso de renovación también es válida la igualdad de eventos $N_t \geq n = W_n \leq t$, para $t \geq 0$ y para $n \geq 0$ entero. Esta identidad nos será de utilidad más adelante.

Ejercicio 1 *Simulamos un proceso de renovación donde los tiempos de vida de los componentes siguen una distribución exponencial. El proceso de renovación cuenta el número de renovaciones que ocurren hasta un tiempo t.*

Código en Python

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Parametros
lambda_rate = 1  # Tasa de la distribucion exponencial
t_max = 10  # Tiempo maximo

# Funcion para simular el proceso de renovacion
def renovar(lambda_rate, t_max):
    tiempos_de_vida = []
    t = 0
    while t < t_max:
        tiempo_vida = np.random.exponential(1 / lambda_rate)
        t += tiempo_vida
        if t <= t_max:
            tiempos_de_vida.append(t)
    return tiempos_de_vida

# Simulacion del proceso
tiempos = renovar(lambda_rate, t_max)

# Mostrar los tiempos de renovacion
plt.figure(figsize=(8, 5))
plt.step(tiempos, range(1, len(tiempos) + 1), where='post',
    label='Renovaciones')
```

```
plt.xlabel('Tiempo')
plt.ylabel('Numero de renovaciones')
plt.title('Simulacion de un proceso de renovacion')
plt.grid(True)
plt.show()
```

Ejercicio 2 *En este ejemplo, calculamos la distribución de W_n para un proceso de Poisson homogéneo de tasa , que sigue una distribución gamma.*

Código en Python

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.stats import gamma

# Parametros
lambda_rate = 1  # Tasa del proceso de Poisson
n = 3  # Numero de renovaciones
t_max = 10  # Tiempo maximo

# Funcion de distribucion gama para W_n
def distribucion_gamma(n, lambda_rate, t_max):
    x = np.linspace(0, t_max, 1000)
    pdf = gamma.pdf(x, a=n, scale=1/lambda_rate)
    return x, pdf

# Obtener y graficar la distribucion
x, pdf = distribucion_gamma(n, lambda_rate, t_max)

plt.plot(x, pdf, label=f'Distribucion de W_{n}')
plt.xlabel('Tiempo')
plt.ylabel('Densidad de probabilidad')
plt.title(f'Distribucion de W_{n} para un proceso Poisson ( ={lambda_rate})')
plt.grid(True)
plt.legend()
plt.show()
```

Ejercicio 3 *Simulamos el proceso de renovación y luego calculamos $P(N_t = t)$, la probabilidad de que haya n renovaciones antes del tiempo t.*

Código en Python

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.stats import expon

# Parametros
lambda_rate = 1  # Tasa de la distribuci n exponencial
t_max = 10  # Tiempo maximo
n_max = 10  # Maximo numero de renovaciones

# Simulacion de un proceso de renovacion para obtener N(t)
def simular_proceso(lambda_rate, t_max, n_max):
    renovaciones = []
    t = 0
    while t < t_max and len(renovaciones) < n_max:
        tiempo_vida = np.random.exponential(1 / lambda_rate)
        t += tiempo_vida
        if t <= t_max:
            renovaciones.append(t)
    return len(renovaciones)

# Simulacion para calcular P(N_t = n)
simulaciones = [simular_proceso(lambda_rate, t_max, n_max) for _ in range(10000)]
probs = [simulaciones.count(n) / len(simulaciones) for n in range(n_max + 1)]

# Graficar las probabilidades de P(N_t = n)
plt.bar(range(n_max + 1), probs, alpha=0.7, label="P(N_t = n)")
plt.xlabel('Numero de renovaciones (n)')
plt.ylabel('Probabilidad')
plt.title('Probabilidad de renovaciones en un proceso de renovacion')
plt.grid(True)
plt.legend()
plt.show()
```