MÉTODO DE MOMENTO

Nexus-Probability

CURSO 4 (PROCESOS ESTOCÁSTICOS II)

PARTE 4 / LECCIÓN 3

Introducción

El **Método de Momentos** es una de las técnicas clásicas de estimación paramétrica en estadística. Su fundamento radica en utilizar los momentos de la distribución poblacional (momentos teóricos) y equipararlos con los momentos observados en una muestra (momentos muestrales), obteniendo así estimadores de los parámetros desconocidos.
A diferencia de otros métodos más complejos, como el método de máxima verosimilitud, el método de momentos destaca por su simplicidad y aplicabilidad, especialmente cuando el cálculo de la función de verosimilitud resulta complicado.

Definición

Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria extraída de una población con función de densidad $f(x;\theta)$, donde $\theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)$ representa un vector de parámetros desconocidos.

Momento teórico

El momento teórico de orden r de la distribución se define como:

$$\mu_r = E[X^r].$$

Momento muestral

El momento muestral de orden r está dado por:

$$m_r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^r.$$

El método de momentos propone estimar los parámetros $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$ igualando los primeros k momentos teóricos con los momentos muestrales correspondientes.

Procedimiento

Para obtener estimadores de k parámetros mediante el método de momentos, se sigue el siguiente esquema:

1. **Determinación de momentos teóricos**: Se calculan los primeros k momentos teóricos de la distribución en función de los parámetros $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$.
2. **Cálculo de momentos muestrales**: A partir de la muestra, se obtienen los primeros k momentos muestrales $m_1, m_2, \ldots, m_k$.
3. **Igualación de momentos**: Se plantea el sistema de ecuaciones:

$$\mu_1 = m_1, \quad \mu_2 = m_2, \quad \ldots, \quad \mu_k = m_k.$$

4. **Resolución del sistema**: Se resuelve el sistema de ecuaciones anterior para obtener los estimadores $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \ldots, \hat{\theta}_k$.

Ejemplo

Consideremos una variable aleatoria X que sigue una distribución exponencial con parámetro $\lambda > 0$. Su función de densidad es:

$$f(x; \lambda) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0.$$

El primer momento teórico es:

$$\mu_1 = E[X] = \frac{1}{\lambda}.$$

El primer momento muestral se calcula como:

$$m_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Igualando ambos momentos:

$$\frac{1}{\lambda} = m_1.$$

Por lo tanto, el estimador de λ por el método de momentos es:

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{m_1}.$$

Propiedades del Método de Momentos

El método de momentos posee ciertas características que permiten valorar su desempeño frente a otros métodos de estimación:

- **Consistencia**: Bajo condiciones generales, los estimadores por momentos son consistentes, es decir, convergen en probabilidad al verdadero valor del parámetro cuando el tamaño de la muestra tiende a infinito.
- **Simplicidad**: Es uno de los métodos más sencillos y directos para obtener estimadores.
- **Eficiencia**: En general, los estimadores por momentos no son eficientes, es decir, no necesariamente alcanzan la varianza mínima posible entre los estimadores insesgados.
- **Robustez**: Puede ser sensible a valores extremos, dado que los momentos muestrales son afectados por observaciones atípicas.

Ventajas y Desventajas

Ventajas	Desventajas
Fácil aplicación y comprensión	Puede ser ineficiente estadísticamente
No requiere función de verosimilitud	Sensible a valores atípicos
Útil para distribuciones complejas	No siempre existe solución única

Observaciones finales

El método de momentos es una herramienta útil y accesible para obtener estimadores de manera rápida y sencilla. Si bien sus estimadores no siempre son los mejores en términos de eficiencia, su valor radica en su aplicabilidad universal y facilidad de uso, especialmente en situaciones donde los métodos alternativos resultan más complejos.

Ejercicio 1 *Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución exponencial con parámetro $\lambda > 0$. Encuentra el estimador de λ mediante el método de momentos.*

Solución:
La función de densidad de X es:

$$f(x;\lambda) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0.$$

Momento teórico de orden 1:

$$\mu_1 = E[X] = \frac{1}{\lambda}.$$

Momento muestral de orden 1:

$$m_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Igualando:

$$\frac{1}{\lambda} = m_1.$$

Estimador:

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{m_1}.$$

Ejercicio 2 *Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra de una distribución uniforme en $(0, \theta)$. Estima θ mediante el método de momentos.*

Solución:
La función de densidad es:

$$f(x;\theta) = \frac{1}{\theta}, \quad 0 < x < \theta.$$

Momento teórico de orden 1:

$$\mu_1 = E[X] = \frac{\theta}{2}.$$

Momento muestral de orden 1:

$$m_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Igualando:

$$\frac{\theta}{2} = m_1.$$

Estimador:

$$\hat{\theta} = 2m_1.$$

Ejercicio 3 *Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra de una distribución Gamma con parámetros α (forma) y β (escala). Estima α y β mediante el método de momentos.*

Solución:
La función de densidad es:

$$f(x;\alpha,\beta) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}, \quad x > 0.$$

Momentos teóricos:

$$\mu_1 = E[X] = \alpha\beta.$$

$$\mu_2 = E[X^2] = \alpha(\alpha+1)\beta^2.$$

Momentos muestrales:

$$m_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \quad m_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2.$$

Igualando:

$$\alpha\beta = m_1.$$

$$\alpha(\alpha+1)\beta^2 = m_2.$$

Sustituyendo $\beta = \frac{m_1}{\alpha}$:

$$\frac{(\alpha+1)m_1^2}{\alpha} = m_2.$$

$$\alpha = \frac{m_1^2}{m_2 - m_1^2}.$$

$$\beta = \frac{m_1}{\alpha} = \frac{m_2 - m_1^2}{m_1}.$$