FUNCIÓN GENERADORA DE MOMENTOS

Nexus-Probability

CURSO 2 (PROBABILIDAD II)

PARTE 1 / LECCIÓN 4

Función Generadora de Momentos

La función generadora de momentos $M(t)$ de una variable aleatoria X se define para todos los valores reales de t como

$$\begin{aligned} M(t) &= E[e^{tX}] \\ &= \begin{cases} \sum_x e^{tX} p(x), & \text{Si } X \text{ es discreta con función masa } p(x), \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{tX} f(x) dx, & \text{Si } X \text{ es continua con función de densidad } f(x) \end{cases} \end{aligned} \tag{1}$$

Llamamos a $M(t)$ la función generadora de momentos porque podemos obtener todos los momentos de la variable aleatoria X derivando sucesivamente $M(t)$ y luego evaluando el resultado en $t = 0$. Por ejemplo

$$\begin{aligned} M'(t) &= \frac{d}{dt} E[e^{tX}] \\ &= E\{\frac{d}{dt}(e^{tX})\} \\ &= E[Xe^{tX}] \end{aligned} \tag{2}$$

donde hemos asumido que el cambio entre de orden entre la derivada y el operador de valor esperado es válido, es decir, hemos asumido lo siguiente

$$\frac{d}{dt}[\sum_x e^{tX} p(x)] = \sum_x \frac{d}{dt}[e^{tX} p(x)] \tag{3}$$

en el caso discreto y

$$\frac{d}{dt}[\int e^{tX} f(x) dx] = \int \frac{d}{dt}[e^{tX} f(x)] dx \tag{4}$$

en el caso continuo. Entonces, de la ecuación (2) evaluando en $t = 0$, obtenemos

$$M'(0) = E[X] \tag{5}$$

de manera análoga obtenemos

$$\begin{aligned} M'(t) &= \frac{d}{dt}M'(t) \\ &= \frac{d}{dt}E[Xe^{tX}] \\ &= E[\frac{d}{dt}(Xe^{tX})] \\ &= E[X^2e^{tX}] \end{aligned} \tag{6}$$

Así

$$M'(0) = E[X^2] \tag{7}$$

En general, la $n - ésima$ derivada de $M(t)$ viene dada por

$$M^n(t) = E[X^n e^{tX}] \;\; n \geq 1 \tag{8}$$

lo que implica que

$$M^n(0) = E[X^n] \;\; n \geq 1. \tag{9}$$

0.1. Ejercicios:

Ejercicio 1 *Sea X una variable aleatoria cuya distribución es una mezcla de dos distribuciones normales:*

- $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ *con probabilidad* p,
- $X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ *con probabilidad* $1 - p$.

Calcule la función generadora de momentos (MGF) de X.

Solución:

La función generadora de momentos (MGF) de una mezcla de distribuciones se obtiene como la combinación ponderada de las MGFs individuales:

$$M_X(t) = pM_{X_1}(t) + (1-p)M_{X_2}(t).$$

Dado que la MGF de una normal $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ es:

$$M_X(t) = \exp\left(\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right),$$

se tiene que:

$$M_X(t) = p \exp\left(\mu_1 t + \frac{1}{2}\sigma_1^2 t^2\right) + (1 - p) \exp\left(\mu_2 t + \frac{1}{2}\sigma_2^2 t^2\right).$$

Código:

```
# Definir los par metros
mu1, sigma1, mu2, sigma2, p = sp.symbols('mu1 sigma1 mu2 sigma2
    p')

# MGF de las distribuciones normales
mgf_X1 = sp.exp(mu1 * t + 0.5 * sigma1**2 * t**2)
mgf_X2 = sp.exp(mu2 * t + 0.5 * sigma2**2 * t**2)

# MGF de la mezcla
mgf_mixture = p * mgf_X1 + (1 - p) * mgf_X2

mgf_mixture


```

Ejercicio 2 *Sea* $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ *truncada en el intervalo* $[a, b]$*, es decir, que* X *toma valores solo dentro de este intervalo. Calcule la función generadora de momentos (MGF) de* X*.*

Solución:
La función generadora de momentos de una normal truncada en el intervalo $[a, b]$ se define como:

$$M_X(t) = \frac{E[e^{tX}\mathbb{1}_{\{a \leq X \leq b\}}]}{P(a \leq X \leq b)}.$$

Usando la MGF de la normal y la función de distribución acumulada (CDF) $\Phi(x)$, se obtiene:

$$M_X(t) = \frac{\exp\left(\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right)\left[\Phi\left(\frac{b-\mu-\sigma^2 t}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu-\sigma^2 t}{\sigma}\right)\right]}{\Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)}.$$

Sea $X = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_k$, donde $Y_i \sim \text{Poisson}(\lambda_i)$ son variables aleatorias independientes. Calcule la función generadora de momentos (MGF) de X.

Código:

```
# Definir los par metros
a, b = sp.symbols('a b')

# CDF truncada
cdf_truncada = sp.erf((b - mu)/(sigma * sp.sqrt(2))) - sp.erf((a - mu)/(sigma * sp.sqrt(2)))

# MGF truncada
mgf_truncada = (sp.exp(mu * t + 0.5 * sigma**2 * t**2) / cdf_truncada)

mgf_truncada
```

Ejercicio 3 *Sea $X = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_k$, donde $Y_i \sim$ Poisson(λ_i) son variables aleatorias independientes. Calcule la función generadora de momentos (MGF) de X.*

Solución:

MGF de una variable aleatoria compuesta por una suma de Poisson Si $X = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_k$, donde $Y_i \sim \text{Poisson}(\lambda_i)$ son variables aleatorias independientes, la MGF de X es el producto de las MGFs individuales:

$$M_X(t) = \prod_{i=1}^{k} M_{Y_i}(t).$$

Dado que la MGF de una variable Poisson $Y_i \sim \text{Poisson}(\lambda_i)$ es:

$$M_{Y_i}(t) = \exp\left(\lambda_i(e^t - 1)\right),$$

entonces la MGF de X se obtiene como:

$$M_X(t) = \exp\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i(e^t - 1)\right) = \exp\left(\lambda(e^t - 1)\right),$$

donde $\lambda = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i$, lo que confirma que $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$.

Código:

```
# Definir los par metros
lambda_1, lambda_2, k = sp.symbols('lambda_1 lambda_2 k')

# MGF de cada variable Poisson
mgf_poisson_k = sp.prod([sp.exp(lambda_i * (sp.exp(t) - 1)) for
    lambda_i in [lambda_1, lambda_2]])

mgf_poisson_k


```

Ejercicio 4 *Sea $X \sim$ Cauchy(μ, γ), donde μ es el parámetro de localización y γ el parámetro de escala. Calcule la función generadora de momentos (MGF) de X, sabiendo que la MGF de la Cauchy no existe en el sentido tradicional.*

Solución:
La MGF de la distribución de Cauchy no existe, debido a que la esperanza matemática de e^{tX} no está bien definida.
Sea $X \sim$ Cauchy(μ, γ), su función de densidad es:

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi\gamma} \frac{1}{1 + \left(\frac{x-\mu}{\gamma}\right)^2}.$$

Para calcular la MGF, se evalúa la integral:

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \frac{1}{\pi\gamma} \frac{1}{1 + \left(\frac{x-\mu}{\gamma}\right)^2} dx.$$

Sin embargo, esta integral no converge para ningún valor de $t \neq 0$, por lo que la MGF de la Cauchy no está definida.

Código:

```
# Par metros de la distribuci n de Cauchy
mu, gamma = sp.symbols('mu gamma')

# MGF no existe, por lo que intentamos calcular la integral
mgf_cauchy = sp.integrate(sp.exp(t * X) * (1 / (sp.pi * gamma *
    (1 + ((X - mu)/gamma)**2))), (X, -sp.oo, sp.oo))

mgf_cauchy


```

Ejercicio 5 *Sea* $X \sim$ *LogNormal*(μ, σ^2)*, es decir,* $Y = \log(X) \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$*. Calcule la función generadora de momentos (MGF) de* X*.*

Solución:
Si $X \sim$ LogNormal(μ, σ^2), entonces $Y = \log(X) \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. La MGF de X se obtiene usando la propiedad de la variable transformada:

$$M_X(t) = E[e^{tX}].$$

Dado que $\log(X) \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, su MGF es:

$$M_X(t) = \exp\left(\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right).$$

Código:

```
# Par metros de la log-normal
mu, sigma = sp.symbols('mu sigma')

# MGF de la log-normal
mgf_lognormal = sp.exp(mu * t + 0.5 * sigma**2 * t**2)

mgf_lognormal
```