ESPACIOS DE PROBABILIDAD

Nexus-Probability

CURSO 2 (PROBABILIDAD II)

PARTE 1 / LECCIÓN 1

El conjunto arbitrario Ω representa usualmente el espacio muestral de un experimento aleatorio inicialmente tal conjunto no tiene ninguna estructura matemática asociada pues sus elementos pueden ser de muy diversa naturaleza, Este conjunto puede estar constituído por números (mediciones), personas, objetos, categorías, etc.

Definición 1 (Espacios de probabilidad) *Un espacio de probabilidad es una terna $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, donde Ω es el espacio muestral, $\mathcal{F}$ es el espaio de eventos (σ-álgebra) y P es la medida de probabilidad.*

Definición 2 *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad, sea P una función representada por:*

$$P : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$$

.

Esta medida de probabilidad, cumple con ciertas características:

- $0 \leq P(A) \leq 1$
- $P(\Omega) = 1$
- Si A_1, $A_2 \in \mathcal{F}$ con $A_1 \cap A_j = \emptyset$, entonces $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

Algunas propiedades son enlistadas a continuación:

- $P(A) = 1 - P(A^c)$
- $P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$, si $A_i \cap A_j \neq \emptyset$, para $i \neq j$

Teorema 1 *La intersección de dos $\sigma - álgebras$ es un $\sigma - álgebra.$*

Teorema 2 *La intersección finita, infinita numerable o bien arbitraria de* $\sigma - álgebras$ *es nuevamente un* $\sigma - álgebra$.

Definición 3 *Una colección* $\mathcal{F}$ *de subconjuntos de* Ω *es una* $\sigma - álgebra$ *si cumple las siguientes condiciones:*

- $\Omega \in \mathcal{F}$
- *Si* $A \in \mathcal{F}$, *entonces* $A^c \in \mathcal{F}$
- *Si* $A_1, A_2, ... \in \mathcal{F}, entonces \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$

A la pareja $(\Omega, \mathcal{F})$ *se le llama espacio medible y a los elementos de* $\mathcal{F}$ *se les llama conjuntos medibles o eventos.*

Definición 4 (σ-álgebra generada) *Sea* C *una colección no vacía de subconjuntos de* Ω. *La* σ*-álgebra generada por* C *denotada por* $\sigma(C)$, *es la colección mínima generada por* C.

Considere la colección de todos los intervalos abiertos (a, b) de $\mathbb{R}$ en donde a $<$ b. A la mínima σ-álgebra generada por esta colección se le llama σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}$ y se denota por $B(\mathbb{R})$.

Definición 5 (σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}$) *A los elementos de* $B(\mathbb{R})$ *se les llama conjuntos de Borel, Borelianos o conjuntos de Borel medibles. De esta forma,* $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R})$ *es un espacio medible.*

Teorema 3 *Para cualesquiera números reales* $a \leq b$, *los intervalos* $[a, b], [a, \infty), (a, \infty), (-\infty, b), [a, b), (a, b]$ *y 0 son elementos de* $B(\mathbb{R})$.

Teorema 4 *Las siguientes* σ*-álgebras son todos iguales a* $B(\mathbb{R})$.

1. $\sigma\{[a, b] : a \leq b\}$
2. $\sigma\{(a, b] : a \leq b\}$
3. $\sigma\{[a, b) : a \leq b\}$
4. $\sigma\{(a, \infty) : a \leq b\}$
5. $\sigma\{(-\infty, b) : a \leq b\}$

Ejercicios

Los siguientes ejercicios propuestos tendrán solución en **Python**, por lo que te invitamos a ejecutar el código en tu computadora.

Ejercicio 1 *Sea Ω el espacio muestral de un experimento aleatorio. No es difícil comprobar que las siguientes colecciones de subconjuntos de Ω son $\sigma-$álgebras:*

1. $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\}$
2. $\mathcal{F} = \{A, A^c, \emptyset, \Omega\}$ *en donde* $A \subseteq \Omega$
3. $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$

Solución.

De esta forma en la $\sigma-$ álgebra $\mathcal{F}$ se agrupa a todos los subconjuntos de Ω para los que estamos interesados en calular su probabilidad y tal colección constituye el dominio sobre el cual se define una medida de probabilidad. Así, a cada experimento aleatorio particular se le puede asociar una pareja $(\Omega, \mathcal{F})$ compuesta por el espacio muestral y una $\sigma-$ álgebra de eventos.

Ejercicio 2 *Un espacio de probabilidad se define como la terna $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, donde:*

- *Ω es el espacio muestral, es decir, el conjunto de todos los posibles resultados del experimento.*
- *$\mathcal{F}$ es una σ-álgebra de subconjuntos de Ω.*
- *P es una medida de probabilidad definida sobre $\mathcal{F}$.*

Solución.

a) Lanzamiento de un dado equilibrado

- $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$, es decir, el conjunto de todas las partes de Ω.
- $P(\{k\}) = \frac{1}{6}, \quad \forall k \in \Omega$.

b) Marcador final de un partido de fútbol

- Supongamos que el marcador es de la forma (x, y), donde x, y son los goles anotados por cada equipo.
- $\Omega = \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{N}_0\}$.

- $\mathcal{F}$ puede ser la σ-álgebra generada por subconjuntos finitos de Ω.
- P se debe definir en función de distribuciones empíricas o modelos probabilísticos específicos.

c) Número de integrantes de una familia escogida al azar

- $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ (conjunto de valores posibles de integrantes en una familia).
- $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$, si Ω es finito o numerable.
- P se define según datos estadísticos sobre la distribución del tamaño de las familias.

d) Número al azar dentro del intervalo unitario $(0, 1)$

- $\Omega = (0, 1)$.
- $\mathcal{F}$ es la σ-álgebra de Borel en $(0, 1)$.
- P es la medida de Lebesgue en $(0, 1)$, es decir, para un intervalo $(a, b) \subset (0, 1)$, se tiene $P((a, b)) = b - a$.

e) Posición en la que cae un dardo en un círculo de radio unitario

- $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.
- $\mathcal{F}$ es la σ-álgebra de Borel en el disco unitario.
- P es la medida de Lebesgue normalizada sobre el área del círculo, es decir, si A es un subconjunto medible del círculo, $P(A) = \frac{\text{Área}(A)}{\pi}$.

Ejercicio 3 *Explique que* $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{I}$ *son de Borel.*

Solucion

Definición: La σ-álgebra de Borel en $\mathbb{R}$, denotada por $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, es la σ-álgebra generada por los intervalos abiertos de $\mathbb{R}$. Es decir, es el conjunto más pequeño que contiene a todos los intervalos abiertos y es cerrado bajo la formación de complementos y uniones numerables.

1. El conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ es de Borel.

- Cada número natural n puede expresarse como el conjunto unitario $\{n\}$, el cual es un conjunto cerrado en $\mathbb{R}$.
- Como $\mathbb{N} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{n\}$ es una unión numerable de conjuntos cerrados, entonces $\mathbb{N}$ pertenece a $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

2. **El conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$ es de Borel.**

   - Similar a $\mathbb{N}$, cada entero z forma un conjunto unitario $\{z\}$, que es cerrado en $\mathbb{R}$.
   - La unión numerable de estos conjuntos cerrados, $\mathbb{Z} = \bigcup_{z\in\mathbb{Z}}\{z\}$, es de Borel.

3. **El conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ es de Borel.**

   - Los números racionales pueden expresarse como $\mathbb{Q} = \bigcup_{q\in\mathbb{Q}}\{q\}$.
   - Cada $\{q\}$ es un conjunto cerrado en $\mathbb{R}$.
   - Como la unión numerable de cerrados es un conjunto de Borel, se concluye que $\mathbb{Q} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

4. **El conjunto de los números irracionales $\mathbb{I}$ es de Borel.**

   - Se tiene que $\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
   - Sabemos que $\mathbb{Q}$ es de Borel y $\mathbb{R}$ también es de Borel.
   - Como la σ-álgebra de Borel es cerrada bajo complementos, se concluye que $\mathbb{I} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Finalmente, todos los conjuntos $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{I}$ pertenecen a la σ-álgebra de Borel.