Proceso de Poisson compuesto.

Nexus-Probability

CURSO 4 (PROCESOS ESTOCÁSTICOS II)

PARTE 1 / LECCIÓN 3

Definición 1 (Proceso poisson compuesto) *Sea N_t un proceso de Poisson con parámetro λ, y sean $Y_1, Y_2, \ldots$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, independientes del proceso de Poisson. Supongamos que $Y_0 = 0$. El proceso de Poisson compuesto se define de la siguiente manera:*

$$N_t = \sum_{n=0}^{N_t} Y_n$$

Donde:
- N_t es un proceso de Poisson con tasa λ.
- Y_n son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas.
- N_t representa la cantidad de eventos en el proceso de Poisson, y cada uno de esos eventos genera una contribución aleatoria Y_n, sumada a lo largo del tiempo hasta el instante t.

proposición 3.1

El proceso de Poisson compuesto cumple las siguientes propiedades:

1. Tiene incrementos independientes y estacionarios.
2. $E[X_t] = \lambda t E[Y]$.
3. Var$(X_t) = \lambda t E[Y^2]$.
4. Cov$(X_t, X_s) = \lambda E[Y^2] \min(s, t)$.
5. La función generadora de momentos de la variable X_t es:

$$M_{X_t}(u) = E[e^{uX_t}] = \exp(\lambda t M_Y(u) - 1)$$

Ejercicios

Los siguientes ejercicios propuestos tendrán solución en **Python**, por lo que te invitamos a ejecutar el código en tu computadora.

Ejercicio 1 *Considere el proceso $X(t), t \geq 0$ que cuenta la cantidad de productos vendidos en un almacén. Sea $N(t), t \geq 0$ el Proceso Poisson que cuenta la cantidad de ventas realizadas y sea Y_i la cantidad de productos en cada venta.*
Consideremos que con probabilidad $p = 0.6$ la venta es de un producto y con probabilidad $1-p = 0.4$ la venta contiene dos productos. Los Y_i son independientes entre sí y son independientes del número de ventas que han ocurrido.
Si la tasa de ventas es de $\lambda = 1.5$ por minuto, calcule la probabilidad de que en 10 minutos el almacén haya vendido exactamente 5 productos.

Solución.

```python
# Ejercicio 1:
import scipy.stats as stats

# Parametros
lambda_ventas = 1.5  # Tasa de ventas por minuto
tiempo = 10  # Minutos
p_un_producto = 0.6  # Probabilidad de vender un solo producto
p_dos_productos = 1 - p_un_producto  # Probabilidad de vender dos productos
productos_objetivo = 5  # Numero de productos vendidos en 10 minutos

# Distribucion de Poisson para el numero de ventas en 10 minutos
lambda_total = lambda_ventas * tiempo
poisson_dist = stats.poisson(lambda_total)

# Probabilidad total de vender exactamente 'productos_objetivo' productos
probabilidad_total = 0

# Se suman las probabilidades de diferentes combinaciones de ventas que sumen productos_objetivo
for n_ventas in range(0, productos_objetivo + 1):  # Numero de ventas posibles
if 0 <= productos_objetivo - n_ventas <= n_ventas:  # Condicion valida
```

```
        prob_ventas = poisson_dist.pmf(n_ventas)  # Probabilidad de tener 'n_ventas' ventas
        prob_productos = stats.binom.pmf(productos_objetivo - n_ventas, n_ventas, p_dos_productos)
        probabilidad_total += prob_ventas * prob_productos
 # Resultados de Ejercicio 1
print(f"La probabilidad de vender exactamente {productos_objetivo} productos en {tiempo} minutos es: {probabilidad_total:.6f}")

```

```
La probabilidad de vender exactamente 5 productos en 10 minutos es: 0.000423
```

Ejercicio 2 *Suponga que la llegada de familias de migrantes a Lima se puede modelar mediante un Proceso de Poisson con tasa $\lambda = 3$ por semana. Si el número de personas en cada familia es independiente del tamaño de las otras familias y toma valores $1, 2, 3, 4, 5$ con probabilidades $\frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \frac{3}{10}, \frac{2}{10}, \frac{2}{10}$ respectivamente, entonces:*

¿Cuál es el número esperado de individuos que migran a Lima durante un período de 8 semanas?

Solución.

```
   # Parametros del problema
 lambda_semanal = 3  # Tasa de llegada de familias por semana
 tiempo = 8  # Numero de semanas

 # Valores posibles de personas por familia y sus probabilidades
 personas_por_familia = [1, 2, 3, 4, 5]
 probabilidades = [1/10, 2/10, 3/10, 2/10, 2/10]

 # Calcular el valor esperado de personas por familia (E[Y])
 esperanza_Y = sum(y * p for y, p in zip(personas_por_familia, probabilidades))

 # Calcular el numero esperado de migrantes en 8 semanas usando la formula E[X(t)] = lambda * t * E[Y]
 esperanza_X = lambda_semanal * tiempo * esperanza_Y

 #Mostrar resultados

```

```
    print(f"El numero esperado de migrantes en {tiempo} semanas es: {esperanza_X:.4f}")


```

```
El número esperado de migrantes en 8 semanas es: 76.8000
```