DISTRIBUCIÓN GEOMÉTRICA

Nexus-Probability

CURSO 1 (PROBABILIDAD I)

PARTE 4 / LECCIÓN 5

Definición 1 (Función de Densidad) *El experimento geométrica, consiste en realizar varias pruebas idénticas e independientes.*
Y cada prueba tiene dos opciones: "éxito" o "fracaso". La probabilidad de éxito es p y la probabilidad de fracaso es $1 - p$.
La v.a. se define como el número de fracsos antes de lograr el primer éxito.

El recorrido de la v.a. binomial X es:

$$X = 0, 1, 2, ...$$

Una v.a. discreta X tiene distribución binomial con parámetros n y p si su función de densidad está dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} p(1-p)^x & \text{si } x \in \{0, 1, 2, \dots\} \text{ y } 0 < p < 1, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Definición 2 (Función de Distribución) *Efectuando las sumas parciales de la función de probabilidad se encuentra que la correspondiente función de distribución es:*

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1-(1-p)^1 & \text{si } 0 \leq x < 1, \\ 1-(1-p)^2 & \text{si } 1 \leq x < 2, \\ \vdots & \\ 1-(1-p)^{k+1} & \text{si } k \leq x < k+1, \\ \vdots & \end{cases}$$

Notación

$X \sim$ Geométrica(p), significa que X se distribuye geométrica con parámetro p. También denotaremos $1 - p = q$.

Teorema 4.5.1

Si $X \sim$ Geométrica(p), entonces:

(I) $\mathbb{E}[X] = \frac{1-p}{p} = \frac{q}{p}$

(II) $\mathbb{V}[X] = \frac{1-p}{p^2} = \frac{q}{p^2}$

(III) $m_X(t) = \frac{p}{1-qe^t}$, si $t \neq -\ln(q)$

Observación

Para una distribución Geométrica(p), la moda es $X = 0$.

Teorema 4.5.2

Si $X \sim$ Geométrica(p), entonces $P[X \geq x] = q^x$ para todo x entero no negativo.

Observación

Si $X \sim$ Geométrica(p), entonces $F_X(x) = 1 - q^{x+1}$, para todo x entero no negativo.

Teorema 4.5.3(Pérdida de memoria)

Si $X \sim$ Geométrica(p), a, b son números enteros no negativos, entonces:

$$P(X \geq a + b \mid X \geq a) = P(X \geq b).$$

Ejercicios

Los siguientes ejercicios propuestos tendrán solución en **Python**, por lo que te invitamos a ejecutar el código en tu computadora.

Ejercicio 1 *Una persona participa cada semana con un boleto en un juego de lotería, en donde la probabilidad de ganar el primer premio es* $p = 10^{-6} = \frac{1}{1{,}000{,}000}$. *¿Cuántos años, en promedio, debe esta persona participar en el juego hasta obtener el primer premio?*

Solución.

```
# Ejercicio 1:
import math

#Definir la probabilidad de ganar en una semana
p = 1 / 1000000  # Probabilidad de ganar el primer premio

# Calcular el numero esperado de semanas para ganar
# Es el inverso de la probabilidad de ganar
esperanza_semanas = 1 / p

# Convertir el numero de semanas a a os
# Sabemos que un a o tiene 52 semanas
esperanza_anos = esperanza_semanas / 52

# Resultados para el Ejercicio 1
print(f"En promedio, la persona debe participar durante {
esperanza_anos:.2f} a os para ganar el primer premio.")

```

```
Ejercicio 1:
En promedio, la persona debe participar durante 19230.77 años para
ganar el primer premio.
```

Ejercicio 2 *Dos personas lanzan alternativamente una moneda equilibrada. Se es coge una de las caras de la moneda y el primero que obtenga esa cara es el ganador. Encuentre la probabilidad de ganar de cada uno de los jugadores.*

Solución.

```
# Probabilidad de que el primer jugador gane
p_a = 1 / 2 + (1 / 2) * (1 / 2) * (1 - (1 / 2))

# Probabilidad de que el segundo jugador gane (complemento
de la probabilidad de A)
p_b = 1 - p_a

#Mostrar resultados
print(f"La probabilidad de que el primer jugador gane es: {
p_a:.2f}")
```

```python
    print(f"La probabilidad de que el segundo jugador gane es: {p_b:.2f}")

```

```
La probabilidad de que el primer jugador gane es: 0.62
La probabilidad de que el segundo jugador gane es: 0.38
```

Ejercicio 3 *Cuando se rueda un comercial de televisión, la probabilidad de que ciertoactor logre todas sus líneas 0.40.¿Cuál es la probabilidad de que este actor logre todas sus líneas por vezprimera en la tercera o cuarta toma?*

Solución.

```python
    # Probabilidad de exito en cada toma
    p = 0.40

    # Probabilidad de fracaso en cada toma
    q = 1 - p

    # Probabilidad de exito por primera vez en la tercera toma
    prob_tercera = (q ** 2) * p

    # Probabilidad de exito por primera vez en la cuarta toma
    prob_cuarta = (q ** 3) * p

    # Probabilidad total de exito por primera vez en la tercera o cuarta toma probabilidad_total = prob_tercera + prob_cuarta

    #Resultados de ejercicio 3
   print(f"La probabilidad de que el actor logre todas sus lineas por primera vez en la tercera o cuarta toma es: {probabilidad_total:.4f}")

```

```
 Ejercicio 3:
La probabilidad de que el actor logre todas sus lineas por primera
 vez en la tercera o cuarta toma es: 0.2304
```

Ejercicio 4 *Participa en un juego de azar que puede ganar o perder (no hay otras posibilidades) hasta que pierde. Su probabilidad de perder es $p = 0.57$. ¿Cuál es la probabilidad de que se necesiten cinco jugadas para perder? Supongamos que X es el número de partidas que juega hasta que pierde (incluye la partida perdida).*

Solución.

```python
# Probabilidad de perder
p = 0.57

# Probabilidad de ganar
q = 1 - p

# Numero de jugadas hasta que se pierde
k = 5

# Probabilidad de perder por primera vez en la quinta jugada
probabilidad = (q ** (k - 1)) * p

#Resultados de ejercicio 3
print(f"La probabilidad de que se necesiten {k} jugadas para
perder es: {probabilidad:.4f}")

```

```
Ejercicio 3:
La probabilidad de que se necesiten 5 jugadas para perder es: 0.0195
```