DISTRIBUCIÓN EXPONENCIAL

Nexus-Probability

CURSO 1 (PROBABILIDAD I)

PARTE 4 / LECCIÓN 8

Definición 1 (Función de Densidad) *Decimos que una variable aleatoria X tiene una distribución exponencial con parametro λ , y escribimos $X \sim$ exp(λ), cuando su función de densidad es*

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

Definición 2 (Función de Distribución) *Integrando la función de densidad desde menos infinito hasta un punto x cualquiera, puede encontrarse la función de distribución, la cual tiene la siguiente expresión:*

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

Teorema 4.8.1

Si $X \sim \text{exp}(\lambda)$, entonces:

(I) $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\lambda}$

(II) $\mathbb{V}[X] = \frac{1}{\lambda^2}$

(III) $m_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}$ si $t < \lambda$

Teorema 4.8.2

Si $X \sim \text{exp}(\lambda)$, entonces:

$$F_X(x) = \left(1 - e^{-\lambda x}\right) \mathbb{I}_{[0,\infty)}(x)$$

Teorema 4.8.2 Perdida de memoria

Si $X \sim \exp(\lambda)$,$a > 0$ y $b > 0$ entonces:

$$P[x > a + b|x > a] = P[x > b]$$

Ejercicios

Los siguientes ejercicios propuestos tendrán solución en **Python**, por lo que te invitamos a ejecutar el código en tu computadora.

Ejercicio 1 *Suponga que el tiempo en minutos que un usuario cualquiera permanece revisando su correo electrónico sigue una distribución exponencial de parámetro $\lambda = \frac{1}{5}$. Calcule la probabilidad de que un usuario cualquiera permanezca conectado al servidor de correo:*
a) Menos de un minuto.
b) Más de una hora.

Solución.

```
# Ejercicio 1:
import numpy as np

# Parametro lambda
lambda_param = 1/5  # Promedio de 5 minutos

# a) Probabilidad de que el usuario permanezca menos de un minuto
x_1 = 1  # 1 minuto
prob_menos_1_minuto = 1 - np.exp(-lambda_param * x_1)

# b) Probabilidad de que el usuario permanezca mas de una hora (60 minutos)
x_60 = 60  # 1 hora = 60 minutos
prob_mas_1_hora = np.exp(-lambda_param * x_60)

# Resultados para el Ejercicio 1
print(f"Probabilidad de que el usuario permanezca menos de un minuto: {prob_menos_1_minuto:.4f}")
print(f"Probabilidad de que el usuario permanezca mas de una hora: {prob_mas_1_hora:.4f}")

```

```
Probabilidad de que el usuario permanezca menos de un minuto: 0.1813
Probabilidad de que el usuario permanezca más de una hora: 0.0000
```

Ejercicio 2 *Un señor está vendiendo su coche y decide aceptar la primera oferta que exceda $50,000. Si las ofertas son variables aleatorias independientes con distribución exponencial de media $45,000, encuentre:*

1. *El número de ofertas recibidas hasta vender el coche.*
2. *La probabilidad de que el precio de venta rebase $55,000.*
3. *El precio promedio de la venta del coche.*

Solución.

```python
import numpy as np

  # Parametro lambda de la distribucion exponencial
  mu = 45000  # Media de la distribucion
  lambda_param = 1 / mu  # Parametro lambda

  # a) Numero esperado de ofertas hasta vender el coche
  p = np.exp(-lambda_param * 50000)
  esperanza_n = 1 / p

  # b) Probabilidad de vender el coche por mas de $55,000
  prob_mas_55000 = np.exp(-lambda_param * 55000)

  # c) Precio promedio de venta del coche
  precio_promedio_venta = 50000 + (1 / lambda_param)
  #Mostrar resultados
  print(f"Numero esperado de ofertas hasta vender el coche: {
 esperanza_n:.2f}")
  print(f"Probabilidad de vender el coche por mas de $55,000:
 {prob_mas_55000:.4f}")
  print(f"Precio promedio de venta del coche: ${
 precio_promedio_venta:.2f}")

```

```
Número esperado de ofertas hasta vender el coche: 3.04
Probabilidad de vender el coche por más de $55,000: 0.2946
Precio promedio de venta del coche: $95000.00
```

Ejercicio 3 *El tiempo de llegada entre cliente y cliente a un negocio es una variable aleatoria con distribución exponencial y parámetro* $\lambda = \frac{1}{15}$.

a) *Probabilidad de que el cliente llegue después de 10 minutos.*

b) *Dado que a los 10 minutos no ha llegado el siguiente cliente, calcular la probabilidad de que llegue antes de los 20 minutos.*

c) *Calcular el promedio de la llegada del siguiente cliente.*

Solución.

```
from scipy.stats import expon
import numpy as np

# Parametro de la distribucion exponencial
lambda_param = 1 / 15  # 1/s

# a) Probabilidad de que el cliente llegue despues de 10 minutos
p_a = np.exp(-lambda_param * 10)

# b) Probabilidad de que llegue antes de los 20 minutos dado que no ha llegado en 10
p_b = 1 - np.exp(-lambda_param * 10)

# c) Promedio de la llegada del siguiente cliente
expected_time = 1 / lambda_param

#Mostrar resultados
print(f"Probabilidad de que el cliente llegue despues de 10 minutos: {p_a:.4f}")
print(f"Probabilidad de que llegue antes de 20 minutos dado que no llego en 10: {p_b:.4f}")
print(f"Promedio de llegada del siguiente cliente: {expected_time:.2f} minutos")
```

```
Ejercicio 3:
Probabilidad de que el cliente llegue después de 10 minutos: 0.5134
Probabilidad de que llegue antes de 20 minutos dado que no llegó en 10: 0.4866
Promedio de llegada del siguiente cliente: 15.00 minutos
```