# PROCESO DE CONTEO

*Nexus-Probability*

**CURSO 4 (PROCESOS ESTOCÁSTICOS II)**

*PARTE 1 / LECCIÓN 1*

Como una introducción a la teoría general que se expondrá más adelante, en este capítulo estudiaremos uno de los ejemplos más importantes de este tipo de modelos: **el proceso de Poisson**. Definiremos este proceso de varias formas equivalentes y estudiaremos algunas de sus propiedades, sus generalizaciones y algunas de sus aplicaciones. El proceso de Poisson es un modelo relevante tanto en las aplicaciones como en la teoría general de los procesos estocásticos.

## 1. Definición Constructiva del Proceso Poisson.

Suponga que un mismo evento ocurre repetidad veces de manera aleatoria a lo largo del tiempo. Tal evento puede ser, por ejemplo, la llegada de una reclamación a una compañia aseguradora o la recepción de una llamada a un conmutador o los momentos en que una cierta maquinaria requiere reparación etc.

Suponga que las variables aleatorias $T_1, T_2...$ representan los tiempos que transcurren entre una ocurrencia del evento y la siguiente ocurrencia. Suponga que estos tiempos son independientes uno del otro ya que cada uno tiene distribución $exp(\lambda)$.

**Definición 1 (Proceso de Conteo)** *Un proceso estocástico $\{N(t) : t \geq 0\}$ es llamado de **conteo** si,*

$$N(t) = \text{Número de sucesos entre } (0, t],$$

*el cual satisface las siguientes condiciones:*

1. $N(t) \geq 0$
2. $N(t)$ *es entero valuable.*
3. *Si* $s \leq t$ *entonces* $N(s) \leq N(t)$
4. $N(t) - N(s)$ : *Número de sucesos que ocurre entre* $(s, t]$

Recuerda que:

- Un proceso de conteo tiene **Incrementos Independientes** si el número de eventos que ocurren en intervalos de tiempo disjuntos son independientes.
- Un proceso de conteo se dice tener **Incrementos Estacionarios** si la distribución del número de eventos que ocurre en un intervalo de tiempo depende solo de la longitud del intervalo.

**Definición 2 (Proceso Poisson)** *Un proceso de conteo $\{N(t) : t \geq 0\}$ se le llama Proceso de Poisson con tasa $\lambda$, $\lambda > 0$ si:*

1. $N(0) = 0$
2. *Posee incrementos independientes.*
3. *El número de eventos de algún intervalo de longitud $t$ esta distribuido Poisson con media $\lambda t$.*

   *Es decir, para todo $s, t \geq 0$, se tiene que:*

$$\mathbb{P}[N(s+t) - N(s) = n] = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!} \tag{1}$$

# Ejercicios

**Ejercicio 1** *Suponga que una panaderia abre a las 6am y los clientes llegan de acuerdo a un proceso de poisson con una tasa de 30 clientes por hora.*
*Encuentre la probabilidad de que lleguen 65 o mas clientes entre 9 y 11 a.m.*

**Solución:**

```
    from scipy.stats import poisson

```

Primero sera importante definir el proceso $\{N(t) : t \geq 0\}$ con tasa $\lambda = 30$. Buscamos la probabilidad de que lleguen mas de 65 personas en el intervalo de tiempo $[3, 5]$

$$\mathbb{P}[N(5) - N(3) \geq 65]$$

```
lam = 30
t2 = 5
t1 = 3
prob = 1- poisson(lam * (t2 - t1)).cdf(64)
```

```
print(f'La probabilidad de que lleguen mas de 65 clientes es: {
    prob:.4f}')
```

```
La probabilidad de que lleguen mas de 65 clientes es: 0.2759
```

**Ejercicio 2** *En una fábrica de componentes electrónicos, los pedidos de dos tipos de componentes (A y B) llegan de acuerdo a dos procesos de Poisson independientes. El tipo A llega con una tasa de 5 pedidos por día, mientras que el tipo B llega con una tasa de 3 pedidos por día.*

*Encuentra la probabilidad de que en 10 días lleguen: Al menos 40 pedidos del tipo A y entre 20 y 30 pedidos del tipo B.*

**Solución:**

Definimos dos procesos de Poisson independientes: uno para el componente A con tasa $\lambda_A = 5$ y otro para el componente B con tasa $\lambda_B = 3$. Buscamos la probabilidad conjunta de que lleguen al menos 40 pedidos de A y entre 20 y 30 pedidos de B en un intervalo de 10 días.
Los eventos se pueden representar como:

$$\mathbb{P}[N_A(10) \geq 40 \text{ y } 20 \leq N_B(10) \leq 30]$$

Dado que los procesos son independientes, calculamos las probabilidades por separado y luego multiplicamos los resultados:
1. Probabilidad de que lleguen al menos 40 pedidos del tipo A:

$$\mathbb{P}[N_A(10) \geq 40] = 1 - \mathbb{P}[N_A(10) \leq 39]$$

2. Probabilidad de que lleguen entre 20 y 30 pedidos del tipo B:

$$\mathbb{P}[20 \leq N_B(10) \leq 30] = \mathbb{P}[N_B(10) \leq 30] - \mathbb{P}[N_B(10) \leq 19]$$

La probabilidad conjunta es el producto de las dos probabilidades, dado que los procesos son independientes:

$$\mathbb{P}[N_A(10) \geq 40 \text{ y } 20 \leq N_B(10) \leq 30]$$

Al calcular esto, obtenemos la probabilidad conjunta.

```
# Parametros del tipo A
lam_A = 5  # tasa de pedidos del tipo A por dia
t_A = 10  # 10 dias
lower_bound_A = 40  # al menos 40 pedidos

# Parametros del tipo B
```

```python
lam_B = 3  # tasa de pedidos del tipo B por dia
t_B = 10  # 10 dias
lower_bound_B = 20  # al menos 20 pedidos
upper_bound_B = 30  # no mas de 30 pedidos

# Probabilidad para el tipo A (al menos 40 pedidos)
prob_A = 1 - poisson.cdf(lower_bound_A - 1, lam_A * t_A)

# Probabilidad para el tipo B (entre 20 y 30 pedidos)
prob_B = poisson.cdf(upper_bound_B, lam_B * t_B) - poisson.cdf(
    lower_bound_B - 1, lam_B * t_B)

# Probabilidad conjunta (independencia)
prob_total = prob_A * prob_B

print(f'La probabilidad de que lleguen al menos 40 pedidos del
    tipo A y entre 20 y 30 pedidos del tipo B es: {prob_total:.4f
    }')
```

```
La probabilidad de que lleguen al menos 40 pedidos del tipo A y entre
20 y 30 pedidos del tipo B es: 0.4925
```

**Ejercicio 3** *En un call center, las llamadas entrantes siguen un proceso de Poisson con una tasa de 25 llamadas por hora.*

*Encuentra la probabilidad de que lleguen entre 45 y 60 llamadas entre las 10:00 a.m. y las 12:00 p.m.*

**Solución:**

Definimos el proceso $N(t) : t \geq 0$ con tasa $\lambda = 25$. Buscamos la probabilidad de que lleguen entre 45 y 60 llamadas en el intervalo de tiempo $[10, 12]$.

$$\mathbb{P}[45 \leq N(12) - N(10) \leq 60]$$

```python
lam = 25  # tasa de llamadas por hora
t2 = 12
t1 = 10
lower_bound = 45
upper_bound = 60

# Probabilidad de que lleguen entre 45 y 60 llamadas
prob = poisson.cdf(upper_bound, lam * (t2 - t1)) - poisson.cdf(
    lower_bound - 1, lam * (t2 - t1))
```

```python
print(f'La probabilidad de que lleguen entre 45 y 60 llamadas es
    : {prob:.4f}')
```

```
La probabilidad de que lleguen entre 45 y 60 llamadas es: 0.7068
```

**Ejercicio 4** *En un almacén, los pedidos de productos llegan de acuerdo a un proceso de Poisson con una tasa de 7 pedidos por día.*

*Encuentra la probabilidad de que lleguen al menos 25 pedidos en una semana (7 días).*

**Solución:**

Definimos el proceso $N(t) : t \geq 0$ con tasa $\lambda = 7$ por día. Buscamos la probabilidad de que lleguen al menos 25 pedidos en un intervalo de tiempo de 7 días (una semana).

```python
lam = 7  # tasa de pedidos por dia
t2 = 7   # numero de dias (una semana)
lower_bound = 25  # al menos 25 pedidos

# Probabilidad de que lleguen al menos 25 pedidos en 7 dias
prob = 1 - poisson.cdf(lower_bound - 1, lam * t2)
print(f'La probabilidad de que lleguen al menos 25 pedidos en
    una semana es: {prob:.4f}')
```

```
La probabilidad de que lleguen al menos 25 pedidos en una semana es: 0.9999
```