DISTRIBUCIÓN BINOMIAL NEGATIVA

Nexus-Probability

CURSO 1 (PROBABILIDAD I)

PARTE 4 / LECCIÓN 4

Teorema 4.1

Un experimento Binomial Negativo, consiste en realizar varias pruebas identicas e independientes. Cada prueba tiene dos posibilidades "éxito.º "fracaso". La probablidad de éxito es p y la de fracaso $(1-p)$. La varible aleatoria se define como número de fracasos antes de lograr por r-ésima vez un éxito.

Definición 1 (Función de Densidad) *Decimos entonces que X tiene una distribución binomial negativa con parámetros r y p, y escribimos $X \sim$ bin neg(r,p). Es claro que la variable X puede tomar los valores 0,1,2,... con las probabilidades dadas por la función de probabilidad:*

$$f(x) = P(X = x) = \begin{cases} \binom{r+x-1}{x} p^r (1-p)^x & \textit{si } x = 0, 1, \ldots \\ 0 & \textit{en otro caso.} \end{cases}$$

Teorema 4.2

Sea $X \sim BN(r,p)$, entonces:

(i) $\mathbb{E}[X] = \frac{r(1-p)}{p} = \frac{rq}{p}$

(ii) $\text{Var}[X] = \frac{r(1-p)}{p^2} = \frac{rq}{p^2}$

(iii) $m_X(t) = \left(\frac{p}{1-qe^t}\right)^r$, si $t \leq -\ln(q)$

Teorema 4.3

Si $X \sim BN(r,p)$, entonces la moda M es:

$$M = \begin{cases} \left\lfloor \frac{(r-1)(1-p)}{p} \right\rfloor, & \text{si } r > 1, \\ 0, & \text{si } r \leq 1. \end{cases}$$

Observación

A continuación se representa una comparación entre la **binomial** y la **binomial negativa**, en cuanto al número de pruebas y al número de éxitos.

	Binomial	**Binomial negativa**
Número de pruebas	n (fijo)	X (aleatorio)
Número de éxitos	X (aleatorio)	r (fijo)

Teorema 4.4

Sea X una variable aleatoria con distribución $BN(r, p)$,
entonces
$$P(X \leq x) = P(Y \geq r)$$
donde Y es una variable aleatoria con distribución $B(n = x + r, p)$

Ejercicios

Los siguientes ejercicios propuestos tendrán solución en **Python**, por lo que te invitamos a ejecutar el código en tu computadora.

Ejercicio 1 *Se tira un dado varias veces hasta que resulte por quinta vez un 5.*

a) Calcular la probabilidad de que resulte por quinta vez el número 5, en el quinto lanzamiento.

b) Calcular la probabilidad de que antes del séptimo lanzamiento resulte por cuarta vez un 5.

Solución.

```python
# Ejercicio 1:
from math import comb

# Funcion para calcular la probabilidad en una distribucion binomial negativa
def binomial_negativa(r, p, x):
"""
Calcula P(X = x) para una distribucion binomial negativa.
r: numero de exitos deseados
p: probabilidad de exito en un intento
x: numero total de intentos
"""
```

```python
    return comb(x - 1, r - 1) * (p ** r) * ((1 - p) ** (x - r))

    # Probabilidad de obtener un 5 en un lanzamiento de dado
    p = 1 / 6

    # Apartado a)
    # Calcular la probabilidad de que se obtenga el quinto 5 en el quinto lanzamiento
    r_a = 5  # numero de exitos deseados
    x_a = 5  # numero total de lanzamientos
    prob_a = binomial_negativa(r_a, p, x_a)

    # Apartado b)
    # Calcular la probabilidad de que antes del septimo lanzamiento se obtengan 4 veces un 5
    r_b = 4  # numero de exitos deseados
    x_b = 7  # numero total de lanzamientos
    prob_b = sum(binomial_negativa(r_b, p, x) for x in range(r_b, x_b))

# Resultados para el Ejercicio 1
print(f"a) La probabilidad de obtener el quinto 5 en el quinto lanzamiento es: {prob_a:.4f}")
print(f"b) La probabilidad de obtener cuatro 5 antes del septimo lanzamiento es: {prob_b:.4f}")


```

```
  Ejercicio 1:
a) La probabilidad de obtener el quinto 5 en el quinto lanzamiento es: 0.0001
b) La probabilidad de obtener cuatro 5 antes del séptimo lanzamiento es: 0.0087
```

Ejercicio 2 *Se lanza repetidas veces una moneda honesta cuyos dos resultados son cara y cruz.¿Cuál es la probabilidad de obtener la tercera cruz en el quinto lanzamiento?*

Solución.

```python

from math import comb

 # FunciOn para calcular la probabilidad en una distribuciOn binomial negativa
```

```
def binomial_negativa(r, p, x):
"""
Calcula P(X = x) para una distribuciOn binomial negativa.
r: numero de exitos deseados (tercera cruz en este caso)
p: probabilidad de exito (probabilidad de cruz)
x: numero total de lanzamientos
"""
return comb(x - 1, r - 1) * (p ** r) * ((1 - p) ** (x - r))

# Probabilidad de cruz en una moneda honesta
p = 0.5

# Datos del problema
r = 3  # tercer exito (tercera cruz)
x = 5  # quinto lanzamiento

# Calcular la probabilidad
probabilidad = binomial_negativa(r, p, x)

# Resultados para el Ejercicio 2
print(f"La probabilidad de obtener la tercera cruz en el quinto lanzamiento es: {probabilidad:.4f}")

```

```
Ejercicio 2:
La probabilidad de obtener la tercera cruz en el quinto lanzamiento es: 0.1875
```

Ejercicio 3 *Para tratar a un paciente de una afección de pulmón, han de ser operados en operaciones independientes sus 5 lóbulos pulmonares. La técnica a utilizar es tal que si todo va bien, lo que ocurre con probabilidad de $\frac{7}{11}$, el lóbulo queda definitivamente sano, pero si no es así se deberá esperar el tiempo suficiente para intentarlo posteriormente de nuevo. Se practicará la cirugía hasta que 4 de sus 5 lóbulos funcionen correctamente.*

a) ¿Cuál es el valor esperado de intervenciones que deba padecer el paciente?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que se necesiten 10 intervenciones?

Solución.

```
from math import comb

# Funcion para calcular la probabilidad en una distribucion binomial negativa
```

```python
def binomial_negativa(r, p, x):
"""
Calcula P(X = x) para una distribucion binomial negativa.
r: numero de exitos deseados (lobulos sanos)
p: probabilidad de exito por operacion
x: numero total de intervenciones
"""
return comb(x - 1, r - 1) * (p ** r) * ((1 - p) ** (x - r))

# Parametros del problema
p = 7 / 11  # Probabilidad de exito por operacion
r = 4       # Numero de lobulos que deben quedar sanos

# a) Numero esperado de intervenciones
# La formula para el valor esperado en la binomial negativa es:
# E(X) = r / p
esperado = r / p

# b) Probabilidad de que se necesiten exactamente 10 intervenciones
x = 10  # Numero total de intervenciones
prob_10 = binomial_negativa(r, p, x)

 # Resultados para el Ejercicio 3
 print(f"El numero esperado de intervenciones es: {esperado:.2f}")
 print(f"La probabilidad de que se necesiten exactamente 10 intervenciones es: {prob_10:.4f}")
```

```
Ejercicio 3:
El número esperado de intervenciones es: 6.29
La probabilidad de que se necesiten exactamente 10 intervenciones es: 0.0318
```