VARIABLES ALEATORIAS

Nexus-Probability

CURSO 2 (PROBABILIDAD II)

PARTE 1 / LECCIÓN 2

Definimos a una variable aleatoria como una función del espacio muestral en el conjunto de números reales, de esta forma, el resultado del experimento aleatorio es el número real tomado por la variable aleatoria.

Definición 1 (Variable aleatoria) *Una variable aleatoria es una transformación X del espacio de resultados Ω al conjunto de números reales, esto es,*

$$P : \Omega \to \mathbb{R}$$

, tal que para cualquier número real x,

$$\{w \in \Omega : X(w) \leq x\} \in \mathcal{F}$$

Se emplea la siguiente notación: si A es un conjutno de Borel de $\mathbb{R}$, entonces la expresión $(X \in A)$, incluyendo el paréntesis, denota el conjunto $\{w \in \Omega : X(w) \in A\}$, es decir,

$$(X \in A) = \{w \in \Omega : X(w) \in A\}$$

La expresión $(X \in A)$ denota aquel conjunto de elementos w del espacio muestral Ω tales que bajo la aplicación de la función X toman un valor dentro del conjunto A, Este conjunto es llamado **imagen inversa** de A y se denomina $X^{-1}A$, el cual no debe confundirse con la función inversa de X.

Definición 2 (Medida de probabilidad inducida) *Para cualquer intervalo de la forma $(-\infty, x]$ se obtiene su imagen inversa bajo X, es decir $X^{-1}(-\infty, x] = \{w \in \Omega : X(w) \leq x\}$. Como este conjunto pertenece a $\mathcal{F}$, se aplica la medida de propabilidad $\mathcal{P}$ ésta tiene como dominio $\mathcal{F}$. Esta medida se denota por $P_x(*)$ y se le llama* ***medida de probabilidad inducida*** *por la variable aleatoria X.*

Estamos interesados en estudiar los distintos eventos de la forma $(X \in A)$ y sus probabilidades donde X es una variable aleatoria y A es un conjunto de borel de $\mathbb{R}$.
Cuando hablamos de variables aleatorias, consideramos dos tipos: **continuas** y **discretas**.

Definición 3 (Variable aletoria discreta) *Decimos que una variable aleatoria es **discreta** cuando el conjunto de valores que toma es un conjunto discreto, es decir, finito o numerable. Por ejemplo el conjunto* $\{0, 1, 2, ..., n\}$*, mismo que es un conjunto finito, así mismo* $\mathbb{N}$*, aunque es infinito, es numerable y por tanto discreto.*

Definición 4 (Variables aleatorias continuas) *Decimos que una variable aleatoria es **continua** cuando toma todos los valores dentro de un intervalo* $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$*.*

Definición 5 *Sea X una variable aleatoria discreta con valores* $x_0, x_1, ...$*. La función de probabilidad de* X*, denotada por* $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, se define como sigue:*

$$f(x) = \begin{cases} P(X = x) & \text{si } x = x_0, x_1, \ldots \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Decimos entonces, que la función de probabilidad es simplemente aquella función que indica la probabilidad en los distintos valores que toma la variable aleatoria.
Por otro lado, es importante mencionar el concepto de **independencia de variables aleatorias**. A continuación se explican de fomra breve algunas definiciones relevantes de este tema.

Definición 6 *Se dice que las variables aleatorias* X *y* Y *son **independientes** si los eventos* $(X \leq x)$ *y* $(Y \leq y)$ *son independientes para cualesquiera valores reales de x y y, es decir, si para cualquier* $x, y \in \mathbb{R}$ *se cumple la igualdad:*

$$P[\ (X \leq x) \cap (Y \leq y)]\ = P(X \leq x)P(Y \leq y)$$

De igual forma, se puede escribir como $F_{X,Y}(x, y)$ *y se llama **función de deistribución conjunta** de* X *y* Y *evaluada en el punto* (x, y)*. Así,*

$$F_{X,Y}(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$$

Definición 7 (Independencia de variables aleatorias: caso discreto)

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$$

or el teorema de probabilidad total,

$$P(X = x) = \sum_y P(X = X, Y = y)$$

$$P(Y = y) = \sum_x P(X = X, Y = y)$$

En el caso donde son continuas, la función $F_{X,Y}(x,y)$ se expresa:

$$F_{X,Y}(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(u,v)dvdu$$

, donde $f_{X,Y}(x,y)$ se llama **función de densidad conjunta** de X y Y.

Definición 8 (Independencia de variables aleatorias: caso continua)

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$$

donde,

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dy$$
$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dx$$

Ejercicios

Los siguientes ejercicios propuestos tendrán solución en **Python**, por lo que te invitamos a ejecutar el código en tu computadora.

Ejercicio 1 *Suponga que un experimento aleatorio consiste en escoger un número al azar dentro del intervalo* $(0,1)$. *Para cada resultado* w *del experimento se expresa a este número en su expansión decimal,*

$$w = 0.a_1a_2a_3...$$

en donde $a_i \in \{0,1,...,9\}, i = 1,2,...$. *Para cada una de las siguientes variables aleatorias determine si ésta es discreta o continua y en cualquier caso establezca el conjunto de valores que puede tomar:*

1. $X(w) = 1 - w$
2. $Y(w) = a_1$

Solución.

```
import numpy as np

# Simulaci n del experimento aleatorio
def simulate_experiment(n_samples):

# Generamos n_samples n meros aleatorios uniformes en (0, 1)
    omega = np.random.random(n_samples)
```

```
    # Calculamos X(  ) = 1 -
    X = 1 - omega

    # Calculamos Y(  ) = a_1 (el primer d gito decimal de   )
    # Convertimos los n meros a cadenas, obtenemos el primer
   d gito y lo convertimos a entero
    Y = np.array([int(str(o)[2]) for o in omega])

    return omega, X, Y

# Configuraci n
n_samples = 10000  # N mero de muestras

# Realizamos la simulaci n
omega, X, Y = simulate_experiment(n_samples)

# Resultados
print("Ejemplo de valores generados:")
print("  :", omega[:5])
print("X(  ):", X[:5])
print("Y(  ):", Y[:5])

# Verificamos los conjuntos de valores posibles
print("\nConjunto de valores que puede tomar X(  ):")
print(f"[{X.min():.2f}, {X.max():.2f}] (es continuo)")

print("\nConjunto de valores que puede tomar Y(  ):")
print(set(Y), "(es discreto)")
```

```
Ejemplo de valores generados:
: [0.33776259 0.68181194 0.8218781  0.96751122 0.82692469]
X(): [0.66223741 0.31818806 0.1781219  0.03248878 0.17307531]
Y(): [3 6 8 9 8]

Conjunto de valores que puede tomar X():
[0.00, 1.00] (es continuo)

Conjunto de valores que puede tomar Y():
{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} (es discreto)
```

Ejercicio 2 *Encuentra el valor de la constante c que hace que la siguiente función que hace la siguiente función sea de probabilidad.*

$$f(x) = \begin{cases} cx & \text{si } x = 0, 1, 2, 3 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Solución.

```
 import sympy as sp

# Definir la variable simb lica
c = sp.Symbol('c')

# Ecuaci n de normalizaci n: sumatoria de f(x) debe ser 1
equation = sum(c * x for x in range(4)) - 1

# Resolver para c
solution = sp.solve(equation, c)
print("El valor de c es:", solution[0])
```

```
El valor de c es: 1/6
```

Ejercicio 3 *Encontraremos el valor de la constante c que hace que la siguiente función sea de densidad.*

$$f(x) = \begin{cases} c|x| & x \in [-1, 1] \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Solución.

Se trata de una variable aleatoria continua que toma valores en el intervalo $[-1, 1]$. Como esta función debe integrar uno tenemos que,

$$1 = \int_{-1}^{1} c|x|dx = 2c\int_{0}^{1} xdx = c$$

Veamos que, cuando tomamos $c = 1$ esta función resulta ser una función de densidad pues ahora cumple con ser no negativa e integrar 1.