DISTRIBUCIÓN MARGINAL

Nexus-Probability

CURSO 2 (PROBABILIDAD II)

PARTE 2 / LECCIÓN 2

Dado que ya conocemos la función de densidad de un vector aleatorio, veremos ahora la forma de obtener la función de densidad de un subvector del vector aleatorio original. Analizamos primero el caso bidimensional.

Definición 1 (Función de probabilidad marginal) *Sea $f(x,y)$ la función de densidad del vector aleatorio (X,Y). Se define la* ***función de densidad marginal*** *de cada variable X como la siguiente integral $f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy$*

Es decir, se integra simplemente respecto de la variable y para dejar como resultado una función que depende únicamente de x. Esta función resultante es la **función de densidad marginal de** X y el otro subíndice 1 indica que se trata de la función marginal de la primera variable aleatoria del vector (X,Y). De manera análoga, la funciñon de densidad marginal de la variable Y se obtiene integrando ahora respecto de la variable x, esto es

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx$$

Por otro lado, la **función de probabilidad marginal** para vectores discretos involucra una suma en lugar de la integral, por ejemplo,

$$f_1(x) = \sum_y f(x,y)$$

y de manera análoga para $f_2(y)$.
Ahora, veremos la forma de obtener la función de distribución de un subvector a partir de la función de distribución del vector aleartorio original.

Definición 2 (Función de distribución marginal) *Sea (X,Y) un vector aleatorio, continuo o discreto, con distribución $F(x,y)$. La función de distribución marginal de la variable X se define como la función de una variable.*

$$F_1(x) = lim_{y \to \infty} F(x,y)$$

La función de distribución marginal de la variable Y se define como la función $F_2(y) = lim_{x\to\infty}F(x,y)$ Esos límites existen pues la función de distribución conjunta es acotada y no decreciente en cada variable. Para un vector de tres dimensiones (X,Y,Z), a partir de $F_{X,Y,Z}(x,y,z)$ y tomando los límites necesarios, pueden obtenerse, por ejemplo, las funciones de distribución marginales $F_{X,Y}(x,y), F_{X,Z}(x,z), F_X(x)$. En efecto, para el último caso tenemos que,

$$F_X(x) = lim_{y\to\infty}lim_{z\to\infty}F_{X,Y,Z}(x,y,z)$$

Se dice que las variables aleatorias son independientes si cumplen con la condición siguiente. Sea $X_1, ..., X_n$ una colección de variables aleatroias con función de distribución conjunta $F(x_1, ...x_n)$. Suponga que las respectivas funciones de distribución marginales son $F_1(x_1), ..., F_n(x_n)$.

Definición 3 *Se dice que las variables aleatorias $X_1, ...X_n$ son **independientes** si para cualesquiera números reales $x_1, ..., x_n$ se cumple la igualdad $F(x_1, ..., x_n) = F_1(x_1)...F_n(x_n)$*

Alternativamente, puede definirse la independencia en términos de la función de densidad como sigue

$$f(x_1, ..., x_n) = f_1(x_1)...f_2(x_2)$$

En el caso particular cuando las variables aleatorias son discretas, la condición de independencia se escribe de la forma siguiente, para cualesquiera números $x_1, ..., x_n$

$$P(X_1 = x_1, ..., X_n = x_n)$$

Tenemos a continuación la siguiente extensión del concepto de independencia de variables aleatorias.

Definición 4 *Se dice que un conjunto infinito de variables aleatorias es **independiente** si cualquier subconjunto finito de él lo es.*

Esta hipótesis aparece en el enunciado de la ley de los grandes números y el teorema central del límite.

Ejercicios

Algunos de los siguientes ejercicios propuestos tendrán solución en **Python**, por lo que te invitamos a ejecutar el código en tu computadora, cuando sea el caso.

Ejercicio 1 *Sea (X,Y) un vector aleatorio continuo con función de densidad dada por*

$$f(x) = \begin{cases} 4xy & \text{si } 0 < x, y < 1, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Solución.

Es sencillo verificar que esta función es una función de densidad bivariada pues es no negativa e integra uno.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = \int_{0}^{1}\int_{0}^{1} 4xydxdy = 4 * \frac{1}{2} * \frac{1}{2}$$

Calcularemos ahora las funciones de densidad marginales $f_1(x)$ y $f_2(y)$. Para $x \in (0,1)$,

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = \int_{0}^{1} 4xydy = 2x$$

Por lo tanto,

$$f_1(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

De manera análoga, o por simetría,

$$f_2(x) = \begin{cases} 2y & \text{si } 0 < y < 1, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Ejercicio 2 *Sea (X,Y) un vector aleatorio discreto con función de probabilidad dada por*

$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{(x+2y)}{30} & \textit{si } (x,y) \in \{1,2,3\} * \{1,2\} \\ 0 & \textit{en otro caso.} \end{cases}$$

Solución.

No es dificil comprobar que esta función es una función de probabilidad bivariada, no negativa y suma uno.

$$\sum_{x=1}^{3}\sum_{y=1}^{2} \frac{x+2y}{30} = 1$$

Las funciones de probabilidad marginales $f_1(x)$ y $f_2(y)$ son

$$f_1(x) = \sum_{y=1}^{3} f(x,y) \begin{cases} \frac{8}{30} \text{ si } x = 1 \\ \frac{10}{30} \text{ si } x = 2 \\ \frac{12}{30} \text{ si } x = 3 \\ 0 \text{ en otro caso.} \end{cases}$$

$$f_2(x) = \sum_{x=1}^{3} f(x,y) \begin{cases} \frac{12}{30} \text{ si } y = 1 \\ \frac{18}{30} \text{ si } y = 2 \\ 0 \text{ en otro caso.} \end{cases}$$

Estas funciones son funciones de probabilidad univariadas.