TEOREMAS DE RENOVACIÓN

Nexus-Probability

CURSO 4 (PROCESOS ESTOCÁSTICOS 2)

PARTE 2 / LECCIÓN 3

En esta sección se estudian algunos resultados sobre el comportamiento límite de los procesos de renovación. Primeramente se demuestra que todo proceso de renovación crece a infinito con probabilidad uno cuando el tiempo crece a infinito.

Teorema 1 *Para todo proceso de renovación,*

$$\lim_{n\to\infty} N_n = \infty \quad \textit{c.s.}$$

Demostración. Recordemos la igualdad de eventos $(N_t \geq n) = (W_n \leq t)$. Entonces para cualquier $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} 1 &= \lim_{t\to\infty} F_{W_n}(t) \\ &= \lim_{t\to\infty} P(W_n \leq t) \\ &= \lim_{t\to\infty} P(N_t \geq n) \\ &= P\left(\lim_{t\to\infty} N_t = n\right). \end{aligned}$$

Para la última igualdad se ha utilizado el hecho de que la función $t \mapsto N_t$ es monótona no decreciente. Como el resultado demostrado vale para cualquier valor de n natural, se tiene que:

$$P\left(\lim_{t\to\infty} N_t = n\right) = 1.$$

Por lo tanto, cuando $t \to \infty$, el número de renovaciones N_t también crece a infinito. Por otro lado, el tiempo que le toma al proceso llegar al valor N_t es W_n, y también crece a infinito. El siguiente resultado establece que el proceso de renovación se estabiliza cada $\mu = E(T)$, unidades de tiempo, en donde T representa cualquier variable de tiempo en un proceso de renovación.

Teorema 2 (Teorema elemental de renovación. (J. L. Doob, 1948)) *Para un proceso de renovación $\{N_t : t \geq 0\}$ donde $E(T) = \mu$, con $0 < \mu < \infty$, se tiene que*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{W_n}{N_t} = \mu \quad \textit{c.s.}$$

Demostración. Para valores enteros de n, por la ley fuerte de los grandes números, W_n/n casi seguramente cuando $n \to \infty$. Ahora observe la convergencia de eventos:

$$\frac{W_n}{n} \quad \xrightarrow{c.s.} \quad \frac{W_n}{N_t}.$$

Definición 1 *Para un proceso de renovación en donde $E(T) = \mu$, con $0 < \mu < \infty$, se tiene que*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{N_t}{t} = \frac{1}{\mu} \quad \textit{c.s.}$$

Demostración. Para cualquier $t > 0$ se cumple $W_n \leq t \leq W_{n+1}$. Por lo tanto,

$$\frac{W_n}{N_t} \quad \xrightarrow{c.s.} \quad \frac{N_t + 1}{N_t}.$$

Cuando $t \to \infty$, los extremos de estas desigualdades convergen a μ como consecuencia de la ley de los grandes números. Para lo tanto, el término de límite es

$$\frac{1}{\mu}.$$

Teorema 3 (Teorema elemental de renovación. (W. Feller, 1941)) *Considere un proceso de renovación $\{N_t : t \geq 0\}$ donde $E(T) = \mu$, con $0 < \mu < \infty$. Entonces*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\Lambda(t)}{t} = \frac{1}{\mu}.$$

Demostración. Por la identidad de Wald,

$$E(W_{n+1}) - E(N_t) = \frac{1}{\mu} \quad E(T).$$

Obteniendo de esta identidad la fórmula $\Lambda(t)$ y dividiéndola entre t se obtiene

$$\Lambda(t) = \frac{1}{\mu} E(W_{n+1}) + \frac{1}{\mu}.$$

Teorema 4 (Teorema de Renovación. (D. Blackwell, 1948)) *Si $F(t)$ es no aritmética, entonces para cualquier $h > 0$,*

$$\lim_{t\to\infty} \Lambda(t+h) - \Lambda(t) = \frac{h}{\mu}.$$

Si $F(t)$ es aritmética con base d, entonces para cualquier n,

$$\lim_{t\to\infty} \Lambda(t+nd) - \Lambda(t) = \frac{nd}{\mu}.$$

Ejemplo 1 *Para el proceso de Poisson se tiene que la función incremento a la que hace referencia el teorema de renovación de Blackwell en realidad es una constante pues*

$$\Lambda(t) - \Lambda(t+h) = \lambda t - \lambda h = \frac{h}{\lambda} = \mu.$$

Teorema 5 (Teorema clave de Renovación (W. L. Smith, 1953)) *Sea $\Lambda(t)$ la solución a la ecuación de renovación*

$$\Lambda(t) - H(t) = \int_0^t A(t-s)dF(s),$$

en donde $H(t)$ es una función directamente Riemann integrable. Si $F(t)$ es no aritmética,

$$\lim_{t\to\infty} \Lambda(t) - \frac{1}{\mu}H(t) = 1.$$

Si $F(t)$ es aritmética con base d, entonces

$$\lim_{t\to\infty} \Lambda(t) - \frac{d}{\mu}\sum_{k=0}^{\infty} H(t+kd).$$

Ejercicio 1 (Simulación del Proceso de Renovación y Comprobación de Convergencia) *El primer ejercicio consiste en simular un proceso de renovación y verificar si N_t crece a infinito conforme $t \to \infty$, tal como se afirma en el Teorema 1.*

Código en Python

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Parametros
lambda_rate = 1  # Tasa del proceso de renovacion (Poisson)
```

```python
t_max = 50  # Tiempo maximo
num_renovaciones = 1000  # Numero de renovaciones simuladas

# Funcion para simular un proceso de renovacion
def proceso_renovacion(lambda_rate, t_max):
    tiempos_de_vida = []
    t = 0
    while t < t_max:
        tiempo_vida = np.random.exponential(1 / lambda_rate)
        t += tiempo_vida
        if t <= t_max:
            tiempos_de_vida.append(t)
    return len(tiempos_de_vida)

# Simulacion
renovaciones = [proceso_renovacion(lambda_rate, t_max) for _ in
    range(num_renovaciones)]

# Mostrar los resultados
plt.plot(range(num_renovaciones), renovaciones)
plt.xlabel('Simulacion')
plt.ylabel('Numero de Renovaciones $N_t$')
plt.title('Convergencia de $N_t$ en un Proceso de Renovacion')
plt.grid(True)
plt.show()
```

Ejercicio 2 (Aplicación de la Ecuación de Renovación) *Aquí vamos a aplicar la ecuación de renovación $\Lambda(t) = F(t) + \int_0^t \Lambda(t-s)dF(s)$ de manera iterativa. Vamos a calcular $\Lambda(t)$ en un proceso de renovación con una distribución exponencial de los tiempos de vida.*

Código en Python

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Parametros
lambda_rate = 1  # Tasa de la distribucion exponencial
t_max = 10  # Tiempo maximo

# Funcion de distribucion F(t) para un proceso de Poisson
def F_t(t, lambda_rate):
    return 1 - np.exp(-lambda_rate * t)

```

```python
# Funcion para calcular la integral de renovacion de manera
    iterativa
def lambda_integral(t, lambda_rate):
    F_t_value = F_t(t, lambda_rate)
    s_values = np.linspace(0, t, 100)
    integrand = [(1 + F_t(t - s, lambda_rate) if t - s >= 0 else
    0) for s in s_values]
    integral = np.trapz(integrand, s_values)
    return F_t_value + integral

# Calcular y graficar la funcion de renovacion
t_values = np.linspace(0, t_max, 100)
lambda_values = [lambda_integral(t, lambda_rate) for t in
    t_values]

# Graficar la funcion de renovacion
plt.plot(t_values, lambda_values, label=r'$\Lambda(t)$ integral'
    , color='r')
plt.xlabel('Tiempo $t$')
plt.ylabel(r'$\Lambda(t)$')
plt.title('Funcion de Renovacion usando la Ecuacion Integral')
plt.grid(True)
plt.legend()
plt.show()
```

Ejercicio 3 (Comprobación del Teorema de Renovación de Blackwell)
En este ejercicio, comprobamos el ***Teorema 3 de Blackwell****, que afirma que si la función $F(t)$ no es aritmética, la diferencia $\Lambda(t+h) - \Lambda(t)$ se estabiliza conforme $t \to \infty$.*

Código en Python

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Parametros
lambda_rate = 1  # Tasa de la distribucion exponencial
h = 0.5  # Incremento
t_max = 50  # Tiempo maximo

# Funcion de renovacion para un proceso de Poisson
def lambda_poisson(t, lambda_rate):
    return lambda_rate * t

```

```python
# Calcular y graficar la diferencia en la funcion de renovacion
t_values = np.linspace(0, t_max, 100)
lambda_values_diff = [lambda_poisson(t + h, lambda_rate) -
    lambda_poisson(t, lambda_rate) for t in t_values]

# Graficar la diferencia
plt.plot(t_values, lambda_values_diff, label=r'$\Lambda(t+h) - \
    Lambda(t)$')
plt.axhline(0, color='black',linewidth=1)
plt.xlabel('Tiempo $t$')
plt.ylabel(r'$\Lambda(t+h) - \Lambda(t)$')
plt.title('Comprobacion del Teorema de Renovacion de Blackwell')
plt.grid(True)
plt.legend()
plt.show()
```