PROCESO DE WIENNER

Nexus-Probability

CURSO 4 (PROCESOS ESTOCÁSTICOS II)

PARTE 4 / LECCIÓN 1

1. Introducción

Comencemos considerando la caminata aleatoria simétrica, que en cada unidad de tiempo tiene la misma probabilidad de dar un paso unitario ya sea a la izquierda o a la derecha. Es decir, es una cadena de Markov con

$$P_{i,i+1} = \frac{1}{2} = P_{i,i-1}, \quad i = 0, \pm 1, \dots$$

Ahora supongamos que aceleramos este proceso tomando pasos cada vez más pequeños en intervalos de tiempo cada vez más reducidos. Si ahora llevamos el proceso al límite de la manera correcta, lo que obtenemos es el movimiento browniano.
Más precisamente, supongamos que en cada unidad de tiempo Δt damos un paso de tamaño Δx ya sea a la izquierda o a la derecha con igual probabilidad. Si dejamos que $X(t)$ denote la posición en el tiempo t entonces

$$X(t) = \Delta x \left(X_1 + \cdots + X_{\lfloor t/\Delta t \rfloor} \right) \quad (1)$$

donde

$$X_i = \begin{cases} +1, & \text{si el } i\text{-ésimo paso de longitud } \Delta x \text{ es hacia la derecha,} \\ -1, & \text{si es hacia la izquierda} \end{cases}$$

y $\lfloor t/\Delta t \rfloor$ es el mayor entero menor o igual que $t/\Delta t$, y donde se asume que los X_i son independientes con

$$P\{X_i = 1\} = P\{X_i = -1\} = \frac{1}{2}.$$

Como $E[X_i] = 0$ y $Var(X_i) = E[X_i^2] = 1$, vemos a partir de la Ecuación (1) que

$$E[X(t)] = 0,$$

$$Var(X(t)) = (\Delta x)^2 \cdot \frac{t}{\Delta t} \quad (.2).$$

Ahora dejaremos que Δx y Δt tiendan a 0. Sin embargo, debemos hacerlo de tal manera que el proceso límite resultante sea no trivial (por ejemplo, si dejamos que $\Delta x = \Delta t$ y si dejamos que $\Delta t \to 0$, entonces, a partir de lo anterior, vemos que $E[X(t)]$ y $Var(X(t))$ convergerían ambos a 0 y, por lo tanto, $X(t)$ sería 0 con probabilidad 1).

Si dejamos que

$$\Delta x = \sigma\sqrt{\Delta t},$$

para alguna constante positiva σ, entonces, a partir de la Ecuación (2) vemos que, conforme $\Delta t \to 0$,

$$E[X(t)] = 0,$$
$$Var(X(t)) \to \sigma^2 t.$$

Enumeramos algunas propiedades intuitivas de este proceso límite obtenido al tomar $\Delta x = \sigma\sqrt{\Delta t}$ y luego pongamos que $\Delta t \to 0$.

Definición 1 *A partir de la Ecuación (1) y del teorema central del límite, lo siguiente parece razonable:*

(i) $X(t)$ *es normal con media 0 y varianza* $\sigma^2 t$*. Además, debido a que los cambios de valor de la caminata aleatoria en intervalos de tiempo no superpuestos son independientes, tenemos*

(ii) $\{X(t), t \geq 0\}$ *tiene incrementos independientes, en el sentido de que para todo* $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ *los incrementos*

$$X(t_n) - X(t_{n-1}), \quad X(t_{n-1}) - X(t_{n-2}), \quad \ldots, \quad X(t_2) - X(t_1), \quad X(t_1)$$

son independientes. Finalmente, dado que la distribución del cambio en la posición de la caminata aleatoria sobre cualquier intervalo de tiempo depende únicamente de la duración de ese intervalo, parecería que

(iii) $\{X(t), t \geq 0\}$ *tiene incrementos estacionarios, en el sentido de que la distribución de* $X(t+s) - X(t)$ *no depende de* t*.*

Definición 2 ***Definición*** *Un proceso estocástico* $\{X(t), t \geq 0\}$ *se dice que es un proceso de movimiento browniano si*

(i) $X(0) = 0$;

(ii) $\{X(t), t \geq 0\}$ *tiene incrementos estacionarios e independientes;*

(iii) para cada $t > 0$, $X(t)$ *se distribuye de forma normal con media 0 y varianza* $\sigma^2 t$.

El proceso de movimiento browniano, a veces llamado proceso de Wiener, es uno de los procesos estocásticos más útiles en la teoría de probabilidad aplicada. Se originó en la física como una descripción del movimiento browniano. Este fenómeno, denominado así en honor al botánico inglés Robert Brown, quien lo descubrió, es el movimiento exhibido por una pequeña partícula totalmente inmersa en un líquido o gas. Desde entonces, el proceso ha sido utilizado de manera beneficiosa en áreas tales como pruebas estadísticas de bondad de ajuste, análisis de los niveles de precios en el mercado de valores y mecánica cuántica.
La primera explicación del fenómeno del movimiento browniano fue dada por Einstein en 1905. Él demostró que el movimiento browniano podía explicarse asumiendo que la partícula inmersa estaba siendo continuamente sometida a bombardeo por las moléculas del medio circundante. Sin embargo, la definición concisa previa de este proceso estocástico subyacente al movimiento browniano fue dada por Wiener en una serie de artículos que se remontan a 1918.
Cuando $\sigma = 1$, el proceso se llama movimiento browniano estándar. Dado que cualquier movimiento browniano puede convertirse en el proceso estándar definiendo

$$B(t) = \frac{X(t)}{\sigma},$$

2. Ejercicios

Ejercicio 1 *Simula una trayectoria de movimiento browniano estándar en el intervalo* $[0, 1]$ *con 500 pasos y grafica la trayectoria.*

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Par metros
T = 1.0         # Tiempo total
N = 500         # N mero de pasos
dt = T / N      # Tama o del paso
t = np.linspace(0, T, N + 1)

```

```python
# Simulaci n de una trayectoria
np.random.seed(42)
dW = np.sqrt(dt) * np.random.randn(N)
W = np.concatenate(([0], np.cumsum(dW)))  # A adir X(0) = 0

# Gr fica
plt.figure(figsize=(10, 5))
plt.plot(t, W, label='Trayectoria Browniana')
plt.title('Trayectoria de Movimiento Browniano Est ndar')
plt.xlabel('Tiempo')
plt.ylabel('X(t)')
plt.grid()
plt.legend()
plt.show()
```

Ejercicio 2 *Simula 1000 trayectorias de movimiento browniano estándar en el intervalo* $[0, 1]$ *con 500 pasos y grafica la distribución del valor final* $X(1)$*. Verifica que sigue una distribución normal* $N(0, 1)$*.*

```python
M = 1000  # N mero de trayectorias
X_T = np.zeros(M)

for i in range(M):
    dW = np.sqrt(dt) * np.random.randn(N)
    W = np.cumsum(dW)
    X_T[i] = W[-1]  # Valor final de cada trayectoria

# Histograma de X(1)
plt.figure(figsize=(10, 5))
plt.hist(X_T, bins=30, density=True, alpha=0.7, color='skyblue',
    edgecolor='black')
plt.title('Distribuci n de X(1) para 1000 trayectorias')
plt.xlabel('X(1)')
plt.ylabel('Densidad')
plt.grid()
plt.show()
```

Ejercicio 3 *Calcula la* ***varianza empírica*** *de* $X(t)$ *en distintos tiempos* $t = 0.25, 0.5, 0.75, 1$ *simulando 1000 trayectorias y verifica que se aproxima a* t*.*

```python
times = [0.25, 0.5, 0.75, 1.0]
indices = [int(ti * N) for ti in times]
values = np.zeros((M, len(times)))
```

```

for i in range(M):
    dW = np.sqrt(dt) * np.random.randn(N)
    W = np.concatenate(([0], np.cumsum(dW)))  # A adir X(0) = 0
    for j, idx in enumerate(indices):
        values[i, j] = W[idx]

# Calcular varianza emp rica
var_empirical = np.var(values, axis=0)

# Mostrar resultados
for ti, var in zip(times, var_empirical):
    print(f"Varianza emp rica en t = {ti}: {var:.4f} (valor
   te rico: {ti})")
```