PROBABILIDAD CONDICIONAL

Nexus-Probability

CURSO 1 (PROBABILIDAD I)

PARTE 1 / LECCIÓN 2

Supongamos que lanzamos dos dados y que cada uno de los 36 posibles resultados es igualmente probable, con una probabilidad de $\frac{1}{36}$. Supongamos que observamos que el primer dado muestra un cuatro. Entonces, dada esta información, ¿cuál es la probabilidad de que la suma de los dos dados sea seis? Para calcular esta probabilidad razonamos de la siguiente manera: dado que el primer dado es un cuatro, se deduce que puede haber a lo sumo seis posibles resultados de nuestro experimento, a saber:

$$(4,1),\ (4,2),\ (4,3),\ (4,4),\ (4,5),\ (4,6).$$

Dado que cada uno de estos resultados originalmente tenía la misma probabilidad de ocurrir, deberían seguir teniendo igual probabilidad. Es decir, dado que el primer dado es un cuatro, la probabilidad (condicional) de cada uno de los resultados

$$(4,1),\ (4,2),\ (4,3),\ (4,4),\ (4,5),\ (4,6)$$

es $\frac{1}{6}$, mientras que la probabilidad (condicional) de los otros 30 puntos en el espacio muestral es 0. Por lo tanto, la probabilidad deseada será:

$$P(E \mid F) = \frac{1}{6}.$$

Si denotamos por E el evento de que la suma de los dados sea seis y por F el evento de que el primer dado sea un cuatro, entonces la probabilidad que acabamos de calcular se llama la probabilidad condicional de que E ocurra dado que F ha ocurrido, y se denota por:

$$P(E \mid F).$$

Definición 1 (Probabilidad Condicional) *Una fórmula general para $P(A \mid B)$ que es válida para todos los eventos A y B se deriva de la misma manera que lo anterior. Es decir, si el evento B ocurre, entonces para que A ocurra es necesario que el resultado sea un punto tanto en A como en B, es decir, debe estar en $A \cap B$.*
Ahora, dado que B ha ocurrido, se deduce que B se convierte en nuestro nuevo espacio muestral y, por lo tanto, la probabilidad de que ocurra el evento AB será igual a la probabilidad de AB relativa a la probabilidad de B. Es decir:

$$P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)}, \text{ si } P(B) > 0.$$

Ejercicios

Los siguientes ejercicios propuestos tendrán solución en **Python**, por lo que te invitamos a ejecutar el código en tu computadora.

Ejercicio 1 (Lanzamiento de dos monedas) *Se lanzan dos monedas. Defina los eventos:*

- A: *La primera moneda muestra cara.*
- B: *Ambas monedas muestran el mismo resultado.*

Calcule la probabilidad condicional $P(A \mid B)$, es decir, la probabilidad de que la primera moneda sea cara, dado que ambas monedas muestran el mismo resultado.

Solución.

```
# Espacio muestral: Todas las combinaciones posibles al lanzar dos monedas
espacio_muestral = [("cara", "cara"), ("cara", "cruz"), ("cruz", "cara"), ("cruz", "cruz")]

# Evento A: La primera moneda muestra "cara"
evento_A = [outcome for outcome in espacio_muestral if outcome[0] == "cara"]

# Evento B: Ambas monedas muestran el mismo resultado
evento_B = [outcome for outcome in espacio_muestral if outcome[0] == outcome[1]]

```

```
# Interseccion de A y B: Ambas monedas muestran el mismo resultado y la primera es "cara"
interseccion_A_B = [outcome for outcome in evento_B if outcome in evento_A]

# Probabilidad condicional P(A|B)
P_B = len(evento_B) / len(espacio_muestral)
P_A_given_B = len(interseccion_A_B) / len(evento_B)

# Resultado
print("Ejercicio 1:")
print(f"P(A|B) = {P_A_given_B:.2f}")

```

```
Ejercicio 1:
P(A|B) = 0.50
```

Ejercicio 2 (Extracción de cartas de una baraja) *En una baraja estándar de 52 cartas, se extrae una carta al azar. Defina los eventos:*

- A*: La carta extraída es un as.*
- B*: La carta extraída pertenece al palo de corazones.*

Calcule la probabilidad condicional $P(A \mid B)$*, es decir, la probabilidad de que la carta extraída sea un as, dado que pertenece al palo de corazones.*

```
# Probabilidades individuales

P_B = 13 / 52  # Probabilidad de que la carta sea del palo de corazones
P_A_and_B = 1 / 52  # Probabilidad de que la carta sea el as de corazones

# Probabilidad condicional P(A|B)
P_A_given_B = P_A_and_B / P_B

# Resultado
print("Ejercicio 2:")
print(f"P(A|B) = {P_A_given_B:.2f}")
```

```
Ejercicio 2:
P(A|B) = 0.08
```

Definición 2 (Propiedades de la Probabilidad Condicional) ***Regla multiplicativa:***

$$P(A \cap B) = P(A \mid B)P(B).$$

Simetría condicional:

$$P(A \mid B)P(B) = P(B \mid A)P(A).$$

Ley de la probabilidad total: *Si $B_1, B_2, \ldots, B_n$ forman una partición del espacio muestral S, entonces:*

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \mid B_i)P(B_i).$$

Ejercicios

Los siguientes ejercicios propuestos tendrán solución en **Python**, por lo que te invitamos a ejecutar el código en tu computadora.

Ejercicio 3 (Regla Multiplicativa) *Supongamos que en una urna hay 3 bolas rojas y 2 bolas azules. Se extraen dos bolas sin reemplazo. Defina los eventos:*

- *A: La primera bola extraída es roja.*
- *B: La segunda bola extraída es azul.*

Usando la regla multiplicativa:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B \mid A)$$

Calcule $P(A \cap B)$, es decir, la probabilidad de que la primera bola sea roja y la segunda sea azul.

Solución.

```
# Probabilidad de extraer una bola roja en la primera extraccion
P_A = 3 / 5  # Hay 3 bolas rojas de un total de 5

# Probabilidad de extraer una bola azul en la segunda extraccion dado que la primera fue roja
P_B_given_A = 2 / 4  # Quedan 4 bolas, 2 de las cuales son azules

```

```
    # Probabilidad conjunta
    P_A_and_B = P_A * P_B_given_A

    # Resultado
    print("Ejercicio 3:")
    print(f"P(A     B) = {P_A_and_B:.2f}")

```

Ejercicio 4 (Probabilidad Total) *Supongamos que en un examen el 60 % de los estudiantes estudian antes del examen (S) y el 40 % no estudian ($\neg S$). Si se sabe que:*

- *La probabilidad de aprobar dado que estudian es $P(A \mid S) = 0.8$,*
- *La probabilidad de aprobar dado que no estudian es $P(A \mid \neg S) = 0.3$,*

Calcule la probabilidad total de aprobar ($P(A)$) usando la ley de la probabilidad total:

$$P(A) = P(A \mid S)P(S) + P(A \mid \neg S)P(\neg S)$$

Solución.

```
    # Probabilidades dadas:

    P_S = 0.6   # Probabilidad de estudiar

    P_not_S = 1 - P_S   # Probabilidad de no estudiar

    P_A_given_S = 0.8  # Probabilidad de aprobar dado que estudian

    P_A_given_not_S = 0.3  # Probabilidad de aprobar dado que no estudian

    # Probabilidad total de aprobar
    P_A = (P_A_given_S * P_S) + (P_A_given_not_S * P_not_S)

    # Resultado
    print(f"P(A) = {P_A:.2f}")

```