VECTORES ALEATORIOS

Nexus-Probability

CURSO 2 (PROBABILIDAD II)

PARTE 2 / LECCIÓN 1

A continuación, se da una breve introducción al tema de variables aleatorias multidimensionales o bien, vectores aleatorios.

Definición 1 (Vector aleatorio) *Un vector aleatorio de dimensión dos es un vector de la forma (X,Y) en donde cada coordenada es una variable aleatoria. De forma análoga se definen vectores aleatorios multidimensionales* $(X_1, ...X_n)$.

Se dice que un vector aleatorio es discreto o continuo si todas las variables que lo conforman lo son. Un vector aleatoria (X, Y) puede considerarse como una función Ω en $\mathbb{R}^2$. El vector (X, Y) evaluado en w es $(X, Y)(w) = (X(w), Y(w))$ con posible valor (x, y), donde (X, Y) es el vector aleatorio, mientras que (x, y) es un punto en el plano. El vector $(X(w), Y(w))$ representa la respuesra conjunta de dos mediciones efectuadas en un mismo elemento w del espacio muestral Ω.
Es importante conocer algunas funciones asociadas a vectores aleatorios, las cuales son análogas al caso unidimensional.

Definición 2 *La **función de probabilidad** del vectori aleatorio discreto* (X, Y)*, en donde* X *toma valores* $x_1, x_2, ...$ *y* Y *toma los valores* $y_1, y_2, ...$*, es la función* $f(x, y) : \mathbb{R}^2 \to [0, 1]$ *dada por*

$$f(x) = \begin{cases} P(X = x, Y = y) & \text{si } (x, y) \in \{x_1, x_2, ...\} * \{y_1, y_2, ...\} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

La función $f(x, y)$ es la probabilidad de que la variable X tome el valor x y al mismo tiempo la variable Y tome el valor y, misma que es llamada **función de probabilidad conjunta o bivariada** de las variables X y Y, denotada por $f_{X,Y}(x, y)$, misma que cumple con algunas propiedades,

- $f(x, y) \geq 0$
- $\sum_{x,y} f(x, y) = 1$

Otra forma de presentar a la función de probabilidad de un vector discreto (X, Y), a través de la siguiente tabla:

x/y	y_1	y_2	$\cdots$
x_1	$f(x_1, y_1)$	$f(x_1, y_2)$	$\cdots$
x_2	$f(x_2, y_1)$	$f(x_2, y_2)$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Para el cálculo de probabilidades de eventos relativos a un vector aleatorio discreto (X, Y) con función de probabilidad $f(x, y)$ se lleva a cabo de la siguiente forma: si A y B son dos conjuntos de números reales, entonces la probabilidad del evento $(X \in A, Y \in B)$ se calcula de la siguiente forma:

$$P(X \in A, Y \in B) = \sum_{x \in A} \sum_{y \in B} f(x, y)$$

Definición 3 *Sea (X, Y) un vector aleatorio continuo. Se dice que la función integrable y no negativa $f(x, y) : \mathbb{R}^2 \to [0, \infty)$ es la* ***función de densidad*** *del vector (X, Y), o bien que es la* ***función de densidad conjunta*** *de las variables X y Y si para todo par (x, y) en $\mathbb{R}^2$ se cumple la igualdad*

$$P(X \leq x, Y \leq y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(u, v) dv du$$

Toda función de densidad $f(x, y)$ de éstas características satisface las siguientes propiedades

- $f(x, y) \geq 0$
- $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy$

Decimos que una función $f(x, y) : \mathbb{R}^2 \to [0, \infty)$ es una **función de densidad conjunta** o **bivariada**, mientras cumpla con las condiciones mencionadas anteriormente.
Además de la función de densidad o de probabilidad, existe la función de distribución parea un vector (X, Y), sea discreto o continuo.

Definición 4 *La función de distribución del vector (X, Y), denotada por $F(x, Y) : \mathbb{R}^2 \to [O, 1]$, se define de la siguiente manera:*

$$F(x, y) = P(X \leq x.Y \leq y)$$

A esta función se le conoce también como **función de acumulación de probabilidad** del vector (X, Y) o **función de distribución conjunta** de las variables X y Y. Es importante mencionar las propiedades que cumple toda función de distribución conjunta.

Definición 5 *La función de distribución $F(x, y)$ del vector aleatorio (X, Y) satisface las siguientes propiedades:*

1. $lim_{x\to\infty}$
   $lim_{y\to\infty} F(x, y) = 1$

2. $$lim_{x\to\infty} F(x, y) = lim_{y\to\infty} = 0$$

3. *$F(x, y)$ es continua por la derecha en cada variable.*

4. *$F(x, y)$ es una función monótona no decreciente en cada variable.*

5. *Para cualesquiera números $a < b$ y $c < d$, se cumple la desigualdad.*

$$F(b, d) - F(d, a) - F(b, c) + F(a, c) \geq 0$$

El concepto de función de distribución bivariada puede extenderse al caso de vectores multidimensionales de la siguiente forma.

Definición 6 *La función de distribución del vector aleatorio $(X_1, ..., X_n)$ es la función $F(x_1, ..., x_n) : \mathbb{R}^n \to [0, 1]$ dada por*

$$F(x_{1,...,x_n}) = P(X_1 \leq x_1, ..., X_n \leq x_n)$$

Es importante mencionar que conociendo $f(x, y)$ se puede encontrar la función de distribución $F(x, y)$ simplemente integrando en el caso continuo o sumando en el caso discreto y viceversa.

De la función de densidad a la función de distribución

Para el caso continuo,

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(u, v) dv du$$

Para el caso discreto,

$$F(x, y) = \sum_{u \leq x} \sum_{v \leq y} f(u, v)$$

De la función de distribución a la función de densidad

Por lo mencionado antreriormente, sabemos que ambas funcionen guardan cierta relación y por el teorema fundamental del cálculo tenemos entonces que en los puntos (x, y) en donde $f(x, y)$ es continua,

$$f(x, y) = \frac{\delta^2}{\delta_x \delta_y} F(x, y)$$

En el caso discreto,

$$f(x, y) = F(x, y) - F(x-, y-)$$

Ejercicios

Los siguientes ejercicios propuestos tendrán solución en **Python**, por lo que te invitamos a ejecutar el código en tu computadora.

Ejercicio 1 *Encuentra la constante c que hace a la siguiente función de probabilidad conjunta.*

$$f(x) = \begin{cases} cxy & \text{si } (x, y) \in \{1, 2\} * \{1, 2\} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Solución.

```
# Definir la ecuaci n para c
suma_prob = sum(x * y for x in [1, 2] for y in [1, 2])

# Calcular la constante c
c = 1 / suma_prob

# Mostrar el resultado
print(f"El valor de c es: {c}")
```

```
El valor de c es: 0.1111111111111111
```

Ejercicio 2 *Comprueba que la siguiente función es de densidad*

$$f(x) = \begin{cases} x + y & \text{si } 0 < x, y < 1, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Solución.

```
from sympy import symbols, integrate

# Definir las variables
x, y = symbols('x y')
```

```python

# Definir la funci n de densidad
f = x + y

# Definir los l mites de integraci n
x_limits = (x, 0, 1)
y_limits = (y, 0, 1)

# Calcular la integral doble
integral_result = integrate(integrate(f, x_limits), y_limits)

# Mostrar el resultado
integral_result
```

Ejercicio 3 *Verifique que la siguiente función es de probabilidad.*

$$f(x) = \begin{cases} 2^{-(x+y)} & \text{si } x, y = 1, 2, \ldots \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Solución.

```python
    from sympy import symbols, summation, oo

# Definir las variables
x, y = symbols('x y', integer=True)

# Definir la funci n de densidad
f = 2**(-(x + y))

# Definir los l mites de la suma
x_limits = (x, 1, oo)
y_limits = (y, 1, oo)

# Calcular la suma doble
sum_result = summation(summation(f, y_limits), x_limits)

# Mostrar el resultado
sum_result
```