Exercice 1 — Triangles à côtés entiers

On dit qu'un triangle est *entier* si les longueurs de ses trois côtés sont des entiers naturels non nuls. On rappelle la propriété dite de l'**inégalité triangulaire** : dans tout triangle non aplati, la longueur de chaque côté est strictement inférieure à la somme des longueurs des deux autres.

1. **a)** Parmi les triplets suivants $(x;y;z)$, expliquer lequel désigne les longueurs des côtés d'un triangle entier non aplati, puis comment tracer ce triangle et avec quels outils : $(4\,;4\,;5)$, $(3\,;6\,;9)$, $(2\,;2\,;6)$.

b) Quelles sont les valeurs possibles de l'entier z si $(15\,;19\,;z)$ désigne les longueurs des trois côtés d'un triangle entier non aplati rangées par ordre croissant ?

c) Étant donnés trois entiers naturels non nuls x, y, z tels que $x \leq y \leq z$, quelle condition faut-il ajouter pour que le triplet $(x\,;\,y\,;\,z)$ désigne les longueurs des côtés d'un triangle entier non aplati ?

2. Soit p un entier naturel non nul. On désigne par E_p l'ensemble des triplets d'entiers naturels rangés par ordre croissant $x \leq y \leq z$ et désignant les côtés d'un triangle entier non aplati de **périmètre** égal à p. Ainsi on obtient, par exemple,

$$E_9 = \{(1\,;4\,;4),\ (2\,;3\,;4),\ (3\,;3\,;3)\}.$$

a) Si un triplet appartient à E_{18}, quelles sont les valeurs maximale et minimale possibles pour z ?

b) Donner la composition de E_{18} et représenter, dans un repère orthonormé, l'ensemble des couples (x, y) pour lesquels il existe un entier naturel z tel que $(x\,;\,y\,;\,z) \in E_{18}$. Vérifier que ces couples se situent à l'intérieur ou sur les bords d'un triangle dont les sommets ont des coordonnées entières.

3.

a) Justifier que si $(x\,;\,y\,;\,z) \in E_p$ alors $(x+1\,;\,y+1\,;\,z+1) \in E_{p+3}$.

b) Soit $(x\,;\,y\,;\,z) \in E_{p+3}$. Déterminer une condition sur (x, y, z) pour que $(x-1\,;\,y-1\,;\,z-1) \in E_p$.

c) En déduire que si p est impair, alors E_p et E_{p+3} ont le même nombre d'éléments.

4. **Étude de E_{2019}.**

a) E_{2019} contient-il un triplet $(x\,;\,y\,;\,z)$ correspondant à un triangle équilatéral ?

b) E_{2019} contient-il des triplets correspondant à des triangles isocèles non équilatéraux ? Si oui, combien ?

c) Montrer que si E_{2019} contient un triplet $(x\,;\,y\,;\,z)$ correspondant à un triangle rectangle, alors

$$2019^2 = 4038(x+y) - 2xy.$$

d) En déduire que E_{2019} ne contient pas de triangle rectangle.

5. **Dénombrement de E_{2022}.**

a) Soit $(x\,;\,y\,;\,z) \in E_{2022}$. On rappelle $x \leq y \leq z$. Justifier que $x + y \geq 1012$ et $x + 2y \leq 2022$.

b) Réciproquement, montrer que si $x \leq y$, $x+y \geq 1012$ et $x+2y \leq 2022$, alors $(x\,;\,y\,;\,2022-x-y) \in E_{2022}$.

c) Justifier que, dans un repère orthonormé, l'ensemble des couples d'entiers naturels (x, y) tels que $x \leq y$, $x+y \geq 1012$ et $x+2y \leq 2022$ constitue l'ensemble des points à coordonnées entières d'un triangle. Évaluer son aire et le nombre de points à coordonnées entières situés sur ses côtés.

6. On admet le Théorème de Pick :

Théorème de Pick

Si un polygone P est tel que tous ses sommets sont à coordonnées entières dans un repère orthonormé, alors son aire est donnée par

$$A = i + \frac{j}{2} - 1,$$

où i désigne le nombre de points à coordonnées entières situés à l'intérieur de P et j le nombre de ceux situés sur les côtés de P.

En déduire le nombre de triplets de E_{2022}, puis celui de E_{2019}.

Une solution algorithmique.

1. De manière générale, concevoir un programme (à retranscrire sur la copie) qui énumère et dénombre les éléments de E_p. Le tester sur E_{2022} puis sur E_{2019}.