Exercice 1 (Équations faciles à résoudre)

1. Rappeler pourquoi le carré d'un nombre réel est toujours un nombre positif.
2. Résoudre l'équation $x^2 + 1 = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
3. Vérifier que pour tout réel x, $(2x + 1)^2 = 4x^2 + 4x + 1$.
   Résoudre l'équation $4x^2 + 4x + 3 = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
4. Résoudre l'équation $x^6 + 2x^2 + 7 = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 2 (Équation se ramenant à l'égalité de deux carrés)

Résoudre les équations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

1. $(x - 3)^2 = (2x + 5)^2$.
2. $4(x + 1)^2 = 9x^2$.
3. $(3x - 1)^2 = x^2 + x + \dfrac{1}{4}$.

Exercice 3

1. Écrire sous la forme d'un intervalle les réels x vérifiant :

$$3x - 1 \geq 0 \quad \text{et} \quad 2x + 3 > 0.$$

2. Résoudre les systèmes suivants (réponse sous forme d'intervalle) :

$$\begin{cases} x - 3 \leq 0 \\ 5 + 2x \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x - 1 \leq 0 \\ 3 - x \leq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 7x + 1 \geq 0 \\ 2 - 3x \geq 0 \end{cases}$$

Exercice 4 (Identités remarquables)

Calculer

$$A = \left((\sqrt{2} + 1)^{2017} + (\sqrt{2} - 1)^{2017}\right)^2 - \left((\sqrt{2} + 1)^{2017} - (\sqrt{2} - 1)^{2017}\right)^2.$$

Les exercices suivants ont été empruntés au site `http://pharedesmaths.free.fr`.

Exercice 5

Sachant que a, b, c vérifient $ab = 0$, $a + b = 4$ et $bc = 12$, déterminer c.

Exercice 6

a, b, c, d vérifient $ab = 8$, $bc = 0$ et $a + b + c + d = 15$.
Calculer $\left[(a + d)^3 - b^2\right] \times c$.

Exercice 7

Existe-t-il a, b, c, d tels que $abcd = 0$ et $\dfrac{ad}{bc} = 2$?

Exercice 8

a, b, c, d vérifient

$$(a-b)(b-c)(c-d)(d-a) = 2(a-c).$$

Sachant que deux et seulement deux sont égaux, les déterminer et justifier que $a > c$.

Exercice 9

Déterminer a, b, c, d sachant que

$$(a^2+c^2)(b^2-d^2) = 36, \quad (d^2-a^2)(c+b) = 18, \quad \frac{c^2+d^2}{a^2-b^2} = 0.$$

Exercice 10

Résoudre $y = x^2 + x - 4$ et $(y+4)(y-x) = 0$.

Exercice 11

Résoudre

$$\frac{x^2-y^2}{x+y} = 0 \quad \text{et} \quad (y-4)(x-3) = 12.$$

Exercice 12

Résoudre $(y+3)(y-1) = 0$ et $(y^2-y)(4-x) = 12$.

Exercice 13

a, b, c, d vérifient

$$(d+2)(a-6) = 12,\ (a+d)(b-c) = 0,\ (a^2+1)(d-2) = 0,\ bc = a.$$

Calculer $a+b+c+d$.

Exercice 14

a, b, c, d vérifient

$$(a^2+d^2)(b-c) = 0,\ bc = a,\ ad = 18,\ abcd = 162.$$

Calculer $a+b+c+d$.

Exercice 15

1. Montrer que si $a^2 = b^2$ alors $a = b$ ou $a = -b$.
2. Si $x^2 = y^2 = z^2$, calculer $(x-y)(y-z)(z-x)$.

Exercice 16

Existe-t-il deux nombres non nuls vérifiant les conditions données sur produits et sommes ?

Exercice 17

Sachant que $xy - (x+y) = -1$, développer $(x-1)(y-1)$ et conclure.

Exercice 18

$a, b > 0$ et $\dfrac{a}{1+b} = \dfrac{b}{1+a}$. Que conclure ?

Exercice 19

1. Vérifier $\dfrac{7^3+4^3}{7^3+3^3} = \dfrac{7+4}{7+3}$.
2. Condition pour $\dfrac{a^3+b^3}{a^3+c^3} = \dfrac{a+b}{a+c}$.

Exercice 20

Montrer que

$$A = \frac{(2\sqrt{5}+\sqrt{7})^2 - (2\sqrt{5}-\sqrt{7})^2}{4\sqrt{35}} \quad \text{et} \quad B = \frac{4}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} + 4\sqrt{2} + 4\sqrt{3}$$

sont des entiers naturels.

Exercice 21

Soit $\rho = \dfrac{1+\sqrt{7}}{2}$.

1. Montrer $2\rho^2 = 2\rho + 3$.
2. En déduire $2\rho^3 = 5\rho + 3$.

Exercice 22

Soient $x = 12^6$, $y = 6^8$, $z = 2^{11} \times 3^7$. Vérifier $x^x y^y = z^z$.

Exercice 23

Soient $a, b \in \mathbb{R}$.

1. Montrer $\max(a, b) + \min(a, b) = a + b$.
2. Montrer $\max(a, b) - \min(a, b) = |a - b|$.
3. En déduire les formules explicites de min et max.