

Logique

Exercice 1

Soit a un nombre entier multiple de 7 et b un nombre entier qui n'est pas un multiple de 7. Démontrer que $a + b$ n'est pas un multiple de 7.

Exercice 2 (Propositions)

Parmi les phrases ci-dessous, quelles sont celles qui sont des propositions mathématiques ?

1. « 42 est le triple de 14 »
2. « Le périmètre du rectangle $ABCD$ »
3. « La moitié de 17 n'est pas égale à 8 »
4. « $7/42$ »
5. « Le point P est perpendiculaire à (KL) »
6. « $6 \times 7 = 52$ »
7. « $2\text{ m} \times 9\text{ m} = 18\text{ m}^2$ »
8. « Les diagonales du rectangle ABC ont la même longueur »
9. « $4,16 < 4,106$ »
10. « Un carré est un rectangle particulier »
11. « $1/0$ est positif »
12. « Le presbytère n'a rien perdu de son charme ni le jardin de son éclat »
13. « $8x + 5 = 4 - x$ »
14. « Il existe un nombre x tel que $x^2 < 0$ »
15. « Quels que soient les nombres a et b , $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ »

Exercice 3 (Négation d'une proposition)

1. Écrire une négation pour chacune des propositions suivantes :
 - (a) « Toutes les voitures rapides sont rouges. »
 - (b) « Tout triangle rectangle possède un angle droit. »
 - (c) « Il existe un mouton écossais dont au moins un côté est noir. »
 - (d) « Dans toutes les prisons tous les détenus détestent tous les gardiens. »

2. a désigne un nombre réel. Écrire une négation pour chacune des propositions suivantes :
- (a) $a > 5$
 - (b) $a \geq -4$
 - (c) $a \leq -2$ ou $a > 3$
 - (d) $a < 5$ et $a > -1$
3. Écrire une négation pour chacune des propositions suivantes :
- (a) « Pour tout nombre x , $x^2 > 0$ »
 - (b) « Il existe un nombre x tel que $x^2 < x$ »
 - (c) « Pour tous nombres a et b , $(a + b)^2 = a^2 + b^2$ »
 - (d) « Il existe a et b tels que $a^2 + b^2 = 13$ »
 - (e) « La Terre tourne autour du Soleil »

Exercice 4 (Vrai ou Faux)

Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

1. Le drapeau de l'Autriche est blanc et rouge.
2. L'eau bout à 100 degrés \implies la Terre tourne autour du Soleil.

Exercice 6

Compléter le tableau suivant par vrai ou faux :

	A	B	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow A$	$A \Leftrightarrow B$
1	Je réside en France	Je réside en Europe			
2	Je ne réside pas en Europe	Je ne réside pas en France			
3	Je suis majeur	J'ai 19 ans			
4	$CDEF$ est un parallélogramme	$CDEF$ est un carré			
5	$x = 3$	$x^2 = 9$			
6	MNP est rectangle en M	$MP^2 + MN^2 = NP^2$			
7	$x \geq -2$	$x \geq -1$			
8	$x \geq -2$	$x > -2$			
9	$a + b = 5$	$a = 2$ et $b = 3$			
10	$4x - (x - 5) = 7$	$x = \frac{2}{3}$			
11	n est premier	n n'est pas un multiple de 3			
12	n est pair	$\frac{1}{n}$ est décimal			
13	$(ax + b)(cx + d) = 0$	$ax + b = 0$ ou $cx + d = 0$			

Exercice 7

Indiquer — en justifiant la réponse — si chaque proposition est vraie ou fausse.

1. Tous les multiples de 3 sont des multiples de 9.
2. Tous les diviseurs de 12 sont des diviseurs de 36.

3. Le carré de la somme de deux nombres est égal à la somme des carrés des deux nombres.
4. Un carré est un rectangle.
5. Pour tout réel x tel que $x^2 > 4$ alors $x > 2$.
6. Il existe une puissance de 2 qui s'écrit avec un 7 comme chiffre de gauche.
7. Il existe une puissance de 7 qui admet 2017 comme derniers chiffres de droite.
8. Il existe une puissance de 113 qui admet 2017 comme derniers chiffres de droite.
9. $(4 + \sqrt{17})^8 = 18957314$.

Exercice 8

1. Pour chacune des propositions ci-dessous, dire si cette proposition est vraie ou fausse.
2. Énoncer la proposition réciproque et dire si elle est vraie ou fausse.
3. Dire dans quel cas on a une équivalence.
 - (i) Si je suis autrichien, alors je suis européen.
 - (ii) Si $x^2 = 4$ alors $x = 2$.
 - (iii) Si $ab = 0$ alors $a = 0$ ou $b = 0$.
 - (iv) Si $ABCD$ est un losange alors $ABCD$ est un parallélogramme.
 - (v) Si deux droites sont perpendiculaires alors elles sont sécantes.
 - (vi) Si ABC est un triangle équilatéral alors ABC est un triangle isocèle.

Exercice 9 (Jeux olympiques)

Lors de la cérémonie d'ouverture des jeux olympiques, les athlètes japonais portent tous une chemise rouge.

1. Un athlète qui porte une chemise blanche entre dans le stade. Est-il un athlète japonais ?
2. À côté de l'athlète précédent, on voit quelqu'un qui porte une chemise rouge. Est-il un athlète japonais ?
3. Le haut-parleur annonce l'arrivée d'un athlète chinois. Porte-t-il une chemise rouge ?
4. Sur la pelouse du stade on voit un athlète japonais qui porte un manteau. Porte-t-il une chemise rouge ?

Exercice 10

1. Pour chacune des propositions (P_1) ci-dessous, énoncer sa contraposée (P_2) .
2. Pour chacune des propositions (P_1) ci-dessous, énoncer sa réciproque (P_3) .
3. Pour chacune des propositions (P_1) ci-dessous, énoncer la contraposée de la réciproque (P_4) .
4. Parmi les différentes propositions (P_1) , (P_2) , (P_3) et (P_4) , dire lesquelles sont vraies.

- (a) Si un quadrilatère est un rectangle alors ses diagonales sont égales.
- (b) Si un nombre se termine par 5 alors il est divisible par 5.
- (c) Si un triangle est rectangle alors il possède deux angles égaux.
- (d) Si deux droites sont perpendiculaires alors elles sont sécantes.