Exercice 5 (Équations faciles à résoudre)

1. Rappeler pourquoi le carré d'un nombre réel est toujours un nombre positif.
2. Résoudre l'équation $x^2 + 1 = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
3. Vérifier que pour tout réel x, $(2x + 1)^2 = 4x^2 + 4x + 1$.
   Résoudre l'équation $4x^2 + 4x + 3 = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
4. Résoudre l'équation $x^6 + 2x^2 + 7 = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 6 (Équation se ramenant à l'égalité de deux carrés)

Résoudre les équations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

1. (E) : $(x - 3)^2 = (2x + 5)^2$.
2. (F) : $4(x + 1)^2 = 9x^2$.
3. (G) : $(3x - 1)^2 = x^2 + x + \frac{1}{4}$.

Exercice 7

Relire le théorème 19 page 72 et décider si la proposition suivante est vraie ou fausse :
Soit x et y deux nombres réels. Pour que $x = y$, il faut que, pour tout nombre strictement positif ε on a $|y - x| < \varepsilon$.

Exercice 8 (Identités remarquables)

Calculer

$$A = \left((\sqrt{2} + 1)^{2017} + (\sqrt{2} - 1)^{2017} \right)^2 - \left((\sqrt{2} + 1)^{2017} - (\sqrt{2} - 1)^{2017} \right)^2.$$

Les exercices suivants ont été empruntés au site `http://pharedesmaths.free.fr`.

Exercice 9

Sachant que a, b et c sont trois nombres vérifiant $a \times b = 0$, $a + b = 4$ et $b \times c = 12$, que vaut c ?

Exercice 10

a, b, c et d sont quatre nombres vérifiant $a \times b = 8$, $b \times c = 0$ et $a + b + c + d = 15$.
Que vaut $\left[(a + d)^3 - b^2\right] \times c$?

Exercice 11

Est-il possible de trouver quatre nombres a, b, c et d tels que $abcd = 0$ et $\frac{ad}{bc} = 2$?

Exercice 12

a, b, c et d sont quatre nombres tels que

$$(a-b)(b-c)(c-d)(d-a) = 2 \times (a-c).$$

Sachant que deux — et seulement deux — de ces quatre nombres sont égaux, retrouver de quels nombres il s'agit puis justifier que $a > c$.

Exercice 13

Déterminer a, b, c et d sachant que

$$(a^2+c^2)(b^2-d^2) = 36, \qquad (d^2-a^2)(c+b) = 18 \quad \text{et} \quad \frac{c^2+d^2}{a^2-b^2} = 0.$$

Exercice 14

Déterminer tous les couples (x, y) de nombres vérifiant $y = x^2 + x - 4$ et $(y+4)(y-x) = 0$.

Exercice 15

Déterminer tous les couples (x, y) de nombres vérifiant

$$\frac{x^2-y^2}{x+y} = 0 \quad \text{et} \quad (y-4)(x-3) = 12.$$

Exercice 16

Déterminer tous les couples (x, y) de nombres vérifiant $(y+3)(y-1) = 0$ et $(y^2-y)(4-x) = 12$.

Exercice 17

a, b, c et d sont quatre nombres vérifiant

$$(d+2)(a-6) = 12, \quad (a+d)(b-c) = 0, \quad (a^2+1)(d-2) = 0 \quad \text{et} \quad bc = a.$$

Que vaut la somme $(a+b+c+d)$?

Exercice 18

a, b, c et d désignent quatre nombres vérifiant

$$(a^2+d^2)(b-c) = 0, \quad bc = a, \quad ad = 18 \quad \text{et} \quad abcd = 162.$$

Que vaut la somme $(a+b+c+d)$?

Exercice 19

1. Montrer que si deux nombres a et b ont leurs carrés égaux alors ils sont égaux ou opposés.
2. Soient x, y et z trois nombres vérifiant $x^2 = y^2 = z^2$. Que vaut $(x-y)(y-z)(z-x)$?

Exercice 20

Est-il possible de trouver deux nombres non nuls tels que le produit du premier par le carré du second soit égal au produit du second par le carré du premier et tels que la somme du triple du premier et du cube du second soit nulle ?

Exercice 21

x et y sont deux nombres tels que si je soustrais leur somme à leur produit, j'obtiens -1.
Développer le produit $(x-1)(y-1)$. Que peut-on en déduire concernant x et y ?

Exercice 22

Soient a et b deux nombres strictement positifs tels que

$$\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}.$$

Que peut-on en déduire concernant les deux nombres a et b ?

Exercice 23

1. Vérifier que $\dfrac{7^3+4^3}{7^3+3^3} = \dfrac{7+4}{7+3}$.
2. Soient a, b et c trois nombres réels strictement positifs.
   À quelle condition a-t-on $\dfrac{a^3+b^3}{a^3+c^3} = \dfrac{a+b}{a+c}$?

Exercice 28

Démontrer que les nombres suivants sont des nombres entiers naturels :

$$A = \frac{(2\sqrt{5}+\sqrt{7})^2 - (2\sqrt{5}-\sqrt{7})^2}{4\sqrt{35}}, \qquad B = \frac{4}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} + 4\sqrt{2} + 4\sqrt{3}.$$

Exercice 29

On pose : $\rho = \dfrac{1+\sqrt{7}}{2}$.

1. Montrer que $2\rho^2 = 2\rho + 3$.
2. En déduire que $2\rho^3 = 5\rho + 3$.

Exercice 30

Soient $x := 12^6$, $y := 6^8$, $z := 2^{11} \times 3^7$, vérifier que $x^x \cdot y^y = z^z$.

Exercice 31

Soit a et b deux nombres réels.

1. Démontrer que $\max(a, b) + \min(a, b) = a + b$.
2. Démontrer que $\max(a, b) - \min(a, b) = |a - b|$.
3. En déduire que

$$\min(a, b) = \frac{a + b - |a - b|}{2} \quad \text{et} \quad \max(a, b) = \frac{a + b + |a - b|}{2}.$$