Génération à la suite

Les fils d'une fraction strictement positive

Soient i et j des entiers strictement positifs. On dit que les deux fils de la fraction $\frac{i}{j}$ sont les fractions

$$\frac{i}{i+j} \quad \text{et} \quad \frac{i+j}{j}.$$

On dit que $\frac{i}{i+j}$ est le **fils gauche** et que $\frac{i+j}{j}$ est le **fils droit** de $\frac{i}{j}$.
L'arbre ci-dessous illustre la situation :

$$\begin{tikzcd}
 & \frac{i}{j} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\frac{i}{i+j} & & \frac{i+j}{j}
\end{tikzcd}$$

Par exemple, $\frac{7}{5}$ a pour fils gauche

$$\frac{7}{7+5} = \frac{7}{12},$$

et pour fils droit

$$\frac{7+5}{5} = \frac{12}{5}.$$

Q1 : Quels sont les deux fils de $\frac{8}{9}$?

Q2 : Trouver la fraction dont un des fils est $\frac{3}{8}$.

Q3 : Trouver la fraction dont un des fils est $\frac{111}{7}$.

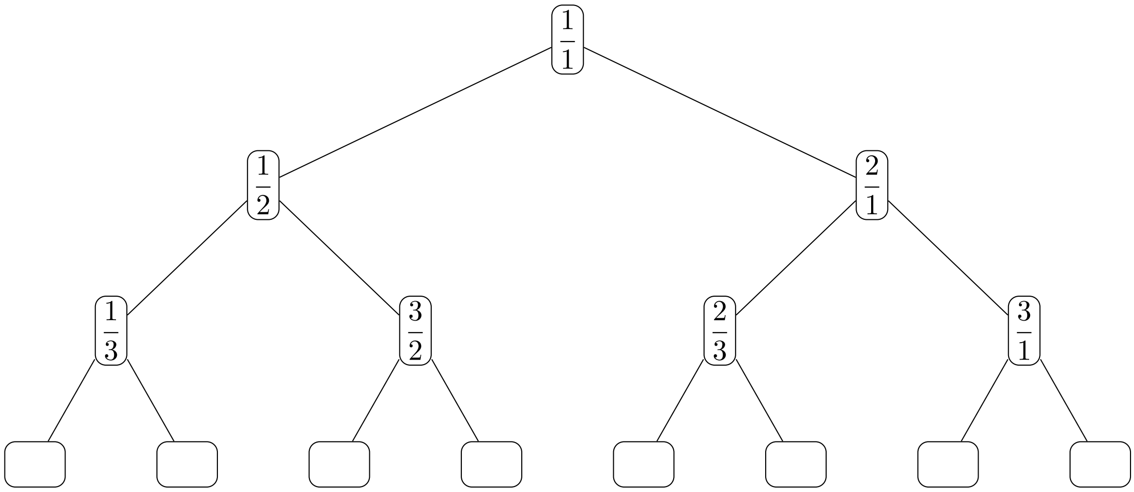
Q4 : De manière générale, justifier que l'un des fils de $\frac{i}{j}$ est inférieur strictement à 1 et que l'autre est supérieur strictement à 1.

Arbre et suite de Calkin-Wilf

L'**arbre de Calkin-Wilf** s'obtient en prenant la fraction

$$\frac{1}{1}$$

à la racine et en associant à chaque fraction ses deux fils (comme dans la partie A).



Q5 : Donner, sur sa copie, toutes les fractions de la ligne 4 de cet arbre.

Q6 : Montrer que la fraction $\frac{44}{13}$ apparaît dans l'arbre. Sur quelle ligne apparaît-elle ?

La **suite de Calkin-Wilf** est la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ des fractions lues de gauche à droite, ligne par ligne en descendant l'arbre de Calkin-Wilf.

Ainsi, les premiers termes de la suite (u_n) sont :

$$u_1 = \frac{1}{1}, \quad u_2 = \frac{1}{2}, \quad u_3 = \frac{2}{1}, \quad u_4 = \frac{1}{3}, \quad u_5 = \frac{3}{2}, \quad u_6 = \frac{2}{3}, \quad u_7 = \frac{3}{1}.$$

Q7 : Donner la fraction égale à u_{32}.

Q8 : On constate que les deux fils de u_3 sont u_6 et u_7.

Recopier et compléter, sur sa copie, les deux phrases suivantes (aucune justification n'est attendue) :

— « Les deux fils de u_6 sont $u_{\ldots}$ et $u_{\ldots}$. »
— « Si n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 1, les deux fils de u_n sont $u_{\ldots}$ et $u_{\ldots}$. »

Suite de Stern

La **suite de Stern** est la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ dont les termes sont les numérateurs des fractions lues de gauche à droite, ligne par ligne en descendant l'arbre de Calkin-Wilf.

On obtient ainsi :

$$v_1 = 1, \quad v_2 = 1, \quad v_3 = 2, \quad v_4 = 1, \quad v_5 = 3, \quad v_6 = 2, \quad v_7 = 3.$$

Q9 : Donner les valeurs numériques de v_8 à v_{15}.

On admet que pour tout entier naturel n non nul, le dénominateur de la n-ième fraction de la suite de Calkin-Wilf est aussi le numérateur de la $(n+1)$-ième.

Autrement dit, on admettra que pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$u_n = \frac{v_n}{v_{n+1}}.$$

Q10 : Utiliser les résultats précédents pour montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on a les égalités suivantes :

$$v_{2n} = v_n, \qquad v_{2n+1} = v_n + v_{n+1}.$$

Q11 : En déduire les valeurs numériques de v_{64} et v_{65}.