Exercices

Exercice 1

On définit trois suites $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad c_n = \frac{2^n + 2^{-n}}{2}, \qquad s_n = \frac{2^n - 2^{-n}}{2}, \qquad t_n = \frac{s_n}{c_n}.$$

1. Démontrer que ces trois suites sont croissantes.
2. Démontrer que, pour tout $(n,m) \in \mathbb{N}^2$,
$$c_{n+m} = c_n c_m + s_n s_m, \quad s_{n+m} = s_n c_m + s_m c_n, \quad t_{n+m} = \frac{t_n + t_m}{1 + t_n t_m}.$$
3. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$c_n^2 - s_n^2 = 1.$$

Exercice 2

On considère la suite (u_n) définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{2n^2+1}{n^2+5}.$$

Montrer que (u_n) est une suite strictement croissante sur $\mathbb{N}$.

Exercice 3

On considère la suite (u_n) définie par

$$u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}.$$

Montrer que (u_n) est strictement croissante.

Exercice 4

Étudier le sens de variation de la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

1. $u_n = n^2 + 4n + 3$,
2. $u_n = \dfrac{2^n}{n+1}$,
3. $u_n = \dfrac{1-n^2}{n+2}$,
4. $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n - \dfrac{1}{n+1}$.

Exercice 5 — Suite arithmético-géométrique

Soit $a \neq 1$ et b deux réels. On définit la suite arithmético-géométrique (u_n) par

$$u_0 \in \mathbb{R}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = au_n + b.$$

1. Que se passe-t-il si $b = 0$?
2. Soit x_0 l'unique solution de l'équation $ax + b = x$. Que se passe-t-il si $u_0 = x_0$?
3. Soit (v_n) la suite définie par
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = u_n - x_0.$$
Démontrer que (v_n) est géométrique de raison a et préciser v_0.
4. À partir de la forme explicite de (v_n), donner celle de (u_n).
5. Application numérique : $a = -2$, $b = 3$ et $u_0 = -1$.

Exercice 6

Soit (u_n) une suite vérifiant

$$\forall n \geq 0, \quad u_{n+1} = 2u_n + n \quad \text{et} \quad u_0 = 1.$$

1. Montrer qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que la suite (w_n) définie par
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = an + b$$
vérifie $w_{n+1} = 2w_n + n$.
2. Montrer que la suite $z_n = u_n + n + 1$ vérifie $z_{n+1} = 2z_n$.
3. En déduire l'expression de z_n puis celle de u_n.

Exercice 7

On considère l'ensemble (E) des suites (x_n) définies sur $\mathbb{N}$ et vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad x_{n+1} - x_n = 0{,}24\, x_{n-1}.$$

1. Soit $\lambda \neq 0$ et $t_n = \lambda^n$. Montrer que $(t_n) \in (E)$ si et seulement si λ est solution de
$$\lambda^2 - \lambda - 0{,}24 = 0.$$
En déduire les suites (t_n) appartenant à (E).
2. On admet que (E) est l'ensemble des suites (u_n) définies par
$$\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \alpha(1{,}2)^n + \beta(-0{,}2)^n.$$
Déterminer α et β sachant que $u_0 = 6$ et $u_1 = 6{,}6$.

Exercice 8

Soit (u_n) la suite définie pour $n \geq 1$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

1. Justifier que, pour tout k tel que $1 \leq k \leq n$, on a
$$\frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

2. En déduire que, pour tout $n \geq 1$, $u_n \geq \sqrt{n}$.

Problème — Suite homographique

On considère la suite (u_n) définie par

$$u_0 = 1, \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{3 + 2u_n}{2 + u_n}.$$

1. Calculer les quatre premiers termes de la suite.

2. Expliquer pourquoi tous les termes de (u_n) sont positifs.

3. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$u_n \geq \frac{3}{2}.$$

4. On définit (v_n) par
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \frac{u_n - \sqrt{3}}{u_n + \sqrt{3}}.$$
   (a) Montrer que (v_n) est géométrique (préciser v_0 et la raison).

   (b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

   (c) Étudier les variations de (u_n).

5. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_n < \sqrt{3}.$$