第二章

1. 给出矢量球谐函数$\mathbf{Y}_{0,0;0}(\Omega)$和$\mathbf{Y}_{1,1;1}(\Omega)$ 的具体表达式。

解：

$$\mathbf{Y}_{l,m;\lambda}(\Omega)=\sum_{\mu\mu'}(\lambda 1 l|\mu\mu' m)\mathbf{Y}_{\lambda\mu}(\Omega)e_{\mu'}$$

由CG系数的性质，只有满足$m_1+m_2=m=\mu+\mu'$, $|j_1-j_2|\le j\le j_1+j_2$的系数才不为0. 在此处，即$|\lambda-1|\le l\le\lambda+1$, CG 系数不为0.

对于$\mathbf{Y}_{0,0;0}(\Omega)$, $l=m=\lambda=0$, 不满足$|\lambda-1|\le l\le\lambda+1$, 所有CG系数为0. 所以$\mathbf{Y}_{0,0;0}(\Omega)=0$.

对于$\mathbf{Y}_{1,1;1}(\Omega)$, $l=m=1$, 所以

$$\begin{aligned}\mathbf{Y}_{1,1;1}(\Omega) &= (111|101)\mathbf{Y}_{11}(\Omega)e_0+(111|011)\mathbf{Y}_{10}(\Omega)e_1\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{Y}_{11}(\Omega)e_0+(-\frac{1}{\sqrt{2}})\mathbf{Y}_{10}(\Omega)e_1\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{i\phi})e_0-\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta e_1\\ &= -\sqrt{\frac{3}{16\pi}}\sin\theta e^{i\phi}e_0-\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\cos\theta e_1.\end{aligned}$$

2. 试证: 矢量球谐函数$\mathbf{Y}_{0,0,1}(\Omega)$的大小为$1/\sqrt{4\pi}$, 方向与径向相反，即

$$\mathbf{Y}_{0,0,1}(\Omega)=-\frac{1}{\sqrt{4\pi}}e_r.$$

证明：展开规律如上，

$$\mathbf{Y}_{0,0;1}(\Omega)=\sum_{\mu}(110|\mu-\mu 0)\mathbf{Y}_{1\mu}(\Omega)e_{-\mu}=\frac{1}{\sqrt{3}}\sum_{\mu}(-1)^{1-\mu}\mathbf{Y}_{1\mu}(\Omega)e_{-\mu}$$

又

$$\begin{aligned}e_{+1} &= -\frac{1}{\sqrt{2}}(e_x+ie_y),\\ e_{-1} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(e_x-ie_y),\\ e_0 &= e_z.\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{Y}_{0,0;1}(\Omega) &= \frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{Y}_{11}(\Omega)e_{-1}-\mathbf{Y}_{10}(\Omega)e_0+\mathbf{Y}_{1-1}(\Omega)e_1) \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{i\phi}\frac{1}{\sqrt{2}}(e_x-ie_y)-\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta e_z-\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{i\phi}\frac{1}{\sqrt{2}}(e_x+ie_y). \\
&= -\sqrt{\frac{1}{4}}(\cos\theta e_z+\sin\theta e_x+\sin\theta\sin\phi e_y). \\
&= -\sqrt{\frac{1}{4}}e_r.
\end{aligned}
$$

3. 试证：在原点附近，磁多极场$\mathbf{A}_{lm}(\mathbf{r},t;\mathrm{M})=\mathbf{A}_{lm}(\mathbf{r};\mathrm{M})e^{-i\omega t}$产生的电场远小于它产生的磁场。

证明：原点附近即$kr<<1$,$\mathbf{j}_l(\mathrm{kr})\approx\frac{(kr)^l}{(2l+1)!!}$。$\mathbf{A}_{lm}(\mathbf{r},t;\mathrm{M})$ 含有因子$(kr)^l$,而$\mathbf{A}_{lm}(\mathbf{r},t;\mathrm{E})$含有因子$(kr)^{l-1}$

当$r\to 0$时，$\mathbf{A}_{lm}(\mathbf{r};\mathrm{E})\gg\mathbf{A}_{lm}(\mathbf{r};\mathrm{M})$

又对于磁多级场，电场强度和磁感应强度分别如下：

$\mathbf{E}(\mathbf{r},t;\mathrm{M})=i\omega\mathbf{A}_{lm}(\mathbf{r};\mathrm{M})e^{-i\omega t}$

$\mathbf{B}(\mathbf{r},t;\mathrm{M})=ik\mathbf{A}_{lm}(\mathbf{r};\mathrm{E})e^{-i\omega t}$

当$r\to 0$时，有$\mathbf{B}(\mathbf{r},t;\mathrm{M})\gg\mathbf{E}(\mathbf{r},t;\mathrm{M})$

4. 如果核的初末态J^P分别为1^-和3^+, 则只可能发生哪些类型的光核跃迁反应？

解：由角动量条件(2.103)和宇称条件(2.104), 对应于初态1^-和末态3^+,可能发生的光核跃迁反应满足

$$2\le l\le 4,\quad \pi_\alpha\pi_\beta=-1,$$

其中$l=3$为电多极跃迁，$l=2,4$为磁多极跃迁。所以可能发生的反应类型为E_3, M_2, M_4.

1 p.77

1. 判断下列说法是否正确。

(1)对称能是由于质子数与中子数相等引起的。

(2)集体坐标的共厄动量是球张量。

解:(1)由不相等的质子数和中子数引起的称为对称能。

(2) 集体坐标的共厄动量π不是球张量,π^*是球张量。

2. 由方程(4.25)出发，根据半径的实数性$R^*(\theta,\phi,t)=R(\theta,\phi,t)$和球谐函数的复共厄性质$\mathbf{Y^*}_{\lambda,\mu}(\theta,\phi)=(-1)^\mu\mathbf{Y^*}_{\lambda,-\mu}(\theta,\phi)$, 证明集体坐标$\mathbf{a}_{\lambda,\mu}$的复共厄性质(4.26)。

解：由$R^*(\theta,\phi,t)=R(\theta,\phi,t)$可得，

$$\begin{aligned}R^*(\theta,\phi,t)&=R_0(1+\sum_{\lambda=0}^{\infty}\sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda}\mathbf{a}_{\lambda,\mu}\mathbf{Y^*}_{\lambda,\mu}(\theta,\phi))\\&=R_0(1+\sum_{\lambda=0}^{\infty}\sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda}\mathbf{a}_{\lambda,\mu}(-1)^\mu\mathbf{Y}_{\lambda,-\mu}(\theta,\phi))\\&=R_0(1+\sum_{\lambda=0}^{\infty}\sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda}\mathbf{a}_{\lambda,-\mu}(-1)^{-\mu}\mathbf{Y}_{\lambda,\mu}(\theta,\phi))\end{aligned}$$

又

$$R^*=R=R_0(1+\sum_{\lambda=0}^{\infty}\sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda}\mathbf{a^*}_{\lambda,\mu}\mathbf{Y}_{\lambda,\mu}(\theta,\phi))$$

所以$\mathbf{a^*}_{\lambda,\mu}=(-1)^\mu\mathbf{a}_{\lambda,-\mu}$。

3. 试根据定义直接证明，集体坐标$\mathbf{a}_{\lambda,\mu}$是球张量。

证明：因为R有旋转不变性，所以

$$
\begin{aligned}
R^{'}(\theta,\phi,t) &= R_0(1+\sum_{\lambda=0}^{\infty}\sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda}\mathbf{a}^{*'}{}_{\lambda,\mu}\mathbf{Y}^{'}{}_{\lambda,\mu}(\theta,\phi)) \\
&= R_0(1+\sum_{\lambda=0}^{\infty}\sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda}\mathbf{a}^{*'}{}_{\lambda,\mu}\sum_{\mu'}D^{\lambda}_{\mu',\mu}\mathbf{Y}_{\lambda,\mu'}(\theta,\phi)) \\
&= R_0(1+\sum_{\lambda\mu\mu'}\mathbf{a}^{*'}{}_{\lambda,\mu'}D_{\mu,\mu'}\mathbf{Y}_{\lambda,\mu}(\theta,\phi)) \\
&= R \\
&= R_0(1+\sum_{\lambda=0}^{\infty}\sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda}\mathbf{a}^{*}{}_{\lambda,\mu}\mathbf{Y}_{\lambda,\mu}(\theta,\phi))
\end{aligned}
$$

所以$\sum_{\mu'}\mathbf{a}^{*'}{}_{\lambda,\mu'}D_{\mu,\mu'}=\mathbf{a}^{*}{}_{\lambda,\mu}$，即$\sum_{\mu'}\mathbf{a}^{'}{}_{\lambda,\mu'}D^{*}{}_{\mu,\mu'}=\mathbf{a}_{\lambda,\mu}$
两边同时乘以$D_{\mu,\mu''}$后，对μ求和得，

$$
\begin{aligned}
\sum_{\mu}D_{\mu,\mu''}\mathbf{a}_{\lambda,\mu} &= \sum_{\mu\mu'}\mathbf{a}^{'}{}_{\lambda,\mu'}D_{\mu,\mu''}D^{*}{}_{\mu,\mu'} \\
&= \sum_{\mu'}\mathbf{a}^{'}{}_{\lambda,\mu'}\delta_{\mu'\mu''} \\
&= \mathbf{a}^{'}{}_{\lambda,\mu''}
\end{aligned}
$$

所以有

$$
\mathbf{a}^{'}{}_{\lambda,\mu}=\sum_{\mu'}D_{\mu',\mu}\mathbf{a}_{\lambda,\mu'}
$$

第四章

1 p.102

2. 推导不含自旋轨道耦合谐振势能级的简并度表达式(4.58)。

解：因为$N = 2(n-1) + l$; $n \geqslant 1$; $l \geqslant 0$; $-l \leqslant m \leqslant l$;

当N为偶数，$n = 1, 2, ..., \frac{N}{2} + 1$; $l = 0, 2, ..., N$; $m = 2l + 1$;

所以简并度为$(2N+1) + 2(N-2) + 1 + ... + 2*2 + 2*0 + 1 = (N+1)(\frac{N}{2}+1) = \frac{(N+1)(N+2)}{2}$;

考虑自旋后，简并度为(N+1)(N+2)。

同理，当N为奇数时，$n = 1, 2, ..., \frac{N-1}{2} + 1$; $l = 1, 3, ..., N$; $m = 2l + 1$;

所以简并度为$\frac{(N+1)(N+2)}{2}$;

考虑自旋后，为(N+1)(N+2)。

2. $K = \frac{X_k}{X_e'} \frac{MeV}{k} \Rightarrow MeV = \frac{kX_e'}{X_k} K$

因为 $k=1$，故有

$$1\,MeV = \frac{X_e'}{X_k} K = \left(\frac{X_e'}{X_k} - 273.15\right) {}^{\circ}C$$

$$\frac{X_e'}{X_k} = \frac{1.6021766208 \times 10^{-13}}{1.38064852 \times 10^{-23}} \approx 1.160452 \times 10^{10}\ {}^{\circ}C$$

3. $kg = \frac{X_c^2}{X_e'} \frac{MeV}{c^2} = \frac{X_c^2}{10^6 X_e} MeV$

$\Rightarrow m_e = 9.1094 \times 10^{-31}\ kg$

$$m_e = 9.1094 \times 10^{-31} \times \frac{(2.99792458 \times 10^8)^2\ MeV}{10^6 \times 1.6021766208 \times 10^{-19}}$$

$= 0.5109998685\ MeV$

4. $$kg = \frac{X_c^2}{X_e'}\frac{MeV}{c^2} = \frac{X_c^2}{X_e'}MeV$$

$$\Rightarrow MeV = \frac{X_e'}{X_c^2}kg$$

$$m_p = 938.272 \times \frac{1.602176208 \times 10^{-13}}{(2.99792458 \times 10^8)^2} kg$$

$$= 1.672621753 \times 10^{-27}$$

5. (1) $G = 6.67\times10^{-11}\ m^3\cdot kg^{-1}\cdot s^{-2}$

$$= 6.67\times10^{-11}\left(\frac{X_e'}{X_\hbar X_c}\right)^3\left(\frac{X_c^2}{X_e'}\right)^{-1}\left(\frac{X_e'}{X_\hbar}\frac{\hbar}{MeV}\right)^{-2}$$

$$= 6.67\times10^{-11}\frac{X_e'^2}{X_\hbar X_c^5}(MeV)^{-2}$$

$$= 6.67\times10^{-11}\frac{(1.602176\,6208\times10^{-19}\times10^6)^2}{1.054571\,68\times10^{-34}\times(2.99792458\times10^8)^5}$$

$$= 6.70450\,9609\times10^{-45}(Mve)^{-2}$$

(2)

$$\varepsilon_0 = 8.854\times10^{-12}F/m = 8.854\times10^{-12}S^4A^2kg^{-1}m^{-3}$$

其中 $S = \frac{X_e'}{X_\hbar}\frac{\hbar}{MeV}$，$A = \frac{X_\hbar}{X_e X_e'}MeV\frac{e}{\hbar}$

$$Kg = \frac{X_c^2}{X_e'} \frac{MeV}{c^2}, \quad m = \frac{X_e'}{X_\hbar X_c} \frac{\hbar c}{MeV}$$

代入上式可得

$$\varepsilon_0 = 8.854\times10^{-12} \frac{X_\hbar X_c}{X_e^2}$$

$$= 8.854\times10^{-12} \frac{1.05457168\times10^{-34}\times 2.99792458\times10^{8}}{(1.6021766208\times10^{-19})^2}$$

$$= 10.90474576$$

(3) $\mu_0 = 4\pi\times10^{-7}\, H/m = 4\pi\times10^{-7}\, m\,kg\,s^{-2}A^{-2}$

$$= 4\pi \times 10^{-7} \times \left(\frac{X_{e'}}{X_\hbar X_c}\right)\left(\frac{X_c^2}{X_{e'}}\right)\left(\frac{X_{e'}}{X_\hbar}\right)^{-4}\left(\frac{X_\hbar}{X_e X_{e'}}\right)^{-2}$$

$$\times \left(\frac{\hbar c}{\mathrm{MeV}}\right)\left(\frac{\mathrm{MeV}}{c^2}\right)\left(\frac{\hbar}{\mathrm{MeV}}\right)^{-2}\left(\mathrm{MeV}\,\frac{e}{\hbar}\right)^{-2}$$

$$= 4\pi \times 10^{-7} \left(\frac{X_c X_e^2}{X_\hbar}\right)$$

$$= 4\pi \times 10^{-7}\ \frac{2.99792458 \times 10^{8} \times \left(1.602176208 \times 10^{-19}\right)^2}{1.05457168 \times 10^{-34}}$$

$$= 0.0917012473$$

6

(1) $J/m^3 = kg \cdot m^2 s^{-2} m^{-3} = kg \cdot m^{-1} s^{-2}$

$$= \frac{X_c^2}{X_e'} \frac{MeV}{c^2} \cdot \left(\frac{X_e'}{X_\hbar X_c} \frac{\hbar c}{MeV} \right)^{-1}$$

$$\cdot \left(\frac{X_e'}{X_\hbar} \frac{\hbar}{MeV} \right)^{-2}$$

$$= \frac{X_c^3 X_\hbar^3}{X_e'^4} (MeV)^4$$

(2) $N/m^2 = kg \cdot m s^{-2} m^{-2}$

$$= kg\, m^{-1} s^{-2}$$

$$= \left(\frac{X_c^2}{X_e'} \frac{MeV}{c^2}\right)\left(\frac{X_e'}{X_\hbar X_c} \frac{\hbar c}{MeV}\right)^{-1}$$

$$\times \left(\frac{X_e'}{X_\hbar} \frac{\hbar}{MeV}\right)^{-2}$$

$$= \frac{X_c^3 X_\hbar^2}{X_e'^4} (MeV)^4$$

17 2-6:

2、 $G=\{1,-1\}$

1.封闭性: $1\times1=1\in G$ $\quad 1\times(-1)=-1\in G$ $\quad (-1)\times(-1)=1\in G$

满足封闭性

2.结合性 $[1\cdot(-1)]1=1[(-1)1]$，满足结合性.

3.存在单位元，易知 G 的单位元是 1. 满足

4.可逆性: $1\cdot1^{-1}=1^{-1}\cdot1$ $\quad (-1)(-1)^{-1}=(-1)^{-1}(-1)$

满足可逆性

综上 G 满足四个乘法规则，故 G 可以构成一个群

3、设三维实空间平移群的参数为 α_1、α_2、α_3；对应的动量表示为 p_1, p_2, p_3，则有

$$g(\alpha_i)=e^{-i\alpha_i p_i/\hbar} \quad (i=1,2,3)$$

由 $G_i=i\hbar\dfrac{\partial g(\alpha_i=0)}{\partial\alpha_i}$ 可得

$$G_1=i\hbar(-ip_1/\hbar)=p_1$$

$$G_2=i\hbar(-ip_2/\hbar)=p_2$$

$$G_3=p_3$$

即三维实空间平移群的生成元为 p_1, p_2, p_3，即动量算符.

4. 三维角动量 $J=(J_x, J_y, J_z)$

$$[J_\alpha, J_\beta] = i\hbar \sum_\gamma \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} J_\gamma \quad \alpha,\beta,\gamma \in \{x,y,z\}$$

1. 验证线性

$$[aJ_\alpha + bJ_\beta, J_\gamma] f = [(aJ_\alpha + bJ_\beta)J_\gamma - J_\gamma(aJ_\alpha + bJ_\beta)] f$$

$$= (aJ_\alpha J_\gamma + bJ_\beta J_\gamma - aJ_\gamma J_\alpha - bJ_\gamma J_\beta) f$$

$$= [a(J_\alpha J_\gamma - J_\gamma J_\alpha)] f + [b(J_\beta J_\gamma - J_\gamma J_\beta)] f$$

$$= a[J_\alpha, J_\gamma] f + b[J_\beta, J_\gamma] f$$

$$\Rightarrow [aJ_\alpha + bJ_\beta, J_\gamma] = a[J_\alpha, J_\gamma] + b[J_\beta, J_\gamma]$$

故满足线性条件.

2、验证反对称、

$$[J_\alpha, J_\beta] f = (J_\alpha J_\beta - J_\beta J_\alpha) f$$

$$[J_\beta, J_\alpha] f = (J_\beta J_\alpha - J_\alpha J_\beta) f$$

$$= -(J_\alpha J_\beta - J_\beta J_\alpha) f$$

$$= -[J_\alpha, J_\beta] f$$

故满足反对称性.

3、验证雅可比恒等式

$$\sum_\sigma (\varepsilon_{\alpha\beta\sigma}\varepsilon_{\sigma\gamma\rho} + \varepsilon_{\beta\gamma\sigma}\varepsilon_{\sigma\alpha\rho} + \varepsilon_{\gamma\alpha\sigma}\varepsilon_{\sigma\beta\rho})$$

$$= \sum_\sigma (\varepsilon_{\alpha\beta\sigma}\varepsilon_{\gamma\rho\sigma} + \varepsilon_{\beta\gamma\sigma}\varepsilon_{\alpha\rho\sigma} + \varepsilon_{\gamma\alpha\sigma}\varepsilon_{\beta\rho\sigma})$$

$$= \delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\rho} - \delta_{\alpha\rho}\delta_{\beta\gamma} + \delta_{\beta\alpha}\delta_{\gamma\rho} - \delta_{\beta\rho}\delta_{\gamma\alpha} + \delta_{\gamma\beta}\delta_{\alpha\rho} - \delta_{\gamma\rho}\delta_{\alpha\beta}$$

$= 0$ 故满足雅可比恒等式

综上 三维角动量算符构成一李代数

5. 解：使用结构常数 $C_{ij}^{k}=\varepsilon_{ijk}$，得到度规张量：

$$g_{\mu\nu}=\sum_{\tau\rho}C_{\mu\tau}^{\rho}C_{\nu\rho}^{\tau}=\sum_{\tau\rho}\varepsilon_{\mu\tau\rho}\varepsilon_{\nu\rho\tau}=-\sum_{\tau\rho}\varepsilon_{\mu\tau\rho}\varepsilon_{\nu\tau\rho}=-2\delta_{\mu\nu}$$

卡西米尔算符变为

$$\hat{C}_{SO(3)}=\sum_{\mu\nu}g_{\mu\nu}\hat{L}_{\mu}\hat{L}_{\nu}=-2\sum_{\mu\nu}\delta_{\mu\nu}\hat{L}_{\mu}\hat{L}_{\nu}=-2\hat{J}^{2}$$

算符 $\hat{J}^2$ 是角动量代数的卡西米尔算符，与所有的角动量算符 $\hat{J}_i$ 对易。

6. 考虑群元素所在的 n 维矢量空间，可以得到一个群的表示。如果 $|\phi_i\rangle\ (i=1,2,\dots,n)$ 是这一空间的一个基矢，则一个群元素对一基矢的作用可以展开为

$$g_m|\phi_j\rangle=\sum_{i=1}^{n}D_{ji}^{m}|\phi_i\rangle\ ,\quad D_{ji}^{m}=\langle\phi_i|g_m|\phi_j\rangle$$

则有

$$\begin{aligned}(D(g_1)D(g_2))_{ik}&=\sum_{j=1}^{n}D(g_1)_{ij}D(g_2)_{jk}\\&=\sum_{j=1}^{n}\langle\phi_j|g_1|\phi_i\rangle\langle\phi_k|g_2|\phi_j\rangle\\&=\langle k|g_1g_2|i\rangle=D(g_1g_2)\end{aligned}$$

故证明(2) $D(g_1)D(g_2)=D(g_1g_2)$ 成立

$$D(g_0)_{ji}=\langle\phi_i|g_0|\phi_j\rangle=\langle\phi_i|\phi_j\rangle=\delta_{ij}$$

故有：$D(g_0)=I$

故(2)证明完毕

$$D(g)D(g^{-1})=D(gg^{-1})=D(g_0)=I$$

$$\Rightarrow D(g^{-1})=D^{-1}(g)$$

故(1)也成立

1. $\exp\left(\theta_z\begin{bmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}\cos\theta_z & -\sin\theta_z & 0\\ \sin\theta_z & \cos\theta_z & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

左式展开 $= I_{3\times3} + \theta_z\begin{bmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} + \cdots\cdots$

略去二阶及以上小量后得到

左式展开 $= \begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & -\theta_z & 0\\ \theta_z & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix}1 & -\theta_z & 0\\ \theta_z & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

右式各项展开 $= \begin{bmatrix}(1-\frac{\theta_z^2}{2!}+\cdots) & -(\theta_z-\frac{\theta_z^3}{3!}+\cdots) & 0\\ (\theta_z-\frac{\theta_z^3}{3!}+\cdots) & (1-\frac{\theta_z^2}{2}+\cdots) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

同样略去二阶及以上小量有：

右式各项展开 $= \begin{bmatrix}1 & -\theta_z & 0\\ \theta_z & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

右式 = 左式

证毕

3. $e_{+1}=-\frac{1}{\sqrt{2}}(e_x+ie_y)$，$e_{-1}=\frac{1}{\sqrt{2}}(e_x-ie_y)$，$e_0=e_z$.

$$e_{+1}^{\dagger}e_{-1}=-\frac{1}{\sqrt{2}}(e_x-ie_y)\frac{1}{\sqrt{2}}(e_x-ie_y)$$

$$=-\frac{1}{2}(e_x^2-i2e_xe_y-e_y^2)=0$$

同理 $e_{-1}^{\dagger}e_{+1}=0$，$e_{\pm1}^{\dagger}e_0=0$，$e_0^{\dagger}e_{\pm1}=0$

$$e_{+1}^{\dagger}e_{+1}=-\frac{1}{\sqrt{2}}(e_x-ie_y)\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}(e_x+ie_y)\right]$$

$$=\frac{1}{2}(e_x^2+e_y^2)=1$$

同理

$e_{-1}^{\dagger}e_{-1}^{\dagger}=1$ $\quad e_0^{\dagger}e_0=1$.

综上 $e_{\mu}^{\dagger}e_{\mu'}=\delta_{\mu\mu'}=\begin{cases}1 & \mu=\mu' \\ 0 & \mu\neq\mu'\end{cases}$

$$e_0\times e_{+1}=e_z\times\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}(e_x+ie_y)\right]$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}[e_y+i(-e_x)]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}(ie_x-e_y)=-i\cdot1\cdot e_{+1}=-i\mu e_{\mu}\ (\mu=1)$$

$$e_0\times e_0=0=-i0\cdot e_{\mu}=-i\mu e_{\mu}\ (\mu=0)$$

$$e_0\times e_{-1}=e_z\times\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(e_x-ie_y)\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}(e_y+ie_x)=\frac{1}{\sqrt{2}}(ie_x+e_y)$$

$$=-i(-1)\cdot e_{-1}=-i\mu e_{\mu}\ (\mu=-1)$$

综上有 $e_0\times e_{\mu}=-i\mu e_{\mu}$. 证毕

4. 设位置矢量为 $\vec{a}=a_x\vec{e_x}+a_y\vec{e_y}+a_z\vec{e_z}$，并且有球基矢

$$e_{+1}=-\frac{1}{\sqrt{2}}(e_x+ie_y),\quad e_{-1}=\frac{1}{\sqrt{2}}(e_x-ie_y),\quad e_0=e_z$$

解出：

$$\begin{cases} e_x=\frac{1}{\sqrt{2}}(e_{-1}-e_{+1}) \\ e_y=\frac{i}{\sqrt{2}}(e_{-1}+e_{+1}) \\ e_z=e_0 \end{cases}$$

代入 $\vec{a}=a_xe_x+a_ye_y+a_ze_z$

$$=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}a_x+\frac{i}{\sqrt{2}}a_y\right)e_{+1}+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}a_x+\frac{i}{\sqrt{2}}a_y\right)e_{-1}+a_ze_0 \quad (1)$$

又因为任意矢量均可以用球基表示为

$$\vec{a}=\sum_{\mu=0,\pm1}a_\mu^*e_\mu \quad (2)$$

(1)(2)对比得到

$$a_0^*=a_z,\quad a_{+1}^*=-\frac{1}{\sqrt{2}}a_x+\frac{i}{\sqrt{2}}a_y,\quad a_{-1}^*=\frac{1}{\sqrt{2}}a_x+\frac{i}{\sqrt{2}}a_y$$

$$\Rightarrow a_0=a_z,\quad a_{+1}=-\frac{1}{\sqrt{2}}(a_x+ia_y),\quad a_{-1}=\frac{1}{\sqrt{2}}(a_x-ia_y)$$

第三次作业

1.解：$Y_{lm;\lambda}(\Omega)=\sum_{\mu\mu'}(\lambda 1 l|\mu\mu' m)\, Y_{\lambda\mu}(\Omega)\, e_{\mu'}$

由CG系数性质，只有满足 $m_1+m_2=m=\mu+\mu'$，$|j_1-j_2|\le 2h$ 系数才不为0

① $Y_{00;0}(\Omega)$，$l=m=\lambda=0$，不满足 $|\lambda-1|\le l\le\lambda+1$，故为CG系数为0，即

$$Y_{0,0;0}(\Omega)=0$$

② $Y_{1,1;1}(\Omega)$，$l=m=\lambda=1$，代入公式为

$$Y_{1,1;1}(\Omega)=\sum_{\mu\mu'}(111|\mu\mu' 1)\,Y_{1\mu}(\Omega)\,e_{\mu'}$$

$$=\sum_{\mu\mu'}(111|\mu,1-\mu,1)\,Y_{1\mu}(\Omega)\,e_{1-\mu}$$

$$=(111|101)\,Y_{11}(\Omega)e_0+(111|011)\,Y_{10}(\Omega)e_1$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\, e^{i\varphi}\right)e_0-\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta\, e_1$$

$$=-\sqrt{\frac{3}{16\pi}}\sin\theta\, e^{i\varphi}e_0-\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\cos\theta\, e_1$$

3、证明：在原点附近即 $kr \ll 1$，$j_l(kr) \approx \frac{kr^l}{(2l+1)!!}$

$A_{lm}(r,t,M)$ 含有因子 kr^l，而 $A_{lm}(r,t,E)$ 含有因子 kr^{l-1}。

故当 $r \to 0$ 时 $A_{lm}(r,E) \geq A_{lm}(r,M)$

对于磁多极场，电场强度和磁感应强度分别如下：

$$E(r,t,M) = i\omega A_{lm}(r,M)e^{-i\omega t}$$

$$B(r,t,M) = ikA_{lm}(r,M)e^{-i\omega t}$$

当 $r \to 0$ 时，有 $B(r,t,M) \gg E(r,t,M)$

证毕

4. 由角动量条件和宇称条件，对于初态1^-和末态3^+，可能发生的光核跃迁应满足：

$$|J_\alpha - J_\beta| \le l \le J_\alpha + J_\beta \Rightarrow 2 \le l \le 4$$

$$\pi_\alpha \pi_\beta = -1$$

故当 $l=3$ 时，满足 $\pi_\alpha \pi_\beta = (-1)^3 = -1$，故发生E$l$跃迁

当 $l=2$或4时，满足 $\pi_\alpha \pi_\beta = (-1)^{l+1} = (-1)^{2+1或4+1} = -1$，故发生M$l$跃迁

综上可能发生M2，E3，M4光核反应.

5、解：$|\alpha\rangle$态和$|\beta\rangle$态的能量为E_α和E_β，则在薛定谔表象中核的初末态分别是

$$|\alpha(t)\rangle=|\alpha\rangle e^{-iE_\alpha t/\hbar},\quad |\beta(t)\rangle=|\beta\rangle e^{-iE_\beta t/\hbar}$$

于是对于光子发射，光核系统的初末态分别是：

$$|i\rangle=|\alpha(t)\rangle|0\rangle\equiv|\alpha(t),0\rangle,\quad |f\rangle=|\beta(t)\rangle|k\mu\rangle\equiv|\beta(t),k\mu\rangle$$

考虑通常形式的相互作用哈密顿量

$$\hat{H}_{int}=-\int d^3r\,\hat{j}(r)\cdot\hat{A}(\vec{r},t)$$

其中的电磁场矢势$\hat{A}(r,t)$为

$$\hat{A}(r,t)=|A_0|\sum_{k\mu}\left[\hat{\beta}_{k\mu}\epsilon_\mu e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}+\hat{\beta}^+_{k\mu}\epsilon^*_\mu e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\right]$$

这时光子发射矩阵元为

$$\langle\beta(t),k\mu|\hat{H}_{int}|\alpha(t),0\rangle=-\int d^3r\sqrt{\frac{\mu_0\hbar c}{2kV}}\langle\beta(t)|\hat{j}(r)|\alpha(t)\rangle\cdot\epsilon^*_\mu e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$$

将$\langle\beta(t)|\hat{j}(\vec{r})|\alpha(t)\rangle=\langle\beta|\hat{j}(\vec{r})|\alpha\rangle e^{i(E_\beta-E_\alpha)t/\hbar}$代入上式

再应用能量守恒有

$$\langle\beta(t),k\mu|\hat{H}_{int}|\alpha(t),0\rangle=-\int d^3r\sqrt{\frac{\mu_0\hbar c}{2kV}}\langle\beta|\hat{j}(\vec{r})|\alpha\rangle\cdot\epsilon^*_\mu e^{-ikr}$$

同样光子吸收有

$$\langle\beta(t),0|\hat{H}_{int}|\alpha(t),k\mu\rangle=-\int d^3r\sqrt{\frac{\mu_0\hbar c}{2kV}}\langle\beta|\hat{j}(\vec{r})|\alpha\rangle\epsilon_\mu\cdot e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

由上两式可知

$$M_{\beta\alpha}(k\mu)=\int d^3r\langle\beta|\hat{j}(\vec{r})|\alpha\rangle e_{\mu}e^{ikz}$$

将平面波多极展开 代入有

$$M_{\beta\alpha}(k\mu)=-\mu\sqrt{2\pi}\sum_{l}\sqrt{2l+1}\,i^{l}\int d^3r\langle\beta|\hat{j}(r)|\alpha\rangle\left[A_{l\mu}(r;M)+i\mu A_{l\mu}(r;E)\right]$$

其中 E(近大近为

$$M_{\beta\alpha}(k\mu,El)=-i^{l+1}\sqrt{2\pi(2l+1)}\int d^3r\langle\beta|\hat{j}(r)|\alpha\rangle\cdot A_{l\mu}(r;E)$$

当 $kr\ll1$ 时

$$A_{lm}(r;E)\approx\sqrt{1+\frac{1}{l}}A_{lm}(r;L)=\sqrt{\frac{l+1}{l}}\frac{1}{k}\nabla\left[j_l(kr)Y_{lm}(\Omega)\right]$$

即 $M_{\beta\alpha}(k\mu,El)=-l'\frac{i^{l+1}}{k}\int d^3r\langle\beta|j(r)|\alpha\rangle\nabla\left[j_l(kr)Y_{l\mu}(\Omega)\right]$

$$=l'\frac{i^{l+1}}{k}\int d^3r\,j_l(kr)Y_{l\mu}(\Omega)\nabla\cdot\langle\beta|\hat{j}(\vec{r})|\alpha\rangle$$

其中 $l'=\sqrt{\frac{2\pi(2l+1)(l+1)}{l}}$

代入有

$$M_{\beta\alpha}(k\mu,El)=\mp\sqrt{\frac{2\pi(2l+1)(l+1)}{l}}\,i^{l}c\,d^3r\langle\beta|\hat{\rho}(r)|\alpha\rangle j_l(kr)Y_{l\mu}(\Omega)$$

由于光子发射应取"—"，即

$$M_{\beta\alpha}(k\mu,El)=-\sqrt{\frac{2\pi(2l+1)(l+1)}{l}}\,i^{l}c\,d^3r\langle\beta|\hat{\rho}(r)|\alpha\rangle j_l(kr)Y_{l\mu}(\Omega)$$

第四次作业

3.1 $$S_{12} = (V_0(\vec{r}) + V_1(\vec{r})\hat{\tau}\cdot\hat{\tau}')\left[\frac{(\vec{r}\cdot\hat{\sigma})(\vec{r}\cdot\hat{\sigma}')}{r^2} - \frac{1}{3}\hat{\sigma}\cdot\hat{\sigma}'\right]$$

在球坐标系中插入向量 $\vec{r}$ 时，

$$\vec{r} = r(\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$$

则 S_{12} 括号中分子 $(\vec{r}\cdot\hat{\sigma})(\vec{r}\cdot\hat{\sigma}')$ 的角平均值为

$$I = \frac{1}{4\pi}\int d\Omega\,(\vec{r}\cdot\hat{\sigma})(\vec{r}\cdot\hat{\sigma}')$$

$$= \frac{r^2}{4\pi}\int \sin\theta\, d\theta\, d\phi\,(\hat{\sigma}_x\sin\theta\cos\phi + \hat{\sigma}_y\sin\theta\sin\phi + \hat{\sigma}_z\cos\theta)\times$$

$$(\hat{\sigma}_x'\sin\theta\cos\phi + \hat{\sigma}_y'\sin\theta\sin\phi + \hat{\sigma}_z'\cos\theta)$$

展开乘积，混合积为0，故剩下为

$$I = \frac{r^2}{4}\int \sin\theta\, d\theta\,(\hat{\sigma}_x\hat{\sigma}_x'\sin^2\theta + \hat{\sigma}_y\hat{\sigma}_y'\sin^2\theta + 2\hat{\sigma}_z\hat{\sigma}_z'\cos^2\theta)$$

$\Rightarrow$ $I = \frac{r^2}{3}\hat{\sigma}\hat{\sigma}'$，代入 S_{12} 中得括号内为0

从而证明 S_{12} 的角取均值为0

2、已知量子数 n, l, m 都是整数且 $n \geq 1$, $l \geq 0$, $-l \leq m \leq l$

主量子数定义为 $N = 2(n-1) + l$

对于给定的 N，n 可以从 1 取到 n_{max}，由于 n, l 都非负，故这个最大值出现在 l 取最小值 l_{min} 时

$$l_{min} = \begin{cases} 0 & N\text{为偶} \\ 1 & N\text{为奇} \end{cases}$$

将 l_{min} 代入 N 中有

$$N = \begin{cases} \frac{N}{2} + 1 & N\text{为偶} \\ \frac{N-1}{2} + 1 & N\text{为奇} \end{cases}$$

自旋存在向上或向下两种情况，故其简并度为

$$g = 2 \times \sum_{n=1}^{n_{max}} [2N + 4n + 5] = (N+1)(N+2)$$

3. $\langle BCS|BCS\rangle$

$$=\langle 0|\prod_{k>0}(u_k^*+v_k^* a_{-k}a_k)\prod_{k'>0}(u_{k'}+v_{k'}a_{k'}^\dagger a_{-k'}^\dagger)|0\rangle$$

$$=\langle 0|\prod_{k>0}(u_k^*+v_k^* a_{-k}a_k)(u_k+v_k a_k^\dagger a_{-k}^\dagger)|0\rangle$$

$$=\langle 0|\prod_{k>0}(u_k^*u_k+u_k^*v_k a_k^\dagger a_{-k}^\dagger+v_k^*u_k a_{-k}a_k+v_k^*v_k a_{-k}a_k a_k^\dagger a_{-k}^\dagger)|0\rangle$$

括号内第二、三项分别向左、右作用后明显得0，第四项结果为

$$a_{-k}a_k a_k^\dagger a_{-k}^\dagger|0\rangle = a_{-k}(1-a_k^\dagger a_k)a_{-k}^\dagger|0\rangle = 0$$

这样我们就得到

$$\langle BCS|BCS\rangle=\prod_{k>0}(|u_k|^2+|v_k|^2)$$

让BCS态归一化，则要求

$$|u_k|^2+|v_k|^2=1$$

$$\bar{N}\equiv\frac{\langle BCS|\sum_k a_k^\dagger a_k|BCS\rangle}{\langle BCS|BCS\rangle}=\frac{\langle BCS|\sum_{k>0}(a_k^\dagger a_k+a_{-k}^\dagger a_{-k})|BCS\rangle}{\langle BCS|BCS\rangle}$$

计算 $a_k[\prod_{k'}(u_{k'}+v_{k'}a_{k'}^\dagger a_{-k'}^\dagger)]|0\rangle$

$$=[\prod_{k'\neq k}(u_{k'}+v_{k'}a_{k'}^\dagger a_{-k'}^\dagger)](u_k a_k+v_k a_k a_k^\dagger a_{-k}^\dagger|0\rangle$$

$$=\left[\prod_{k'\neq k}(u_{k'}+v_{k'}a_{k'}^{\dagger}a_{-k'}^{\dagger})\right]v_k a_k^{\dagger}|0\rangle.$$

进一步有

$$\langle 0|\left[\prod_{k'>0}(u_{k'}^{*}+v_{k'}^{*}a_{-k'}a_{k'})\right]a_k^{\dagger}a_k\left[\prod_{k>0}(u_k+v_k a_k^{\dagger}a_{-k}^{\dagger})\right]|0\rangle$$

$$=|v_k|^2\langle 0|\left[\prod_{k'\neq k}(u_{k'}^{*}+v_{k'}^{*}a_{-k'}a_{k'})(u_{k'}+v_{k'}a_{k'}^{\dagger}a_{-k'}^{\dagger})\right]|0\rangle$$

$$=\frac{|v_k|^2}{|v_k|^2+|u_k|^2}\prod_{k'>0}\left(|u_{k'}|^2+|v_{k'}|^2\right)$$

于是我们有

$$\langle BCS|a_k^{\dagger}a_k|BCS\rangle=\frac{|v_k|^2}{|v_k|^2+|u_k|^2}\prod_{k'}\left(|u_{k'}|^2+|v_{k'}|^2\right)$$

得到 $\bar{N}=2\sum_k\frac{|v_k|^2}{|v_k|^2+|u_k|^2}$

由归一化条件有：

$$\bar{N}=2\sum_{k>0}|v_k|^2$$

$$\overline{\Delta N^2}=\overline{(\hat{N}-\bar{N})^2}=\overline{\hat{N}^2-2\hat{N}\bar{N}+\bar{N}^2}=\bar{\hat{N}}^2-\bar{N}^2$$

由 $\bar{N}$ 同理 $\overline{\hat{N}^2}=\langle BCS|\sum_{k>0}(a_k^{\dagger}a_k+a_{-k}^{\dagger}a_{-k})\sum_{k'>0}(a_{k'}^{\dagger}a_{k'}+a_{-k'}^{\dagger}a_{-k'})|BCS\rangle$

$$=4\sum_{k,k'>0,k'\neq k}v_k^2v_{k'}^2+4\sum_{k>0}v_k^2$$

将$\overline{N}^2$和$\overline{\hat{N}^2}$代入$\overline{\Delta N^2}$中有

$$\overline{\Delta N^2} = 4\sum_{k>0} u_k^2 v_k^2 .$$

1. (1) 错误，对称能是由质子数与中子数不同而引起的

(2) 错误，由 $\pi_{2,\mu} = B_2(-1)^{\mu}\dot{a}_{2,-\mu}$，可知共轭动量

π_2的μ分量由$\dot{a}_2$的$-\mu$分量决定，所以π_2不是一个球张量

$$\pi^{*}_{2,\mu} = B_2 \dot{a}_{2,\mu} = (-1)^{\mu}\pi_{2,-\mu}$$

因此，$\pi^{*}_{2,\mu}$是一个球张量，则有

$$\pi^{*\prime}_{2,\mu} = \sum_{\mu'} \pi^{*}_{2,\mu'} D^{(2)}_{\mu'\mu}\theta$$

$$\pi'_{2,\mu} = \sum_{\mu'} \pi_{2,\mu'} D^{2*}_{\mu'\mu}(\theta)$$

2、证明：由(4.25)式：

$$R(\theta,\phi,t)=R_0\left[1+\sum_{\lambda=0}^{\infty}\sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda}a_{\lambda,\mu}^{*}(t)Y_{\lambda,\mu}(\theta,\phi)\right]$$

可得

$$R^{*}(\theta,\phi,t)=R_0^{*}\left[1+\sum_{\lambda=0}^{\infty}\sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda}a_{\lambda,\mu}(t)Y_{\lambda,\mu}^{*}(\theta,\phi)\right]$$

根据 $Y_{\lambda,\mu}^{*}(\theta,\phi)=(-1)^{\mu}Y_{\lambda,-\mu}(\theta,\phi)$，上式变为

$$R^{*}(\theta,\phi,t)=R_0^{*}\left[1+\sum_{\lambda=0}^{\infty}\sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda}a_{\lambda,\mu}(t)Y_{\lambda,\mu}^{*}(\theta,\phi)\right]$$

$$=R_0\left[1+\sum_{\lambda=0}^{\infty}\sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda}a_{\lambda,\mu}(t)(-1)^{\mu}Y_{\lambda,-\mu}(\theta,\phi)\right]$$

$$=R_0\left[1+\sum_{\lambda=0}^{\infty}\sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda}a_{\lambda,-\mu}(t)(-1)^{-\mu}Y_{\lambda,\mu}(\theta,\phi)\right]$$

$$=R_0\left[1+\sum_{\lambda=0}^{\infty}\sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda}a_{\lambda,-\mu}(t)(-1)^{\mu}Y_{\lambda,\mu}(\theta,\phi)\right]$$

因为 $R^{*}(\theta,\phi,t)=R(\theta,\phi,t)$，对比可得

$$a_{\lambda,\mu}^{*}(t)=(-1)^{\mu}a_{\lambda,-\mu}(t)$$

证毕.

3. 原子核(θ,ϕ)方向的表面位置矢量大小按球谐函数展开为

$$R(\theta,\phi)=R_0\left[1+\sum_{\lambda=0}^{\infty}\sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda}a_{\lambda\mu}^{*}Y_{\lambda\mu}(\theta,\phi)\right]$$

由转动不变性

$$R'(\theta',\phi')=R(\theta,\phi)，即$$

$$\sum_{\lambda\mu}a_{\lambda\mu}'^{*}Y_{\lambda\mu}'(\theta,\phi)=\sum_{\lambda\mu}a_{\lambda\mu}^{*}Y_{\lambda\mu}(\theta,\phi)$$

$$\begin{aligned}\sum_{\mu}a_{\lambda\mu}^{*}Y_{\lambda\mu}&=(-)^{\mu}a_{\lambda-\mu}Y_{\lambda\mu}\\&=(-1)^{\lambda}\sqrt{2\lambda+1}\sum_{\mu}\frac{(-1)^{\lambda-\mu}}{\sqrt{2\lambda+1}}a_{\lambda-\mu}Y_{\lambda\mu}\\&=(-1)^{\lambda}\sqrt{2\lambda+1}\sum_{\mu\mu'}(\lambda\lambda 0|\mu\mu' 0)\,a_{\lambda\mu'}Y_{\lambda\mu}\end{aligned}$$

如果一套参数$a_{\lambda\mu}$像角动量为λ的球张量变换，则得到 $a_{\lambda\mu}'=\sum_{\mu'}D^{(\lambda)}a_{\lambda,\mu'}$，即

$a_{\lambda,\mu}$为球张量

4、证明 由CG系数公式:

$$(j_1 j_2 0|m_1 -m_2 0) = (-1)^{j_1-m_1}\frac{\delta_{j_1 j_2}\delta_{m_1 m_2}}{\sqrt{2j_1+1}}$$

得

$$(\lambda\lambda 0|\mu -\mu 0) = (-1)^{\lambda-\mu}\frac{1}{\sqrt{2\lambda+1}}$$

故我们有

$$\sum_\mu |a_{\lambda,\mu}|^2 = \sum_\mu a_{\lambda,\mu} a^*_{\lambda\mu} = \sum_\mu (-1)^\mu a_{\lambda,\mu} a_{\lambda,-\mu}$$

$$= \sum_\mu [(-1)^\mu a_{\lambda,\mu} a_{\lambda,-\mu} (\lambda\lambda 0|\mu -\mu 0)](-1)^{\mu-\lambda}\sqrt{2\lambda+1}$$

$$= (-1)^\lambda\sqrt{2\lambda+1}\sum_\mu (a_{\lambda,\mu} a_{\lambda,-\mu} (\lambda\lambda 0|\mu -\mu 0)]$$

$$= (-1)^\lambda\sqrt{2\lambda+1}[a_\lambda \times a_\lambda]^0$$

取$\lambda=2$可得

$$\sum_\mu |a_{2,\mu}|^2 = (-1)^2\sqrt{5}[a_2\times a_2]^0 = \sqrt{5}[a_2\times a_2]^0$$

证毕.