Лабораторная работа № 2

Определение кратчайших путей между всеми парами вершин методом Флойда.

Пусть требуется найти кратчайшие пути между всеми парами вершин графа. Очевидным способом решения этой задачи может стать n-кратное применение алгоритма поиска кратчайших путей для каждой из n-вершин, в качестве такого алгоритма может быть применен, например, алгоритм Дейкстры.

Однако существует метод, который может сэкономить до 50% времени вычисления по сравнению с алгоритмом Дейкстры. Этот метдо был предложен Флойдом и развит Мэрчлендом. Он базируется на использовании последовательности из n-преобразований (итераций) начальной матрицы весов C. При этом на k-ой итерации матрица представляет длины кратчайших путей между каждой парой вершин с тем ограничением, что путь между x_i и x_j содержит в качестве промежуточных только вершины из множества $\{x_i, x_j, \ldots, x_n\}$.

Алгоритм Флойда для произвольной матрицы весов. Предположим, что в начальной матрице весов $c_{ii} = 0 \quad \forall i = \overline{1,n}$ и $c_{ij} = \infty$ если в графе отсутствует дуга (x_i, x_j).

Присвоение начальных значений

Шаг 1. Положить $k = 0$.

Итерация

Шаг 2. $k = k + 1$

Шаг 3. Для всех $i \neq k$, таких, что $c_{ik} \neq \infty$ и для всех $j \neq k$, таких, что $c_{kj} \neq \infty$, выполнить операцию

$$c_{ij} = \mathbf{min}[c_{ij}, (c_{ik} + c_{kj})]. \quad (*)$$

Проверка на окончание

Шаг 4. (а) Если $c_{ii} < 0$, то в графе G существует цикл отрицательного веса, содержащий вершину x_i и решения нет. Останов.

(б) Если все $c_{ii} \geq 0$ и $k = n$, то получено решение. Матрица $[c_{ii}]$ дает длины всех кратчайших путей. Останов.

(в) Если все $c_{ii} \geq 0$, но $k < n$, то вернуться к шагу 2.

Сами кратчайшие пути можно найти с помощью рекурсивной процедуры, аналогичной той, что приведена в тексте лабораторной работы № 1. Можно также воспользоваться процедурой, предложенной Ху.

В этом методе в дополнение к матрице весов C хранится и обновляется вторая $(n \times n)$-матрица $\Theta = [\theta_{ij}]$. Элемент θ_{ij} указывает вершину, непосредственно предшествующую вершине x_j в кратчайшем пути от x_i к x_j. Матрице Θ присваиваются начальные значения $\theta_{ij} = x_i$ для всех x_i и x_j. Попутно с выполнением операции (*), происходит обновление Θ:

- $\theta_{ij} = \theta_{kj}$, если $(c_{ik} + c_{kj}) < c_{ij}$ в выражении (*);
- θ_{ij} не изменяется , если $(c_{ik} + c_{kj}) \geq c_{ij}$.

В конце алгоритма кратчайшие пути получаются непосредственно из заключительной матрицы Θ. Таким образом, кратчайший путь между двумя вершинами x_i и x_j дается следующей последовательностью вершин:

$$x_i, x_\nu, \cdots, x_\gamma, x_\beta, x_\alpha, x_j,$$

где $x_\alpha = \theta_{ij}, x_\beta = \theta_{i\alpha}, x_\gamma = \theta_{i\beta}$ и т.д. до $x_i = \theta_{i\gamma}$.

Задание

1. Ознакомиться с алгоритмом Флойда.
2. Разработать программу, которая позволяет решить задачу отыскания кратчайшего пути между всеми парами вершин ориентированного графа с использованием алгоритмов Дейкстры и Флойда.

Требования к программе те же, что и в предыдущей лабораторной работе. В результате работы программа выдает список, каждый элемент которого содержит пару вершин, кратчайший маршрут между ними и длину этого маршрута.

3. Для сравнения получить список кратчайших путей между всеми вершинами n-кратным примениеми алгоритма Дейкстры. Время вычисления в случае применения методов Дейкстры и Флойда должно быть зафиксировано и выдано по запросу пользователя.