ÔN THI CUỐI KỲ ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH HỆ CHÍNH QUI

CHƯƠNG 4:

Câu 1. *Cho* $\alpha = (u, v, w, t) \in \mathbf{R}^4$.

a) *Tìm một tập hợp hữu hạn* $S \subset \mathbf{R}^4$ *sao cho* $<S> = W$ *trong đó*

$W = \{ (b - 2a - 3c + 2d, a + 4b + 6c - d, 3a + 6c - 3d, d - a - 3b - 5c) / a, b, c, d \in \mathbf{R} \}$.

b) *Khi nào* $\alpha \in W = <S>$ và *lúc đó hãy biểu diễn* α *thành một tổ hợp tuyến tính theo* S.

a) $W = \{\gamma = a(-2, 1, 3, -1) + b(1, 4, 0, -3) + c(-3, 6, 6, -5) + d(2, -1, -3, 1) \mid a, b, c, d \in \mathbf{R}\}$

$= <S>$ với

$S = \{ X = (-2, 1, 3, -1), Y = (1, 4, 0, -3), Z = (-3, 6, 6, -5), T = (2, -1, -3, 1) \} \subset \mathbf{R}^4$.

b) Ta có $\alpha \in W = <S> \Leftrightarrow \alpha$ là một tổ hợp tuyến tính của S

$\Leftrightarrow$ Phương trình $c_1X + c_2Y + c_3Z + c_4T = \alpha$ (ẩn số $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbf{R}$) có nghiệm trên $\mathbf{R}$.

Xét phương trình $c_1X + c_2Y + c_3Z + c_4T = \alpha$

$\Leftrightarrow c_1(-2, 1, 3, -1) + c_2(1, 4, 0, -3) + c_3(-3, 6, 6, -5) + c_4(2, -1, -3, 1) = (u, v, w, t)$.

$$\Leftrightarrow \begin{array}{c} \begin{matrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 1 & -3 & 2 & u \\ 1 & 4 & 6 & -1 & v \\ 3 & 0 & 6 & -3 & w \\ -1 & -3 & -5 & 1 & t \end{array}\right) \end{array} \to \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc|c} 1^* & 1 & 3 & -1 & u+w \\ 0 & 1 & 1 & 0 & v+t \\ 0 & -3 & -3 & 0 & -3u-2w \\ 0 & -2 & -2 & 0 & u+w+t \end{array}\right) \\ E_1 \end{array} \to \begin{array}{c} \begin{matrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1^* & 0 & 2 & -1 & u-v+w-t \\ 0 & 1^* & 1 & 0 & v+t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3u+3v-2w+3t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u+2v+w+3t \end{array}\right) \\ E_1 \; E_2 \end{array}$$

Vậy $\alpha = (u, v, w, t) \in W = <S> \Leftrightarrow$ Hệ trên có nghiệm trên $\mathbf{R}$

$\Leftrightarrow (-3u + 3v - 2w + 3t = 0 = u + 2v + w + 3t)$ (*).

Lúc đó do hệ có vô số nghiệm nên có vô số cách biểu diễn $\alpha = c_1X + c_2Y + c_3Z + c_4T$

với $c_3 = p, c_4 = q$ ($p, q \in \mathbf{R}$), $c_1 = q - 2p + u - v + w - t$ và $c_2 = -p + v + t$ (□).

Suy ra $\alpha = (u, v, w, t) \notin W = <S> \Leftrightarrow$ Hệ trên vô nghiệm trên $\mathbf{R}$

$\Leftrightarrow (-3u + 3v - 2w + 3t \neq 0$ hay $u + 2v + w + 3t \neq 0)$ (**).

Câu 2. *Xét tính độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính của các tập hợp dưới đây:*

a) $S = \{ X = (3, 1, -1), Y = (-1, -5, 7), Z = (1, -2, 3), T = (9, 0, 4) \} \subset \mathbf{R}^3$.

b) D = { X = (– 4, 2, 14, – 6), Y = (6, – 3, – 21, 9) } $\subset \mathbf{R}^4$.

c) E = { X = (2, –1, 0, 9), Y = (– 5, 7, 3, – 4) } $\subset \mathbf{R}^4$.

d) F = { X = (– 1, – 1, – 7, 2), Y = (5, – 1, 1, 18), Z = (– 5, 2, 8, – 16) } $\subset \mathbf{R}^4$.

e) G = { X = (1, – 2, 3, – 4), Y = (3, 3, – 5, 1), Z = (– 5, – 8, 13, – 6) } $\subset \mathbf{R}^4$.

f) H = { X = (1, 2, 3m + 1), Y = (3, 1, m – 3), Z = (m + 5, 2, – 4) } $\subset \mathbf{R}^3$ (*tham số thực* m).

a), b), c) : S phụ thuộc tuyến tính vì | S | = 4 > dim$\mathbf{R}^3$ = 3. D phụ thuộc tuyến tính vì X tỉ lệ với Y [Y = (– 3/2)X]. E độc lập tuyến tính vì X không tỉ lệ với Y.

d) Trong F, lập ma trận

$$A = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -7 & 2 \\ 5 & -1 & 1 & 18 \\ -5 & 2 & 8 & -16 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1^* & -1 & -7 & 2 \\ 0 & 1 & 9 & 2 \\ 0 & 7 & 43 & -26 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1^* & -1 & -7 & 2 \\ 0 & 1^* & 9 & 2 \\ 0 & 0 & -20^* & -40 \end{pmatrix} = S_A.$$

$$\qquad\qquad\qquad F_1 \qquad\qquad\qquad\qquad F_1 \quad F_2 \quad F_3$$

Ta có r(A) = 3 = | F | nên F độc lập tuyến tính.

e) Trong G, lập ma trận

$$B = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 3 & 3 & -5 & 1 \\ -5 & -8 & 13 & -6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1^* & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 9 & -14 & 13 \\ 0 & -18 & 28 & -26 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1^* & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 9^* & -14 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = S_B.$$

$$\qquad\qquad\qquad F_1 \qquad\qquad\qquad\qquad F_1 \quad F_2$$

Ta có r(B) = 2 < | G | = 3 nên G phụ thuộc tuyến tính.

f) Trong H, tính $|C| = \begin{vmatrix} X \\ Y \\ Z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3m+1 \\ 3 & 1 & m-3 \\ m+5 & 2 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & 0 & m+7 \\ 3 & 1^* & m-3 \\ m-1 & 0 & 2-2m \end{vmatrix} = (m-1)\begin{vmatrix} -5 & m+7 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} =$

= (m – 1)(3 – m). Khi đó H độc lập tuyến tính $\Leftrightarrow$ | C | ≠ 0 $\Leftrightarrow$ 1 ≠ m ≠ 3.
H phụ thuộc tuyến tính $\Leftrightarrow$ | C | = 0 $\Leftrightarrow$ (m = 1 hoặc m = 3).

<u>Câu 3.</u> *Tập hợp nào dưới đây là cơ sở của* $\mathbf{R}^3$ *? Tại sao ?*

a) S = { X = (– 3, 2, 7), Y = (8, – 2, 3) }.

b) C = { X = (– 1, – 1, – 7), Y = (5, – 1, 1), Z = (– 5, 2, 8), T = (4, 0, – 3) }.

c) H = { X = (1, 2, 3m + 1), Y = (3, 1, m – 3), Z = (m + 5, 2, – 4) } $\subset \mathbf{R}^3$ (*tham số thực* m).

a), b) : S và C không phải là cơ sở của $\mathbf{R}^3$ vì $|S| = 2 \neq \dim\mathbf{R}^3 = 3 \neq |C| = 4$.

c) Trong H, tính $|C| = \begin{vmatrix} X \\ Y \\ Z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3m+1 \\ 3 & 1 & m-3 \\ m+5 & 2 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & 0 & m+7 \\ 3 & 1^* & m-3 \\ m-1 & 0 & 2-2m \end{vmatrix} = (m-1)\begin{vmatrix} -5 & m+7 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$

$= (m-1)(3-m)$. Khi đó H là một cơ sở của $\mathbf{R}^3 \Leftrightarrow |C| \neq 0 \Leftrightarrow 1 \neq m \neq 3$.

H không phải là một cơ sở của $\mathbf{R}^3 \Leftrightarrow |C| = 0 \Leftrightarrow$ ($m = 1$ hoặc $m = 3$).

Câu 4.

a) *Tìm một cơ sở* B *cho không gian* $W = \langle S \rangle \leq V = \mathbf{R}^4$ *và chỉ ra* dimW *nếu*

$S = \{ X = (-1, -2, 4, 0), Y = (2, 3, 3, -1), Z = (1, -4, 2, -3), T = (-1, 9, 3, 5) \} \subset \mathbf{R}^4$.

b) *Cho* $\alpha = (u, v, w, t) \in \mathbf{R}^4$. *Khi nào* $\alpha \in W$ và lúc đó tìm tọa độ $[\alpha]_B$?

a) Đặt ma trận $A = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 2 & -3 \\ -1 & 9 & 3 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1^* & -2 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 11 & -1 \\ 0 & 5 & 5 & 2 \\ 0 & 11 & -1 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1^* & -2 & 4 & 0 \\ 0 & -1^* & 11 & -1 \\ 0 & 0 & 60 & -3 \\ 0 & 0 & 120 & -6 \end{pmatrix}$

$$\rightarrow S_A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} -1^* & -2 & 4 & 0 \\ 0 & -1^* & 11 & -1 \\ 0 & 0 & 20^* & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} F_1 & F_2 & F_3 & \end{matrix} \end{array} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ O \end{pmatrix}$$

. Do đó W có một cơ sở là

$B = \{\gamma_1 = (-1, -2, 4, 0), \gamma_2 = (0, -1, 11, -1), \gamma_3 = (0, 0, 20, -1)\}$ và $\dim W = |B| = 3 = r(A)$.

b) Ta có $\alpha \in W = \langle S \rangle = \langle B \rangle \Leftrightarrow \alpha$ là một tổ hợp tuyến tính của B

$\Leftrightarrow$ Phương trình $c_1\gamma_1 + c_2\gamma_2 + c_3\gamma_3 = \alpha$ (ẩn số $c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{R}$) có nghiệm trên $\mathbf{R}$.

Xét phương trình $c_1\gamma_1 + c_2\gamma_2 + c_3\gamma_3 = \alpha$

$\Leftrightarrow c_1(-1, -2, 4, 0) + c_2(0, -1, 11, -1) + c_3(0, 0, 20, -1) = (u, v, w, t)$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{c} \begin{matrix} c_1 & c_2 & c_3 & \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & u \\ -2 & -1 & 0 & v \\ 4 & 11 & 20 & w \\ 0 & -1 & -1 & t \end{array}\right) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & 0 & 0 & -u \\ 0 & -1 & 0 & v-2u \\ 0 & 9 & 20 & 2v+w \\ 0 & -1 & -1 & t \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & 0 & 0 & -u \\ 0 & 1^* & 0 & 2u-v \\ 0 & 0 & 11 & 2v+w+9t \\ 0 & 0 & -1 & 2u-v+t \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} c_1 & c_2 & c_3 \end{array} \\ \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & 0 & 0 & -u \\ 0 & 1^* & 0 & 2u-v \\ 0 & 0 & 1^* & v-2u-t \\ 0 & 0 & 0 & 22u-9v+w+20t \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccc} E_1 & E_2 & E_3 \end{array} \end{array}$$

. Vậy $\alpha = (u, v, w, t) \in W = < B > \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ Hệ trên có nghiệm (duy nhất) trên $\mathbf{R}$ $\Leftrightarrow$ $22u - 9v + w + 20t = 0$ (*).

Lúc đó ta có tọa độ của α theo cơ sở B là $[\alpha]_B = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u \\ 2u-v \\ v-2u-t \end{pmatrix}$ (□).

Ta có $\alpha = (u, v, w, t) \notin W \Leftrightarrow$ Hệ trên vô nghiệm trên $\mathbf{R}$ $\Leftrightarrow$ $22u - 9v + w + 20t \neq 0$ (**).

Câu 5. *Tìm một cơ sở* B *cho không gian* $W = \{ X \in \mathbf{R}^5 \,/\, AX = \mathbf{O} \}$ (W *là không gian nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất* $AX = \mathbf{O}$) *và chỉ ra* dimW *nếu*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & -1 & 7 \\ 2 & 6 & 1 & 3 & -1 \\ -3 & -9 & 2 & -8 & 12 \\ 3 & 9 & -1 & 7 & -9 \end{pmatrix} \in M_{4\times 5}(\mathbf{R}).$$

Trước ta giải hệ $AX = \mathbf{O}$ với $X = (x, y, z, t, u) \in \mathbf{R}^5$ (để mô tả cụ thể không gian W).

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x & y & z & t & u \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 3 & -1 & 7 & 0 \\ 2 & 6 & 1 & 3 & -1 & 0 \\ -3 & -9 & 2 & -8 & 12 & 0 \\ 3 & 9 & -1 & 7 & -9 & 0 \end{array}\right) \end{array} \to \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1^* & 3 & 3 & -1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 5 & -15 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & 10 & -30 & 0 \end{array}\right) \\ E_1 \end{array} \to \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x & y & z & t & u \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} 1^* & 3 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1^* & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \\ E_1 \quad E_2 \end{array}.$$

Hệ có vô số nghiệm với 3 ẩn tự do $y, t, u \in \mathbf{R}$, $x = -3y - 2t + 2u$, $z = t - 3u$. Như vậy

$W = \{ X = (-3y - 2t + 2u, y, t - 3u, t, u) \mid z, t, u \in \mathbf{R} \}$

$= \{ X = y(-3, 1, 0, 0, 0) + t(-2, 0, 1, 1, 0) + u(2, 0, -3, 0, 1) \mid y, t, u \in \mathbf{R} \}$, nghĩa là

$W = < D >$ với $D = \{ \delta_1 = (-3, 1, 0, 0, 0), \delta_2 = (-2, 0, 1, 1, 0), \delta_3 = (2, 0, -3, 0, 1) \} \subset \mathbf{R}^5$.

D độc lập tuyến tính nên D là một cơ sở của W và $\dim W = |D| = 3$ = số ẩn tự do của hệ.

Câu 6. *Trong* $\mathbf{R}^4$, *cho các tập hợp* $S = \{ X = (1, 2, 0, 1), Y = (2, 5, -1, 3), Z = (3, 1, 5, -2) \}$ *và* $T = \{ E = (2, 3, 1, 1), F = (3, 3, -2, 4) \}$. *Đặt* $V = < S > \leq \mathbf{R}^4$ *và* $W = < T > \leq \mathbf{R}^4$.

Tìm một cơ sở cho các không gian V, W *và* V + W. *Từ đó tính* $\dim(V \cap W)$.

Lập ma trận $A = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 5 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1^* & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1^* & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1^* & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = S_A = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ O \end{pmatrix}.$

$F_1 \qquad\qquad F_1\ F_2$

Ta thấy V có một cơ sở là $C = \{ \gamma_1 = (1, 2, 0, 1), \gamma_2 = (0, 1, -1, 1) \}$ và $\dim V = |C| = 2$.
$W = \langle T \rangle$ và $T = \{ E, F \}$ độc lập tuyến tính (E và E có các thành phần không tỉ lệ với nhau) nên T là một cơ sở của W và $\dim W = |T| = 2$.
$V + W = \langle C \cup T \rangle$ với $C \cup T = \{ \gamma_1, \gamma_2, E, F \}$.

Lập ma trận $B = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ E \\ F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & -2 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1^* & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1^* & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1^* & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -5^* & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = S_B = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ O \end{pmatrix}.$

$F_1 \qquad\qquad F_1\ F_2\ F_3$

Suy ra $V + W$ có một cơ sở là $D = \{ \gamma_1 = (1, 2, 0, 1), \gamma_2 = (0, 1, -1, 1), \gamma_3 = (0, 0, -5, 4) \}$.

Suy ra $\dim(V \cap W) = \dim V + \dim W - \dim(V + W) = 2 + 2 - |D| = 4 - 3 = 1$.

Câu 7. *Cho* $S = \{ X = (-2, 1, -7, 3), Y = (6, 0, 25, -10), Z = (-4, -13, -34, 13) \} \subset V = \mathbf{R}^4$ *và* $T = \{ E = (1, 2, -5, -2, 3), F = (4, 8, -16, -7, 6) \} \subset W = \mathbf{R}^5$. *Giải thích* S *và* T *độc lập tuyến tính và bổ sung thêm các vector vào* S *và* T *để được một cơ sở cho* V *và* W.

Lập $A = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -7 & 3 \\ 6 & 0 & 25 & -10 \\ -4 & -13 & -34 & 13 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2^* & 1 & -7 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & -1 \\ 0 & -15 & -20 & 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2^* & 1 & -7 & 3 \\ 0 & 3^* & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2^* \end{pmatrix} = S_A.$

$F_1 \qquad\qquad F_1\ F_2\ F_3$

Ta thấy $r(A) = 3 = |S|$ nên S độc lập tuyến tính. Do cột 3 của A không bán chuẩn hóa được nên ta bổ sung thêm vector $\varepsilon_3 = (0, 0, 1, 0)$ từ $\mathbf{R}^4$ vào S để có một cơ sở của $\mathbf{R}^4$ là $S' = \{ X, Y, Z, \varepsilon_3 \}$.
Ta có T độc lập tuyến tính vì E và F có các thành phần không tỉ lệ với nhau.

Lập ma trận $B = \begin{pmatrix} E \\ F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & -2 & 3 \\ 4 & 8 & -16 & -7 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1^* & 2 & -5 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 4^* & 1 & -6 \end{pmatrix} = S_B.$

$F_1 \qquad F_2$

Do các cột $2, 4$ và 5 của B không bán chuẩn hóa được nên ta bổ sung thêm các vector $\varepsilon'_2 = (0, 1, 0, 0, 0)$, $\varepsilon'_4 = (0, 0, 0, 1, 0)$ và $\varepsilon'_5 = (0, 0, 0, 0, 1)$ từ $\mathbf{R}^5$ vào S để có một cơ sở của $\mathbf{R}^5$ là $T' = \{ E, F, \varepsilon'_2, \varepsilon'_4, \varepsilon'_5 \}$.

Câu 8. $\mathbf{R^3}$ *có các cơ sở* $S = \{ X_1 = (-1, 1, 2), X_2 = (2, -1, 2), X_3 = (1, 0, 3) \}$,

$T = \{ Y_1 = (2, 5, -2), Y_2 = (2, 1, -3), Y_3 = (1, -2, -2) \}$ *và*

$T' = \{ Y_1' = (1, 2, 3m + 1), Y_2' = (3, 1, m - 3), Y_3' = (m + 5, 2, -4) \}$ $(1 \neq m \neq 3)$.

a) *Viết ma trận đổi cơ sở* $P = (S \to T)$ và $P' = (S \to T')$.

b) *Cho* $[X]_S = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $Y = (4, 1, -2)$ *và* $[Z]_T = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. *Tìm* X *và tính* $[Y]_S$ và $[Z]_S$.

c) *Cho* $Q = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$. *Xác định các cơ sở* $U = \{ G_1, G_2, G_3 \}$ *và* $V = \{ H_1, H_2, H_3 \}$ *của* $\mathbf{R^3}$ *sao cho* $(S \to U) = Q = (V \to T)$.

a) Viết $P = (S \to T)$.

Cách 1: Tìm trực tiếp $P = (S \to T) = ([Y_1]_S \; [Y_2]_S \; [Y_3]_S)$ bằng cách giải 3 hệ phương trình tuyến tính (có vế trái y hệt nhau) được ma trận hóa như sau:

$$\left(X_1^t \;\; X_2^t \;\; X_3^t \middle| \; Y_1^t \middle| \; Y_2^t \middle| \; Y_3^t \right) = \left(\begin{array}{ccc|c|c|c} -1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 5 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 3 & -2 & -3 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1^* & -2 & -1 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 7 & 3 & -1 \\ 0 & 6 & 5 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1^* & 0 & 1 & 12 & 4 & -3 \\ 0 & 1^* & 1 & 7 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -40 & -17 & 6 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1^* & 0 & 0 & -28 & -13 & 3 \\ 0 & 1^* & 0 & -33 & -14 & 5 \\ 0 & 0 & 1^* & 40 & 17 & -6 \end{array}\right) = (I_3 \,|\, [Y_1]_S \; [Y_2]_S \; [Y_3]_S)$$

$E_1 \; E_2$ $\qquad\qquad$ $E_1 \; E_2 \; E_3$

Vậy $P = (S \to T) = ([Y_1]_S \; [Y_2]_S \; [Y_3]_S) = \begin{pmatrix} -28 & -13 & 3 \\ -33 & -14 & 5 \\ 40 & 17 & -6 \end{pmatrix}$.

Cách 2: sử dụng cơ sở chính tắc $B_o = \{ \varepsilon_1 = (1, 0, 0), \varepsilon_2 = (0, 1, 0), \varepsilon_3 = (0, 0, 1) \}$.

Đặt $H = (B_o \to S) = (X_1^t \;\; X_2^t \;\; X_3^t) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Suy ra $H^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -4 & 1 \\ -3 & -5 & 1 \\ 4 & 6 & -1 \end{pmatrix}$.

Đặt $K = (B_o \to T) = (Y_1^t \;\; Y_2^t \;\; Y_3^t) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & -2 \\ -2 & -3 & -2 \end{pmatrix}$. Ta có $P = H^{-1}K = \begin{pmatrix} -28 & -13 & 3 \\ -33 & -14 & 5 \\ 40 & 17 & -6 \end{pmatrix}$.

Viết $P' = (S \to T')$ [dùng *Cách 2*].

Đặt $H = (B_o \to S) = (X_1^t \;\; X_2^t \;\; X_3^t) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Suy ra $H^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -4 & 1 \\ -3 & -5 & 1 \\ 4 & 6 & -1 \end{pmatrix}$.

Đặt K' = $(B_o \to T')$ = ($(Y_1')^t \ (Y_2')^t \ (Y_3')^t$) = $\begin{pmatrix} 1 & 3 & m+5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3m+1 & m-3 & -4 \end{pmatrix}$.

Ta có P = $H^{-1}K'$ = $\begin{pmatrix} -3 & -4 & 1 \\ -3 & -5 & 1 \\ 4 & 6 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & m+5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3m+1 & m-3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3m-10 & m-16 & -3m-27 \\ 3m-12 & m-17 & -3m-29 \\ 15-3m & 21-m & 4m+36 \end{pmatrix}$.

b) Ta có $X = 2X_1 - X_2 + 3X_3 = 2(-1, 1, 2) - (2, -1, 2) + 3(2, -3, -4) = (2, -6, -10)$.

Ta tính tọa độ $[\,Y\,]_S$ từ $Y = (4, 1, -2) \in \mathbf{R}^3$.

<u>*Cách 1*</u>: dùng định nghĩa của tọa độ. Đặt $[\,Y\,]_S = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ thì $Y = c_1X_1 + c_2X_2 + c_3X_3$.

Ma trận hóa phương trình vector trên, ta có $\left(X_1^t \quad X_2^t \quad X_3^t \,\middle|\, Y^t\right) =$

$$\begin{array}{ccc} c_1 & c_2 & c_3 \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & -2 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 6 & 5 & 6 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 1^* & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -24 \end{array}\right) \to \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} c_1 & c_2 & c_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & 0 & 0 & -18 \\ 0 & 1^* & 0 & -19 \\ 0 & 0 & 1^* & 24 \end{array}\right) \end{array}$$

Vậy tọa độ của Y theo cơ sở S là $[\,Y\,]_S = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 \\ -19 \\ 24 \end{pmatrix}$.

<u>*Cách 2*</u>: dùng công thức thay đổi tọa độ theo cơ sở. Ta có

$[Y]_{B_o} = Y^t = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ nên $[\,Y\,]_S = (S \to B_o)\,[Y]_{B_o} = H^{-1}Y^t = \begin{pmatrix} -3 & -4 & 1 \\ -3 & -5 & 1 \\ 4 & 6 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 \\ -19 \\ 24 \end{pmatrix}$.

Ta có tọa độ $[\,Z\,]_S = (S \to T)\,[\,Z\,]_T = P\,[\,Z\,]_T = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 87 \\ 104 \\ -126 \end{pmatrix}$.

c) Ta có $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix} = Q = (S \to U) = (\,[\,G_1\,]_S \ [\,G_2\,]_S \ [\,G_3\,]_S\,)$.

Lần lượt đồng nhất 3 cột của ma trận đầu với ma trận cuối, ta tính được :

$G_1 = X_1 + 2X_2 + 2X_3 = (-1, 1, 2) + 2(2, -1, 2) + 2(2, -3, -4) = (7, -7, -2)$

$G_2 = -2X_1 - 3X_3 = -2(-1, 1, 2) - 3(2, -3, -4) = (-4, 7, 8)$

$G_3 = 2X_1 + X_2 + 3X_3 = 2(-1, 1, 2) + (2, -1, 2) + 3(2, -3, -4) = (6, -8, -6)$.

Vậy $U = \{\, G_1 = (7, -7, -2), G_2 = (-4, 7, 8), G_3 = (6, -8, -6) \,\}$.

Ta có $Q^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & -3 \\ 6 & 1 & -4 \end{pmatrix} = (V \to T)^{-1} = (T \to V) = (\,[H_1]_T\ \ [H_2]_T\ \ [H_3]_T\,)$ nên

$H_1 = -3Y_1 + 4Y_2 + 6Y_3 = -3(2, 5, -2) + 4(2, 1, 3) + 6(1, -2, -2) = (8, -23, 6)$

$H_2 = Y_2 + Y_3 = (2, 1, 3) + (1, -2, -2) = (3, -1, 1)$

$H_3 = 2Y_1 - 3Y_2 - 4Y_3 = 2(2, 5, -2) - 3(2, 1, 3) - 4(1, -2, -2) = (-6, 15, -5)$.

Vậy $V = \{\, H_1 = (8, -23, 6), H_2 = (3, -1, 1), H_3 = (-6, 15, -5) \,\}$.

CHƯƠNG 5:

Câu 1. *Cho* $f \in L(\mathbf{R}^4, \mathbf{R}^3)$ có biểu thức

$$f(X) = (-x + 2y + 4z - 3t,\ 2x + y - 2z + 5t,\ 3x + 4y + 7t),\ \forall X = (x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4.$$

Tìm một cơ sở cho mỗi không gian $\mathrm{Im}(f)$ *và* $\mathrm{Ker}(f)$ *rồi chỉ ra số chiều của chúng.*

Đặt $A = B_o = \{\, \varepsilon_1 = (1, 0, 0, 0), \varepsilon_2 = (0, 1, 0, 0), \varepsilon_3 = (0, 0, 1, 0), \varepsilon_4 = (0, 0, 0, 1) \,\}$ là cơ sở chính tắc của $\mathbf{R}^4$ thì $< f(A) > = \mathrm{Im}(f) = f(\mathbf{R}^4)$.

Ta có $f(A) = \{\, f(\varepsilon_1) = (-1, 2, 3), f(\varepsilon_2) = (2, 1, 4), f(\varepsilon_3) = (4, -2, 0), f(\varepsilon_4) = (-3, 5, 7) \,\}$.

$$\text{Lập ma trận } M = \begin{pmatrix} f(\varepsilon_1) \\ f(\varepsilon_2) \\ f(\varepsilon_3) \\ f(\varepsilon_4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & -2 & 0 \\ -3 & 5 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1} \begin{pmatrix} -1^* & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 10 \\ 0 & 6 & 12 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1\ F_2} S_M = \begin{pmatrix} -1^* & 2 & 3 \\ 0 & 1^* & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$\mathrm{Im}(f)$ có cơ sở $C = \{\, \gamma_1 = (-1, 2, 3), \gamma_2 = (0, 1, 2) \,\}$ và $\dim_{\mathbf{R}} [\,\mathrm{Im}(f)\,] = |C| = 2 = r(M)$.

$\mathrm{Ker}(f) = \{\, X = (x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \mid f(X) = \mathbf{O} \,\}$

$= \{\, X = (x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \mid (-x + 2y + 4z - 3t, 2x + y - 2z + 5t, 3x + 4y + 7t) = \mathbf{O} \,\}$

$= \{\, X = (x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \mid -x + 2y + 4z - 3t = 2x + y - 2z + 5t = 3x + 4y + 7t = 0 \,\}$.

Ma trận hóa hệ phương trình tuyến tính trên:

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} x & y & z & t & \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 4 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 7 & 0 \end{array}\right) \end{array} \xrightarrow{E_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1^* & -2 & -4 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & -1 & 0 \\ 0 & 10 & 12 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{E_1\ E_2} \begin{array}{c} \begin{matrix} x & y & z & t & \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1^* & 0 & -8/5 & 13/5 & 0 \\ 0 & 1^* & 6/5 & -1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}.$$

Hệ có vô số nghiệm với 2 ẩn tự do : $z = 5a$, $t = 5b$ $(a, b \in \mathbf{R})$, $x = 8a - 13b$, $y = b - 6a$.

Ker(f) = { X = (8a – 13b, b – 6a, 5a, 5b) = a(8, – 6, 5, 0) + b(– 13, 1, 0, 5) | a, b $\in$ **R**}. Như vậy Ker(f) = < D > với D = { δ_1 = (8, – 6, 5, 0), δ_2 = (– 13, 1, 0, 5) } độc lập tuyến tính. Do đó Ker(f) có một cơ sở là D = { δ_1, δ_2 } và $\dim_{\mathbf{R}}$Ker(f) = | D | = 2 = số ẩn tự do của hệ phương trình f (X) = **O**. Để ý dimIm(f) + dimKer(f) = 2 + 2 = 4 = dim$\mathbf{R}^4$.

Câu 2. $\mathbf{R}^2$, $\mathbf{R}^3$ *và* $\mathbf{R}^4$ *có các cơ sở chính tắc lần lượt là* A, B *và* C. *Cho* f $\in$ L($\mathbf{R}^4$, $\mathbf{R}^3$) *có*

f (X) = (– u + 2v + 4w – 3t, 2u + v – 2w + 5t, 3u + 4v + 7t), $\forall$X = (u, v, w, t) $\in$ $\mathbf{R}^4$.

a) D *và* E *lần lượt là các cơ sở của* $\mathbf{R}^2$ *và* $\mathbf{R}^3$ *như sau:*

D = { δ_1 = (5,– 3), δ_2 = (3,– 2) } *và* E = {α_1 = (– 5, 1,– 3), α_2 = (3,– 1, 2), α_3 = (1, 0, 1)}.

Viết $[f]_{C,B}$ *và tính* $[f]_{C,E}$.

b) *Xét* g, h $\in$ L($\mathbf{R}^3$, $\mathbf{R}^2$) *có các ma trận* $[g]_{B,A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ *và* $[h]_{E,D} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Viết biểu thức của g *rồi tìm các ma trận* $[g]_{E,A}$, $[g]_{B,D}$, $[g]_{E,D}$.

Tìm các ma trận $[h]_{B,D}$, $[h]_{E,A}$, $[h]_{B,A}$ *rồi viết biểu thức của* h.

a) Ta có $S = (A \to D) = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$, $S^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$, $T = (B \to E) = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ và

$T^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. $[f]_{C,B} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 & -3 \\ 2 & 1 & -2 & 5 \\ 3 & 4 & 0 & 7 \end{pmatrix}$, $[f]_{C,E} = T^{-1}[f]_{C,B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 7 & -6 & 22 \end{pmatrix}$.

b) Ta có g(X) = (u – v + 2w, – 2u + 3v), $\forall$X = (u, v, w) $\in$ $\mathbf{R}^3$.

$[g]_{E,A} = [g]_{B,A}.T = ?$, $[g]_{B,D} = S^{-1}.[g]_{B,A} = ?$ và $[g]_{E,D} = S^{-1}.[g]_{B,A}.T = ?$.

$[h]_{B,D} = [h]_{E,D}.T^{-1} = \begin{pmatrix} -8 & 2 & 13 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, $[h]_{E,A} = S.[h]_{E,D} = \begin{pmatrix} 12 & 6 & 28 \\ -7 & -4 & -17 \end{pmatrix}$ và

$[h]_{B,A} = S.[h]_{E,D}.T^{-1} = \begin{pmatrix} -46 & 4 & 74 \\ 28 & -2 & -45 \end{pmatrix}$. Suy ra $\forall$X = (u, v, w) $\in$ $\mathbf{R}^3$,

h(X) = (– 46u + 4v + 74w, 28u – 2v – 45w).

Câu 3. D *và* E *lần lượt là các cơ sở của* $\mathbf{R}^2$ *và* $\mathbf{R}^3$ *như sau:*

D = { α_1 = (3,– 5), α_2 = (2, – 3) } *và* E = {β_1 = (– 3, 0, 2), β_2 = (4, 1, – 3), β_3 = (6, 1, – 4)}.

Cho f , g $\in$ L($\mathbf{R}^2$, $\mathbf{R}^3$) *có* $[f]_{D,E} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ *và* $[g]_{D,E} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 3 & 2 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$.

a) Tìm biểu thức cho f rồi suy ra một cơ sở cho mỗi không gian Im(f) và Ker(f).

b) Xác định tập hợp g(D) rồi tìm một cơ sở cho không gian Im(g). Tìm dimKer(g) để xác định không gian Ker(g). Tìm biểu thức cho g.

a) Gọi B và C lần lượt là cơ sở chính tắc của $\mathbf{R}^2$ và $\mathbf{R}^3$. Ta có

$P = (B \to D) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}$ và $Q = (C \to E) = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$. Suy ra $P^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$.

$[f]_{B,C} = Q[f]_{D,E}P^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & -5 \\ -13 & -18 \\ 9 & 5 \end{pmatrix}$. Từ ma trận chính tắc $[f]_{B,C}$, ta suy ra $\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2$, $f(x, y) = (-9x - 5y, -13x - 8y, 9x + 5y)$.

Từ biểu thức của f, ta tìm được một cơ sở cho mỗi không gian Im(f) và Ker(f) tương tự như cách đã làm trong **Câu 1.**

b) Ta có $[g]_{D,E} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 3 & 2 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} = ([g(\alpha_1)]_E \ [g(\alpha_2)]_E)$ nên

$g(\alpha_1) = -3\beta_1 + 3\beta_2 - 4\beta_3 = -3(-3, 0, 2) + 3(4, 1, -3) - 4(6, 1, -4) = (-3, -1, 1)$.

$g(\alpha_2) = \beta_1 + 2\beta_2 - 2\beta_3 = (-3, 0, 2) + 2(4, 1, -3) - 2(6, 1, -4) = (-7, 0, 4)$.

Vậy $g(D) = \{ g(\alpha_1) = (-3, -1, 1), g(\alpha_2) = (-7, 0, 4) \}$.

Do D là một cơ sở của $\mathbf{R}^2$, ta có $Im(g) = < g(D) >$. Tập hợp g(D) độc lập tuyến tính vì $g(\alpha_1)$ không tỉ lệ với $g(\alpha_2)$. Như vậy Im(g) có cơ sở $F = g(D) = \{ g(\alpha_1), g(\alpha_2) \}$ và $\dim Im(g) = |F| = 2$.

Ta có $\dim Ker(g) = \dim\mathbf{R}^2 - \dim Im(g) = 2 - 2 = 0$ nên $Ker(g) = \{ \mathbf{O} \}$. Ta có

$[g]_{B,C} = Q[g]_{D,E}P^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 3 & 2 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 & -15 \\ 3 & 2 \\ -19 & 10 \end{pmatrix}$. Từ ma trận chính tắc $[g]_{B,C}$, ta suy ra $\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2$, $g(x, y) = (28x - 15y, 3x + 2y, -19x + 10y)$.

Câu 4. *Cho* $f \in L(\mathbf{R}^3)$ *có* $f(X) = (x + 3y - 3z, 2x + y + z, -10x - 12z)$, $\forall X = (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$.

Tìm một cơ sở cho mỗi không gian Im(f) và Ker(f) rồi chỉ ra số chiều của chúng.

Đặt $A = B_o = \{ \varepsilon_1 = (1, 0, 0), \varepsilon_2 = (0, 1, 0), \varepsilon_3 = (0, 0, 1) \}$ là cơ sở chính tắc của $\mathbf{R}^3$ thì

$f(A) = \{f(\varepsilon_1) = (1,2,-10), f(\varepsilon_2) = (3,1,0), f(\varepsilon_3) = (-3,1,-12)\}$ và $< f(A) > = Im(f) = f(\mathbf{R}^3)$

Lập ma trận $M = \begin{pmatrix} f(\varepsilon_1) \\ f(\varepsilon_2) \\ f(\varepsilon_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -10 \\ 3 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & -12 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1} \begin{pmatrix} 1^* & 2 & -10 \\ 0 & 2 & -12 \\ 0 & 7 & -42 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1\ F_2} \begin{pmatrix} 1^* & 2 & -10 \\ 0 & 1^* & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ O \end{pmatrix}$.

Im(f) có cơ sở $C = \{\gamma_1 = (1, 2, -10), \gamma_2 = (0, 1, -6)\}$ và $\dim_{\mathbf{R}}$ [Im(f)] = | C | = 2 = r(M).
Ker(f) = $\{X = (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid f(\alpha) = (x + 3y - 3z, 2x + y + z, -10x - 12z) = \mathbf{O} = (0, 0, 0)\}$
$= \{ X = (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x + 3y - 3z = 2x + y + z = -10x - 12z = 0 \}$. Ma trận hóa

hệ phương trình tuyến tính trên: $\begin{array}{c} x\quad y\quad z \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -10 & 0 & -12 & 0 \end{array}\right) \end{array} \xrightarrow{E_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & 3 & -3 & 0 \\ 0 & -5 & 7 & 0 \\ 0 & 5 & -7 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{E_1\ E_2} \begin{array}{c} x\quad y\quad z \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & 0 & 6/5 & 0 \\ 0 & 1^* & -7/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}$.

Hệ có vô số nghiệm với ẩn tự do là $z = 5a$ ($a \in \mathbf{R}$), $x = -6a$, $y = 7a$.
Do đó Ker(f) = $\{ X = (-6a, 7a, 5a) = a(-6, 7, 5) \mid a \in \mathbf{R} \}$.
Như vậy Ker(f) = < D > với $D = \{ \delta = (-6, 7, 5) \}$ độc lập tuyến tính nên Ker(f) có

một cơ sở là $D = \{ \delta = (-6, 7, 5) \}$ và $\dim_{\mathbf{R}}$Ker(f) = | D | = 1 = số ẩn tự do của hệ

phương trình tuyến tính f (X) = **O**. Để ý dimIm(f) + dimKer(f) = 2 + 1 = 3 = dim$\mathbf{R}^3$.

Câu 5. $\mathbf{R}^3$ *có cơ sở chính tắc* B *và cơ sở* $E = \{\alpha_1 = (1, 0, 2), \alpha_2 = (2,-2, 1), \alpha_3 = (3,-3, 2)\}$.

a) *Cho* $f \in L(\mathbf{R}^3)$ *có* $f(X) = (u + 3v - 3w, 2u + v + w, -10u - 12w), \forall X = (u, v, w) \in \mathbf{R}^3$.

Viết $[f]_B$, $[f]_{E,B}$, $[f]_{B,E}$ *và* $[f]_E$.

b) *Xét* g, h $\in L(\mathbf{R}^3)$ *có* $[g]_B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *và* $[h]_E = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$. *Viết biểu thức của* g

rồi tính $[g]_{E,B}$, $[g]_{B,E}$ và $[g]_E$. *Tính* $[h]_{B,E}$, $[h]_{E,B}$ *và* $[h]_B$ *rồi viết biểu thức của* h.

Ta có $S = (B \to E) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ và $S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & -3 \\ -4 & -3 & 2 \end{pmatrix}$. Ta có $[f]_B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \\ -10 & 0 & -12 \end{pmatrix}$,

$[f]_{E,B} = [f]_B S = ?$, $[f]_{B,E} = S^{-1}.[f]_B = ?$ và $[f]_E = S^{-1}.[f]_B.S = ?$.

Từ $[g]_B$, ta có $g(X) = (u + 2v + 3w, -u + 2w, 2u + v + w), \forall X = (u, v, w) \in \mathbf{R}^3$.

$[g]_{E,B} = [g]_B.S = ?$, $[g]_{B,E} = S^{-1}.[g]_B = ?$ và $[g]_E = S^{-1}.[g]_B.S = ?$.

$[h]_{B,E} = [h]_E.S^{-1} = ?$, $[h]_{E,B} = S.[h]_E = ?$, $[h]_B = S.[h]_E.S^{-1} = ?$. Biểu thức h ?

Câu 6. $\mathbf{R}^3$ *có các cơ sở* $C = \{ \alpha_1 = (2, 2, 1), \alpha_2 = (-3,0,-2), \alpha_3 = (3, 1, 2) \}$ *và*

$D = \{ \beta_1 = (1, -2, -2), \beta_2 = (2, 1, -3), \beta_3 = (2, 5, -2) \}$.

Cho $f, g \in L(\mathbf{R}^3)$ *có* $[\,f\,]_C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *và* $[\,g\,]_{C,D} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ -4 & 3 & -2 \end{pmatrix}$.

a) *Tìm biểu thức cho* f *rồi suy ra một cơ sở cho mỗi không gian* Im(f) và Ker(f).

b) *Xác định tập hợp* g(C) *rồi tìm một cơ sở cho không gian* Im(g).

Tìm biểu thức cho g *rồi suy ra một cơ sở cho* Ker(g).

a) Gọi B là cơ sở chính tắc của $\mathbf{R}^3$. Ta có

$$S = (B \to C) = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}. \text{ Suy ra } S^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -3 & 1 & 4 \\ -4 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$[\,f\,]_B = S[\,f\,]_C S^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -3 & 1 & 4 \\ -4 & 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -62 & 9 & 90 \\ -45 & 8 & 67 \\ -36 & 5 & 52 \end{pmatrix}.$$

Từ ma trận chính tắc $[\,f\,]_B$, ta suy ra

$\forall (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$, $f(x, y, z) = (-62x + 9y + 90z, -45x + 8y + 67z, -36x + 5y + 52z)$.

Từ biểu thức của f, ta tìm được một cơ sở cho mỗi không gian Im(f) và Ker(f) tương tự như cách đã làm trong **Câu 4.**

b) Ta có $[\,g\,]_{C,D} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ -4 & 3 & -2 \end{pmatrix} = ([\,g(\alpha_1)\,]_D \;\; [\,g(\alpha_2)\,]_D \;\; [\,g(\alpha_3)\,]_D)$ nên

$g(\alpha_1) = 3\beta_1 + \beta_2 - 4\beta_3 = 3(1, -2, -2) + (2, 1, -3) - 4(2, 5, -2) = (-3, -25, -1)$

$g(\alpha_2) = -\beta_1 - 2\beta_2 + 3\beta_3 = -(1, -2, -2) - 2(2, 1, -3) + 3(2, 5, -2) = (1, 15, 2)$

$g(\alpha_3) = 2\beta_1 - 2\beta_3 = 2(1, -2, -2) - 2(2, 5, -2) = (-2, -14, 0)$.

Vậy $g(C) = \{ g(\alpha_1) = (-3, -25, -1), g(\alpha_2) = (1, 15, 2), g(\alpha_3) = (-2, -14, 0) \}$.

Do C là một cơ sở của $\mathbf{R}^3$, nên $\mathrm{Im}(g) = \langle g(C) \rangle$

Ta tìm một cơ sở cho Im(g) từ tập sinh g(C) của Im(g) :

$$\begin{pmatrix} g(\alpha_1) \\ g(\alpha_2) \\ g(\alpha_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -25 & -1 \\ 1 & 15 & 2 \\ -2 & -14 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1^* & 3 & -1 \\ 0 & 12 & 3 \\ 0 & -8 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1^* & 3 & -1 \\ 0 & 4^* & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ O \end{pmatrix}.$$

F_1 $\qquad$ $F_1 \;\; F_2$

Vậy $\mathrm{Im}(g)$ có cơ sở $E = \{ \gamma_1 = (1, 3, -1), \gamma_2 = (0, 4, 1) \}$ và $\dim \mathrm{Im}(g) = | E | = 2$.

Các ký hiệu B, $S = (B \to C)$ và S^{-1} đã giới thiệu trong phần a) ở trên.

Đặt $T = (B \to D) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 5 \\ -2 & -3 & -2 \end{pmatrix}$. Ta có

$$[g]_B = T[g]_{C, D} S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 5 \\ -2 & -3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ -4 & 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 13 & -12 \\ -34 & 103 & -88 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Từ ma trận chính tắc $[g]_B$, ta suy ra

$\forall (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$, $g(x, y, z) = (-6x + 13y - 12z, -34x + 103y - 88z, 2x + 3y - z)$.

Từ biểu thức của g, ta tìm được một cơ sở cho không gian $\mathrm{Ker}(g)$ tương tự như đã làm trong **Câu 4.**

Câu 7. $\mathbf{R}^3$ *và* $\mathbf{R}^4$ *có các cơ sở chính tắc lần lượt là* B *và* C.

a) *Tìm tọa độ* $[\alpha]_E$ *nếu* $\alpha = (u, v, w) \in \mathbf{R}^3$

và $E = \{ \alpha_1 = (2, -1, 5), \alpha_2 = (-1, 0, -1), \alpha_3 = (-4, -2, 1) \}$ *là một cơ sở của* $\mathbf{R}^3$.

b) *Cho* $\beta_1 = (-2, 3, 1), \beta_2 = (1, 0, -3)$ *và* $\beta_3 = (3, 4, 1) \in \mathbf{R}^3$.

Tìm $f \in L(\mathbf{R}^3)$ *thỏa* $f(\alpha_j) = \beta_j, \forall j = 1, 2, 3$ (*dùng* $[\alpha]_E$ *hay* $[f]_{E, B}$).

c) *Cho* $\gamma_1 = (1, -1, 0, 1), \gamma_2 = (-2, 1, 3, 0)$ *và* $\gamma_3 = (3, 0, -4, -1) \in \mathbf{R}^4$.

Tìm $g \in L(\mathbf{R}^3, \mathbf{R}^4)$ *thỏa* $g(\alpha_j) = \gamma_j, \forall j = 1, 2, 3$ (*dùng* $[\alpha]_E$ *hay* $[g]_{E,C}$).

a) Ta có $P = (B \to E) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 \\ -1 & 0 & -2 \\ 5 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ và $Q = (E \to B) = P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 2 \\ -9 & 22 & 8 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$.

Suy ra $[\alpha]_E = (E \to B)[\alpha]_B = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 2 \\ -9 & 22 & 8 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 = -2u + 5v + 2w \\ c_2 = -9u + 22v + 8w \\ c_3 = u - 3v - w \end{pmatrix}$, nghĩa là

$\alpha = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3 = (-2u + 5v + 2w)\alpha_1 + (-9u + 22v + 8w)\alpha_2 + (u - 3v - w)\alpha_3$ (*).

b) *Cách 1:* $\forall \alpha = (u, v, w) \in \mathbf{R}^3$, từ (*) ta có

$f(\alpha) = f(c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3) = c_1 f(\alpha_1) + c_2 f(\alpha_2) + c_3 f(\alpha_3)$

$= (-2u + 5v + 2w)(-2, 3, 1) + (-9u + 22v + 8w)(1, 0, -3) + (u - 3v - w)(3, 4, 1)$

$= (-2u + 3v + w, -2u + 3v + 2w, 26u - 64v - 23w)$.

Cách 2: Ta có $[f]_B = [f]_{E,B} P^{-1} = ([f(\alpha_1)]_B \;\; [f(\alpha_2)]_B \;\; [f(\alpha_3)]_B).P^{-1}$

$$= ([\beta_1]_B \;\; [\beta_2]_B \;\; [\beta_3]_B).P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 5 & 2 \\ -9 & 22 & 8 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 26 & -64 & -23 \end{pmatrix}.$$

Suy ra $f(\alpha) = (-2u + 3v + w, -2u + 3v + 2w, 26u - 64v - 23w)$, $\forall \alpha = (u, v, w) \in \mathbf{R}^3$.

c) *Cách 1*: $\forall \alpha = (u, v, w) \in \mathbf{R}^3$, từ (*) ta có

$g(\alpha) = g(c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3) = c_1 g(\alpha_1) + c_2 g(\alpha_2) + c_3 g(\alpha_3)$

$= (-2u + 5v + 2w)(1, -1, 0, 1) + (-9u + 22v + 8w)(-2, 1, 3, 0) + (u - 3v - w)(3, 0, -4, -1)$

$= (19u - 48v - 17w, -7u + 17v + 6w, -31u + 78v + 28w, -3u + 8v + 3w)$.

Cách 2: Ta có $[g]_{B,C} = [g]_{E,C} P^{-1} = ([g(\alpha_1)]_C \;\; [g(\alpha_2)]_C \;\; [g(\alpha_3)]_C).P^{-1}$

$$= ([\gamma_1]_C \;\; [\gamma_2]_C \;\; [\gamma_3]_C).P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 5 & 2 \\ -9 & 22 & 8 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & -48 & -17 \\ -7 & 17 & 6 \\ -31 & 78 & 28 \\ -3 & 8 & 3 \end{pmatrix}.$$

Suy ra $g(\alpha) = (19u - 48v - 17w, -7u + 17v + 6w, -31u + 78v + 28w, -3u + 8v + 3w)$, $\forall \alpha = (u, v, w) \in \mathbf{R}^3$.

CHƯƠNG 6:

Câu 1. *Giải thích tại sao các ma trận sau không chéo hóa được (trên* **R***)* ?

a) $A = \begin{pmatrix} 8 & 11 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$. b) $B = \begin{pmatrix} 10 & 7 \\ -7 & -4 \end{pmatrix}$. c) $M = \begin{pmatrix} 19 & -5 & -6 \\ 25 & -11 & 4 \\ 17 & -5 & -4 \end{pmatrix}$.

d) $N = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. e) $Q = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 4 & 4 & -4 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

a) $p_A(x) = |xI_2 - A| = \begin{vmatrix} x-8 & 11 \\ -2 & x+1 \end{vmatrix} = (x-8)(x+1) + 22 = x^2 - 7x + 14$ $(\Delta = 49 - 56 = -7 < 0)$.

$p_A(x)$ vô nghiệm trên **R** nên không tách được trên **R**. Do đó A không chéo hóa được.

b) $p_B(x) = |xI_2 - B| = \begin{vmatrix} x-10 & -7 \\ 7 & x+4 \end{vmatrix} = (x-10)(x+4) + 49 = x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$ nên $p_B(x)$ tách được trên **R**.

$B - 3I_2 = \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ -7 & -7 \end{pmatrix}$ và $E_3 = \{ X \in \mathbf{R}^2 \mid (B - 3I_2)X = \mathbf{O} \} = \{ X = (u, v) \in \mathbf{R}^2 \mid u + v = 0 \}$.

Hệ trên có 1 ẩn tự do là v nên $\dim E_3 = 1 < 2 =$ số bội của trị riêng 3 trong $p_B(x)$.

Do đó B không chéo hóa được.

c) $p_M(x) = | xI_3 - M | = \begin{vmatrix} x-19 & 5 & 6 \\ -25 & x+11 & -4 \\ -17 & 5 & x+4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-2 & 0 & 2-x \\ -25 & x+11 & -4 \\ -17 & 5 & x+4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-2 & 0 & 0 \\ -25 & x+11 & -29 \\ -17 & 5 & x-13 \end{vmatrix} =$

$= \begin{vmatrix} x+11 & -29 \\ 5 & x-13 \end{vmatrix} = (x + 11)(x - 13) + 145 = (x + 11)(x^2 - 2x + 2)$.

Do $p_M(x) = (x + 11)[(x - 1)^2 + 1]$ không tách được trên $\mathbf{R}$ nên M không chéo hóa được.

d) $p_N(x) = | xI_3 - N | = \begin{vmatrix} x-2 & 1 & -2 \\ -5 & x+3 & -3 \\ 1 & 0 & x+2 \end{vmatrix} = (x - 2)(x + 3)(x + 2) - 3 + 2(x + 3) + 5(x + 2)$

$= (x^2 - 4)(x + 3) + 7x + 13 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = (x + 1)^3$ nên $p_N(x)$ tách được trên $\mathbf{R}$.

$E_{-1} = \{ X \in \mathbf{R}^3 / (N + I_3)X = \mathbf{O} \}$.

$$X = (u, v, w) \in E_{-1} \Leftrightarrow \begin{array}{c} \begin{matrix} u & v & w & \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 2 & 0 \\ 5 & -2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \end{array} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{array}{c} \begin{matrix} u & v & w & \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1^* & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}.$$

Hệ trên có 1 ẩn tự do là w nên $\dim E_{-1} = 1 < 3 =$ số bội của trị riêng -1 trong $p_N(x)$.

Do đó N không chéo hóa được.

e) $p_Q(x) = | xI_3 - Q | = \begin{vmatrix} x-1 & 2 & 2 \\ -4 & x-4 & 4 \\ -1 & 1 & x+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+1 & 0 & -2x-2 \\ -4 & x-4 & 4 \\ -1 & 1 & x+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+1 & 0 & 0 \\ -4 & x-4 & -4 \\ -1 & 1 & x \end{vmatrix}$

$= (x + 1)\begin{vmatrix} x-4 & -4 \\ 1 & x \end{vmatrix} = (x + 1)(x^2 - 4x + 4) = (x + 1)(x - 2)^2$ nên $p_Q(x)$ tách được trên $\mathbf{R}$.

$E_2 = \{ X \in \mathbf{R}^3 / (Q - 2I_3)X = \mathbf{O} \}$.

$$X = (u, v, w) \in E_2 \Leftrightarrow \begin{array}{c} \begin{matrix} u & v & w & \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & -2 & 0 \\ 4 & 2 & -4 & 0 \\ 1 & -1 & -4 & 0 \end{array}\right) \end{array} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 12 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{array}{c} \begin{matrix} u & v & w & \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1^* & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}.$$

Hệ trên có 1 ẩn tự do là w nên $\dim E_2 = 1 < 2 =$ số bội của trị riêng 2 trong $p_Q(x)$.

Do đó Q không chéo hóa được.

Câu 2. *Hãy chéo hóa các ma trận sau trên* **R** (*nghĩa là tìm các ma trận đường chéo đồng dạng với chúng*) *và áp dụng để tính nhanh lũy thừa* k *của chúng* (k *là số nguyên* ≥ 2).

a) $A = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ -11 & -6 \end{pmatrix}$. b) $B = \begin{pmatrix} 7 & -6 & -10 \\ -12 & 17 & 24 \\ 12 & -15 & -22 \end{pmatrix}$. c) $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ -3 & -4 & 3 \\ -3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

a) $p_A(x) = |\,xI_2 - A\,| = \begin{vmatrix} x-9 & -4 \\ 11 & x+6 \end{vmatrix} = (x-9)(x+6) + 44 = x^2 - 3x + 10 = (x-5)(x+2)$.

$p_A(x)$ có hai nghiệm thực đơn nên A chéo hóa được.

Ta có $A - 5I_2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -11 & -11 \end{pmatrix}$ và $A + 2I_2 = \begin{pmatrix} 11 & 4 \\ -11 & -4 \end{pmatrix}$.

$E_5 = \{ X \in \mathbf{R}^2 \mid (A - 5I_2)X = \mathbf{O} \} = \{ X = (u, v) \in \mathbf{R}^2 \mid u + v = 0$ (nghĩa là $u = -v$) $\}$

$= \{ \alpha = (-v, v) = v(-1, 1) \mid v \in \mathbf{R} \}$ có cơ sở $B_1 = \{ \alpha_1 = (-1, 1) \}$.

$E_{-2} = \{ \alpha \in \mathbf{R}^2 \mid (A + 2I_2)\alpha = \mathbf{O} \} = \{ X = (u, v) \in \mathbf{R}^2 \mid 11u + 4v = 0 \ (u = -4v/11) \}$

$= \{ \alpha = (-4a, 11a) = a(-4, 11) \mid a \in \mathbf{R} \}$ có cơ sở $B_2 = \{ \alpha_2 = (-4, 11) \}$.

$\mathbf{R}^2 = E_5 \oplus E_{-2}$ có *cơ sở* $B = B_1 \cup B_2 = \{ \alpha_1 = (-1, 1), \alpha_2 = (-4, 11) \}$.

Đặt $P = (B_o \to B) = ([\alpha_1]_{B_o} \ [\alpha_2]_{B_o}) = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 11 \end{pmatrix}$ với B_o là *cơ sở chính tắc* của $\mathbf{R}^2$ thì P *khả nghịch*, $P^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -11 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ và $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. Suy ra $A = P\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}P^{-1}$.

$\forall k \geq 2$, $A^k = P\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}^k P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5^k & 0 \\ 0 & (-2)^k \end{pmatrix}P^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -5^k & -4(-2)^k \\ 5^k & 11(-2)^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -11 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 11.5^k - 4(-2)^k & 4.5^k - 4(-2)^k \\ -11.5^k + 11(-2)^k & -4.5^k + 11(-2)^k \end{pmatrix} = \frac{1}{7}[\, 5^k\begin{pmatrix} 11 & 4 \\ -11 & -4 \end{pmatrix} + (-2)^k\begin{pmatrix} -4 & -4 \\ 11 & 11 \end{pmatrix}]$.

Vậy $A^k = \frac{1}{7}[\, 5^k\begin{pmatrix} 11 & 4 \\ -11 & -4 \end{pmatrix} + (-2)^k\begin{pmatrix} -4 & -4 \\ 11 & 11 \end{pmatrix}]$, $\forall k \geq 2$ (vẫn đúng khi $k = 0$ và $k = 1$).

b) $p_B(x) = |\,xI_3 - B\,| = \begin{vmatrix} x-7 & 6 & 10 \\ 12 & x-17 & -24 \\ -12 & 15 & x+22 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-7 & 6 & 10 \\ 12 & x-17 & -24 \\ 0 & x-2 & x-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-7 & -4 & 10 \\ 12 & x+7 & -24 \\ 0 & 0 & x-2 \end{vmatrix}$

$= (x-2)\begin{vmatrix} x-7 & -4 \\ 12 & x+7 \end{vmatrix} = (x-2)[\,(x-7)(x+7) + 48\,] = (x-1)(x-2)(x+1)$.

$p_B(x)$ có ba nghiệm thực đơn nên B chéo hóa được.

$E_1 = \{ X \in \mathbf{R}^3 \,/\, (B - I_3)X = \mathbf{O} \}$.

$$X = (u, v, w) \in E_1 \Leftrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u & v & w \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -6 & -10 & 0 \\ -12 & 16 & 24 & 0 \\ 12 & -15 & -23 & 0 \end{array}\right) \end{array} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u & v & w \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & 0 & -2/3 & 0 \\ 0 & 1^* & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} :$$

Nghiệm của hệ là $w = 3a$ ($a \in \mathbf{R}$), $v = -3a$ và $u = 2a$.

$E_1 = \{ X = (2a, -3a, 3a) = a(2, -3, 3) \,/\, w \in \mathbf{R} \}$ có cơ sở $D_1 = \{ \alpha_1 = (2, -3, 3) \}$ và $\dim E_1 = | D_1 | = 1$.

$E_2 = \{ X \in \mathbf{R}^3 \,/\, (B - 2I_3)X = \mathbf{O} \}$.

$$X = (u, v, w) \in E_2 \Leftrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u & v & w \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -6 & -10 & 0 \\ -12 & 15 & 24 & 0 \\ 12 & -15 & -24 & 0 \end{array}\right) \end{array} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 4 & -5 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u & v & w \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} :$$

Nghiệm của hệ là $w \in \mathbf{R}$, $v = 0$ và $u = 2w$.

$E_2 = \{ X = (2w, 0, w) = w(2, 0, 1) \,/\, w \in \mathbf{R} \}$ có cơ sở $D_2 = \{ \alpha_2 = (2, 0, 1) \}$ và

$\dim E_2 = | D_2 | = 1$.

$E_{-1} = \{ X \in \mathbf{R}^3 \,/\, (B + I_3)X = \mathbf{O} \}$.

$$X = (u, v, w) \in E_{-1} \Leftrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u & v & w \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 8 & -6 & -10 & 0 \\ -12 & 18 & 24 & 0 \\ 12 & -15 & -21 & 0 \end{array}\right) \end{array} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -3 & -5 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -6 & -6 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u & v & w \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1^* & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} :$$

Nghiệm của hệ là $w = 2a$ ($a \in \mathbf{R}$), $v = -2a$ và $u = a$.

$E_{-1} = \{ X = (a, -2a, 2a) = a(1, -2, 2) \,/\, w \in \mathbf{R} \}$ có cơ sở $D_3 = \{ \alpha_3 = (1, -2, 2) \}$ và $\dim E_{-1} = | D_3 | = 1$.

Đặt $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3 = \{ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \}$ thì D là một cơ sở của $\mathbf{R}^3 = E_1 \oplus E_2 \oplus E_{-1}$.

Gọi $B_o = \{ \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \}$ là cơ sở chính tắc của $\mathbf{R}^3$.

Xét $P = (B_o \to B) = ([\alpha_1]_{B_o} \ [\alpha_2]_{B_o} \ [\alpha_3]_{B_o}) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ thì P khả nghịch,

$P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ và $P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Suy ra $B = P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}P^{-1}$.

$$\forall k \geq 2,\ B^k = P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^k P^{-1} = P\begin{pmatrix} 1^k & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^k \end{pmatrix}P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^k \end{pmatrix}P^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 2.2^k & (-1)^k \\ -3 & 0 & -2(-1)^k \\ 3 & 2^k & 2(-1)^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-3(-1)^k & 2.2^k-6+4(-1)^k & 2.2^k-8+6(-1)^k \\ 6(-1)^k-6 & 9-8(-1)^k & 12-12(-1)^k \\ 6-6(-1)^k & 2^k-9+8(-1)^k & 2^k-12+12(-1)^k \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & -6 & -8 \\ -6 & 9 & 12 \\ 6 & -9 & -12 \end{pmatrix} + 2^k \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + (-1)^k \begin{pmatrix} -3 & 4 & 6 \\ 6 & -8 & -12 \\ -6 & 8 & 12 \end{pmatrix}.$$ Như vậy ta có

$$B^k = \begin{pmatrix} 4 & -6 & -8 \\ -6 & 9 & 12 \\ 6 & -9 & -12 \end{pmatrix} + 2^k \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + (-1)^k \begin{pmatrix} -3 & 4 & 6 \\ 6 & -8 & -12 \\ -6 & 8 & 12 \end{pmatrix}, \forall k \geq 2$$ (vẫn đúng khi $k = 0$ và 1).

c) $p_C(x) = |xI_3 - C| = \begin{vmatrix} x-2 & -3 & 3 \\ 3 & x+4 & -3 \\ 3 & 3 & x-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-2 & 0 & 3 \\ 3 & x+1 & -3 \\ 3 & x+1 & x-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-2 & 0 & 3 \\ 3 & x+1 & -3 \\ 0 & 0 & x+1 \end{vmatrix}$

$= (x+1)\begin{vmatrix} x-2 & 0 \\ 3 & x+1 \end{vmatrix} = (x-2)(x+1)^2$, nghĩa là $p_C(x)$ tách được trên $\mathbf{R}$.

$E_2 = \{ X \in \mathbf{R}^3 \,/\, (C - 2I_3)X = \mathbf{O} \}$.

$$X = (u, v, w) \in E_2 \Leftrightarrow \begin{array}{c} \begin{matrix} u & v & w & \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & -3 & 0 \\ -3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & -3 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{array}{c} \begin{matrix} u & v & w & \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1^* & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

$E_2 = \{ X = (-w, w, w) = w(-1, 1, 1) \,/\, w \in \mathbf{R} \}$ có cơ sở $B_1 = \{ \alpha_1 = (-1, 1, 1) \}$
và $\dim E_1 = |B_1| = 1$.
$E_{-1} = \{ X \in \mathbf{R}^3 \,/\, (C + I_3)X = \mathbf{O} \}$.

$$X = (u, v, w) \in E_{-1} \Leftrightarrow \begin{array}{c} \begin{matrix} u & v & w & \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & -3 & 0 \\ -3 & -3 & 3 & 0 \\ -3 & -3 & 3 & 0 \end{array}\right) \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} \begin{matrix} u & v & w & \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \end{array}.$$

$E_{-1} = \{ X = (w - v, v, w) = v(-1, 1, 0) + w(1, 0, 1) \,/\, v, w \in \mathbf{R} \}$ có cơ sở

$B_2 = \{ \alpha_2 = (-1, 1, 0), \alpha_3 = (1, 0, 1) \}$ và $\dim E_2 = |B_2| = 2$.

Ta thấy $p_C(x) = (x-2)(x+1)^2$, $\dim E_2 = 1$ và $\dim E_{-1} = 2$ nên C chéo hóa được.

Đặt $B = B_1 \cup B_2 = \{ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \}$ thì B là một cơ sở của $\mathbf{R}^3 = E_2 \oplus E_{-1}$.

Gọi $B_o = \{ \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \}$ là cơ sở chính tắc của $\mathbf{R}^3$.

Xét $P = (B_o \to B) = ([\alpha_1]_{B_o} \; [\alpha_2]_{B_o} \; [\alpha_3]_{B_o}) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ thì P khả nghịch,

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}-1&-1&1\\1&2&-1\\1&1&0\end{pmatrix} \text{ và } P^{-1}CP=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}. \text{ Suy ra } C=P\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}P^{-1}.\ \forall k\geq 2,$$

$$C^k=P\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}^k P^{-1}=P\begin{pmatrix}2^k&0&0\\0&(-1)^k&0\\0&0&(-1)^k\end{pmatrix}P^{-1}=\begin{pmatrix}-1&-1&1\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2^k&0&0\\0&(-1)^k&0\\0&0&(-1)^k\end{pmatrix}P^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}-2^k&-(-1)^k&(-1)^k\\2^k&(-1)^k&0\\2^k&0&(-1)^k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&-1&1\\1&2&-1\\1&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^k&2^k-(-1)^k&(-1)^k-2^k\\(-1)^k-2^k&2(-1)^k-2^k&2^k-(-1)^k\\(-1)^k-2^k&(-1)^k-2^k&2^k\end{pmatrix}$$

$$=2^k\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&-1&1\\-1&-1&1\end{pmatrix}+(-1)^k\begin{pmatrix}0&-1&1\\1&2&-1\\1&1&0\end{pmatrix}.$$

Như vậy $C^k=2^k\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&-1&1\\-1&-1&1\end{pmatrix}+(-1)^k\begin{pmatrix}0&-1&1\\1&2&-1\\1&1&0\end{pmatrix}, \forall k\geq 2$ (vẫn đúng khi $k=0$ và 1).

Câu 3. *Cho $A, B\in M_n(\mathbf{R})$ và A đồng dạng với B (trên $\mathbf{R}$). Chứng minh A và B có cùng đa thức đặc trưng. Suy ra tập hợp các trị riêng thực của A và B là trùng nhau.*

Do A đồng dạng với B (trên $\mathbf{R}$) nên có P khả nghịch $\in M_n(\mathbf{R})$ thỏa $A=P^{-1}BP$.

Ta có $p_A(x)=|xI_n-A|=|xI_n-P^{-1}BP|=|x P^{-1}I_nP-P^{-1}BP|=|P^{-1}(xI_n-B)P|=$

$=|P^{-1}|.|xI_n-B|.|P|=|P^{-1}|.|P|.|xI_n-B|.=|P|^{-1}.|P|.\ p_B(x)=p_B(x).$

Do $p_A(x)=p_B(x)$ nên tập hợp các trị riêng thực của A và B là trùng nhau.
