Chương 5

SỰ CHÉO HÓA

Đại học Khoa Học Tự Nhiên Tp. Hồ Chí Minh

Nội dung

Chương 5. SỰ CHÉO HÓA

- Trị riêng và vectơ riêng
- Không gian con riêng
- Toán tử và ma trận chéo hóa được
- Một vài ứng dụng của sự chéo hóa

Giới thiệu

Bài toán 1. Cho $f \in End_{\mathbb{R}}(V)$ là một toán tử tuyến tính. Tồn tại hay không một cơ sở $\mathcal{B}$ của V sao cho $[f]_{\mathcal{B}}$ là ma trận đường chéo?

Bài toán 2. Cho $A \in M_n(\mathbb{R})$ là một ma trận vuông. Tồn tại hay không một ma trận khả nghịch P sao cho $P^{-1}AP$ là ma trận đường chéo?

Nhắc lại.

Nếu $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ là cơ sở của V thì

$$[f]_{\mathcal{B}} = ([f(u_1)]_{\mathcal{B}}\, [f(u_2)]_{\mathcal{B}} \ldots [f(u_n)]_{\mathcal{B}}).$$

Ví dụ. Cho toán tử tuyến tính $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi

$$f(x_1, x_2) = (3x_1 + 4x_2, 6x_1 + 5x_2).$$

và cơ sở $\mathcal{B} = \{u_1 = (-1, 1), u_2 = (2, 3)\}$. Tìm $[f]_{\mathcal{B}}$.

Đáp án.

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

Ví dụ. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ và $P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Tìm P^{-1} và tính $P^{-1}AP$.

Đáp án. $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} P^{-1}AP = (P^{-1}A)P &= \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -2 & -4 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

5.1. Trị riêng và vectơ riêng

Định nghĩa. Cho $f \in End_{\mathbb{R}}(V)$. Vectơ $v \in V$ được gọi là một ***vectơ riêng*** của f nếu:

1. $v \neq \mathbf{0}$;
2. tồn tại $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}$ sao cho $f(v) = \boldsymbol{\lambda} v$.

Khi đó ta nói $\boldsymbol{\lambda}$ là một ***trị riêng*** của f, và v là ***vectơ riêng ứng với trị riêng $\boldsymbol{\lambda}$***.

Nhận xét. *Nếu v là vectơ riêng ứng với trị riêng $\boldsymbol{\lambda}$ thì μv $(\mu \neq 0)$ cũng là vectơ riêng ứng với trị riêng $\boldsymbol{\lambda}$.*

Ví dụ. Cho toán tử tuyến tính $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi

$$f(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2, -x_1 + 4x_2).$$

Chứng tỏ $\boldsymbol{\lambda} = 2$ là một trị riêng của f.

$$f(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2, -x_1 + 4x_2) \text{ và } \boldsymbol{\lambda} = 2$$

Giải. Giả sử $v = (x_1, x_2)$. Xét phương trình $f(v) = \boldsymbol{\lambda} v$

$$\begin{aligned}
& f(v) = \boldsymbol{\lambda} v \\
\Leftrightarrow \quad & (x_1 + 2x_2, -x_1 + 4x_2) = 2(x_1, x_2) \\
\Leftrightarrow \quad & (-x_1 + 2x_2, -x_1 + 2x_2) = (0, 0) \\
\Leftrightarrow \quad & \begin{cases} -x_1 + 2x_2 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 = 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

Chọn $v = (2, 1)$. Ta có $f(v) = 2v$. Suy ra $\boldsymbol{\lambda} = 2$ là một trị riêng của f.

Định nghĩa. Cho $f \in End_{\mathbb{R}}(V)$ và $\mathcal{B}$ là một cơ sở của V. Ta đặt $A := [f]_{\mathcal{B}}$, khi đó ***đa thức đặc trưng*** của f được định nghĩa là

$$P_f(\lambda) := \det(A - \lambda I_n).$$

Nhận xét. *Đa thức đặc trưng của f không phụ thuộc vào cách chọn cơ sở của không gian V.*

Giải thích. Giả sử $\mathcal{B}$ và $\mathcal{B}'$ là hai cơ sở của V. Khi đó

$$[f]_{\mathcal{B}'} = (\mathcal{B} \to \mathcal{B}')^{-1}[f]_{\mathcal{B}}(\mathcal{B} \to \mathcal{B}').$$

Đặt $A := [f]_{\mathcal{B}}$, $A' := [f]_{\mathcal{B}'}$ và $P := (\mathcal{B} \to \mathcal{B}')$, ta có

$$\begin{aligned} |A' - \lambda I_n| &= |P^{-1}AP - \lambda I_n| \\ &= |P^{-1}(A - \lambda I_n)P| \\ &= |P^{-1}||A - \lambda I_n||P| \\ &= |A - \lambda I_n|. \end{aligned}$$

Ví dụ. Cho toán tử tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi

$$f(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 + x_2 + x_3, 2x_1 + 4x_2 + 2x_3, x_1 + x_2 + 3x_3).$$

Tìm đa thức đặc trưng của f.

Giải. Ma trận biểu diễn f theo cơ sở chính tắc là

$$A = [f]_{\mathcal{B}_0} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Khi đó

$$\begin{aligned} P_f(\lambda) &= |A - \lambda I_3| \\ &= \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\ &= -\lambda^3 + 10\lambda^2 - 28\lambda + 24. \end{aligned}$$

Mệnh đề. *Trị riêng của toán tử f là nghiệm của phương trình đặc trưng*
$$P_f(\boldsymbol{\lambda}) = 0.$$

Ví dụ. Cho toán tử tuyến tính $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi
$$f(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2, -x_1 + 4x_2).$$
Tìm trị riêng của f.

Giải. Đa thức đặc trưng của f là
$$P_f(\boldsymbol{\lambda}) = \boldsymbol{\lambda}^2 - 5\boldsymbol{\lambda} + 6 = (\boldsymbol{\lambda} - 2)(\boldsymbol{\lambda} - 3).$$
Như vậy toán tử f có hai trị riêng là $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$.

Ví dụ.(tự làm) Cho toán tử tuyến tính $f \in End_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ xác định bởi
$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_3, 2x_1 + 3x_2 + x_3, x_1 + x_2 + 2x_3).$$
Tìm trị riêng của f. **Đáp án.** $\lambda = 1, \lambda = 4$

5.2. Không gian riêng

Định nghĩa. Cho $f \in End_{\mathbb{R}}(V)$. Nếu $\boldsymbol{\lambda}$ là một trị riêng của f thì

$$\boldsymbol{E(\lambda) := \{v \in V|\ f(v) = \lambda v\}}$$

là một không gian con của V và ta gọi nó là ***không gian riêng*** của f *ứng với trị riêng* $\boldsymbol{\lambda}$.

Nhận xét.

$$\begin{aligned} E(\boldsymbol{\lambda}) &= \{v \in V \mid (f - \boldsymbol{\lambda}\mathrm{Id}_V)(v) = \mathbf{0}\} \\ &= \mathrm{Ker}(f - \boldsymbol{\lambda}\mathrm{Id}_V). \end{aligned}$$

Ngoài ra, nếu $f \in End_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n)$ *có ma trận biểu diễn theo cơ sở chính tắc là* A *thì* $E(\lambda)$ *chính là không gian nghiệm của hệ phương trình*

$$\boldsymbol{(A - \lambda I_n)X = 0}.$$

Ví dụ. Cho toán tử tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi

$$f(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 - 2x_2, -2x_1 + 3x_2, 5x_3).$$

Tìm các trị riêng của f và không gian riêng ứng với các trị riêng này.

Giải. Ma trận biểu diễn f theo cơ sở chính tắc là

$$A = [f]_{\mathcal{B}_0} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

- Đa thức đặc trưng

$$P_f(\boldsymbol{\lambda}) = |A - \boldsymbol{\lambda} I_3| = -(\boldsymbol{\lambda} - 5)^2(\boldsymbol{\lambda} - 1).$$

- Trị riêng

$$P_f(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 5 \text{ (bội 2)},\ \lambda = 1 \text{ (bội 1)}.$$

Vậy f có 2 trị riêng là $\lambda_1 = 5$ (bội 2), $\lambda_2 = 1$ (bội 1).

- Không gian riêng

- Với $\lambda_1 = 5$, không gian riêng $E(5)$ là không gian nghiệm của hệ

$$(A - 5I_3)X = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x_1 - 2x_2 = 0; \\ -2x_1 - 2x_2 = 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Giải hệ (1) ta tìm được nghiệm tổng quát

$$(x_1, x_2, x_3) = (-t, t, s), \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

Suy ra $E(5)$ có $\dim E(5) = 2$ với cơ sở

$$\mathcal{B}_1 = \{(-1, 1, 0); (0, 0, 1)\}.$$

- Với $\lambda_2 = 1$, không gian $E(1)$ là không gian nghiệm của hệ

$$(A - I_3)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & - & 2x_2 & & & = & 0; \\ -2x_1 & + & 2x_2 & & & = & 0; \\ & & & & 4x_3 & = & 0. \end{array} \right. \tag{2}$$

Giải hệ (2) ta tìm được nghiệm tổng quát

$$(x_1, x_2, x_3) = (t, t, 0), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Suy ra $E(1)$ có $\dim E(1) = 1$ với cơ sở $\mathcal{B}_2 = \{(1, 1, 0)\}$.

Ví dụ.(tự làm) Cho toán tử tuyến tính $f \in End_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ xác định bởi

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_3, 2x_1 + 3x_2 + x_3, x_1 + x_2 + 2x_3).$$

Tìm các trị riêng của f và không gian riêng ứng với các trị riêng này.

Nhắc lại. Cho $W_1, W_2, \dots, W_n$ là các không gian con của V. Ta nói W là *không gian tổng trực tiếp* của W_1, W_2, ..., W_n, ký hiệu

$$W = W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_n$$

nếu $W = W_1 + W_2 + \dots + W_n$ và với mọi $i \in \overline{1,n}$

$$W_i \bigcap \Big(\sum_{i \neq j = 1}^{n} W_j \Big) = \{\mathbf{0}\}.$$

Mệnh đề. *Cho $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ là các trị riêng khác nhau của toán tử tuyến tính f. Khi đó $E(\lambda_1) + \dots + E(\lambda_p)$ là một tổng trực tiếp.*

Mệnh đề. *Cho $f \in End_{\mathbb{R}}(V)$. Nếu $\boldsymbol{\lambda}$ là một trị riêng bội m của f thì* $\dim E(\boldsymbol{\lambda}) \leq m$.

Chứng minh. Giả sử $\dim E(\boldsymbol{\lambda}) > m$. Khi đó tồn tại $v_1, \dots, v_m, v_{m+1}$ là các vectơ độc lập tuyến tính của $E(\boldsymbol{\lambda})$.

Bổ túc họ các vectơ này thành một cơ sở $\mathcal{B}$ của V:

$$\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_m, v_{m+1}, w_{m+2}, \ldots, w_n).$$

Ta có

$$[f]_{\mathcal{B}} = \left(\begin{array}{ccc|c} \boldsymbol{\lambda} & & 0 & \\ & \ddots & & A \\ 0 & & \boldsymbol{\lambda} & \\ \hline & 0 & & B \end{array}\right).$$

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned} P_f(t) &= \det\left(\begin{array}{ccc|c} \boldsymbol{\lambda} - t & & 0 & \\ & \ddots & & A \\ 0 & & \boldsymbol{\lambda} - t & \\ \hline & 0 & & B - tI_{n-m-1} \end{array}\right) \\ &= (\boldsymbol{\lambda} - t)^{m+1}\det(B - tI_{n-m-1}). \end{aligned}$$

Suy ra $\boldsymbol{\lambda}$ là trị riêng bội lớn hơn hoặc bằng $m+1$ (mâu thuẫn). ∎

5.3. Toán tử và ma trận chéo hóa được
Toán tử chéo hóa được

Định nghĩa. Cho $f \in End_{\mathbb{R}}(V)$. Toán tử f được gọi là ***chéo hóa được*** nếu tồn tại một cơ sở $\mathcal{B}$ của V sao cho $[f]_{\mathcal{B}}$ là ma trận đường chéo.

Định lý. *Toán tử tuyến tính $f \in End_{\mathbb{R}}(V)$ chéo hóa được khi và chỉ khi tồn tại một cơ sở của V gồm toàn các vectơ riêng của f.*

Chứng minh. **($\Rightarrow$)** Giả sử f chéo hóa được, nghĩa là tồn tại một cơ sở $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ sao cho $[f]_{\mathcal{B}} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$. Khi đó,

$$f(v_1) = \lambda_1 v_1,\ f(v_2) = \lambda_2 v_2, \ldots, f(v_n) = \lambda_n v_n,$$

nghĩa là $v_1, v_2, \ldots, v_n$ đều là các vectơ riêng của f.

(⇐) Giả sử $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ là cơ sở gồm toàn các vectơ riêng của f. Khi đó

$$f(v_1) = \lambda_1 v_1,\ f(v_1) = \lambda_2 v_2, \ldots, f(v_n) = \lambda_n v_n.$$

Do đó

$$[f]_{\mathcal{B}} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n).$$

Định lý. *Toán tử tuyến tính $f \in End_{\mathbb{R}}(V)$ chéo hóa được khi và chỉ khi các điều kiện dưới đây được thỏa*

- (i) *$P_f(\boldsymbol{\lambda})$ phân rã trên $\mathbb{R}$, nghĩa là $P_f(\boldsymbol{\lambda})$ có thể phân tích thành dạng*

$$\boldsymbol{P_f(\lambda) = (-1)^n(\lambda - \lambda_1)^{m_1} \ldots (\lambda - \lambda_p)^{m_p}}$$

  với $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ và $m_1 + \cdots + m_p = n$.

- (ii) $\forall i \in \overline{1,p}$, $\dim \boldsymbol{E(\lambda_i) = m_i}$.

Hệ quả. *Nếu f có n trị riêng khác nhau thì f chéo hóa được.*

Ví dụ. Xét toán tử tuyến tính $f \in End_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ được xác định bởi

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 - 2x_3, 3x_1 + 2x_2 - 4x_3, 2x_1 - x_2).$$

Hỏi f có chéo hóa được không?

Giải. Ma trận biểu diễn f theo cơ sở chính tắc là

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Đa thức đặc trưng của f là $P_f(\lambda) = |A - \lambda I_3| = (1 - \lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 6)$.

Suy ra f có 3 giá trị riêng khác nhau là

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \frac{1 + \sqrt{7}}{2}, \lambda_3 = \frac{1 - \sqrt{7}}{2}.$$

Như vậy f chéo hóa được.

Thuật toán chéo hóa toán tử

Bước 1. Lập $A = [f]_{\mathcal{B}_0}$ với B_0 là cơ sở chính tắc của V.

Bước 2. Tìm đa thức đặc trưng $P_f(\boldsymbol{\lambda}) = |A - \boldsymbol{\lambda} I|$.

- Nếu $P_f(\boldsymbol{\lambda})$ không phân rã thì f không chéo hóa được và thuật toán kết thúc.
- Ngược lại, chuyển sang bước tiếp theo.

Bước 3. Tìm tất cả các nghiệm $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ của $P_f(\boldsymbol{\lambda}) = 0$ và các số bội $m_1, \ldots, m_p$ của chúng. Đối với mỗi $i \in \overline{1, p}$, tìm $\dim E(\lambda_i)$.

- Nếu tồn tại một $i \in \overline{1, p}$ sao cho $\dim E(\lambda_i) < m_i$ thì f không chéo hóa được và thuật toán kết thúc.
- Ngược lại, f chéo hóa được và chuyển sang bước tiếp theo.

Bước 4. Với mỗi $i \in \overline{1,p}$, tìm một cơ sở cho $E(\lambda_i)$, gọi là $\mathcal{B}_i$ chẳng hạn. Khi đó $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_p)$ là cơ sở của V. Ta có ma trận biểu diễn f theo $\mathcal{B}$ là

$$[f]_{\mathcal{B}} := \mathrm{diag}(\underbrace{\lambda_1, \ldots, \lambda_1}_{m_1 \text{ lần}}, \ldots, \underbrace{\lambda_r, \ldots, \lambda_r}_{m_r \text{ lần}}).$$

Ví dụ. Xét toán tử tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ được xác định bởi

$$f(x_1, x_2, x_3) = (4x_1 + x_2 - x_3, -6x_1 - x_2 + 2x_3, 2x_1 + x_2 + x_3).$$

Hỏi f có chéo hóa được không?

Giải. Ma trận biểu diễn f theo cơ sở chính tắc là

$$A = [f]_{\mathcal{B}_0} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -6 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Đa thức đặc trưng

$$P_f(\boldsymbol{\lambda}) = |A - \boldsymbol{\lambda} I_3| = (\boldsymbol{\lambda} - 1)^2(2 - \boldsymbol{\lambda}).$$

Ta thấy $P_f(\boldsymbol{\lambda})$ phân rã trên $\mathbb{R}$.

- Trị riêng

$$P_f(\boldsymbol{\lambda}) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{\lambda} = 1 \text{ (bội 2)}, \quad \boldsymbol{\lambda} = 2 \text{ (bội 1)}.$$

Vậy f có 2 trị riêng là $\lambda_1 = 1$ (bội 2), $\quad \lambda_2 = 2$ (bội 1).

- Không gian riêng

• Với $\lambda_1 = 1$, không gian riêng $E(1)$ chính là không gian nghiệm của hệ phương trình $(A - I_3)X = 0$. Ta có

$$(A - I_3) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -6 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vậy, hạng của $A - I_3$ bằng 2. Suy ra $\dim E(1) = 3 - 2 = 1$ nhỏ hơn số bội của trị riêng $\lambda_1 = 1$. Do đó toán tử f không chéo hóa được.

Ví dụ. Xét toán tử tuyến tính $f \in End_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ được xác định bởi

$$f(x_1, x_2, x_3) = (4x_1 + 2x_2 - x_3, -6x_1 - 4x_2 + 3x_3, -6x_1 - 6x_2 + 5x_3).$$

Hỏi f có chéo hóa được hay không? Nếu được, hãy tìm một cơ sở $\mathcal{B}$ của V sao cho $[f]_{\mathcal{B}}$ là ma trận đường chéo.

Giải. Ma trận biểu diễn f theo cơ sở chính tắc là

$$A = [f]_{\mathcal{B}_0} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ -6 & -4 & 3 \\ -6 & -6 & 5 \end{pmatrix}.$$

- Đa thức đặc trưng

$$P_f(\lambda) = |A - \boldsymbol{\lambda} I_3| = -\boldsymbol{\lambda}^3 + 5\boldsymbol{\lambda}^2 - 8\boldsymbol{\lambda} + 4 = -(\boldsymbol{\lambda} - 1)(\boldsymbol{\lambda} - 2)^2.$$

- Trị riêng

$$P_f(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1 \text{ (bội 1)}, \quad \lambda = 2 \text{ (bội 2)}.$$

Vậy f có 2 trị riêng $\lambda_1 = 1$ (bội 1), $\lambda_2 = 2$ (bội 2).

- Không gian riêng

• Với $\lambda_1 = 1$, không gian riêng $E(1)$ chính là không gian nghiệm của hệ phương trình $(A - I_3)X = 0$. Ta có

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -6 & -5 & 3 \\ -6 & -6 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_3+2d_1]{d_2+2d_1} \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[d_3-2d_2]{d_1+2d_2} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Chọn $x_3 = t$, ta tìm được nghiệm tổng quát là

$$(x_1, x_2, x_3) = \Big(-\frac{1}{3}t, t, t\Big), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Suy ra $E(1)$ có $\dim E(1) = 1$ với cơ sở $\mathcal{B}_1 = \{u_1 = (1, -3, -3)\}$.

• Với $\lambda_1 = 2$, không gian riêng $E(2)$ chính là không gian nghiệm của hệ phương trình $(A - 2I_3)X = 0$. Ta có

$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -6 & -6 & 3 \\ -6 & -6 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_3+3d_1]{d_2+3d_1} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Chọn $x_1 = t, x_2 = s$, ta tìm được nghiệm tổng quát là

$$(x_1, x_2, x_3) = (t, s, 2t + 2s), \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

Suy ra $E(2)$ có $\dim E(2) = 2$ với cơ sở

$$\mathcal{B}_2 = \{u_2 = (1, 0, 2); u_3 = (0, 1, 2)\}.$$

Do số chiều của các không gian riêng đều bằng số bội của trị riêng tương ứng nên f chéo hóa được. Hơn nữa cơ sở cần tìm là

$$\mathcal{B} = \{u_1 = (1, -3, -3); u_2 = (1, 0, 2); u_3 = (0, 1, 2)\}$$

và

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ví dụ.(tự làm) Cho toán tử tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi

$$f(x_1, x_2, x_3) = (-4x_1 - 3x_2 - 3x_3, -x_1 - x_3, 7x_1 + 5x_2 + 6x_3).$$

Hỏi f có chéo hóa được hay không? Nếu được, hãy tìm một cơ sở $\mathcal{B}$ của $\mathbb{R}^3$ sao cho $[f]_{\mathcal{B}}$ là ma trận đường chéo.

Ma trận chéo hóa được

Định nghĩa. Cho $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. A được gọi là ***đồng dạng*** với B nếu tồn tại ma trận khả nghịch P sao cho $A = P^{-1}BP$. Ký hiệu $\boldsymbol{A \sim B}$.

Nhận xét. *Quan hệ đồng dạng là một quan hệ tương đương, nghĩa là:*

- $\forall A \in M_n(\mathbb{R})$, $A \sim A$.
- $\forall A, B \in M_n(\mathbb{R})$, *nếu* $A \sim B$ *thì* $B \sim A$.
- $\forall A, B, C \in M_n(\mathbb{R})$, *nếu* $A \sim B$ *và* $B \sim C$ *thì* $A \sim C$.

Định nghĩa. Cho $A \in M_n(\mathbb{R})$. Ma trận A được gọi là ***chéo hóa được*** nếu A đồng dạng với ma trận đường chéo.

Nhắc lại. Cho $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ là hai cơ sở của V và f là toán tử tuyến tính trên V. Khi đó
$$[f]_{\mathcal{B}'} = (\mathcal{B} \to \mathcal{B}')^{-1}[f]_{\mathcal{B}}(\mathcal{B} \to \mathcal{B}').$$

Giả sử f chéo hóa được bằng cơ sở $\mathcal{B}'$ và xem xét A là ma trận biểu diễn f theo cơ sở $\mathcal{B}$. Ta đặt

$$D := [f]_{\mathcal{B}'} \text{ và } P := (\mathcal{B} \to \mathcal{B}').$$

Khi đó
$$D = P^{-1}AP.$$

Suy ra A chéo hóa được.

Như vậy bài toán chéo hóa ma trận A chính là bài toán chéo hóa toán tử f với A là ma trận biểu diễn của f theo một cơ sở nào đó.

Tương tự như trên toán tử, ta cũng có các định nghĩa về việc chéo hóa trên ma trận.

Thuật toán chéo hóa ma trận

Bước 1. Tìm đa thức đặc trưng $P_A(\boldsymbol{\lambda}) = |A - \boldsymbol{\lambda} I|$.

- Nếu $P_A(\boldsymbol{\lambda})$ không phân rã thì A không chéo hóa được và thuật toán kết thúc.
- Ngược lại, chuyển sang bước tiếp theo.

Bước 2. Tìm tất cả các nghiệm $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ của $P_A(\boldsymbol{\lambda}) = 0$ và các số bội $m_1, \ldots, m_p$ của chúng. Đối với mỗi $i \in \overline{1,p}$ tìm số chiều của của không gian nghiệm $E(\lambda_i)$ của hệ phương trình $(A - \lambda_i I)X = 0$.

- Nếu tồn tại một $i \in \overline{1,p}$ sao cho $\dim E(\lambda_i) < m_i$ thì A không chéo hóa được và thuật toán kết thúc.
- Ngược lại, A chéo hóa được và chuyển sang bước tiếp theo.

Bước 3. Với mỗi $i \in \overline{1,p}$, tìm một cơ sở $\mathcal{B}_i$ cho $E(\lambda_i)$, Ta đặt P là ma trận có được bằng cách dựng các vectơ trong $\mathcal{B}_i$ thành các cột. Khi đó ma trận P làm chéo A và $P^{-1}AP$ là ma trận đường chéo

$$\operatorname{diag}(\underbrace{\lambda_1, \ldots, \lambda_1}_{m_1 \text{lần}}, \ldots, \underbrace{\lambda_r, \ldots, \lambda_r}_{m_r \text{lần}}).$$

Ví dụ. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Tìm trị riêng và vectơ riêng của A. Xác định cơ sở, số chiều của các không gian riêng tương ứng.

Giải. - Đa thức đặc trưng

$$P_A(\lambda) = |A - \lambda I_3| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 3 & 2 \\ 1 & 1-\lambda & -2 \\ -3 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 4)(\lambda^2 + 4).$$

- Trị riêng

$$P_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 4.$$

Do đó ma trận A chỉ có một trị riêng $\lambda = 4$ (bội 1).

- Không gian riêng $E(4)$ là không gian nghiệm của hệ phương trình $(A - 4I_3)X = 0$. Ta có

$$(A - 4I_3) = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & -2 \\ -3 & -1 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_3+3d_1]{\substack{-d_1 \\ d_2-d_1}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & -10 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[d_2 \leftrightarrow d_3]{\substack{-\frac{1}{10}d_3 \\ d_1+3d_3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ta có nghiệm tổng quát

$$(x_1, x_2, x_3) = (-t, -t, t), \quad t \in \mathbb{R}. \qquad \text{chọn } t = 1$$

Suy ra $\dim E(4) = 1$ với cơ sở $\mathcal{B} = \{(-1, -1, 1)\}$.

Ví dụ. Chéo hóa ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Giải. - Đa thức đặc trưng

$$P_A(\boldsymbol{\lambda}) = |A - \boldsymbol{\lambda} I_3| = \begin{vmatrix} 1-\boldsymbol{\lambda} & 3 & 3 \\ -3 & -5-\boldsymbol{\lambda} & -3 \\ 3 & 3 & 1-\boldsymbol{\lambda} \end{vmatrix} = -(\boldsymbol{\lambda} - 1)(\boldsymbol{\lambda} + 2)^2.$$

- Trị riêng

$$P_A(\boldsymbol{\lambda}) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{\lambda} = 1\,(\text{bội } 1), \boldsymbol{\lambda} = -2\,(\text{bội } 2).$$

Vậy A có 2 trị riêng là $\lambda_1 = 1\,(\text{bội } 1), \lambda_2 = -2\,(\text{bội } 2)$.

- Không gian riêng

• Với $\lambda_1 = 1$, không gian riêng $E(1)$ là không gian nghiệm của hệ phương trình $(A - I_3)X = 0$. Ta có

$$(A - I_3) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -3 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_3 - 3d_1]{\substack{-\frac{1}{3}d_2 \\ d_1 \leftrightarrow d_2}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[d_3 - 3d_2]{\substack{-\frac{1}{3}d_2 \\ d_1 - 2d_2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ta có nghiệm tổng quát

$$(x_1, x_2, x_3) = (t, -t, t), \quad t \in \mathbb{R}. \qquad \text{chọn } t = 1$$

Suy ra $E(1)$ có $\dim E(1) = 1$ với cơ sở $\mathcal{B}_1 = \{u_1 = (1, -1, 1)\}$.

• Với $\lambda_2 = -2$, không gian riêng $E(-2)$ là không gian nghiệm của hệ phương trình $(A + 2I_3)X = 0$. Ta có

$$(A+2I_3) = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -3 & -3 & -3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_3 - 3d_1]{\substack{-\frac{1}{3}d_1 \\ d_2 + 3d_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ta có nghiệm tổng quát

$$(x_1, x_2, x_3) = (-t - s, t, s), \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

Suy ra $E(1)$ có $\dim E(1) = 2$ với cơ sở

$$\mathcal{B}_2 = \{u_2 = (-1, 1, 0), u_3 = \{-1, 0, 1\}\}.$$

Vì các không gian $E(\lambda_i)$ của A có số chiều bằng số bội của các trị riêng tương ứng nên A chéo hóa được.

Lập ma trận P bằng cách lần lượt dựng các vectơ trong

$$\mathcal{B}_1 = \{u_1 = (1, -1, 1)\} \text{ và } \mathcal{B}_2 = \{u_2 = (-1, 1, 0), u_3 = \{-1, 0, 1\}\}$$

thành các cột

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Khi đó

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ví dụ.(tự làm) Chéo hóa ma trận

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & -4 \\ 8 & -11 & -8 \\ -8 & 8 & 5 \end{pmatrix}$$

5.4. Một vài ứng dụng sự chéo hóa
Tính lũy thừa của ma trận

Bài toán. Cho $A \in M_n(\mathbb{R})$ và A chéo hóa được trên $\mathbb{R}$. Tìm A^k.

Giải. Vì A chéo hóa được trên $\mathbb{R}$ nên tồn tại một ma trận khả nghịch P sao cho

$$P^{-1}AP = D \tag{1}$$

là một ma trận đường chéo. Giả sử

$$D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n).$$

Từ (1) ta có $A = PDP^{-1}$ nên

$$A^k = (PDP^{-1})^k = PD^kP^{-1} = P\operatorname{diag}(\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k)P^{-1}.$$

Ví dụ. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Tính A^n.

Giải.

- Đa thức đặc trưng

$$P_A(\boldsymbol{\lambda}) = (\boldsymbol{\lambda} - 2)(\boldsymbol{\lambda} - 3).$$

- Trị riêng

$$A \text{ có 2 trị riêng là } \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 3.$$

- Không gian riêng

$$E(2) = \langle u = (-1, 1) \rangle \text{ và } E(3) = \langle v = (-1, 2) \rangle.$$

Vậy $P = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ là ma trận làm chéo A và

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ta có

$$A = PDP^{-1}.$$

Do đó

$$A^n = PD^nP^{-1}.$$

Do D là ma trận đường chéo nên dễ dàng tính được

$$D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}.$$

Tiếp theo, tính được

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ta có

$$A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 3^n & 2^n - 3^n \\ -2^{n+1} + 2.3^n & -2^n + 2.3^n \end{pmatrix}.$$

Ví dụ.(tự làm) Cho $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Tìm công thức A^n.

Tính lũy thừa của toán tử

Bài toán. Cho $f \in End_{\mathbb{R}}(V)$ và f chéo hóa được trên V. Tìm công thức của f^k.

Giải. Vì f chéo hóa được nên tồn tại một cơ sở $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ của V sao cho $[f]_{\mathcal{B}}$ là ma trận đường chéo. Giả sử

$$[f]_{\mathcal{B}} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n).$$

Gọi $\mathcal{B}_0$ là cơ sở chính tắc của V, ta dễ dàng lập ma trận $[f]_{\mathcal{B}_0}$. Khi đó

$$[f]_{\mathcal{B}} = (\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})^{-1}[f]_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})$$

hay

$$[f]_{\mathcal{B}_0} = (\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})[f]_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})^{-1}.$$

Do đó

$$([f]_{\mathcal{B}_0})^k = (\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})([f]_{\mathcal{B}})^k(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})^{-1}.$$

Hơn nữa
$$[f^k]_{\mathcal{B}_0} = ([f]_{\mathcal{B}_0})^k.$$
Suy ra
$$[f^k]_{\mathcal{B}_0} = (\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})([f]_{\mathcal{B}})^k(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})^{-1}.$$
Ngoài ra ta có

- $([f]_{\mathcal{B}})^k = \mathrm{diag}(\lambda_1^k, \lambda_2^k, \ldots, \lambda_n^k)$.
- $(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}) = (u_1^\top \; u_2^\top \; \ldots \; u_n^\top)$.

Do đó, ta dễ dàng tính $[f^k]_{\mathcal{B}_0}$. Từ đó suy ra được công thức của f^k.

Ví dụ. Cho toán tử tuyến tính $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi
$$f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, 2x_1 + 4x_2).$$
Tìm công thức f^n.

Giải.

Bước 1. Tiến hành chéo hóa toán tử ta được tìm được một cơ sở $\mathcal{B} = \{u_1 = (-1,1), u_2 = (-1,2)\}$ và

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Bước 2. Ta có

$$(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}) = (u_1^\top u_2^\top) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

và

$$(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ngoài ra

$$[f]_{\mathcal{B}} = (\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})^{-1}[f]_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})$$

hay

$$[f]_{\mathcal{B}_0} = (\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})[f]_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})^{-1}.$$

Suy ra

$$\begin{aligned}([f]_{\mathcal{B}_0})^n &= (\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})([f]_{\mathcal{B}})^n(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})^{-1} \\ &= \begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}^n\begin{pmatrix}-2 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2^n & 0\\ 0 & 3^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}2^{n+1} - 3^n & 2^n - 3^n\\ -2^{n+1} + 2.3^n & -2^n + 2.3^n\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Như vậy công thức của f^n là

$$f^n(x_1, x_2) = ((2^{n+1} - 3^n)x_1 + (2^n - 3^n)x_2, (-2^{n+1} + 2.3^n)x_1 + (-2^n + 2.3^n)x_2).$$

Tìm một dãy số thỏa công thức truy hồi

Minh họa cho trường hợp hai dãy số.

Ví dụ. Giả sử các dãy số thực $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ và $(v_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ thỏa các công thức truy hồi

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n - v_n; \\ v_{n+1} = 2u_n + 4v_n, \end{cases} \text{ với } \begin{cases} u_0 = 2; \\ v_0 = 1. \end{cases} \tag{1}$$

Tìm công thức tính các số hạng tổng quát của u_n và v_n.

Đặt

$$X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} \text{ và } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Công thức (1) được viết lại như sau:

$$X_{n+1} = AX_n \text{ với } X_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Từ đó tính được $X_n = A^n X_0$.

Sử dụng phương pháp chéo hóa ta tính được

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 3^n & 2^n - 3^n \\ -2^{n+1} + 2.3^n & -2^n + 2.3^n \end{pmatrix}.$$

Suy ra

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 3^n & 2^n - 3^n \\ -2^{n+1} + 2.3^n & -2^n + 2.3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^{n+2} - 2.3^n + 2^n - 3^n \\ -2^{n+2} + 4.3^n - 2^n + 2.3^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Vậy

$$\begin{cases} u_n = 5.2^n - 3^{n+1}; \\ v_n = -5.2^n + 6.3^n. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình vi phân tuyến tính hệ số hằng

Bài toán. Tìm nghiệm của phương trình vi phân tuyến tính

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dfrac{dx_1}{dt} & = & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n; \\ \dfrac{dx_2}{dt} & = & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n; \\ \multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ \dfrac{dx_n}{dt} & = & a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n, \end{array}\right. \qquad (1)$$

trong đó mọi $a_{ij} \in \mathbb{R}$ và mọi x_i đều là hàm khả vi theo biến t.

Gọi $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Khi đó $X = [x]_{\mathcal{B}_0} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Hệ (1) được viết lại dưới dạng ma trận như sau:

$$\frac{dX}{dt} = AX, \text{ với } A = (a_{ij}) \tag{2}$$

Giả sử A chéo hóa được, nghĩa là tồn tại ma trận chéo D và ma trận khả nghịch P sao cho

$$D = P^{-1}AP. \tag{3}$$

Ngoài ra, ta có thể xem A như ma trận của biểu diễn toán tử tuyến tính $f \in End_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n)$ theo cơ sở chính tắc $\mathcal{B}_0$. Khi đó tồn tại một cơ sở $\mathcal{B} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ sao cho ma trận

$$D = [f]_{\mathcal{B}} \text{ và } P = (\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}).$$

Gọi $X' = [x]_{\mathcal{B}}$, ta có

$$[x]_{\mathcal{B}} = (\mathcal{B} \to \mathcal{B}_0)[x]_{\mathcal{B}_0} \Leftrightarrow [x]_{\mathcal{B}} = (\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})^{-1}[x]_{\mathcal{B}_0}$$

hay

$$X' = P^{-1}X \tag{4}$$

Lấy vi phân theo t, ta có

$$\frac{dX'}{dt} = P^{-1}\frac{dX}{dt}. \tag{5}$$

Thế (2) vào (5)

$$\frac{dX'}{dt} = P^{-1}AX. \tag{6}$$

Từ (3) ta có $P^{-1}A = DP^{-1}$. Thế vào (6), ta được

$$\frac{dX'}{dt} = DP^{-1}X. \tag{6}$$

Mặt khác $X' = P^{-1}X$. Suy ra

$$\frac{dX'}{dt} = DX'. \tag{7}$$

$$\frac{dX'}{dt} = DX'. \tag{7}$$

Vì D là ma trận đường chéo nên ta dễ dàng tìm ra X'. Sau đó để tìm X ta dùng công thức $X = PX'$.

Tóm lại, nếu A là ma trận chéo hóa được thì hệ (1) có thể được giải qua các bước sau:

- Bước 1. Chéo hóa ma trận A, nghĩa là tìm ma trận khả nghịch P sao cho $D = P^{-1}AP$ là ma trận chéo.
- Bước 2. Giải hệ $\dfrac{dX'}{dt} = DX'$.
- Bước 3. Tìm X bởi công thức $X = PX'$.

Ví dụ. Giải hệ phương trình vi phân $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y; \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + 4y. \end{cases}$

Giải.

Bước 1. Ma trận của hệ là $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Tiến hành chéo hóa ma trận A ta tìm được $P = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ làm chéo A và

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Bước 2. Xét $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Đặt $X' = PX$, ta có $\dfrac{dX'}{dt} = DX'$

Viết lại hệ $\dfrac{dX'}{dt} = DX'$ thành hệ $\begin{cases} \dfrac{dx'}{dt} &= 2x'; \\ \dfrac{dy'}{dt} &= 3y'. \end{cases}$

Nghiệm của hệ này là

$$\begin{cases} x' &= C_1e^{2t} \\ y' &= C_2e^{3t}, \end{cases}$$

trong đó C_1 và C_2 là các hằng số.

Bước 3. Ta có $X = PX'$. Do đó

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x' - y' \\ -x' + 2y' \end{pmatrix}.$$

Suy ra

$$\begin{cases} x &= -C_1e^{2t} - C_2e^{3t}; \\ y &= C_1e^{2t} + 2C_2e^{3t}. \end{cases}$$

Ví dụ.(tự làm)Giải hệ phương trình vi phân

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x - 3y - 2z; \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x - 2y - 2z; \\ \dfrac{dz}{dt} = 6x + 9y + 7z. \end{cases}$$

Dãy Fibonacii

Dãy Fibonacii là dãy vô hạn các số

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$$

Mỗi số hạng trong dãy Fibonacii (kể từ số hạng thứ ba) bằng tổng của hai số hạng đứng ngay trước nó

$$F_{k+2} = F_{k+1} + F_k, k \geq 0, F_0 = 0, F_1 = 1.$$

Câu hỏi. Làm thế nào để tính số hạng F_n mà không cần tính lần lượt từ các số $F_0 = 0, F_1 = 1$?

Đặt $u_k := \begin{pmatrix} F_{k+1} \\ F_k \end{pmatrix}$ và $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Khi đó

$$u_{k+1} = Au_k.$$

Từ đó suy ra

$$u_k = A^k u_0, \text{ với } u_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Vấn đề dẫn đến việc tính A^k. Ta sẽ dùng phương pháp chéo hóa ma trận.

Đa thức đặc trưng $f_A(\boldsymbol{\lambda}) = \boldsymbol{\lambda}^2 - \boldsymbol{\lambda} - 1$ có các nghiệm khác nhau là

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}. \tag{2}$$

Do đó A chéo hóa được và một dạng chéo của A là

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \text{ với } P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Ta có

$$P^{-1} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda_2 \\ -1 & \lambda_1 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Từ các công thức (1), (3) và (4) ta tính được

$$\begin{pmatrix} F_{k+1} \\ F_k \end{pmatrix} = u_k = A^k u_0 = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{pmatrix} \lambda_1^{k+1} - \lambda_2^{k+2} \\ \lambda_1^k - \lambda_2^k \end{pmatrix}.$$

Từ đó kết hợp với công thức (2) suy ra

$$F_k = \frac{1}{\sqrt{5}} \Big[\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \Big)^k - \Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \Big)^k \Big]. \qquad (5)$$

Lưu ý $\left| \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \right| < 1$. Suy ra $\Big(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \Big)^k \to 0$ khi $k \to \infty$. đó, với k càng lớn thì

$$\frac{F_{k+1}}{F_k} \approx \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618.$$

Con số $1,618$ được những người Hy Lạp cổ đại gọi là ***tỉ lệ vàng***. Tờ giấy $A4$ mà ngày nay chúng ta đang sử dụng chính là hình chữ nhật có tỉ lệ vàng như vậy.