

ÔN THI GIỮA KỲ MÔN ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

CHƯƠNG 1:

Câu 1. Giải hệ sau và kiểm nghiệm lại định lý Kronecker – Capelli:

$$\begin{cases} x + y + 2z + 3t = 1 \\ 2x + 3y - z - t = -6 \\ 3x - y - z - 2t = -4 \\ x + 2y + 3z - t = -4 \end{cases}$$

* **Phương pháp Gauss – Jordan** : ma trận hóa hệ trên với các cột ứng với các ẩn x, y, z và t

$$\begin{aligned} \overline{A} = (A | B) &= \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & -1 & -6 \\ 3 & -1 & -1 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & -4 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1^* & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & -7 & -8 \\ 0 & -4 & -7 & -11 & -7 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -5 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1^* & 0 & 7 & 10 & 9 \\ 0 & 1^* & -5 & -7 & -8 \\ 0 & 0 & -3 & -27 & -27 \\ 0 & 0 & 6 & 3 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1^* & 0 & 0 & -53 & -54 \\ 0 & 1^* & 0 & 38 & 37 \\ 0 & 0 & 1^* & 9 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -51 & -51 \end{array} \right) \rightarrow (R_A | B') = R_{\overline{A}} = \begin{array}{cccc|c} x & y & z & t & \\ \hline 1^* & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1^* & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1^* & 1 \end{array} \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \end{array} \\ E_1 & E_2 & E_3 & E_4 \end{aligned}$$

Từ (1), (2), (3) và (4), ta thấy ngay hệ có nghiệm duy nhất : ($x = y = -1, z = 0$ và $t = 1$).

* **Phương pháp Gauss**: ma trận hóa hệ trên với các cột ứng với các ẩn x, y, z và t

$$\begin{aligned} \overline{A} = (A | B) &= \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & -1 & -6 \\ 3 & -1 & -1 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & -4 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1^* & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & -7 & -8 \\ 0 & -4 & -7 & -11 & -7 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -5 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1^* & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1^* & -5 & -7 & -8 \\ 0 & 0 & -3 & -27 & -27 \\ 0 & 0 & 6 & 3 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \\ &\rightarrow (S_A | B'') = S_{\overline{A}} = \begin{array}{cccc|c} 1^* & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1^* & -5 & -7 & -8 \\ 0 & 0 & -3^* & -27 & -27 \\ 0 & 0 & 0 & -51^* & -51 \end{array} \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{l} F_1 & F_2 & F_3 & F_4 \end{array}$$

nghiệm duy nhất $t = (-51 / -51) = 1, z = (27t - 27) / (-3) = 9 - 9t = 9 - 9.1 = 0,$

$y = 5z + 7t - 8 = 5.0 + 7.1 - 8 = -1, x = 1 - y - 2z - 3t = 1 - (-1) - 2.0 - 3.1 = -1.$

* $m = n = 4, A \in M_4(\mathbb{R}), \overline{A} \in M_{4 \times 5}(\mathbb{R}), r(\overline{A}) = r(A) = n = 4$: hệ có nghiệm duy nhất.

Câu 2. Giải và biện luận hệ sau theo tham số thực m rồi kiểm nghiệm lại định lý Kronecker – Capelli:

$$\begin{cases} 3x+3y+7z-3t+6u=3 \\ 2x+2y+4z-t+3u=-2 \\ -3x-3y-5z+2t-7u=4m+1 \\ 2x+2y+8z-3t+u=5m-3 \end{cases}$$

* **Phương pháp Gauss – Jordan** : ma trận hóa hệ trên với các cột ứng với các ẩn x, y, z, t và u

$$\begin{aligned} \overline{A} = (A | B) &= \left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 3 & 7 & -3 & 6 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & -1 & 3 & -2 \\ -3 & -3 & -5 & 2 & -7 & 4m+1 \\ 2 & 2 & 8 & -3 & 1 & 5m-3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1^* & 1 & 3 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -3 & -12 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -1 & 4m+4 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & -2 & 5m-1 \end{array} \right) \rightarrow \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1^* & 1 & 0 & 5/2 & -3/2 & -13 \\ 0 & 0 & 1^* & -3/2 & 3/2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -4 & 4m-8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3m-9 \end{array} \right) \rightarrow (R_A | B') = S_{\overline{A}} = \begin{array}{ccccc|c} x & y & z & t & u & \\ \hline 1^* & 1 & 0 & 0 & 7/2 & -5m-3 \\ 0 & 0 & 1^* & 0 & -3/2 & 3m \\ 0 & 0 & 0 & 1^* & -2 & 2m-4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m+3 \end{array} \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \end{array} \\ E_1 & E_2 & E_1 & E_2 & E_3 & (?) \end{aligned}$$

Nếu $m+3 \neq 0$ (nghĩa là $m \neq -3$) thì hệ **vô nghiệm** [do (4)].

Nếu $m+3 = 0$ (nghĩa là $m = -3$) thì hệ có **vô số nghiệm** như sau: $y, u \in \mathbf{R}$, từ (1), (2)

và (3), ta thấy $x = -y - (7/2)u + 12$, $z = (3/2)u - 9$ và $t = 2u - 10$.

* **Phương pháp Gauss** : ma trận hóa hệ trên với các cột ứng với các ẩn x, y, z, t và u

$$\begin{aligned} \overline{A} = (A | B) &= \left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 3 & 7 & -3 & 6 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & -1 & 3 & -2 \\ -3 & -3 & -5 & 2 & -7 & 4m+1 \\ 2 & 2 & 8 & -3 & 1 & 5m-3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1^* & 1 & 3 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -3 & -12 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -1 & 4m+4 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & -2 & 5m-1 \end{array} \right) \rightarrow \\ &\rightarrow (S_A | B') = S_{\overline{A}} = \begin{array}{ccccc|c} x & y & z & t & u & \\ \hline 1^* & 1 & 3 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -2^* & 3 & -3 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 2^* & -4 & 4m-8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3m-9 \end{array} \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \end{array} \\ F_1 & F_2 & F_3 & (?) \end{aligned}$$

Nếu $-3m-9 \neq 0$ (nghĩa là $m \neq -3$) thì hệ **vô nghiệm** [do (4)].

Nếu $-3m-9 = 0$ (nghĩa là $m = -3$) thì hệ có **vô số nghiệm** như sau: $y, u \in \mathbf{R}$, từ (3), (2) và (1), ta có

$$t = (4u - 20)/2 = 2u - 10, \quad z = (3t - 3u + 12)/2 = [3(2u - 10) - 3u + 12]/2 = (3/2)u - 9 \text{ và}$$

$$x = (2t - 3y - 7z - 3u + 5)/3 = \{2(2u - 10) - 3y - 7[(3/2)u - 9] - 3u + 5\}/3 = 12 - y - (7/2)u$$

* Kiểm nghiệm lại bằng Kronecker – Capelli : $m = 4, n = 5, A \in M_{4 \times 5}(\mathbf{R}), \bar{A} \in M_{4 \times 6}(\mathbf{R})$.

$$\text{Nếu } m \neq -3 \text{ thì } (R_A | B') = S_{\bar{A}} = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1^* & 1 & 0 & 0 & 7/2 & -5m-3 \\ 0 & 0 & 1^* & 0 & -3/2 & 3m \\ 0 & 0 & 0 & 1^* & -2 & 2m-4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (m+3)^* \end{array} \right) \text{ hay}$$

$E_1 \quad E_2 \quad E_3 \quad F_4$

$$(S_A | B'') = S_{\bar{A}} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1^* & 1 & 3 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -2^* & 3 & -3 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 2^* & -4 & 4m-8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (-3m-9)^* \end{array} \right) \text{ và } r(\bar{A}) = 4 = r(A) + 1 : \text{hệ vô nghiệm.}$$

$F_1 \quad F_2 \quad F_3 \quad F_4$

$$\text{Nếu } m = -3 \text{ thì } (R_A | B') = R_{\bar{A}} = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1^* & 1 & 0 & 0 & 7/2 & -18 \\ 0 & 0 & 1^* & 0 & -3/2 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 1^* & -2 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \text{ hay}$$

$E_1 \quad E_2 \quad E_3$

$$(S_A | B'') = S_{\bar{A}} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1^* & 1 & 3 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -2^* & 3 & -3 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 2^* & -4 & -20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \text{ và } r(\bar{A}) = r(A) = 3 < n = 5:$$

$F_1 \quad F_2 \quad F_3$

hệ có vô số nghiệm với $(5 - 3) = 2$ ẩn tự do.

Câu 3. Tìm hạng của ma trận A dưới đây (biện luận theo tham số thực m) :

$$A = \begin{pmatrix} 2m+1 & 3 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & -7 \end{pmatrix}.$$

Khi dùng các phép biến đổi sơ cấp trên dòng (hay cột) thì hạng của ma trận không thay đổi. Từ A , ta hoán vị (dòng 1 với dòng 3) rồi hoán vị tiếp (cột 1 với cột 4), ta đưa hệ số $2m+1$ về vị trí dòng 3 và cột 4 để dễ biện luận khi đưa ma trận về dạng bậc thang nhằm tìm hạng.

$$\begin{pmatrix} 2m+1 & 3 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & -7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 & 2m+1 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ -7 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow B = \begin{pmatrix} -7 & 1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & -2 & 2m+1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1^* & -3 & 1 & -6 \\ 0 & -5 & 2 & -11 \\ 0 & 5 & -2 & 2m+3 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow S_B = \begin{pmatrix} 1^* & -3 & 1 & -6 \\ 0 & -5^* & 2 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 2m-8 \end{pmatrix}. \text{ Nếu } m=4 \text{ thì } S_B = \begin{pmatrix} 1^* & -3 & 1 & -6 \\ 0 & -5^* & 2 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ và } r(A) = r(B) = 2.$$

$F_1 \quad F_2 \quad F_3 (?) \quad F_1 \quad F_2$

$$\text{Nếu } m \neq 4 \text{ thì } S_B = \begin{pmatrix} 1^* & -3 & 1 & -6 \\ 0 & -5^* & 2 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 2m-8^* \end{pmatrix} \text{ và } r(A) = r(B) = 3.$$

$F_1 \quad F_2 \quad F_3$

CHƯƠNG 2:

Câu 1. Cho $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Tính A^k , $\forall k$ nguyên ≥ 0 .

$$\text{Thử } A^0 = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A^1 = A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, A^2 = A.A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ 2 & -3 \end{pmatrix},$$

$$A^3 = A^2.A = \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 12 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \text{ và } A^4 = A^3.A = \begin{pmatrix} -7 & 12 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -16 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Dự đoán } A^k = (-1)^k \begin{pmatrix} 2k+1 & -4k \\ k & 1-2k \end{pmatrix}, \forall k \geq 0. \text{ Ta chứng minh bằng qui nạp theo } k \geq 0.$$

$$\text{Khi } k=0 \text{ thì } A^0 = (-1)^0 \begin{pmatrix} 2.0+1 & -4.0 \\ 0 & 1-2.0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : \text{ mệnh đề đúng khi } k=0.$$

Xét $k \geq 0$ và giả sử mệnh đề đúng với k . Khi đó

$$\begin{aligned} A^{k+1} &= A^k.A = (-1)^k \begin{pmatrix} 2k+1 & -4k \\ k & 1-2k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = (-1)^k \begin{pmatrix} -2k-3 & 4k+4 \\ -k-1 & 2k+1 \end{pmatrix} \\ &= -(-1)^k \begin{pmatrix} 2k+3 & -4k-4 \\ k+1 & -2k-1 \end{pmatrix} = (-1)^{k+1} \begin{pmatrix} 2(k+1)+1 & -4(k+1) \\ k+1 & 1-2(k+1) \end{pmatrix} : \text{ mệnh đề cũng đúng với } (k+1). \end{aligned}$$

$$\text{Kết luận : } A^k = (-1)^k \begin{pmatrix} 2k+1 & -4k \\ k & 1-2k \end{pmatrix}, \forall k \geq 0.$$

Câu 2. Các ma trận sau có khả nghịch không ? Tại sao ?

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \\ -5 & 7 & -4 \end{pmatrix} \text{ và } B = \begin{pmatrix} 13 & 8 & -12 \\ -12 & -7 & 12 \\ 6 & 4 & -5 \end{pmatrix}.$$

Ta chỉ cần tìm S_A và S_B để có kết luận về tính khả nghịch của A và B.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \\ -5 & 7 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1} \begin{pmatrix} 1^* & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & 2 & -14 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \ F_2} \begin{pmatrix} 1^* & -2 & 5 \\ 0 & 1^* & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = S_A.$$

Ta thấy S_A có 2 dòng $\neq \mathbf{O}$ nên $r(A) = 2 < n = 3$ và do đó A không khả nghịch.

$$B = \begin{pmatrix} 13 & 8 & -12 \\ -12 & -7 & 12 \\ 6 & 4 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1} \begin{pmatrix} 1^* & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \ F_2 \ F_3} \begin{pmatrix} 1^* & 1 & 0 \\ 0 & 1^* & 2 \\ 0 & 0 & -1^* \end{pmatrix} = S_B.$$

Ta thấy S_B có 3 cột bán chuẩn nên $r(B) = 3 = n$ và do đó B khả nghịch.

Câu 3. Dùng các phép biến đổi sơ cấp trên dòng để xét tính khả nghịch của các ma trận sau

và tìm ma trận nghịch đảo tương ứng của chúng (nếu có) :

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix}, K = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 \\ -2 & 2 & 3 \\ -3 & 4 & 6 \end{pmatrix} \text{ và } L = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$(H | I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{E_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1^* & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 2 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{E_1 \ E_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1^* & 0 & -6/5 & 1/5 & -2/5 & 0 \\ 0 & 1^* & -2/5 & 2/5 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right).$$

$= (R_H | H')$. Ta thấy $R_H \neq I_3$ nên H không khả nghịch.

$$(K | I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -3 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{E_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1^* & -2 & -2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 6 & 0 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{E_1 \ E_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1^* & 0 & -2 & -4 & 0 & -3 \\ 0 & 1^* & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -2 & 4 \end{array} \right) \\ \xrightarrow{E_1 \ E_2 \ E_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1^* & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1^* & 0 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1^* & 2 & -1 & 2 \end{array} \right) = (R_K = I_3 | K^{-1}).$$

Ta thấy $R_K = I_3$ nên K khả nghịch và $K^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -3 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Thử lại, ta thấy $K \cdot K^{-1} = I_3$.

$$(L | I_2) = \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & -2 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{E_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1^* & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -4 & -3 \end{array} \right) \xrightarrow{E_1 \ E_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1^* & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1^* & 4 & 3 \end{array} \right) = (R_L = I_2 | L^{-1}).$$

Ta thấy $R_L = I_2$ nên L khả nghịch và $L^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$. Thử lại, ta thấy $L.L^{-1} = I_2$.

Câu 4. Tìm M khả nghịch có $M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ bằng các phép biến đổi sơ cấp trên dòng.

$$\begin{aligned} (M^{-1} | I_3) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1^* & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1^* & 0 & 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1^* & 4 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 1 & 2 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1^* & 0 & 0 & -7/4 & -1/4 & 10/4 \\ 0 & 1^* & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1^* & -1/4 & 1/4 & 2/4 \end{array} \right) = (I_3 | M). \text{ Vậy } M = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -7 & -1 & 10 \\ 4 & 0 & -4 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$E_1 \ E_2 \ E_3$

Thử lại, $M^{-1}.M = I_3$.

Câu 5. Cho $A, B, A_1, A_2, \dots, A_k \in M_n(\mathbf{R})$, $C \in M_{m \times n}(\mathbf{R})$ và $D \in M_{n \times m}(\mathbf{R})$. Khi đó

♦ Nếu A khả nghịch thì

* A^{-1} cũng khả nghịch và ta có ngay $(A^{-1})^{-1} = A$.

* A^t cũng khả nghịch và ta có ngay $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

* cA ($c \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$) cũng khả nghịch và ta có ngay $(cA)^{-1} = c^{-1}A^{-1}$.

* A^r ($r \in \mathbf{Z}$) cũng khả nghịch và ta có ngay $(A^r)^{-1} = A^{-r}$.

♦ AB khả nghịch $\Leftrightarrow (A$ và B đều khả nghịch).

Lúc đó $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ (thứ tự bị đảo ngược).

♦ AB không khả nghịch $\Leftrightarrow (A$ hay B không khả nghịch).

♦ $(A_1A_2 \dots A_k)$ khả nghịch $\Leftrightarrow (A_1, A_2, \dots, A_k$ đều khả nghịch).

Lúc đó $(A_1A_2 \dots A_k)^{-1} = A_k^{-1}A_{k-1}^{-1} \dots A_2^{-1}A_1^{-1}$ (thứ tự bị đảo ngược).

♦ $(A_1A_2 \dots A_k)$ không khả nghịch $\Leftrightarrow \exists j \in \{1, 2, \dots, k\}, A_j$ không khả nghịch.

♦ $E = CD \in M_m(\mathbf{R})$ và $F = DC \in M_n(\mathbf{R})$. Hơn nữa $\forall k \geq 1, E^k = C.F^{k-1}.D$ và

$F^k = D.E^{k-1}.C$.

Câu 6. Giải phương trình ma trận (A và C **khả nghịch**, B cho sẵn và X là ma trận ẩn).

* $AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$ (**nghiệm duy nhất**).

* $XA = B \Leftrightarrow X = BA^{-1}$ (**nghiệm duy nhất**).

* $AXC = B \Leftrightarrow X = A^{-1}BC^{-1}$ (**nghiệm duy nhất**).

Ví dụ:

a) **Giả sử** A, B, C và $D \in M_n(\mathbf{R})$ **đều khả nghịch**. Ta có

$$(A^4 B^{-5} C^2 B^3 D^{-9} C^{-7} D^6 A^{-8})^{-1} = (A^{-8})^{-1} (D^6)^{-1} (C^{-7})^{-1} (D^{-9})^{-1} (B^3)^{-1} (C^2)^{-1} (B^{-5})^{-1} (A^4)^{-1} \\ = A^8 D^{-6} C^7 D^9 B^{-3} C^{-2} B^5 A^{-4}.$$

Tìm X và Y nếu $A^{-5} D^9 X B^6 = -7 A^{-3} C^2 B^4$ và $A^9 C^8 Y B^{-4} C^{-2} = 2 A^9 C^5 A^7 B^{-1} C^{-2}$.

Ta có $X = (A^{-5} D^9)^{-1} (-7 A^{-3} C^2 B^4) (B^6)^{-1} = -7 D^{-9} A^5 A^{-3} C^2 B^4 B^{-6} = -7 D^{-9} A^2 C^2 B^{-2}$,

$Y = (A^9 C^8)^{-1} (2 A^9 C^5 A^7 B^{-1} C^{-2}) (B^{-4} C^{-2})^{-1} = 2 C^{-8} A^{-9} A^9 C^5 A^7 B^{-1} C^{-2} C^2 B^4 = 2 C^{-3} A^7 B^3$.

b) **Tìm các ma trận X, Y và Z thỏa**

$$KX = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 0 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}, YL = (1 \quad -6) \text{ và } LZK = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ -1 & 7 & -4 \end{pmatrix} \text{ [K và L đã cho ở phần c)].}$$

Ta có $X = K^{-1} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 0 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -3 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 0 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 & 3 \\ 2 & -3 \\ -9 & 4 \end{pmatrix},$

$Y = (1 \quad -6) L^{-1} = (1 \quad -6) \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = (-21 \quad -16) \text{ và}$

$Z = L^{-1} \begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ -1 & 7 & -4 \end{pmatrix} K^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ -1 & 7 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -3 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 22 & 21 & 4 \\ 39 & 26 & 13 \end{pmatrix}.$

c) (**đọc thêm**) **Tìm H thỏa** $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \\ -5 & 7 & -4 \end{pmatrix}^3 \cdot H^5 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 \\ -2 & 2 & 3 \\ -3 & 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^2.$

Nếu có H thì $H \in M_3(\mathbf{R})$. Ma trận đứng trước H **không khả nghịch** nên vế trái **không khả nghịch** trong khi vế phải lại **khả nghịch**: mâu thuẫn! Vậy phương trình **vô nghiệm**.

d) (đọc thêm) Giải phương trình ma trận tổng quát: $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} X + X^t \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -8 \\ -11 & -8 \end{pmatrix} (*)$

Ta có $X \in M_2(\mathbb{R})$ nên đặt $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ và thay vào (*) rồi rút gọn để có hệ phương trình

$$\begin{pmatrix} x & y & z & t & | & \\ 5 & 0 & 1 & 0 & | & -7 \\ -1 & 2 & -2 & -3 & | & -8 \\ 5 & 3 & -4 & 4 & | & -11 \\ 0 & 4 & 0 & -6 & | & -8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x & y & z & t & | & \\ 1^* & 8 & -7 & -12 & | & -39 \\ 0 & 10 & -9 & -15 & | & -47 \\ 0 & 3 & -5 & 4 & | & -4 \\ 0 & 4 & 0 & -6 & | & -8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x & y & z & t & | & \\ 1^* & 0 & -7 & 0 & | & -23 \\ 0 & 1^* & 6 & -27 & | & -35 \\ 0 & 0 & -23 & 85 & | & 101 \\ 0 & 0 & -24 & 102 & | & 132 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} x & y & z & t & | & \\ 1^* & 0 & 0 & -119 & | & -240 \\ 0 & 1^* & 0 & 75 & | & 151 \\ 0 & 0 & 1^* & -17 & | & -31 \\ 0 & 0 & 0 & -306 & | & -612 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_1 \ E_2 \ E_3} \begin{pmatrix} x & y & z & t & | & \\ 1^* & 0 & 0 & 0 & | & -2 \\ 0 & 1^* & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1^* & 0 & | & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1^* & | & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_1 \ E_2 \ E_3 \ E_4} : \text{ nghiệm duy nhất } X = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

e) A là một ma trận vuông có dạng tam giác (đặc biệt là dạng đường chéo). Khi đó

A khả nghịch \Leftrightarrow Mọi hệ số trên đường chéo của A đều $\neq 0$.

A không khả nghịch \Leftrightarrow Có ít nhất một hệ số $= 0$ trên đường chéo của A.

CHƯƠNG 3:

Câu 1. Tính $|D| = \begin{vmatrix} 3 & -3 & -5a & 8 \\ -3b & 2b & 4ab & -6b \\ 2 & -5 & -7a & 5 \\ 4(b-a) & 3(a-b) & 5a(a-b) & 6(b-a) \end{vmatrix}$ và xét tính khả nghịch của D.

$$\text{Ta có } |D| = ab(a-b) \begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 & 8 \\ -3 & 2 & 4 & -6 \\ 2 & -5 & -7 & 5 \\ -4 & 3 & 5 & -6 \end{vmatrix} = ab(a-b) \begin{vmatrix} 1^* & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & -9 & -11 & -1 \\ 0 & -7 & -9 & 4 \end{vmatrix} = ab(a-b) \begin{vmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -9 & -11 & -1 \\ -7 & -9 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= ab(a-b) \begin{vmatrix} 0 & -1^* & 0 \\ 2 & -11 & -23 \\ 2 & -9 & -14 \end{vmatrix} = ab(a-b) \begin{vmatrix} 2 & -23 \\ 2 & -14 \end{vmatrix} = 18ab(a-b).$$

D khả nghịch $\Leftrightarrow |D| = 18ab(a-b) \neq 0 \Leftrightarrow (a \neq 0 \neq b \neq a).$

D không khả nghịch $\Leftrightarrow |D| = 18ab(a-b) = 0 \Leftrightarrow (a = 0 \text{ hay } b = 0 \text{ hay } a = b).$

Câu 2.

a) Dùng phương pháp định thức để kiểm tra tính khả nghịch rồi tìm ma trận nghịch đảo của

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 6 \\ 5 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \text{ và } B = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -7 & 3 & -1 \\ 4 & -3 & -2 \end{pmatrix} \text{ (nếu có).}$$

B không khả nghịch vì $|B| = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -7 & 3 & -1 \\ 4 & -3 & -2 \end{vmatrix} = (-30 + 8 + 21) - (12 + 15 - 28) = -1 + 1 = 0.$

A khả nghịch vì $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 6 \\ 5 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = (-4 - 24 + 60) - (6 + 16 + 60) = 32 - 82 = -50 \neq 0.$

Tính $3^2 = 9$ hệ số đồng thừa $C_{ij}^A = C_{ij} = (-1)^{i+j} |A(i, j)|$ ($1 \leq i, j \leq 3$): $C_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -10,$

$$C_{12} = -\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -14, \quad C_{13} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 9, \quad C_{21} = -\begin{vmatrix} 6 & 6 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad C_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 10,$$

$$C_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -10, \quad C_{31} = \begin{vmatrix} 6 & 6 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 30, \quad C_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 22 \text{ và } C_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = -32.$$

Lập $C = (C_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3} = \begin{pmatrix} -10 & -14 & 9 \\ 0 & 10 & -10 \\ 30 & 22 & -32 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R})$ thì $A^{-1} = \frac{1}{|A|} C^t = \frac{1}{-50} \begin{pmatrix} 10 & 0 & -30 \\ 14 & -10 & -22 \\ -9 & 10 & 32 \end{pmatrix}.$

b) Suy ra $|E|$ với $E = 4A^{-9} \cdot (A^t)^{10} A^7 (A^{-4})^t$ với t là ký hiệu của phép chuyển vị ma trận.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } |E| &= 4^3 |A^{-9}| \cdot |(A^t)^{10}| \cdot |A^7| \cdot |(A^{-4})^t| = 4^3 |A|^{-9} \cdot |A^t|^{10} \cdot |A|^7 \cdot |A^{-4}| \\ &= 4^3 |A|^{-9} \cdot |A|^{10} \cdot |A|^7 \cdot |A|^{-4} = 4^3 |A|^4 = 64(-50)^4 = 400.000.000. \end{aligned}$$

Câu 3. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -7 & m+5 \\ -m & 2m & 1 \end{pmatrix}$ với m là tham số thực.

a) Viết ma trận phụ hợp $\text{adj}(A) = C^t$ của A . Khi nào A khả nghịch?

b) Khi $m = 1$, hãy viết A^{-1} .

Tính $3^2 = 9$ hệ số đồng thừa $C_{ij}^A = C_{ij} = (-1)^{i+j} |A(i, j)|$ ($1 \leq i, j \leq 3$):

$$C_{11} = \begin{vmatrix} -7 & m+5 \\ 2m & 1 \end{vmatrix} = -2m^2 - 10m - 7, \quad C_{12} = - \begin{vmatrix} 3 & m+5 \\ -m & 1 \end{vmatrix} = -m^2 - 5m - 3, \quad C_{13} = \begin{vmatrix} 3 & -7 \\ -m & 2m \end{vmatrix} = -m,$$

$$C_{21} = - \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2m & 1 \end{vmatrix} = 4m + 3, \quad C_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -m & 1 \end{vmatrix} = 2m + 1, \quad C_{23} = - \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -m & 2m \end{vmatrix} = m,$$

$$C_{31} = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -7 & m+5 \end{vmatrix} = -3m - 1, \quad C_{32} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & m+5 \end{vmatrix} = 1 - m \quad \text{và} \quad C_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -7 \end{vmatrix} = 2.$$

$$C = (C_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3} = \begin{pmatrix} -2m^2 - 10m - 7 & -m^2 - 5m - 3 & -m \\ 4m + 3 & 2m + 1 & m \\ -3m - 1 & 1 - m & 2 \end{pmatrix} \text{ thì } C^t = \begin{pmatrix} -2m^2 - 10m - 7 & 4m + 3 & -3m - 1 \\ -m^2 - 5m - 3 & 2m + 1 & 1 - m \\ -m & m & 2 \end{pmatrix}.$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -7 & m+5 \\ -m & 2m & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1^* & 0 & 0 \\ 3 & 2 & m-1 \\ -m & -m & 2m+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & m-1 \\ -m & 2m+1 \end{vmatrix} = m^2 + 3m + 2 = (m+1)(m+2).$$

A **khả nghịch** $\Leftrightarrow |A| = (m+1)(m+2) \neq 0 \Leftrightarrow -2 \neq m \neq -1$.

b) Khi $m = 1$ thì $|A| = (1+1)(1+2) = 6 \neq 0$ nên A **khả nghịch**.

$$\text{Lúc đó từ a), thế } m = 1 \text{ để có } A^{-1} = \frac{1}{|A|} C^t = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -19 & 7 & -4 \\ -9 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Câu 4. Giải và biện luận hệ sau bằng qui tắc Cramer (các ẩn lần lượt là x_1, x_2 và x_3):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & | & -1 \\ 2 & 1 & m & | & m+1 \\ 1 & m & 3 & | & 2 \end{pmatrix}.$$

Đặt $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & m \\ 1 & m & 3 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} -1 \\ m+1 \\ 2 \end{pmatrix}$ thì hệ trên viết gọn là $AX = B$. Ta có

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & m \\ 1 & m & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1^* & 1 & -3 \\ 0 & -1 & m+6 \\ 0 & m-1 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & m+6 \\ m-1 & 6 \end{vmatrix} = -m^2 - 5m = -m(m+5).$$

$$\Delta_1 = |A_1| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -3 \\ m+1 & 1 & m \\ 2 & m & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1^* & 0 \\ m+2 & 1 & m+3 \\ m+2 & m & 3m+3 \end{vmatrix} = -(m+2) \begin{vmatrix} 1 & m+3 \\ 1 & 3m+3 \end{vmatrix} = -2m(m+2).$$

$$\Delta_2 = |A_2| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 2 & m+1 & m \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1^* & -1 & -3 \\ 0 & m+3 & m+6 \\ 0 & 3 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m+3 & m+6 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 3m.$$

$$\Delta_3 = |A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & m+1 \\ 1 & m & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1^* & 1 & -1 \\ 0 & -1 & m+3 \\ 0 & m-1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & m+3 \\ m-1 & 3 \end{vmatrix} = -m^2 - 2m = -m(m+2).$$

* Nếu $-5 \neq m \neq 0$ thì $\Delta \neq 0$ nên hệ có **nghiệm duy nhất** là

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{2(m+2)}{m+5}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-3}{m+5} \quad \text{và} \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{m+2}{m+5}.$$

* Nếu $m = -5$ thì $\Delta = 0 \neq \Delta_1 = -30$ nên hệ **vô nghiệm**.

* Nếu $m = 0$ thì $\Delta = 0 = \Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3$, ta thế $m = 0$ vào hệ và giải (PP Gauss – Jordan):

$$\begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \end{array} \right) & \xrightarrow{E_1} & \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -6 & -3 \\ 0 & -1 & 6 & 3 \end{array} \right) & \xrightarrow{E_1, E_2} & \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1^* & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right). \end{array}$$

Hệ có **vô số nghiệm** như sau: $x_3 = a$ ($a \in \mathbf{R}$), $x_1 = 2 - 3a$ và $x_2 = 6a - 3$.

Câu 5. (Các câu hỏi dạng khác với các mức độ khác nhau của Câu 4):

Cho hệ phương trình tuyến tính với tham số thực m (các ẩn lần lượt là x_1, x_2 và x_3):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & m & m+1 \\ 1 & m & 3 & 2 \end{array} \right).$$

a) Giải hệ khi $m = -4$. b) Khi nào hệ có nghiệm duy nhất ?

c) Khi nào hệ có nghiệm duy nhất và tính nghiệm duy nhất lúc đó ?

d) Khi nào hệ vô nghiệm ? e) Khi nào hệ có vô số nghiệm ?

f) Khi nào hệ có vô số nghiệm và tìm các nghiệm của hệ lúc đó ?

a) Khi $m = -4$, ta có hệ là

$$\begin{array}{c} x_1 \quad x_2 \quad x_3 \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & -4 & -3 \\ 1 & -4 & 3 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{E_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 6 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{E_1 \ E_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1^* & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 8 \end{array} \right) \xrightarrow{E_1 \ E_2 \ E_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1^* & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1^* & -2 \end{array} \right) \end{array}$$

Hệ có nghiệm duy nhất $x_1 = -4$, $x_2 = -3$ và $x_3 = -2$.

Trong các phần dưới đây, các kết quả tính toán được tính từ trong Câu 4.

b) Ta có $\Delta = |A| = -m(m+5)$. Hệ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \Delta \neq 0 \Leftrightarrow 0 \neq m \neq -5$.

c) Ta có $\Delta = |A| = -m(m+5)$, $\Delta_1 = |A_1| = -2m(m+2)$, $\Delta_2 = |A_2| = 3m$ và

$$\Delta_3 = |A_3| = -m(m+2).$$

Hệ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \Delta \neq 0 \Leftrightarrow 0 \neq m \neq -5$. Nghiệm duy nhất lúc đó là

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{2(m+2)}{m+5}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-3}{m+5} \quad \text{và} \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{m+2}{m+5}.$$

d) Khi hệ vô nghiệm thì $\Delta = |A| = -m(m+5) = 0$, nghĩa là $m = 0$ hoặc $m = -5$.

Nếu $m = 0$ thì hệ là

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -6 & -3 \\ 0 & -1 & 6 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1^* & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) : \text{hệ có vô số nghiệm (loại !)}.$$

Nếu $m = -5$ thì hệ là

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & -5 & -4 \\ 1 & -5 & 3 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & -6 & 6 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 15 \end{array} \right) : \text{hệ vô nghiệm (nhận !)}.$$

Vậy hệ vô nghiệm $\Leftrightarrow m = -5$.

e) Khi hệ có vô số nghiệm thì $\Delta = |A| = -m(m+5) = 0$, nghĩa là $m = 0$ hoặc $m = -5$.

Nếu $m = 0$ thì hệ là

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -6 & -3 \\ 0 & -1 & 6 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1^* & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) : \text{hệ có vô số nghiệm (nhận !)}.$$

Nếu $m = -5$ thì hệ là

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & -5 & -4 \\ 1 & -5 & 3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1^* & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & -6 & 6 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1^* & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -1^* & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 15 \end{pmatrix} : \text{hệ vô nghiệm (loại !)}.$$

Vậy hệ có vô số nghiệm $\Leftrightarrow m = 0$.

f) Khi hệ có vô số nghiệm thì $\Delta = |A| = -m(m+5) = 0$, nghĩa là $m = 0$ hoặc $m = -5$.

Nếu $m = 0$ thì hệ là

$$\begin{array}{c} x_1 \quad x_2 \quad x_3 \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1^* & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -6 & -3 \\ 0 & -1 & 6 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1^* & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1^* & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : \text{hệ có vô số nghiệm (nhận !)}.

E_1 $E_1 \quad E_2$$$

Nếu $m = -5$ thì hệ là

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & -5 & -4 \\ 1 & -5 & 3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1^* & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & -6 & 6 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1^* & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -1^* & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 15 \end{pmatrix} : \text{hệ vô nghiệm (loại !)}.$$

Vậy hệ có vô số nghiệm $\Leftrightarrow m = 0$.

Lúc đó hệ có **vô số nghiệm** như sau: $x_3 = a$ ($a \in \mathbf{R}$), $x_1 = 2 - 3a$ và $x_2 = 6a - 3$.
