CHƯƠNG 5 : SỰ CHÉO HÓA CỦA MA TRẬN VUÔNG

I. TỔNG TRỰC TIẾP CÁC KHÔNG GIAN CON:

1.1/ ĐỊNH NGHĨA: Giả sử $\mathbf{R}^n$ có *các không gian con* $H_1, H_2, \ldots, H_k$ ($k \geq 2$).

Ta nói $\mathbf{R}^n$ là *tổng trực tiếp* của *các không gian con* $H_1, H_2, \ldots, H_k$

(ký hiệu $\mathbf{R}^n = H_1 \oplus H_2 \oplus \cdots \oplus H_k$ hay $\mathbf{R}^n = \oplus_{j=1}^{k} H_j$) nếu:

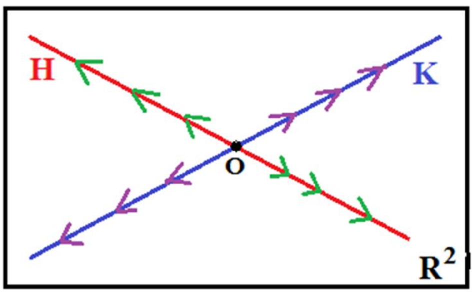
a) $\mathbf{R}^n = H_1 + H_2 + \cdots + H_k = \{ \alpha = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \mid \alpha_j \in H_j \ (1 \leq j \leq k) \}$ (*tổng thường*).

b) $\forall j \in \{ 1, 2, \ldots, k \}$, $[\, H_j \cap \sum_{j \neq t = 1}^{k} H_t \,] = \{ \mathbf{O} \}$.

Ví dụ:

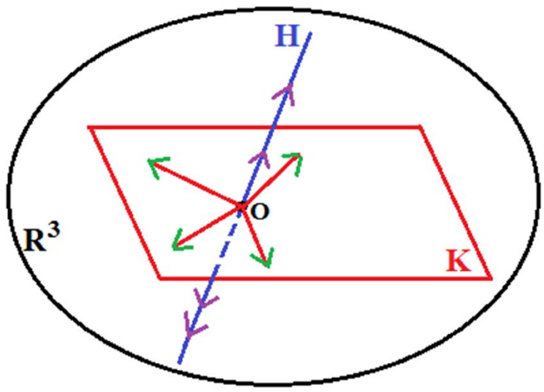
a) H và K là *các không gian con kiểu đường thẳng* trong $\mathbf{R}^2$ sao cho *các đường thẳng* tương ứng với H và K *cắt nhau*. Khi đó $\mathbf{R}^2 = H + K$ và $H \cap K = \{ \mathbf{O} \}$ nên $\mathbf{R}^2 = H \oplus K$.

b) H và K lần lượt là *các không gian con kiểu đường thẳng* và *mặt phẳng* trong $\mathbf{R}^3$ sao cho *đường thẳng* tương ứng với H *cắt mặt phẳng* tương ứng với K. Khi đó $\mathbf{R}^3 = H + K$ và $H \cap K = \{ \mathbf{O} \}$ nên $\mathbf{R}^3 = H \oplus K$.



$\mathbf{R}^2 = H + K$ và $H \cap K = \{ \mathbf{O} \}$

nên *có tổng trực tiếp* $\mathbf{R}^2 = H \oplus K$.



$\mathbf{R}^3 = H + K$ và $H \cap K = \{ \mathbf{O} \}$

nên *có tổng trực tiếp* $\mathbf{R}^3 = H \oplus K$.

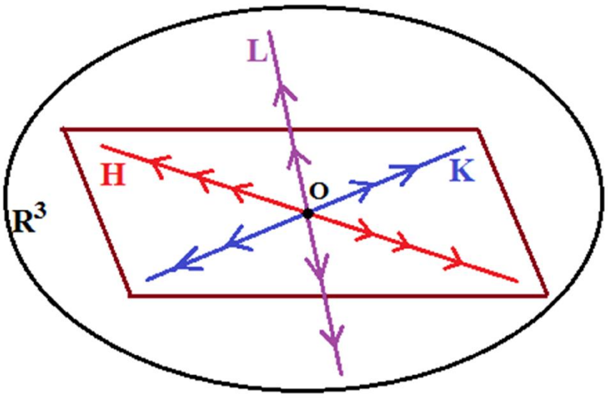
c) H, K và L là *các không gian con kiểu đường thẳng* trong $\mathbf{R}^3$ sao cho *các đường thẳng* tương ứng với H, K và L *không đồng phẳng*. Để ý $H + K$,

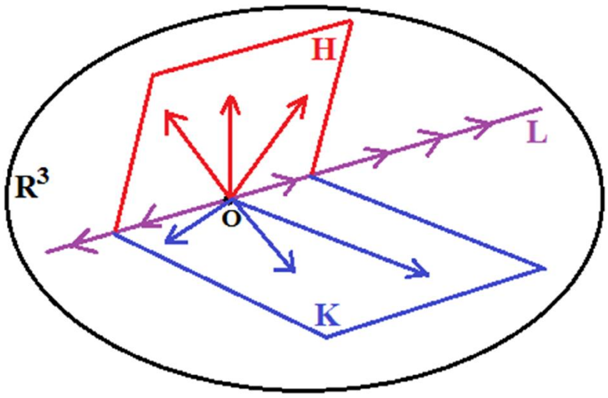
$H + L$ và $K + L$ là *các không gian con kiểu mặt phẳng* trong $\mathbf{R}^3$. Ta có

$\mathbf{R}^3 = H + K + L$, $H \cap (K + L) = K \cap (H + L) = L \cap (H + K) = \{ \mathbf{O} \}$ nên

$\mathbf{R}^3 = H \oplus K \oplus L$.

d) H và K là *các không gian con kiểu mặt phẳng* trong $\mathbf{R}^3$ và *các mặt phẳng* tương ứng với H và K *cắt nhau* theo *không gian con kiểu đường thẳng* L. Khi đó $\mathbf{R}^3 = H + K$ [*tổng thường* mà *không phải là tổng trực tiếp*] vì $H \cap K = L \neq \{ \mathbf{O} \}$ và $\dim (H \cap K) = \dim L = 1$].





$\mathbf{R}^3 = H + K + L$, $H \cap (K + L) = \{ \mathbf{O} \}$, $K \cap (H + L) = \{ \mathbf{O} \}$, $L \cap (H + K) = \{ \mathbf{O} \}$, nên *có tổng trực tiếp* $\mathbf{R}^3 = H \oplus K \oplus L$.

$\mathbf{R}^3 = H + K$ và $H \cap K = L \neq \{\mathbf{O}\}$ nên *không có tổng trực tiếp*. $\mathbf{R}^3$ *chỉ là tổng thường* của H và K.

1.2/ <u>MỆNH ĐỀ:</u> $\mathbf{R}^n$ có *các không gian con* $H_1, H_2, \ldots, H_k$ ($k \geq 2$).

Các phát biểu sau là *tương đương với nhau*:

a) $\mathbf{R}^n = H_1 \oplus H_2 \oplus \cdots \oplus H_k$ (V_n là *tổng trực tiếp* của $H_1, H_2, \ldots, H_k$).

b) $\forall \alpha \in \mathbf{R}^n, \exists! \alpha_j \in H_j$ ($j \in \{ 1, 2, \ldots, k \}$), $\alpha = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j$ (viết $\alpha = \oplus_{j=1}^{k} \alpha_j$).

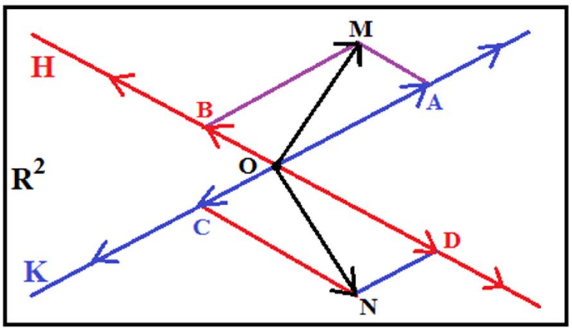
c) $\forall$cơ sở B_j của H_j ($j \in \{ 1, 2, \ldots, k \}$), $B = \bigcup_{j=1}^{k} B_j$ là *một cơ sở* của $\mathbf{R}^n$.

d) $\exists$ cơ sở B_j của H_j ($j \in \{ 1, 2, \ldots, k \}$), $B = \bigcup_{j=1}^{k} B_j$ là *một cơ sở* của $\mathbf{R}^n{}_n$.

<u>Lưu ý</u>: Nếu $\mathbf{R}^n = H_1 + H_2 + \cdots + H_k$ *không phải* là *tổng trực tiếp* thì các kết quả trên *không đúng*. $\forall \alpha \in \mathbf{R}^n$, $\exists \alpha_j \in H_j$ ($j \in \{1, 2, \ldots, k\}$), $\alpha = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j$: sự tồn

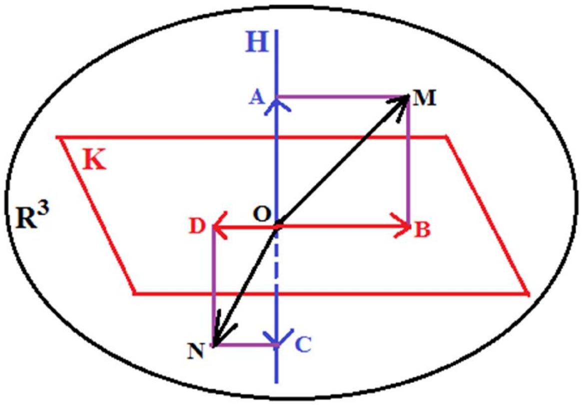
tại của các $\alpha_j \in H_j$ *không nhất thiết* là *duy nhất*. $\forall$cơ sở B_j của H_j

($j \in \{1, 2, \ldots, k\}$), $B = \bigcup_{j=1}^{k} B_j$ là *một tập sinh* (*không chắc* là *một cơ sở*) của $\mathbf{R}^n$.



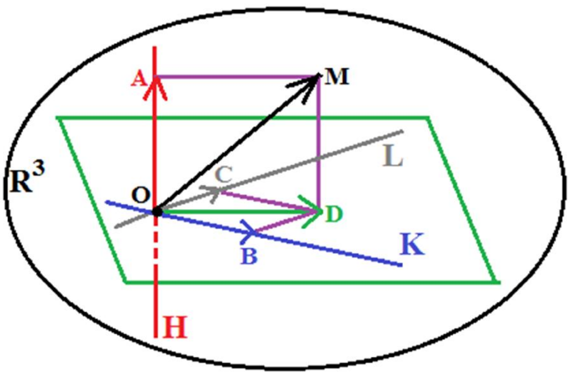
$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ và $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$ (*duy nhất*)

$\mathbf{R}^2 = K \oplus H.$



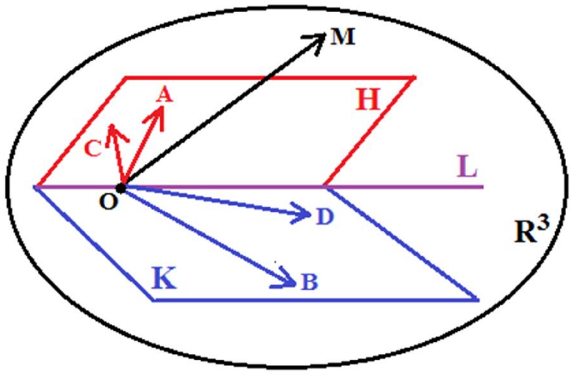
$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ và $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$ (*duy nhất*)

$\mathbf{R}^3 = H \oplus K.$



$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ (*duy nhất*)

$\mathbf{R}^3 = H \oplus K \oplus L.$



$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$ (*không duy nhất*)

$\mathbf{R}^3 = H + K$ (*không là tổng trực tiếp*).

Ví dụ:

a) $H = \langle A_1 = \{ \alpha_1 = (1, 2, 0, 3), \alpha_2 = (0, 1, -1, 1) \} \rangle \leq \mathbf{R}^4$ và A_1 là *một cơ sở* của H vì $H = \langle A_1 \rangle$ và A_1 *độc lập tuyến tính* (để ý α_1 *không tỉ lệ* với α_2)

$K = \langle A_2 = \{ \alpha_3 = (3, -2, 1, 0), \alpha_4 = (0, 2, 0, 1) \} \rangle \leq \mathbf{R}^4$ và A_2 là *một cơ sở* của K vì $K = \langle A_2 \rangle$ và A_2 *độc lập tuyến tính* (để ý α_3 *không tỉ lệ* với α_4).

Ta có $A = A_1 \cup A_2 = \{ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \}$ là *một cơ sở* của $\mathbf{R}^4$ vì

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 1^* & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 1^* & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1^* \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 3 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1^* \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = 9 \neq 0.$$

Suy ra $\mathbf{R}^4 = H \oplus K$.

Xét $\alpha = (-5,9,-4,1) \in \mathbf{R}^4 = H \oplus K$. Ta muốn phân tích $\alpha = \beta \oplus \gamma$ với $\beta \in H$

và $\gamma \in K$. Ta tìm được $[\,\alpha\,]_A = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ (bằng cách *giải phương trình vector* $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3 + c_4\alpha_4 = \alpha$ với *các ẩn số thực* c_1, c_2, c_3 và c_4).

Khi đó $\beta = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 = -2(1, 2, 0, 3) + 3(0, 1, -1, 1) = (-2, -1, -3, -3) \in H$

và $\gamma = c_3\alpha_3 + c_4\alpha_4 = -(3, -2, 1, 0) + 4(0, 2, 0, 1) = (-3, 10, -1, 4) \in K$.

b) $M = \langle B_1 = \{\beta_1 = (1, 4, 2, 3), \beta_2 = (0, 3, 1, 2)\}\rangle \leq \mathbf{R}^4$ và B_1 là *một cơ sở* của M vì $M = \langle B_1 \rangle$ và B_1 *độc lập tuyến tính* (để ý β_1 *không tỉ lệ* với β_2).

$N = \langle B_2 = \{ \beta_3 = (2, 0, 1, 0) \}\rangle \leq \mathbf{R}^4$ và B_2 là *một cơ sở* của N vì

$N = \langle B_2 \rangle$ và B_2 *độc lập tuyến tính* (để ý $\beta_3 \neq \mathbf{O}$).

$L = \langle B_3 = \{ \beta_4 = (0, -3, 0, 1) \} \rangle \leq \mathbf{R}^4$ và B_3 là *một cơ sở* của L vì

$L = \langle B_3 \rangle$ và B_3 *độc lập tuyến tính* (để ý $\beta_4 \neq \mathbf{O}$).

Ta có $B = B_1 \cup B_2 \cup B_3 = \{ \beta_1 , \beta_2 , \beta_3 , \beta_4 \}$ là *một cơ sở* của $\mathbf{R}^4$ vì

$$\begin{vmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1^* & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -8 & -3 & -6 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -8 & -3 & -6 \\ -3 & 0 & 1^* \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & 1 & 2 \\ -26 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 1^* \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & 1 \\ -26 & -3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

Suy ra $\mathbf{R}^4 = M \oplus N \oplus L$.

Xét $\alpha = (-5, -14, -5, -3) \in \mathbf{R}^4 = M \oplus N \oplus L$.

Ta muốn phân tích $\alpha = \beta \oplus \gamma \oplus \delta$ với $\beta \in M$, $\gamma \in N$ và $\delta \in L$.

Ta tìm được $[\,\alpha\,]_B = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ (bằng cách *giải phương trình vector*

$c_1\beta_1 + c_2\beta_2 + c_3\beta_3 + c_4\beta_4 = \alpha$ với *các ẩn số thực* c_1, c_2, c_3 và c_4).

Khi đó $\beta = c_1\beta_1 + c_2\beta_2 = (1, 4, 2, 3) - 4(0, 3, 1, 2) = (1, -8, -2, -5) \in M$,

$\gamma = c_3\beta_3 = -3(2, 0, 1, 0) = (-6, 0, -3, 0) \in N$ và

$\delta = c_4\beta_4 = 2(0, -3, 0, 1) = (0, -6, 0, 2) \in L$.

c) $P = < D_1 = \{ \delta_1 = (-3, 0, 2) \} > \leq \mathbf{R}^3$ và D_1 là *một cơ sở* của P vì

$P = < D_1 >$ và D_1 *độc lập tuyến tính* (để ý $\delta_1 \neq \mathbf{O}$).

$Q = < D_2 = \{ \delta_2 = (4, 1, -3) \} > \leq \mathbf{R}^3$ và D_2 là *một cơ sở* của Q vì

$Q = < D_2 >$ và D_2 *độc lập tuyến tính* (để ý $\delta_2 \neq \mathbf{O}$).

$U = < D_3 = \{ \delta_3 = (6, 1, -4) \} > \leq \mathbf{R}^3$ và D_3 là *một cơ sở* của U vì

$U = < D_3 >$ và D_3 *độc lập tuyến tính* (để ý $\delta_3 \neq \mathbf{O}$).

$D = D_1 \cup D_2 \cup D_3 = \{ \delta_1, \delta_2, \delta_3 \}$ là *một cơ sở* của $\mathbf{R}^3$ vì

$$\begin{vmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & -3 \\ 6 & 1 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 6 & 1^* & -4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$ Do đó $\mathbf{R}^3 = P \oplus Q \oplus U$.

Xét $\alpha = (25, 1, -16) \in \mathbf{R}^3 = P \oplus Q \oplus U$.

Ta muốn phân tích $\alpha = \beta \oplus \gamma \oplus \delta$ với $\beta \in P$, $\gamma \in Q$ và $\delta \in U$.

Ta tìm được $[\,\alpha\,]_D = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ (bằng cách *giải phương trình vector*

$c_1\delta_1 + c_2\delta_2 + c_3\delta_3 = \alpha$ với *các ẩn số thực* c_1, c_2 và c_3).

Khi đó $\beta = c_1\delta_1 = -5(-3, 0, 2) = (15, 0, -10) \in P$,

$\gamma = c_2\delta_2 = -2(4, 1, -3) = (-8, -2, 6) \in Q$ và

$\delta = c_3\delta_3 = 3(6, 1, -4) = (18, 3, -12) \in U$.

d) $V = < C_1 = \{ \gamma_1 = (1, 2, 2), \gamma_2 = (4, 7, 1) \} > \leq \mathbf{R}^3$ và C_1 là *một cơ sở* của V

vì $V = < C_1 >$ và C_1 *độc lập tuyến tính* (vì γ_1 *không tỉ lệ* với γ_2).

$W = < C_2 = \{ \gamma_3 = (-2,-3,4), \gamma_4 = (3,7,15) \} > \le \mathbf{R}^3$ và C_2 là *một cơ sở* của W vì $W = < C_2 >$ và C_2 *độc lập tuyến tính* (vì γ_3 *không tỉ lệ* với γ_4).

Ta có $V + W = < C = C_1 \cup C_2 > = < \{ \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4 \} >$.

Lập ma trận và biến đổi về *dạng bậc thang rút gọn*:

$$\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \gamma_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 7 & 1 \\ -2 & -3 & 4 \\ 3 & 7 & 15 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1^* & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1^* & 0 & -16 \\ 0 & 1^* & 9 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1^* & 0 & 0 \\ 0 & 1^* & 0 \\ 0 & 0 & 1^* \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ O \end{pmatrix}.$$

Ta thấy $V + W$ có *một cơ sở* là $B_o = \{ \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \}$, nghĩa là $V + W = \mathbf{R}^3$ và $\dim(V + W) = | B_o | = 3$. Như vậy $C = C_1 \cup C_2 = \{ \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4 \}$ *không phải* là *một cơ sở* của $\mathbf{R}^3 = V + W$ (do $| C | = 4 \neq 3 = \dim\mathbf{R}^3$). Như vậy $\mathbf{R}^3 = V + W$ là *tổng thường* mà không phải là *tổng trực tiếp*.

Xét $\alpha = (1, 2, -3) \in \mathbf{R}^3$. Ta có *sự phân tích không duy nhất* $\alpha = \beta + \gamma = \delta + \varepsilon$ với $\beta = 8\gamma_1 - 6\gamma_2 = (-16, -26, 10) \in V$, $\gamma = -7\gamma_3 + \gamma_4 = (17, 28, -13) \in W$, $\delta = 17\gamma_1 - 3\gamma_2 = (5, 13, 31) \in V$ và $\varepsilon = -\gamma_3 - 2\gamma_4 = (-4, -11, -34) \in W$.

1.3/ <u>MỆNH ĐỀ:</u> Giả sử $\mathbf{R}^n$ có các không gian con $H_1, H_2, \ldots, H_k$ ($k \ge 2$).

Các phát biểu sau là *tương đương với nhau*:

a) $\mathbf{R}^n = H_1 \oplus H_2 \oplus \cdots \oplus H_k$.

b) $\mathbf{R}^n = H_1 + H_2 + \cdots + H_k$ và $\dim \mathbf{R}^n = \dim H_1 + \dim H_2 + \cdots + \dim H_k$.

(nếu $\mathbf{R}^n = H_1 + H_2 + \cdots + H_k$ thì $\dim \mathbf{R}^n \le \dim H_1 + \dim H_2 + \cdots + \dim H_k$).

<u>Ví dụ:</u> Xét các Ví dụ trong (**1.2**).

a) $\mathbf{R}^4 = H \oplus K$, $\dim H = | A_1 | = 2$, $\dim K = | A_2 | = 2$ và $4 = \dim\mathbf{R}^4 = \dim H + \dim K$

b) $\mathbf{R}^4 = M \oplus N \oplus L$, $\dim M = | B_1 | = 2$, $\dim N = | B_2 | = 1$, $\dim L = | B_3 | = 1$ và $4 = \dim\mathbf{R}^4 = \dim M + \dim N + \dim L$.

c) $\mathbf{R}^3 = P \oplus Q \oplus U$, $\dim P = |D_1| = 1$, $\dim Q = |D_2| = 1$, $\dim U = |D_3| = 1$ và

$3 = \dim\mathbf{R}^3 = \dim P + \dim Q + \dim U$.

d) $\mathbf{R}^3 = V + W$ (*không trực tiếp*) nên $3 = \dim\mathbf{R}^3 < \dim V + \dim W = 2 + 2 = 4$.

II. TRỊ RIÊNG, KHÔNG GIAN RIÊNG, VECTOR RIÊNG VÀ ĐA THỨC ĐẶC TRƯNG CỦA MA TRẬN VUÔNG:

2.1/ ĐỊNH NGHĨA: Cho $A \in M_n(\mathbf{R})$ và $c \in \mathbf{R}$.

a) Đặt $E_c^A = \{ \alpha \in \mathbf{R}^n \mid A.\alpha = c.\alpha \} = \{ \alpha \in \mathbf{R}^n \mid A.\alpha - c.I_n.\alpha = \mathbf{O} \}$

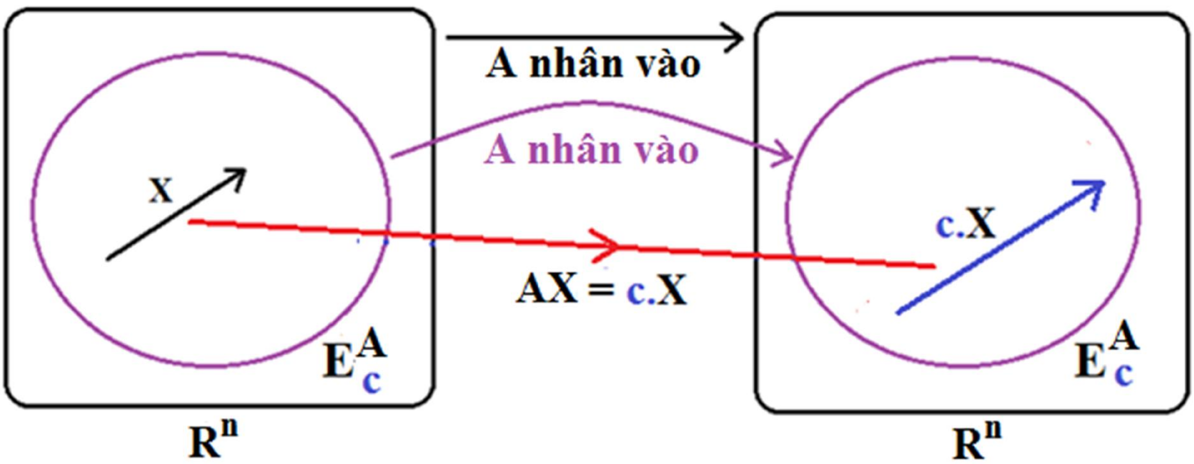
$= \{ \alpha \in \mathbf{R}^n \mid (A - c.I_n).\alpha = \mathbf{O} \}$ thì $E_c^A \leq \mathbf{R}^n$. Hơn nữa

$[\, A.E_c^A = E_c^A$ khi $c \neq 0\,]$ và $[\, A.E_c^A = \{\mathbf{O}\}$ khi $c = 0\,]$. Suy ra $A.E_c^A \subset E_c^A$.

Ký hiệu $A.E_c^A = \{ A.\alpha \mid \alpha \in E_c^A \}$ ($A.\alpha$ là dạng viết gọn của $A.\alpha^t$).

b) Nếu $E_c^A \neq \{ \mathbf{O} \}$ thì ta nói c là *một trị riêng thực* của A và E_c^A là *không gian riêng* của A ứng với *trị riêng* c. Lúc đó, $\forall \alpha \in E_c^A \setminus \{ \mathbf{O} \}$,

$A.\alpha = c.\alpha$ và α được gọi là *một vector riêng* của A ứng với *trị riêng* c.



Ví dụ:

Cho $A = \begin{pmatrix} 7 & -6 & -10 \\ -12 & 17 & 24 \\ 12 & -15 & -22 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R})$. Xét $c = 0$ và $d = -1 \in \mathbf{R}$.

$E_o^A = \{ \alpha = (u, v, w) \in \mathbf{R}^3 \mid A\alpha = \mathbf{O} \} = \{ \mathbf{O} = (0, 0, 0) \}$ do các phép biến đổi đưa về *dạng bậc thang rút gọn* cho ta (u = v = w = 0).

$$\begin{array}{ccc} u & v & w \end{array}\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\begin{array}{ccc} u & v & w \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 7 & -6 & -10 & 0 \\ -12 & 17 & 24 & 0 \\ 12 & -15 & -22 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -15 & -16 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ -2 & -3 & -2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -33 & -34 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1^* & 0 \end{array}\right).$$

Suy ra $c = 0$ *không phải* là *một trị riêng thực* của A.

Ta có $(A + I_3) = \begin{pmatrix} 7 & -6 & -10 \\ -12 & 17 & 24 \\ 12 & -15 & -22 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -6 & -10 \\ -12 & 18 & 24 \\ 12 & -15 & -21 \end{pmatrix}$ và

$E^A_{-1} = \{\alpha = (u,v,w) \in \mathbf{R}^3 \mid (A + I_3)\alpha = \mathbf{O}\} = \{\alpha = (a, -2a, 2a) \mid a \in \mathbf{R}\} \neq \{ \mathbf{O} \}$

do các phép biến đổi về *dạng bậc thang rút gọn* cho ta

$w = 2a$ ($a \in \mathbf{R}$), $u = a$, $v = -2a$:

$$\begin{array}{ccc} u & v & w \end{array}\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\begin{array}{ccc} u & v & w \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 8 & -6 & -10 & 0 \\ -12 & 18 & 24 & 0 \\ 12 & -15 & -21 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -3 & -5 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -6 & -6 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1^* & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1^* & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Suy ra $d = -1$ là *một trị riêng thực* của A và E^A_{-1} là *không gian riêng* của A ứng với *trị riêng* (-1). $\forall \alpha \in E^A_{-1} \setminus \{\mathbf{O}\}$, $A(\alpha) = -\alpha$ và α được gọi là *một vector riêng* của A ứng với *trị riêng* (-1).

2.2/ <u>ĐỊNH NGHĨA:</u> Cho $A \in M_n(\mathbf{R})$.

Cho *biến số* x lấy *giá trị thực* . Đặt $p_A(x) = \det(x.I_n - A)$ thì $p_A(x)$ là *một đa thức đơn khởi bậc* n trên **R** có dạng

$p_A(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_o$ với $a_{n-1}, \dots, a_1, a_o \in \mathbf{R}$.

Ta nói $p_A(x)$ là *đa thức đặc trưng* của *ma trận vuông thực* A.

<u>Ví dụ:</u>

$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -7 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R})$ có $xI_3 - A = \begin{pmatrix} x+3 & -4 & 7 \\ 0 & x-2 & 0 \\ 0 & 0 & x-9 \end{pmatrix}$ (x là *biến thực*)

Ta có $p_A(x) = |xI_3 - A| = (x+3)(x-2)(x-9) = x^3 - 8x^2 - 15x + 54$.

2.3/ <u>MỆNH ĐỀ:</u> Cho $A \in M_n(\mathbf{R})$ và $c \in \mathbf{R}$. Khi đó

a) c là *một trị riêng thực* của $A \Leftrightarrow p_A(c) = 0$.

b) Suy ra: *tập hợp các trị riêng thực* của A chính là *tập hợp các nghiệm thực* của *đa thức đặc trưng* $p_A(x)$.

<u>Ví dụ:</u>

a) $A = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -7 & -2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R})$ có $p_A(x) = |\, xI_2 - A \,| = \begin{vmatrix} x-6 & -3 \\ 7 & x+2 \end{vmatrix} = x^2 - 4x + 9$.

$p_A(x)$ vô nghiệm trên $\mathbf{R}$ (vì $\Delta' = -5 < 0$) nên A không có trị riêng thực.

b) $B = \begin{pmatrix} -6 & 3 & -1 \\ -12 & 7 & -3 \\ -16 & 12 & -6 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R})$ có $p_B(x) = |\, xI_3 - B \,| = \begin{vmatrix} x+6 & -3 & 1 \\ 12 & x-7 & 3 \\ 16 & -12 & x+6 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} x+6 & -3 & 1 \\ -3x-6 & x+2 & 0 \\ 16 & -12 & x+6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-3 & -3 & 1 \\ 0 & x+2 & 0 \\ -20 & -12 & x+6 \end{vmatrix} = (x+2)\begin{vmatrix} x-3 & 1 \\ -20 & x+6 \end{vmatrix} = (x+1)(x+2)^2$.

Ta nói B có hai trị riêng thực là $c_1 = -1$ và $c_2 = -2$.

III. <u>SỰ CHÉO HÓA CỦA MA TRẬN VUÔNG:</u>

3.1/ <u>MỆNH ĐỀ:</u>

a) Cho $c_1, c_2, \ldots, c_m$ là *các trị riêng thực khác nhau* của $A \in M_n(\mathbf{R})$ ($m \geq 2$) và $W = (E^A_{c_1} + E^A_{c_2} + \cdots + E^A_{c_m}) \leq \mathbf{R}^n$. Khi đó ta có $W = E^A_{c_1} \oplus E^A_{c_2} \oplus \cdots \oplus E^A_{c_m}$.

c) Như vậy *tổng của các không gian riêng ứng với các trị riêng thực khác nhau* của *ma trận vuông* là *tổng trực tiếp*.

3.2/ <u>ĐỊNH NGHĨA:</u> Cho $A, H, K \in M_n(\mathbf{R})$.

a) Ta nói H và K *đồng dạng với nhau* nếu có P *khả nghịch* $\in M_n(\mathbf{R})$ thỏa $P^{-1}HP = K$ (lúc đó ta cũng có $Q^{-1}KQ = H$ với $Q = P^{-1}$). *Quan hệ đồng dạng* trên $M_n(\mathbf{R})$ là *một quan hệ tương đương*.

b) A *chéo hóa được* trên **R** nếu A *đồng dạng với một ma trận đường chéo*,

nghĩa là có P *khả nghịch* $\in M_n(\mathbf{R})$ thỏa $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$.

($P^{-1}AP$ là *một ma trận đường chéo*).

<u>Ví dụ:</u>

$A = \begin{pmatrix} 7 & -12 & 12 \\ -6 & 17 & -15 \\ -10 & 24 & -22 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R})$. Ta có $P = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & -3 \\ 6 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ *khả nghịch* $\in M_3(\mathbf{R})$

với $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ và $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ nên A *chéo hóa được* trên **R**.

3.3/ <u>ĐỊNH LÝ:</u> Cho $A \in M_n(\mathbf{R})$. Khi đó

a) A *chéo hóa được* trên **R** $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (*)\, p_A(x) = (x-c_1)^{r_1}(x-c_2)^{r_2}\ldots(x-c_k)^{r_k}, c_1, c_2, \ldots, c_k \in \mathbb{R}, r_1, r_2, \ldots, r_k \in \mathbb{N}\setminus\{0\} \\ (**)\dim E^A_{c_j} = r_j\,(1 \le j \le k) \end{cases}.$$

b) Khi xảy ra (*) thì ta nói đa thức $p_A(x)$ *tách được* trên **R**.

3.4/ <u>MỆNH ĐỀ:</u> Cho $A \in M_n(\mathbf{R})$. Nếu $p_A(x)$ có n *nghiệm thực khác nhau* thì

A *chéo hóa được trên* **R**.

3.5/ <u>HỆ QUẢ:</u> Cho $A \in M_n(\mathbf{R})$. Khi đó:

a) Để ý $\overline{p \wedge q} \Leftrightarrow (\overline{p} \vee \overline{q})$ [nếu p và q có *nội dung độc lập với nhau*].

$\overline{p \wedge q} \Leftrightarrow [\overline{p} \vee (p \wedge \overline{q})]$ (nếu có p thì *mới hiểu được* q).

b) A *không chéo hóa được* trên **R** $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ ($p_A(x)$ *không tách được* trên **R**) hoặc

$$\begin{cases} (*)\, p_A(x) = (x-c_1)^{r_1}(x-c_2)^{r_2}\ldots(x-c_k)^{r_k}, c_1, c_2, \ldots, c_k \in \mathbb{R}, r_1, r_2, \ldots, r_k \in \mathbb{N}\setminus\{0\} \\ (**) \exists j \in \{1, 2, \ldots, k\}, \dim E^A_{c_j} < r_j \end{cases}.$$

Ví dụ:

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R})$ có $p_A(x) = |xI_3 - A| = \begin{vmatrix} x-3 & -1 & 3 \\ -3 & x-1 & 1 \\ -2 & 2 & x \end{vmatrix} =$

$$= \begin{vmatrix} x-4 & -1 & 3 \\ x-4 & x-1 & 1 \\ 0 & 2 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-4 & -1 & 3 \\ 0 & x & -2 \\ 0 & 2 & x \end{vmatrix} = (x-4)\begin{vmatrix} x & -2 \\ 2 & x \end{vmatrix} = (x-4)(x^2+4).$$

Do $p_A(x)$ *không tách được* trên $\mathbf{R}$ nên A *không chéo hóa được* trên $\mathbf{R}$.

b) $H = \begin{pmatrix} -10 & 13 & -4 \\ -13 & 16 & -4 \\ -12 & 12 & -1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R})$ có $p_H(x) = |xI_3 - H| = \begin{vmatrix} x+10 & -13 & 4 \\ 13 & x-16 & 4 \\ 12 & -12 & x+1 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} x-3 & -13 & 4 \\ x-3 & x-16 & 4 \\ 0 & -12 & x+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-3 & -13 & 4 \\ 0 & x-3 & 0 \\ 0 & -12 & x+1 \end{vmatrix} = (x-3)\begin{vmatrix} x-3 & 0 \\ -12 & x+1 \end{vmatrix} = (x-3)^2(x+1).$$

$E_3^H = \{\alpha \in \mathbf{R}^3 \mid (H - 3I_3)\alpha = \mathbf{O}\} = \{\alpha = (v, v, 0) = v(1, 1, 0) \mid v \in \mathbf{R}\}$

có *cơ sở* $C = \{ \alpha = (1, 1, 0) \}$ do các phép biến đổi đưa về *dạng bậc thang rút gọn* cho ta ($v \in \mathbf{R}$, $u = v$, $w = 0$) :

$$(H - 3I_3 \mid \mathbf{O}) = \begin{array}{c} \begin{matrix} u & v & w & \ \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} -13 & 13 & -4 & 0 \\ -13 & 13 & -4 & 0 \\ -12 & 12 & -4 & 0 \end{array}\right) \end{array} \to \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -40 & 0 \end{array}\right) \to \begin{array}{c} \begin{matrix} u & v & w & \ \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}.$$

Do $\dim E_3^H = |C| = 1 < 2$ nên H *không chéo hóa được* trên $\mathbf{R}$.

3.6/ <u>CHÉO HÓA MA TRẬN:</u> Cho $A \in M_n(\mathbf{R})$ và A *chéo hóa được* trên $\mathbf{R}$,

nghĩa là $\begin{cases} (*)\, p_A(x) = (x-c_1)^{r_1}(x-c_2)^{r_2}\ldots(x-c_k)^{r_k}, c_1, c_2, \ldots, c_k \in \mathbb{R}, r_1, r_2, \ldots, r_k \in \mathbb{N}\setminus\{0\} \\ (**)\dim E_{c_j}^A = r_j\, (1 \le j \le k) \end{cases}$.

* $\forall j \in \{ 1, 2, \ldots, k \}$, tìm *một cơ sở* B_j cho $E_{c_j}^A = \{\alpha \in \mathbf{R}^n \mid (A - c_jI_n)\alpha = \mathbf{O}\}$.

(cơ sở B_j *không duy nhất*).

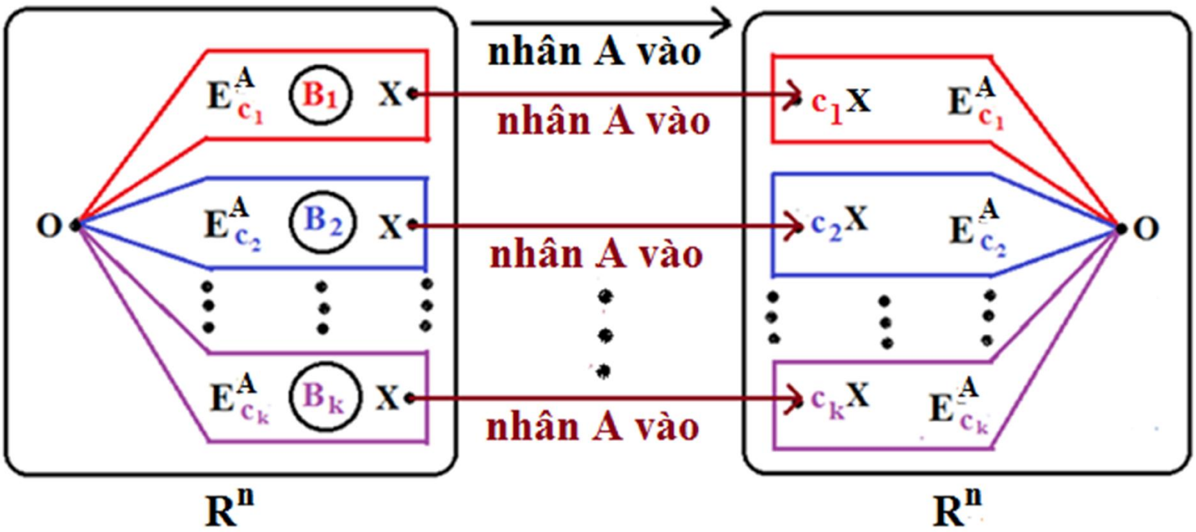
* Đặt $B = B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_k$ thì B là *một cơ sở* của $\mathbf{R}^n = E_{c_1}^A \oplus E_{c_2}^A \oplus \cdots \oplus E_{c_k}^A$

(cơ sở B *không duy nhất*).

* Đặt P = (C → B) với C là *cơ sở chính tắc* của $\mathbf{R}^n$ thì P *khả nghịch* $\in M_n(\mathbf{R})$

P *không duy nhất* và

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} c_1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & c_1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & c_k & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & c_k \end{pmatrix}$$ (∀j ∈ {1, 2,…, k}, c_j xuất hiện r_j lần).



$$\mathbf{R}^n = E^A_{c_1} \oplus E^A_{c_2} \oplus \cdots \oplus E^A_{c_k} \text{ và } A.E^A_{c_j} \subset E^A_{c_j} \ (1 \le j \le k).$$

<u>Ví dụ:</u>

a) $A = \begin{pmatrix} 7 & -12 & -2 \\ 3 & -4 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R})$ có $p_A(x) = |xI_3 - A| = \begin{vmatrix} x-7 & 12 & 2 \\ -3 & x+4 & 0 \\ 2 & 0 & x+2 \end{vmatrix} =$

$= (x - 7)(x + 4)(x + 2) - 4(x + 4) + 36(x + 2) = x(x + 1)(x - 2).$

$p_A(x)$ có 3 *nghiệm thực đơn* là 0, – 1 và 2 nên A *chéo hóa được* trên **R**.

$$A + I_3 = \begin{pmatrix} 8 & -12 & -2 \\ 3 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ và } A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 5 & -12 & -2 \\ 3 & -6 & 0 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

$E^A_0 = \{ \alpha \in \mathbf{R}^3 \mid A\alpha = \mathbf{O} \} = \{ \alpha = (-4a, -3a, 4a) = a(-4, -3, 4) \mid a \in \mathbf{R} \}$

có *một cơ sở* là $B_1 = \{ \alpha_1 = (-4, -3, 4) \}$ do các phép biến đổi đưa về *dạng bậc thang rút gọn* cho ta $[\, w = 4a \ (a \in \mathbf{R}),\ u = -4a,\ v = -3a \,]$.

$$(A \mid \mathbf{O}) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u & v & w \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 7 & -12 & -2 & 0 \\ 3 & -4 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \end{array} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & -4 & -2 & 0 \\ 0 & 8 & 6 & 0 \\ 0 & -8 & -6 & 0 \end{array}\right) \to \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u & v & w \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1^* & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}.$$

$E^A_{-1} = \{\alpha \in \mathbf{R}^3 \mid (A + I_3)\alpha = \mathbf{O}\} = \{\alpha = (-a, -a, 2a) = a(-1, -1, 2) \mid a \in \mathbf{R}\}$

có *một cơ sở* là $B_2 = \{ \alpha_2 = (-1, -1, 2) \}$ do các phép biến đổi đưa về *dạng bậc thang rút gọn* cho ta $[\, w = 2a \ (a \in \mathbf{R}),\ u = -a,\ v = -a \,]$.

$$(A + I_3 \mid \mathbf{O}) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u & v & w \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 8 & -12 & -2 & 0 \\ 3 & -3 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \end{array} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \\ 0 & -6 & -3 & 0 \end{array}\right) \to \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u & v & w \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}.$$

$E^A_{2} = \{\alpha \in \mathbf{R}^3 \mid (A - 2I_3)\alpha = \mathbf{O}\} = \{\alpha = (-2w, -w, w) = w(-2, -1, 1) \mid w \in \mathbf{R}\}$

có *một cơ sở* là $B_3 = \{ \alpha_3 = (-2, -1, 1) \}$ do các phép biến đổi đưa về *dạng bậc thang rút gọn* cho ta $(w \in \mathbf{R},\ u = -2w,\ v = -w)$.

$$(A - 2I_3 \mid \mathbf{O}) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u & v & w \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -12 & -2 & 0 \\ 3 & -6 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right) \end{array} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -12 & -10 & 0 \\ 0 & 30 & 30 & 0 \\ 0 & -24 & -24 & 0 \end{array}\right) \to \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u & v & w \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}.$$

$\mathbf{R}^3 = E^A_0 \oplus E^A_{-1} \oplus E^A_2$ có *một cơ sở* là $B = B_1 \cup B_2 \cup B_3 = \{ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \}$ với

$A\alpha_1 = 0.\alpha_1 = \mathbf{O}$, $A\alpha_2 = -\alpha_2$ và $A\alpha_3 = 2\alpha_3$.

Đặt $P = (C \to B) = ([\alpha_1]_C \ [\alpha_2]_C \ [\alpha_3]_C) = \begin{pmatrix} -4 & -1 & -2 \\ -3 & -1 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ với C là *cơ sở chính tắc* của $\mathbf{R}^3$ thì P *khả nghịch*, $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -1 & 4 & 2 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ và $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

b) $H = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R})$ có $p_H(x) = |xI_3 - H| = \begin{vmatrix} x+1 & -3 & 1 \\ 3 & x-5 & 1 \\ 3 & -3 & x-1 \end{vmatrix} =$

$$= \begin{vmatrix} x-2 & 2-x & 0 \\ 3 & x-5 & 1 \\ 3 & -3 & x-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-2 & 0 & 0 \\ 3 & x-2 & 1 \\ 3 & 0 & x-1 \end{vmatrix} = (x-2)\begin{vmatrix} x-2 & 1 \\ 0 & x-1 \end{vmatrix} = (x-1)(x-2)^2.$$

$$H - I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -3 & 4 & -1 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{và} \quad H - 2I_3 = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -1 \\ -3 & 3 & -1 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

$E_1^H = \{\alpha \in \mathbf{R}^3 \mid (H - I_3)\alpha = \mathbf{O}\} = \{ \alpha = (w, w, w) = w(1, 1, 1) \mid w \in \mathbf{R} \}$ có *một cơ sở* là $B_1 = \{ \alpha_1 = (1, 1, 1) \}$ và $\dim E_1^H = |B_1| = 1$ do các phép biến đổi đưa về *dạng bậc thang rút gọn* cho ta ($w \in \mathbf{R}$, $u = w$, $v = w$).

$$(H - I_3 \mid \mathbf{O}) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u & v & w \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 3 & -1 & 0 \\ -3 & 4 & -1 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right) \to \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u & v & w \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1^* & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}.$$

$E_2^H = \{\alpha \in \mathbf{R}^3 \mid (H - 2I_3)\alpha = \mathbf{O}\} = \{\alpha = (u, v, w) \in \mathbf{R}^3 \mid -3u + 3v - w = 0\}$

$= \{ \alpha = (u, v, 3v - 3u) = u(1, 0, -3) + v(0, 1, 3) \mid u, v \in \mathbf{R} \}$ có *một cơ sở* là $B_2 = \{ \alpha_2 = (1, 0, -3), \alpha_3 = (0, 1, 3) \}$ và $\dim E_2^H = |B_2| = 2$.

Ta có $p_H(x) = (x-1)(x-2)^2$ *tách được* trên $\mathbf{R}$, $\dim E_1^H = 1$ và $\dim E_2^H = 2$ nên H *chéo hóa được* trên $\mathbf{R}$. $\mathbf{R}^3 = E_1^H \oplus E_2^H$ có *một cơ sở* là $B = B_1 \cup B_2 =$ $= \{ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \}$ với $H\alpha_1 = \alpha_1$, $H\alpha_2 = 2\alpha_2$ và $H\alpha_3 = 2\alpha_3$.

Đặt $P = (C \to B) = ([\alpha_1]_C \ [\alpha_2]_C \ [\alpha_3]_C) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ với C là *cơ sở chính tắc* của $\mathbf{R}^3$ thì P *khả nghịch*, $P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ và $P^{-1}HP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

IV. ÁP DỤNG:

4.1/ LŨY THỪA VÀ CĂN THỨC CỦA MA TRẬN CHÉO HÓA ĐƯỢC:

Cho $A \in M_n(\mathbf{R})$ và A *chéo hóa được* trên $\mathbf{R}$. Xét số nguyên $k \geq 2$.

Tìm ma trận P *khả nghịch* $\in M_n(\mathbf{R})$ thỏa $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$.

Suy ra $A = P\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}P^{-1}$ và $A^k = P\begin{pmatrix} \lambda_1^k & & & \\ & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^k \end{pmatrix}P^{-1}$.

Nếu có $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n \in \mathbf{R}$ thỏa $\nu_j^k = \lambda_j$ ($1 \le j \le n$), ta chọn

$$H = P\begin{pmatrix} \nu_1 & & & \\ & \nu_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \nu_n \end{pmatrix}P^{-1} \in M_n(\mathbf{R}) \text{ thì } H^k = P\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}P^{-1} = A.$$

Ta nói H là *một căn bậc* k của A trong $M_n(\mathbf{R})$.

<u>Ví dụ:</u> Cho $A \in M_3(\mathbf{R})$ trong **Ví dụ (3.6)** và k là số nguyên ≥ 2. Ta có

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ với } P = \begin{pmatrix} -4 & -1 & -2 \\ -3 & -1 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ và } P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -1 & 4 & 2 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R}).$$

Suy ra $A = P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}P^{-1}$ và $A^k = P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^k P^{-1} = P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^k & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix}P^{-1}$

$$= (-1)^k S + 2^k T \text{ với } S = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -2 \\ 1 & -4 & -2 \\ -2 & 8 & 4 \end{pmatrix} \text{ và } T = \begin{pmatrix} 4 & -8 & -2 \\ 2 & -4 & -1 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R}).$$

Cho số nguyên lẻ $r \ge 3$.

Chọn $H = P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt[r]{2} \end{pmatrix}P^{-1} \in M_3(\mathbf{R})$ thì $H^r = P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}P^{-1} = A$.

Ta có $H = (-1)S + \sqrt[r]{2}\,T$ với $S = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -2 \\ 1 & -4 & -2 \\ -2 & 8 & 4 \end{pmatrix}$ và $T = \begin{pmatrix} 4 & -8 & -2 \\ 2 & -4 & -1 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R})$.

5.2/ GIẢI MỘT SỐ HỆ THỨC ĐỆ QUI DỰA THEO SỰ CHÉO HÓA CỦA MA TRẬN VUÔNG:

a) Tìm u_n theo n (n nguyên ≥ 0) nếu

$u_o = 1$, $u_1 = 2$ và $u_{n+2} = u_{n+1} + 6u_n$, $\forall n \geq 0$.

$\forall k \geq 0$, đặt $t_k = \begin{pmatrix} u_{k+1} \\ u_k \end{pmatrix}$ thì $t_o = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ và $t_{k+1} = \begin{pmatrix} u_{k+2} \\ u_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{k+1} + 6u_k \\ u_{k+1} \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{k+1} \\ u_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} t_k$. Vậy $\forall k \geq 0$, $t_{k+1} = At_k$ với $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =$

$= P\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}P^{-1}$ và $P = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ (A *chéo hóa được* trên **R**).

Do đó, $\forall n \geq 0$, $t_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = At_{n-1} = A^2 t_{n-2} = \cdots = A^{n-1}t_1 = A^n t_o =$

$= P\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}^n P^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4\cdot 3^{n+1} + (-2)^{n+1} \\ 4\cdot 3^n + (-2)^n \end{pmatrix}$. Suy ra $\forall n \geq 0$, $u_n = \frac{1}{5}[\, 4.3^n + (-2)^n \,]$.

Giải thích *tính chéo hóa được* trên **R** của A:

$p_A(x) = |\, xI_2 - A \,| = \begin{vmatrix} x-1 & -6 \\ -1 & x \end{vmatrix} = x^2 - x + 6 = (x-3)(x+2)$ có 2 *nghiệm thực đơn* ($c_1 = 3 \neq c_2 = -2$) nên A *chéo hóa được* trên **R**.

$$A - 3I_2 = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \text{ và } A + 2I_2 = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$E_3^A = \{\, \alpha \in \mathbf{R}^2 \mid (A - 3I_2)\alpha = \mathbf{O} \,\} = \{\, \alpha = (a, b) \in \mathbf{R}^2 \mid a - 3b = 0 \,\}$

$= \{\, \alpha = (3b, b) = b(3,1) \mid b \in \mathbf{R} \,\}$ có cơ sở $C_1 = \{\, \alpha_1 = (3, 1) \,\}$.

$E_{-2}^A = \{\, \alpha \in \mathbf{R}^2 \mid (A + 2I_2)\alpha = \mathbf{O} \,\} = \{\, \alpha = (a, b) \in \mathbf{R}^2 \mid a + 2b = 0 \,\}$

$= \{\, \alpha = (-2b, b) = b(-2,1) \mid b \in \mathbf{R} \,\}$ có cơ sở $C_2 = \{\, \alpha_2 = (-2, 1) \,\}$.

$\mathbf{R}^2 = E_3^A \oplus E_{-2}^A$ có *cơ sở* $C = C_1 \cup C_2 = \{\, \alpha_1 = (3, 1), \alpha_2 = (-2, 1) \,\}$.

Đặt $P = (B \to C) = ([\alpha_1]_B \; [\alpha_2]_B) = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ với B là *cơ sở chính tắc*

của $\mathbf{R}^2$ thì P *khả nghịch*, $P^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ và $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

b) Tìm u_n và v_n theo n (n nguyên ≥ 0) nếu

$u_o = 2$, $v_o = 5$, $u_{n+1} = u_n - 4v_n$ và $v_{n+1} = -u_n + v_n$, $\forall n \geq 0$.

$\forall k \geq 0$, đặt $t_k = \begin{pmatrix} u_k \\ v_k \end{pmatrix}$ thì $t_o = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ và $t_{k+1} = \begin{pmatrix} u_{k+1} \\ v_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_k - 4v_k \\ -u_k + v_k \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_k \\ v_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} t_k$. Vậy $\forall k \geq 0$, $t_{k+1} = At_k$ với $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} =$

$= P\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}P^{-1}$ và $P = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ (A *chéo hóa được* trên $\mathbf{R}$).

Do đó $\forall n \geq 0$, $t_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = At_{n-1} = A^2 t_{n-2} = \cdots = A^{n-1}t_1 = A^n t_o$

$= P\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^n P^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}P^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6(-1)^n - 4.3^n \\ 3(-1)^n + 2.3^n \end{pmatrix}$.

Suy ra $\forall n \geq 0$, $u_n = 6(-1)^n - 4.3^n$ và $v_n = 3(-1)^n + 2.3^n$.

Giải thích *tính chéo hóa được* trên $\mathbf{R}$ của A:

$p_A(x) = |xI_2 - A| = \begin{vmatrix} x-1 & 4 \\ 1 & x-1 \end{vmatrix} = x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1)$ có 2 *nghiệm thực đơn* ($c_1 = 3 \neq c_2 = -1$) nên A *chéo hóa được* trên $\mathbf{R}$.

$$A - 3I_2 = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \text{ và } A + I_2 = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$E_3^A = \{ \alpha \in \mathbf{R}^2 \mid (A - 3I_2)\alpha = \mathbf{O} \} = \{ \alpha = (a, b) \in \mathbf{R}^2 \mid -a - 2b = 0 \}$

$= \{ \alpha = (-2b, b) = b(-2, 1) \mid b \in \mathbf{R} \}$ có *cơ sở* $C_1 = \{ \alpha_1 = (-2, 1) \}$.

$E_{-1}^A = \{ \alpha \in \mathbf{R}^2 \mid (A + I_2)\alpha = \mathbf{O} \} = \{ \alpha = (a, b) \in \mathbf{R}^2 \mid -a + 2b = 0 \}$

$= \{ \alpha = (2b, b) = b(2, 1) \mid b \in \mathbf{R} \}$ có *cơ sở* $C_2 = \{ \alpha_2 = (2, 1) \}$.

$\mathbf{R}^2 = E_3^A \oplus E_{-1}^A$ có *cơ sở* $C = C_1 \cup C_2 = \{ \alpha_1 = (-2, 1), \alpha_2 = (2, 1) \}$.

Đặt $P = (B \to C) = ([\alpha_1]_B \ [\alpha_2]_B) = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ với B là *cơ sở chính tắc*

của $\mathbf{R}^2$ thì P *khả nghịch*, $P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ và $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

c) Tìm u_n, v_n và w_n theo n (n nguyên ≥ 0) nếu $u_o = -2, v_o = 3, w_o = -1$,

$u_{n+1} = 6u_n + 12v_n + 16w_n$, $v_{n+1} = -3u_n - 7v_n - 12w_n$ và

$w_{n+1} = u_n + 3v_n + 6w_n, \forall n \geq 0$.

$\forall k \geq 0$, đặt $t_k = \begin{pmatrix} u_k \\ v_k \\ w_k \end{pmatrix}$ thì $t_o = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ và $t_{k+1} = \begin{pmatrix} u_{k+1} \\ v_{k+1} \\ w_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6u_k + 12v_k + 16w_k \\ -3u_k - 7v_k - 12w_k \\ u_k + 3v_k + 6w_k \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 6 & 12 & 16 \\ -3 & -7 & -12 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_k \\ v_k \\ w_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 12 & 16 \\ -3 & -7 & -12 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} t_k$. Vậy $\forall k \geq 0, t_{k+1} = At_k$ với

$A = \begin{pmatrix} 6 & 12 & 16 \\ -3 & -7 & -12 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}P^{-1}$ và $P = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -4 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -4 \\ -3 & -8 & -12 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

(A *chéo hóa được* trên $\mathbf{R}$).

Do đó $\forall n \geq 0, t_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = At_{n-1} = A^2 t_{n-2} = \cdots = A^{n-1}t_1 = A^n t_o$

$= P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^n P^{-1}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}P^{-1}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10.2^n - 12 \\ 9 - 6.2^n \\ 2.2^n - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.2^{n+1} - 12 \\ 9 - 3.2^{n+1} \\ 2^{n+1} - 3 \end{pmatrix}$.

Suy ra $\forall n \geq 0, u_n = 5.2^{n+1} - 12$, $v_n = 9 - 2^{n+1}$ và $w_n = 2^{n+1} - 3$.

Giải thích *tính chéo hóa được* trên $\mathbf{R}$ của A:

$A = \begin{pmatrix} 6 & 12 & 16 \\ -3 & -7 & -12 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R})$ có $p_A(x) = | xI_3 - A | = \begin{vmatrix} x-6 & -12 & -16 \\ 3 & x+7 & 12 \\ -1 & -3 & x-6 \end{vmatrix} =$

$$= \begin{vmatrix} x-6 & -12 & -16 \\ 0 & x-2 & 3x-6 \\ -1 & -3 & x-6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-6 & -12 & 20 \\ 0 & x-2 & 0 \\ -1 & -3 & x+3 \end{vmatrix} = (x-2)\begin{vmatrix} x-6 & 20 \\ -1 & x+3 \end{vmatrix} = (x-1)(x-2)^2.$$

$E_1 = \{ X \in \mathbf{R}^3 \ / \ (A - I_3)X = \mathbf{O} \}$.

$$X = (u, v, w) \in E_1 \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 12 & 16 & 0 \\ -3 & -8 & -12 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 9 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$E_1 = \{ X = (4w, -3w, w) = w(4, -3, 1) \ / \ w \in \mathbf{R} \}$ có cơ sở

$C_1 = \{ X_1 = (4, -3, 1) \}$ và $\dim E_1 = | C_1 | = 1$.

$E_2 = \{ X \in \mathbf{R}^3 \ / \ (A - 2I_3)X = \mathbf{O} \}$.

$$X = (u, v, w) \in E_2 \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 12 & 16 & 0 \\ -3 & -9 & -12 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 0 \end{array}\right).$$

$E_2 = \{ X = (-3v - 4w, v, w) = v(-3, 1, 0) + w(-4, 0, 1) \ / \ v, w \in \mathbf{R} \}$ có cơ sở $C_2 = \{ X_2 = (-3, 1, 0), X_3 = (-4, 0, 1) \}$ và $\dim E_2 = | C_2 | = 2$. Suy ra A chéo hóa được trên $\mathbf{R}$.

Đặt $C = C_1 \cup C_2 = \{ X_1, X_2, X_3 \}$ thì C là một cơ sở của $\mathbf{R}^3$ vì $\mathbf{R}^3 = E_1 \oplus E_2$.

Gọi $B = \{ \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \}$ là cơ sở chính tắc của $\mathbf{R}^3$.

Xét $P = (B \to C) = ([X_1]_B \ [X_2]_B \ [X_3]_B) = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -4 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ thì P khả nghịch , $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -4 \\ -3 & -8 & -12 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ và $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
