Chương 7
SỐ ĐẾM NÂNG CAO

Đại học Khoa Học Tự nhiên Tp. Hồ Chí Minh

Nội dung

Chương 7. SỐ ĐẾM NÂNG CAO

7. Số Catalan

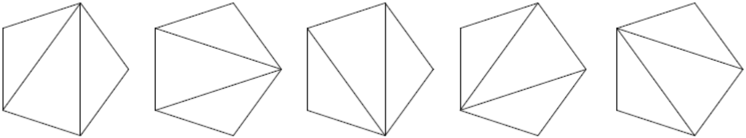
7. Số Stirling loại hai

7. Số Bell

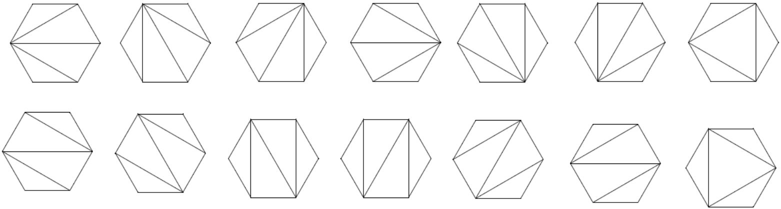
7.1. Số Catalan

Ví dụ. Có bao nhiêu cách chia một **ngũ giác đều** thành các tam giác bằng cách dùng các đường chéo không cắt nhau?

Đáp án. 5



Câu hỏi tương tự cho **lục giác đều**



Định nghĩa. Số ***Catalan*** thứ n (ký hiệu $\boldsymbol{C_n}$) là số cách chia một đa giác đều $n+2$ đỉnh thành các tam giác bằng cách dùng các đường chéo không cắt nhau.

Quy ước $\boldsymbol{C_0 = C_1 = 1}$.

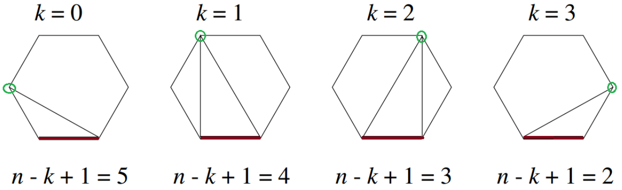
Các số Catalan đầu tiên

n	0	1	2	3	4
C_n	1	1	2	5	14

Tìm công thức truy hồi cho C_n

Xét đa giác đều $n+2$ đỉnh

- Ta chọn cố định một cạnh của đa giác. Khi đó với một ***đỉnh*** bất kỳ không trùng với hai đỉnh của cạnh đã chọn ta vẽ được một tam giác. Tam giác này chia đa giác ban đầu thành hai đa giác. Ví dụ trong trường hợp lục giác đều ($n = 4$) ta có



- Gọi $k+2$ ($k \geq 0$) là số đỉnh của đa giác bên trái. Khi đó đa giác bên phải có $n-k+1$ đỉnh.
- Đa giác bên trái có C_k cách chia thành các tam giác. Đa giác bên phải có C_{n-k-1} cách chia thành các tam giác. Vậy với mỗi k ta có $C_k \times C_{n-k-1}$ cách chia đa giác ban đầu thành các tam giác.

- Vì có n cách chọn ***đỉnh*** nên ta có n cách chọn giá trị k từ 0 đến $n-1$. Do đó số Catalan thứ n là

$$C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k \times C_{n-k-1}.$$

Ví dụ.

$$\begin{aligned} C_5 &= \sum_{k=0}^{4} C_k \times C_{4-k} \\ &= C_0C_4 + C_1C_3 + C_2C_2 + C_3C_1 + C_4C_0 \\ &= 1 \times 14 + 1 \times 5 + 2 \times 2 + 5 \times 1 + 14 \times 1 \\ &= 42. \end{aligned}$$

Ví dụ.(tự làm) Tìm giá trị C_6.

Đáp án. 132

Catalan, 1830s

Có bao nhiêu cách sắp xếp đúng n cặp dấu ngoặc đơn "( )"?
Ví dụ

- Với $n = 0, 1$ có 1 cách
- Với $n = 2$ có 2 cách là $\{\, ()(),\ \ (())\, \}$
- Với $n = 3$ có 5 cách là $\{\, ()()(),\ \ ()(()),\ \ (())(),\ (()()),\ \ ((()))\, \}$

Giải. Gọi C_n là số cách xếp đúng n cặp ngoặc đơn. Ta xem mỗi cách sắp xếp đúng là một chuỗi các n dấu (và n dấu). Rõ ràng mỗi chuỗi đều bắt đầu bằng (và có dạng (A) B. Trong đó A là chuỗi có k cặp dấu ngoặc đơn (với $0 \le k \le n-1$) và B là chuỗi có $n-k-1$ cặp dấu ngoặc đơn. Như vậy để tính C_n ta chỉ cần xem xét chuỗi A và B. Như vậy

$$\boldsymbol{C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k \times C_{n-k-1}}$$

Đây là lý do mà người ta gọi C_n là số ***Catalan*** thứ n (theo tên nhà toán học Catalan).

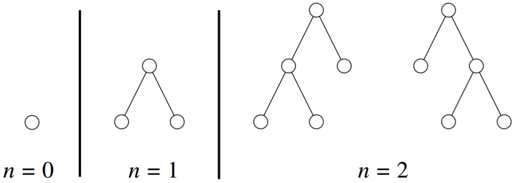
Ví dụ. Chúng ta muốn di chuyển tới một điểm cách vị trí chúng ta đang đứng n bước về hướng bắc và n bước về hướng đông. Có bao nhiêu cách để di chuyển đến vị trí mong muốn nếu yêu cầu tại mọi thời điểm số bước đã đi về hướng bắc không nhiều hơn số bước đã đi về hướng đông. Lưu ý ở mỗi bước chỉ đi về hướng bắc hoặc hướng đông.

Giải.

- Dùng N để ký hiệu bước đi về hướng bắc và E là bước đi về hướng đông. Sau $2n$ bước ta có một dãy gồm n ký tự N và n ký tự E.
- Thay N bằng dấu) và thay E bằng dấu (. Khi đó chúng ta có một cách sắp xếp n cặp ngoặc đơn.
- Do tại mọi thời điểm số dấu) luôn không lớn hơn số dấu (nên đây là một cách sắp xếp đúng n cặp dấu ngoặc đơn.
- Vậy tổng cộng có C_n cách đi tới điểm mong muốn.

Ví dụ.(tự làm) Cây nhị phân có gốc (rooted binary tree) là cây có gốc mà mỗi đỉnh trong đều có đúng 2 đỉnh con. Hỏi có bao nhiêu cây nhị phân có gốc có n đỉnh trong?

Hướng dẫn. Với $n = 0, 1, 2$ ta dễ thấy



Với $n \geq 1$, ta bỏ đỉnh gốc ra. Khi đó sẽ có hai cây con nhị phân có gốc. Số đỉnh trong của cây bên trái là k với $0 \leq k \leq n - 1$, số đỉnh trong của cây con phải phải là $n - k - 1$.

....

Như vậy đáp án của bài toán là C_n.

Hàm sinh của dãy $\{C_n\}_{n\geq 0}$

Gọi $G(x) = \sum_{n\geq 0} C_n x^n$ là hàm sinh của dãy $\{C_n\}_{n\geq 0}$. Ta có

$$\begin{aligned}
G(x) &= \sum_{n\geq 0} C_n x^n \\
&= C_0 + \sum_{n\geq 1} C_n x^n \\
&= 1 + \sum_{n\geq 1} \Big(\sum_{k=0}^{n-1} C_k \times C_{n-k-1} \Big) x^n \\
&= 1 + x \sum_{n\geq 1} \Big(\sum_{k=0}^{n-1} C_k \times C_{n-k-1} \Big) x^{n-1} \\
&= 1 + x \sum_{n\geq 0} \Big(\sum_{k=0}^{n} C_k \times C_{n-k} \Big) x^n \qquad \text{(thay } n-1 \text{ bằng } n\text{)} \\
&= 1 + x(G(x))^2
\end{aligned}$$

Như vậy

$$G(x) = 1 + x(G(x))^2 \Leftrightarrow x(G(x))^2 - G(x) - 1 = 0.$$

Suy ra

$$G(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} \text{ hoặc } G(x) = \frac{1+\sqrt{1-4x}}{2x}$$

Vì $G(0) = C_0 = 1$ nên $\lim_{x\to 0} G(x) = 1$. Bằng cách tính $\lim_{x\to 0} G(x)$ cho từng trường hợp ta có

$$G(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}.$$

Định lý. *Với n là số nguyên không âm, ta có*

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

Ví dụ. $C_{10} = \frac{1}{11}\binom{20}{10} = 16796.$

7.2. Số Stirling loại hai

Bài toán chia kẹo

Có bao nhiêu cách chia n viên kẹo khác nhau cho k đứa trẻ sao cho đứa trẻ nào cũng có kẹo?

Nhận xét.

- Xét ánh xạ liên kết mỗi viên kẹo với đứa trẻ nhận được nó. Bởi vì mọi đứa trẻ đều có kẹo nên ánh xạ này là toàn ánh.
- Bài toán trở thành: *Có bao nhiêu toàn ánh đi từ tập n phần tử vào tập k phần tử?*.

Định nghĩa. ***Số Stirling loại hai*** là số cách xếp n vật khác nhau vào k hộp giống nhau sao cho mỗi hộp đều có vật.

Ký hiệu $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$.

Lưu ý. Vì k đứa trẻ (trong bài toán chia kẹo) là khác nhau nên số cách chia kẹo bằng số Stirling loại hai nhân với $k!$ (số hoán vị của k đứa trẻ). Vậy số cách chia kẹo là $k!\left\{\begin{matrix} n \\ k \end{matrix}\right\}$.

Quy ước. $\left\{\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}\right\} = 1$ và $\left\{\begin{matrix} n \\ k \end{matrix}\right\} = 0$ nếu $n < k$

Nhận xét. $\left\{\begin{matrix} n \\ 1 \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} n \\ n \end{matrix}\right\} = 1$

Ví dụ. Hãy tìm công thức của $\left\{\begin{matrix} n \\ n-1 \end{matrix}\right\}$ với $n \geq 2$.

Giải. Để sắp xếp n vật vào $n-1$ hộp giống nhau ta chỉ cần sắp xếp một hộp có hai vật và các hộp còn lại có một vật. Số cách sắp xếp cho hộp có hai vật là $\binom{n}{2}$. Như vậy $\left\{\begin{matrix} n \\ n-1 \end{matrix}\right\} = \binom{n}{2}$.

Mệnh đề. *Cho số nguyên $n \geq 2$. Khi đó*

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ 2 \end{matrix} \right\} = 2^{n-1} - 1.$$

Chứng minh. Ta xét bài toán tìm số cách xếp n vật khác nhau vào 2 hộp khác nhau. Vì mỗi vật có 2 sự lựa chọn nên số cách là 2^n. Để tính số Stirling $\left\{ \begin{matrix} n \\ 2 \end{matrix} \right\}$ ta cần xem xét 2 hộp giống nhau và các hộp đều có vật. Do đó

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ 2 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2!}(2^n - 2) = 2^{n-1} - 1.$$

Định lý. [Công thức truy hồi Stirling]

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\} + k \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\}.$$

Chứng minh. Chúng ta cần xếp n vật $o_1, o_2, \ldots, o_n$ khác nhau vào k hộp giống nhau và mỗi hộp đều có vật. Giả sử chúng ta đã xếp được $n-1$ vật $o_1, o_2, \ldots, o_{n-1}$ và cần xếp vật cuối cùng o_n vào hộp nào đó. Khi đó có hai khả năng xảy ra:

1. Còn một hộp chưa có vật nào, vậy o_n buộc phải được xếp vào hộp này. Vì trước đó chúng ta đã xếp $n-1$ vật vào $k-1$ hộp nên có $\left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\}$ cách.
2. Tất cả các hộp đều đã có vật, vậy ta chỉ cần chọn 1 hộp bất kỳ để xếp vật o_n vào. Ta có k cách chọn hộp. Vì trước đó chúng ta đã xếp $n-1$ vật vào k hộp nên ta có $k \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\}$ cách.

Như vậy

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\} + k \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\}.$$

Ví dụ. Tính số Stirling $\left\{ \begin{matrix} 4 \\ 3 \end{matrix} \right\}$.

Giải. $\left\{ \begin{matrix} 4 \\ 3 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix} \right\} + 3 \left\{ \begin{matrix} 3 \\ 3 \end{matrix} \right\} = (2^{3-1} - 1) + 3 \times 1 = 6.$

Dựa vào công thức truy hồi của số Stirling loại hai ta có thể sử dụng một bảng tương tự như bảng tam giác Pascal để tính

Tam giác Stirling

- Chọn một phần tử bất kỳ. Nhân phần tử đó với số đầu tiên của cột (k) và cộng với phần tử bên trái của phần tử đó, ta được phần tử nằm bên dưới cùng cột với phần tử được chọn.
- Ví dụ. $90 = 25 \times 3 + 15$

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6
0	1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0
2	0	1	1	0	0	0	0
3	0	1	3	1	0	0	0
4	0	1	7	6	1	0	0
5	0	1	15	25	10	1	0
6	0	1	31	$\boxed{90}$	65	15	1

Định nghĩa. Cho S là tập hợp gồm n phần tử. Mỗi ***phân hoạch*** của S là tập hợp gồm k tập con $S_1, S_2, \ldots, S_k$ khác rỗng, đôi một rời nhau của S và hợp chúng lại là S. Cụ thể

$$\text{Với mọi } 1 \leq i \neq j \leq k, \quad S_i \neq \emptyset, \quad S_i \cap S_j = \emptyset \text{ và } S = \bigcup_{i=1}^{k} S_i,$$

Ví dụ. Cho $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Ta có

$$\{\ \{1, 2, 3\}, \{4\}, \{5\}, \{6, 7\}\ \}$$

là một phân hoạch của S.

Nhận xét. Số Stirling loại hai $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$ chính là số phân hoạch của tập hợp n phần tử thành k tập con.

Ví dụ. Hỏi có bao nhiêu cách phân tích 7590 thành tích của ba nhân tử lớn hơn 1?

Giải. Ta phân tích 7590 thành tích các số nguyên tố. Ta có

$$7590 = 2 \times 3 \times 5 \times 11 \times 23.$$

Do đó mỗi nhân tử trong phân tích số 7590 là tích của các phần tử của tập con khác rỗng của $\{2, 3, 5, 11, 23\}$. Do đó số cách phân tích 7590 là số phân hoạch của $\{2, 3, 5, 11, 23\}$ thành 3 tập con. Như vậy ta có $\left\{ \begin{matrix} 5 \\ 3 \end{matrix} \right\} = 25$ cách phân tích.

Định lý. *Cho n, k và r là các số nguyên không âm. Khi đó*

$$r^n = \sum_{k=0}^{r} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \frac{r!}{(r-k)!}.$$

Chứng minh. Ta xét bài toán tìm số cách sắp xếp n vật khác nhau vào r hộp khác nhau. Để giải bài toán này ta có xem xét hai cách giải sau:

Cách 1. Vì mỗi vật có r cách chọn hộp nên số cách sắp xếp là r^n.

Cách 2. Với mỗi $0 \leq k \leq r$, ta xét trường hợp có đúng k hộp có vật. Khi đó số cách sắp xếp trong trường hợp này là

$$\binom{r}{k} k! \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \frac{r!}{(r-k)!}.$$

Vậy số cách sắp xếp là

$$\sum_{k=0}^{r} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \frac{r!}{(r-k)!}.$$

Dựa vào cách giải 1 và cách giải 2 ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ. Cho $n = 6$ và $r = 4$. Ta có

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{4} \left\{ \begin{matrix} 6 \\ k \end{matrix} \right\} \frac{4!}{(4-k)!} &= 0 \cdot 1 + 1 \cdot 4 + 31 \cdot 12 + 90 \cdot 24 + 65 \cdot 24 \\ &= 4096 = 4^6. \end{aligned}$$

Ví dụ. Hãy viết đa thức x^3 thành tổ hợp tuyến tính của các đa thức $1, x, x(x-1)$ và $x(x-1)(x-2)$.

Giải. Sử dụng công thức của Định lý trên với $n = 3$ và $r = x$ ta có

$$\begin{aligned} x^3 &= \sum_{k=0}^{x} \left\{ \begin{matrix} 3 \\ k \end{matrix} \right\} \frac{x!}{(x-k)!} \\ &= 0 \cdot 1 + 1 \cdot x + 3 \cdot x(x-1) + 1 \cdot x(x-1)(x-2) \\ &= x + 3x(x-1) + x(x-1)(x-2). \end{aligned}$$

Ví dụ.(tự làm) Hãy viết đa thức x^4 thành tổ hợp tuyến tính của các đa thức $1, x, x(x-1)$, $x(x-1)(x-2)$ và $x(x-1)(x-2)(x-3)$.

7.3. Số Bell

Hỏi. Có bao nhiêu phân hoạch của tập hợp n phần tử?

Ví dụ. Tìm số phân hoạch của tập $\{1, 2, 3\}$.

Giải. Ta có các phân hoạch của $\{1, 2, 3\}$ như sau:

$$\{\{1, 2, 3\}\}$$
$$\{\{1\}, \{2, 3\}\}, \quad \{\{2\}, \{1, 3\}\}, \quad \{\{3\}, \{1, 2\}\}$$
$$\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$$

Như vậy có 5 phân hoạch của $\{1, 2, 3\}$.

Định nghĩa. Cho $n \geq 0$. Số ***Bell*** thứ n, ký hiệu B_n, là số phân hoạch của tập hợp n phần tử. Quy ước $B_0 = 1$.

Nhận xét. Số cách chia n vật khác nhau thành các nhóm là B_n.

Mệnh đề. *Cho $n \geq 0$. Ta có* $B_n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$.

Ví dụ. $B_4 = \sum_{k=0}^{4} \left\{ \begin{matrix} 4 \\ k \end{matrix} \right\} = 0 + 1 + 7 + 6 + 1 = 15.$

Ví dụ. Có bao nhiêu cách phân tích số 210 thành tích các số nguyên lớn hơn 1.

Giải. Ta phân tích 210 thành tích các số nguyên tố. Ta có

$$210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7.$$

Do đó mỗi nhân tử trong phân tích số 210 là tích của các phần tử của tập con khác rỗng của $\{2, 3, 5, 7\}$. Do đó số cách phân tích 210 là số phân hoạch của $\{2, 3, 5, 7\}$. Như vậy ta có $B_4 = 15$ cách phân tích.

Định lý. [Công thức truy hồi của số Bell] *Cho* $n \geq 0$. *Ta có*

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k.$$

Chứng minh. Đặt $S = \{o_1, o_2, o_3, \ldots, o_n, o_{n+1}\}$. Khi đó B_{n+1} là số cách phân hoạch của S. Vì mỗi phân hoạch của S đều có một tập hợp A mà chứa o_{n+1}. Để tính số phân hoạch của S ta sẽ xem xét tập hợp A và số phân hoạch của tập hợp $S \setminus A$. Với $0 \leq k \leq n$, nếu A có $k+1$ phần tử thì số cách chọn tập hợp A là $\binom{n}{k}$. Số phần tử của tập hợp $S \setminus A$ là $n-k$. Do đó số phân hoạch của $S \setminus A$ là B_{n-k}.

Vì mỗi phân hoạch của S được tạo từ phân hoạch của $S \setminus A$ và hợp với $\{A\}$ nên số phần hoạch của S là

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k.$$

■

Ví dụ. Tính B_5.

Giải. Sử dụng công thức truy hồi của số Bell, ta có

- $B_1 = \binom{0}{0} B_0 = 1.$
- $B_2 = \binom{1}{0} B_0 + \binom{1}{1} B_1 = 1 + 1 = 2.$
- $B_3 = \binom{2}{0} B_0 + \binom{2}{1} B_1 + \binom{2}{2} B_2 = 1 + 2 \times 1 + 2 = 5.$
- $B_4 = \binom{3}{0} B_0 + \binom{3}{1} B_1 + \binom{3}{2} B_2 + \binom{3}{3} B_3$
  $= 1 + 3 \times 1 + 3 \times 2 + 5 = 15.$
- $B_5 = \binom{4}{0} B_0 + \binom{4}{1} B_1 + \binom{4}{2} B_2 + \binom{4}{3} B_3 + \binom{4}{4} B_4$
  $= 1 + 4 \times 1 + 6 \times 2 + 4 \times 5 + 15 = \mathbf{52}.$

Tam giác Bell

$\boxed{1}$					
1	$\boxed{2}$				
2	3	$\boxed{5}$			
5	7	10	$\boxed{15}$		
15	20	27	37	$\boxed{52}$	
52	67	87	114	151	$\boxed{203}$

Việc xây dựng tam giác Bell được thực hiện như sau:

- Dòng một chỉ có số 1.
- Dòng dưới có nhiều hơn một số so với dòng liền trước.
- Phần tử đầu tiên của dòng bằng phần tử cuối của dòng liền trước.
- Phần tử khác phần tử đầu tiên của dòng được tính bằng tổng của phần tử bên trái và phần tử phía trên của phần tử bên trái đó.

Khi đó phần tử cuối của mỗi dòng là số Bell tương ứng với dòng đó.

Ví dụ.(tự làm) Tính giá trị B_7 và B_8 bằng cách dùng tam giác Bell.

Đáp án. $B_7 = 877$ và $B_8 = 4140$.