МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский университет ИТМО»
(Университет ИТМО)

Факультет систем управления и робототехники

Отчет по лабораторной работе №2
по дисциплине
«Адаптивное и робастное управление»

по теме:
«ПРИНЦИП ПОСТРОЕНИЯ СИСТЕМ АДАПТИВНОГО
И РОБАСТНОГО УПРАВЛЕНИЯ ВОЗМУЩЕННЫМИ ОБЪЕКТАМИ»

Вариант №13

Студенты:
Нгуен Тоан
Буй Динь Кхай Нгуен
Хюинь Тан Куонг

Научный руководитель:
Козачёк Ольга Андреевна

Санкт-Петербург – 2024

Содержание

Глава 1. Введение

Работа №2. Принцип построения систем адаптивного и робастного управления возмущенными объектами

1.1. Цель работы

освоение принципов построения систем адаптивного и робастного управления на примере задачи слежения выхода скалярного объекта за эталонным сигналом.

1.2. Методические рекомендации.

До начала работы студенты должны ознакомиться с анализом устойчивости нелинейных систем методом функций Ляпунова.

1.3. Теоретические сведения

Рассмотрим пример задачи слежения выхода параметрически неопределенного возмущенного объекта за эталонным сигналом. Приведем два решения поставленной задачи. При этом воспользуемся результатами, приведенными в работе №1.

Постановка задачи. Дан объект, представленный моделью вида

$$\dot{x} = \theta x + u + \delta \tag{1.1}$$

где δ — ограниченное внешнее возмущение, удовлетворяющее неравенству $|\delta(t) \leq |\bar{\delta}|$. Как и ранее, x — выход объекта (совпадает с переменной состояния), u — сигнал управления, θ неизвестный постоянный параметр.

Цель управления заключается в построении закона управления, обеспечивающего следующее целевое неравенство:

$$|x_m(t) - x(t)| \le \Delta, \qquad \forall t \ge T, \tag{1.2}$$

где Δ, T — точность работы системы управления и время ее настройки соответственно, $x_m(t)$ — эталонный сигнал, генерируемый моделью (1.2). Предполагается, что параметры Δ и T можно изменять в соответствии с требованиями, предъявляемыми к системе.

Рассмотрим возможность использования в качестве решения сформулированной задачи регулятор (1.6) и (1.9). Построим модель ошибки $\varepsilon = x_m - x$:

$$\dot{\varepsilon} = -\lambda\varepsilon - \tilde{\theta}x - \delta \tag{1.3}$$

Далее проведем анализ устойчивости замкнутой системы с помощью функции Ляпунова (1.8). Учитывая последнее выражение и алгоритм адаптации (1.9), для производной функции Ляпунова получим:

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= -\frac{1}{2}2\varepsilon\dot{\varepsilon} - \frac{1}{2}2\tilde{\theta}\dot{\tilde{\theta}} \\
&= \varepsilon\Big(-\lambda\varepsilon - \tilde{\theta}x - \delta\Big) - \frac{1}{\gamma}\tilde{\theta}\dot{\hat{\theta}} \\
&= -\lambda\varepsilon^2 - \tilde{\theta}\varepsilon x - \varepsilon\delta - \tilde{\theta}\frac{1}{\gamma}\gamma x\varepsilon \\
&= -\lambda\varepsilon^2 - \delta\varepsilon \\
&= -\frac{\lambda}{2}\varepsilon^2 - \frac{\lambda}{2}\varepsilon^2 - \delta\varepsilon \pm \frac{1}{2}\lambda\delta^2 \\
&= -\frac{\lambda}{2}\varepsilon^2 - \left(\sqrt{\frac{\lambda}{2}}\varepsilon + \sqrt{\frac{1}{2\lambda}}\delta\right)^2 + \frac{1}{2}\lambda\delta^2 \\
&\le -\frac{\lambda}{2}\varepsilon^2 + \frac{1}{2}\lambda\delta^2 \le -\frac{\lambda}{2}\varepsilon^2 + \frac{1}{2}\lambda\bar{\delta}^2
\end{aligned}$$

Из полученного неравенства следует асимптотическое стремление ошибки ε к некоторому ограниченному множеству, определяемому верхней границей сигнала возмущения $\bar{\delta}$ и параметром λ. При этом точность системы управления может быть увеличена путем увеличения λ. Однако из приведенного анализа не следует ограниченности сигнала $\hat{\theta}$. Если продолжить анализ и рассмотреть частный случай, когда переменная x и ошибка ε стремятся к ненулевым постоянным значениям ввиду влияния возмущения, то

$$\dot{\hat{\theta}} = -\gamma x_{\text{уст}} \varepsilon_{\text{уст}} = C = \text{const}, \tag{1.4}$$

откуда следует, что

$$\hat{\theta} = Ct, \tag{1.5}$$

и неограниченный рост оценки $\hat{\theta}$ с течением времени. Данное явление получило название неограниченного параметрического дрейфа.

Таким образом, представленный регулятор (1.6) и (1.9) в общем случае не обеспечивает ограниченность всех сигналов и не является робастным по отношению к внешнему возмущению.

Предложенный подход не является практически применимым и требует модификации алгоритма управления. Рассмотрим два возможных решения.

Решение № 1. Представим модификацию алгоритма (1.9) в форме

$$\hat{\theta} = -\gamma x \varepsilon \tag{1.6}$$

Подставляя (1.6) в (1.6), получаем алгоритм управления

$$u = \gamma x^2 \varepsilon - \lambda x + \lambda g \tag{1.7}$$

Данный алгоритм является статическим, так как не содержит интегральной обратной связи, и нелинейным, так как содержит член $\gamma x^2 \varepsilon$.

Покажем, что предложенный алгоритм управления (1.7) гарантирует ограниченность сигналов ε и $\hat{\theta}$. Для этого выберем функцию Ляпунова

$$V = \frac{1}{2}\varepsilon^2 \tag{1.8}$$

и рассчитаем ее производную. Учитывая (1.7) и модель ошибки (1.3), проведем алгебраические преобразования:

$$\dot{V}=\frac{1}{2}2\varepsilon\dot{\varepsilon}=-\lambda\varepsilon^2-\tilde{\theta}x\varepsilon-\delta\varepsilon=-\frac{\lambda}{2}\varepsilon^2-\frac{\gamma}{2}x\varepsilon^2-\left(\theta-\widehat{\theta}\right)x\varepsilon-\delta\varepsilon$$

$$=-\frac{\lambda}{2}\varepsilon^2-\frac{\lambda}{2}\varepsilon^2-\delta\varepsilon\pm\frac{1}{\lambda}\delta^2-(\theta+\gamma x\varepsilon)x\varepsilon$$

$$=-\frac{\lambda}{2}\varepsilon^2-\left(\sqrt{\frac{\lambda}{2}}\varepsilon+\sqrt{\frac{1}{2}\lambda\delta}\right)^2+\frac{1}{2\lambda}\delta^2\pm\frac{\theta^2}{4}\gamma-\theta x\varepsilon-\gamma x^2\varepsilon^2$$

$$=-\frac{\lambda}{2}\varepsilon^2-\left(\sqrt{\frac{\lambda}{2}}\varepsilon+\sqrt{\frac{1}{2\lambda}}\delta\right)^2+\frac{1}{2\lambda}\delta^2-\left(\frac{\theta}{2\sqrt{\gamma}}-\sqrt{\gamma}x\varepsilon\right)^2+\frac{\theta^2}{4\gamma}$$

$$\leq-\frac{\lambda}{2}\varepsilon^2+\frac{1}{2\lambda}\bar{\delta}^2+\frac{\theta^2}{4\gamma}$$

$$\leq-\lambda V+\frac{1}{2\lambda}\bar{\delta}^2+\frac{\theta^2}{4\gamma}=-\lambda V+\overline{\Delta}$$

где $\overline{\Delta}=\frac{\bar{\delta}^2}{2\lambda}+\frac{\theta^2}{4\gamma}$ — постоянная величина. Решая полученное дифференциальное неравенство, получаем:

$$V(\varepsilon(t))\leq e^{-\lambda t}V(0)+\frac{\overline{\Delta}}{\lambda}-\frac{\overline{\Delta}}{\lambda}e^{-\lambda t}, \tag{1.9}$$

откуда с учетом (1.8) следует, что

$$\frac{1}{2}\varepsilon^2\leq e^{-\lambda t}V(0)+\frac{\overline{\Delta}}{\lambda}-\frac{\overline{\Delta}}{\lambda}e^{-\lambda t} \tag{1.10}$$

или

$$|\varepsilon(t)|\leq\sqrt{2\left(e^{-\lambda t}V(0)+\frac{\overline{\Delta}}{\lambda}-\frac{\overline{\Delta}}{\lambda}e^{-\lambda t}\right)} \tag{1.11}$$

Из последнего неравенства следует экспоненциальная сходимость ошибки управления ε *к ограниченному множеству с границей* $\Delta=\sqrt{2\frac{\overline{\Delta}}{\lambda}}$. При этом величину Δ можно уменьшить путем увеличения коэффициентов λ и γ. Как следствие, величина $\widehat{\theta}$ становится ограниченной.

Таким образом, алгоритм управления (1.7) обеспечивает устойчивость в замкнутой системе и является робастным по отношению к внешнему возмущению. В то же время этот алгоритм имеет следующие недостатки:

• даже при отсутствии возмущения установившаяся ошибка

$\varepsilon(t)$ может быть отлична от нуля, что видно из неравенства (1.11);

• управление пропорционально величине x^2. Следовательно, при

росте x амплитуда управления возрастает квадратично, в связи с чем практическая применимость такого закона (1.6) имеет существенные ограничения.

Рассмотрим решение, лишенное недостатков алгоритмов (1.6), (1.9) и (1.6), (1.6) за счет наделения нового алгоритма управления адаптивными и робастными свойствами.

Решение № 2. Рассмотрим совместно с настраиваемым регулятором (1.6) алгоритм адаптации, параметрический дрейф в котором ограничивается обратной связью по величине настраиваемого параметра:

$$\dot{\hat{\theta}} = -\sigma\hat{\theta} - \gamma x\varepsilon, \tag{1.12}$$

где σ постоянная положительная величина.

Проведем анализ устойчивости замкнутой системы, представленной объектом (1.1), регулятором (1.6) и алгоритмов адаптации (1.12) с помощью функции Ляпунова (1.8). Возьмем производную от функции и проведем ряд преобразований:

$$\dot{V} = \frac{1}{2}2\varepsilon\dot{\varepsilon} + \frac{1}{2\gamma}2\tilde{\theta}\dot{\tilde{\theta}} = \varepsilon\Big(-\lambda\varepsilon - \tilde{\theta}x - \delta\Big) - \frac{1}{\gamma}\tilde{\theta}\dot{\hat{\theta}} = -\lambda\varepsilon^2 - \tilde{\theta}x\varepsilon - \delta\varepsilon - \frac{\tilde{\theta}}{\gamma}\Big(-\sigma\hat{\theta} - \gamma x\varepsilon\Big)$$

$$= -\lambda\varepsilon^2 - \delta\varepsilon + \frac{\sigma}{\gamma}\tilde{\theta}\hat{\theta} = -\lambda\varepsilon^2 - \delta\varepsilon + \frac{\sigma}{\gamma}\tilde{\theta}\Big(-\tilde{\theta} + \theta\Big) = -\lambda\varepsilon^2 - \delta\varepsilon - \frac{\sigma}{\gamma}\tilde{\theta}^2 + \frac{\sigma}{\gamma}\tilde{\theta}\theta$$

$$= -\frac{\lambda}{2}\varepsilon^2 - \frac{\lambda}{2}\varepsilon^2 - \delta\varepsilon \pm \frac{1}{2\lambda}\delta^2 - \frac{\sigma}{2\gamma}\tilde{\theta}^2 - \frac{\sigma}{2\gamma}\tilde{\theta}^2 + \frac{\sigma}{\gamma}\tilde{\theta}\theta \pm \frac{\sigma}{2\gamma}\theta^2$$

$$= -\frac{\lambda}{2}\varepsilon^2 - \frac{\sigma}{2\gamma}\tilde{\theta}^2 - \left(\sqrt{\frac{\lambda}{2}}\varepsilon + \sqrt{\frac{1}{2\lambda}}\delta\right)^2 - \frac{\sigma}{\gamma}\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\tilde{\theta} - \sqrt{\frac{1}{2}}\theta\right)^2 + \frac{1}{2\lambda}\delta^2 + \frac{\sigma}{2\gamma}\theta^2$$

$$\leq -\frac{\lambda}{2}\varepsilon^2 - \frac{\sigma}{2\gamma}\tilde{\theta}^2 + \frac{1}{2\lambda}\delta^2 + \frac{\sigma}{2\gamma}\theta^2 = -\frac{\lambda}{2}\varepsilon^2 - \frac{\sigma}{2\gamma}\tilde{\theta}^2 + \frac{1}{2\lambda}\bar{\delta}^2 + \frac{\sigma}{2\gamma}\theta^2$$

Введем обозначение $\kappa = \min\{\lambda, \sigma\}$. Тогда, считая λ, σ положительными, имеем:

$$\dot{V} \leq -\kappa\left(\frac{1}{2}\varepsilon^2 - \frac{1}{2\gamma}\tilde{\theta}^2\right) + \frac{1}{2\lambda}\bar{\delta}^2 + \frac{\sigma}{2\gamma}\theta^2$$

или

$$\dot{V} \leq \kappa V + \overline{\Delta}$$

где $\overline{\Delta} = \frac{\bar{\delta}^2}{2\lambda} + \sigma\frac{\theta^2}{2\gamma}$ — постоянная величина. Далее, решая данное дифференциальное неравенство, получаем:

$$V(\varepsilon(t)) \leq e^{\kappa t}V(0) + \frac{\overline{\Delta}}{\kappa} - \frac{\overline{\Delta}}{\kappa}e^{\kappa t}V(0)$$

откуда следует, что

$$|\varepsilon(t)| \leq \sqrt{2\left(e^{\kappa t}V(0) + \frac{\overline{\Delta}}{\kappa} - \frac{\overline{\Delta}}{\kappa}e^{\kappa t}V(0)\right)}$$

Из последнего неравенства следует экспоненциальная сходимость ошибки управления к ограниченному множеству с границей $\Delta = \sqrt{2\frac{\overline{\Delta}}{\kappa}}$

Алгоритм управления (1.6), основанный на алгоритме адаптации (1.12), также обеспечивает устойчивость замкнутой системы и является робастным по отношению к внешнему возмущению. В то же время алгоритм (1.6), (1.12) позволяет парировать недостатки робастного алгоритма управления (1.7). Так, при отсутствии внешнего возмущения или при его несущественном влиянии верхняя граница $\overline{\Delta}$ может быть снижена до нуля за счет обнуления коэффициента σ (т.н. гибридная σ – модификация). Кроме того, для уменьшения Δ нет необходимости в значительном увеличении γ, которое влечет за собой рост амплитуды управляющего воздействия. Снижение Δ можно обеспечить путем уменьшения коэффициента σ.

Глава 2. Порядок выполнения работы

2.1. Построение адаптивной системы управления

На основе данных, приведенных в Таблице 2.1, провести моделирование адаптивной системы управления, полученной в Работе №1, в условиях действия на объект возмущения вида [12]

$$\delta(t) = (1+t)^{-\frac{1}{8}}\left[1 - \theta(1+t)^{-\frac{1}{4}} - \frac{3}{8}(1+t)^{-\frac{5}{4}}\right].$$

При моделировании использовать следующие значения параметров: $\gamma = 0.25$, $x(0) = 1$ и $\hat{\theta}(0) = 1$. Сигнал задания $g(t)$ принять равным нулю. По результатам моделирования построить три графика. На первом вывести $x(t)$ и $x_m(t)$, на втором — $u(t)$, на третьем — $\tilde{\theta}(t) = \theta - \hat{\theta}(t)$. Время моделирования выбрать 1000 с.

По заданию известны следующие параметры:

Таблица 2.1 – Вариант заданий

Вар.	Параметр объекта θ	Параметр эталонной модели λ	Сигнал задания $g(t)$
13	6	4	$\mathrm{sign}(\cos t) + 8$

Модель объекта управления:

$$\dot{x} = \theta x + u + \delta$$

Эталонная модель:

$$\dot{x}_m = -\lambda x_m + \lambda g$$

Адаптипвный закон управления:

$$u = -\hat{\theta} x - \lambda x + \lambda g$$

Алгоритм адаптации:

$$\dot{\hat{\theta}} = -\gamma x \varepsilon$$

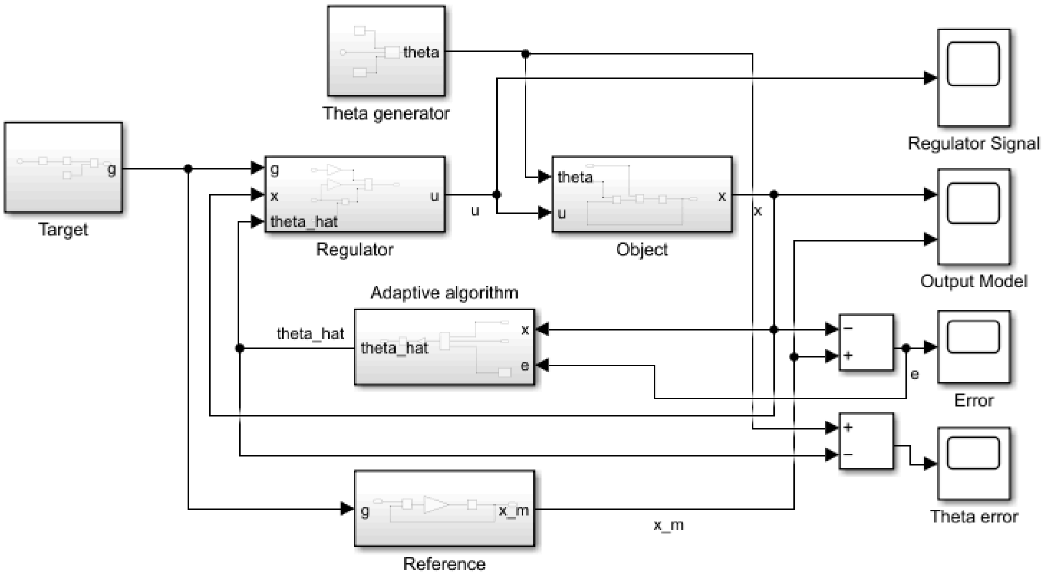

Рисунок 2.1 – Структурная схема моделирования системы.

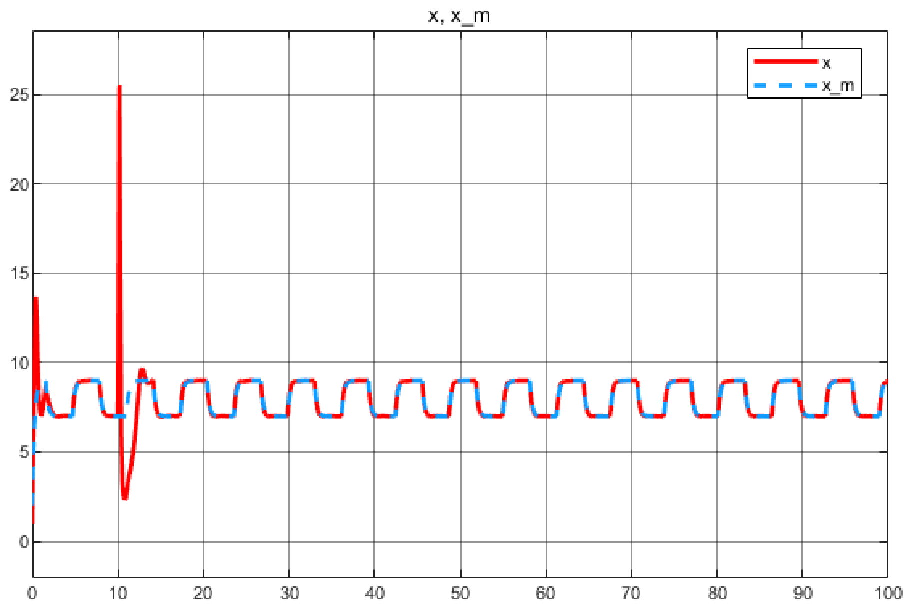

Рисунок 2.2 – График изменения выходной переменной $x(t)$ и эталонной модели $x_m(t)$.

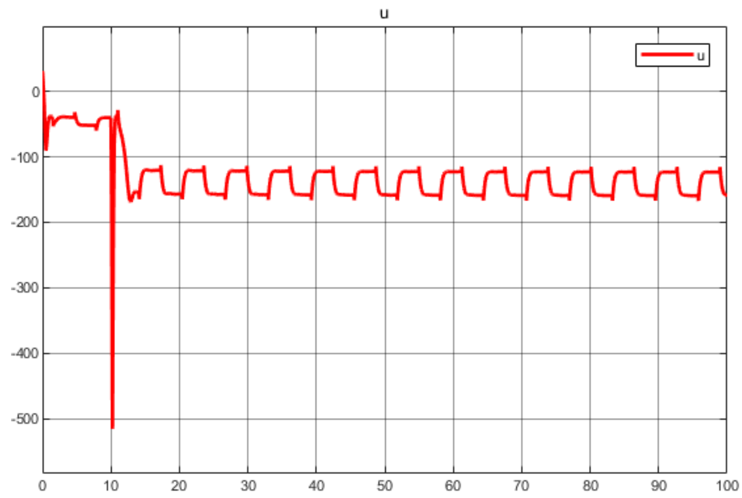

Рисунок 2.3 – График изменения управляющего воздействия $u(t)$.

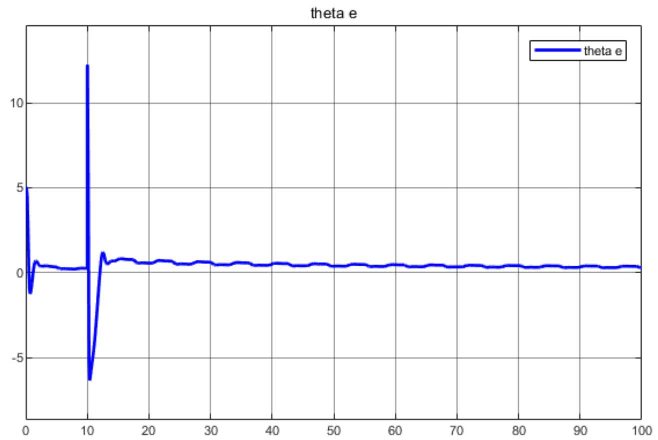

Рисунок 2.4 – График изменения ошибки $\tilde{\theta}(t)$.

2.2. Построение СУ с алгоритмом статической обратной связи

Заменить алгоритм адаптации (1.9) на статическую обратную связь (2.4) и провести эксперимент для трех различных значений коэффициента и отличного от нуля сигнала задания $g(t)$ из Таблицы 2.1. Определить влияние этого коэффициента на свойства системы. По результатам моделирования для каждого γ построить два графика. На первом вывести $x(t)$ и $x_m(t)$, на втором — u .

Нелинейная статическая обратная связь:

$$\hat{\theta} = -\gamma x \varepsilon$$

Адаптипвный закон управления:

$$u = \gamma x^2 \varepsilon - \lambda x + \lambda g$$

Прм $\gamma = 1$:

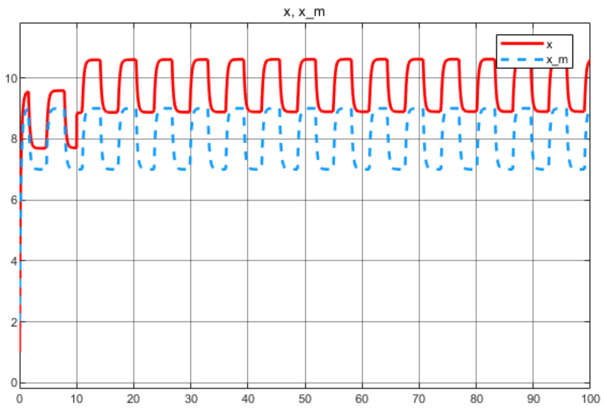

Рисунок 2.5 – График изменения выходной переменной $x(t)$ и эталонной модели $x_m(t)$.

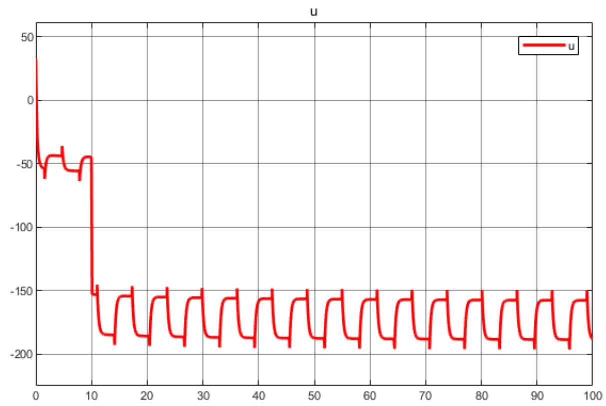

Рисунок 2.6 – График изменения управляющего воздействия $u(t)$.

Прм $\gamma = 10$:

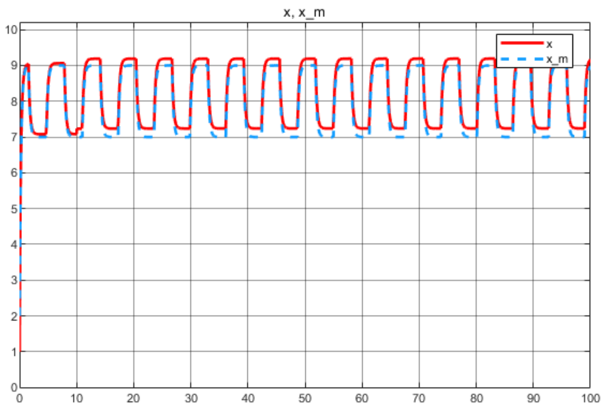

Рисунок 2.7 – График изменения выходной переменной $x(t)$ и эталонной модели $x_m(t)$.

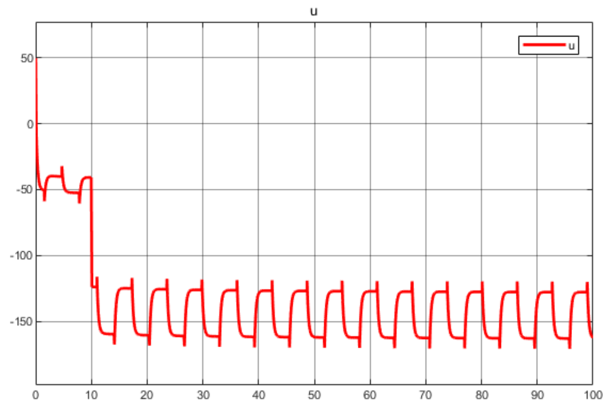

Рисунок 2.8 – График изменения управляющего воздействия $u(t)$.

Прм $\gamma = 30$:

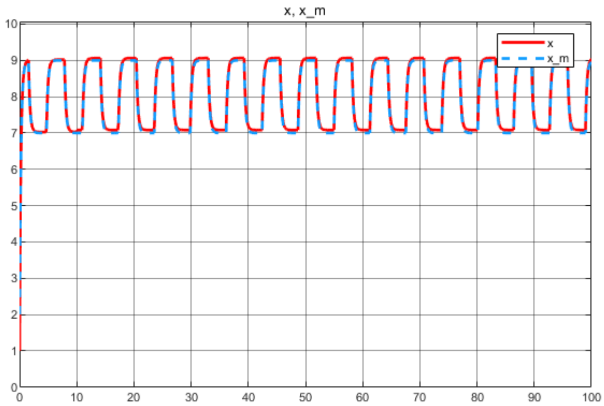

Рисунок 2.9 – График изменения выходной переменной $x(t)$ и эталонной модели $x_m(t)$.

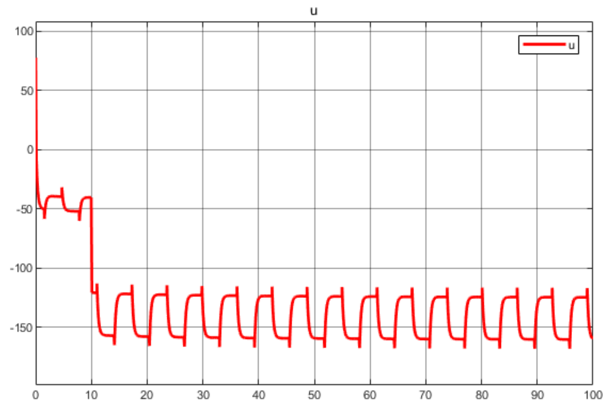

Рисунок 2.10 – График изменения управляющего воздействия $u(t)$.

Прм $\gamma = 31$:

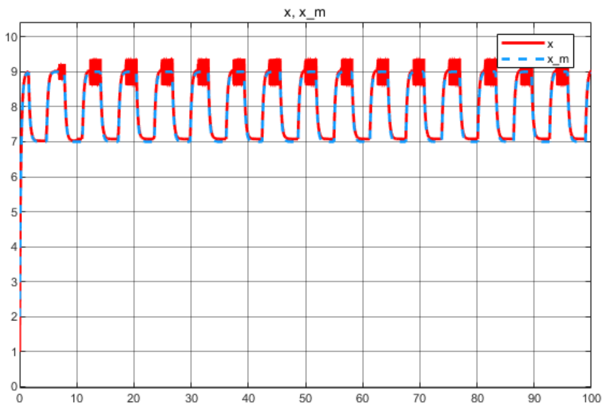

Рисунок 2.11 – График изменения выходной переменной $x(t)$ и эталонной модели $x_m(t)$.

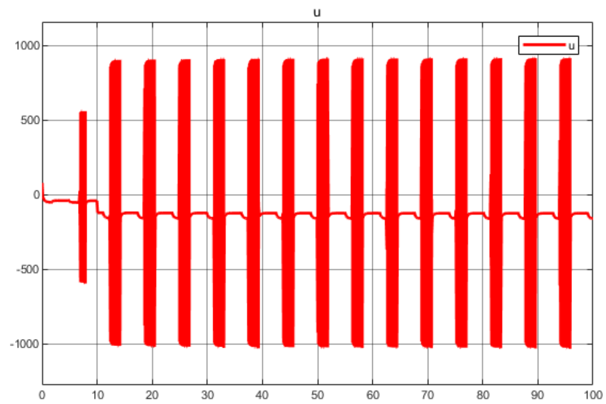

Рисунок 2.12 – График изменения управляющего воздействия $u(t)$.

2.3. Построение СУ с алгоритмом робастной σ модификации

Заменить алгоритм адаптации (1.9) на робастную σ – модификацию (1.12). Повторить эксперимент для трех различных значений коэффициента σ. Сигнал задания $g(t)$ выбрать из Таблицы 2.1 согласно варианту. Определить влияние этого коэффициента на свойства системы. По результатам моделирования для каждого σ построить два графика. На первом вывести $x(t)$ и $x_{m(t)}$, на втором — u .

Робастная σ – модификация:

$$\dot{\hat{\theta}} = -\sigma\hat{\theta} - \gamma x \varepsilon$$

Адаптивный закон управления:

$$u = -\hat{\theta}x - \lambda x + \lambda g$$

При $\sigma = 10$:

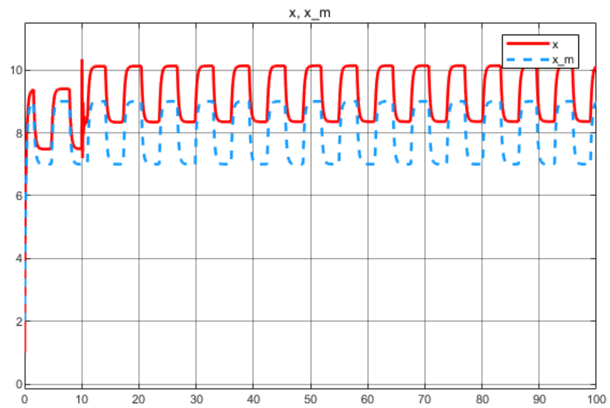

Рисунок 2.13 – График изменения выходной переменной $x(t)$ и эталонной модели $x_{m(t)}$.

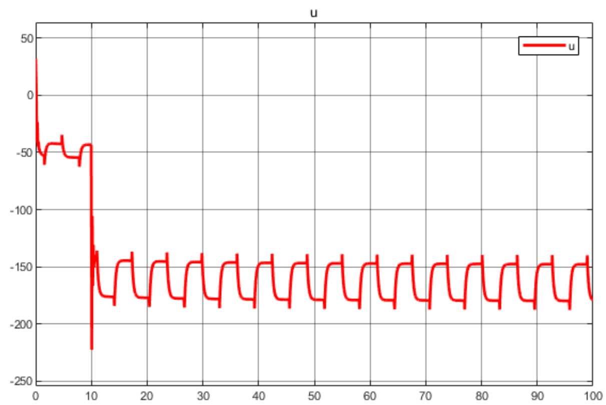

Рисунок 2.14 – График изменения управляющего воздействия $u(t)$.

При $\sigma = 1$:

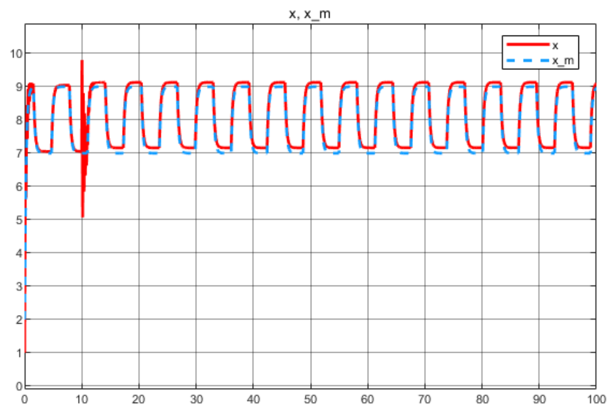

Рисунок 2.15 – График изменения выходной переменной $x(t)$ и эталонной модели $x_{m(t)}$.

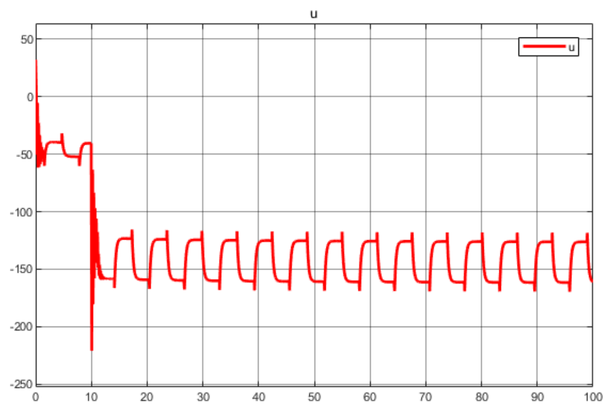

Рисунок 2.16 – График изменения управляющего воздействия $u(t)$.

При $\sigma = 0.1$:

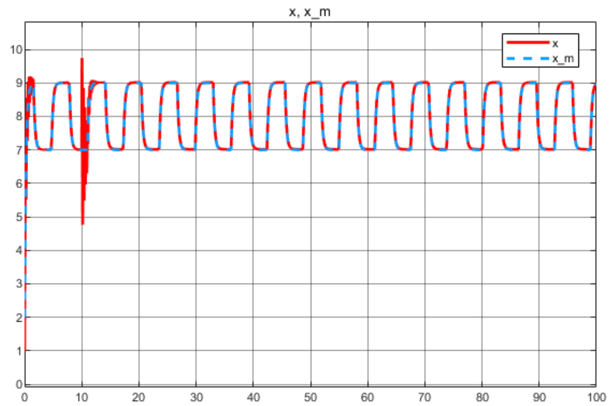

Рисунок 2.17 – График изменения выходной переменной $x(t)$ и эталонной модели $x_{m(t)}$.

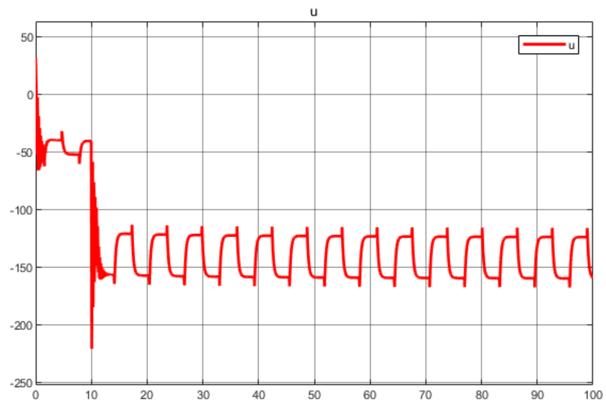

Рисунок 2.18 – График изменения управляющего воздействия $u(t)$.

Выводы

В ходе работы были смоделированы системы управления с двумя адаптивными алгоритмами: статической обратной связи и робастной модификации в условиях действия на объект возмущения.

Из полученных результатов мы видим, что в условиях действия на объект возмущения, экспоненциальная сходимость ошибки управления к ограниченному множеству с границей Δ. Снижение Δ можно обеспечить путем увеличения коэффициентов γ или уменьшения коэффициента σ зависит от алгоритма.

Список рисунков

Список таблиц