

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего
образования «Национальный исследовательский университет ИТМО»
(Университет ИТМО)

Факультет систем управления и робототехники

Отчет по лабораторной работе №3
по дисциплине
«Адаптивное и робастное управление»

по теме:

«АДАПТИВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫМ
МНОГОМЕРНЫМ ОБЪЕКТОМ ПО СОСТОЯНИЮ»

Вариант №13

Студенты:

Нгуен Тоан

Буй Динь Кхай Нгуен

Хюинь Тан Куонг

Научный руководитель:

Козачёк Ольга Андреевна

ИТМО

Санкт-Петербург – 2025

Содержание

Глава 1. Введение	2
1.1. Цель работы	2
1.2. Методические рекомендации.	2
1.3. Теоретические сведения	2
Глава 2. Порядок выполнения работы	7
2.1. Сформирование эталонной модели	7
2.2. Построение и промоделирование систему неадаптивное управления	9
2.3. Провести моделирование адаптивной системы управления с регулятором и алгоритмом адаптации.	13
Выводы	24
Список рисунков	25
Список таблиц	26

Глава 1. Введение

Работа №3. Адаптивное управление линейным Многомерным объектом по состоянию

1.1. Цель работы

Освоение принципов построения адаптивной системы управления многомерным объектом.

1.2. Методические рекомендации.

До начала работы студенты должны ознакомиться с принципом построения алгоритмов адаптации на основе стандартной модели ошибки с измеряемым состоянием [2, 20].

1.3. Теоретические сведения

Рассмотрим задачу адаптивного управления многомерным объектом с использованием эталонной модели. При этом воспользуемся принципами решения аналогичной задачи для объекта первого порядка (см. Работу №1).

Постановка задачи. Дан объект:

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad x(0) \quad (1.1)$$

$$y = Cx, \quad (1.2)$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния, u — управление, $y \in \mathbb{R}$ — регулируемая переменная,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix}, C = [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0],$$

$a_i, i = \overline{0, n-1}$ — неизвестные параметры, b_0 — известный коэффициент.

Задача управления заключается в компенсации параметрической неопределенности объекта и обеспечении следующего целевого равенства:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_M(t) - x(t)\| = \lim_{t \rightarrow \infty} \|e(t)\| = 0, \quad (1.3)$$

где $e = x_M - x$ — вектор ошибки управления, $x_M \in \mathbb{R}^n$ — вектор, генерируемый эталонной моделью

$$\dot{x}_M = A_M x_M + b_M g, \quad (1.4)$$

$$y_M = C_M x_M \quad (1.5)$$

с задающим воздействием $g(t)$ и матрицами

$$A_M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_{M0} & -a_{M1} & -a_{M2} & \dots & -a_{Mn-1} \end{bmatrix}, b_M = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_{M0} \end{bmatrix}, C_M = [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0],$$

Параметры эталонной модели $a_{Mi}, i = \overline{1, n-1}$ строятся на основе метода стандартных характеристических полиномов [4, 5] для обеспечения желаемого качества воспроизведения задающего воздействия $g(t)$. Другими словами, модель (1.4), (1.5) определяет желаемое качество замкнутой системы после завершения процессов настройки адаптивного управления.

Отметим, что в задаче класс объектов (1.1), (1.2) ограничен следующим допущением.

Допущение (Условие согласования). Для некоторого n – мерного вектора θ и скаляра κ матрицы A, b, A_M и b_M тсвязаны соотношениями

$$A_M = A + b\theta^T, \quad b = \kappa b_M \quad (1.6)$$

Решение задачи. Предполагая параметры объекта известными, синтезируем регулятор, который обеспечит условие (1.3) с заданными динамическими показателями качества — временем переходного процесса t_n и перерегулированием $\bar{\sigma}$.

Для синтеза регулятора сформируем ошибку слежения $e = x_M - x$, рассчитаем ее производную в силу (1.1), (1.4) и условия (1.6):

$$\begin{aligned}\dot{e} &= \dot{x}_M - \dot{x} = A_M x_M + b_M g - Ax - bu \\ &= A_M x_M - \frac{1}{\kappa} b g - (A_M - b \theta^T) x - bu = A_M e + b \left(\theta^T x - u + \frac{1}{\kappa} g \right),\end{aligned}\quad (1.7)$$

где $\theta^T = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n]$ — вектор постоянных параметров, определяемый параметрическими рассогласованиями между матрицами A и A_M ,

$$\theta_1 = \frac{-a_{M0} + a_0}{b_0}, \theta_2 = \frac{-a_{M1} + a_1}{b_0}, \dots, \theta_n = \frac{-a_{Mn-1} + a_{n-1}}{b_0}, \kappa = \frac{b_0}{b_{M0}}.$$

— коэффициенты, рассчитываемые из условия (1.6).

Выражение (1.7) сводится к виду

$$\dot{e} = A_M e + b \left(\theta^T x - u + \frac{1}{\kappa} g \right), \quad (1.8)$$

позволяющему синтезировать управление

$$u = \theta^T x + \frac{1}{\kappa} g. \quad (1.9)$$

После подстановки (1.9) в (1.8) получим закон экспоненциальной сходимости ошибки управления неадаптивной системы:

$$\dot{e} = A_M e$$

Однако в исходной постановке задачи параметры матрицы A неизвестны. Следовательно, закон (1.9) физически нереализуем. Так как параметры a_i неизвестны, то вектор θ также неизвестен. Заменим в (3.9) этот вектор на оценку $\hat{\theta}$ и получим настраиваемый закон управления:

$$u = \hat{\theta}^T x + \frac{1}{\kappa} g. \quad (1.10)$$

Подставим последнее выражение в (1.8) и получим модель ошибок

$$\dot{e} = A_M e + b \tilde{\theta}^T x. \quad (1.11)$$

где $\tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta}$ — вектор параметрических ошибок.

Расширяя подход, приведенный в Работе №1, на многомерный случай, выберем функцию Ляпунова

$$V = \frac{1}{2} e^T P e + \frac{1}{2\gamma} \tilde{\theta}^T \tilde{\theta},$$

где $P = P^T \succ 0$ — положительно определенная симметричная матрица, удовлетворяющая уравнению Ляпунова

$$A_M^T P + P A_M = -Q \quad (1.12)$$

с произвольно выбранной симметричной положительно определенной матрицей Q . Далее, вычисляя производную функции Ляпунова в силу модели ошибок (1.11), получаем:

$$\dot{V} = -\frac{1}{2} e^T Q e + \tilde{\theta}^T x b^T P e + \frac{1}{\gamma} \tilde{\theta}^T \dot{\tilde{\theta}}$$

Из анализа последнего выражения видно, что если алгоритм адаптации выбрать в виде

$$\dot{\hat{\theta}} = \gamma x b^T P e, \quad \hat{\theta}(0) = 0 \quad (1.13)$$

то производная функции Ляпунова будет удовлетворять неравенству

$$\dot{V} = -\frac{1}{2} e^T Q e \leq 0 \quad (1.14)$$

откуда следует выполнение целевого условия (1.3).

Отметим, что в выражении (1.13) коэффициент $\gamma > 0$ носит название коэффициента адаптации, и его величина определяет скорость настройки коэффициентов регулятора (1.10).

Таким образом, алгоритм адаптивного управления состоит из настраиваемого регулятора (1.10), алгоритма адаптации (1.13), в котором матрица P находится из (1.12).

Адаптивный регулятор (1.10), (1.13), для любых начальных условий $x(0), \hat{\theta}(0)$ и ограниченного g обеспечивает:

1. ограниченность всех сигналов в замкнутой системе;
2. асимптотическое стремление ошибки e к нулю;
3. ограниченность сигнала $\hat{\theta}$. Вектор $\hat{\theta}$ экспоненциально

стремится к θ , если вектор x удовлетворяет условию неисчезающего возбуждения:

$$\int_t^{t+T} x(\tau)x^T(\tau) d\tau > \alpha I \quad (1.15)$$

где $\alpha > 0, T > 0$ — постоянные величины.

Условие (1.14) эквивалентно условию наличия не менее $\frac{n+1}{2}$ гармоник (спектральных линий) в векторе x . Отметим, что в рамках решаемой задачи слежения характер поведения регрессора x целиком определяется характером задающего воздействия g . Поэтому условие неисчезающего возбуждения может быть переформулировано в терминах сигнала g ;

4. если вектор x удовлетворяет условию (1.14), то существует оптимальное значение коэффициента γ , при котором скорость сходимости параметрических ошибок $\tilde{\theta}$ к нулю максимальна

Глава 2. Порядок выполнения работы

2.1. Сформирование эталонной модели

На основе заданных в 2.1 значений времени переходного процесса t_{π} и максимального перерегулирования $\bar{\sigma}$ сформировать эталонную модель в форме (1.4), (1.5). Построить график переходной функции модели, на котором показать время переходного процесса t_{π} и перерегулирование $\bar{\sigma}$

По заданию известны следующие параметры:

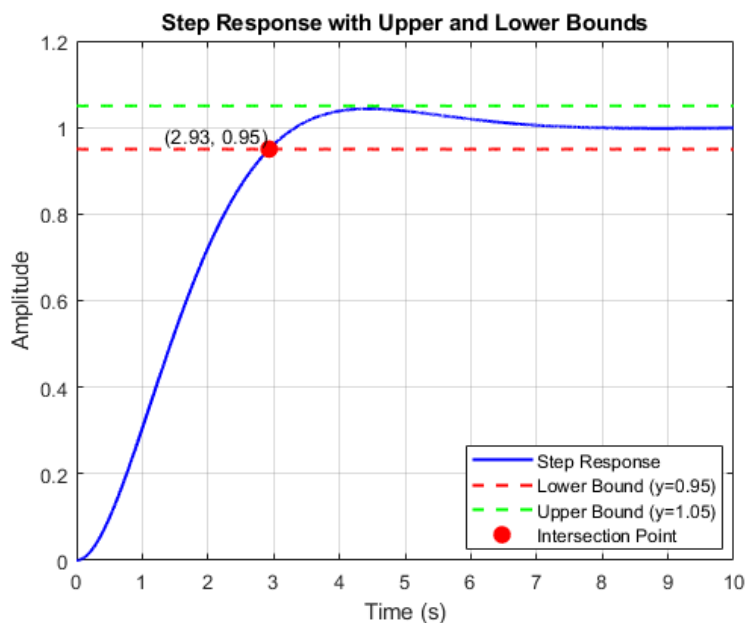
Таблица 2.1 – Вариант заданий

Вар.	Матрица A	Коэфф. передачи b_0	Время переходного процесса, t_{π}	Максимальное перерегули -рование $\bar{\sigma}$, %	Сигнал задания $g(t)$
13	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$	4	0,4	< 15	$9\text{sign}(\sin(0.1t)) + 12$

Для системы второго порядка мы выбираем следующий полином Баттерворта.

$$B(s) = s^2 + \sqrt{2}\omega s + \omega^2$$

Предположим, мы выбираем 5% допуск и находим точку перехода



Время переходного процесса: $t_{\pi} = 0.4$

Частота среза:

$$\omega = \frac{t_{\pi}^*}{t_{\pi}} = \frac{2.93}{0.4} = 7.325$$

$$\rightarrow B(s) = s^2 + \sqrt{2} * 7.325 * s + 7.325^2$$

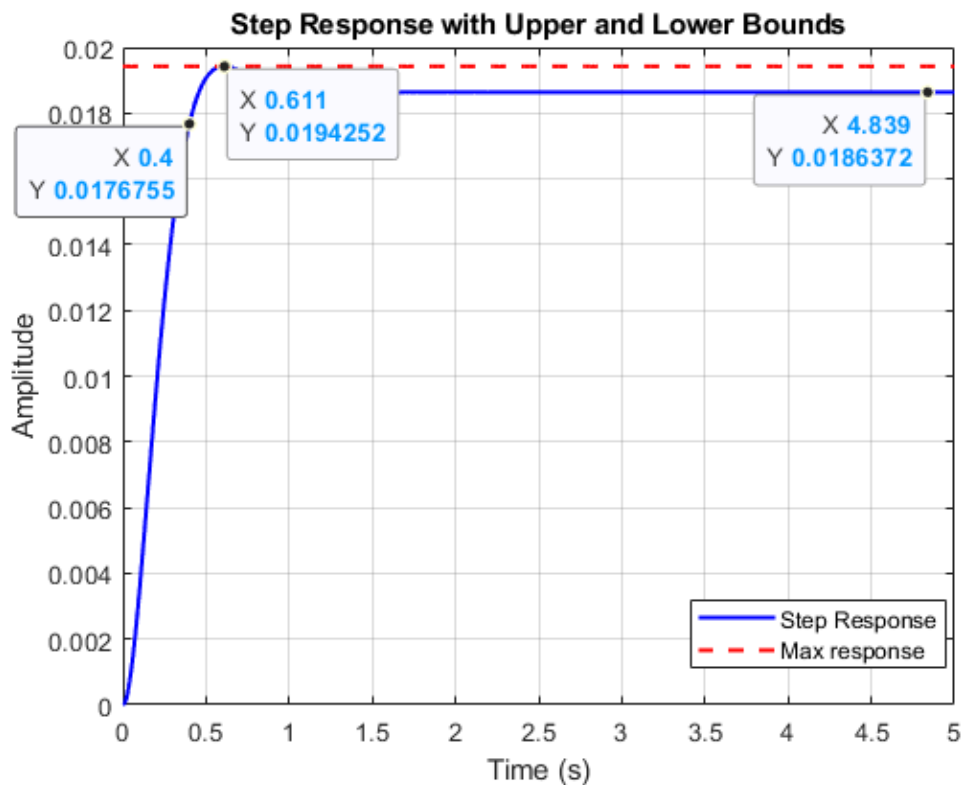
$$\rightarrow B(s) = s^2 + 10.359s + 53.656$$

Получаем эталонную модель:

$$\begin{cases} \dot{x}_M = A_M x_M + b_M g \\ y_M = C_M x_M \end{cases}$$

где: $A_M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -53.656 & -10.359 \end{bmatrix}$, $b_M = \begin{bmatrix} 0 \\ 53.656 \end{bmatrix}$, $C_M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$

График переходной функции модели:



На основе метода стандартных характеристических полиномов сформируем эталонную модель. На графике видно показано время переходного процесса $t_{\pi} = 0.4$ и максимальное перерегулирование $\bar{\sigma} = \frac{0.0194 - 0.0186}{0.0186} \approx 4.3\% < 15\%$.

2.2. Построение и промоделирование систему неадаптивное управления

На основе предположения, что параметры объекта известны, построить и промоделировать систему управления с регулятором (1.9). Провести три эксперимента, в которых:

1. использовать расчетные значения параметров объекта, заложенные в θ_1 и θ_2 ;
2. незначительно отклонить параметры объекта так, чтобы система не потеряла устойчивость;
3. отклонить параметры объекта так, чтобы система потеряла устойчивость

По результатам каждого эксперимента построить траектории $x(t)$ и $x_M(t)$ на одном графике и $e(t)$ — на другом.

Неадаптивное управление:

$$u = \theta^T x + \frac{1}{\kappa} g$$

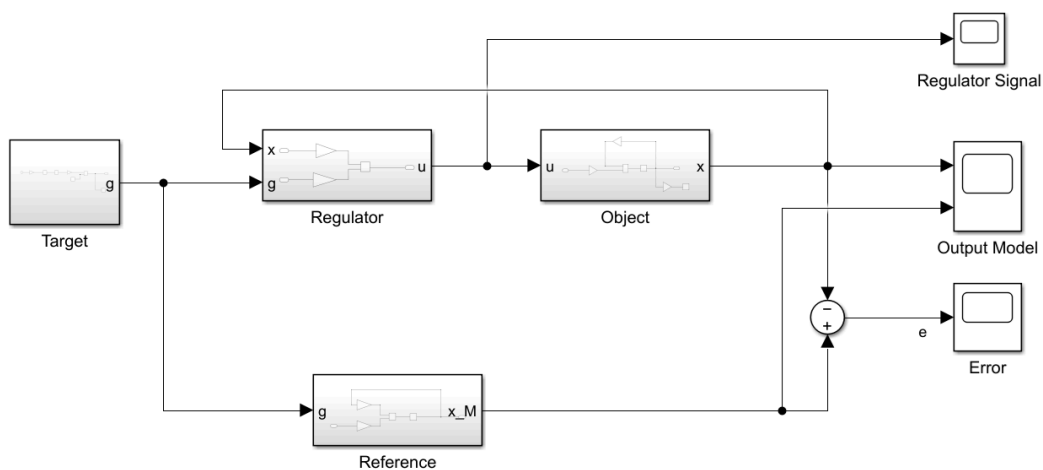
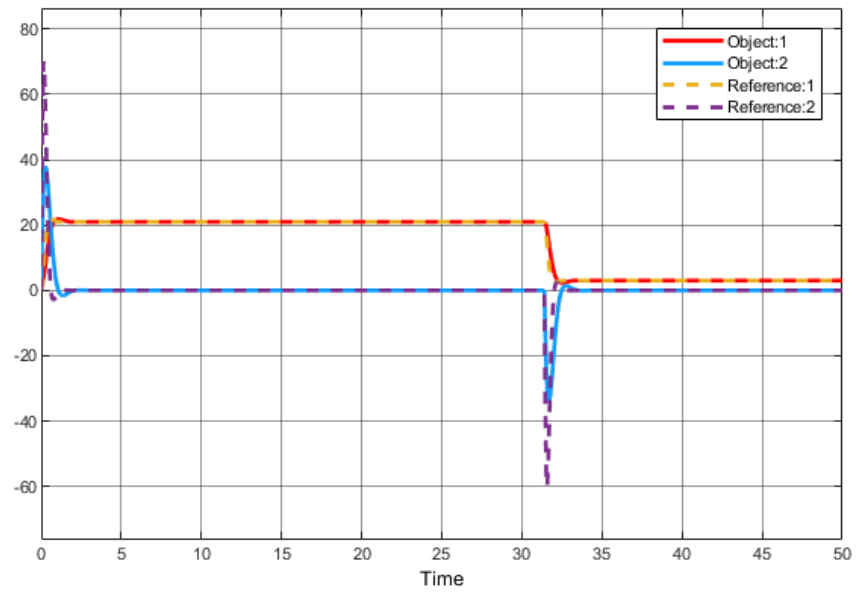
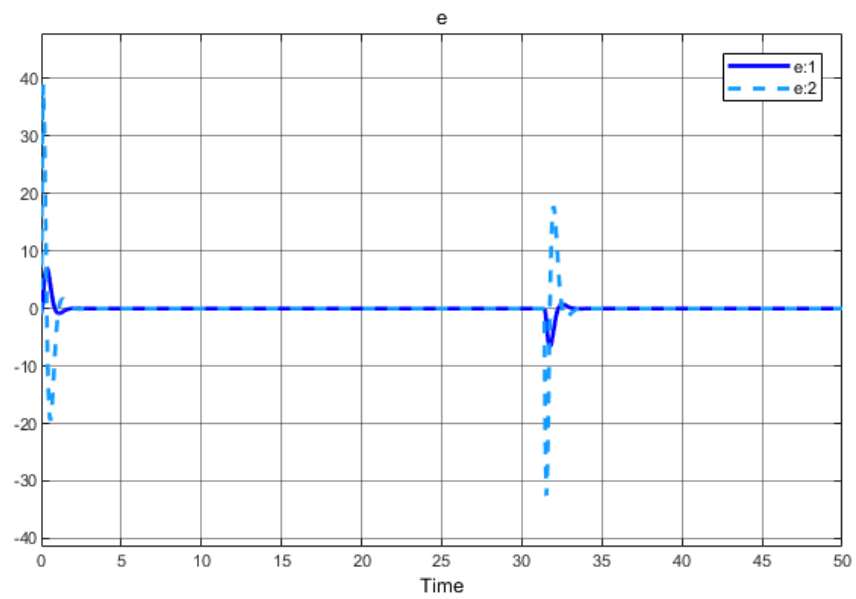


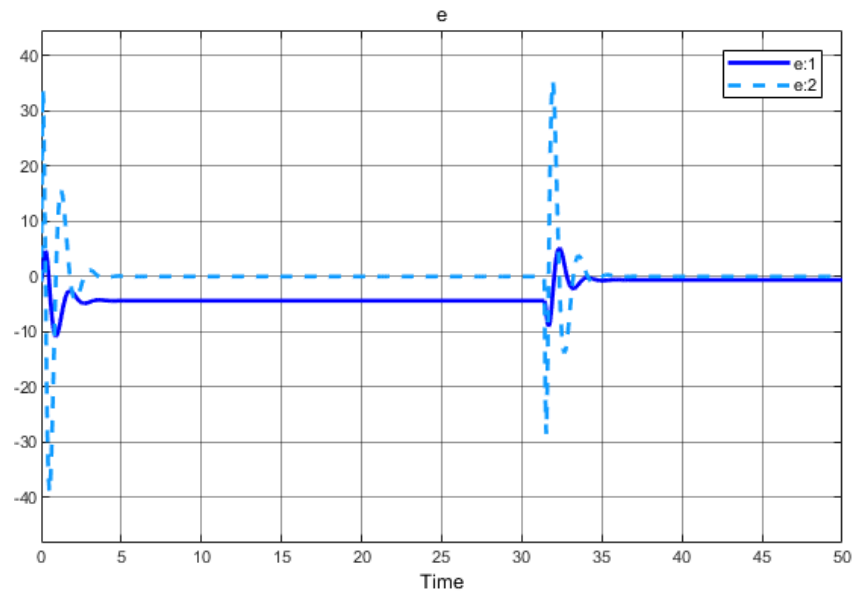
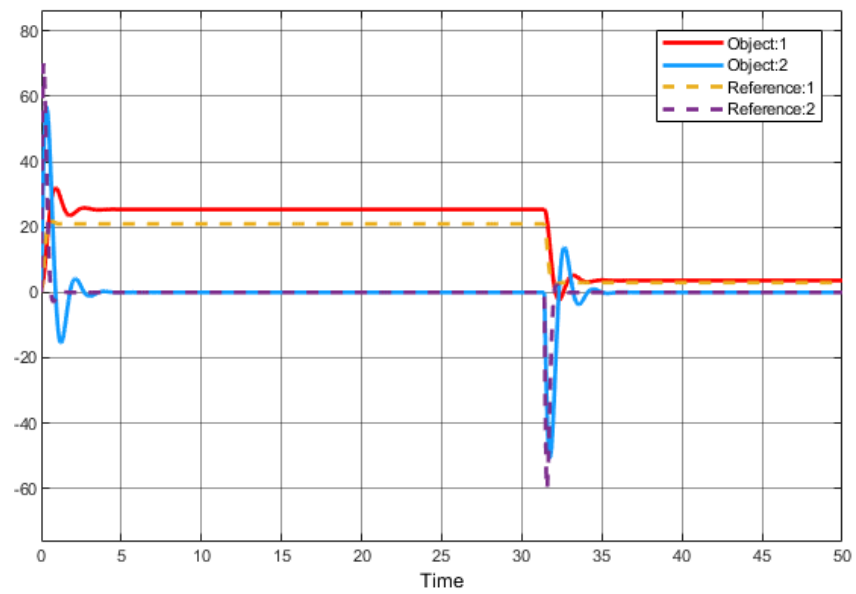
Рисунок 2.3 – Моделирование системы неадаптивного управления

1. Первый эксперимент:

Рисунок 2.4 – Траектории $x(t)$ и $x_M(t)$ Рисунок 2.5 – Ошибка управления $e(t)$

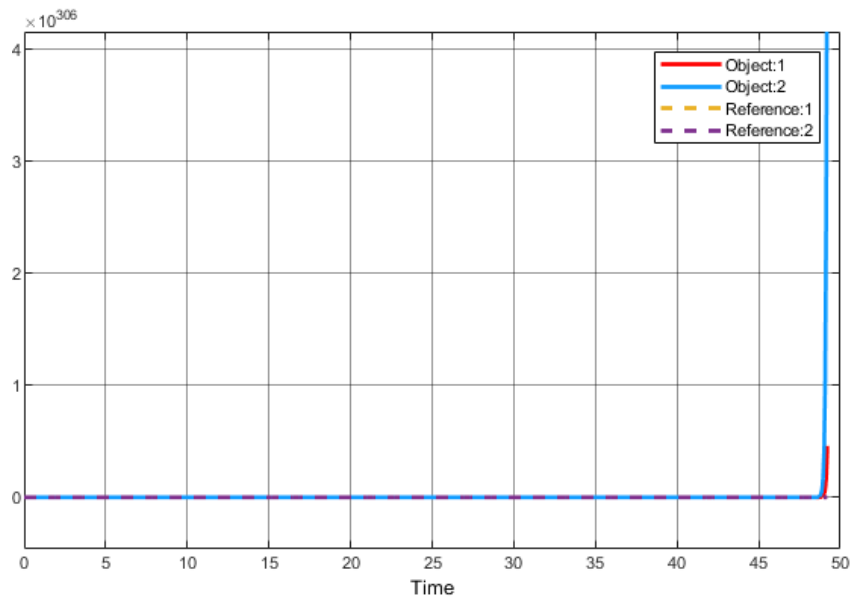
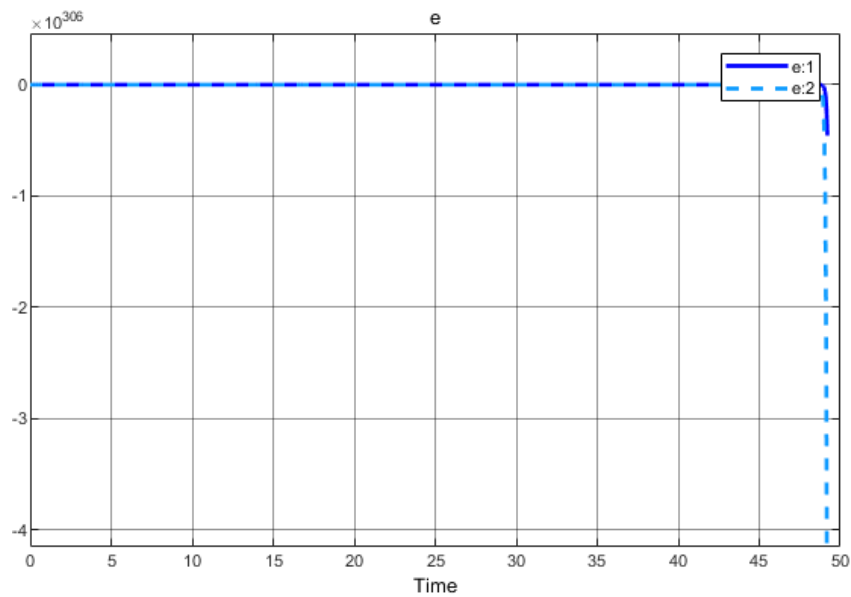
2. Второй эксперимент:

$$A := A + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Рисунок 2.6 – Траектории $x(t)$ и $x_M(t)$ Рисунок 2.7 – Ошибка управления $e(t)$

3. Третий эксперимент:

$$A := A + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 20 & 20 \end{bmatrix}$$

Рисунок 2.8 – Траектории $x(t)$ и $x_M(t)$ Рисунок 2.9 – Ошибка управления $e(t)$ **Выводы:**

- При использовании неадаптивного управления система устойчива только с расчетными значениями параметров объекта.
- Если мало изменить параметры объекта, система не потеряла устойчивость
- Чем больше изменения параметры объекта, тем ошибка системы увеличивается. Если достаточно ошибка расходится в бесконечность.

2.3. Провести моделирование адаптивной системы управления с регулятором и алгоритмом адаптации.

Провести моделирование адаптивной системы управления с регулятором (1.10) и алгоритмом адаптации (1.13).

$$u = \hat{\theta}^T x + \frac{1}{\kappa} g.$$

$$\dot{\hat{\theta}} = \gamma x b^T P e, \quad \hat{\theta}(0) = 0$$

В ходе моделирования проиллюстрировать свойства 1-4 алгоритма управления. Для этого необходимо:

1. Повторить три эксперимента п.п. 2 для фиксированного значения γ ;

Выбираем:

$$\gamma = 10$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A_M^T P + P A_M + Q = 0 \Rightarrow P = \begin{bmatrix} 7.9141 & 0.0093 \\ 0.0093 & 0.1457 \end{bmatrix}$$

- а. Использовать расчетные значения параметров объекта, заложенные в θ_1 и θ_2

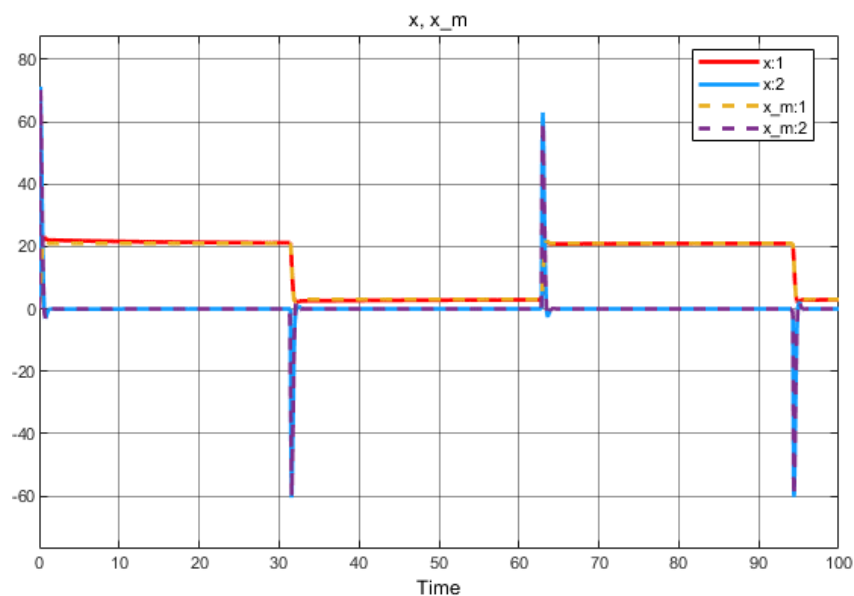
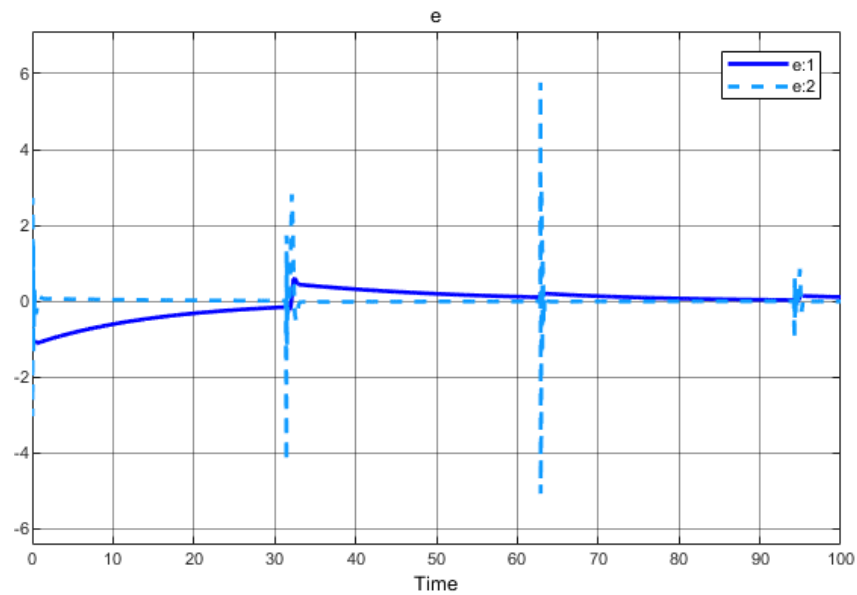
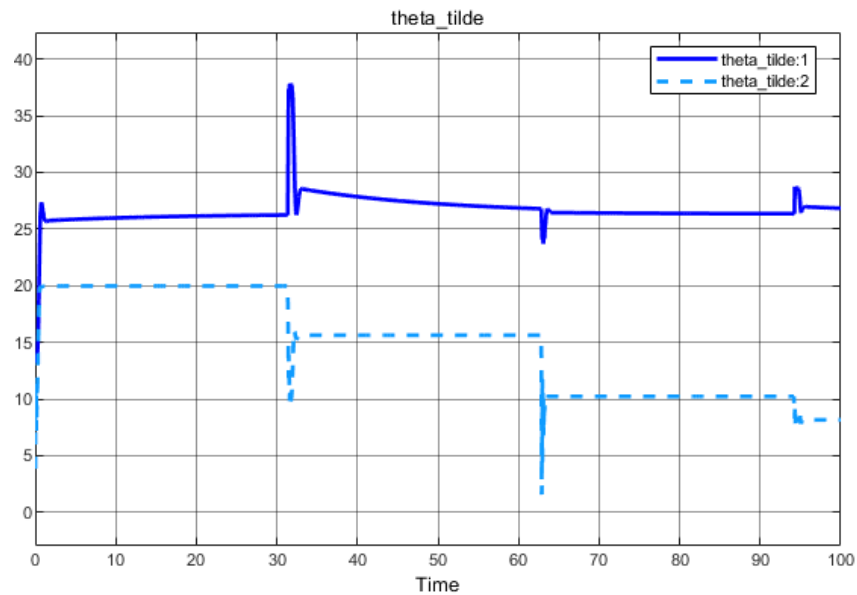
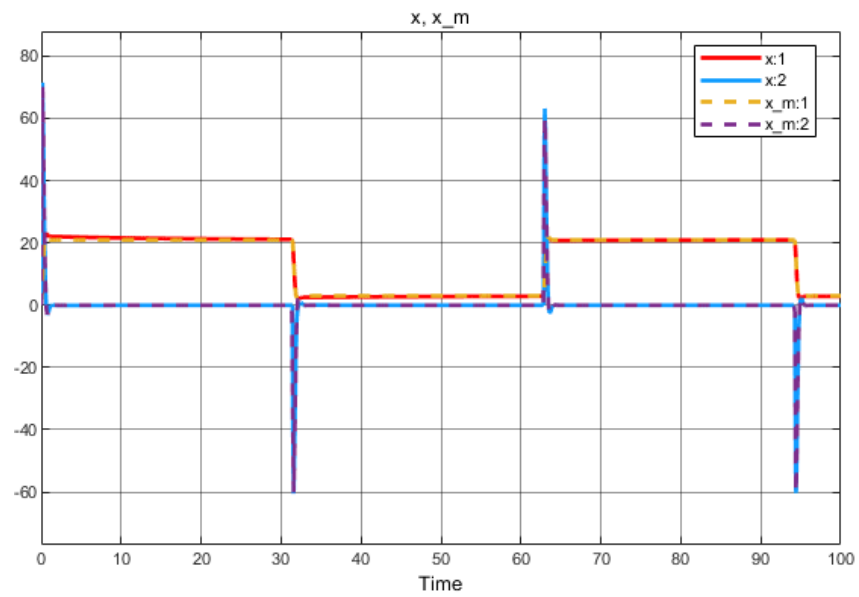
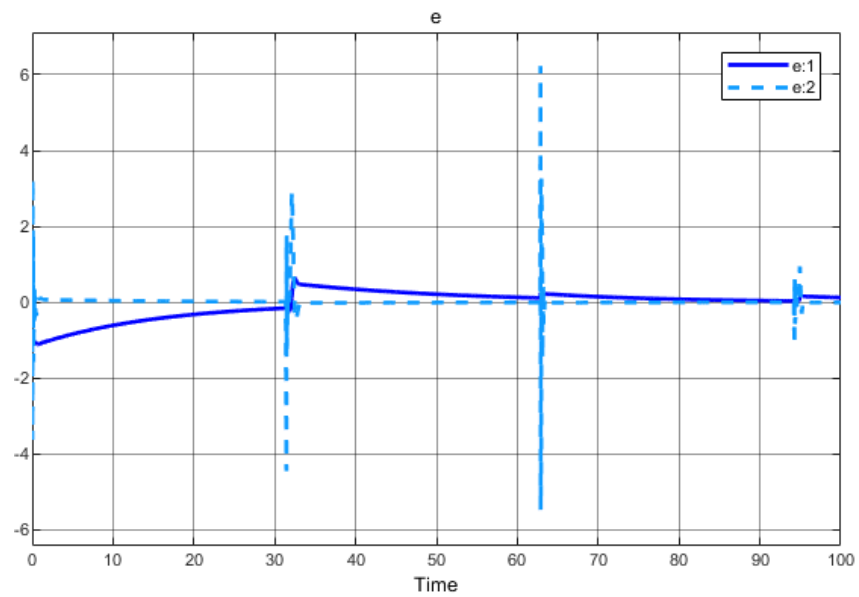


Рисунок 2.10 – Траектории $x(t)$ и $x_M(t)$

Рисунок 2.11 – Ошибка управления $e(t)$ Рисунок 2.12 – Параметрическая ошибка $\tilde{\theta}(t)$

б. Незначительно отклонить параметры объекта так, чтобы система не потеряла устойчивость

$$A := A + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Рисунок 2.13 – Траектории $x(t)$ и $x_M(t)$ Рисунок 2.14 – Ошибка управления $e(t)$

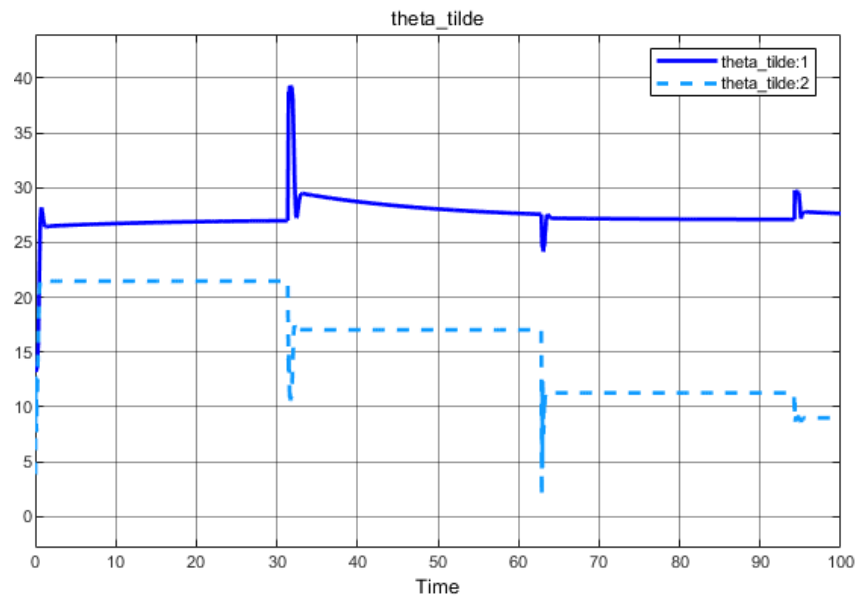


Рисунок 2.15 – Параметрическая ошибка $\tilde{\theta}(t)$

с. Отклонить параметры объекта так, чтобы система потеряла устойчивость

$$A := A + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 20 & 20 \end{bmatrix}$$

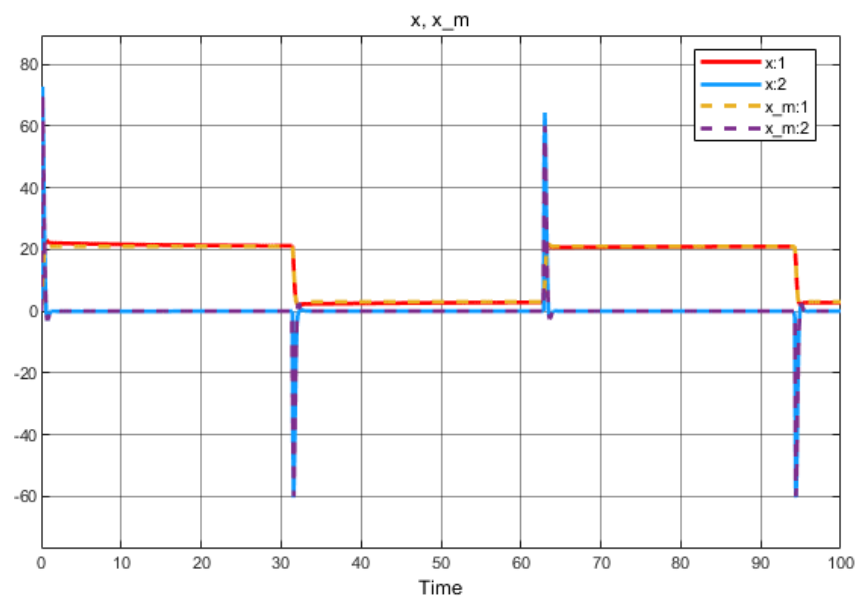


Рисунок 2.16 – Траектории $x(t)$ и $x_M(t)$

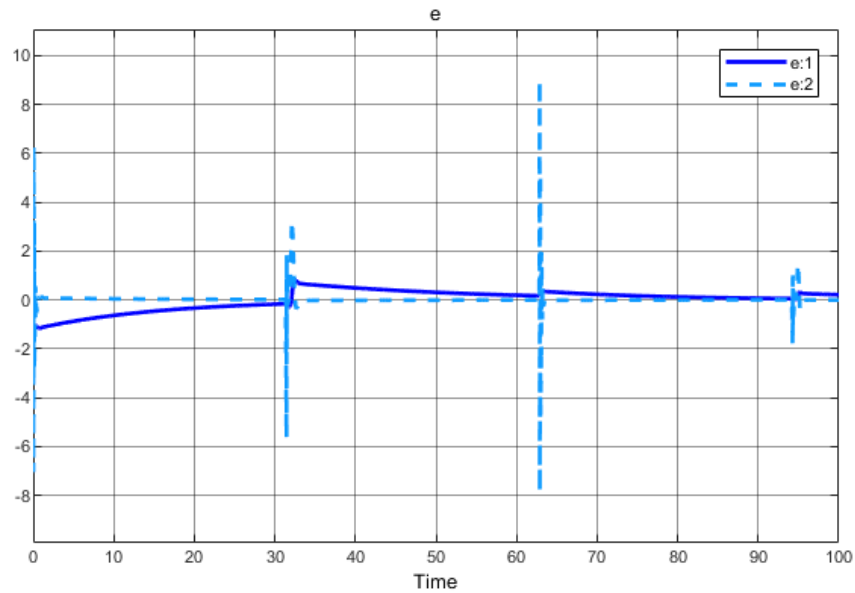


Рисунок 2.17 – Ошибка управления $e(t)$

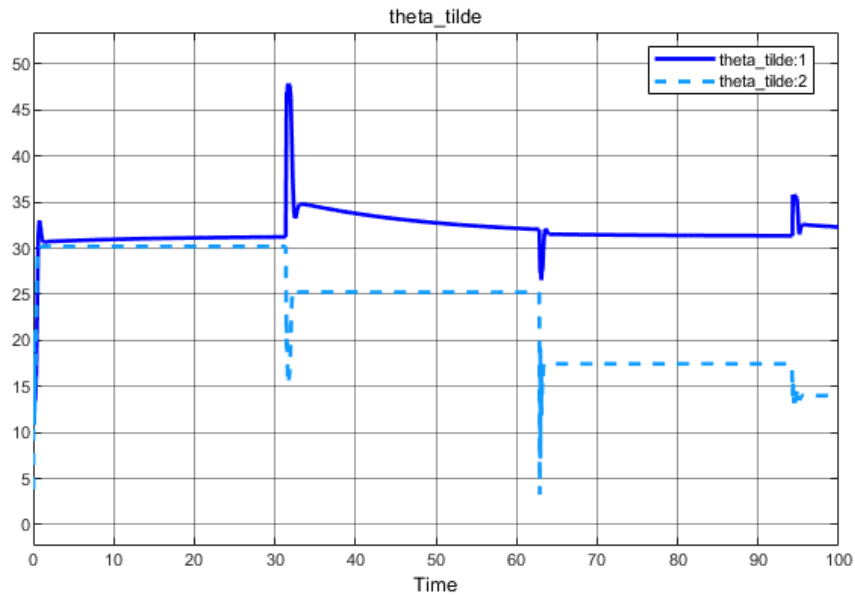


Рисунок 2.18 – Параметрическая ошибка $\tilde{\theta}(t)$

Выводы: Мы видели система устойчива когда параметры объекта отклонит значительно значение. Это доказывает что система с адаптивным управлением может адаптироваться с изменением параметра объекта системы.

2. Используя расчетные значения параметров объекта, провести эксперимент с тремя различными значениями γ

а. При $\gamma = 1$

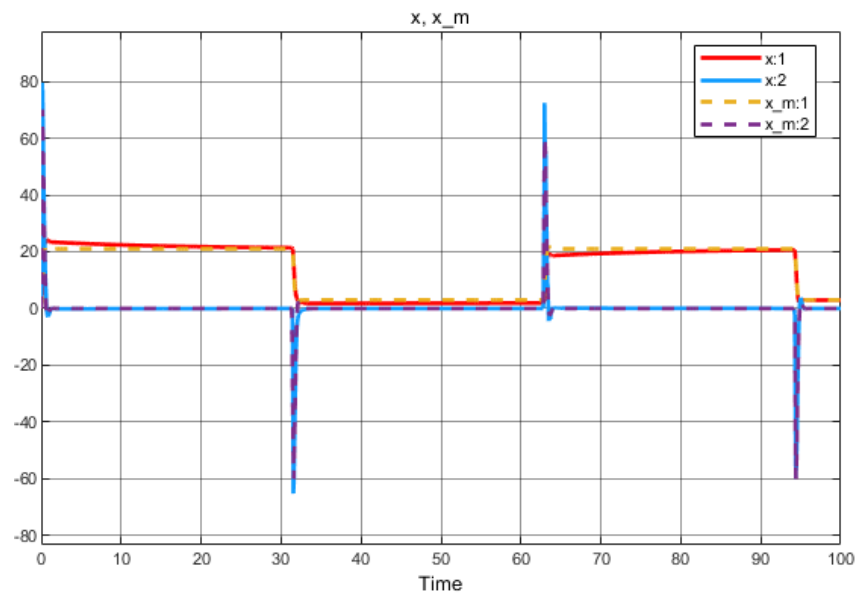


Рисунок 2.19 – Траектории $x(t)$ и $x_M(t)$

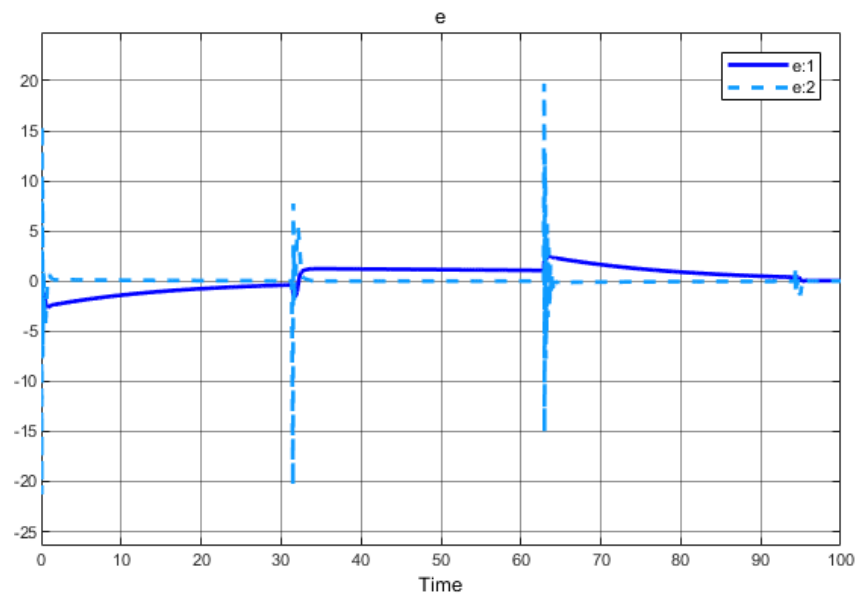


Рисунок 2.20 – Ошибка управления $e(t)$

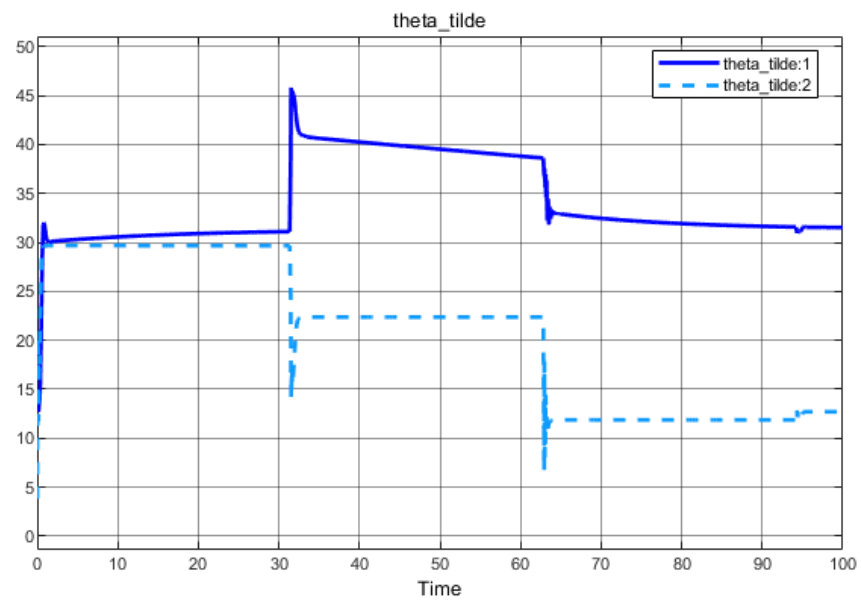


Рисунок 2.21 – Параметрическая ошибка $\tilde{\theta}(t)$

б. При $\gamma = 20$

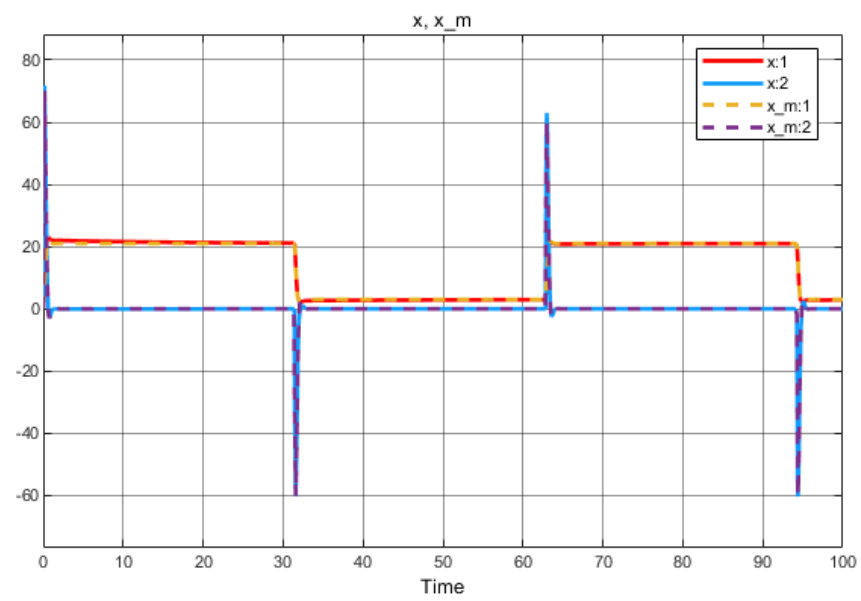


Рисунок 2.22 – Траектории $x(t)$ и $x_M(t)$

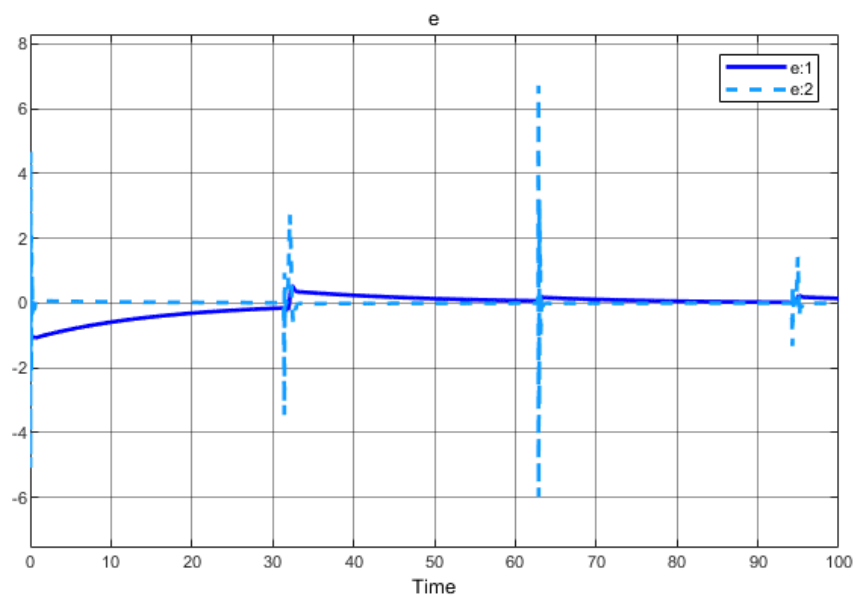


Рисунок 2.23 – Ошибка управления $e(t)$

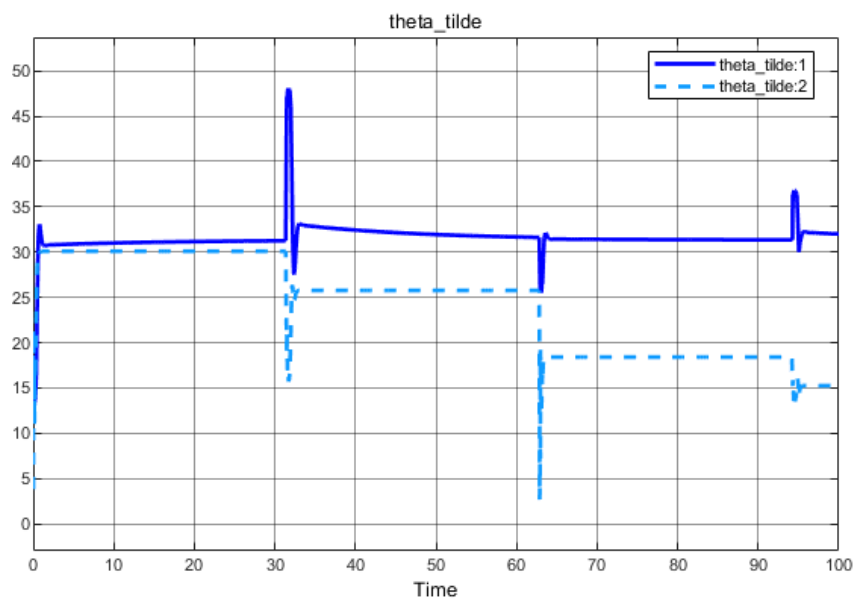


Рисунок 2.24 – Параметрическая ошибка $\tilde{\theta}(t)$

с. При $\gamma = 100$

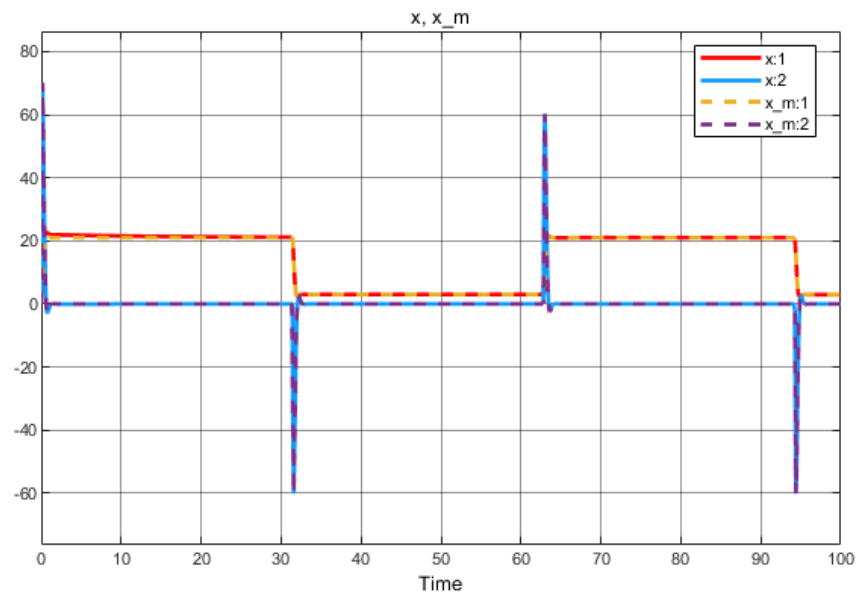


Рисунок 2.25 – Траектории $x(t)$ и $x_M(t)$

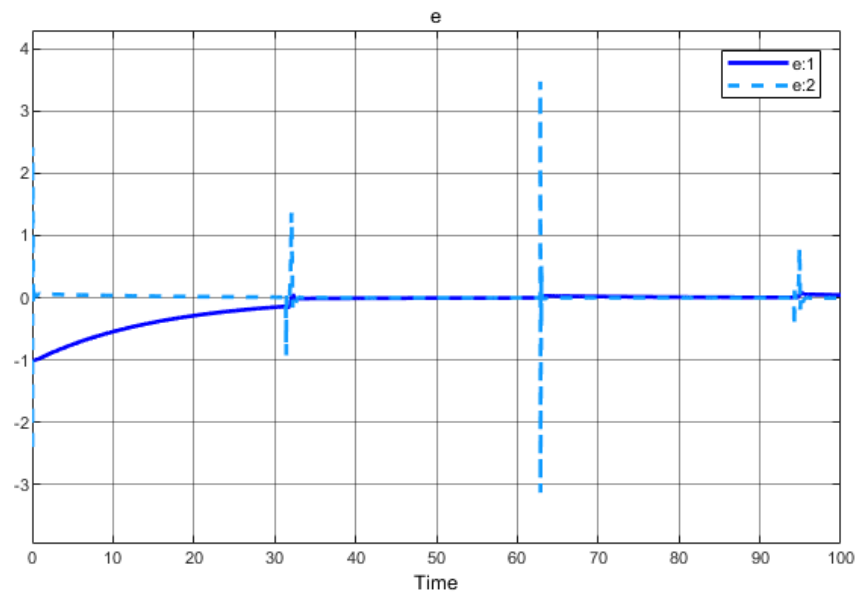


Рисунок 2.26 – Ошибка управления $e(t)$

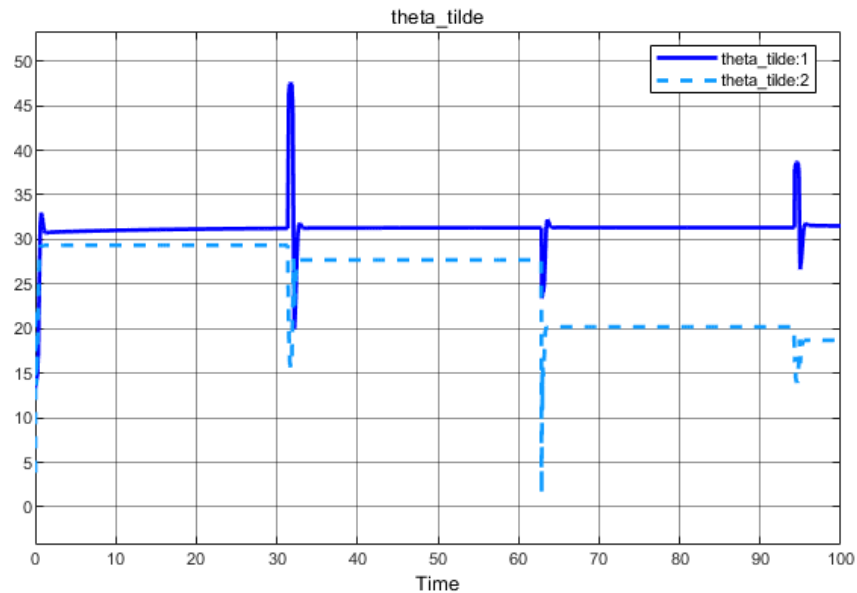


Рисунок 2.27 – Параметрическая ошибка $\tilde{\theta}(t)$

Выводы: Коэффициент адаптации γ определяет скорость, с которой адаптивный регулятор настраивается на новые параметры системы. Чем выше значение γ , тем быстрее регулятор будет настраиваться. Однако, если значение γ слишком высокое, регулятор может стать нестабильным.

3. Провести один из предыдущих экспериментов пункта при $g(t) = 1$.

Выбираем эксперимент с $\gamma = 100$ и $g(t) = 1$.

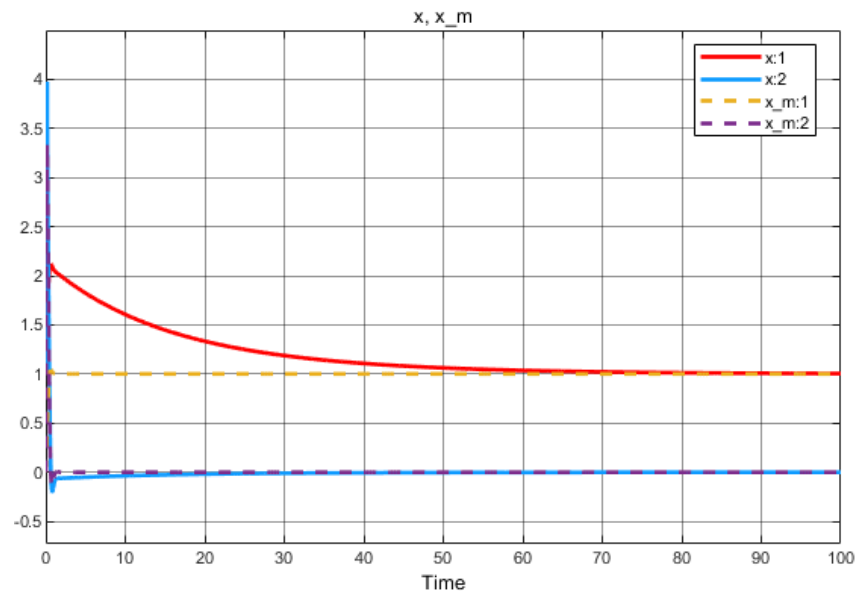


Рисунок 2.28 – Траектории $x(t)$ и $x_M(t)$

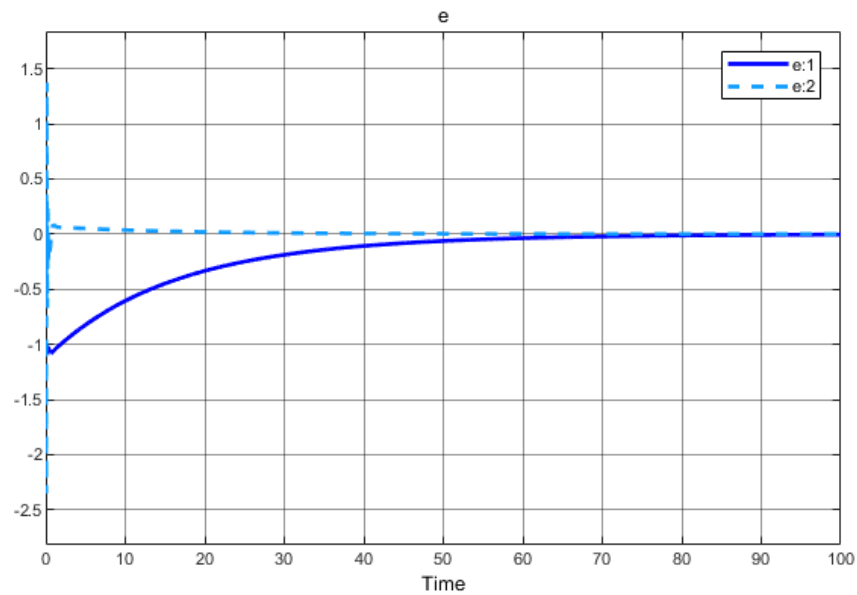


Рисунок 2.29 – Ошибка управления $e(t)$

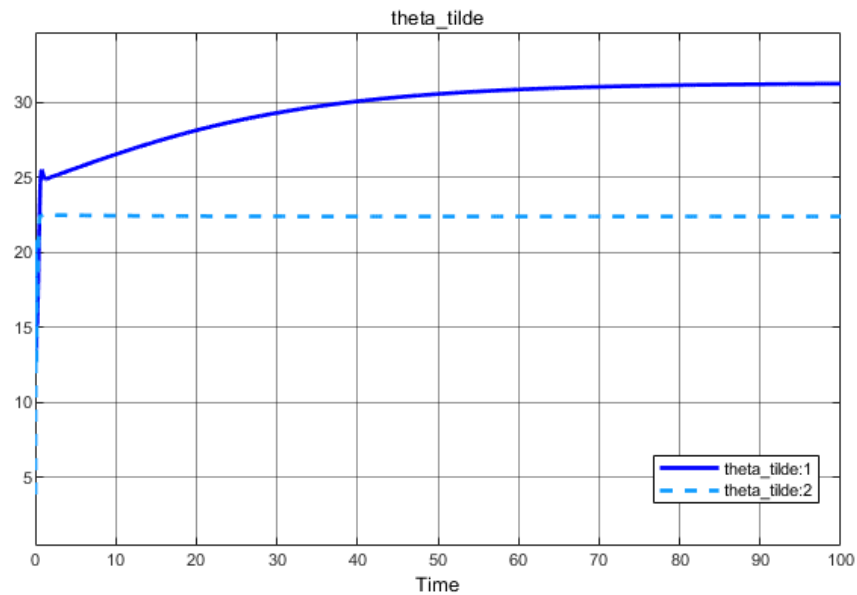


Рисунок 2.30 – Параметрическая ошибка $\tilde{\theta}(t)$

Выводы: Мы видим что если входный сигнал системы это число, то система будет адаптироваться к этому числу.

Выводы

В этой лаборатории мы знакомимся с адаптивным управлением. Мы поняли смысл адаптивного управления, Мы сравнили адаптивное управление с методом стандартных характеристических полиномов. Мы обнаружили, что адаптивное управление очень надежно. Если мы заранее не знаем вход или заранее не знаем параметры объекта управления, мы все равно можем управлять им посредством адаптивного управления.

Список рисунков

Рисунок 2.3: Моделирование системы неадаптивного управления	9
Рисунок 2.4: Траектории $x(t)$ и $x_M(t)$	10
Рисунок 2.5: Ошибка управления $e(t)$	10
Рисунок 2.6: Траектории $x(t)$ и $x_M(t)$	11
Рисунок 2.7: Ошибка управления $e(t)$	11
Рисунок 2.8: Траектории $x(t)$ и $x_M(t)$	12
Рисунок 2.9: Ошибка управления $e(t)$	12
Рисунок 2.10: Траектории $x(t)$ и $x_M(t)$	13
Рисунок 2.11: Ошибка управления $e(t)$	14
Рисунок 2.12: Параметрическая ошибка $\tilde{\theta}(t)$	14
Рисунок 2.13: Траектории $x(t)$ и $x_M(t)$	15
Рисунок 2.14: Ошибка управления $e(t)$	15
Рисунок 2.15: Параметрическая ошибка $\tilde{\theta}(t)$	16
Рисунок 2.16: Траектории $x(t)$ и $x_M(t)$	16
Рисунок 2.17: Ошибка управления $e(t)$	17
Рисунок 2.18: Параметрическая ошибка $\tilde{\theta}(t)$	17
Рисунок 2.19: Траектории $x(t)$ и $x_M(t)$	18
Рисунок 2.20: Ошибка управления $e(t)$	18
Рисунок 2.21: Параметрическая ошибка $\tilde{\theta}(t)$	19
Рисунок 2.22: Траектории $x(t)$ и $x_M(t)$	19
Рисунок 2.23: Ошибка управления $e(t)$	20
Рисунок 2.24: Параметрическая ошибка $\tilde{\theta}(t)$	20
Рисунок 2.25: Траектории $x(t)$ и $x_M(t)$	21
Рисунок 2.26: Ошибка управления $e(t)$	21
Рисунок 2.27: Параметрическая ошибка $\tilde{\theta}(t)$	22
Рисунок 2.28: Траектории $x(t)$ и $x_M(t)$	22
Рисунок 2.29: Ошибка управления $e(t)$	23
Рисунок 2.30: Параметрическая ошибка $\tilde{\theta}(t)$	23

Список таблиц

Таблица 2.1: Вариант заданий	7
------------------------------------	---