ITMO UNIVERSITY

Адаптивное и Робастное Управление

Герасимов Д.Н.

gerasimovdn@mail.ru, dngerasimov@itmo.ru

Санкт-Петербург, 2024

Содержание

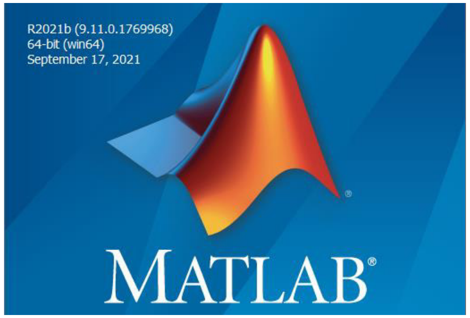
Ссылки на литературу

1. Narendra K.S. and Annaswamy A.M. *Stable Adaptive Systems*. — Englewood Cliffs. Courier Corporation, 2012. — 512 p.
2. Sastry S. and Bodson M., *Adaptive Control: Stability, Convergence and Robustness*. — Englewood Cliffs. N.J.: Prentice-Hall, 1989. — 377 p.
3. Ioannou P.A. and Sun J. *Robust adaptive control* — California: Prentice-Hall, 1996. — 848 p.
4. Khalil H. K., *Nonlinear Systems*, 3rd Edition, Prentice Hall, Upper Saddle River, 2002. —766 p.
5. Krstic M., Kanellakopoulos I., and Kokotovic P. V., *Nonlinear and Adaptive Control Design* — Wiley, 1995 — 563 p. (HNC book)
6. Gang Tao. *Adaptive control design and analysis*, Wiley-InterScience, 2003. — 618p.
7. Nikiforov V., Gerasimov D., *Adaptive regulation: reference tracking and disturbance rejection*. Lecture Notes in Control and Information Sciences — Springer Nature, 2022 — 376p.

Структура курса

1. Лекции

2. Практические/лабораторные работы



3. Экзамен/зачет

4. Дополнительная домашняя работа

1. Введение

Проблематика. Классическая теория управления

$$\dot{x} = Ax + bu,$$
$$y = c^T x,$$

где A, b, c точно известны, y, x, u доступные точному измерению сигналы выхода, состояния и входа соответственно.

Если y, x и u не доступны измерению, то могут быть восстановлены с абсолютной точностью на основе измеримых сигналов.

1. Введение

Проблематика. Классическая теория управления

$$\dot{x} = Ax + bu,$$
$$y = c^T x,$$

где A, b, c точно известны, y, x, u доступные точному измерению сигналы выхода, состояния и входа соответственно.

Если y, x и u не доступны измерению, то могут быть восстановлены с абсолютной точностью на основе измеримых сигналов.

С практической точки зрения эти допущения являются существенными ограничениями!

1. Введение

Проблематика

- Математические модели имеют ограниченную точность;
- Параметры могут меняться как во времени, так и от устройства к устройству.

Летательный аппарат

ДПТ

U

α

Динамика ДПТ

$$\dot{I} = -\frac{R}{L} I - \frac{k_E}{L}\omega + \frac{1}{L} U,$$

$$\dot{\omega} = \frac{k_M}{J} I - \frac{1}{J} M_L,$$

$$\dot{\alpha} = \omega$$

ДВС

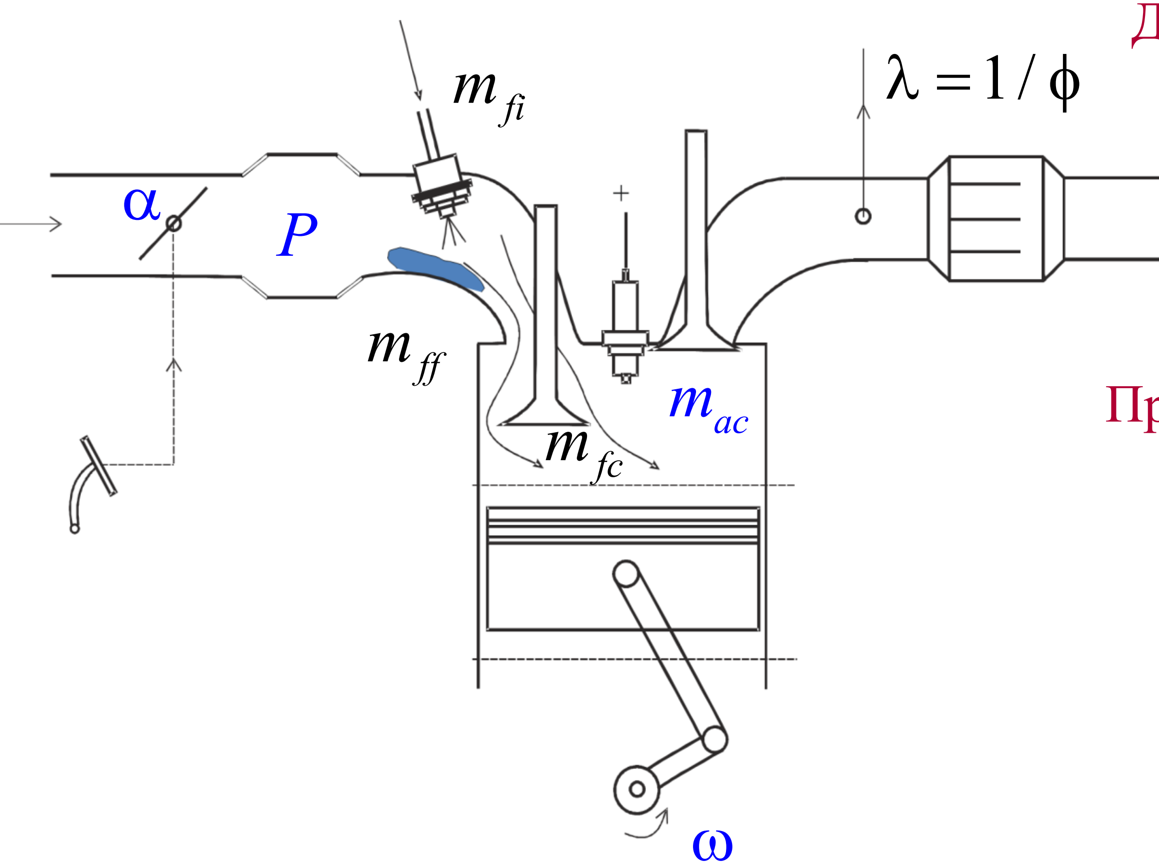
Динамика испарения топлива со стенок коллектора

$$\dot{m}_{ff} = -\frac{1}{T} m_{ff} + \frac{K}{T} m_{fi}$$

$$m_{fc} = m_{ff} + (1-K) m_{fi}$$

Двигатель внутреннего сгорания

Схема



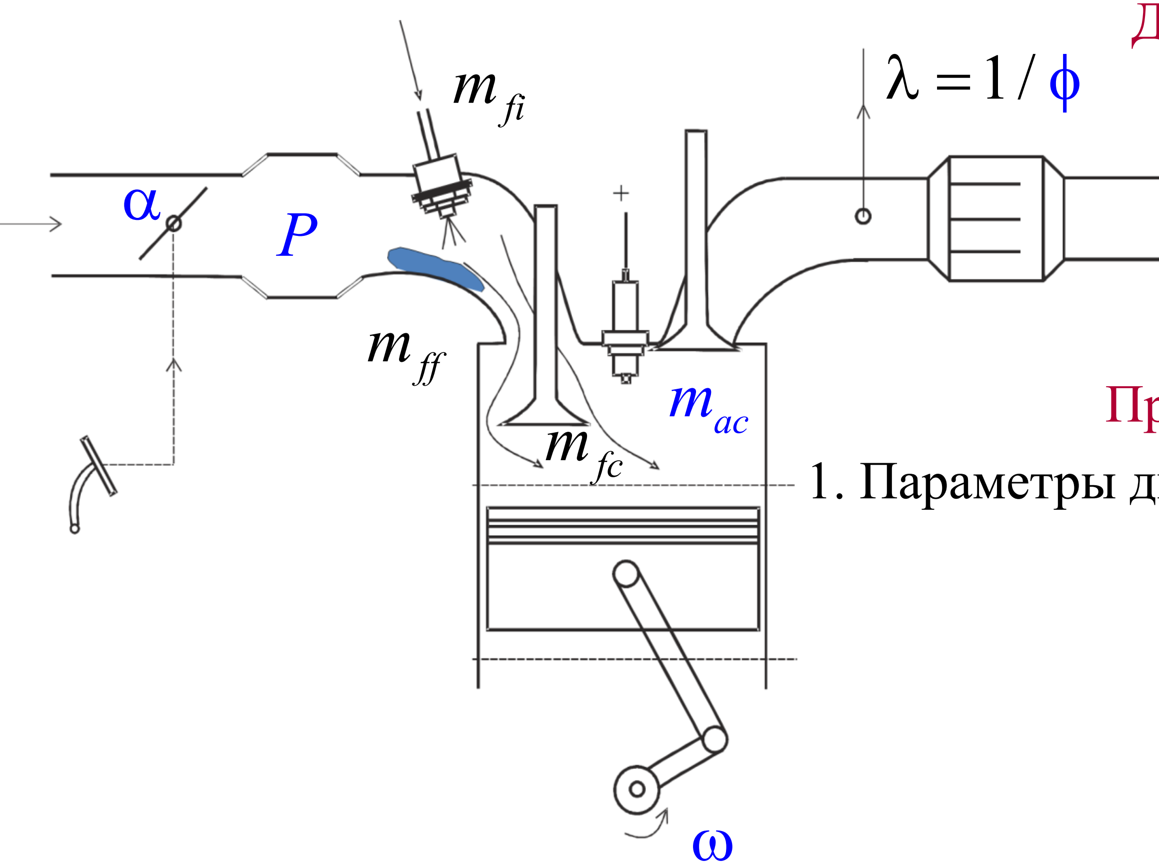
Динамика испарения топлива

$$\begin{cases} \dot{m}_{ff} = -\dfrac{1}{T} m_{ff} + \dfrac{K}{T} m_{fi} \\ m_{fc} = m_{ff} + (1-K) m_{fi} \end{cases}$$

Практические проблемы

Двигатель внутреннего сгорания

Схема



Динамика испарения топлива

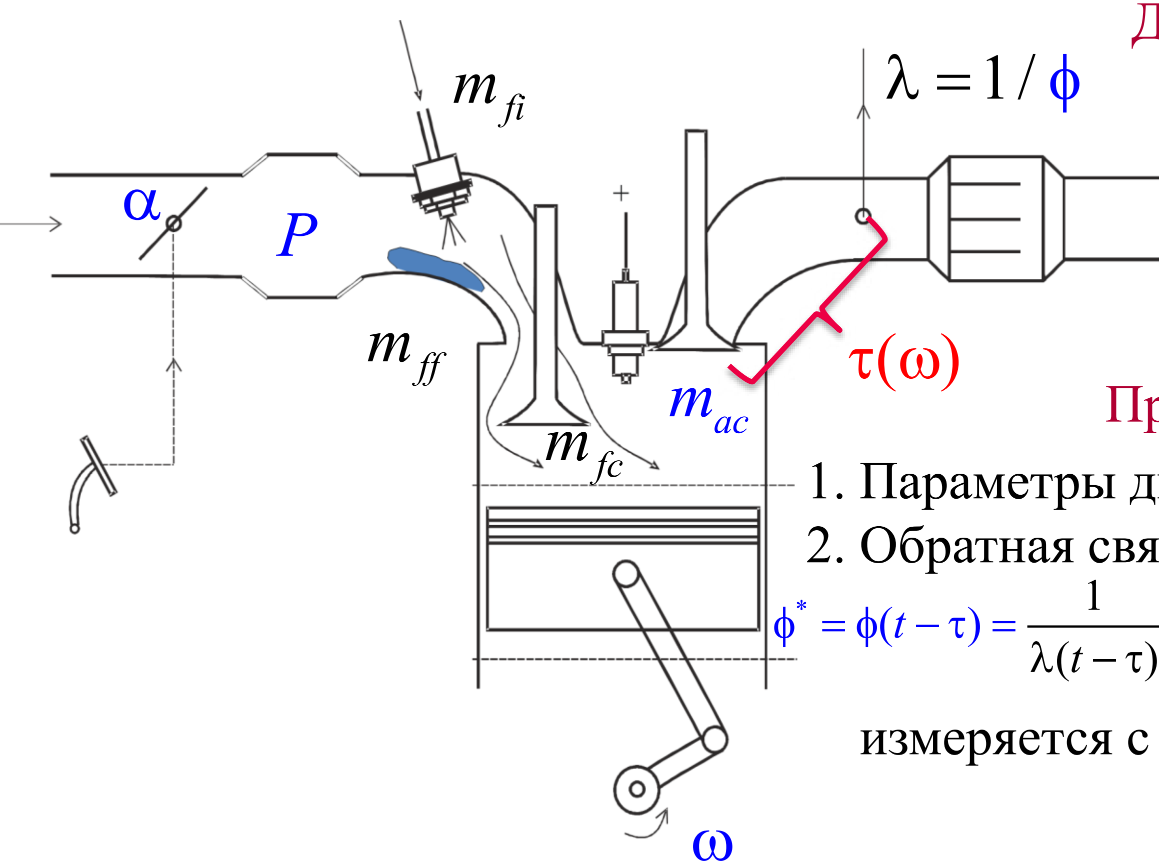
$$\begin{cases} \dot{m}_{ff} = -\dfrac{1}{T} m_{ff} + \dfrac{K}{T} m_{fi} \\ m_{fc} = m_{ff} + (1-K) m_{fi} \end{cases}$$

Практические проблемы

1. Параметры динамики испарения неизвестны;

Двигатель внутреннего сгорания

Схема



Динамика испарения топлива

$$\begin{cases} \dot{m}_{ff} = -\dfrac{1}{T} m_{ff} + \dfrac{K}{T} m_{fi} \\ m_{fc} = m_{ff} + (1-K) m_{fi} \end{cases}$$

Практические проблемы

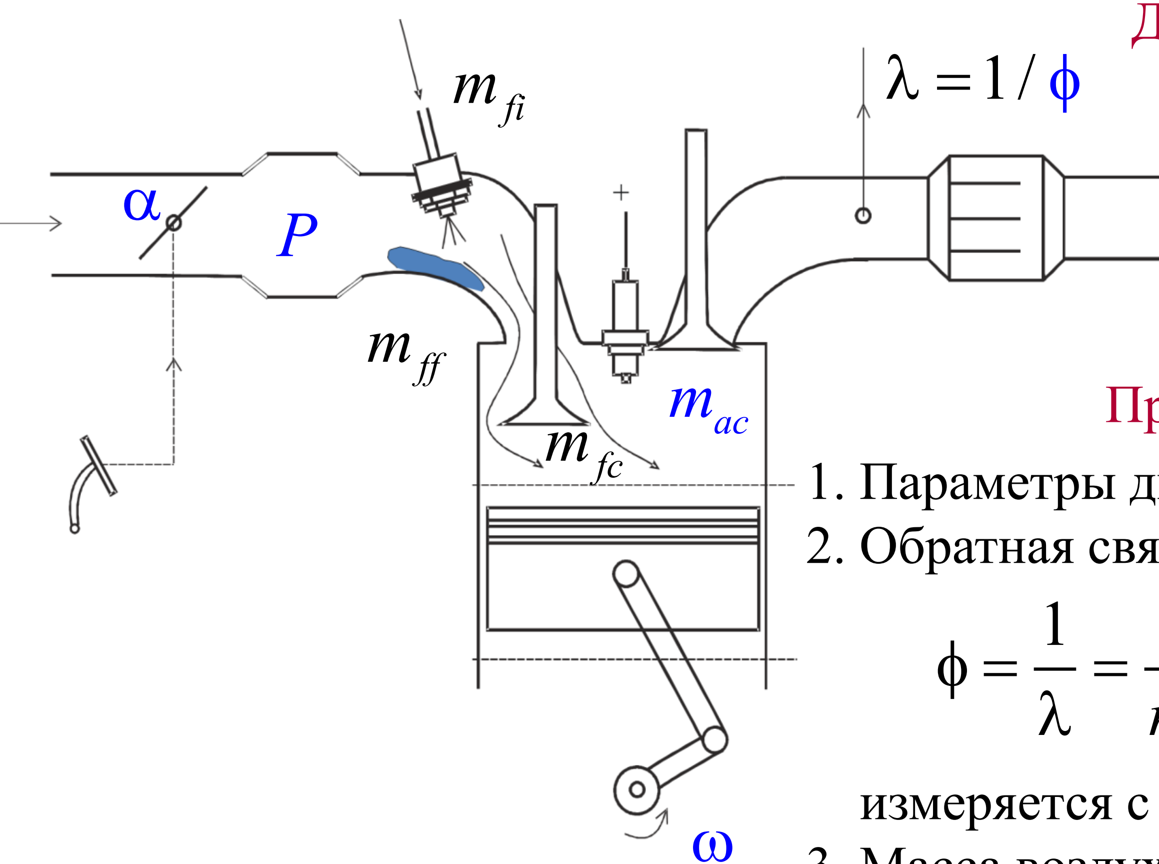
1. Параметры динамики испарения неизвестны;
2. Обратная связь — соотношение В-Т (Т-В)

$$\phi^* = \phi(t-\tau) = \frac{1}{\lambda(t-\tau)} = \frac{1}{m_{ac}(t-\tau)}\left(m_{ff}(t-\tau) + (1-K)m_{fi}(t-\tau)\right)$$

измеряется с переменным запаздыванием;

Двигатель внутреннего сгорания

Схема



Динамика испарения топлива

$$\begin{cases} \dot{m}_{ff} = -\dfrac{1}{T} m_{ff} + \dfrac{K}{T} m_{fi} \\ m_{fc} = m_{ff} + (1-K) m_{fi} \end{cases}$$

Практические проблемы

1. Параметры динамики испарения неизвестны;
2. Обратная связь — соотношение В-Т (Т-В)

$$\phi = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{m_{ac}} \left(m_{ff} + (1-K) m_{fi} \right)$$

измеряется с переменным запаздыванием;

3. Масса воздуха в цилиндрах m_{ac} известна не точно:

$$m_{ac} = \frac{c\eta(P,\omega)}{\omega}.$$

Кровеносная система

u

y

Динамика давления крови в организме

$$y(t)=\frac{Ke^{-T_1 s}\left(1+ae^{-T_2 s}\right)}{1+\tau s}\left[u(t)\right]$$

y – *отклонение среднего артериального давления от нормального;*

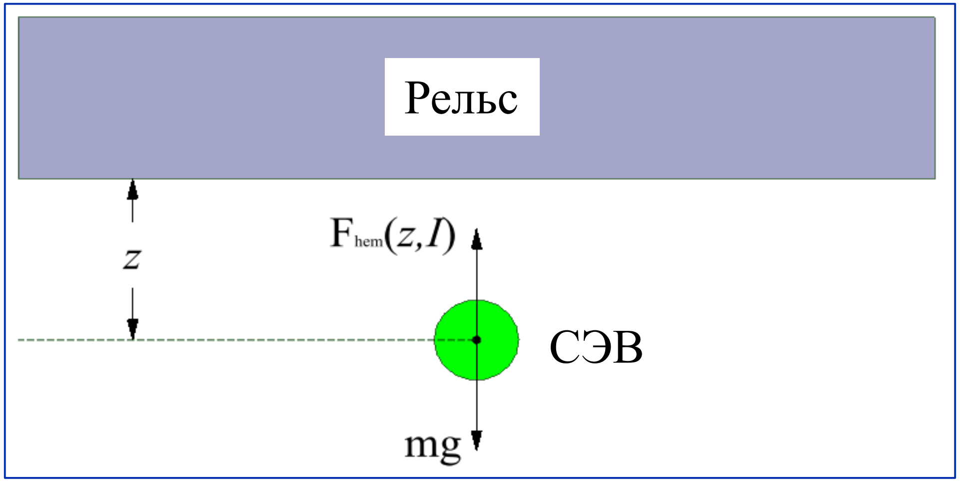
u – *скорость инфузии (нитропруссид);*

T_1, T_2 – *начальное запазд. и запазд. рециркуляции;*

K – *чувствительность к препарату;*

a – *рециркуляционная фракция;* τ – *запаздывание.*

Магнитная левитационная платформа



$$\begin{cases}\dot z = v\\ \dot v = a\\ \dot a = \varphi^T\theta\, v + \varphi_u u\\ \dot I = u\end{cases}$$

$F_{HEM}(z,I)=\varphi^T\theta$ – *сила электромагнитного взаимодействия*

В этом контексте методы теории управления, которые позволяют преодолеть проблему неопределенностей объекта, представляют особый интерес.

Может ли система управления выбрать правильное управление с целью улучшения качества работы системы в условиях неопределенностей?

В этом контексте методы теории управления, которые позволяют преодолеть проблему неопределенностей объекта, представляют особый интерес.

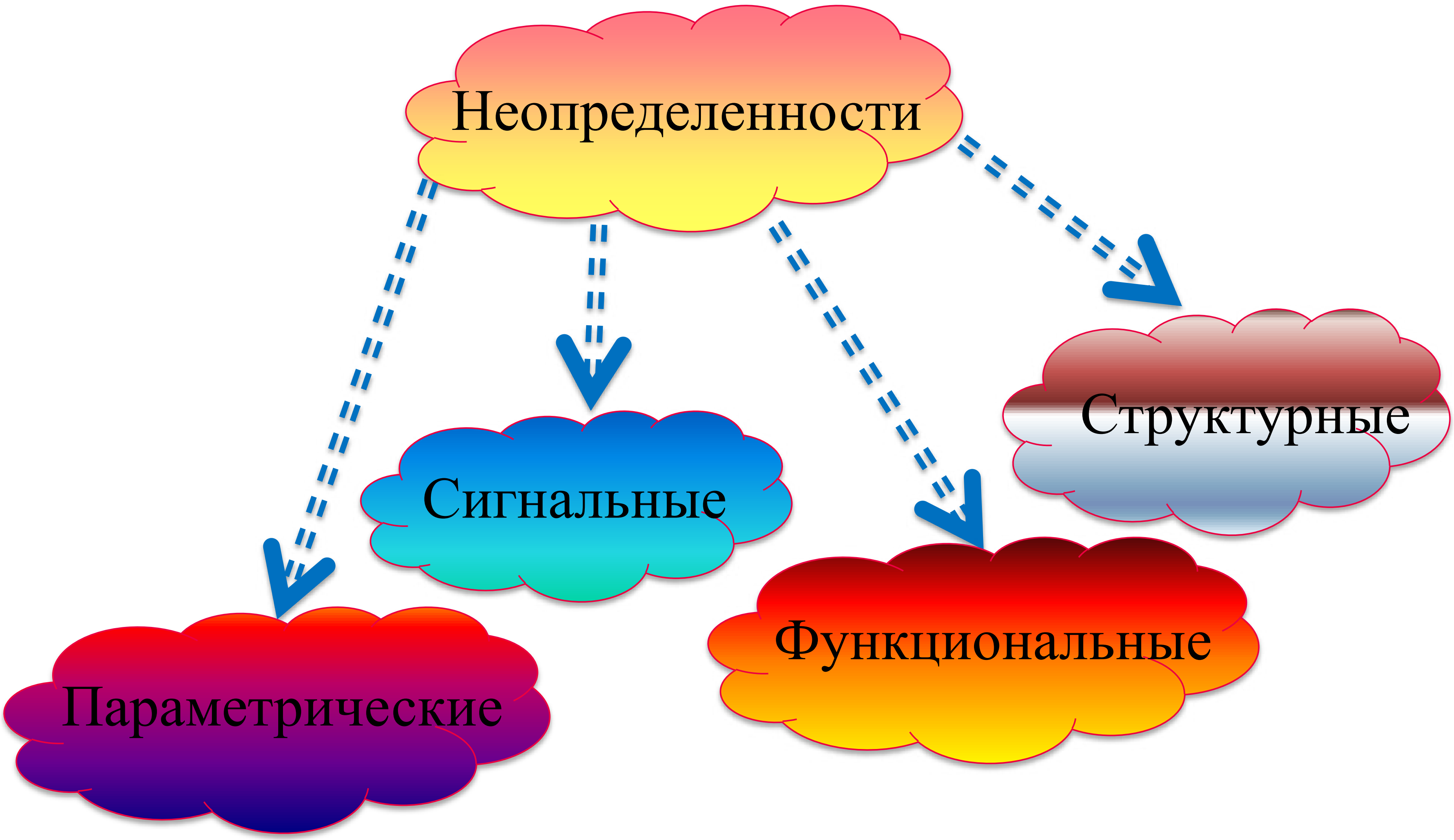
Может ли система управления выбрать правильное управление с целью улучшения качества работы системы в условиях неопределенностей?

В этом контексте методы теории управления, которые позволяют преодолеть проблему неопределенностей объекта, представляют особый интерес.

Может ли система управления выбрать правильное управление с целью улучшения качества работы системы в условиях неопределенностей?

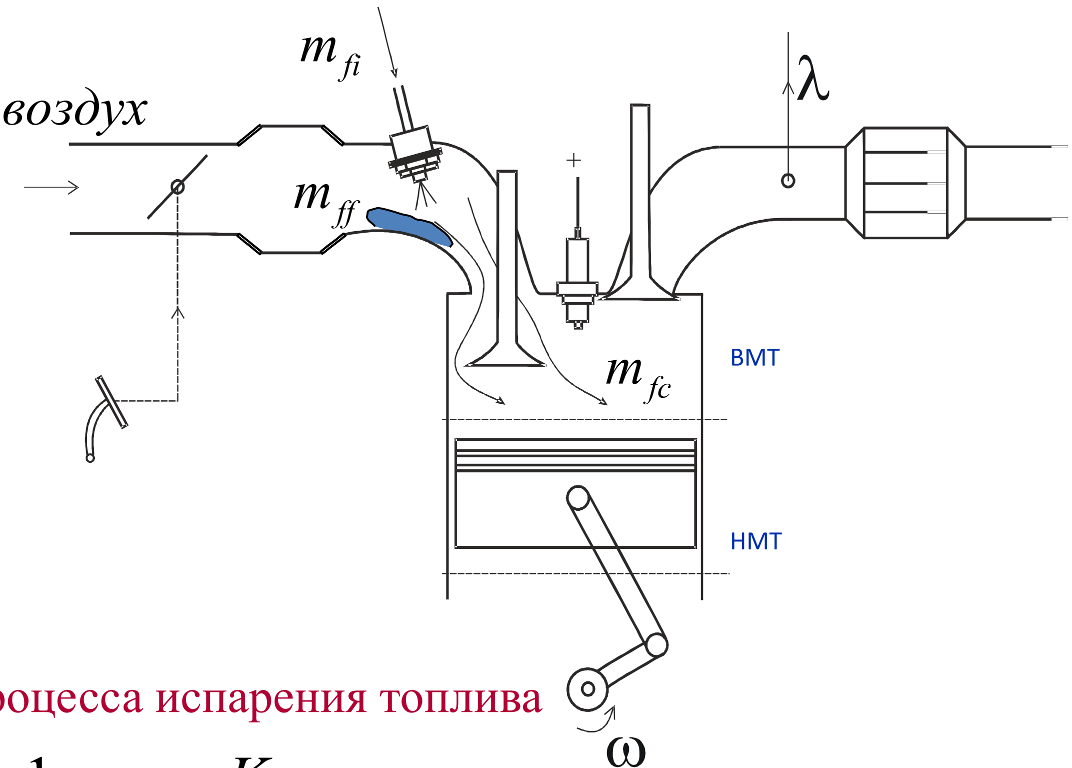
Как синтезировать такое управление?

1. **Неопределенности** – неизвестные или неточно известные характеристики, структура или параметры объекта;
2. Неопределенности объекта = неопределенности его модели;
3. Модель, лежащая в основе синтеза регулятора называется **номинальной**;
4. Характеристики, структура, параметры номинальной модели называются **номинальными**.


Неопределенности
Сигнальные
Структурные
Функциональные
Параметрические

Параметрические неопределенности предполагают наличие в модели постоянных и неизвестных параметров.

ДВС



Динамика процесса испарения топлива

$$\dot{m}_{ff} = -\frac{1}{T} m_{ff} + \frac{K}{T} m_{fi}$$

$$m_{fc} = m_{ff} + (1-K) m_{fi}$$

Сигнальные неопределенности предполагают наличие в модели неизвестных функций времени.

ДПТ

Динамика ДПТ

$$\dot{I} = -\frac{R}{L}I - \frac{k_E}{L}\omega + \frac{1}{L}U,$$

$$\dot{\omega} = \frac{k_M}{J}I - \frac{1}{J}M_L,$$

$$\dot{\alpha} = \omega$$

$$\boxed{R = R(\textit{температура}) = R(\textit{время})}$$

Функциональные неопределенности предполагают наличие в модели неизвестных функций состояния.

Уравнение динамики гребного вала

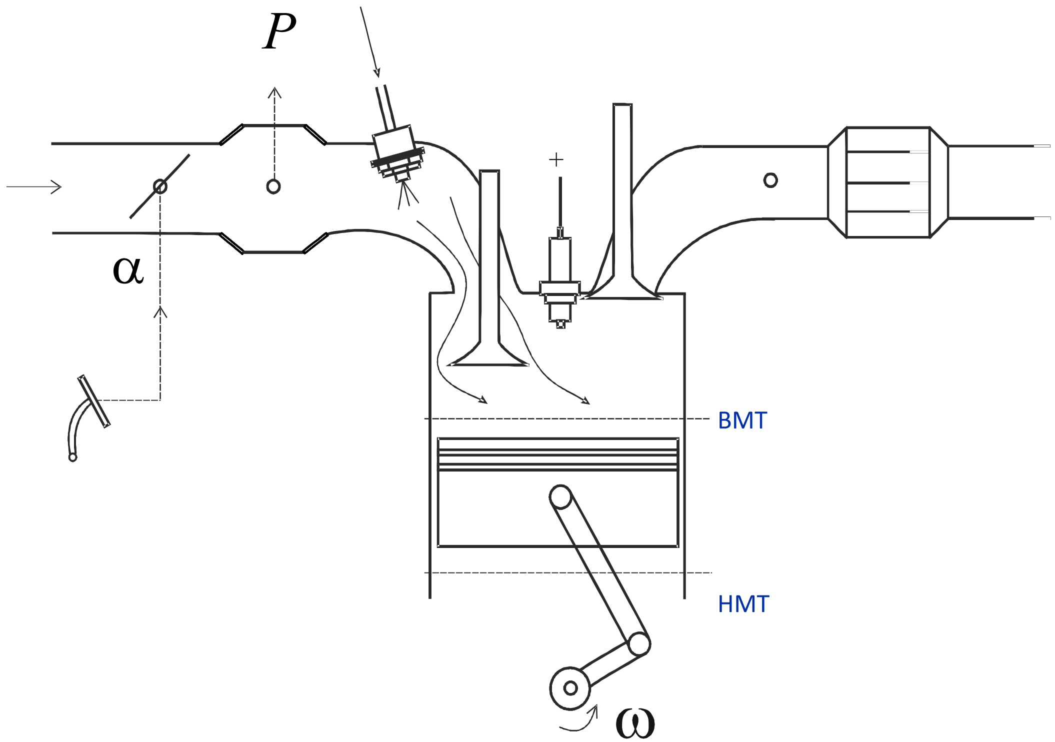
$$J\dot{\omega} = M - M_V$$

M – вырабатываемый крутящий момент,

M_V – момент вязкого трения.

$$\boxed{M_V = M_V(\omega) \approx c_0 + c_1\omega + c_2\omega^2}$$

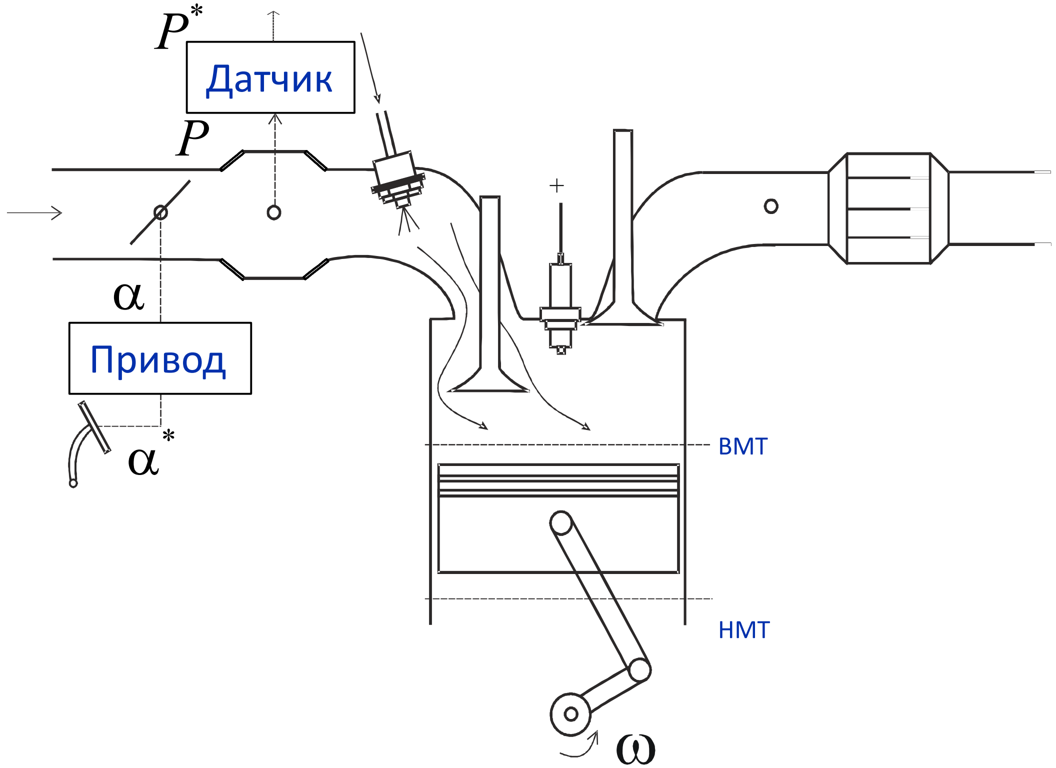
Структурные неопределенности подразумевают наличие в модели неизвестной структуры (“паразитной” динамики).



Динамика давления воздуха в коллекторе:

$$\dot{\boldsymbol{P}} + k_1\eta_c(\omega)\boldsymbol{P} = k_2\eta_t(\boldsymbol{P})\varphi_1(\boldsymbol{P})\varphi_2(\boldsymbol{\alpha})$$

Структурные неопределенности подразумевают наличие в модели неизвестной структуры (“паразитной” динамики).



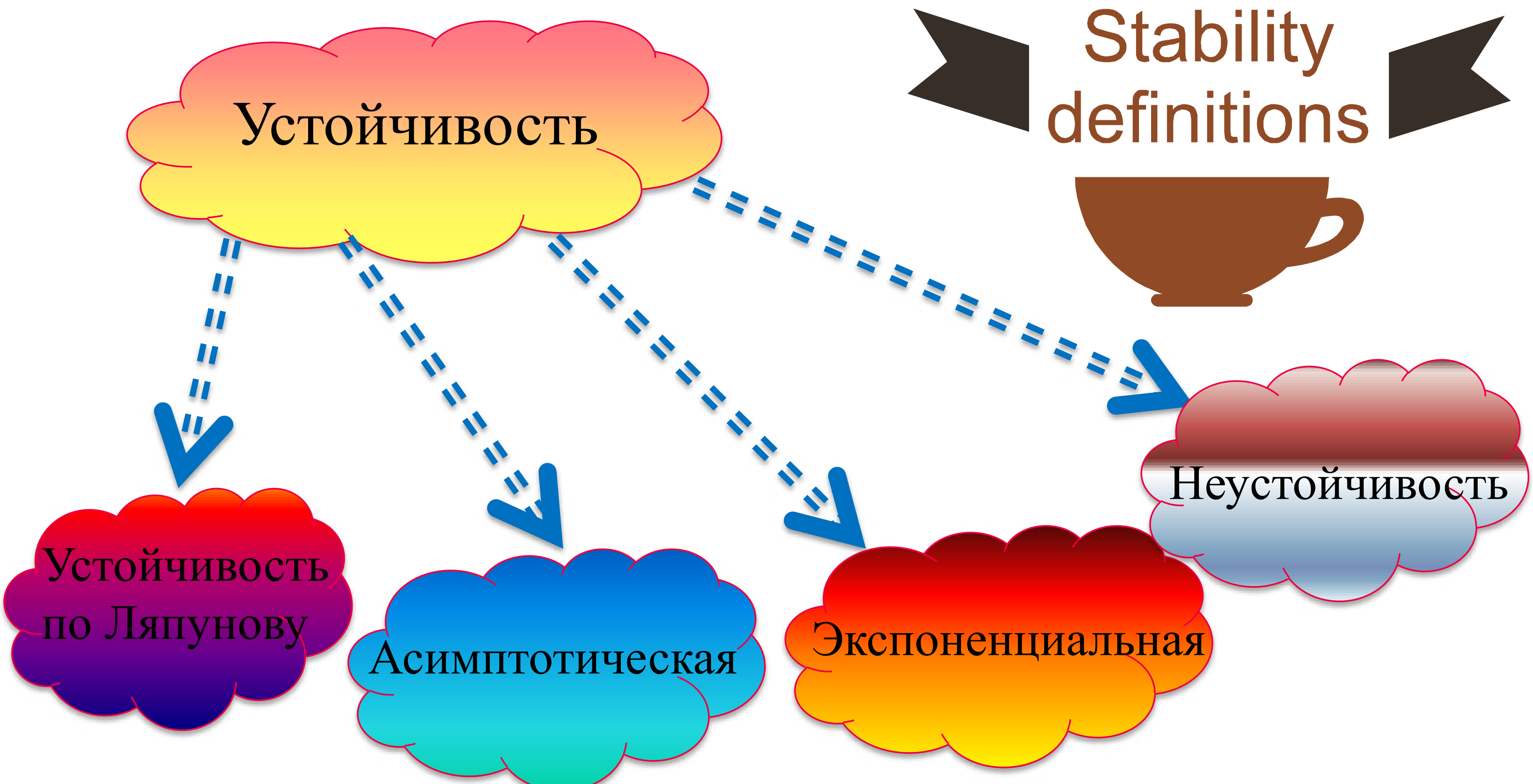
Динамика давления воздуха в коллекторе: $$\dot{\boldsymbol{P}} + k_1\eta_c(\omega)\boldsymbol{P} = k_2\eta_t(\boldsymbol{P})\varphi_1(\boldsymbol{P})\varphi_2(\boldsymbol{\alpha})$$

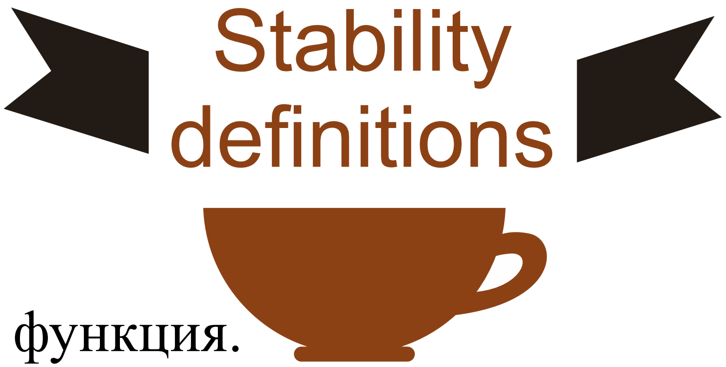
Динамика датчика давления: $$\dot{\boldsymbol{P}}^* = -a\boldsymbol{P}^* + b\boldsymbol{P}$$

Динамика привода заслонки: $$\dot{\alpha} = -c\alpha + d\alpha^*$$

1. Адаптивное управление – это управление, которое согласно определенным алгоритмам настраивает свои собственные параметры в изменяющейся внешней среде с целью обеспечения желаемого качества функционирования. АУ подразумевает компенсацию влияния неопределенностей.
2. Робастное управление – это управление, которое обладает низкой чувствительностью по отношению к неопределенностям. С целью уменьшения чувствительности в РУ, как правило, используется “сильная обратная связь”.

2. Метод функций Ляпунова



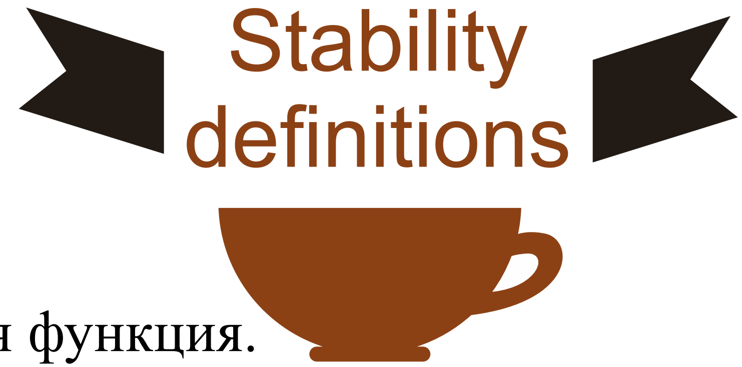


Автономная нелинейная система

$$\dot{x} = f(x), \quad x(0),$$

в положении равновесия x^*, где $x \in \mathbb{R}^n$ –

вектор состояния, $f(x) \in \mathbb{R}^n \cap C^1$ нелинейная функция.



Автономная нелинейная система

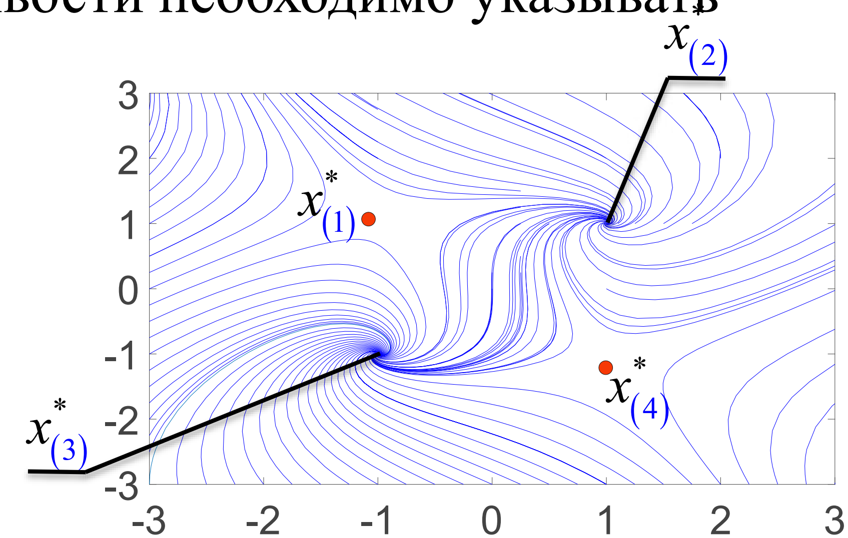
$$\dot{x} = f(x), \quad x(0),$$

в положении равновесия x^*, где $x \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния, $f(x) \in \mathbb{R}^n \cap C^1$ нелинейная функция.

***Замечание 2.1*:** в системе может быть несколько положений равновесия с различными свойствами устойчивости, следовательно при анализе устойчивости необходимо указывать конкретное положение.

***Пример 2.1*:**

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^2 - x_2^2 \\ \dot{x}_2 = x_1^2 + x_2^2 - 2 \end{cases}$$



Устойчивость по Ляпунову

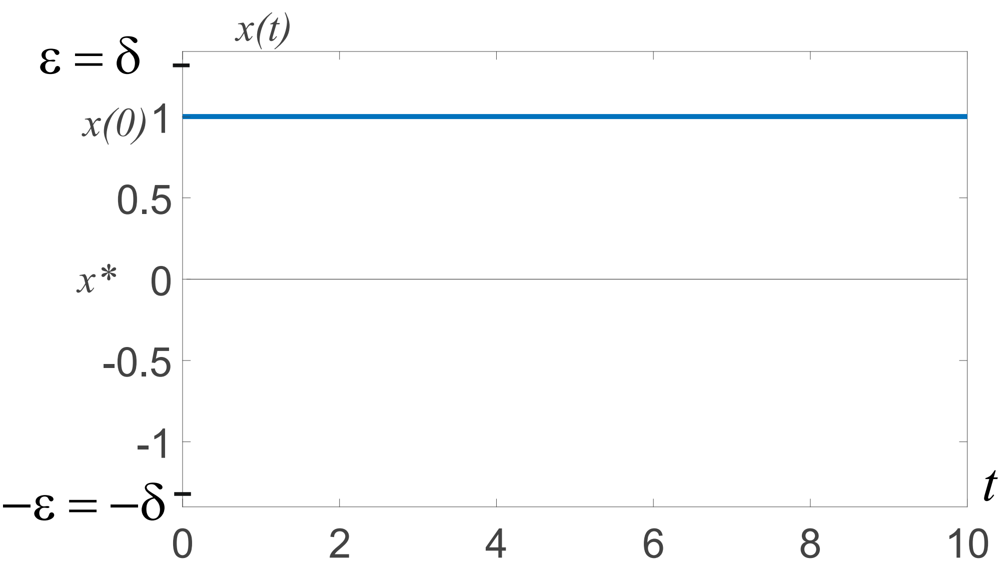
1. Система $\dot{x} = f(x)$ устойчива по Ляпунову в положении x^*, если
$\forall \ \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta(\varepsilon) > 0$: если $\left\| x(0) - x^* \right\| \le \delta$, то $\left\| x(t) - x^* \right\| \le \varepsilon \ \ \forall t > 0$.

Устойчивость по Ляпунову

1. Система $\dot{x} = f(x)$ устойчива по Ляпунову в положении x^*, если $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta(\varepsilon) > 0:$ если $\left\| x(0) - x^* \right\| \le \delta$, то $\left\| x(t) - x^* \right\| \le \varepsilon\ \ \forall t > 0.$

Пример 2.2:

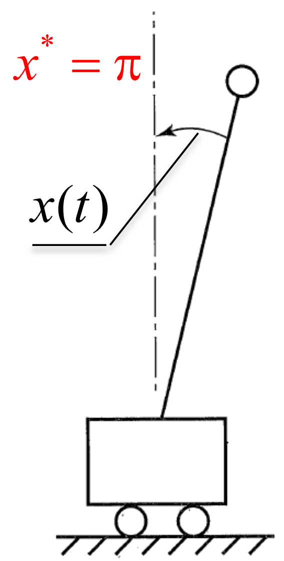
$\dot{x} = 0$

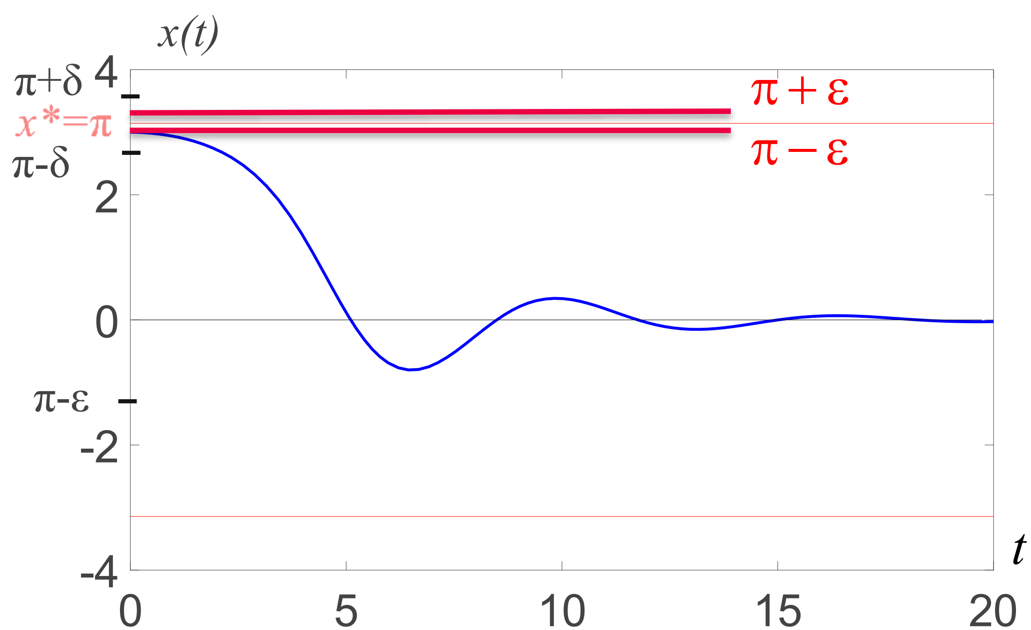


Устойчивость по Ляпунову

1. Система $\dot{x} = f(x)$ устойчива по Ляпунову в положении x^*, если $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta(\varepsilon) > 0:$ если $\|x(0) - x^*\| \le \delta$, то $\|x(t) - x^*\| \le \varepsilon\ \ \forall t > 0.$

В чем разница между неустойчивой системой и системой устойчивой по Ляпунову???





Асимптотическая устойчивость

2. Система $\dot{x} = f(x)$ асимптотически устойчива в x^*, если:

a) она устойчива по Ляпунову в x^*;

b) положение равновесия x^* аттрактивно, т.е.

$$\lim_{t\to\infty}\left\|x(t) - x^*\right\| = 0.$$

Асимптотическая устойчивость

2. Система $\dot{x} = f(x)$ асимптотически устойчива в x^*, если:

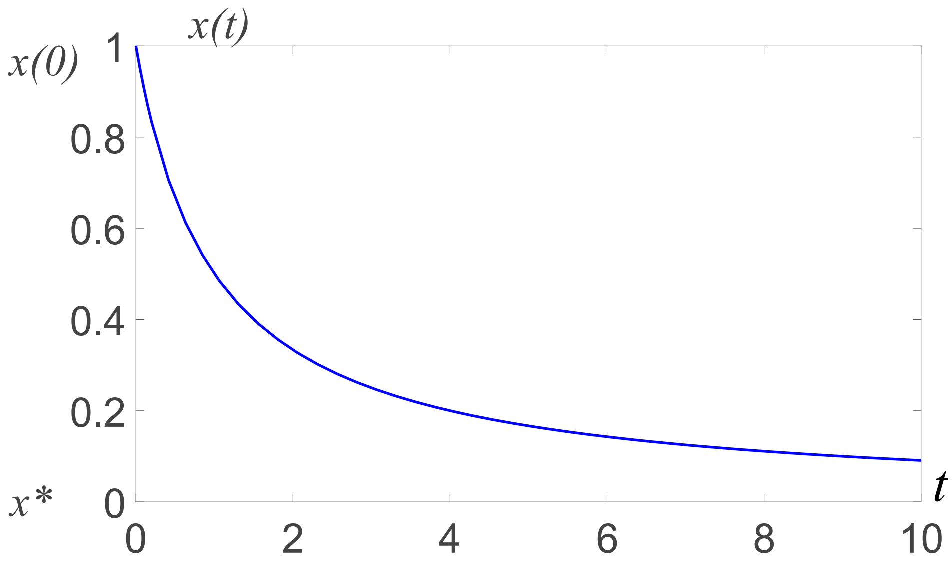
a) она устойчива по Ляпунову в x^*;

b) положение равновесия x^* аттрактивно, т.е.

$$\lim_{t\to\infty} \left\| x(t) - x^* \right\| = 0.$$

Пример 2.3:

$$\dot{x} = -\frac{1}{t+1}x$$



Экспоненциальная устойчивость

3. Система $\dot{x} = f(x)$ асимптотически устойчива в x^*, если:

а) она асимптотически устойчива в x^* ;

б) существуют такие константы $\alpha > 0,\ \beta = \beta(x(0), x^*) > 0$, что

$$\left\| x(t) - x^* \right\| \leq \beta e^{-\alpha t}.$$

Экспоненциальная устойчивость

3. Система $\dot{x} = f(x)$ асимптотически устойчива в x^*, если:

а) она асимптотически устойчива в x^*;

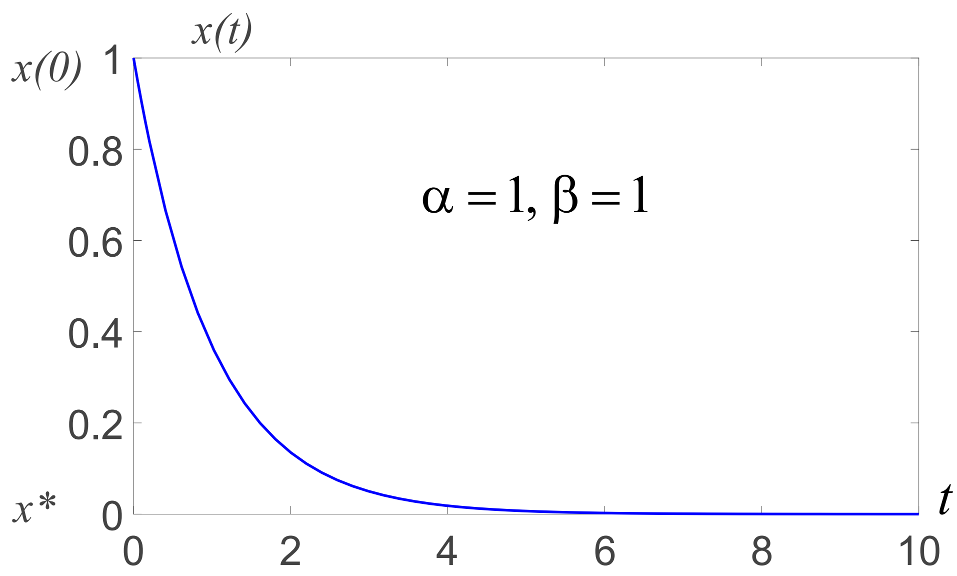
б) существуют такие константы $\alpha > 0,\ \beta = \beta(x(0), x^*) > 0$, что

$$\left\| x(t) - x^* \right\| \le \beta e^{-\alpha t}.$$

Пример 2.4:

$$\dot{x} = -x$$

$$\left(x(t) = e^{-t} x(0) \right)$$



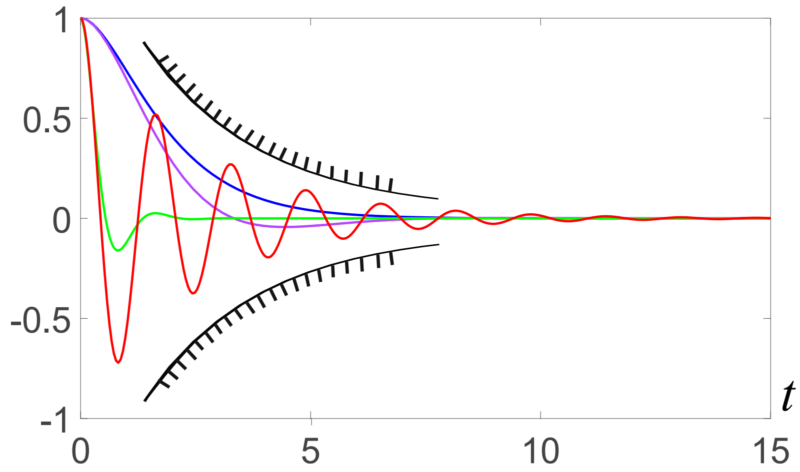
Неустойчивость

4. Система $\dot{x} = f(x)$ неустойчива в x^*, когда она не удовлетворяет условиям устойчивости по Ляпунову в x^*.

Почему экспоненциальная устойчивость более предпочтительна?

Почему экспоненциальная устойчивость более предпочтительна?

1. позволяет регулировать время переходного процесса и перерегулирование;



Почему экспоненциальная устойчивость более предпочтительна?

1. позволяет регулировать время переходного процесса и перерегулирование;
2. свойство экспоненциальной сходимости является робастным по отношению к возмущениям, т.е. сохраняется при наличии небольших (в некотором смысле) вариаций параметров системы или возмущений.

Почему экспоненциальная устойчивость более предпочтительна?

1. позволяет регулировать время переходного процесса и перерегулирование;

2. свойство экспоненциальной сходимости является робастным по отношению к возмущениям, т.е. сохраняется при наличии небольших (в некотором смысле) вариаций параметров системы или возмущений.

***Пример 2.5*: асимптотически и экспоненциально устойчивые системы**

$$\dot{x} = -\frac{1}{t+1}x \qquad \dot{x} = -x$$

Почему экспоненциальная устойчивость более предпочтительна?

1. позволяет регулировать время переходного процесса и перерегулирование;

2. свойство экспоненциальной сходимости является робастным по отношению к возмущениям, т.е. сохраняется при наличии небольших (в некотором смысле) вариаций параметров системы или возмущений.

***Пример 2.5*: асимптотически и экспоненциально устойчивые системы**

$0 < \mu << 1$

параметрическое возмущение

$$\dot{x} = -\frac{1}{t+1}x \qquad \dot{x} = -x$$

$$\dot{x} = -\frac{1}{t+1}x + \mu x \qquad \dot{x} = -x + \mu x$$

Почему экспоненциальная устойчивость более предпочтительна?

1. позволяет регулировать время переходного процесса и перерегулирование;
2. свойство экспоненциальной сходимости является робастным по отношению к возмущениям, т.е. сохраняется при наличии небольших (в некотором смысле) вариаций параметров системы или возмущений.

***Пример 2.5*: асимптотически и экспоненциально устойчивые системы**

$0 < \mu << 1$ параметрическое возмущение

Неустойчива при $t > \frac{1}{\mu} - 1$!!!

$$\dot{x} = \left(-\frac{1}{t+1} + \mu\right)x$$

Устойчива для любых $t \geq 0$

$$\dot{x} = -(1+\mu)x$$

2. Метод функций Ляпунова

Универсальный способ анализа устойчивости нелинейных систем

$$\dot{x} = f(x), \quad x(0) \tag{2.1}$$

в положении равновесия x^*, где $x \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния,

$f \in \mathbb{R}^n$ – нелинейная функция.

Требования к функции Ляпунова $V(x)$

1. $V(x)$ скалярная и монотонная;
2. $V(x) > 0 \quad if \quad \|x\| \neq 0$;

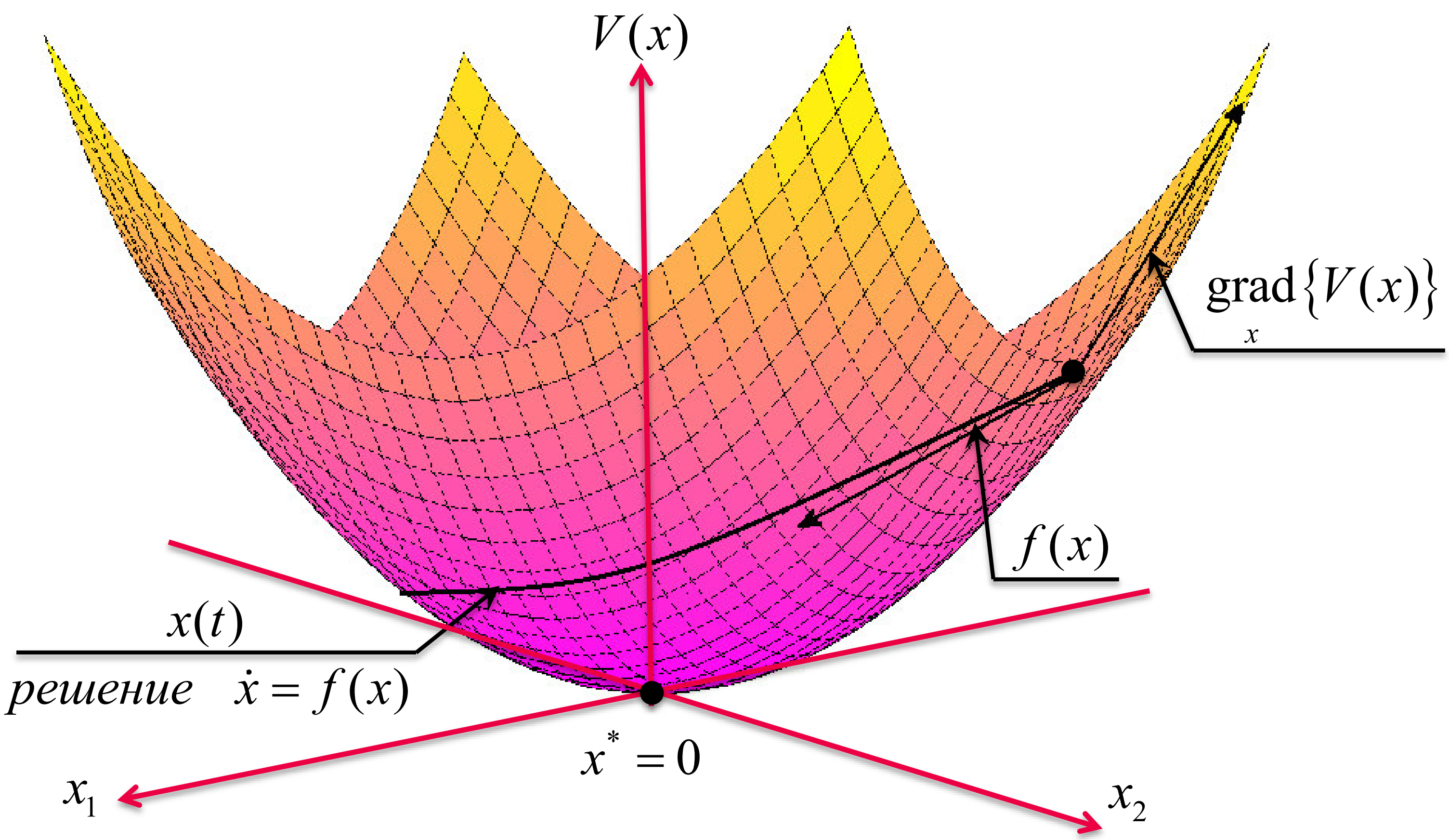
   $V(0) = 0$;
3. $V(x) \in C^1$ (*непрерывная и дифференцируема по* x и t)

Производная по времени в силу (2.1):

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V(x)}{\partial x}\dot{x}$$

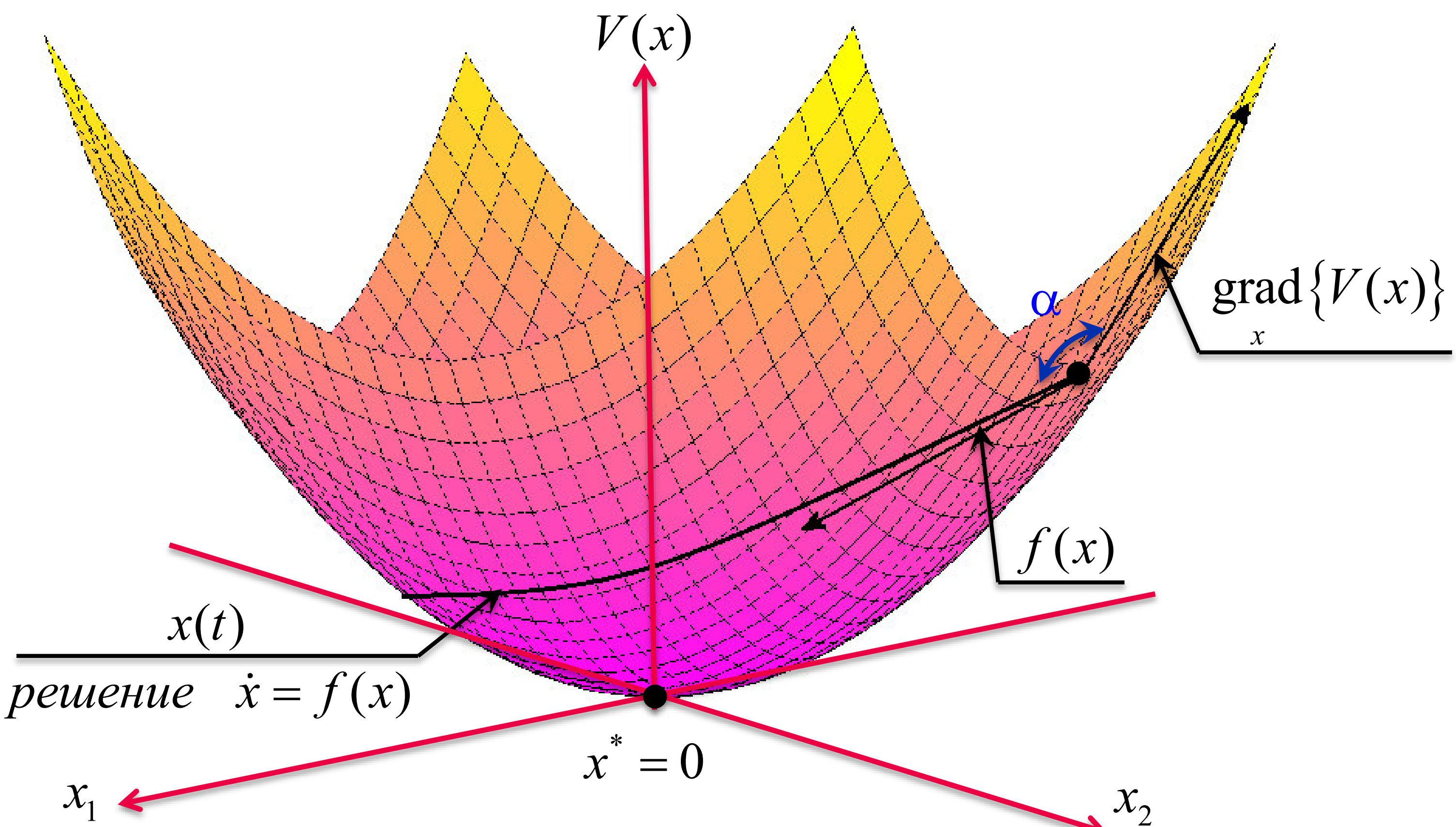
Производная по времени в силу (2.1):

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V(x)}{\partial x}\dot{x} = \frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x) = \operatorname*{grad}_x\{V(x)\} f(x)$$



Производная по времени в силу (2.1):

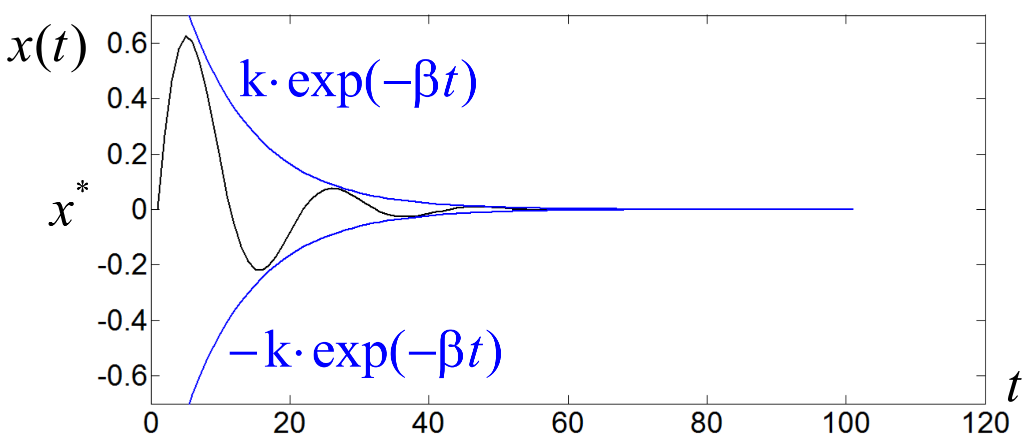
$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V(x)}{\partial x}\dot{x} = \frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x) = \operatorname*{grad}_x \{V(x)\} f(x) = \left\| \operatorname*{grad}_x \{V(x)\} \right\| \|f(x)\| \cos\alpha$$



Критерии устойчивости:

1. Если $\dot{V}(x) \le 0$, тогда п.р. $x^* = 0$ устойчиво по Ляпунову;
2. Если $\dot{V}(x) < 0$, тогда п.р. $x^* = 0$ асимптотически устойчиво;
3. Если $c_1\|x\|^2 \le V(x) \le c_2\|x\|^2$ и $\dot{V}(x) \le -c_3\|x\|^2$, $c_1, c_2, c_3 > 0$, тогда п.р. $x^* = 0$ экспоненциально устойчиво.

$$\dot{V}(x) \le -\frac{c_3}{c_2}V(x) \quad \Rightarrow \quad V(t) \le \mathrm{e}^{-\frac{c_3}{c_2}t}V(0) \quad \Rightarrow \quad \|x(t)\|^2 \le \frac{c_2}{c_1}\mathrm{e}^{-\frac{c_3}{c_2}t}\|x(0)\|^2$$



Пример функции Ляпунова:

1. Линейная система

$$\dot{x} = Ax, \quad x(0) \tag{2.2}$$

где A – постоянная матрица.

Функция Ляпунова

$$V(x) = x^T P x, \tag{2.3}$$

где $P = P^T \succ 0$ – постоянная матрица.

$$\dot{V}(x) = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} = x^T A^T P x + x^T P A x =$$

$$= x^T \left(A^T P + PA \right) x = -x^T Q x < 0$$

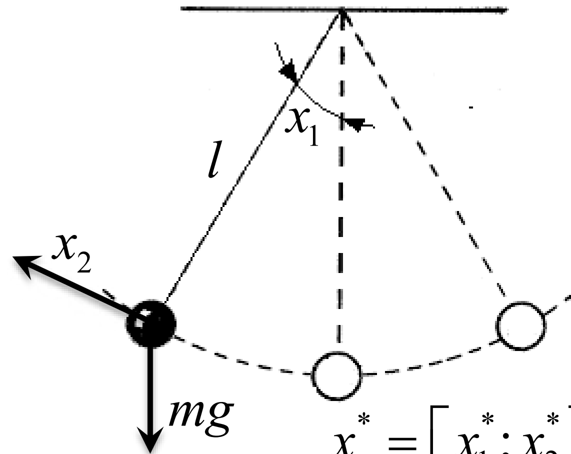
Заключение: если для любой $Q = Q^T \succ 0$ существует $P = P^T \succ 0$ такая, что

$$A^T P + PA = -Q, \tag{2.4}$$

то положение равновесия системы (2.2) $x^* = 0$ асимптотически устойчиво

2. Физический смысл на примере маятника

$$\dot{x}_1 = x_2,$$
$$\dot{x}_2 = -\frac{g}{l}\sin(x_1) - \frac{k}{m}x_2 \qquad (2.5)$$



$x^* = \left[x_1^*; x_2^*\right] = [0;0]$

где g – ускорение свободного падения,

l – длина стержня, k – коэффициент трения.

Функция Ляпунова – **сумма потенциальной и кинетической энергии**

$$V(x) = mgl\left(1-\cos(x_1)\right) + \frac{mx_2^2}{2}l^2. \qquad (2.6)$$

Производная по времени:

$$\dot{V}(x) = mgl\sin(x_1)\dot{x}_1 + mx_2\dot{x}_2 l^2 = mgl\sin(x_1)x_2 + mx_2\left(-\frac{g}{l}\sin(x_1) - \frac{k}{m}x_2\right)l^2.$$

или

$$\dot{V}(x) = -l^2 k x_2^2 < 0 \qquad (2.7)$$

Заключение: маятник устойчив в положении равновесия $x^* = [0;0]$.

3. Простейший пример синтеза адаптивного управления

Мотивация

3. Простейший пример синтеза адаптивного управления

Мотивация

Можно ли с помощью классической теории управления решить проблему неопределенностей?

3. Простейший пример синтеза адаптивного управления

Мотивация

Постановка задачи:

Объект:

$$\dot{x} = \theta x + u, \qquad (3.1)$$

где x – скалярный выход, u – управление, θ – известный коэффициент.

Цель управления заключается в синтезе управления такого, что

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = 0. \qquad (3.2)$$

3. Простейший пример синтеза адаптивного управления

Мотивация

Постановка задачи:

Объект:

$$\dot{x} = \theta x + u, \tag{3.1}$$

где x – скалярный выход, u – управление, θ – известный коэффициент.

Цель управления заключается в синтезе управления такого, что

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0. \tag{3.2}$$

Решение:

$$u = -\theta x - \lambda x, \tag{3.3}$$

где λ – положительный параметр.

$$u = -\theta x - \lambda x, \quad \dot{x} = \theta x + u \quad \Rightarrow \dot{x} = -\lambda x \Rightarrow x(t) = \exp(-\lambda t)\, x(0). \tag{3.4}$$

$$u = -\theta x - \lambda x, \quad \dot{x} = \theta x + u \quad \Rightarrow \dot{x} = -\lambda x \Rightarrow x(t) = \exp(-\lambda t)\, x(0). \tag{3.4}$$

Пусть $\lambda = 1$ и $\theta = 5$,

т.е.

управление: $u = -6x$

замкнутая система: $\dot{x} = 5x - 6x = -x$

$$u = -\theta x - \lambda x, \quad \dot{x} = \theta x + u \quad \Rightarrow \dot{x} = -\lambda x \Rightarrow x(t) = \exp(-\lambda t)\, x(0). \tag{3.4}$$

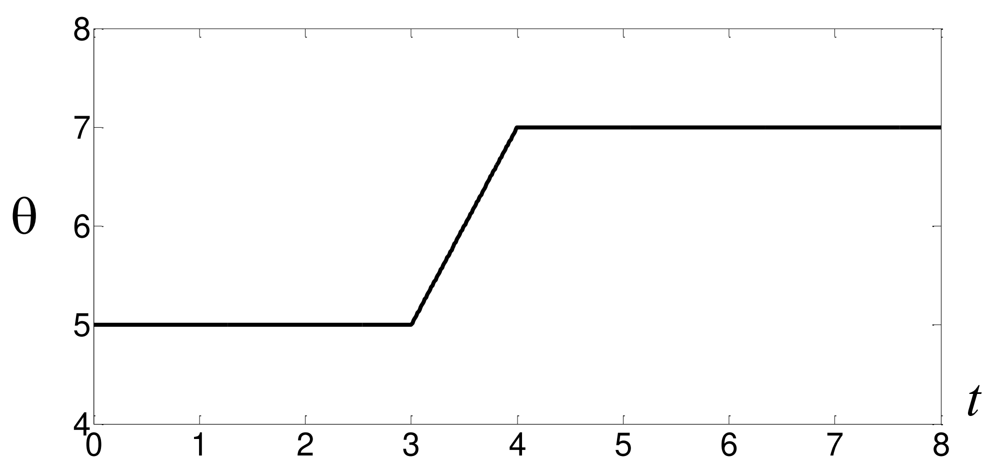
Пусть $\lambda = 1$ и $\theta = 5$,

т.е.

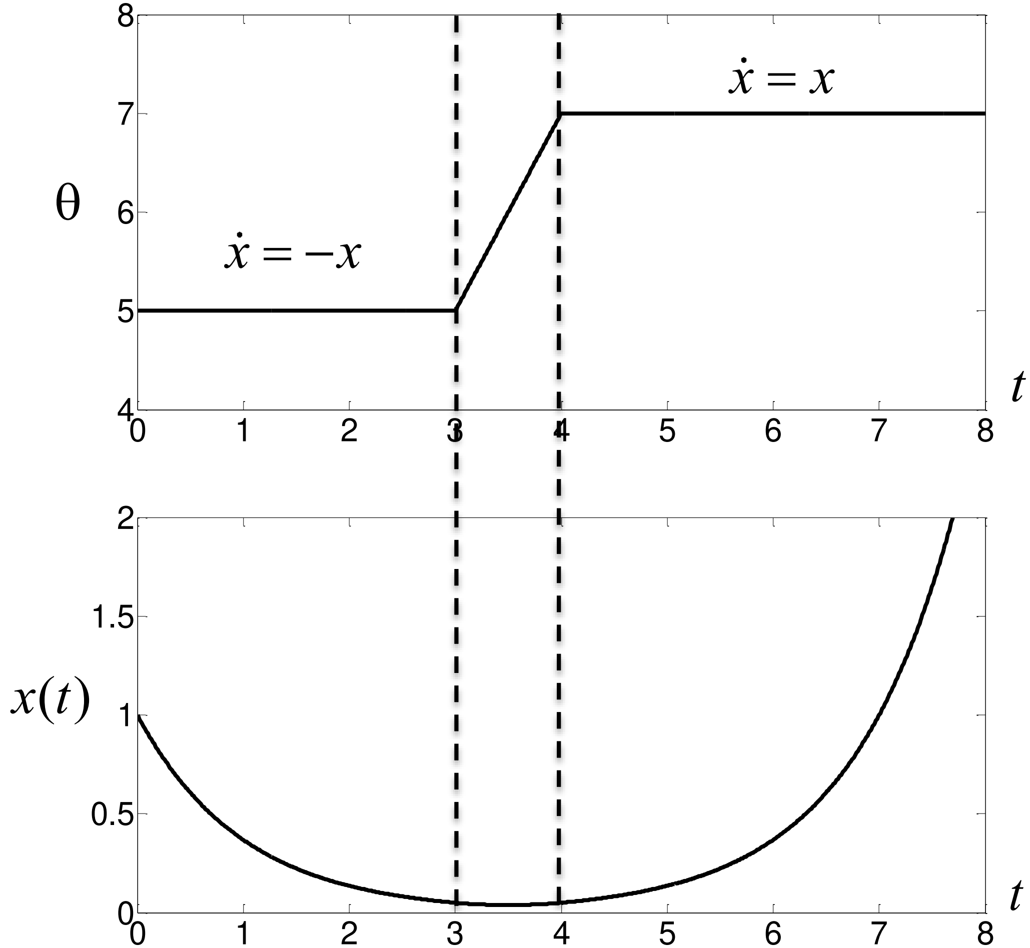
управление: $u = -6x$

замкнутая система: $\dot{x} = 5x - 6x = -x$

Пусть параметр объекта θ претерпевает дрейф к неизвестному значению



$Управление: \ u = -6x$



Классический регулятор не способен обеспечить устойчивость системы в условиях неопределенности

Постановка задачи адаптивного управления:

Объект:

$$\dot{x} = \theta x + u, \tag{3.5}$$

где θ – неизвестный скалярный параметр.

Цель: синтезировать управление, обеспечивающее равенство

$$\lim_{t \to \infty} \left(x_M(t) - x(t) \right) = 0, \tag{3.6}$$

где x_M – выход эталонной модели

$$\dot{x}_M = -\lambda x_M + \lambda g, \tag{3.7}$$

с кусочно-непрерывным ограниченным сигналом задания g

и положительной константой λ .

Решение:

Шаг 1. Пусть θ известен .

Рассчитаем производную от сигнала ошибки $\varepsilon = x_M - x$ ввиду уравнений объекта и эталонной модели:

$$\dot{\varepsilon} = \dot{x}_M - \dot{x} = \left(-\lambda x_M + \lambda g\right) - \left(\theta x + u\right)$$

Решение:

Шаг 1. Пусть θ известен .

Рассчитаем производную от сигнала ошибки $\varepsilon = x_M - x$ ввиду уравнений объекта и эталонной модели:

$$\dot{\varepsilon} = \dot{x}_M - \dot{x} = \left(-\lambda x_M + \lambda g\right) - \left(\theta x + u\right)$$

С помощью какого управления обеспечить экспоненциальное стремление ошибки к нулю?

Решение:

Шаг 1. Пусть θ известен .

Рассчитаем производную от сигнала ошибки $\varepsilon = x_M - x$ ввиду уравнений объекта и эталонной модели:

$$\dot{\varepsilon} = \dot{x}_M - \dot{x} = \left(-\lambda x_M + \lambda g\right) - \left(\theta x + u\right)$$

Пусть $\dot{\varepsilon} \triangleq -\lambda\varepsilon = -\lambda x_M + \lambda x \;\; \Rightarrow \; \varepsilon(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\varepsilon(0)$. Тогда

$$\left(-\lambda x_M + \lambda g\right) - \left(\theta x + u\right) = -\lambda x_M + \lambda x$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{u = -\theta x - \lambda x + \lambda g} \qquad (3.8)$$

Решение:

Шаг 2. Пусть θ неизвестен. Тогда

$$u = -\theta x - \lambda x + \lambda g$$

физически не реализуем. Подставим функцию $\hat{\theta}(t)$ вместо θ и получим настраиваемый регулятор в виде

$$\boxed{u = -\hat{\theta}(t)x - \lambda x + \lambda g} \tag{3.9}$$

Решение:

Шаг 2. Пусть θ неизвестен. Тогда

$$u = -\theta x - \lambda x + \lambda g$$

физически не реализуем. Подставим функцию $\hat{\theta}(t)$ вместо θ и получим настраиваемый регулятор в виде

$$\boxed{u = -\hat{\theta}(t)x - \lambda x + \lambda g} \tag{3.10}$$

Подставим (3.10) в уравнение объекта $\dot{x} = \theta x + u$:

$$\dot{x} = \theta x - \hat{\theta}x - \lambda x + \lambda g, \tag{3.11}$$

Решение:

Шаг 2. Пусть θ неизвестен. Тогда

$$u = -\theta x - \lambda x + \lambda g$$

физически не реализуем. Подставим функцию $\hat{\theta}(t)$ вместо θ и получим настраиваемый регулятор в виде

$$\boxed{u = -\hat{\theta}(t)x - \lambda x + \lambda g} \tag{3.10}$$

Подставим (3.10) в уравнение объекта $\dot{x} = \theta x + u$:

$$\dot{x} = \theta x - \hat{\theta}x - \lambda x + \lambda g, \tag{3.11}$$

Вычислим производную по времени от ошибки:

$$\dot{\varepsilon} = \dot{x}_M - \dot{x} = (-\lambda x_M + \lambda g) - \left(\theta x - \hat{\theta}x - \lambda x + \lambda g\right)$$

Модель ошибки управления

$$\boxed{\dot{\varepsilon} = -\lambda\varepsilon - \tilde{\theta}x,} \tag{3.12}$$

где $\tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta}$ – параметрическая ошибка.

Решение:

Шаг 3. Выберем структуру алгоритма, генерирующего $\hat{\theta}(t)$:

$$\boxed{\dot{\hat{\theta}}(t) = \Omega(t)} \tag{3.13}$$

где $\Omega(t)$ – неизвестная, но физически реализуемая функция.

Решение:

Шаг 3. Выберем структуру алгоритма, генерирующего $\hat{\theta}(t)$:

$$\boxed{\dot{\hat{\theta}}(t) = \Omega(t)} \tag{3.13}$$

где $\Omega(t)$ – неизвестная, но физически реализуемая функция.

Принимая во внимание, что $\tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta}$ и

$$\dot{\tilde{\theta}} = -\dot{\hat{\theta}},$$

имеем

Модель параметрической ошибки

$$\boxed{\dot{\tilde{\theta}}(t) = -\Omega(t)} \tag{3.14}$$

Решение:

Шаг 3. Выберем структуру алгоритма, генерирующего $\hat{\theta}(t)$:

$$\boxed{\dot{\hat{\theta}}(t) = \Omega(t)} \tag{3.13}$$

где $\Omega(t)$ – неизвестная, но физически реализуемая функция.

Принимая во внимание, что $\tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta}$ и

$$\dot{\tilde{\theta}} = -\dot{\hat{\theta}},$$

имеем

Модель параметрической ошибки

$$\boxed{\dot{\tilde{\theta}}(t) = -\Omega(t)} \tag{3.14}$$

Как выбрать функцию $\Omega(t)$???

Решение:

Шаг 4. Модели

Модель ошибки управления $\boxed{\dot{\varepsilon} = -\lambda\varepsilon - \tilde{\theta}x,}$ (3.12)

Модель параметрической ошибки $\boxed{\dot{\tilde{\theta}}(t) = -\Omega(t)}$ (3.14)

Выберем функцию Ляпунова

$$V(\varepsilon,\tilde{\theta}) = \frac{1}{2}\varepsilon^2 + \frac{1}{2\gamma}\tilde{\theta}^2, \qquad \gamma > 0 \qquad (3.15)$$

и рассчитаем ее производную по времени в силу (3.12) и (3.14):

$$\dot{V}(\varepsilon,\tilde{\theta}) = \varepsilon\dot{\varepsilon} + \frac{1}{\gamma}\tilde{\theta}\dot{\tilde{\theta}} = -\lambda\varepsilon^2 - \tilde{\theta}x\varepsilon - \frac{1}{\gamma}\tilde{\theta}\Omega(t)$$

Решение:

Шаг 4. Модели

Модель ошибки управления $\boxed{\dot{\varepsilon} = -\lambda\varepsilon - \tilde{\theta}x,}$ (3.12)

Модель параметрической ошибки $\boxed{\dot{\tilde{\theta}}(t) = -\Omega(t)}$ (3.14)

Выберем функцию Ляпунова

$$V(\varepsilon, \tilde{\theta}) = \frac{1}{2}\varepsilon^2 + \frac{1}{2\gamma}\tilde{\theta}^2, \qquad \gamma > 0 \qquad (3.15)$$

и рассчитаем ее производную по времени в силу (3.12) и (3.14):

$$\dot{V}(\varepsilon, \tilde{\theta}) = \varepsilon\dot{\varepsilon} + \frac{1}{\gamma}\tilde{\theta}\dot{\tilde{\theta}} = -\lambda\varepsilon^2 - \tilde{\theta}x\varepsilon - \frac{1}{\gamma}\tilde{\theta}\Omega(t)$$

Ответ?

Решение:

Шаг 4. Модели

Модель ошибки управления $$\boxed{\dot{\varepsilon} = -\lambda\varepsilon - \tilde{\theta}x,} \qquad (3.12)$$

Модель параметрической ошибки $$\boxed{\dot{\tilde{\theta}}(t) = -\Omega(t)} \qquad (3.14)$$

Выберем функцию Ляпунова

$$V(\varepsilon, \tilde{\theta}) = \frac{1}{2}\varepsilon^2 + \frac{1}{2\gamma}\tilde{\theta}^2, \qquad \gamma > 0 \qquad (3.15)$$

и рассчитаем ее производную по времени в силу (3.12) и (3.14):

$$\dot{V}(\varepsilon, \tilde{\theta}) = \varepsilon\dot{\varepsilon} + \frac{1}{\gamma}\tilde{\theta}\dot{\tilde{\theta}} = -\lambda\varepsilon^2 - \tilde{\theta}x\varepsilon - \frac{1}{\gamma}\tilde{\theta}\Omega(t)$$

Если $\Omega(t) = -\gamma x\varepsilon$, то $\dot{V}(\varepsilon, \tilde{\theta}) = -\lambda\varepsilon^2 < 0$

$$\boxed{\dot{\hat{\theta}} = -\gamma x\varepsilon} \qquad (3.16)$$

Выводы

Настраиваемый регулятор:

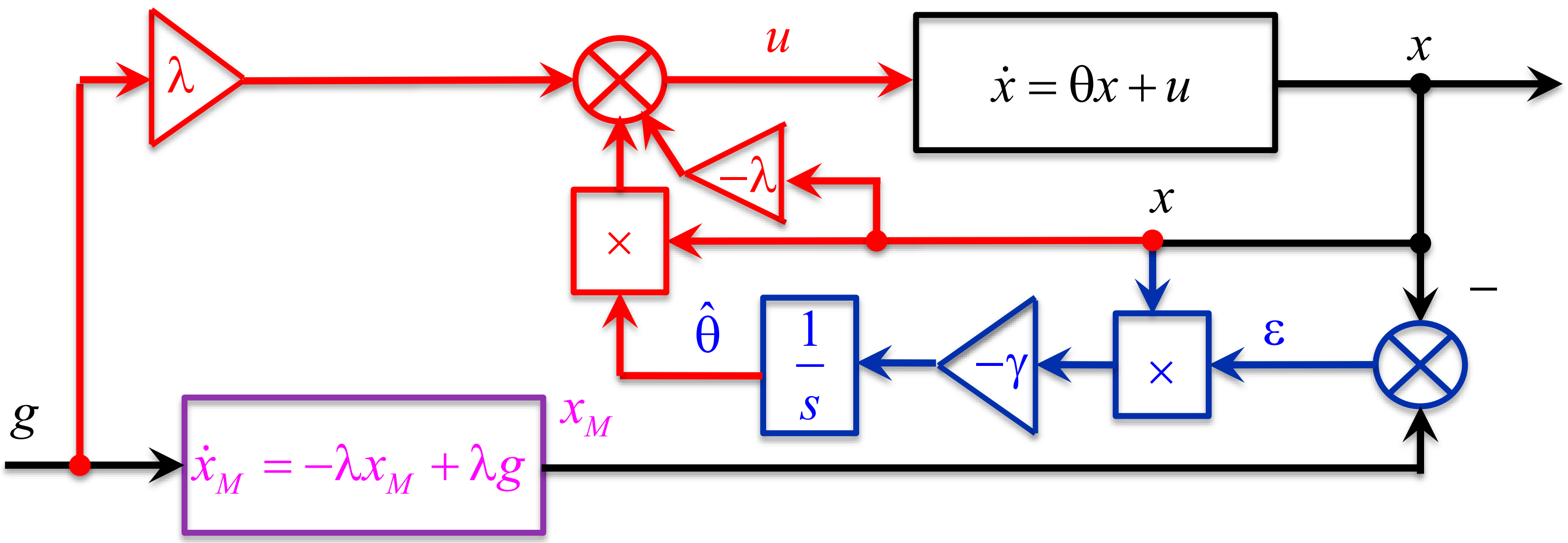
$$u = -\hat{\theta}x - \lambda x + \lambda g \tag{3.10}$$

Алгоритм адаптации:

$$\dot{\hat{\theta}} = -\gamma x \varepsilon \tag{3.16}$$

с $\varepsilon = x_M - x$ и эталонной моделью

$$\dot{x}_M = -\lambda x_M + \lambda g. \tag{3.7}$$



Выводы

Свойства замкнутой системы:

1. Все сигналы в системе ограничены;
2. Ошибка управления $\varepsilon = x_M - x$ стремится к нулю асимптотически;
3. Параметрическая ошибка $\tilde{\theta}(t) = \theta - \hat{\theta}(t)$ невозрастающая. Ошибка стремится к нулю, если $g(t)$ частотно богатая (*обсудить*);
$$V(\varepsilon, \tilde{\theta}) = \frac{1}{2}\varepsilon^2 + \frac{1}{2\gamma}\tilde{\theta}^2, \quad \dot{V}(\varepsilon, \tilde{\theta}) = -\lambda\varepsilon^2 < 0$$
4. Если $\tilde{\theta}(t) \to 0$ при $t \to \infty$, то существует оптимальное значение γ при котором скорость сходимости максимальная;

Выводы

Свойства замкнутой системы:

1. Все сигналы в системе ограничены;
2. Ошибка управления $\varepsilon = x_M - x$ стремится к нулю асимптотически;
3. Параметрическая ошибка $\tilde{\theta}(t) = \theta - \hat{\theta}(t)$ невозрастающая. Ошибка стремится к нулю, если $g(t)$ частотно богатая $(\textit{обсудить})$;

$$V(\varepsilon,\tilde{\theta}) = \frac{1}{2}\varepsilon^2 + \frac{1}{2\gamma}\tilde{\theta}^2, \quad \dot{V}(\varepsilon,\tilde{\theta}) = -\lambda\varepsilon^2 < 0$$

4. Если $\tilde{\theta}(t) \to 0$ при $t \to \infty$, то существует оптимальное значение γ при котором скорость сходимости максимальная;

5. При наличии неопределенностей (например возмущения) может возникнуть неограниченный параметрический дрейф:

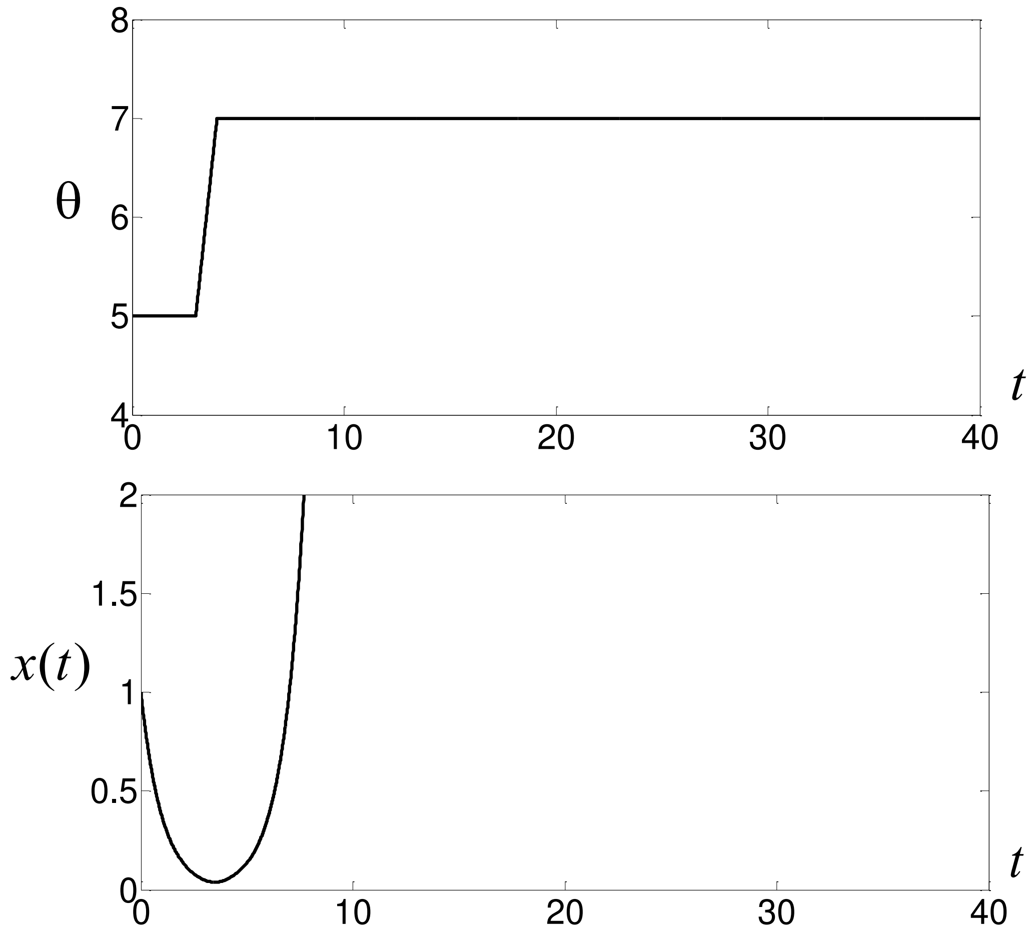
$$\dot{x} = \theta x + u + \delta, \qquad \hat{\theta}(t) \to \infty \quad \textit{при} \quad t \to \infty$$

где δ – ограниченное возмущение.

Пример: классический закон стабилизации неустойчивого объекта

$$\dot{x} = \theta x + u$$

$$u = -6x$$

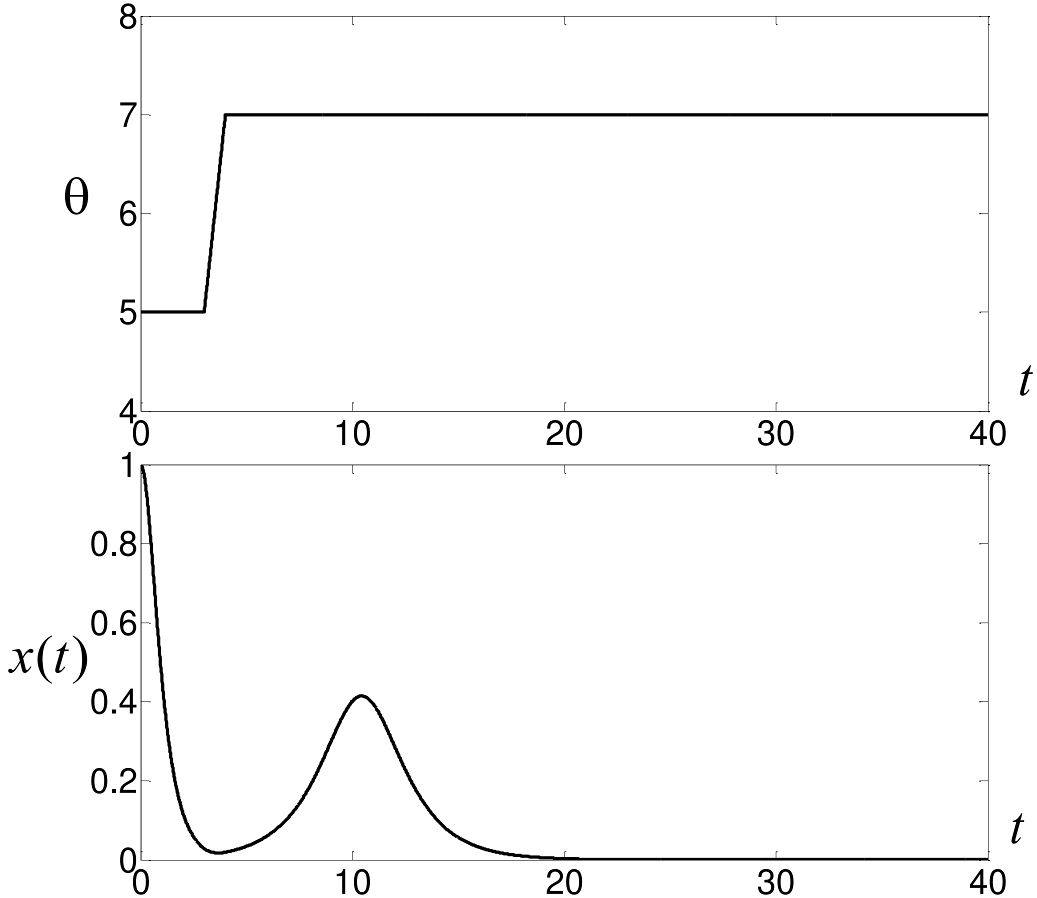


Пример: закон адаптивной стабилизации неустойчивого объекта

$$\dot{x} = \theta x + u$$

$$u = -6x - \hat{\theta}x,$$

$$\dot{\hat{\theta}} = -2x\varepsilon, \qquad \varepsilon = x_M - x, \quad \dot{x}_M = -6x_M$$

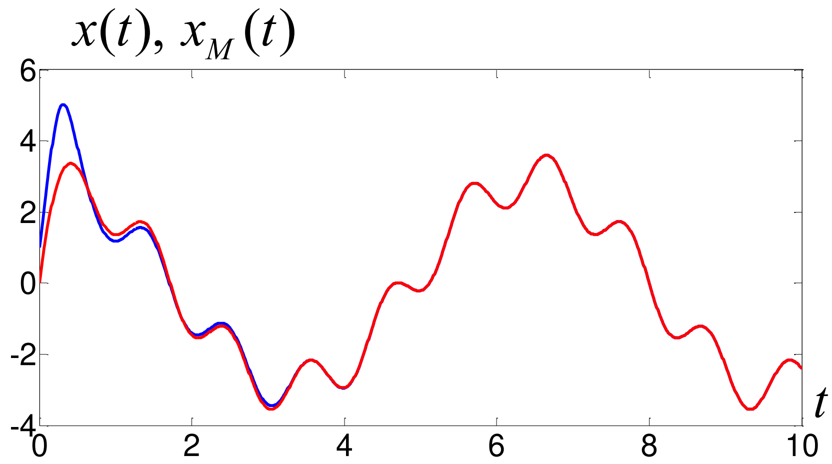


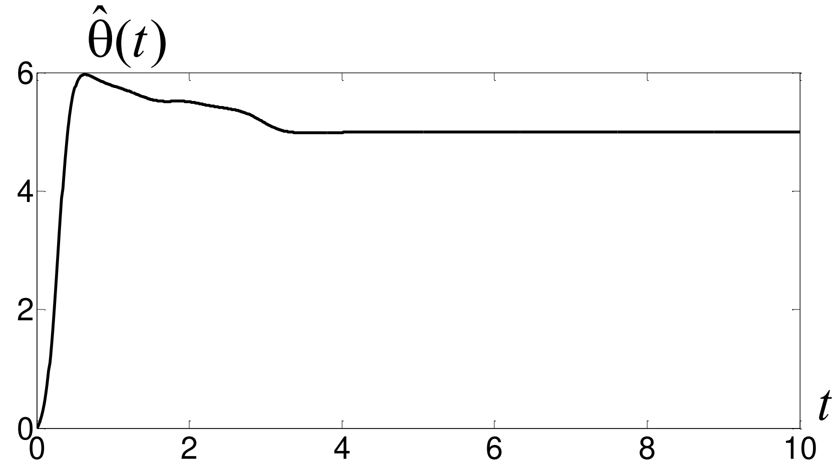
Пример: закон адаптивного слежения неустойчивого объекта

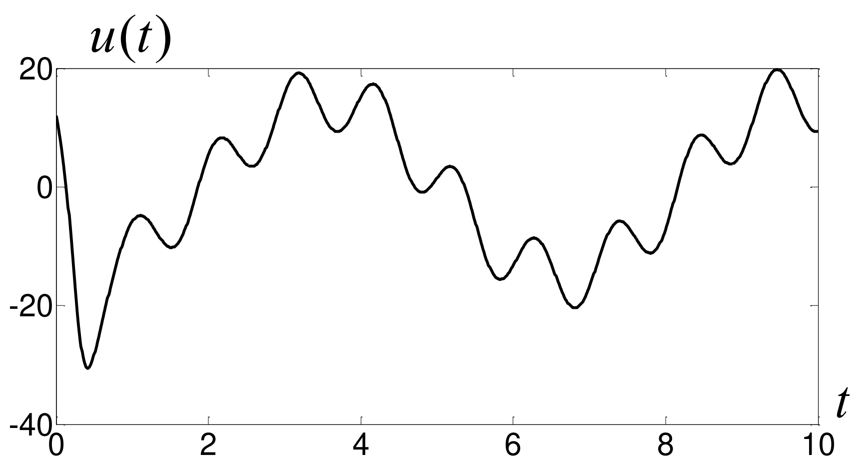
$$\dot{x} = \theta x + u$$

$$u = -6x - \hat{\theta}x + 6g,$$

$$\dot{\hat{\theta}} = -2x\varepsilon, \quad \varepsilon = x_M - x, \quad \dot{x}_M = -6x_M + 6g, \quad g(t) = \sin 6t + 3\cos t$$







Промежуточные выводы:

Адаптивное и робастное управления обеспечивают желаемое качество работы системы в условиях неопределенностей:

1. адаптивное управление обеспечивает настройку параметров в условиях изменяющейся среды. АУ подразумевает компенсацию влияния неопределенностей.
2. робастное управление является нечувствительным по отношению к неопределенностям. РУ, как правило, не подразумевает компенсацию, а основано на сильных обратных связях.

Промежуточные выводы:

Адаптивное и робастное управления обеспечивают желаемое качество работы системы в условиях неопределенностей:

1. адаптивное управление обеспечивает настройку параметров в условиях изменяющейся среды. АУ подразумевает компенсацию влияния неопределенностей.
2. робастное управление является нечувствительным по отношению к неопределенностям. РУ, как правило, не подразумевает компенсацию, а основано на сильных обратных связях.

4. Простейшие примеры синтеза робастного управления

Постановка задачи робастного управления:

Объект:

$$\dot{x} = \theta x + u + \delta, \qquad |\delta| \le \bar{\delta} \tag{4.1}$$

где θ – неизвестный параметр, $\delta(t)$ – неизвестное возмущение.

Цель: синтезировать управление, обеспечивающее неравенство

$$|x_M(t) - x(t)| \le \Delta \ \ \textit{для любых} \ t \ge T, \tag{4.2}$$

где x_M – выход эталонной модели

$$\dot{x}_M = -\lambda x_M + \lambda g \tag{4.3}$$

с кусочно-непрерывным ограниченным сигналом задания g и положительным коэффициентом λ .

Как предотвратить дрейф настраиваемых параметров $\hat{\theta}$ в условиях возмущения за счет модификации АА

$$\dot{\hat{\theta}} = -\gamma x \varepsilon ?$$

Решение №1

Настраиваемый регулятор

$$u = -\hat{\theta}x - \lambda x + \lambda g \tag{4.4}$$

~~Алгоритм адаптации:~~ $\longrightarrow$ **Нелинейная статическая ОС:**

$$\hat{\theta} = -\gamma x \varepsilon \tag{4.5}$$

с $\varepsilon = x_M - x$ и эталонной моделью

$$\dot{x}_M = -\lambda x_M + \lambda g.$$

Решение №1

Настраиваемый регулятор

$$u = -\hat{\theta}x - \lambda x + \lambda g \tag{4.4}$$

~~Алгоритм адаптации:~~ $\longrightarrow$ **Нелинейная статическая ОС:**

$$\hat{\theta} = -\gamma x \varepsilon \tag{4.5}$$

с $\varepsilon = x_M - x$ и эталонной моделью

$$\dot{x}_M = -\lambda x_M + \lambda g.$$

Подстановка (4.5) в (4.4) дает регулятор с “сильной ОС”

$$u = \gamma x^2 \varepsilon - \lambda x + \lambda g.$$

Решение №1

Настраиваемый регулятор

$$u = -\hat{\theta}x - \lambda x + \lambda g \tag{4.4}$$

~~**Алгоритм адаптации:**~~ $\longrightarrow$ **Нелинейная статическая ОС:**

$$\hat{\theta} = -\gamma x \varepsilon \tag{4.5}$$

с $\varepsilon = x_M - x$ и эталонной моделью

$$\dot{x}_M = -\lambda x_M + \lambda g.$$

Подстановка (4.5) в (4.4) дает регулятор с “сильной ОС”

$$u = \gamma x^2 \varepsilon - \lambda x + \lambda g.$$

Подстановка закона управления в модель объекта $\dot{x} = \theta x + u + \delta$ дает

$$\dot{x} = \theta x + \gamma x^2 \varepsilon - \lambda x + \lambda g + \delta.$$

Решение №1

Рассчитаем производную ошибки $\varepsilon = x_M - x$:

$$\dot{\varepsilon} = \dot{x}_M - \dot{x} = \left(-\lambda x_M + \lambda g\right) - \left(\theta x + \gamma x^2 \varepsilon - \lambda x + \lambda g + \delta\right)$$

Решение №1

Рассчитаем производную ошибки $\varepsilon = x_M - x$:

$$\dot{\varepsilon} = \dot{x}_M - \dot{x} = \left(-\lambda x_M + \lambda g\right) - \left(\theta x + \gamma x^2 \varepsilon - \lambda x + \lambda g + \delta\right)$$

$$\boxed{\dot{\varepsilon} = -\lambda\varepsilon - \theta x - \gamma x^2 \varepsilon - \delta} \tag{4.6}$$

Решение №1

Рассчитаем производную ошибки $\varepsilon = x_M - x$:

$$\dot{\varepsilon} = \dot{x}_M - \dot{x} = \left(-\lambda x_M + \lambda g\right) - \left(\theta x + \gamma x^2 \varepsilon - \lambda x + \lambda g + \delta\right)$$

$$\boxed{\dot{\varepsilon} = -\lambda\varepsilon - \theta x - \gamma x^2 \varepsilon - \delta} \tag{4.6}$$

Функция Ляпунова???

Решение №1

Рассчитаем производную ошибки $\varepsilon = x_M - x$:

$$\dot{\varepsilon} = \dot{x}_M - \dot{x} = \left(-\lambda x_M + \lambda g\right) - \left(\theta x + \gamma x^2 \varepsilon - \lambda x + \lambda g + \delta\right)$$

$$\boxed{\dot{\varepsilon} = -\lambda\varepsilon - \theta x - \gamma x^2 \varepsilon - \delta} \qquad (4.6)$$

Выберем функцию Ляпунова

$$V(\varepsilon, \tilde{\theta}) = \frac{1}{2}\varepsilon^2$$

И рассчитаем ее производную в силу (4.6):

$$\dot{V}(\varepsilon, \tilde{\theta}) = \varepsilon\dot{\varepsilon} = -\lambda\varepsilon^2 - \theta x\varepsilon - \gamma x^2 \varepsilon^2 - \delta\varepsilon$$

Решение №1

Рассчитаем производную ошибки $\varepsilon = x_M - x$:

$$\dot{\varepsilon} = \dot{x}_M - \dot{x} = \left(-\lambda x_M + \lambda g\right) - \left(\theta x + \gamma x^2 \varepsilon - \lambda x + \lambda g + \delta\right)$$

$$\boxed{\dot{\varepsilon} = -\lambda\varepsilon - \theta x - \gamma x^2 \varepsilon - \delta} \qquad (4.6)$$

Выберем функцию Ляпунова

$$V(\varepsilon, \tilde{\theta}) = \frac{1}{2}\varepsilon^2$$

И рассчитаем ее производную в силу (4.6):

$$\dot{V}(\varepsilon, \tilde{\theta}) = \varepsilon\dot{\varepsilon} = -\lambda\varepsilon^2 - \theta x\varepsilon - \gamma x^2\varepsilon^2 - \delta\varepsilon = -\frac{\lambda}{2}\varepsilon^2 - \frac{\lambda}{2}\varepsilon^2 - \theta x\varepsilon - \gamma x^2\varepsilon^2 - \delta\varepsilon =$$

Решение №1

Рассчитаем производную ошибки $\varepsilon = x_M - x$:

$$\dot\varepsilon = \dot x_M - \dot x = \left(-\lambda x_M + \lambda g\right) - \left(\theta x + \gamma x^2 \varepsilon - \lambda x + \lambda g + \delta\right)$$

$$\boxed{\dot\varepsilon = -\lambda\varepsilon - \theta x - \gamma x^2 \varepsilon - \delta} \qquad (4.6)$$

Выберем функцию Ляпунова

$$V(\varepsilon, \tilde\theta) = \frac{1}{2}\varepsilon^2$$

И рассчитаем ее производную в силу (4.6):

$$\dot V(\varepsilon) = \varepsilon\dot\varepsilon = -\lambda\varepsilon^2 - \theta x\varepsilon - \gamma x^2\varepsilon^2 - \delta\varepsilon = -\frac{\lambda}{2}\varepsilon^2 - \frac{\lambda}{2}\varepsilon^2 - \theta x\varepsilon - \gamma x^2\varepsilon^2 - \delta\varepsilon =$$

$$= -\frac{\lambda}{2}\varepsilon^2 - \frac{\lambda}{2}\varepsilon^2 - \delta\varepsilon \pm \frac{1}{2\lambda}\delta^2 - \gamma x^2\varepsilon^2 - \theta x\varepsilon \pm \frac{\theta^2}{4\gamma}$$

Решение №1

$$\dot{V}(\varepsilon) = -\frac{\lambda}{2}\varepsilon^2 - \left(\sqrt{\frac{\lambda}{2}}\varepsilon + \sqrt{\frac{1}{2\lambda}}\delta\right)^2 + \frac{1}{2\lambda}\delta^2 - \left(\sqrt{\gamma}x\varepsilon + \frac{\theta}{2\sqrt{\gamma}}\right)^2 + \frac{\theta^2}{4\gamma}$$

Решение №1

$$\dot{V}(\varepsilon) = -\frac{\lambda}{2}\varepsilon^2 - \left(\sqrt{\frac{\lambda}{2}}\varepsilon + \sqrt{\frac{1}{2\lambda}}\delta\right)^2 + \frac{1}{2\lambda}\delta^2 - \left(\sqrt{\gamma}x\varepsilon + \frac{\theta}{2\sqrt{\gamma}}\right)^2 + \frac{\theta^2}{4\gamma}$$

$$\dot{V}(\varepsilon) \le -\frac{\lambda}{2}\varepsilon^2 + \frac{1}{2\lambda}\delta^2 + \frac{\theta^2}{4\gamma}$$

Решение №1

$$\dot{V}(\varepsilon) = -\frac{\lambda}{2}\varepsilon^2 - \left(\sqrt{\frac{\lambda}{2}}\varepsilon + \sqrt{\frac{1}{2\lambda}}\delta\right)^2 + \frac{1}{2\lambda}\delta^2 - \left(\sqrt{\gamma}x\varepsilon + \frac{\theta}{2\sqrt{\gamma}}\right)^2 + \frac{\theta^2}{4\gamma}$$

$$\dot{V}(\varepsilon) \le -\frac{\lambda}{2}\varepsilon^2 + \frac{1}{2\lambda}\delta^2 + \frac{\theta^2}{4\gamma}$$

$$\dot{V}(\varepsilon) \le -\frac{\lambda}{2}\varepsilon^2 + \frac{1}{2\lambda}\bar{\delta}^2 + \frac{\theta^2}{4\gamma}$$

$$|\delta(t)| \le \bar{\delta}$$

Решение №1

$$\dot{V}(\varepsilon) = -\frac{\lambda}{2}\varepsilon^2 - \left(\sqrt{\frac{\lambda}{2}}\varepsilon + \sqrt{\frac{1}{2\lambda}}\delta\right)^2 + \frac{1}{2\lambda}\delta^2 - \left(\sqrt{\gamma}x\varepsilon + \frac{\theta}{2\sqrt{\gamma}}\right)^2 + \frac{\theta^2}{4\gamma}$$

$$\dot{V}(\varepsilon) \le -\frac{\lambda}{2}\varepsilon^2 + \frac{1}{2\lambda}\delta^2 + \frac{\theta^2}{4\gamma}$$

$$\dot{V}(\varepsilon) \le -\frac{\lambda}{2}\varepsilon^2 + \frac{1}{2\lambda}\bar{\delta}^2 + \frac{\theta^2}{4\gamma}$$

$$|\delta(t)| \le \bar{\delta}$$

$$\dot{V}(\varepsilon) \le -\frac{\lambda}{2}\varepsilon^2 + \bar{\Delta}$$

$$\bar{\Delta} = \frac{1}{2\lambda}\bar{\delta}^2 + \frac{\theta^2}{4\gamma}$$

Решение №1

$$\dot{V}(\varepsilon) = -\frac{\lambda}{2}\varepsilon^2 - \left(\sqrt{\frac{\lambda}{2}}\varepsilon + \sqrt{\frac{1}{2\lambda}}\delta\right)^2 + \frac{1}{2\lambda}\delta^2 - \left(\sqrt{\gamma}x\varepsilon + \frac{\theta}{2\sqrt{\gamma}}\right)^2 + \frac{\theta^2}{4\gamma}$$

$$\dot{V}(\varepsilon) \le -\frac{\lambda}{2}\varepsilon^2 + \frac{1}{2\lambda}\delta^2 + \frac{\theta^2}{4\gamma}$$

$$\dot{V}(\varepsilon) \le -\frac{\lambda}{2}\varepsilon^2 + \frac{1}{2\lambda}\bar{\delta}^2 + \frac{\theta^2}{4\gamma}$$

$$|\delta(t)| \le \bar{\delta}$$

$$\bar{\Delta} = \frac{1}{2\lambda}\bar{\delta}^2 + \frac{\theta^2}{4\gamma}$$

$$\bar{\Delta} = \frac{1}{2\lambda}\bar{\delta}^2 + \frac{\theta^2}{4\gamma}$$

$$\boxed{\dot{V}(\varepsilon) \le -\lambda V(\varepsilon) + \bar{\Delta}}$$

$$V(\varepsilon) = \frac{1}{2}\varepsilon^2 \quad (4.7)$$

Решение №1

$$\dot{V}(\varepsilon) \le -\lambda V(\varepsilon) + \bar{\Delta} \qquad \Rightarrow \qquad V(t) \le \mathrm{e}^{-\lambda t} V(0)\left(1 - \frac{\bar{\Delta}}{\lambda}\right) + \frac{\bar{\Delta}}{\lambda} V(0)$$

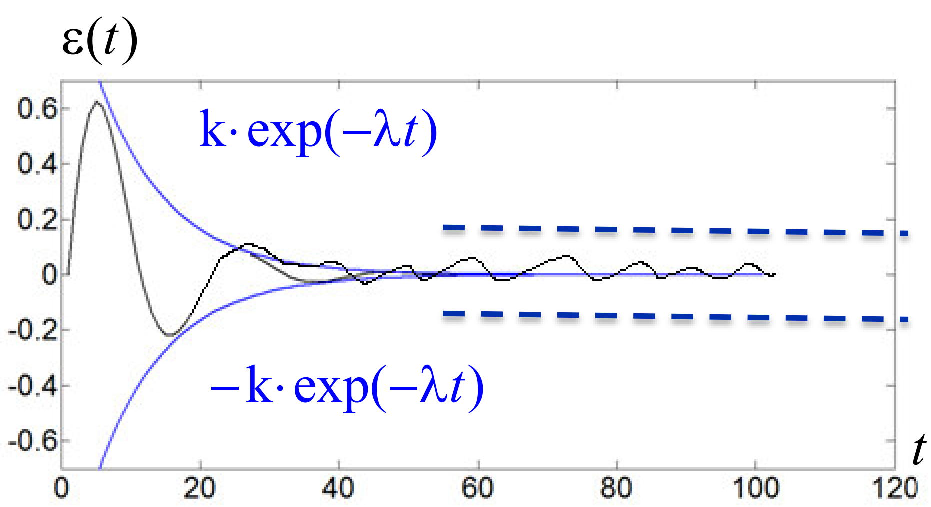
Экспоненциальная сходимость $\varepsilon(t)$ в окрестность нуля доказана.

Решение №1

$$\dot{V}(\varepsilon) \leq -\lambda V(\varepsilon) + \bar{\Delta} \qquad \Rightarrow \qquad V(t) \leq \mathrm{e}^{-\lambda t} V(0)\left(1 - \frac{\bar{\Delta}}{\lambda}\right) + \frac{\bar{\Delta}}{\lambda} V(0)$$

Экспоненциальная сходимость $\varepsilon(t)$

в окрестность нуля доказана.



Решение №1

Выводы

Настраиваемый регулятор:

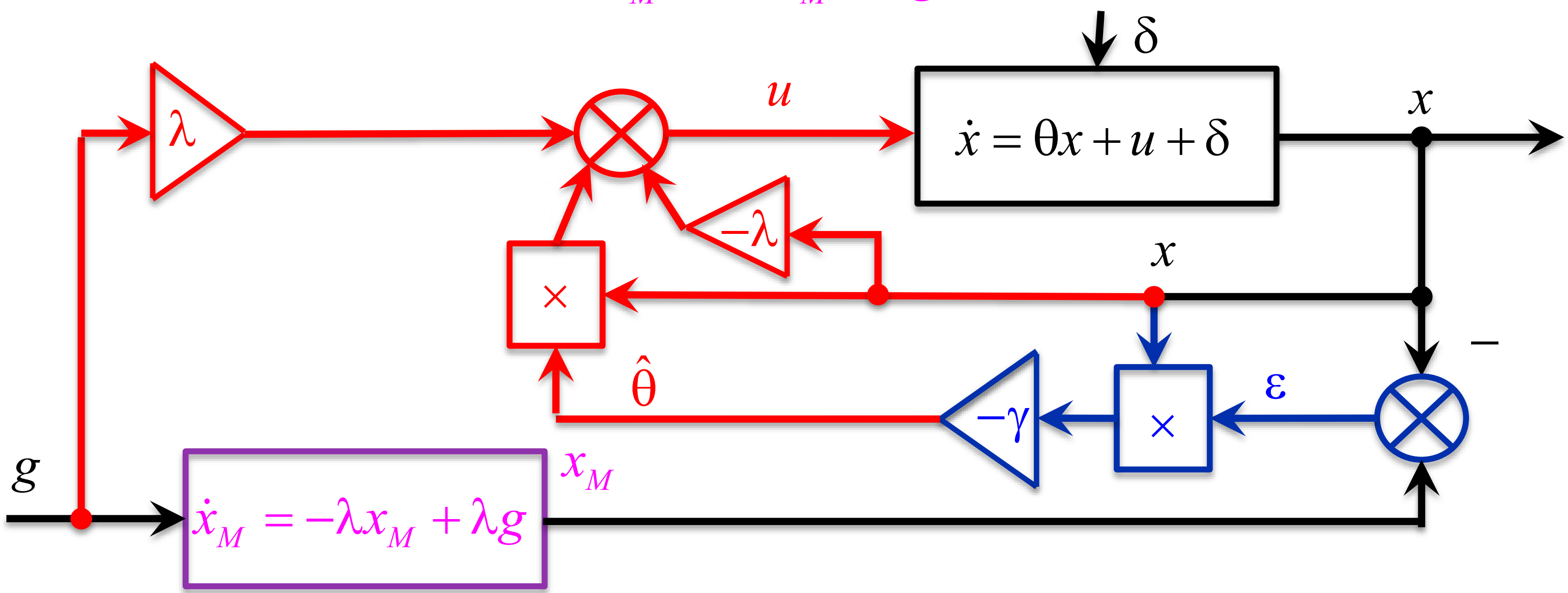
$$u = -\hat{\theta}x - \lambda x + \lambda g \tag{4.4}$$

Нелинейная статическая обратная связь:

$$\dot{\hat{\theta}} = -\gamma x \varepsilon \tag{4.5}$$

с ошибкой $\varepsilon = x_M - x$ и эталонной моделью

$$\dot{x}_M = -\lambda x_M + \lambda g. \tag{4.3}$$



Решение №1

Выводы

Свойства замкнутой робастной системы:

1. Все сигналы в системе ограничены;
2. Ошибка управления $\varepsilon = x_M - x$ стремится в окрестность нуля экспоненциально;
3. Радиус окрестности может быть произвольно уменьшен

Как?

$$\dot{V}(\varepsilon) \le -\lambda V(\varepsilon) + \bar{\Delta}, \text{ где } \quad \bar{\Delta} = \frac{1}{2\lambda}\bar{\delta}^2 + \frac{\theta^2}{4\gamma}$$

Решение №1

Выводы

Свойства замкнутой робастной системы:

1. Все сигналы в системе ограничены;
2. Ошибка управления $\varepsilon = x_M - x$ стремится в окрестность нуля экспоненциально;
3. Радиус окрестности может быть произвольно уменьшен

λ  *или* γ 

$\dot{V}(\varepsilon) \le -\lambda V(\varepsilon) + \bar{\Delta}$, где $\bar{\Delta} = \dfrac{1}{2\lambda}\bar{\delta}^2 + \dfrac{\theta^2}{4\gamma}$

Решение №1

Выводы

Свойства замкнутой робастной системы:

1. Все сигналы в системе ограничены;
2. Ошибка управления $\varepsilon = x_M - x$ стремится в окрестность нуля экспоненциально;
3. Радиус окрестности может быть произвольно уменьшен

λ  *или* γ 

$\dot{V}(\varepsilon) \le -\lambda V(\varepsilon) + \bar{\Delta}$, где $\bar{\Delta} = \frac{1}{2\lambda}\bar{\delta}^2 + \frac{\theta^2}{4\gamma}$

4. Нет компенсации влияния неопределенности!

Даже, если объект не возмущен ($\delta(t) \equiv \bar{\delta} = 0$), ошибка не $\varepsilon = x_M - x$ стремится к нулю!

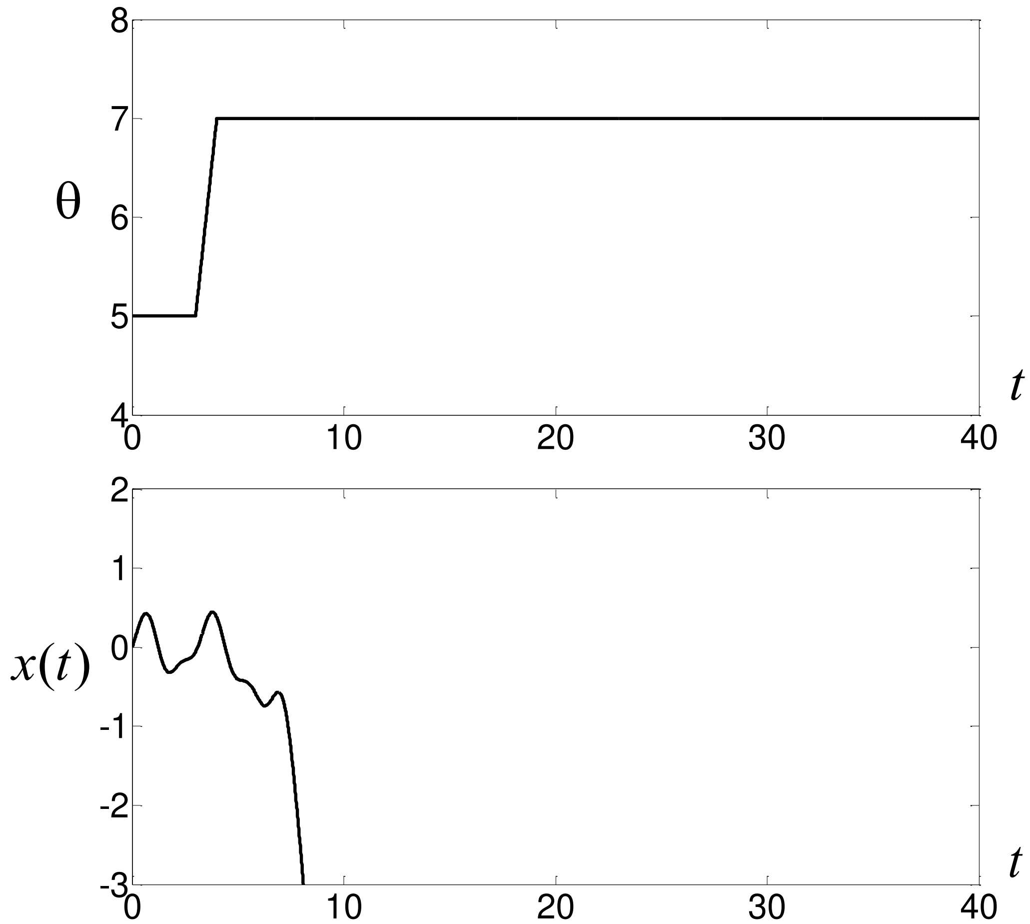
Пример: классическое стабилизирующее управление

$$\boxed{\dot{x} = \theta x + u + \delta}$$

$$u = -6x$$

$$\boxed{\theta = 5}$$

$$\boxed{\delta(t) = 0{,}5\sin(4t) + 0{,}75\cos(2t)}$$



Пример: робастная стабилизация для объекта $\boxed{\dot{x} = \theta x + u + \delta}$

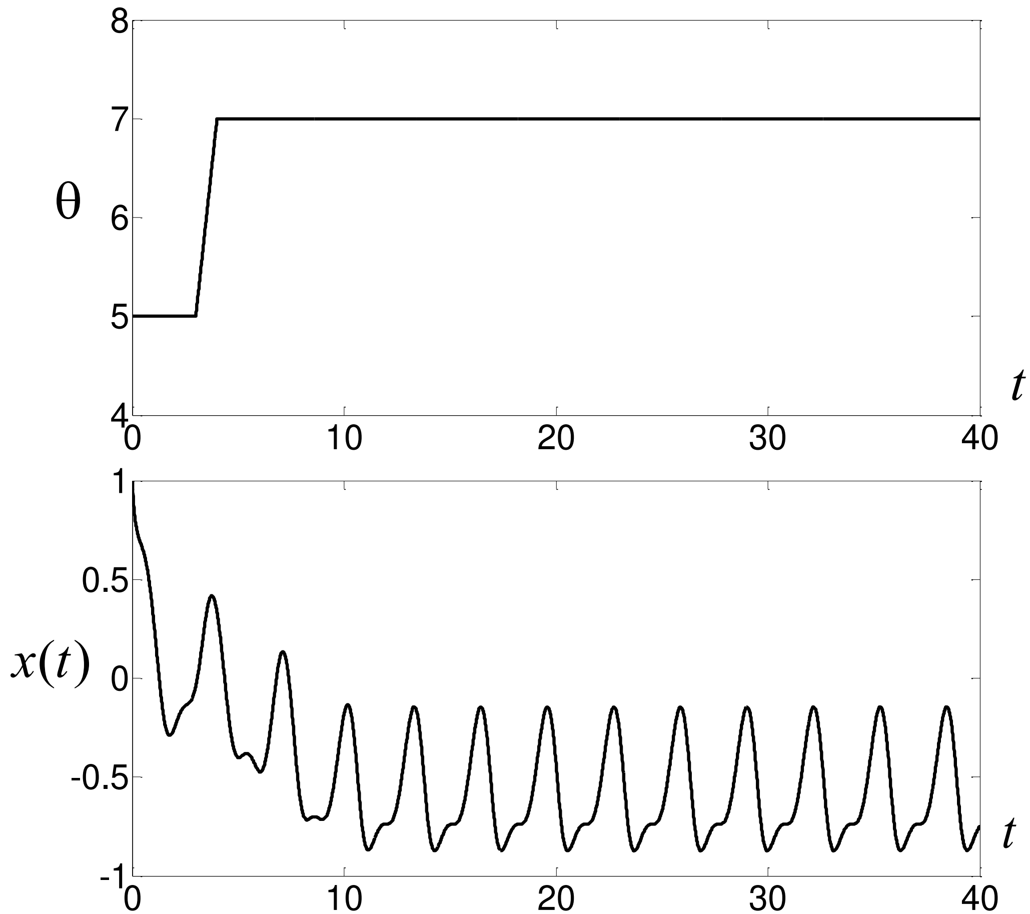
$$u = -6x - \hat{\theta}x,$$

$$\hat{\dot{\theta}} = -\gamma x \varepsilon, \qquad \varepsilon = x_M - x,$$

$$\dot{x}_M = -6x_M$$

$\boxed{\theta = 5}$

$\boxed{\delta(t) = 0{,}5\sin(4t) + 0{,}75\cos(2t)}$



$\gamma = 2$

Пример: робастная стабилизация для объекта

$$\boxed{\dot{x} = \theta x + u + \delta}$$

$$u = -6x - \hat{\theta}x,$$

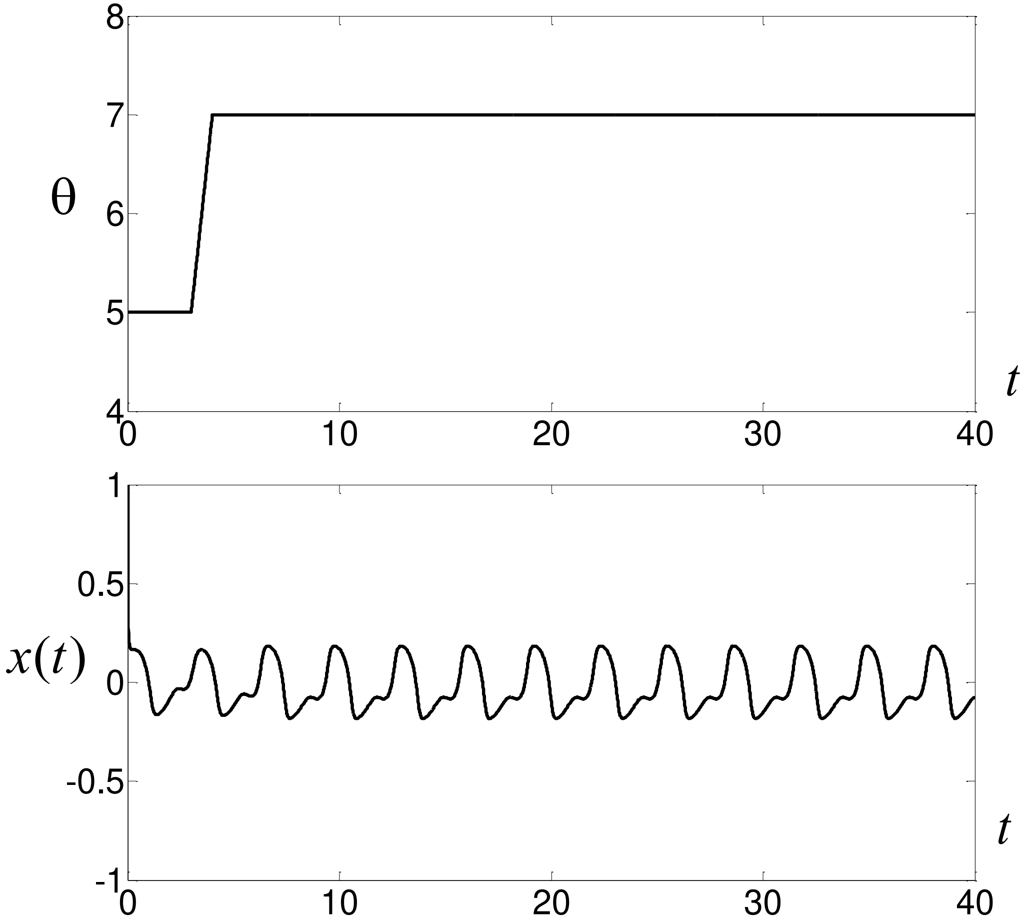
$$\boxed{\theta = 5}$$

$$\dot{\hat{\theta}} = -\gamma x \varepsilon, \qquad \varepsilon = x_M - x,$$

$$\boxed{\delta(t) = 0,5\sin(4t) + 0,75\cos(2t)}$$

$$\dot{x}_M = -6x_M$$

$\gamma = 200$



Пример: робастное слежение для объекта

$$\boxed{\dot{x} = \theta x + u + \delta}$$

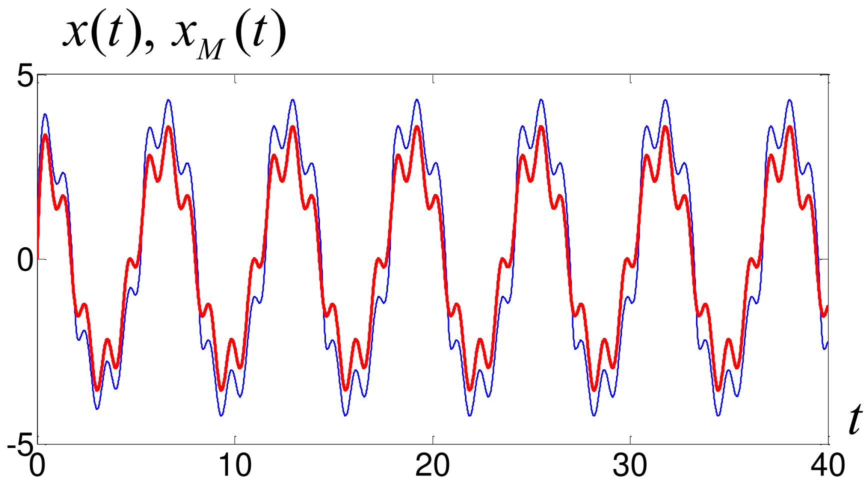
$$u = -6x - \hat{\theta}x + 6g,$$

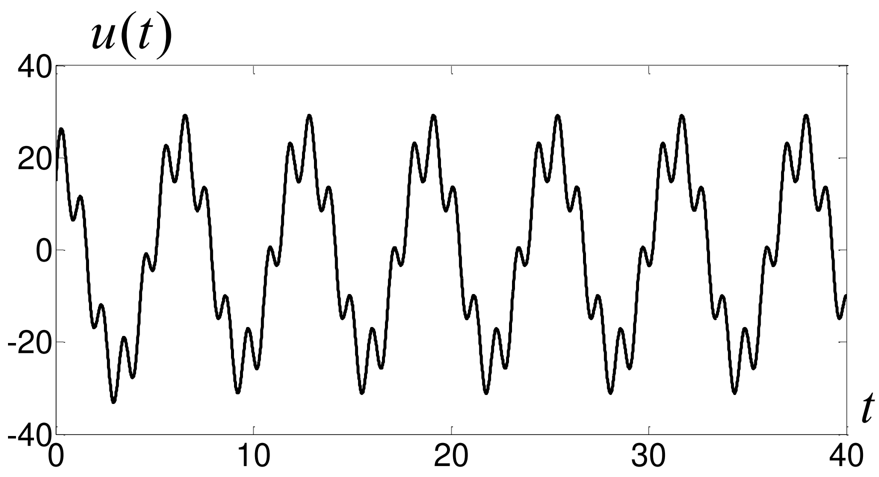
$$\boxed{\theta = 5}$$

$$\dot{\hat{\theta}} = -2x\varepsilon, \qquad \varepsilon = x_M - x,$$

$$\boxed{\delta(t) = 0{,}5\sin(4t) + 0{,}75\cos(2t)}$$

$$\dot{x}_M = -6x_M + 6g, \qquad g(t) = \sin 6t + 3\cos t$$





Адаптивное управление обеспечивает компенсацию влияния неопределенности, но не обладает свойством робастности

$$\hat{\theta}(t) \to \infty, \; t \to \infty$$

Робастное управление гарантирует строгую экспоненциальную устойчивость, но не позволяет компенсировать влияние неопределенности, отсюда $\varepsilon(t) \not\to 0,\ t \to \infty$

Адаптивное управление обеспечивает компенсацию влияния неопределенности, но не обладает свойством робастности

$$\hat{\theta}(t) \to \infty,\ t \to \infty$$

золотая середина?

Робастное управление гарантирует строгую экспоненциальную устойчивость, но не позволяет компенсировать влияние неопределенности, отсюда $\varepsilon(t) \not\to 0,\ t \to \infty$

Решение №2

Настраиваемый регулятор:

$$u = -\hat{\theta}x - \lambda x + \lambda g \tag{4.8}$$

~~Алгоритм адаптации:~~ $\longrightarrow$ **Робастная модификация АА:**

$$\dot{\hat{\theta}} = -\gamma x \varepsilon - \sigma\hat{\theta} \tag{4.9}$$

где σ – коэффициент обратной связи алгоритма,

$\varepsilon = x_M - x$, x_M – выход эталонной модели

$$\dot{x}_M = -\lambda x_M + \lambda g.$$

Решение №2

Настраиваемый регулятор:

$$u = -\hat{\theta}x - \lambda x + \lambda g \qquad (4.8)$$

~~**Алгоритм адаптации:**~~ $\longrightarrow$ **Робастная модификация АА:**

$$\dot{\hat{\theta}} = -\gamma x \varepsilon - \sigma\hat{\theta} \qquad (4.9)$$

где σ – коэффициент обратной связи алгоритма,

$\varepsilon = x_M - x$, x_M – выход эталонной модели

$$\dot{x}_M = -\lambda x_M + \lambda g.$$

Подставим (4.8) в модель объекта с возмущением $\dot{x} = \theta x + u + \delta$:

$$\dot{x} = \theta x - \hat{\theta}x - \lambda x + \lambda g + \delta.$$

$$\dot{x} = \tilde{\theta}x - \lambda x + \lambda g + \delta. \qquad (\tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta})$$

Решение №2

Вычислим производную по времени от ошибки $\varepsilon = x_M - x$:

$$\dot{\varepsilon} = \dot{x}_M - \dot{x} = \left(-\lambda x_M + \lambda g\right) - \left(\tilde{\theta} x - \lambda x + \lambda g + \delta\right)$$

Решение №2

Вычислим производную по времени от ошибки $\varepsilon = x_M - x$:

$$\dot{\varepsilon} = \dot{x}_M - \dot{x} = \left(-\lambda x_M + \lambda g\right) - \left(\tilde{\theta} x - \lambda x + \lambda g + \delta\right)$$

Модель ошибки управления

$$\boxed{\dot{\varepsilon} = -\lambda\varepsilon - \tilde{\theta} x - \delta} \qquad (4.10)$$

Решение №2

Вычислим производную по времени от ошибки $\varepsilon = x_M - x$:

$$\dot{\varepsilon} = \dot{x}_M - \dot{x} = \left(-\lambda x_M + \lambda g\right) - \left(\tilde{\theta} x - \lambda x + \lambda g + \delta\right)$$

Модель ошибки управления

$$\boxed{\dot{\varepsilon} = -\lambda\varepsilon - \tilde{\theta} x - \delta} \quad (4.10)$$

$$\dot{\hat{\theta}} = -\gamma x \varepsilon - \sigma\hat{\theta} \longrightarrow \dot{\tilde{\theta}} = -\dot{\hat{\theta}}$$

Модель параметрической ошибки

$$\boxed{\dot{\tilde{\theta}} = \gamma x \varepsilon + \sigma\hat{\theta}} \quad (4.11)$$

Решение №2

Вычислим производную по времени от ошибки $\varepsilon = x_M - x$:

$$\dot{\varepsilon} = \dot{x}_M - \dot{x} = \left(-\lambda x_M + \lambda g\right) - \left(\tilde{\theta}x - \lambda x + \lambda g + \delta\right)$$

Модель ошибки управления

$$\boxed{\dot{\varepsilon} = -\lambda\varepsilon - \tilde{\theta}x - \delta} \qquad (4.10)$$

$$\dot{\hat{\theta}} = -\gamma x\varepsilon - \sigma\hat{\theta} \longrightarrow \dot{\tilde{\theta}} = -\dot{\hat{\theta}}$$

Модель параметрической ошибки

$$\boxed{\dot{\tilde{\theta}} = \gamma x\varepsilon + \sigma\hat{\theta}} \qquad (4.11)$$

Функция Ляпунова???

Решение №2

Вычислим производную по времени от ошибки $\varepsilon = x_M - x$:

$$\dot{\varepsilon} = \dot{x}_M - \dot{x} = \left(-\lambda x_M + \lambda g\right) - \left(\tilde{\theta}x - \lambda x + \lambda g + \delta\right)$$

Модель ошибки управления

$$\boxed{\dot{\varepsilon} = -\lambda\varepsilon - \tilde{\theta}x - \delta} \qquad (4.10)$$

$$\dot{\hat{\theta}} = -\gamma x\varepsilon - \sigma\hat{\theta} \longrightarrow \dot{\tilde{\theta}} = -\dot{\hat{\theta}}$$

Модель параметрической ошибки

$$\boxed{\dot{\tilde{\theta}} = \gamma x\varepsilon + \sigma\hat{\theta}} \qquad (4.11)$$

Выберем функцию Ляпунова

$$V(\varepsilon, \tilde{\theta}) = \frac{1}{2}\varepsilon^2 + \frac{1}{2\gamma}\tilde{\theta}^2, \qquad \gamma > 0 \qquad (4.12)$$

Решение №2

Вычислим производную от функции Ляпунова в силу (4.10) и (4.11):

Модель ошибки управления

$$\boxed{\dot{\varepsilon} = -\lambda\varepsilon - \tilde{\theta}x - \delta}$$

Модель параметрической ошибки

$$\boxed{\dot{\tilde{\theta}} = \gamma x\varepsilon + \sigma\hat{\theta}}$$

$$\dot{V}(\varepsilon,\tilde{\theta}) = \varepsilon\dot{\varepsilon} + \frac{1}{\gamma}\tilde{\theta}\dot{\tilde{\theta}} = -\lambda\varepsilon^2 - \tilde{\theta}x\varepsilon - \frac{1}{\gamma}\tilde{\theta}\Omega(t)$$

Решение №2

Вычислим производную от функции Ляпунова в силу (4.10) и (4.11):

Модель ошибки управления

$$\boxed{\dot{\varepsilon} = -\lambda\varepsilon - \tilde{\theta}x - \delta}$$

Модель параметрической ошибки

$$\boxed{\dot{\tilde{\theta}} = \gamma x\varepsilon + \sigma\hat{\theta}}$$

$$\dot{V}(\varepsilon,\tilde{\theta}) = \varepsilon\dot{\varepsilon} + \frac{1}{\gamma}\tilde{\theta}\dot{\tilde{\theta}} = -\lambda\varepsilon^2 - \tilde{\theta}x\varepsilon - \frac{1}{\gamma}\tilde{\theta}\Omega(t)$$

$$\dot{V}(\varepsilon,\tilde{\theta}) = \varepsilon\dot{\varepsilon} + \frac{1}{\gamma}\tilde{\theta}\dot{\tilde{\theta}} = \left(-\lambda\varepsilon^2 - \tilde{\theta}x\varepsilon - \delta\varepsilon\right) + \frac{1}{\gamma}\tilde{\theta}\left(\gamma x\varepsilon + \sigma\hat{\theta}\right)$$

$$\dot{V}(\varepsilon,\tilde{\theta}) = -\lambda\varepsilon^2 - \delta\varepsilon + \frac{\sigma}{\gamma}\tilde{\theta}\hat{\theta}$$

$$\dot{V}(\varepsilon,\tilde{\theta}) = -\lambda\varepsilon^2 - \delta\varepsilon - \frac{\sigma}{\gamma}\tilde{\theta}^2 + \frac{\sigma}{\gamma}\tilde{\theta}\theta$$

$$\tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta}$$

Решение №2

$$\dot{V}(\varepsilon,\tilde{\theta}) = -\frac{\lambda}{2}\varepsilon^2 - \frac{\lambda}{2}\varepsilon^2 - \delta\varepsilon - \frac{\sigma}{2\gamma}\tilde{\theta}^2 - \frac{\sigma}{2\gamma}\tilde{\theta}^2 + \frac{\sigma}{\gamma}\tilde{\theta}\theta$$

Решение №2

$$\dot V(\varepsilon,\tilde\theta) = -\frac{\lambda}{2}\varepsilon^2 - \frac{\lambda}{2}\varepsilon^2 - \delta\varepsilon - \frac{\sigma}{2\gamma}\tilde\theta^2 - \frac{\sigma}{2\gamma}\tilde\theta^2 + \frac{\sigma}{\gamma}\tilde\theta\theta$$

$$\dot V(\varepsilon,\tilde\theta) = -\frac{\lambda}{2}\varepsilon^2 - \frac{\sigma}{2\gamma}\tilde\theta^2 - \frac{\lambda}{2}\varepsilon^2 - \delta\varepsilon \pm \frac{1}{2\lambda}\delta^2 - \frac{\sigma}{2\gamma}\tilde\theta^2 + \frac{\sigma}{\gamma}\tilde\theta\theta \pm \frac{\sigma}{2\gamma}\theta^2$$

Решение №2

$$\dot V(\varepsilon,\tilde\theta) = -\frac{\lambda}{2}\varepsilon^2 - \frac{\lambda}{2}\varepsilon^2 - \delta\varepsilon - \frac{\sigma}{2\gamma}\tilde\theta^2 - \frac{\sigma}{2\gamma}\tilde\theta^2 + \frac{\sigma}{\gamma}\tilde\theta\theta$$

$$\dot V(\varepsilon,\tilde\theta) = -\frac{\lambda}{2}\varepsilon^2 - \frac{\sigma}{2\gamma}\tilde\theta^2 - \frac{\lambda}{2}\varepsilon^2 - \delta\varepsilon \pm \frac{1}{2\lambda}\delta^2 - \frac{\sigma}{2\gamma}\tilde\theta^2 + \frac{\sigma}{\gamma}\tilde\theta\theta \pm \frac{\sigma}{2\gamma}\theta^2$$

$$\dot V(\varepsilon,\tilde\theta) = -\frac{\lambda}{2}\varepsilon^2 - \frac{\sigma}{2\gamma}\tilde\theta^2 - \left(\sqrt{\frac{\lambda}{2}}\varepsilon + \sqrt{\frac{1}{2\lambda}}\delta\right)^2 + \frac{1}{2\lambda}\delta^2 - \frac{\sigma}{2\gamma}\left(\tilde\theta - \theta\right)^2 + \frac{\sigma}{2\gamma}\theta^2$$

Решение №2

$$\dot V(\varepsilon,\tilde\theta) = -\frac{\lambda}{2}\varepsilon^2 - \frac{\lambda}{2}\varepsilon^2 - \delta\varepsilon - \frac{\sigma}{2\gamma}\tilde\theta^2 - \frac{\sigma}{2\gamma}\tilde\theta^2 + \frac{\sigma}{\gamma}\tilde\theta\theta$$

$$\dot V(\varepsilon,\tilde\theta) = -\frac{\lambda}{2}\varepsilon^2 - \frac{\sigma}{2\gamma}\tilde\theta^2 - \frac{\lambda}{2}\varepsilon^2 - \delta\varepsilon \pm \frac{1}{2\lambda}\delta^2 - \frac{\sigma}{2\gamma}\tilde\theta^2 + \frac{\sigma}{\gamma}\tilde\theta\theta \pm \frac{\sigma}{2\gamma}\theta^2$$

$$\dot V(\varepsilon,\tilde\theta) = -\frac{\lambda}{2}\varepsilon^2 - \frac{\sigma}{2\gamma}\tilde\theta^2 - \left(\sqrt{\frac{\lambda}{2}}\varepsilon + \sqrt{\frac{1}{2\lambda}}\delta\right)^2 + \frac{1}{2\lambda}\delta^2 - \frac{\sigma}{2\gamma}\left(\tilde\theta - \theta\right)^2 + \frac{\sigma}{2\gamma}\theta^2$$

$$\dot V(\varepsilon,\tilde\theta) \le -\frac{\lambda}{2}\varepsilon^2 - \frac{\sigma}{2\gamma}\tilde\theta^2 + \frac{1}{2\lambda}\delta^2 + \frac{\sigma}{2\gamma}\theta^2$$

$$|\delta(t)| \le \bar\delta$$

$$\dot V(\varepsilon,\tilde\theta) \le -\frac{\lambda}{2}\varepsilon^2 - \frac{\sigma}{2\gamma}\tilde\theta^2 + \frac{1}{2\lambda}\bar\delta^2 + \frac{\sigma}{2\gamma}\theta^2$$

Решение №2

$$\dot V(\varepsilon,\tilde\theta) \le -\frac{\lambda}{2}\varepsilon^2 - \frac{\sigma}{2\gamma}\tilde\theta^2 + \frac{1}{2\lambda}\bar\delta^2 + \frac{\sigma}{2\gamma}\theta^2$$

$$\dot V(\varepsilon,\tilde\theta) \le -\frac{\lambda}{2}\varepsilon^2 - \frac{\sigma}{2\gamma}\tilde\theta^2 + \bar\Delta$$

$$\bar\Delta = \frac{1}{2\lambda}\bar\delta^2 + \frac{\sigma}{2\gamma}\theta^2$$

$$\dot V(\varepsilon,\tilde\theta) \le -\kappa V(\varepsilon,\tilde\theta) + \bar\Delta \qquad \kappa = \min\{\lambda,\sigma\} \qquad (4.13)$$

Решение №2

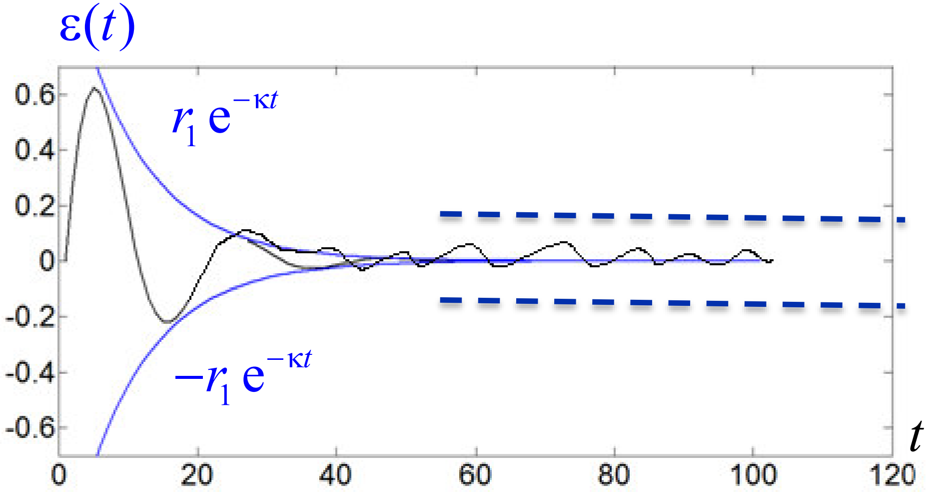
$$\dot V(\varepsilon,\tilde\theta)\le -\kappa V(\varepsilon,\tilde\theta)+\bar\Delta \quad\Rightarrow\quad V(t)\le \mathrm{e}^{-\kappa t}V(0)\left(1-\frac{\bar\Delta}{\kappa}\right)+\frac{\bar\Delta}{\kappa}V(0)$$

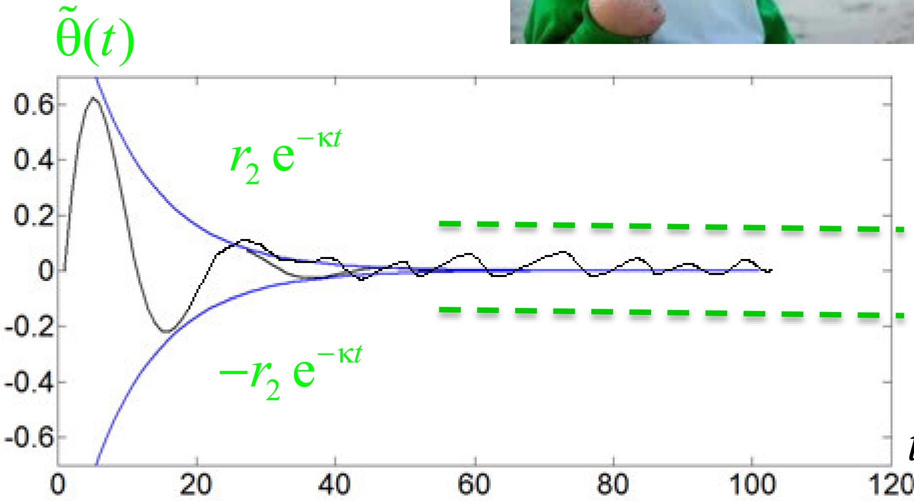
Экспоненциальная сходимость $\varepsilon(t)$ и $\tilde\theta(t)$ в окрестности нулей доказана

Решение №2

$$\dot{V}(\varepsilon,\tilde{\theta}) \le -\kappa V(\varepsilon,\tilde{\theta}) + \bar{\Delta} \qquad \Rightarrow \qquad V(t) \le \mathrm{e}^{-\kappa t} V(0)\left(1-\frac{\bar{\Delta}}{\kappa}\right) + \frac{\bar{\Delta}}{\kappa} V(0)$$

Экспоненциальная сходимость $\varepsilon(t)$ и $\tilde{\theta}(t)$ в окрестности нулей доказана





Решение №2

Выводы

Настраиваемый регулятор:

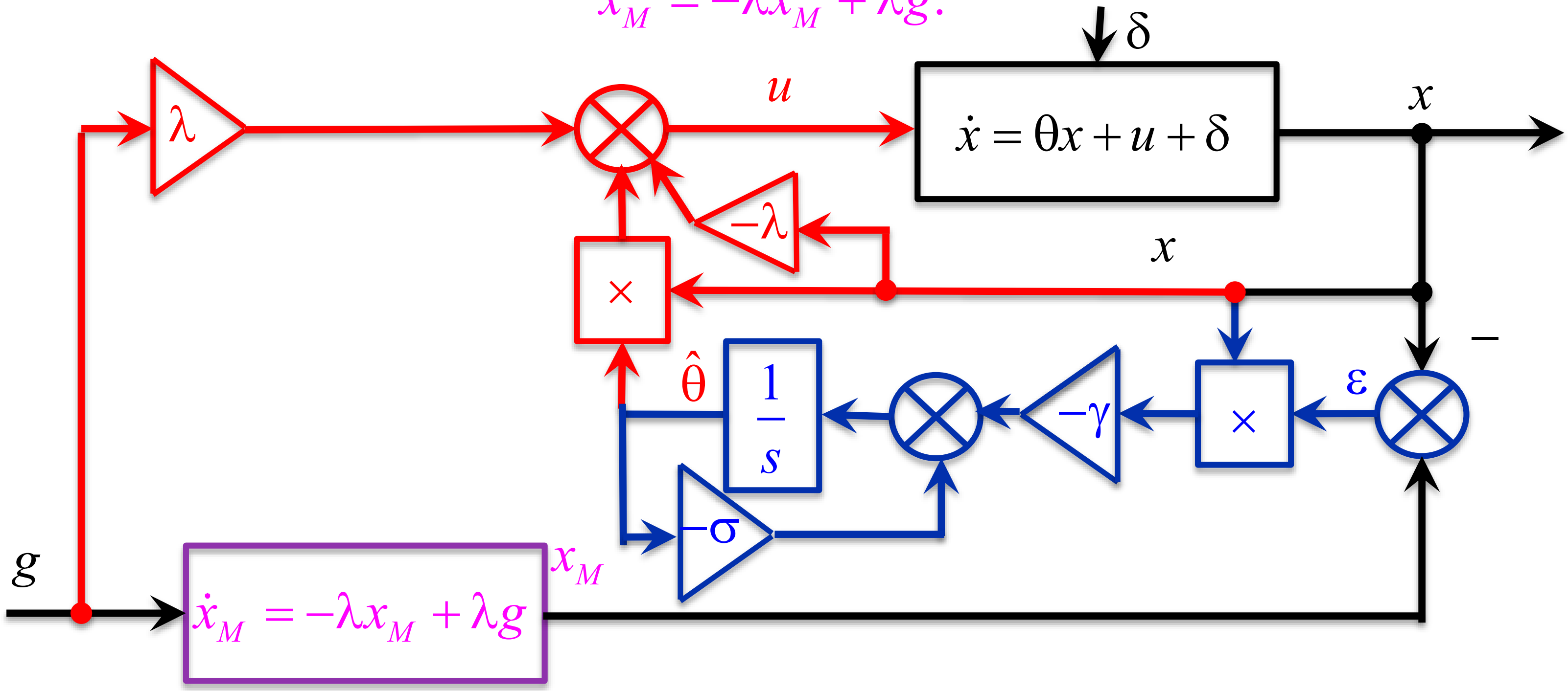
$$u = -\hat{\theta}x - \lambda x + \lambda g \qquad (4.8)$$

Робастный алгоритм адаптации

$$\dot{\hat{\theta}} = -\gamma x \varepsilon - \sigma\hat{\theta} \qquad (4.9)$$

с $\varepsilon = x_M - x$ и эталонной моделью

$$\dot{x}_M = -\lambda x_M + \lambda g. \qquad (4.3)$$



Решение №2

Выводы

Свойства замкнутой робастной системы:

1. Все сигналы в системе ограничены;
2. Ошибка управления $\varepsilon = x_M - x$ и параметрическая ошибка $\tilde{\theta}$ стремятся в окрестности нулей экспоненциально;
3. Радиус окрестности может быть произвольно уменьшен

Как?

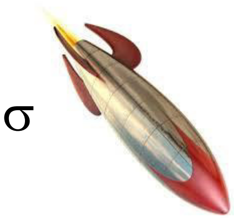
$$\dot{V}(\varepsilon,\tilde{\theta}) \le -\kappa V(\varepsilon,\tilde{\theta}) + \bar{\Delta} \quad \text{где} \quad \bar{\Delta} = \frac{1}{2\lambda}\bar{\delta}^2 + \frac{\sigma}{2\gamma}\theta^2$$

Решение №2

Выводы

Свойства замкнутой робастной системы:

1. Все сигналы в системе ограничены;
2. Ошибка управления $\varepsilon = x_M - x$ и параметрическая ошибка $\tilde{\theta}$ стремятся в окрестности нулей экспоненциально;
3. Радиус окрестности может быть произвольно уменьшен

λ  *и* γ  *или* σ 

$$\dot{V}(\varepsilon, \tilde{\theta}) \le -\kappa V(\varepsilon, \tilde{\theta}) + \bar{\Delta} \quad \text{где} \quad \bar{\Delta} = \frac{1}{2\lambda}\bar{\delta}^2 + \frac{\sigma}{2\gamma}\theta^2$$

4. Алгоритм обеспечивает частичную компенсацию неопределенности. Если $\delta(t) \equiv \bar{\delta} = 0$, то ошибка $\varepsilon = x_M - x$ может быть сведена к нулю при $\sigma = 0$.

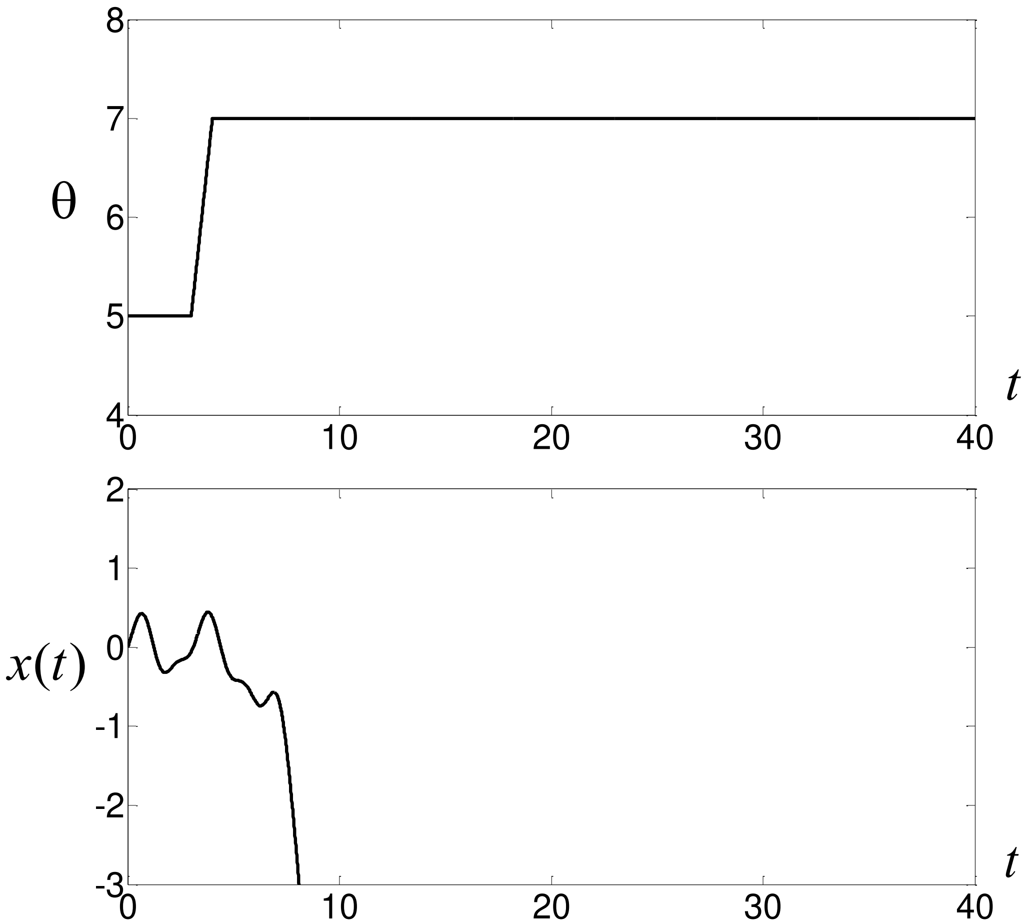
Пример: классическое стабилизирующее управление

$$\boxed{\dot{x} = \theta x + u + \delta}$$

$$u = -6x$$

$$\boxed{\theta = 5}$$

$$\boxed{\delta(t) = 0,5\sin(4t) + 0,75\cos(2t)}$$



Пример: адаптивная робастная стабилизация для объекта $\boxed{\dot{x} = \theta x + u + \delta}$

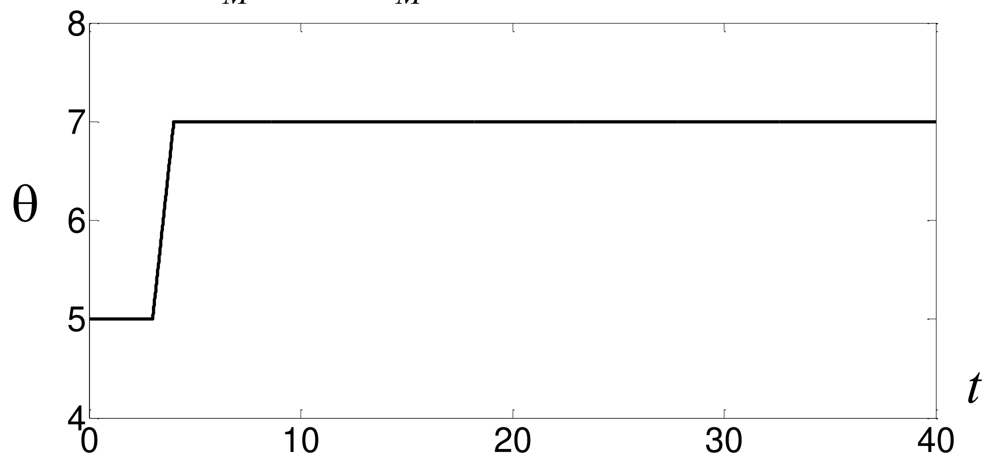
$$u = -6x - \hat{\theta}x,$$

$$\dot{\hat{\theta}} = -\gamma x \varepsilon - \hat{\theta}, \qquad \varepsilon = x_M - x,$$

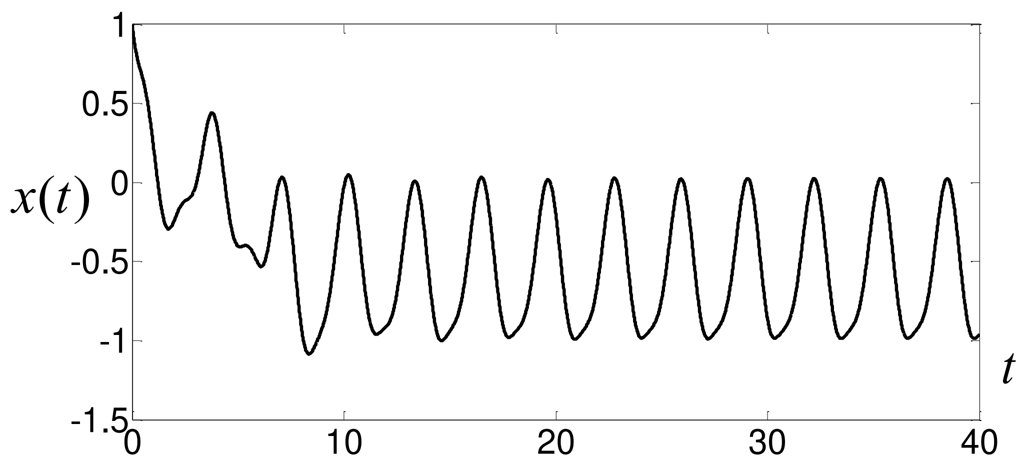
$$\dot{x}_M = -6x_M$$

$$\boxed{\theta = 5}$$

$$\boxed{\delta(t) = 0,5\sin(4t) + 0,75\cos(2t)}$$



$\gamma = 2$



Пример: адаптивная робастная стабилизация для объекта $\boxed{\dot{x} = \theta x + u + \delta}$

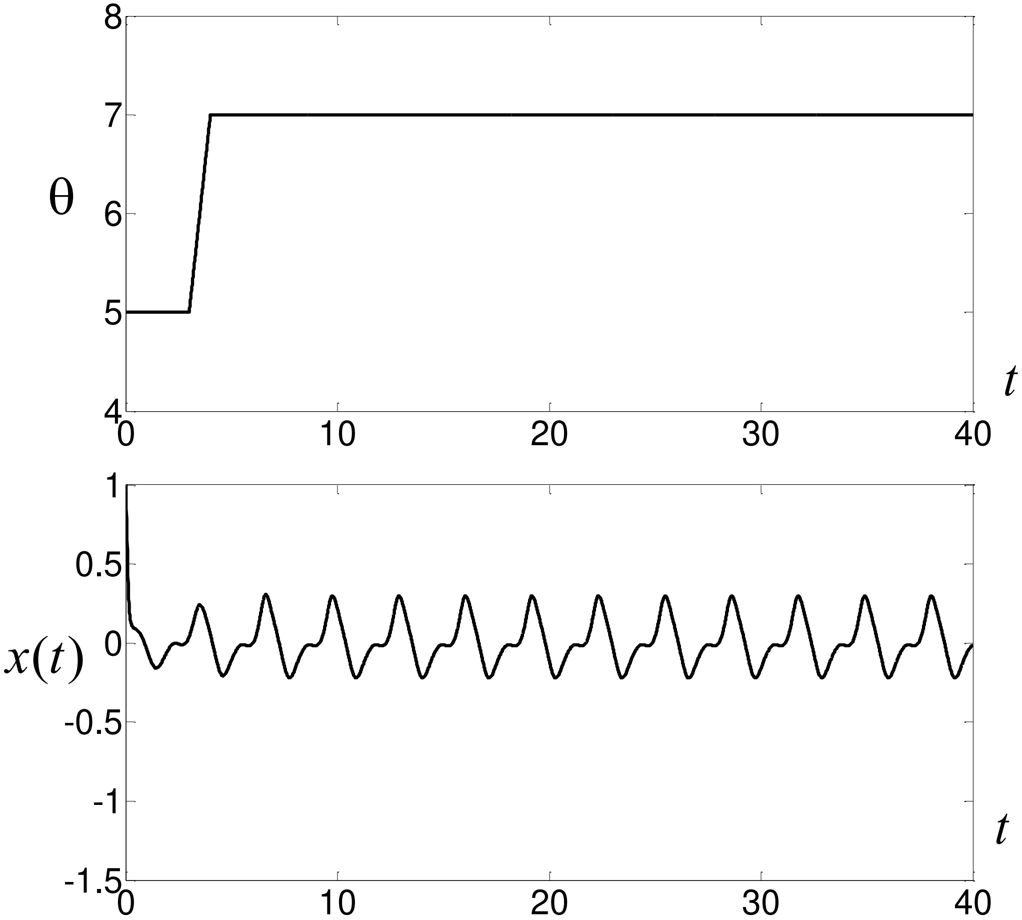
$$u = -6x - \hat{\theta}x,$$

$$\boxed{\theta = 5}$$

$$\dot{\hat{\theta}} = -\gamma x \varepsilon - \hat{\theta}, \qquad \varepsilon = x_M - x, \qquad \boxed{\delta(t) = 0,5\sin(4t) + 0,75\cos(2t)}$$

$$\dot{x}_M = -6x_M$$

$$\gamma = 200$$



Пример: адаптивное робастное слежение для объекта $\boxed{\dot{x} = \theta x + u + \delta}$

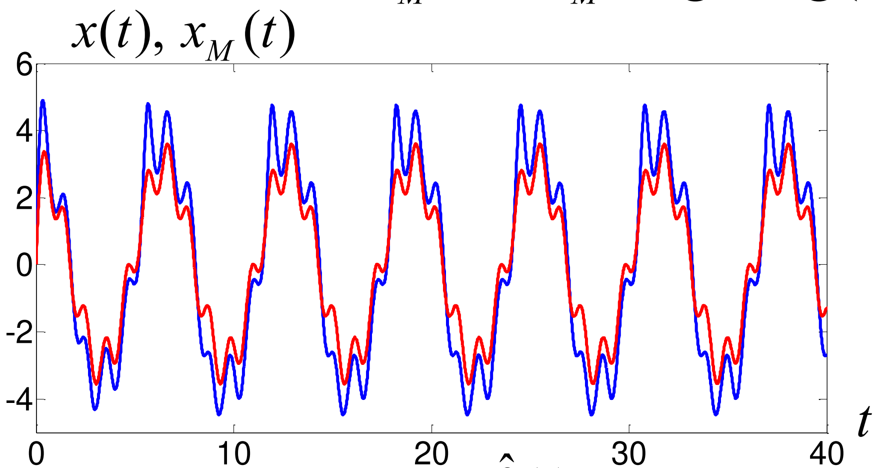
$$u = -6x - \hat{\theta}x + 6g,$$

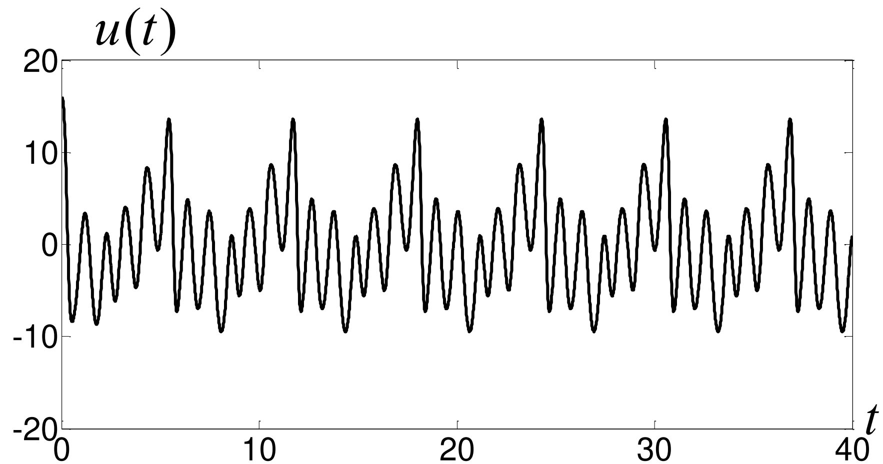
$$\boxed{\theta = 5}$$

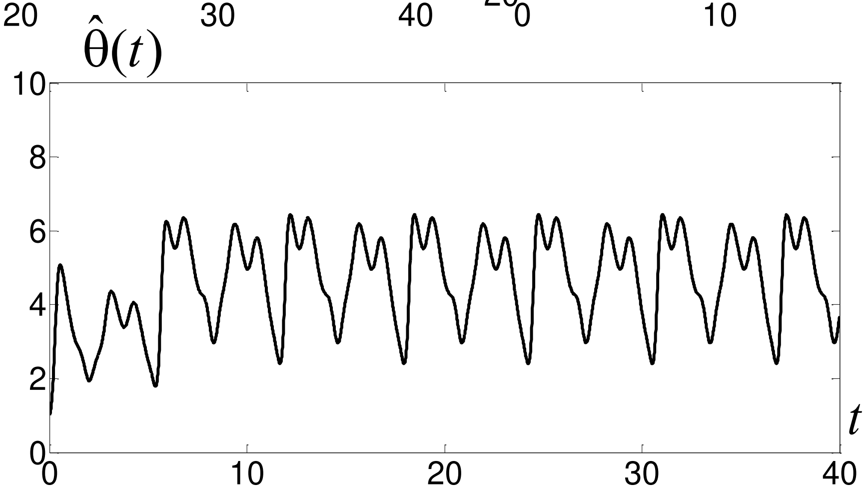
$$\dot{\hat{\theta}} = -2x\varepsilon - \hat{\theta}, \qquad \varepsilon = x_M - x,$$

$$\boxed{\delta(t) = 0,5\sin(4t) + 0,75\cos(2t)}$$

$$\dot{x}_M = -6x_M + 6g, \qquad g(t) = \sin 6t + 3\cos t$$







5. Обобщенный алгоритм синтеза адаптивного и робастного управления

Как синтезировать адаптивное и робастное управление?

5. Обобщенный алгоритм синтеза адаптивного и робастного управления

1. Постановка задачи (управление по состоянию):

Объект:

$$\dot{x} = f(\theta, x, u, \delta), \qquad x(0), \tag{5.1}$$

где $\theta \in R^q$ – вектор неизвестных параметров, $f(\theta, x, u, \delta) \in R^n$ – нелинейная функция, $\delta \in R^m : \|\delta(t)\| \le \bar{\delta}$ – возмущение.

Цель: синтезировать управление u, обеспечивающее неравенство

$$|x_M(t) - x(t)| \le \Delta \ \text{ for } any\ t \ge T, \tag{5.2}$$

где x_M – вектор состояния эталонной модели

$$\dot{x}_M = A_M x_M + b_M g, \tag{5.3}$$

g – задающее воздействие, A_M, b_M – параметры модели.

5. Обобщенный алгоритм синтеза адаптивного и робастного управления

1. Постановка задачи (управление по выходу):

Объект:

$$\dot{x} = f(\theta, x, u, \delta), \qquad x(0),$$
$$y = h(\theta, x, u, \delta) \tag{5.1}$$

где $\theta \in R^q$ – вектор неизвестных параметров, $f(\theta, x, u, \delta) \in R^n$ – нелинейная функция, $\delta \in R^m : \|\delta(t)\| \leq \bar{\delta}$ – возмущение.

Цель: синтезировать управление u, обеспечивающее неравенство

$$|y_M(t) - y(t)| \leq \Delta \ \ \text{для любых} \ \ t \geq T, \tag{5.2}$$

где y_M – выход эталонной модели

$$y_M = W_M(s)[g], \tag{5.3}$$

g – задающее воздействие, $W_M(s)$ – передаточная функция модели.

5. Обобщенный алгоритм синтеза адаптивного и робастного управления

Шаг 2. Синтез неадаптивного управления:

Пусть параметры θ известны.

5. Обобщенный алгоритм синтеза адаптивного и робастного управления

Шаг 2. Синтез неадаптивного управления:

Пусть параметры θ известны.

Используем багаж теории управлении

$\Rightarrow$

Нелинейное управление

$$u = U(\theta, x, e, g), \qquad (5.4)$$

где $e = x_M - x$ – ошибка управления, $U(\theta, x, e, g)$ – нелинейная функция.

5. Обобщенный алгоритм синтеза адаптивного и робастного управления

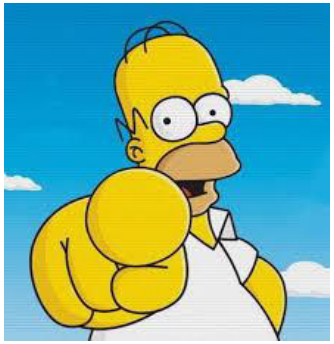
Шаг 3. Синтез настраиваемого регулятора

Параметры θ неизвестны.

5. Обобщенный алгоритм синтеза адаптивного и робастного управления

Шаг 3. Синтез настраиваемого регулятора

Параметры θ неизвестны.



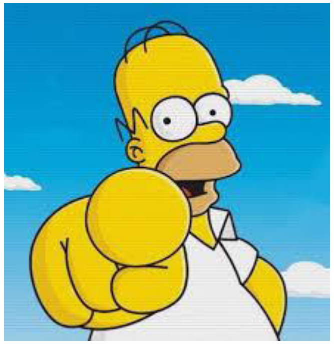
Подставим оценки $\hat{\theta}(t)$ вместо θ в управлении (5.4) и получим настраиваемый регулятор:

$$\boxed{u = U(\hat{\theta}(t), x, e, g)} \tag{5.5}$$

5. Обобщенный алгоритм синтеза адаптивного и робастного управления

Шаг 3. Синтез настраиваемого регулятора

Параметры θ неизвестны.



Подставим оценки $\hat{\theta}(t)$ вместо θ в управлении (5.4) и получим настраиваемый регулятор:

$$\boxed{u = U(\hat{\theta}(t), x, e, g)} \tag{5.5}$$

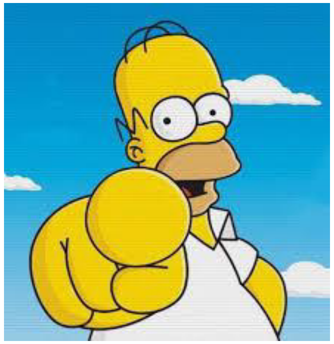
Подставим (5.5) в модель объекта $\dot{x} = f(\theta, x, u, \delta)$:

$$\dot{x} = f(\theta, x, U(\hat{\theta}, x, e, g), \delta)$$

5. Обобщенный алгоритм синтеза адаптивного и робастного управления

Шаг 3. Синтез настраиваемого регулятора

Параметры θ неизвестны.



Подставим оценки $\hat{\theta}(t)$ вместо θ в управлении (5.4) и получим настраиваемый регулятор:

$$\boxed{u = U(\hat{\theta}(t), x, e, g)} \qquad (5.5)$$

Подставим (5.5) в модель объекта $\dot{x} = f(\theta, x, u, \delta)$:

$$\dot{x} = f(\theta, x, U(\hat{\theta}, x, e, g), \delta)$$

Вычислим производную по времени от ошибки управления $e = x_M - x$:

5. Обобщенный алгоритм синтеза адаптивного и робастного управления

Рассчитаем производную по времени от ошибки управления $e = x_M - x$

$$\dot{e} = \dot{x}_M - \dot{x} = \left(A_M x_M + b_M g\right) - f(\theta, x, U(\hat{\theta}, x, \varepsilon, g), \delta)$$

$$\Downarrow$$

Модель сигнальной ошибки

$$\boxed{\dot{e} = E\left(e, \tilde{\theta}, t\right)} \qquad (5.6)$$

где E – некоторая нелинейная функция,

$\tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta}$ – вектор параметрических ошибок.

5. Обобщенный алгоритм синтеза адаптивного и робастного управления

Шаг 4. Синтез алгоритма адаптации

Модель параметрических ошибок

$$\boxed{\dot{\tilde{\theta}} = \Omega(e,t)} \qquad (5.7)$$

где Ω – неизвестная, но физически реализуемая функция.

5. Обобщенный алгоритм синтеза адаптивного и робастного управления

Шаг 4. Синтез алгоритма адаптации

Модель параметрических ошибок $\boxed{\dot{\tilde{\theta}} = \Omega(e,t)}$ (5.7)

где Ω – неизвестная, но физически реализуемая функция.

Алгоритм адаптации:

$\boxed{\dot{\hat{\theta}} = -\Omega(e,t),}$ $\dot{\tilde{\theta}} = -\dot{\hat{\theta}}$ (5.8)

5. Обобщенный алгоритм синтеза адаптивного и робастного управления

Шаг 5. Определение функции $\Omega(t)$

Модель сигнальной ошибки

$$\boxed{\dot{e} = E\left(e, \tilde{\theta}, t\right)} \tag{5.6}$$

Модель параметрических ошибок

$$\boxed{\dot{\tilde{\theta}} = \Omega\left(e, t\right)} \tag{5.7}$$

Выберем функцию Ляпунова

$$V = V(e, \tilde{\theta}, t).$$

5. Обобщенный алгоритм синтеза адаптивного и робастного управления

Шаг 5. Определение функции $\Omega(t)$

Модель сигнальной ошибки

$$\boxed{\dot{e} = E\left(e, \tilde{\theta}, t\right)} \tag{5.6}$$

Модель параметрических ошибок

$$\boxed{\dot{\tilde{\theta}} = \Omega\left(e, t\right)} \tag{5.7}$$

Выберем функцию Ляпунова

$$V = V(e, \tilde{\theta}, t) \le c_1 \left\|e\right\|^2 + c_2 \left\|\tilde{\theta}\right\|^2 .$$

и вычислим ее производную по времени

5. Обобщенный алгоритм синтеза адаптивного и робастного управления

$$\boxed{\dot{e} = E\left(e, \tilde{\theta}, t\right)} \qquad \boxed{\dot{\tilde{\theta}} = \Omega\left(e, t\right)}$$

$$\dot{V}(e, \tilde{\theta})$$

Условие устойчивости по e **:**

$$\dot{V}(e, \tilde{\theta}) \le -c_3 \left\| e \right\|^2 \; (e(t) \to 0 \;\; as \;\; t \to \infty)$$

дает

$$\Downarrow$$

$$\Omega\left(e, t\right)$$

алгоритм адаптации:

$$\boxed{\dot{\hat{\theta}} = -\Omega\left(e, t\right)} \qquad (5.8)$$

5. Обобщенный алгоритм синтеза адаптивного и робастного управления

$$\dot{e} = E\left(e, \tilde{\theta}, t\right) \qquad \dot{\tilde{\theta}} = \Omega\left(e, t\right)$$

$$\dot{V}(e, \tilde{\theta})$$

Условие устойчивости по e **:**

$$\dot{V}(e, \tilde{\theta}) \le -c_3 V + c_4 \qquad (V(t) \to \textit{окрестность нуля})$$

дает

$$\Downarrow$$

$$\Omega\left(e, t\right)$$

робастный алгоритм адаптации:

$$\dot{\hat{\theta}} = -\Omega\left(e, t\right) \tag{5.8}$$

5. Обобщенный алгоритм синтеза адаптивного и робастного управления

Выводы

Настраиваемое управление

$$u = U(\hat{\theta}, x, \varepsilon, g) \qquad (5.5)$$

Алгоритм адаптации (или робастный алгоритм адаптации)

$$\dot{\hat{\theta}} = -\Omega(e, t) \qquad (5.8)$$

5. Обобщенный алгоритм синтеза адаптивного и робастного управления

Не существует универсального способа выбора функции Ляпунова!

5. Обобщенный алгоритм синтеза адаптивного и робастного управления

Не существует универсального способа выбора функции Ляпунова!

В связи с этим в теории предлагаются стандартные модели ошибок, для которых строятся функции Ляпунова, позволяющие синтезировать алгоритмы адаптации для широкого спектра задач АиРУ