7. Схемы №1, №2 параметризации линейных систем

7.1. Схема №1. Параметризация выхода

Объект:

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_0 y = b_m u^{(m)} + \ldots + b_0 u, \tag{7.1}$$

где a_i, b_j, $i = \overline{0, n-1}$, $j = \overline{0, m}$ – постоянные параметры.

7. Схемы №1, №2 параметризации линейных систем

7.1. Схема №1. Параметризация выхода

Объект:

$$y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\ldots+a_0y=b_mu^{(m)}+\ldots+b_0u, \qquad (7.1)$$

где a_i, b_j, $i=\overline{0,n-1}$, $j=\overline{0,m}$ – постоянные параметры.

Применим оператор передаточной функции

$$H(s)=\frac{1}{K(s)}=\frac{1}{s^n+k_{n-1}s^{n-1}\ldots+k_0}$$

с гурвицевым полиномом $K(s)=s^n+k_{n-1}s+\ldots+k_0$ к (7.1), полагая

Начальные условия $y(0),\ldots,y^{(n-1)}(0)$ равными нулю (см. *Пример 6.3*)

7.1. Схема №1. Параметризация выхода

Параметризация

$$y = (k_{n-1} - a_{n-1})\frac{s^{n-1}}{K(s)}[y] + \ldots + (k_1 - a_1)\frac{s}{K(s)}[y] + (k_0 - a_0)\frac{1}{K(s)}[y] +$$

$$b_m \frac{s^m}{K(s)}[u] + \ldots + b_1 \frac{s}{K(s)}[u] + b_0 \frac{1}{K(s)}[u],$$

7.1. Схема №1. Параметризация выхода

Параметризация

$$y = \underbrace{(k_{n-1} - a_{n-1})}_{\theta_n} \underbrace{\frac{s^{n-1}}{K(s)}[y]}_{\xi_n} + \ldots + \underbrace{(k_1 - a_1)}_{\theta_2} \underbrace{\frac{s}{K(s)}[y]}_{\xi_2} + \underbrace{(k_0 - a_0)}_{\theta_1} \underbrace{\frac{1}{K(s)}[y]}_{\xi_1} +$$

$$\underbrace{b_m}_{\theta_{n+m+1}} \underbrace{\frac{s^m}{K(s)}[u]}_{\nu_{m+1}} + \ldots + \underbrace{b_1}_{\theta_{n+2}} \underbrace{\frac{s}{K(s)}[u]}_{\nu_2} + \underbrace{b_0}_{\theta_{n+1}} \underbrace{\frac{1}{K(s)}[u]}_{\nu_1},$$

$$y = \theta^T \omega, \tag{7.2}$$

где $\theta = col(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_{n+m+1}) \in \mathbb{R}^{n+m+1}$,

$\omega = col(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_{m+1}) \in \mathbb{R}^{n+m+1}$.

7.1. Схема №1. Параметризация выхода

Параметризация

$$y = \underbrace{(k_{n-1} - a_{n-1})}_{\theta_n} \underbrace{\frac{s^{n-1}}{K(s)}[y]}_{\xi_n} + \ldots + \underbrace{(k_1 - a_1)}_{\theta_2} \underbrace{\frac{s}{K(s)}[y]}_{\xi_2} + \underbrace{(k_0 - a_0)}_{\theta_1} \underbrace{\frac{1}{K(s)}[y]}_{\xi_1} +$$

$$\underbrace{b_m}_{\theta_{n+m+1}} \underbrace{\frac{s^m}{K(s)}[u]}_{\nu_{m+1}} + \ldots + \underbrace{b_1}_{\theta_{n+2}} \underbrace{\frac{s}{K(s)}[u]}_{\nu_2} + \underbrace{b_0}_{\theta_{n+1}} \underbrace{\frac{1}{K(s)}[u]}_{\nu_1},$$

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 = \xi_3 \\ \quad \ldots \\ \dot{\xi}_{n-1} = \xi_n \\ \dot{\xi}_n = -k_0\xi_1 - k_1\xi_2 - \cdots - k_{n-1}\xi_n + y \end{cases} \quad (7.3) \qquad \begin{cases} \dot{\nu}_1 = \nu_2 \\ \dot{\nu}_2 = \nu_3 \\ \quad \ldots \\ \dot{\nu}_{n-1} = \nu_n \\ \dot{\nu}_n = -k_0\nu_1 - k_1\nu_2 - \cdots - k_{n-1}\nu_n + u \end{cases} \quad (7.4)$$

7.1. Схема №1. Параметризация выхода

Параметризация

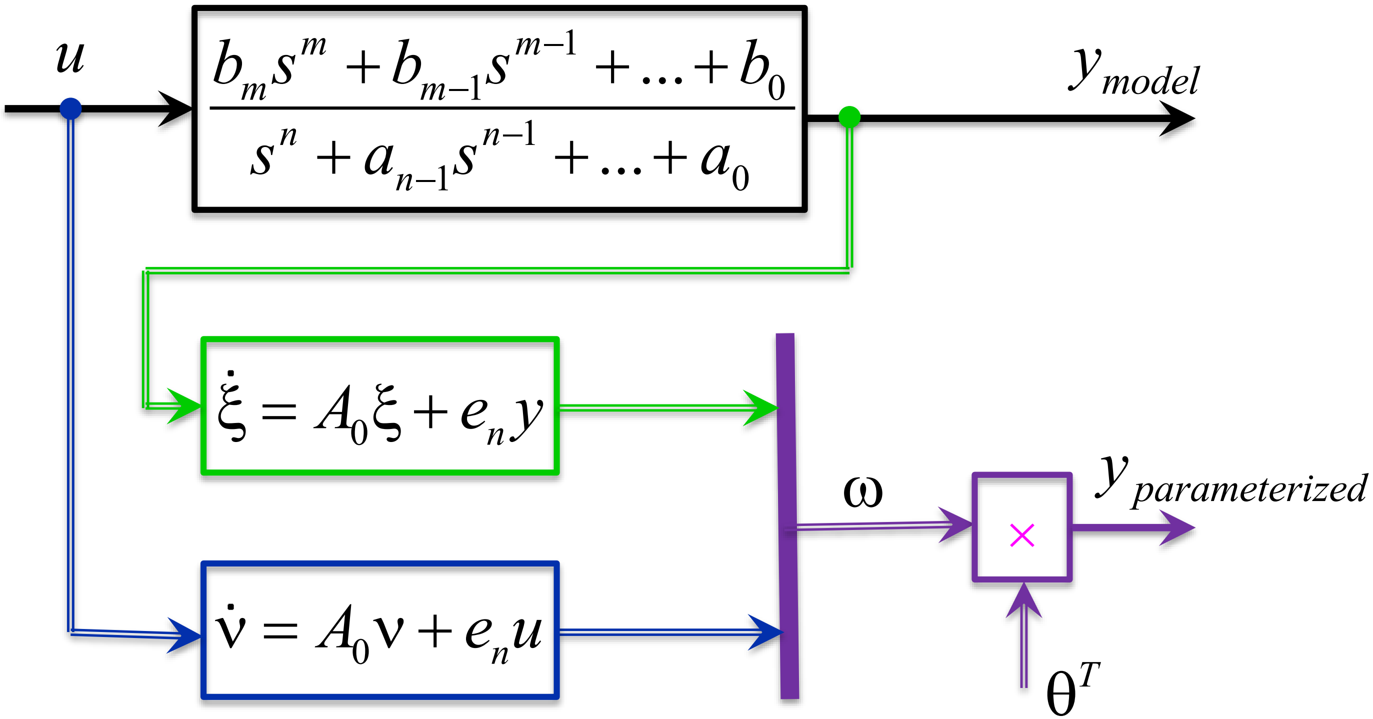
$$y = \underbrace{(k_{n-1} - a_{n-1})}_{\theta_n} \underbrace{\frac{s^{n-1}}{K(s)}[y]}_{\xi_n} + \ldots + \underbrace{(k_1 - a_1)}_{\theta_2} \underbrace{\frac{s}{K(s)}[y]}_{\xi_2} + \underbrace{(k_0 - a_0)}_{\theta_1} \underbrace{\frac{1}{K(s)}[y]}_{\xi_1} +$$

$$\underbrace{b_m}_{\theta_{n+m+1}} \underbrace{\frac{s^m}{K(s)}[u]}_{\nu_{m+1}} + \ldots + \underbrace{b_1}_{\theta_{n+2}} \underbrace{\frac{s}{K(s)}[u]}_{\nu_2} + \underbrace{b_0}_{\theta_{n+1}} \underbrace{\frac{1}{K(s)}[u]}_{\nu_1},$$

$$\begin{cases} \dot{\xi} = A_0\xi + e_n y, & (7.3) \\ \dot{\nu} = A_0\nu + e_n u & (7.4) \end{cases}$$

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -k_0 & -k_1 & -k_2 & \cdots & -k_{n-1} \end{bmatrix}, \quad e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

7.1. Схема №1. Параметризация выхода



$$y_{parameterized} = \theta^T\omega$$

7.2. Схема №2. Параметризация вектора состояния

Объект (в канонической форме):

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu, \\ y = c^T x, \end{cases} \tag{7.5}$$

где

$$A = \begin{bmatrix} -a_{n-1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_{n-2} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_m \\ \vdots \\ b_0 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

$a_i, b_j,\ i = \overline{0, n-1},\ j = \overline{0, m}$ – постоянные параметры.

7.2. Схема №2. Параметризация вектора состояния

Применим передаточную матрицу (резольвенту)

$$\Phi(s) = \left(I_{n\times n}s - A_0^*\right)^{-1} \tag{7.6}$$

с гурвицевой матрицей

$$A_0^* = \begin{bmatrix} -k_{n-1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -k_{n-2} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -k_1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -k_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

к (7.5) временно полагая начальные условия $x(0)$ равными нулю:

$$\left(I_{n\times n}s - A_0^*\right)^{-1}[\dot{x}] = \left(I_{n\times n}s - A_0^*\right)^{-1} A[x] + \left(I_{n\times n}s - A_0^*\right)^{-1} b[u]$$

$$\Downarrow$$

7.2. Схема №2. Параметризация вектора состояния

$$\left(I_{n\times n}s - A_0^*\right)^{-1} \cdot s\ [x] = \left(I_{n\times n}s - A_0^*\right)^{-1} A[x] + \left(I_{n\times n}s - A_0^*\right)^{-1} b[u]$$

7.2. Схема №2. Параметризация вектора состояния

$\pm A_0^*$

$$\left(I_{n\times n}s - A_0^*\right)^{-1}\cdot s\,[x] = \left(I_{n\times n}s - A_0^*\right)^{-1} A[x] + \left(I_{n\times n}s - A_0^*\right)^{-1} b[u]$$

$$\Downarrow$$

$$\left(I_{n\times n}s - A_0^*\right)^{-1}\left(I_{n\times n}s \pm A_0^*\right)[x] = \left(I_{n\times n}s - A_0^*\right)^{-1} A[x] + \left(I_{n\times n}s - A_0^*\right)^{-1} b[u]$$

7.2. Схема №2. Параметризация вектора состояния

$\pm A_0^*$

$$\left(I_{n\times n}s - A_0^*\right)^{-1}\cdot s\left[x\right] = \left(I_{n\times n}s - A_0^*\right)^{-1}A\left[x\right] + \left(I_{n\times n}s - A_0^*\right)^{-1}b\left[u\right]$$

$$\Downarrow$$

$$\left(I_{n\times n}s - A_0^*\right)^{-1}\left(I_{n\times n}s \pm A_0^*\right)\left[x\right] = \left(I_{n\times n}s - A_0^*\right)^{-1}A\left[x\right] + \left(I_{n\times n}s - A_0^*\right)^{-1}b\left[u\right]$$

$$\Downarrow$$

$$x = \left(I_{n\times n}s - A_0^*\right)^{-1}\left(A - A_0^*\right)\left[x\right] + \left(I_{n\times n}s - A_0^*\right)^{-1}b\left[u\right]$$

7.2. Схема №2. Параметризация вектора состояния

$$\left(I_{n\times n}s-A_0^*\right)^{-1}\cdot s\overset{\pm A_0^*}{}[x]=\left(I_{n\times n}s-A_0^*\right)^{-1}A[x]+\left(I_{n\times n}s-A_0^*\right)^{-1}b[u]$$

$$\Downarrow$$

$$\left(I_{n\times n}s-A_0^*\right)^{-1}\left(I_{n\times n}s\pm A_0^*\right)[x]=\left(I_{n\times n}s-A_0^*\right)^{-1}A[x]+\left(I_{n\times n}s-A_0^*\right)^{-1}b[u]$$

$$\Downarrow$$

$$x=\left(I_{n\times n}s-A_0^*\right)^{-1}\underbrace{\left(A-A_0^*\right)}[x]+\left(I_{n\times n}s-A_0^*\right)^{-1}b[u]$$

$$\begin{bmatrix}-a_{n-1} & 1 & 0 & \cdots & 0\\ -a_{n-2} & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -a_1 & 0 & 0 & \cdots & 1\\ -a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-k_{n-1} & 1 & 0 & \cdots & 0\\ -k_{n-2} & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -k_1 & 0 & 0 & \cdots & 1\\ -k_0 & 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k_{n-1}-a_{n-1}\\ \vdots\\ k_1-a_1\\ k_0-a_0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}$$

7.2. Схема №2. Параметризация вектора состояния

$$\left(I_{n\times n}s-A_0^*\right)^{-1}\cdot \overset{\pm A_0^*}{s}\left[x\right]=\left(I_{n\times n}s-A_0^*\right)^{-1}A\left[x\right]+\left(I_{n\times n}s-A_0^*\right)^{-1}b\left[u\right]$$

$$\Downarrow$$

$$\left(I_{n\times n}s-A_0^*\right)^{-1}\left(I_{n\times n}s\pm A_0^*\right)\left[x\right]=\left(I_{n\times n}s-A_0^*\right)^{-1}A\left[x\right]+\left(I_{n\times n}s-A_0^*\right)^{-1}b\left[u\right]$$

$$\Downarrow$$

$$x=\left(I_{n\times n}s-A_0^*\right)^{-1}\underbrace{\left(A-A_0^*\right)}\left[x\right]+\left(I_{n\times n}s-A_0^*\right)^{-1}b\left[u\right]$$

$$\begin{bmatrix}-a_{n-1} & 1 & 0 & \cdots & 0\\ -a_{n-2} & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -a_1 & 0 & 0 & \cdots & 1\\ -a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-k_{n-1} & 1 & 0 & \cdots & 0\\ -k_{n-2} & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -k_1 & 0 & 0 & \cdots & 1\\ -k_0 & 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k_{n-1}-a_{n-1}\\ \vdots\\ k_1-a_1\\ k_0-a_0\end{bmatrix}c^T$$

7.2. Схема №2. Параметризация вектора состояния

$\pm A_0^*$

$$\left(I_{n\times n}s - A_0^*\right)^{-1}\cdot s\,[x] = \left(I_{n\times n}s - A_0^*\right)^{-1} A[x] + \left(I_{n\times n}s - A_0^*\right)^{-1} b[u]$$

$$\Downarrow$$

$$\left(I_{n\times n}s - A_0^*\right)^{-1}\left(I_{n\times n}s \pm A_0^*\right)[x] = \left(I_{n\times n}s - A_0^*\right)^{-1} A[x] + \left(I_{n\times n}s - A_0^*\right)^{-1} b[u]$$

$$\Downarrow$$

$$x = \left(I_{n\times n}s - A_0^*\right)^{-1}\begin{bmatrix} k_{n-1} - a_{n-1} \\ \vdots \\ k_1 - a_1 \\ k_0 - a_0 \end{bmatrix} c^T[x] + \left(I_{n\times n}s - A_0^*\right)^{-1} b[u]$$

7.2. Схема №2. Параметризация вектора состояния

$$\left(I_{n\times n}s - A_0^*\right)^{-1} \cdot s \overset{\pm A_0^*}{} [x] = \left(I_{n\times n}s - A_0^*\right)^{-1} A[x] + \left(I_{n\times n}s - A_0^*\right)^{-1} b[u]$$

$$\Downarrow$$

$$\left(I_{n\times n}s - A_0^*\right)^{-1}\left(I_{n\times n}s \pm A_0^*\right)[x] = \left(I_{n\times n}s - A_0^*\right)^{-1} A[x] + \left(I_{n\times n}s - A_0^*\right)^{-1} b[u]$$

$$\Downarrow$$

$$x = \left(I_{n\times n}s - A_0^*\right)^{-1}\begin{bmatrix} k_{n-1} - a_{n-1} \\ \vdots \\ k_1 - a_1 \\ k_0 - a_0 \end{bmatrix}[y] + \left(I_{n\times n}s - A_0^*\right)^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_m \\ \vdots \\ b_0 \end{bmatrix}[u]$$

7.2. Схема №2. Параметризация вектора состояния

$$\begin{bmatrix} k_{n-1} - a_{n-1} \\ \vdots \\ k_1 - a_1 \\ k_0 - a_0 \end{bmatrix} = \sum_{i=0}^{n-1} (k_i - a_i) e_{n-i}, \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_m \\ \vdots \\ b_0 \end{bmatrix} = \sum_{j=0}^{m} b_j e_{m+1-j},$$

где $e_i = col\left(0, \ldots, 0, \underset{i}{1}, 0, \ldots, 0\right),$

7.2. Схема №2. Параметризация вектора состояния

$$\begin{bmatrix} k_{n-1}-a_{n-1} \\ \vdots \\ k_1-a_1 \\ k_0-a_0 \end{bmatrix} = \sum_{i=0}^{n-1}(k_i-a_i)e_{n-i}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_m \\ \vdots \\ b_0 \end{bmatrix} = \sum_{j=0}^{m} b_j e_{m+1-j},$$

где $e_i = col\left(0,\ldots,0,\underset{i}{1},0,\ldots,0\right)$,

$$x = \left(I_{n\times n}s - A_0^*\right)^{-1}\begin{bmatrix} k_{n-1}-a_{n-1} \\ \vdots \\ k_1-a_1 \\ k_0-a_0 \end{bmatrix}[y] + \left(I_{n\times n}s - A_0^*\right)^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_m \\ \vdots \\ b_0 \end{bmatrix}[u]$$

7.2. Схема №2. Параметризация вектора состояния

$$\begin{bmatrix} k_{n-1}-a_{n-1} \\ \vdots \\ k_1-a_1 \\ k_0-a_0 \end{bmatrix} = \sum_{i=0}^{n-1}(k_i-a_i)e_{n-i}, \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_m \\ \vdots \\ b_0 \end{bmatrix} = \sum_{j=0}^{m} b_j e_{m+1-j},$$

где $e_i = col\Big(0,\dots,0,\underset{i}{1},0,\dots,0\Big),$

$$x = \sum_{i=0}^{n-1}(k_i-a_i)\left(I_{n\times n}s - A_0^*\right)^{-1} e_{n-i}[y] + \sum_{j=0}^{m} b_j \left(I_{n\times n}s - A_0^*\right)^{-1} e_{m+1-j}[u]$$

7.2. Схема №2. Параметризация вектора состояния

$$\begin{bmatrix} k_{n-1}-a_{n-1} \\ \vdots \\ k_1-a_1 \\ k_0-a_0 \end{bmatrix} = \sum_{i=0}^{n-1}(k_i-a_i)e_{n-i}, \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_m \\ \vdots \\ b_0 \end{bmatrix} = \sum_{j=0}^{m} b_j e_{m+1-j},$$

где $e_i = col\left(0,\dots,0,\underset{i}{1},0,\dots,0\right),$

$$x = \sum_{i=0}^{n-1}(k_i-a_i)\left(I_{n\times n}s-A_0^*\right)^{-1}e_{n-i}[y] + \sum_{j=0}^{m} b_j\left(I_{n\times n}s-A_0^*\right)^{-1}e_{m+1-j}[u]$$

$$x = \sum_{i=0}^{n-1}\theta_{i+1}\left(I_{n\times n}s-A_0^*\right)^{-1}e_{n-i}[y] + \sum_{j=0}^{m}\theta_{j+1+n}\left(I_{n\times n}s-A_0^*\right)^{-1}e_{m+1-j}[u] \quad (7.7)$$

$$\theta = col\left(k_0-a_0, k_1-a_1, \cdots, k_{n-1}-a_{n-1}, b_0, b_1, \cdots, b_m\right) \in \mathbb{R}^{n+m+1}$$

7.2. Схема №2. Параметризация вектора состояния

$$x = \sum_{i=0}^{n-1} \theta_{i+1} \left(I_{n\times n} s - A_0^* \right)^{-1} e_{n-i} [y] + \sum_{j=0}^{m} \theta_{j+1+n} \left(I_{n\times n} s - A_0^* \right)^{-1} e_{m+1-j} [u]$$

Параметризация с помощью наборов фильтров:

$$x = \sum_{i=1}^{n} \theta_i \xi_i^* + \sum_{j=1}^{m+1} \theta_{j+n} \nu_j^* , \qquad (7.8)$$

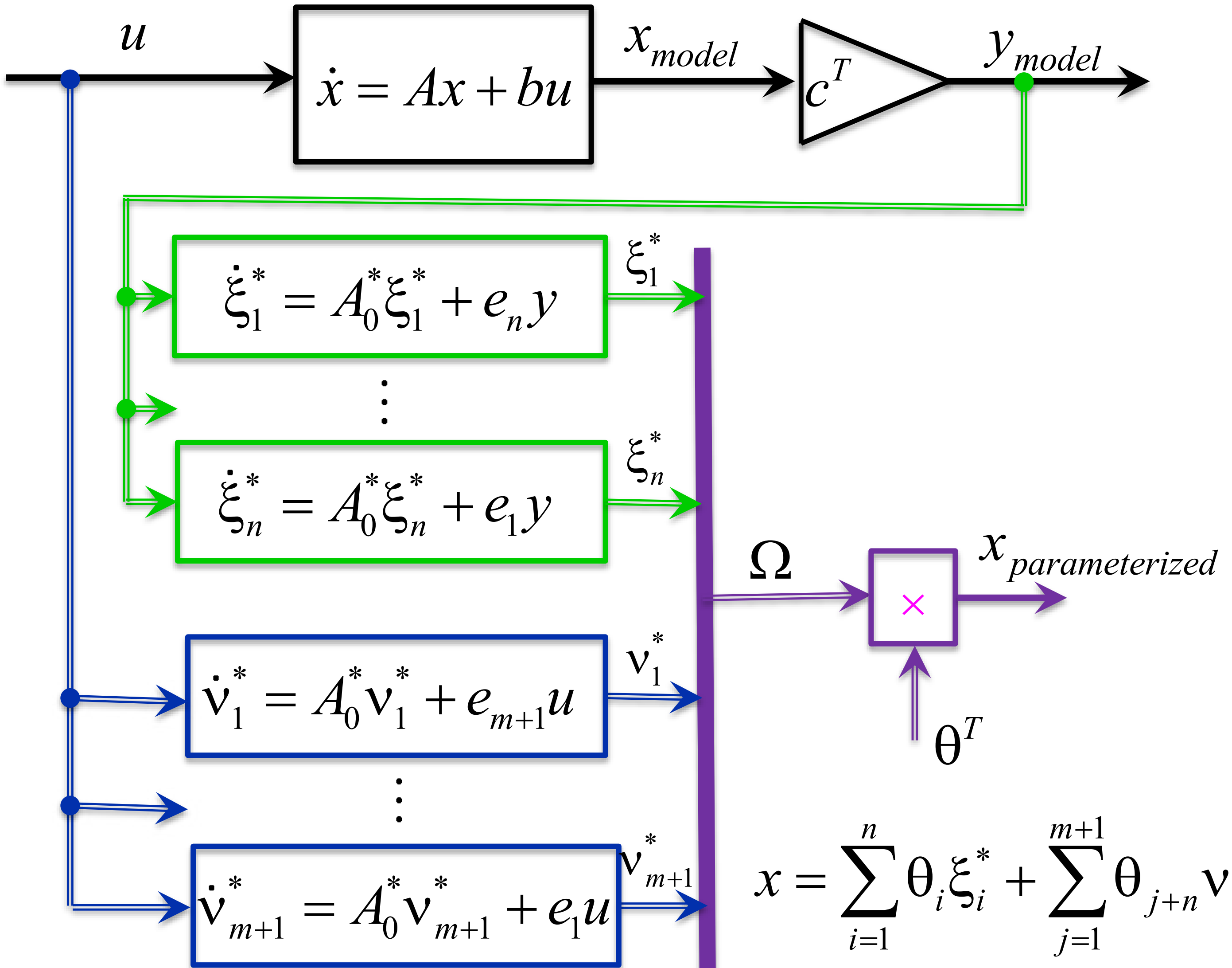
где $e_i = col\left(0,\ldots,0,\underset{i}{1},0,\ldots,0\right)$,

$$\begin{cases} \dot{\xi}_i^* = A_0^* \xi_i^* + e_{n+1-i} y, \quad i = \overline{1,n}, & (7.9) \\ \dot{\nu}_j^* = A_0^* \nu_j^* + e_{m+2-j} u, \ j = \overline{1,m+1}, & (7.10) \end{cases}$$

$$A_0^* = \begin{bmatrix} -k_{n-1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -k_{n-2} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -k_1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -k_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

$$\theta = col\left(k_0 - a_0, k_1 - a_1, \cdots, k_{n-1} - a_{n-1}, b_0, b_1, \cdots, b_m\right) \in \mathbb{R}^{n+m+1}$$

7.2. Схема №2. Параметризация вектора состояния



$$x = \sum_{i=1}^{n} \theta_i \xi_i^* + \sum_{j=1}^{m+1} \theta_{j+n} \nu_j^* = \Omega\theta$$

8. Адаптивный наблюдатель

Постановка задачи

Объект:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu, \\ y = c^T x, \end{cases} \tag{8.1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ – неизмеряемый вектор состояния известной размерности,

$u,\ y \in \mathbb{R}$ – измеряемые вход и выход соответственно,

$$A = \begin{bmatrix} -a_{n-1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_{n-2} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},\ b = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_m \\ \vdots \\ b_0 \end{bmatrix},\ c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

$a_i, b_j,\ i = \overline{0, n-1},\ j = \overline{0, m}$ – постоянные неизвестные параметры.

8. Адаптивный наблюдатель

Постановка задачи

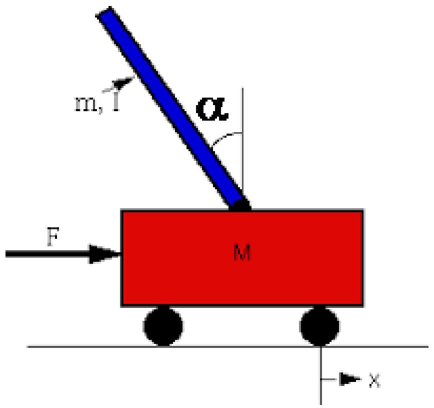
Объект:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu, \\ y = c^T x, \end{cases} \quad (8.1)$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ – неизмеряемый вектор состояния известной размерности,

$u,\ y \in \mathbb{R}$ – измеряемые вход и выход соответственно,

$$A = \begin{bmatrix} -a_{n-1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_{n-2} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},\ b = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_m \\ \vdots \\ b_0 \end{bmatrix},\ c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$



$\dot{\alpha} = ?$

$a_i, b_j,\ i = \overline{0, n-1},\ j = \overline{0, m}$ – постоянные неизвестные параметры.

Постановка задачи

Допущение 8.1. Условие согласования (общий случай): существует гурвицева матрица A_0^* и вектор неизвестных параметров θ такой, что

$$A_0^* = A + \theta c^T. \tag{8.2}$$

Постановка задачи

Допущение 8.1. Условие согласования (общий случай): существует гурвицева матрица A_0^* и вектор неизвестных параметров θ такой, что

$$A_0^* = A + \theta c^T. \tag{8.2}$$

Допущение 8.2. Сигнал $u(t)$ частотно богат, т.е. содержит достаточное для идентификации количество гармоник $(n+m+1)/2$.

Допущение 8.3. Матрица A гурвицева. Пара (A, c) полностью наблюдаема.

Постановка задачи

Допущение 8.1. Условие согласования (общий случай): существует гурвицева матрица A_0^* и вектор неизвестных параметров θ такой, что

$$A_0^* = A + \theta c^T. \tag{8.2}$$

Допущение 8.2. Сигнал $u(t)$ частотно богат, т.е. содержит достаточное для идентификации количество гармоник $(n+m+1)/2$.

Допущение 8.3. Матрица A гурвицева. Пара (A, c) полностью наблюдаема.

Цель: синтезировать наблюдатель, генерирующий вектор $\hat{x}(t)$:

$$\lim_{t\to\infty} \left\| x(t) - \hat{x}(t) \right\| = 0. \tag{8.3}$$

Решение

Проблемы

Недоступный измерению вектор x

Неизвестные параметры

Решение

1. Проблема неизмеряемого вектора состояния разрешается с помощью **Схемы №2 параметризации**

$$x = \sum_{i=1}^{n} \theta_i \xi_i^* + \sum_{j=1}^{m+1} \theta_{j+n} \nu_j^* ,$$

где $\theta = col\left(k_0 - a_0, k_1 - a_1, \cdots, k_{n-1} - a_{n-1}, b_0, b_1, \cdots, b_m\right) \in \mathbb{R}^{n+m+1}$,

$$\begin{cases} \dot{\xi}_i^* = A_0^* \xi_i^* + e_{n+1-i} y, \quad i = \overline{1, n}, & (8.5) \\ \dot{\nu}_j^* = A_0^* \nu_j^* + e_{m+2-j} u, j = \overline{1, m+1}, & (8.6) \end{cases}$$

$$e_i = col\Big(0, \ldots, 0, \underset{i}{1}, 0, \ldots, 0\Big),$$

$$A_0^* = \begin{bmatrix} -k_{n-1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -k_{n-2} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -k_1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -k_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

Решение

и подстановки вместо вектора θ вектор $\hat{\theta}$:

$$\hat{x} = \sum_{i=1}^{n} \hat{\theta}_i \xi_i^* + \sum_{j=1}^{m+1} \hat{\theta}_{j+n} \nu_j^* , \tag{8.4}$$

где $\theta = col\left(k_0 - a_0, k_1 - a_1, \cdots, k_{n-1} - a_{n-1}, b_0, b_1, \cdots, b_m\right) \in \mathbb{R}^{n+m+1}$,

$$\begin{cases} \dot{\xi}_i^* = A_0^* \xi_i^* + e_{n+1-i} y, \quad i = \overline{1,n}, & (8.5) \\ \dot{\nu}_j^* = A_0^* \nu_j^* + e_{m+2-j} u, j = \overline{1,m+1}, & (8.6) \end{cases}$$

$$e_i = col\left(0,\ldots,0, \underset{i}{1}, 0,\ldots,0\right),$$

$$A_0^* = \begin{bmatrix} -k_{n-1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -k_{n-2} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -k_1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -k_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

Решение

2. Проблема неизвестных параметров разрешается с помощью

$\boxed{\text{Схемы №1 параметризации}}$

$$y = \theta^T \omega,$$

где

$$\omega = col\left(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_{m+1}\right) \in \mathbb{R}^{n+m+1},$$

$$\begin{cases} \dot{\xi} = A_0 \xi + e_n y, & (8.7) \\ \dot{\nu} = A_0 \nu + e_n u, & (8.8) \end{cases}$$

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -k_0 & -k_1 & -k_2 & \cdots & -k_{n-1} \end{bmatrix}, e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Решение

2. Проблема неизвестных параметров разрешается с помощью

Схемы №1 параметризации

$$y = \theta^T \omega, \qquad (8.9)$$

где $\omega = col(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_{m+1}) \in \mathbb{R}^{n+m+1}$.

Ошибка идентификации (см. Пример 6.3):

$$e = y - \hat{\theta}^T \omega. \qquad (8.10)$$

Статическая модель ошибки ((8.9) в (8.10), см. лекцию 6.1):

$$e = \tilde{\theta}^T \omega, \qquad (8.11)$$

где $\tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta}$ – вектор параметрических ошибок.

Решение

Статическая модель ошибки мотивирует синтез алгоритма адаптации

$$\dot{\hat{\theta}} = \gamma\omega e \tag{8.12}$$

с положительным коэффициентом γ.

Решение

Настраиваемая параметризованная модель объекта

$$\hat{x} = \sum_{i=1}^{n} \hat{\theta}_i \xi_i^* + \sum_{j=1}^{m+1} \hat{\theta}_{j+n} \nu_j^* \qquad (8.4)$$

Фильтры

$$\begin{cases} \dot{\xi}_i^* = A_0^* \xi_i^* + e_{n+1-i} y, \quad i = \overline{1,n}, & (8.5) \\ \dot{\nu}_j^* = A_0^* \nu_j^* + e_{m+2-j} u, \; j = \overline{1,m+1} & (8.6) \end{cases}$$

Ошибка идентификации

$$e = y - \hat{\theta}^T \omega, \qquad (8.10)$$

$$\omega = col\left(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_{m+1}\right)$$

Фильтры

$$\begin{cases} \dot{\xi} = A_0 \xi + e_n y, & (8.7) \\ \dot{\nu} = A_0 \nu + e_n u, & (8.8) \end{cases}$$

Алгоритм адаптации

$$\dot{\hat{\theta}} = \gamma \omega e \qquad (8.12)$$

Решение

Настраиваемая параметризованная модель объекта

$$\hat{x} = \sum_{i=1}^{n} \hat{\theta}_i \xi_i^* + \sum_{j=1}^{m+1} \hat{\theta}_{j+n} \nu_j^* \qquad (8.4)$$

Фильтры

$$\begin{cases} \dot{\xi}_i^* = A_0^* \xi_i^* + e_{n+1-i} y, \quad i = \overline{1, n}, & (8.5) \\ \dot{\nu}_j^* = A_0^* \nu_j^* + e_{m+2-j} u, j = \overline{1, m+1} & (8.6) \end{cases}$$

Ошибка идентификации

$$e = y - \hat{\theta}^T \omega, \qquad (8.10)$$

$$\omega = col\left(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_{m+1}\right)$$

Фильтры

$$\begin{cases} \dot{\xi} = A_0 \xi + e_n y, & (8.7) \\ \dot{\nu} = A_0 \nu + e_n u, & (8.8) \end{cases}$$

Алгоритм адаптации

$$\dot{\hat{\theta}} = \gamma \omega e \qquad (8.12)$$

Домашняя работа. Упростить решение

Заключение

Свойства в замкнутой системе:

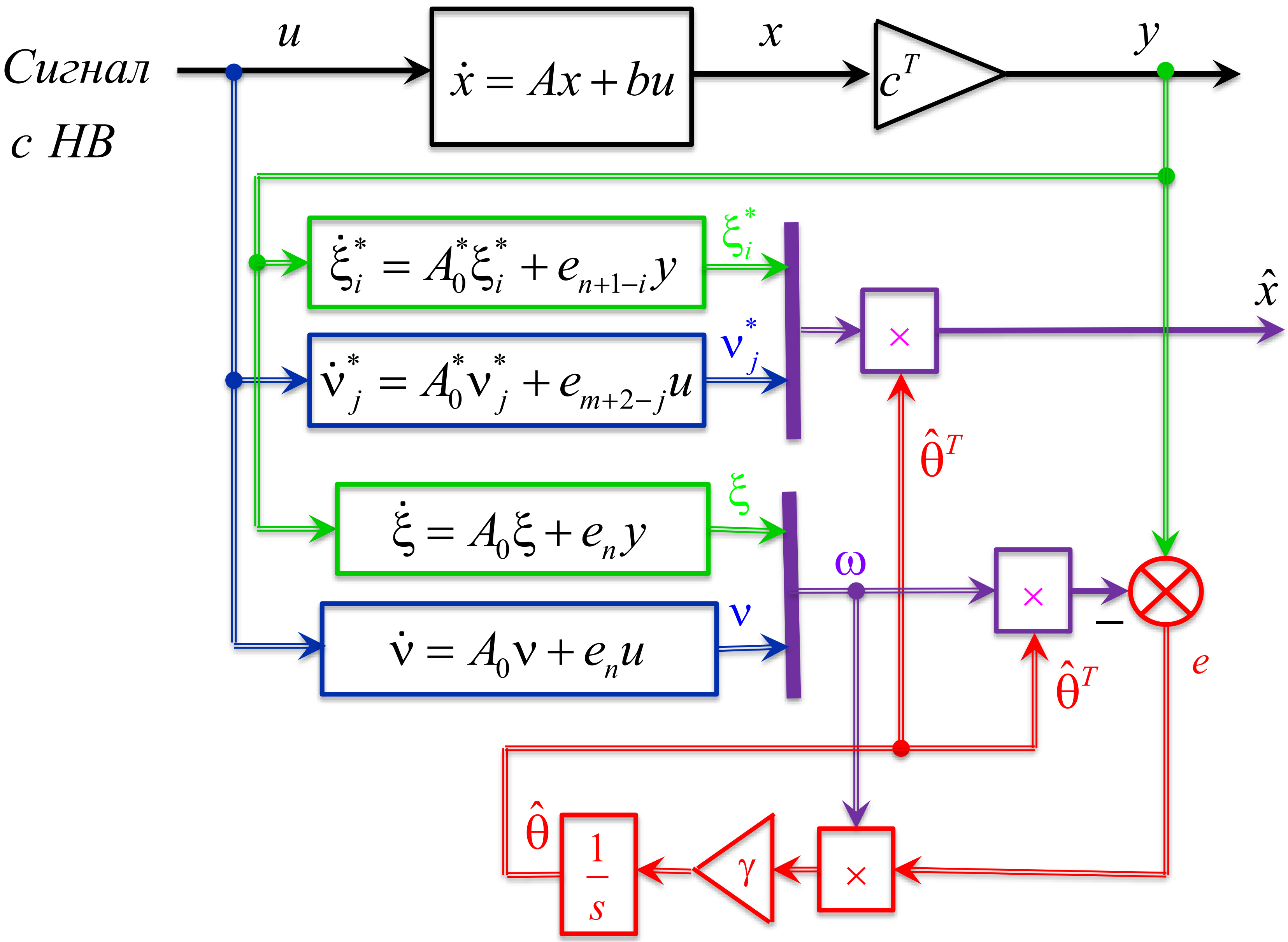
1. Если $u(t)$ ограничен, то все сигналы ограничены;
2. Если $u(t)$ содержит не менее $(n+m+1)/2$ гармоник, то нормы $\|x(t)-\hat{x}(t)\|$, $\|\tilde{\theta}(t)\|$ стремятся к нулю экспоненциально;
3. Если $u(t)$ содержит не менее $(n+m+1)/2$ гармоник, то существует оптимальное значение γ такое, что скорость сходимости $\|\tilde{\theta}(t)\| \to 0$ максимальна.

Заключение

Свойства в замкнутой системе:

1. Если $u(t)$ ограничен, то все сигналы ограничены;
2. Если $u(t)$ содержит не менее $(n+m+1)/2$ гармоник, то нормы $\|x(t)-\hat{x}(t)\|$, $\|\tilde{\theta}(t)\|$ стремятся к нулю экспоненциально;
3. Если $u(t)$ содержит не менее $(n+m+1)/2$ гармоник, то существует оптимальное значение γ такое, что скорость сходимости $\|\tilde{\theta}(t)\| \to 0$ максимальна.

Существенное практическое ограничение



Сигнал
с НВ
u
$\dot{x} = Ax + bu$
x
c^T
y
$\dot{\xi}_i^* = A_0^* \xi_i^* + e_{n+1-i} y$
ξ_i^*
$\dot{\nu}_j^* = A_0^* \nu_j^* + e_{m+2-j} u$
ν_j^*
$\times$
$\hat{x}$
$\hat{\theta}^T$
$\dot{\xi} = A_0 \xi + e_n y$
ξ
ω
$\dot{\nu} = A_0 \nu + e_n u$
ν
$\times$
$-$
$\hat{\theta}^T$
e
$\hat{\theta}$
$\frac{1}{s}$
γ
$\times$

Результаты моделирования

Объект

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-a_1 & 1\\ -a_0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}b_1\\ b_0\end{bmatrix}u$$

Неизвестные параметры

$$a_0=-1,\ a_1=-2,$$
$$b_0=3,\quad b_1=4$$

Фильтры

$$\begin{bmatrix}\dot{\xi}^*_{11}\\ \dot{\xi}^*_{12}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5 & 1\\ -6 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi^*_{11}\\ \xi^*_{12}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}y,\quad \begin{bmatrix}\dot{\nu}^*_{11}\\ \dot{\nu}^*_{12}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5 & 1\\ -6 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\nu^*_{11}\\ \nu^*_{12}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u,$$

$$\begin{bmatrix}\dot{\xi}^*_{21}\\ \dot{\xi}^*_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5 & 1\\ -6 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi^*_{21}\\ \xi^*_{22}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}y,\quad \begin{bmatrix}\dot{\nu}^*_{21}\\ \dot{\nu}^*_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5 & 1\\ -6 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\nu^*_{21}\\ \nu^*_{22}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}u,$$

$$\begin{bmatrix}\dot{\xi}_1\\ \dot{\xi}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -6 & -5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}y,\quad \begin{bmatrix}\dot{\nu}_1\\ \dot{\nu}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -6 & -5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\nu_1\\ \nu_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u$$

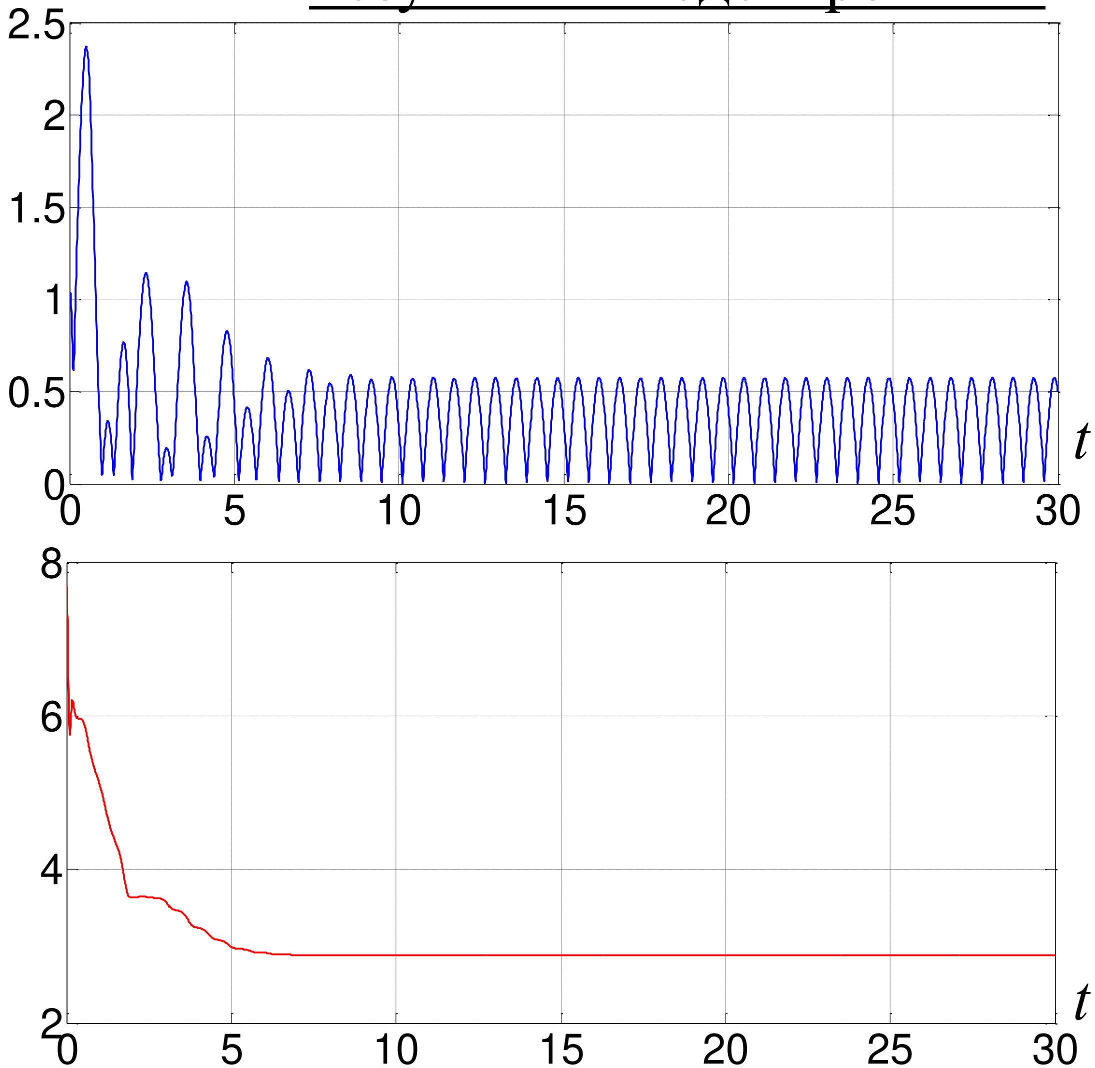
Коэффициент адаптации

$$\gamma=1000$$

Результаты моделирования

$$\|x(t)-\hat{x}(t)\|$$

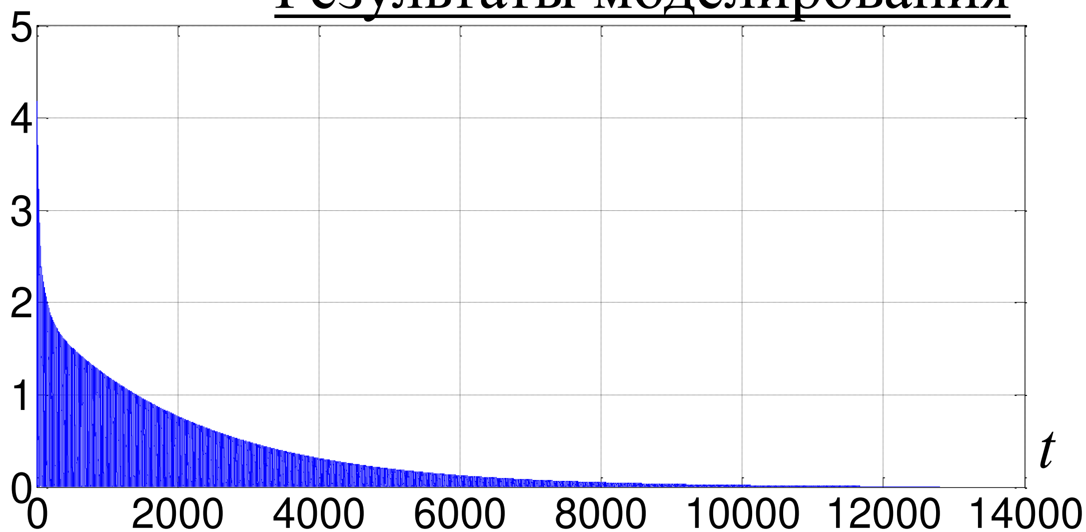
$$\|\tilde{\theta}(t)\|$$



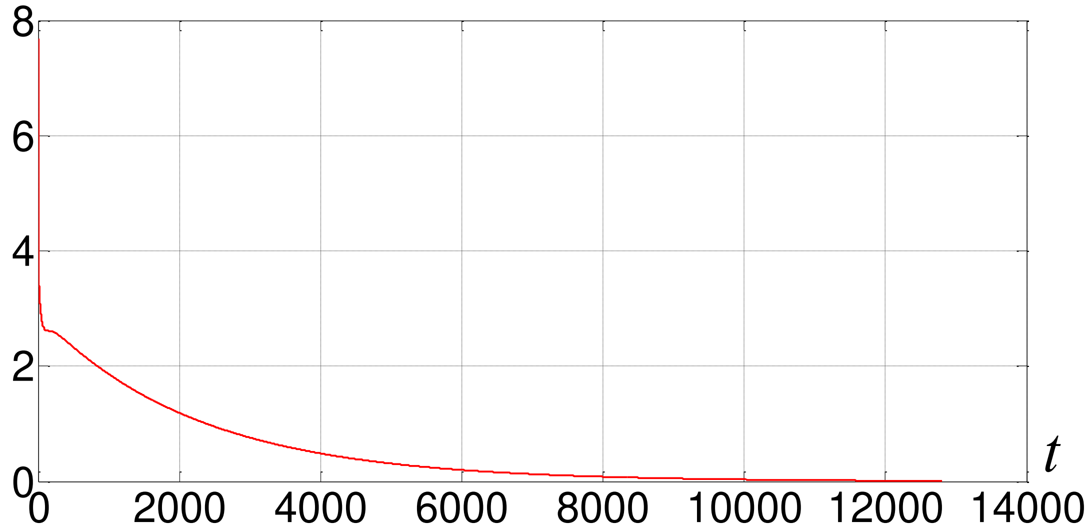
Входной сигнал: $u(t)=\sin(t)$

Результаты моделирования

$\|x(t)-\hat{x}(t)\|$



$\|\tilde{\theta}(t)\|$



Входной сигнал: $u(t)=\sin(t)+\cos(5t)$

9. Схема №3 параметризации линейных систем

Применение наблюдателей в при управлении по выходу может существенно ухудшить качество замкнутых систем ввиду зависимости идентификатора от условия неисчезающего возбуждения.

9. Схема №3 параметризации линейных систем

Применение наблюдателей в при управлении по выходу может существенно ухудшить качество замкнутых систем ввиду зависимости идентификатора от условия неисчезающего возбуждения.

В статье **K. Åstrom and B. Wittenmark, On Self-tuning Regulators, Automatica, Vol. 9, pp. 185-199, 1973** показано, что нет необходимости в идентификации параметров объекта. Вместо этого достаточно *напрямую* настраивать параметры регулятора с целью сведения ошибки управления к нулю без условия неисчезающего возмущения.

9. Схема №3 параметризации линейных систем

Объект:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_0 y = b_m u^{(m)} + \ldots + b_0 u, \tag{9.1}$$

где a_i, b_j, $i = \overline{0, n-1}$, $j = \overline{0, m}$ – постоянные параметры.

Передаточная функция:

$$y(t) = \frac{b_m s^m + \ldots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0}\left[u(t)\right] = \frac{b(s)}{a(s)}\left[u(t)\right] \tag{9.2}$$

с взаимно простыми полиномами $a(s)$, $b(s)$.

Временно предположим, что начальные условия $y(0), \ldots, y^{(n-1)}(0)$ нулевые.

9. Схема №3 параметризации линейных систем

Лемма (**R. V. Monopoli, 1974**) Существует постоянный вектор $\theta \in \mathbb{R}^{2n-1}$

$$y(t) = \frac{1}{\delta_M(s)}\left[\theta^T \omega(t) + b_m u(t)\right], \qquad (9.3)$$

где $\omega = col(y, \nu_1, \nu_2) \in \mathbb{R}^{2n-1}$ – регрессор,

$\delta_M(s)$ – произвольный гурвицевый полином порядка $(n-m)$, совпадающего с относительной степенью объекта,

$\nu_1, \nu_2 \in \mathbb{R}^{n-1}$ – векторы состояния фильтров

$$\begin{cases} \dot{\nu}_1 = \Lambda \nu_1 + e_{n-1} y, & (9.4) \\ \dot{\nu}_2 = \Lambda \nu_2 + e_{n-1} u, & (9.5) \end{cases} \quad \Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\gamma_0 & -\gamma_1 & -\gamma_2 & \cdots & -\gamma_{n-2} \end{bmatrix}, \; e_{n-1} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

10. Адаптивное управление с эталонной моделью

Постановка задачи

Объект

$$y(t)=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\ldots+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+a_{n-2}s^{n-2}+\ldots+a_0}\left[u(t)\right]=\frac{b(s)}{a(s)}\left[u(t)\right] \qquad (10.1)$$

with **unknown** parameters $a_i, b_j,\ i=\overline{0,n-1},\ j=\overline{0,m}$, unmeasurable state , the measurable input u and output y, the known order n and the relative degree $\rho=n-m$.

10. Адаптивное управление с эталонной моделью

Постановка задачи

Объект:

$$y(t)=\frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1}+\ldots+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+a_{n-2}s^{n-2}+\ldots+a_0}\left[u(t)\right]=\frac{b(s)}{a(s)}\left[u(t)\right] \qquad (10.1)$$

with **unknown** parameters $a_i, b_j,\ i=\overline{0,n-1},\ j=\overline{0,m}$, unmeasurable state , the measurable input u and output y, the known order n and the relative degree $\rho=n-m$.

The Цель: is to design a control $u(t)$ such that

$$\lim_{t\to\infty}\left\|y_M(t)-y(t)\right\|=0, \qquad (10.2)$$

где y_M is the output of reference model with PWC reference signal g:

$$y_M^{\rho}+a_{M\,n-1}y_M^{\rho-1}+\ldots+a_{M\,0}y_M=a_{M\,0}g \qquad (10.3)$$

10. Адаптивное управление с эталонной моделью

Постановка задачи

Объект:

$$y(t) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + \ldots + a_0}\left[u(t)\right] = \frac{b(s)}{a(s)}\left[u(t)\right] \qquad (10.1)$$

with **unknown** parameters $a_i, b_j,\ i = \overline{0, n-1},\ j = \overline{0, m}$, unmeasurable state , the measurable input u and output y , the known order n and the relative degree $\rho = n - m$.

The Цель: is to design a control $u(t)$ such that

$$\lim_{t \to \infty} \left\| y_M(t) - y(t) \right\| = 0, \qquad (10.2)$$

где y_M is the output of reference model with PWC reference signal g:

$$y_M(t) = \frac{a_{M0}}{s^\rho + a_{M\rho-1} s^{\rho-1} + a_{M\rho-2} s^{\rho-2} + \cdots + a_{M0}}\left[g(t)\right] = \frac{a_{M0}}{\delta_M(s)}\left[g(t)\right] \qquad (10.3)$$

Постановка задачи

Допущение 10.1. Объект полностью управляем;

Допущение 10.2. Объект минимально фазовый, т.е. полином

$$b(s) = b_m s^m + \ldots + b_1 s + b_0 \text{ гурвицевый;}$$

Допущение 10.3. b_m известен (для простоты изложения).

Решение

Проблемы

Неизмеримые

$\dot{y}, \ldots, y^{(n-1)}$

Неизвестные параметры

Решение

1. Проблема неизмеримого состояния.

Ошибка управления:

$$\varepsilon = y_M - y \tag{10.4}$$

Решение

1. Проблема неизмеримого состояния.

Ошибка управления:

$$\varepsilon = y_M - y \tag{10.4}$$

Результат леммы параметризации №3 и подстановки y из (9.3) и y_M из (10.3):

$$y = \frac{1}{\delta_M(s)}\left[\theta^T\omega + b_m u\right],$$

$$y_M = \frac{a_{M0}}{\delta_M(s)}[g]$$

Решение

1. Проблема неизмеримого состояния.

Ошибка управления:

$$\varepsilon = y_M - y \tag{10.4}$$

Результат леммы параметризации №3 и подстановки y из (9.3) и y_M из (10.3):

$$\varepsilon = \frac{a_{M0}}{\delta_M(s)}[g] - \frac{1}{\delta_M(s)}\left[\theta^T \omega + b_m u\right],$$

Решение

1. Проблема неизмеримого состояния.

Ошибка управления:

$$\varepsilon = y_M - y \tag{10.4}$$

Результат леммы параметризации №3 и подстановки y из (9.3) и y_M из (10.3):

$$\varepsilon = \frac{a_{M0}}{\delta_M(s)}[g] - \frac{1}{\delta_M(s)}\left[\theta^T\omega + b_m u\right],$$

$$\Downarrow$$

$$\varepsilon = \frac{1}{\delta_M(s)}\left[a_{M0}g - \theta^T\omega - b_m u\right] \tag{10.5}$$

См. также Пример 6.6.

Решение

2. Проблема неизвестных параметров.

Уравнение ошибки

$$\varepsilon = \frac{1}{\delta_M(s)}\left[a_{M0}g - \theta^T\omega - b_m u\right]$$

Принцип непосредственной компенсации

Настраиваемое управление

$$u = \frac{1}{b_m}\left(a_{M0}g - \hat{\theta}^T\omega\right)$$

$$\Downarrow$$

Модель ошибки

$$\varepsilon = -\frac{1}{\delta_M(s)}\left[\tilde{\theta}^T\omega\right]$$

R. V. Monopoli, 1974,

A. Feuer and A.S. Morse, 1978

$$u = \frac{1}{b_m}\delta_M(s)\left[\frac{a_{M0}}{\delta_M(s)}[g] - \hat{\theta}^T\bar{\omega}\right]$$

$$\Downarrow$$

$$\varepsilon = -\tilde{\theta}^T\bar{\omega},$$

$$\bar{\omega} = \frac{1}{\delta_M(s)}[\omega]$$

A. S. Morse, 1994

Алгоритм с расширенной ошибкой

2. Проблема неизвестных параметров.

Уравнение ошибки:

$$\varepsilon = \frac{1}{\delta_M(s)}\left[a_{M0}g - \theta^T\omega - b_m u\right] \tag{10.5}$$

Настраиваемый регулятор:

$$u = \frac{1}{b_m}\left(a_{M0}g - \hat{\theta}^T\omega\right) \tag{10.6}$$

Динамическая модель ошибки (результат подстановки (10.6) в (10.5), см. лекцию 6.3):

$$\varepsilon = -\frac{1}{\delta_M(s)}\left[\tilde{\theta}^T\omega\right]. \tag{10.7}$$

Алгоритм с расширенной ошибкой

2. Проблема неизвестных параметров.

Модель (10.7) мотивирует синтез *алгоритма адаптации с расширенной ошибкой* (см. лекцию 6.3)

$$\dot{\hat{\theta}} = -\gamma\bar{\omega}\hat{\varepsilon}, \tag{10.8}$$

$$\hat{\varepsilon} = \varepsilon + \hat{\theta}^T\bar{\omega} - \frac{1}{\delta_M(s)}\left[\hat{\theta}^T\omega\right], = -\tilde{\theta}^T\bar{\omega} \tag{10.9}$$

$$\bar{\omega} = \frac{1}{\delta_M(s)}[\omega],$$

где γ – нормированный коэффициент адаптации, определяемый как

$$\gamma(t) = \frac{\gamma_0}{1+\bar{\omega}^T\bar{\omega}}, \quad \gamma_0 = const > 0. \tag{10.10}$$

Алгоритм с расширенной ошибкой

Настраиваемый регулятор
$$u = \frac{1}{b_m}\left(a_{M0}g - \hat{\theta}^T\omega\right) \qquad (10.6)$$

Регрессор
$$\omega = col(y, \nu_1, \nu_2)$$

Фильтры
$$\begin{cases} \dot{\nu}_1 = \Lambda\nu_1 + e_{n-1}y, & (9.4) \\ \dot{\nu}_2 = \Lambda\nu_2 + e_{n-1}u & (9.5) \end{cases}$$

Алгоритм адаптации
$$\dot{\hat{\theta}} = -\gamma\bar{\omega}\hat{\varepsilon} \qquad (10.8)$$

Расширенная ошибка
$$\hat{\varepsilon} = \varepsilon + \hat{\theta}^T\bar{\omega} - \frac{1}{\delta_M(s)}\left[\hat{\theta}^T\omega\right] \qquad (10.9)$$

Ошибка
$$\varepsilon = y_M - y$$

Фильтрованный регрессор
$$\bar{\omega} = \frac{1}{\delta_M(s)}[\omega]$$

Нормированный коэффициент адаптации
$$\gamma(t) = \frac{\gamma_0}{1 + \bar{\omega}^T(t)\bar{\omega}(t)}, \quad \gamma_0 = const > 0. \qquad (10.10)$$

Алгоритм с расширенной ошибкой

Настраиваемый регулятор $$u = \frac{1}{b_m}\left(a_{M0}g - \hat{\theta}^T\omega\right) \qquad (10.6)$$

Регрессор $$\omega = col(y, \nu_1, \nu_2)$$

Фильтры $$\begin{cases} \dot{\nu}_1 = \Lambda\nu_1 + e_{n-1}y, & (9.4) \\ \dot{\nu}_2 = \Lambda\nu_2 + e_{n-1}u & (9.5) \end{cases}$$

Алгоритм адаптации $$\dot{\hat{\theta}} = -\gamma\bar{\omega}\hat{\varepsilon} \qquad (10.8)$$

Расширенная ошибка $$\hat{\varepsilon} = \varepsilon + \hat{\theta}^T\bar{\omega} - \frac{1}{\delta_M(s)}\left[\hat{\theta}^T\omega\right] \qquad (10.9)$$

Ошибка $$\varepsilon = y_M - y$$

Фильтрованный регрессор $$\bar{\omega} = \frac{1}{\delta_M(s)}[\omega]$$

Нормированный коэффициент адаптации $$\gamma(t) = \frac{\gamma_0}{1 + \bar{\omega}^T(t)\bar{\omega}(t)} \qquad (10.10)$$

Алгоритм с расширенной ошибкой

Применим лемму о перестановке

Алгоритм адаптации $$\dot{\hat{\theta}} = -\gamma\bar{\omega}\hat{\varepsilon} \qquad (10.8)$$

Расширенная ошибка $$\hat{\varepsilon} = \varepsilon + \hat{\theta}^T\bar{\omega} - \frac{1}{\delta_M(s)}\left[\hat{\theta}^T\omega\right] \qquad (10.9)$$

Фильтрованный регрессор $$\bar{\omega} = \frac{1}{\delta_M(s)}[\omega]$$

Нормализованный коэффициент адаптации $$\gamma(t) = \frac{\gamma_0}{1+\bar{\omega}^T(t)\bar{\omega}(t)} \qquad (10.10)$$

Алгоритм с расширенной ошибкой

Применим лемму о перестановке

Алгоритм адаптации $$\dot{\hat{\theta}} = -\gamma\bar{\omega}\hat{\varepsilon} \qquad (10.8)$$

Расширенная ошибка $$\hat{\varepsilon} = \varepsilon + W_c(s)\left[W_b(s)\left[\omega^T\right]\dot{\hat{\theta}}\right] \qquad (10.9)$$

$$W_C(s) = c^T\left(Is - A\right)^{-1},\ W_b(s) = \left(Is - A\right)^{-1} b$$

Фильтрованный регрессор $$\bar{\omega} = \frac{1}{\delta_M(s)}[\omega]$$

Нормализованный коэффициент адаптации $$\gamma(t) = \frac{\gamma_0}{1 + \bar{\omega}^T(t)\bar{\omega}(t)} \qquad (10.10)$$

Алгоритм с расширенной ошибкой

Применим лемму о перестановке

Алгоритм адаптации $$\dot{\hat{\theta}} = -\gamma\bar{\omega}\hat{\varepsilon} \quad (10.8)$$

Расширенная ошибка $$\hat{\varepsilon} = \varepsilon + W_c(s)\left[W_b(s)\left[\omega^T\right]\dot{\hat{\theta}}\right] \quad (10.9)$$

$$W_C(s) = c^T\left(Is - A\right)^{-1}, \; W_b(s) = \left(Is - A\right)^{-1} b$$

Фильтрованный регрессор $$\bar{\omega} = \frac{1}{\delta_M(s)}[\omega]$$

Нормализованный коэффициент адаптации $$\gamma(t) = \frac{\gamma_0}{1 + \bar{\omega}^T(t)\bar{\omega}(t)} \quad (10.10)$$

Алгоритм с расширенной ошибкой

Расширенная ошибка

$$\hat{\varepsilon} = \varepsilon - \gamma_0 W_c(s)\left[W_b(s)\left[\omega^T\right]\frac{\bar{\omega}\hat{\varepsilon}}{1+\bar{\omega}^T\bar{\omega}}\right] \quad (10.9)$$

$$W_C(s) = c^T\left(Is - A\right)^{-1},\ W_b(s) = \left(Is - A\right)^{-1} b$$

Фильтрованный регрессор

$$\bar{\omega} = \frac{1}{\delta_M(s)}[\omega]$$

Алгоритм с расширенной ошибкой

Стремится к нулю

Ограничен

Расширенная ошибка

$$\hat{\varepsilon} = \varepsilon - \gamma_0 W_c(s)\left[W_b(s)\left[\omega^T\right]\frac{\bar{\omega}\hat{\varepsilon}}{1+\bar{\omega}^T\bar{\omega}}\right] \quad (10.9)$$

$$W_C(s) = c^T\left(Is - A\right)^{-1},\ W_b(s) = \left(Is - A\right)^{-1} b$$

Фильтрованный регрессор

$$\bar{\omega} = \frac{1}{\delta_M(s)}[\omega]$$

Алгоритм с расширенной ошибкой. Заключение

Свойства замкнутой системы (см. лекцию 6.3):

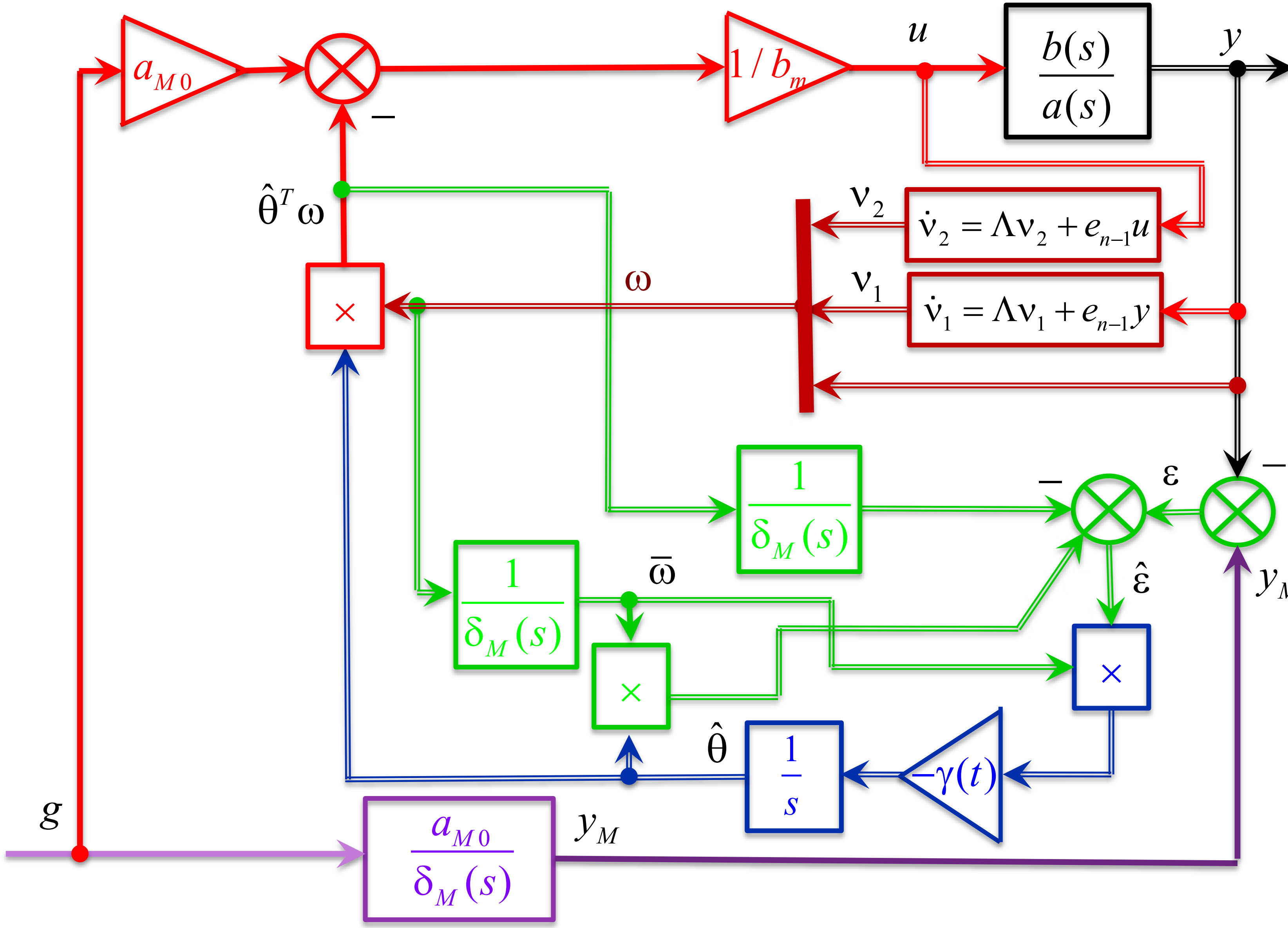
1. Все сигналы в системе ограничены;
2. Ошибка $\hat{\varepsilon}(t)$ стремится к нулю асимптотически;
3. Норма $\|\tilde{\theta}(t)\|$ стремится к нулю экспоненциально, если $\bar{\omega}$ удовлетворяет условию неисчезающего возбуждения;
4. Ошибка $\varepsilon(t)$ стремится к нулю асимптотически;

Алгоритм с расширенной ошибкой. Заключение

Свойства замкнутой системы (см. лекцию 6.3):

1. Все сигналы в системе ограничены;
2. Ошибка $\hat{\varepsilon}(t)$ стремится к нулю асимптотически;
3. Норма $\|\tilde{\theta}(t)\|$ стремится к нулю экспоненциально, если $\bar{\omega}$ удовлетворяет условию неисчезающего возбуждения;
4. Ошибка $\varepsilon(t)$ стремится к нулю асимптотически;
5. Скорость параметрической сходимости, а значит и сходимости по ошибке управления $\varepsilon(t)$, ограничена из-за нормирующего множителя.

$$\dot{\tilde{\theta}} = -\gamma_0 \frac{\bar{\omega}\bar{\omega}^T}{1+\bar{\omega}^T\bar{\omega}}\tilde{\theta}$$


a_{M0}
$1/b_m$
u
$\frac{b(s)}{a(s)}$
y
$-$
$\hat{\theta}^T\omega$
ν_2
$\dot{\nu}_2 = \Lambda\nu_2 + e_{n-1}u$
ν_1
$\dot{\nu}_1 = \Lambda\nu_1 + e_{n-1}y$
ω
$\times$
$\frac{1}{\delta_M(s)}$
$-$
ε
$-$
$\bar{\omega}$
$\hat{\varepsilon}$
y_M
$\frac{1}{\delta_M(s)}$
$\times$
$\times$
$\hat{\theta}$
$\frac{1}{s}$
$-\gamma(t)$
g
$\frac{a_{M0}}{\delta_M(s)}$
y_M

Результаты моделирования

См. пример в лекции 6.3

Алгоритм высокого порядка

2. Проблема неизвестных параметров.

Уравнение ошибки (схема параметризации №3):

$$\varepsilon = \frac{1}{\delta_M(s)}\left[a_{M0}g - \theta^T\omega - b_m u\right] \tag{10.11}$$

Настраиваемый регулятор:

$$u = \frac{1}{b_m}\delta_M(s)\left[\frac{a_{M0}}{\delta_M(s)}[g] - \hat{\theta}^T\bar{\omega}\right] \tag{10.12}$$

Статическая модель ошибки ((10.12) в (10.11)):

(см. Лекция 6.1)

$$\varepsilon = -\tilde{\theta}^T\bar{\omega} \tag{10.13}$$

где $\bar{\omega} = 1/\delta_M(s)[\omega]$ – фильтрованный регрессор.

Немедленно возникают две проблемы

Управление зависит от старших производных $\dot{\hat{\theta}},\ldots,\hat{\theta}^{(\rho-1)}$, скрытых в

$$\delta_M(s)\left[\hat{\theta}^T\bar{\omega}\right]$$

$$u=\frac{1}{b_m}\delta_M(s)\left[\frac{a_{M0}}{\delta_M(s)}[g]-\hat{\theta}^T\bar{\omega}\right]$$

Немедленно возникают две проблемы

Управление зависит от старших производных $\dot{\hat{\theta}},\ldots,\hat{\theta}^{(\rho-1)}$, скрытых в

$$\delta_M(s)\left[\hat{\theta}^T\overline{\omega}\right]$$

$$u=\frac{1}{b_m}\delta_M(s)\left[\frac{a_{M0}}{\delta_M(s)}[g]-\hat{\theta}^T\overline{\omega}\right]$$

Алгоритм адаптации

$$\dot{\hat{\theta}}=-\gamma\overline{\omega}\varepsilon,$$

основанный на модели ошибки $\varepsilon=-\tilde{\theta}^T\overline{\omega}$, не способен генерировать $\dot{\hat{\theta}},\ldots,\hat{\theta}^{(\rho-1)}$ для управления

Алгоритм высокого порядка

2. Проблема неизвестных параметров.

Алгоритм высокого порядка **(A. S. Morse, 1994)**

$$\begin{cases} \dot{\hat{\psi}}_i = -\bar{\omega}_i \varepsilon, & (10.14) \\ \dot{\eta}_i = (1+\mu\bar{\omega}^T\bar{\omega})(\bar{A}\eta_i + \bar{b}\hat{\psi}_i), & (10.15) \\ \hat{\theta}_i = \bar{c}^T\eta_i, & (10.16) \end{cases}$$

где $\bar{\omega}_i$, $\hat{\psi}_i$, $\hat{\theta}_i$ $i = \overline{1, 2n-1}$ – элементы векторов $\bar{\omega}$, $\hat{\psi}$, $\hat{\theta}$,

$$\mu \geq \frac{(2n-1)}{2}\left\|\bar{c} - P\bar{A}^{-1}\bar{b}\right\|^2$$

– константа, $P = P^T \succ 0$ – решение уравнения Ляпунова

$$\bar{A}^T P + P\bar{A} = -2I_{\rho-1\times\rho-1},$$

в котором тройка $(\bar{c}^T, \bar{A}, \bar{b})$ – минимальная реализация $\dfrac{\alpha(0)}{\alpha(s)}$.

Алгоритм высокого порядка

2. Проблема неизвестных параметров.

Алгоритм высокого порядка **(A. S. Morse, 1994)**

$$\begin{cases} \dot{\hat{\psi}}_i = -\bar{\omega}_i \varepsilon, & (10.14) \\ \dot{\eta}_i = (1+\mu\bar{\omega}^T\bar{\omega})(\bar{A}\eta_i + \bar{b}\hat{\psi}_i), & (10.15) \\ \hat{\theta}_i = \bar{c}^T\eta_i, & (10.16) \end{cases}$$

Так как $\bar{c}^T\bar{A}^{i-1}\bar{b} = 0,\ i = \overline{1,\rho}$, то получаем для случая $\rho = 2$:

$$\bar{c}^T\bar{A}^{-1}\bar{b} = -1 \quad \dot{\hat{\theta}}_i = \bar{c}^T\dot{\eta}_i = \bar{c}^T(1+\mu\bar{\omega}^T\bar{\omega})(\bar{A}\eta_i + \bar{b}\hat{\psi}_i)$$

$$\ddot{\hat{\theta}}_i = 2\bar{c}^T\mu\bar{\omega}^T\dot{\bar{\omega}}(\bar{A}\eta_i + \bar{b}\hat{\psi}_i) + \bar{c}^T(1+\mu\bar{\omega}^T\bar{\omega})(\bar{A}\dot{\eta}_i + \bar{b}\dot{\hat{\psi}}_i) =$$

$$2\bar{c}^T\mu\bar{\omega}^T\dot{\bar{\omega}}(\bar{A}\eta_i + \bar{b}\hat{\psi}_i) + (1+\mu\bar{\omega}^T\bar{\omega})^2(\bar{c}^T\bar{A}^2\eta_i + \bar{c}^T\bar{A}\bar{b}\hat{\psi}_i) - (1+\mu\bar{\omega}^T\bar{\omega})\bar{c}^T\bar{b}\bar{\omega}_i\varepsilon$$

Привет из классической теории управления

Алгоритм высокого порядка

Замечание 10.1. Пояснение к работе алгоритма

Введем в рассмотрение вспомогательный сигнал

$$z_i = \eta_i + \bar{A}^{-1}\bar{b}\hat{\psi}_i \tag{10.17}$$

Алгоритм высокого порядка

Замечание 10.1. Пояснение к работе алгоритма

Введем в рассмотрение вспомогательный сигнал

$$z_i = \eta_i + \bar{A}^{-1}\bar{b}\hat{\psi}_i \tag{10.17}$$

и рассчитаем его производную

$$\dot{z}_i = \dot{\eta}_i + \bar{A}^{-1}\bar{b}\dot{\hat{\psi}}_i$$

$$\dot{\eta}_i = (1+\mu\bar{\omega}^T\bar{\omega})(\bar{A}\eta_i + \bar{b}\hat{\psi}_i) \quad (10.15) \qquad \dot{\hat{\psi}}_i = -\bar{\omega}_i\varepsilon \quad (10.14)$$

Алгоритм высокого порядка

Замечание 10.1. Пояснение к работе алгоритма

Введем в рассмотрение вспомогательный сигнал

$$z_i = \eta_i + \bar{A}^{-1}\bar{b}\hat{\psi}_i \tag{10.17}$$

и рассчитаем его производную

$$\dot{z}_i = (1+\mu\bar{\omega}^T\bar{\omega})(\bar{A}\eta_i + \bar{b}\hat{\psi}_i) - \bar{A}^{-1}\bar{b}\bar{\omega}_i\varepsilon$$

Алгоритм высокого порядка

Замечание 10.1. Пояснение к работе алгоритма

Введем в рассмотрение вспомогательный сигнал

$$z_i = \eta_i + \bar{A}^{-1}\bar{b}\hat{\psi}_i \tag{10.17}$$

и рассчитаем его производную

$$\dot{z}_i = (1 + \mu\bar{\omega}^T\bar{\omega}\ )\bar{A}z_i - \bar{A}^{-1}\bar{b}\bar{\omega}_i\varepsilon. \tag{10.18}$$

Алгоритм высокого порядка

Замечание 10.1. Пояснение к работе алгоритма

Введем в рассмотрение вспомогательный сигнал

$$z_i = \eta_i + \bar{A}^{-1}\bar{b}\hat{\psi}_i$$

и рассчитаем его производную

$$\dot{z}_i = (1+\mu\bar{\omega}^T\bar{\omega})\bar{A}z_i - \bar{A}^{-1}\bar{b}\bar{\omega}_i\varepsilon.$$

Домножим (10.17) на $\bar{c}^T$ и получим

$$\bar{c}^T z_i = \underbrace{\bar{c}^T\eta_i}_{} + \underbrace{\bar{c}^T\bar{A}^{-1}\bar{b}}_{}\hat{\psi}_i$$

$$\hat{\theta}_i = \bar{c}^T\eta_i \qquad (10.16)$$

$$\bar{c}^T\bar{A}^{-1}\bar{b} = -\alpha(0)/\alpha(s)\Big|_{s=0} = -1$$

Привет из классической теории управления

Алгоритм высокого порядка

Замечание 10.1. Пояснение к работе алгоритма

Введем в рассмотрение вспомогательный сигнал

$$z_i = \eta_i + \bar{A}^{-1}\bar{b}\hat{\psi}_i$$

и рассчитаем его производную

$$\dot{z}_i = (1+\mu\bar{\omega}^T\bar{\omega}\;)\bar{A}z_i - \bar{A}^{-1}\bar{b}\bar{\omega}_i\varepsilon.$$

Домножим (10.17) на $\bar{c}^T$ и получим

$$\bar{c}^T z_i = \hat{\theta}_i - \hat{\psi}_i$$

Алгоритм высокого порядка

Замечание 10.1. Пояснение к работе алгоритма

Введем в рассмотрение вспомогательный сигнал

$$z_i = \eta_i + \bar{A}^{-1}\bar{b}\hat{\psi}_i$$

и рассчитаем его производную

$$\dot{z}_i = (1 + \mu\bar{\omega}^T\bar{\omega}\ )\bar{A}z_i - \bar{A}^{-1}\bar{b}\bar{\omega}_i\varepsilon.$$

Домножим (10.17) на $\bar{c}^T$ и получим

$$\bar{c}^T z_i = \hat{\theta}_i - \hat{\psi}_i$$

$$\tilde{\theta}_i = \theta_i - \hat{\theta}_i \qquad \tilde{\psi}_i = \theta_i - \hat{\psi}_i$$

Алгоритм высокого порядка

Замечание 10.1. Пояснение к работе алгоритма

Введем в рассмотрение вспомогательный сигнал

$$z_i = \eta_i + \bar{A}^{-1}\bar{b}\hat{\psi}_i$$

и рассчитаем его производную

$$\dot{z}_i = (1 + \mu\bar{\omega}^T\bar{\omega}\ )\bar{A}z_i - \bar{A}^{-1}\bar{b}\bar{\omega}_i\varepsilon.$$

Домножим (10.17) на $\bar{c}^T$ и получим

$$\bar{c}^T z_i = \tilde{\psi}_i - \tilde{\theta}_i$$

Алгоритм высокого порядка

Замечание 10.1. Пояснение к работе алгоритма

Введем в рассмотрение вспомогательный сигнал

$$z_i = \eta_i + \bar{A}^{-1}\bar{b}\hat{\psi}_i \tag{10.17}$$

и рассчитаем его производную

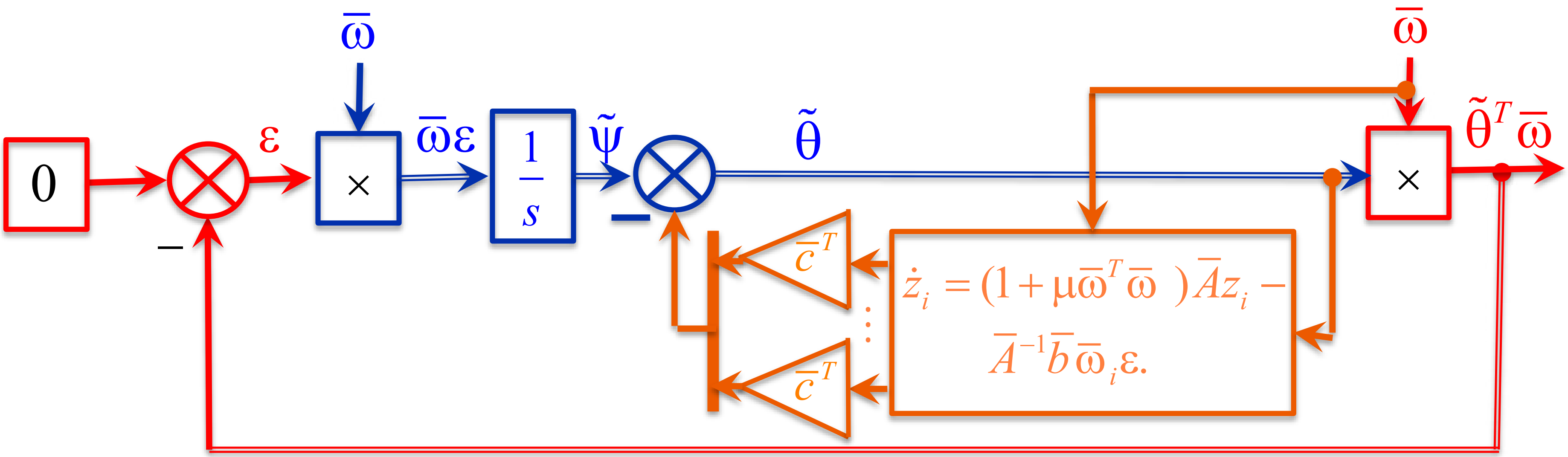
$$\dot{z}_i = (1+\mu\bar{\omega}^T\bar{\omega}\ )\bar{A}z_i - \bar{A}^{-1}\bar{b}\bar{\omega}_i\varepsilon. \tag{10.18}$$

Домножим (10.17) на $\bar{c}^T$ и получим

$$\tilde{\theta}_i = \tilde{\psi}_i - \bar{c}^T z_i \tag{10.19}$$

Алгоритм высокого порядка

Замечание 10.1. Пояснение к работе алгоритма



Модель ошибки $\varepsilon = -\tilde{\theta}^T\bar{\omega}$ (10.13)

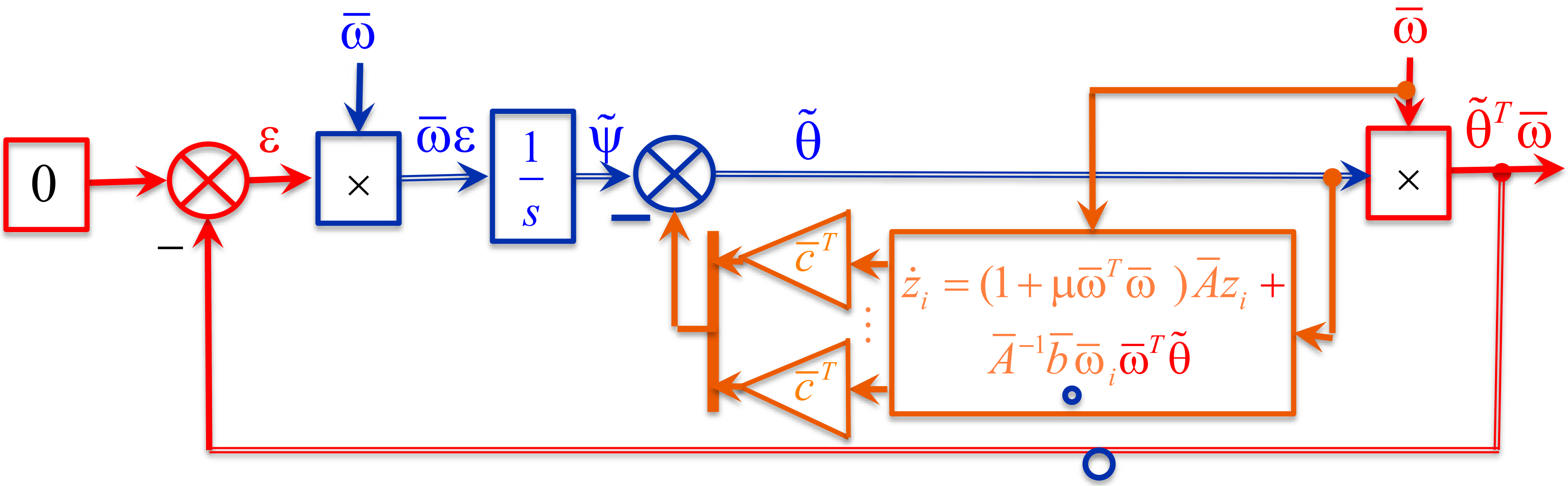
Вспомогательная динамика $\dot{z}_i = (1+\mu\bar{\omega}^T\bar{\omega})\bar{A}z_i - \bar{A}^{-1}\bar{b}\bar{\omega}_i\varepsilon$ (10.18)

Модель параметрической ошибки $\tilde{\theta}_i = \tilde{\psi}_i - \bar{c}^T z_i$ (10.19)

$\dot{\tilde{\psi}}_i = \bar{\omega}_i\varepsilon$ (10.14)

Алгоритм высокого порядка

Замечание 10.1. Пояснение к работе алгоритма



Модель ошибки $\varepsilon = -\tilde\theta^T\bar\omega$ (10.13)

Вспомогательная динамика $\dot z_i = (1+\mu\bar\omega^T\bar\omega)\bar A z_i - \bar A^{-1}\bar b\bar\omega_i\varepsilon$ (10.18)

Модель параметрической ошибки $\tilde\theta_i = \tilde\psi_i - \bar c^T z_i$ (10.19)

$\dot{\tilde\psi}_i = \bar\omega_i\varepsilon$ (10.14)

Фильтры с расширяющейся полосой пропускания

Функция Ляпунова?

Модель ошибки	$\varepsilon = -\tilde{\theta}^T \overline{\omega}$	(10.13)
Вспомогательная динамика	$\dot{z}_i = (1 + \mu \overline{\omega}^T \overline{\omega})\overline{A} z_i - \overline{A}^{-1} \overline{b}\, \overline{\omega}_i \varepsilon$	(10.18)
Модель параметрической ошибки	$\tilde{\theta}_i = \tilde{\psi}_i - \overline{c}^T z_i$	(10.19)
	$\dot{\tilde{\psi}}_i = \overline{\omega}_i \varepsilon$	(10.14)

$$V = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n-1} z_i^T P z_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n-1} \tilde{\psi}_i^2 \quad (10.20)$$

Модель ошибки $\varepsilon = -\tilde{\theta}^T \bar{\omega}$ (10.13)

Вспомогательная динамика $\dot{z}_i = (1 + \mu \bar{\omega}^T \bar{\omega})\bar{A} z_i - \bar{A}^{-1} \bar{b}\, \bar{\omega}_i \varepsilon$ (10.18)

Модель параметрической ошибки

$\tilde{\theta}_i = \tilde{\psi}_i - \bar{c}^T z_i$ (10.19)

$\dot{\tilde{\psi}}_i = \bar{\omega}_i \varepsilon$ (10.14)

$$V = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n-1} z_i^T P z_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n-1}\tilde{\psi}_i^2 \qquad (10.20)$$

$$\dot{V} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n-1} \dot{z}_i^T P z_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n-1} z_i^T P \dot{z}_i + \sum_{i=1}^{2n-1}\tilde{\psi}_i \dot{\tilde{\psi}}_i$$

Модель ошибки $\varepsilon = -\tilde{\theta}^T \bar{\omega}$ (10.13)

Вспомогательная динамика $\dot{z}_i = (1+\mu\bar{\omega}^T\bar{\omega})\bar{A}z_i - \bar{A}^{-1}\bar{b}\bar{\omega}_i\varepsilon$ (10.18)

Модель параметрической ошибки $\tilde{\theta}_i = \tilde{\psi}_i - \bar{c}^T z_i$ (10.19)

$\dot{\tilde{\psi}}_i = \bar{\omega}_i\varepsilon$ (10.14)

$$V = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n-1} z_i^T P z_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n-1} \tilde{\psi}_i^2 \qquad (10.20)$$

$$\dot{V} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n-1} \dot{z}_i^T P z_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n-1} z_i^T P \dot{z}_i + \sum_{i=1}^{2n-1} \tilde{\psi}_i \dot{\tilde{\psi}}_i =$$

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n-1}\left((1+\mu\bar{\omega}^T\bar{\omega})\bar{A}z_i - \bar{A}^{-1}\bar{b}\bar{\omega}_i\varepsilon\right)^T P z_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n-1} z_i^T P\left((1+\mu\bar{\omega}^T\bar{\omega})\bar{A}z_i - \bar{A}^{-1}\bar{b}\bar{\omega}_i\varepsilon\right) +$$

$$\sum_{i=1}^{2n-1} \tilde{\psi}_i \bar{\omega}_i \varepsilon$$

Модель ошибки $\qquad \varepsilon = -\tilde{\theta}^T\bar{\omega} \qquad (10.13)$

Вспомогательная динамика $\qquad \dot{z}_i = (1+\mu\bar{\omega}^T\bar{\omega})\bar{A}z_i - \bar{A}^{-1}\bar{b}\bar{\omega}_i\varepsilon \qquad (10.18)$

Модель параметрической ошибки $\qquad \tilde{\theta}_i = \tilde{\psi}_i - \bar{c}^T z_i \qquad (10.19)$

$$\dot{\tilde{\psi}}_i = \bar{\omega}_i\varepsilon \qquad (10.14)$$

$$V = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n-1} z_i^T P z_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n-1} \tilde{\psi}_i^2 \qquad (10.20)$$

$$\dot{V} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n-1} \dot{z}_i^T P z_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n-1} z_i^T P \dot{z}_i + \sum_{i=1}^{2n-1} \tilde{\psi}_i \dot{\tilde{\psi}}_i =$$

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n-1}\left((1+\mu\bar{\omega}^T\bar{\omega})\bar{A}z_i - \bar{A}^{-1}\bar{b}\bar{\omega}_i\varepsilon\right)^T P z_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n-1} z_i^T P\left((1+\mu\bar{\omega}^T\bar{\omega})\bar{A}z_i - \bar{A}^{-1}\bar{b}\bar{\omega}_i\varepsilon\right) +$$

$$\sum_{i=1}^{2n-1}\left(\tilde{\theta}_i\bar{\omega}_i\varepsilon + \bar{c}^T z_i\bar{\omega}_i\varepsilon\right)$$

Модель ошибки $\qquad \varepsilon = -\tilde{\theta}^T\bar{\omega} \qquad (10.13)$

Вспомогательная динамика $\qquad \dot{z}_i = (1+\mu\bar{\omega}^T\bar{\omega})\bar{A}z_i - \bar{A}^{-1}\bar{b}\bar{\omega}_i\varepsilon \qquad (10.18)$

Модель параметрической ошибки $\qquad \tilde{\theta}_i = \tilde{\psi}_i - \bar{c}^T z_i \qquad (10.19)$

$$\dot{\tilde{\psi}}_i = \bar{\omega}_i\varepsilon \qquad (10.14)$$

$$V = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n-1} z_i^T P z_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n-1} \tilde{\psi}_i^2 \qquad (10.20)$$

$$\dot{V} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n-1} \dot{z}_i^T P z_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n-1} z_i^T P \dot{z}_i + \sum_{i=1}^{2n-1} \tilde{\psi}_i \dot{\tilde{\psi}}_i =$$

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n-1}\left((1+\mu\bar{\omega}^T\bar{\omega})\bar{A}z_i - \bar{A}^{-1}\bar{b}\bar{\omega}_i\varepsilon\right)^T P z_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n-1} z_i^T P\left((1+\mu\bar{\omega}^T\bar{\omega})\bar{A}z_i - \bar{A}^{-1}\bar{b}\bar{\omega}_i\varepsilon\right) +$$

$$\sum_{i=1}^{2n-1}\left(\tilde{\theta}_i\bar{\omega}_i\varepsilon + \bar{c}^T z_i\bar{\omega}_i\varepsilon\right) = (1+\mu\bar{\omega}^T\bar{\omega})\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n-1} z_i^T \overbrace{\left(\bar{A}^T P + P\bar{A}\right)}^{-2I} z_i -$$

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n-1}\left[\left(\bar{A}^{-1}\bar{b}\bar{\omega}_i\varepsilon\right)^T P z_i + z_i^T P\left(\bar{A}^{-1}\bar{b}\bar{\omega}_i\varepsilon\right)\right] - \varepsilon^2 + \sum_{i=1}^{2n-1} \bar{c}^T z_i\bar{\omega}_i\varepsilon$$

$=$

Модель ошибки	$\varepsilon = -\tilde{\theta}^T\bar{\omega}$	(10.13)
Вспомогательная динамика	$\dot{z}_i = (1+\mu\bar{\omega}^T\bar{\omega})\bar{A}z_i - \bar{A}^{-1}\bar{b}\bar{\omega}_i\varepsilon$	(10.18)
Модель параметрической ошибки	$\tilde{\theta}_i = \tilde{\psi}_i - \bar{c}^T z_i$	(10.19)
	$\dot{\tilde{\psi}}_i = \bar{\omega}_i\varepsilon$	(10.14)

$$V = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n-1} z_i^T P z_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n-1} \tilde{\psi}_i^2 \qquad (10.20)$$

$$\dot{V} = -(1+\mu\bar{\omega}^T\bar{\omega})\sum_{i=1}^{2n-1} z_i^T z_i - \sum_{i=1}^{2n-1}\left[z_i^T P \bar{A}^{-1}\bar{b}\bar{\omega}_i\varepsilon\right] - \varepsilon^2 + \sum_{i=1}^{2n-1} \bar{c}^T z_i \bar{\omega}_i \varepsilon$$

Модель ошибки $\varepsilon = -\tilde{\theta}^T\bar{\omega}$ (10.13)

Вспомогательная динамика $\dot{z}_i = (1+\mu\bar{\omega}^T\bar{\omega})\bar{A}z_i - \bar{A}^{-1}\bar{b}\bar{\omega}_i\varepsilon$ (10.18)

Модель параметрической ошибки $\tilde{\theta}_i = \tilde{\psi}_i - \bar{c}^T z_i$ (10.19)

$\dot{\tilde{\psi}}_i = \bar{\omega}_i\varepsilon$ (10.14)

$$V = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n-1} z_i^T P z_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n-1} \tilde{\psi}_i^2 \qquad (10.20)$$

$$\dot{V} = -(1+\mu\bar{\omega}^T\bar{\omega})\sum_{i=1}^{2n-1} z_i^T z_i - \sum_{i=1}^{2n-1}\left[z_i^T P \bar{A}^{-1}\bar{b}\bar{\omega}_i\varepsilon\right] - \varepsilon^2 + \sum_{i=1}^{2n-1} \bar{c}^T z_i \bar{\omega}_i \varepsilon \le$$

$$-\sum_{i=1}^{2n-1} z_i^T z_i - \mu\sum_{i=1}^{2n-1}\bar{\omega}_i^2\left\|z_i\right\|^2 + \sum_{i=1}^{2n-1}\left\|z_i\right\|\left\|\bar{c} - P\bar{A}^{-1}\bar{b}\right\|\left|\bar{\omega}_i\right|\left|\varepsilon\right| - \frac{\varepsilon^2}{2} - \frac{\varepsilon^2}{2}$$

Модель ошибки	$\varepsilon = -\tilde{\theta}^T\bar{\omega}$	(10.13)
Вспомогательная динамика	$\dot{z}_i = (1+\mu\bar{\omega}^T\bar{\omega})\bar{A}z_i - \bar{A}^{-1}\bar{b}\bar{\omega}_i\varepsilon$	(10.18)
Модель параметрической ошибки	$\tilde{\theta}_i = \tilde{\psi}_i - \bar{c}^T z_i$	(10.19)
	$\dot{\tilde{\psi}}_i = \bar{\omega}_i\varepsilon$	(10.14)

$$V=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n-1} z_i^T P z_i+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n-1}\tilde{\psi}_i^2 \tag{10.20}$$

$$\dot{V}=-(1+\mu\bar{\omega}^T\bar{\omega})\sum_{i=1}^{2n-1} z_i^T z_i-\sum_{i=1}^{2n-1}\left[z_i^T P\bar{A}^{-1}\bar{b}\bar{\omega}_i\varepsilon\right]-\varepsilon^2+\sum_{i=1}^{2n-1}\bar{c}^T z_i\bar{\omega}_i\varepsilon\le$$

$$-\sum_{i=1}^{2n-1} z_i^T z_i-\mu\sum_{i=1}^{2n-1}\bar{\omega}_i^2\left\|z_i\right\|^2+\sum_{i=1}^{2n-1}\left\|z_i\right\|\left\|\bar{c}-P\bar{A}^{-1}\bar{b}\right\|\left|\bar{\omega}_i\right|\left|\varepsilon\right|-\frac{\varepsilon^2}{2}-\frac{\varepsilon^2}{2}=$$

$$-\sum_{i=1}^{2n-1} z_i^T z_i-\frac{\varepsilon^2}{2}-\sum_{i=1}^{2n-1}\left(\mu\bar{\omega}_i^2\left\|z_i\right\|^2-\left\|\bar{c}-P\bar{A}^{-1}\bar{b}\right\|\left\|z_i\right\|\left|\bar{\omega}_i\right|\left|\varepsilon\right|+\frac{\varepsilon^2}{2(2n-1)}\right)$$

Модель ошибки $\varepsilon=-\tilde{\theta}^T\bar{\omega}$ (10.13)

Вспомогательная динамика $\dot{z}_i=(1+\mu\bar{\omega}^T\bar{\omega})\bar{A}z_i-\bar{A}^{-1}\bar{b}\bar{\omega}_i\varepsilon$ (10.18)

Модель параметрической ошибки $\tilde{\theta}_i=\tilde{\psi}_i-\bar{c}^T z_i$ (10.19)

$\dot{\tilde{\psi}}_i=\bar{\omega}_i\varepsilon$ (10.14)

$$V=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n-1} z_i^T P z_i+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n-1}\tilde{\psi}_i^2 \qquad (10.20)$$

$$\dot{V}=-(1+\mu\bar{\omega}^T\bar{\omega})\sum_{i=1}^{2n-1} z_i^T z_i-\sum_{i=1}^{2n-1}\left[z_i^T P\bar{A}^{-1}\bar{b}\bar{\omega}_i\varepsilon\right]-\varepsilon^2+\sum_{i=1}^{2n-1}\bar{c}^T z_i\bar{\omega}_i\varepsilon\le$$

$$-\sum_{i=1}^{2n-1} z_i^T z_i-\mu\sum_{i=1}^{2n-1}\bar{\omega}_i^2\|z_i\|^2+\sum_{i=1}^{2n-1}\|z_i\|\left\|\bar{c}-P\bar{A}^{-1}\bar{b}\right\|\|\bar{\omega}_i\||\varepsilon|-\frac{\varepsilon^2}{2}-\frac{\varepsilon^2}{2}=$$

$$-\sum_{i=1}^{2n-1} z_i^T z_i-\frac{\varepsilon^2}{2}-\sum_{i=1}^{2n-1}\left(\mu\bar{\omega}_i^2\|z_i\|^2-\left\|\bar{c}-P\bar{A}^{-1}\bar{b}\right\|\|z_i\|\|\bar{\omega}_i\||\varepsilon|+\frac{\varepsilon^2}{2(2n-1)}\right)$$

Как насчет параметра μ ?

$$V=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n-1} z_i^T P z_i+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n-1}\tilde{\psi}_i^2 \qquad (10.20)$$

$$\dot{V}=-(1+\mu\bar{\omega}^T\bar{\omega})\sum_{i=1}^{2n-1} z_i^T z_i-\sum_{i=1}^{2n-1}\left[z_i^T P\bar{A}^{-1}\bar{b}\,\bar{\omega}_i\varepsilon\right]-\varepsilon^2+\sum_{i=1}^{2n-1}\bar{c}^T z_i\bar{\omega}_i\varepsilon\le$$

$$-\sum_{i=1}^{2n-1} z_i^T z_i-\mu\sum_{i=1}^{2n-1}\bar{\omega}_i^2\|z_i\|^2+\sum_{i=1}^{2n-1}\|z_i\|\left\|\bar{c}-P\bar{A}^{-1}\bar{b}\right\|\|\bar{\omega}_i\||\varepsilon|-\frac{\varepsilon^2}{2}-\frac{\varepsilon^2}{2}=$$

$$-\sum_{i=1}^{2n-1} z_i^T z_i-\frac{\varepsilon^2}{2}-\sum_{i=1}^{2n-1}\left(\mu\bar{\omega}_i^2\|z_i\|^2-\left\|\bar{c}-P\bar{A}^{-1}\bar{b}\right\|\|z_i\|\|\bar{\omega}_i\||\varepsilon|+\frac{\varepsilon^2}{2(2n-1)}\right)$$

Если

$$\mu\ge\frac{(2n-1)}{2}\left\|\bar{c}-P\bar{A}^{-1}\bar{b}\right\|^2,$$

то

$$\dot{V}\le-\sum_{i=1}^{2n-1} z_i^T z_i-\frac{\varepsilon^2}{2}<0. \qquad (10.21)$$

Алгоритм высокого порядка Summary

Настраиваемый регулятор $$u = \frac{1}{b_m}\delta_M(s)\left[\frac{a_{M0}}{\delta_M(s)}[g] - \hat{\theta}^T\bar{\omega}\right] \quad (10.12)$$

Регрессор $$\omega = col(y, \nu_1, \nu_2)$$

Фильтры $$\begin{cases} \dot{\nu}_1 = \Lambda\nu_1 + e_{n-1}y, & (9.4) \\ \dot{\nu}_2 = \Lambda\nu_2 + e_{n-1}u & (9.5) \end{cases}$$

Алгоритм адаптации *Старшие производные* $(\rho = 2)$

$$\begin{cases} \dot{\hat{\psi}}_i = -\bar{\omega}_i\varepsilon, & (10.14) \\ \dot{\eta}_i = (1 + \mu\bar{\omega}^T\bar{\omega})(\bar{A}\eta_i + \bar{b}\hat{\psi}_i), & (10.15) \\ \hat{\theta}_i = \bar{c}^T\eta_i & (10.16) \end{cases}$$

Ошибка $$\varepsilon = y_M - y$$

Фильтрованный регрессор $$\bar{\omega} = \frac{1}{\delta_M(s)}[\omega]$$

Коэффициент $$\mu \ge \frac{(2n-1)}{2}\left\|\bar{c} - P\bar{A}^{-1}\bar{b}\right\|^2$$

Алгоритм высокого порядка. Заключение

Настраиваемый регулятор
$$u = \frac{1}{b_m}\delta_M(s)\left[\frac{a_{M0}}{\delta_M(s)}[g] - \hat{\theta}^T\bar{\omega}\right] \quad (10.12)$$

Регрессор
$$\omega = col(y, \nu_1, \nu_2)$$

Фильтры
$$\begin{cases} \dot{\nu}_1 = \Lambda\nu_1 + e_{n-1}y, & (9.4) \\ \dot{\nu}_2 = \Lambda\nu_2 + e_{n-1}u & (9.5) \end{cases}$$

Алгоритм адаптации
$$\begin{cases} \dot{\hat{\psi}}_i = -\bar{\omega}_i\varepsilon, \\ \dot{\eta}_i = (1 + \mu\bar{\omega}^T\bar{\omega})(\bar{A}\eta_i + \bar{b}\hat{\psi}_i), \\ \hat{\theta}_i = \bar{c}^T\eta_i \end{cases}$$

Старшие производные $(\rho = 2)$
$$\dot{\hat{\theta}}_i = \bar{c}^T\dot{\eta}_i = \bar{c}^T(1 + \mu\bar{\omega}^T\bar{\omega})(\bar{A}\eta_i + \bar{b}\hat{\psi}_i)$$
$$\ddot{\hat{\theta}}_i = 2\bar{c}^T\mu\bar{\omega}^T\dot{\bar{\omega}}(\bar{A}\eta_i + \bar{b}\hat{\psi}_i) + (1 + \mu\bar{\omega}^T\bar{\omega})^2\bar{c}^T(\bar{A}^2\eta_i + \bar{A}\bar{b}\hat{\psi}_i - \bar{b}\bar{\omega}_i\varepsilon)$$

Ошибка $\varepsilon = y_M - y$

Фильтрованный регрессор
$$\bar{\omega} = \frac{1}{\delta_M(s)}[\omega]$$

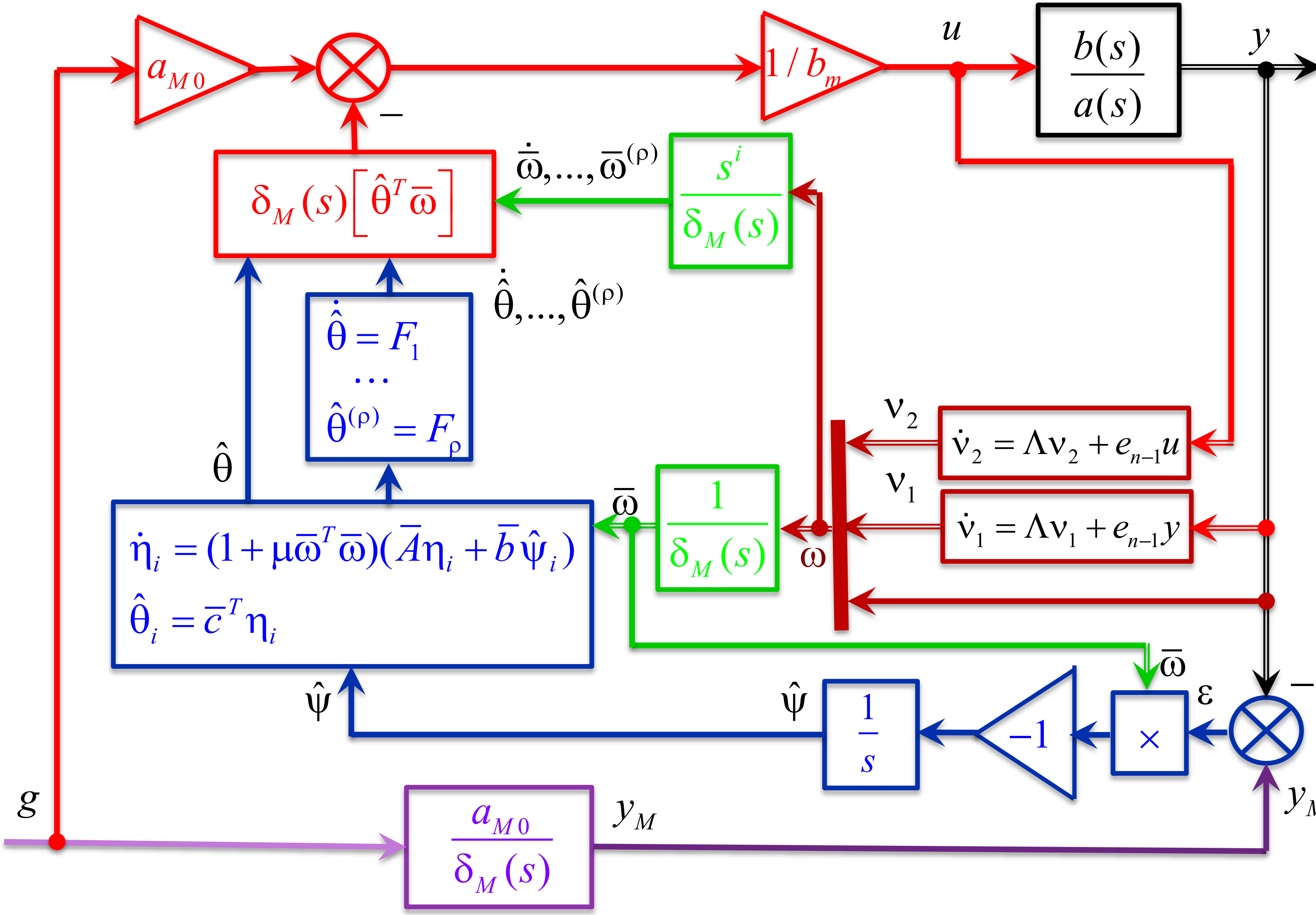
Коэффициент $\mu \geq \dfrac{(2n-1)}{2}\left\|\bar{c} - P\bar{A}^{-1}\bar{b}\right\|^2$

Алгоритм высокого порядка. Заключение

Свойства замкнутой системы:

1. Все сигналы в системе ограничены;
2. Норма $\|z(t)\|$ стремится к нулю асимптотически;
3. Ошибка $\varepsilon(t)$ стремится к нулю асимптотически;
4. Норма $\|\tilde{\theta}(t)\|$ стремится к нулю экспоненциально, если ω удовлетворяет условию неисчезающего возбуждения **(R. Ortega, 1995)**;
5. Алгоритм адаптации не имеет нормирующего множителя и не ограничивает скорость сходимости оценок.

$$\begin{cases} \dot{\hat{\psi}}_i = -\bar{\omega}_i \varepsilon, \\ \dot{\eta}_i = (1+\mu\bar{\omega}^T\bar{\omega})(\bar{A}\eta_i + \bar{b}\hat{\psi}_i), \\ \hat{\theta}_i = \bar{c}^T\eta_i. \end{cases}$$


a_{M0}
$-$
$1/b_m$
u
$\frac{b(s)}{a(s)}$
y
$\delta_M(s)\left[\hat{\theta}^T\bar{\omega}\right]$
$\dot{\bar{\omega}},\ldots,\bar{\omega}^{(\rho)}$
$\frac{s^i}{\delta_M(s)}$
$\dot{\hat{\theta}},\ldots,\hat{\theta}^{(\rho)}$
$\dot{\hat{\theta}} = F_1$
$\ldots$
$\hat{\theta}^{(\rho)} = F_\rho$
$\hat{\theta}$
ν_2
$\dot{\nu}_2 = \Lambda\nu_2 + e_{n-1}u$
ν_1
$\dot{\nu}_1 = \Lambda\nu_1 + e_{n-1}y$
$\bar{\omega}$
$\frac{1}{\delta_M(s)}$
ω
$\dot{\eta}_i = (1+\mu\bar{\omega}^T\bar{\omega})(\bar{A}\eta_i + \bar{b}\hat{\psi}_i)$
$\hat{\theta}_i = \bar{c}^T\eta_i$
$\bar{\omega}$
ε
$-$
$\hat{\psi}$
$\hat{\psi}$
$\frac{1}{s}$
-1
$\times$
g
$\frac{a_{M0}}{\delta_M(s)}$
y_M
y_M

Результаты моделирования (Пример из Лекции 6.3)

Объект

$$\ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_0 y = u$$

Неизвестные параметры

$$a_0 = 1, \; a_1 = 2$$

Эталонная модель

$$\ddot{y}_M + 5\dot{y}_M + 6y_M = 6g$$

Коэффициент адаптации

$$\gamma(t) = \frac{1000}{1 + W_M(s)\left[\omega^T\right] W_M(s)\left[\omega\right]}$$

Передаточная функция ЭМ (с единичным числителем)

$$W_M(s) = \frac{1}{s^2 + 5s + 6}$$

Эталонный сигнал

$$g(t) = \sin 4t$$

Метод расширенной ошибки. Результаты моделирования

Расширенная ошибка $\hat{\varepsilon} = \varepsilon + \hat{\theta}^T \bar{\omega} - \dfrac{1}{s^2 + 5s + 6}\left[\hat{\theta}^T \omega\right]$

Ошибка $\varepsilon = y_M - y$

Настраиваемый регулятор $u = -\hat{\theta}^T \omega + 6g$

Алгоритм адаптации $\dot{\hat{\theta}} = -\dfrac{100}{1 + \bar{\omega}^T(t)\bar{\omega}(t)} \bar{\omega}\hat{\varepsilon}$

Коэффициент адаптации $\gamma = 100$

Алгоритм высокого порядка. Результаты моделирования

Настраиваемый регулятор

$$u = -\ddot{\hat{\theta}}^T\bar{\omega} - 2\dot{\hat{\theta}}^T\dot{\bar{\omega}} - \hat{\theta}^T\ddot{\bar{\omega}} - 5\dot{\hat{\theta}}^T\bar{\omega} - 5\hat{\theta}^T\dot{\bar{\omega}} - 6\hat{\theta}^T\bar{\omega} + 6g$$

Алгоритм адаптации

$$\begin{cases} \dot{\hat{\psi}}_i = -\bar{\omega}_i\varepsilon, \; i = 1,2,3, \\ \dot{\eta}_i = (1+\mu\bar{\omega}^T\bar{\omega})(-5\eta_i + 5\hat{\psi}_i), \\ \hat{\theta}_i = \eta_i \end{cases}$$

Производные высокого порядка

$$\dot{\hat{\theta}}_i = (1+\mu\bar{\omega}^T\bar{\omega})(-5\eta_i + 5\hat{\psi}_i)$$

$$\ddot{\hat{\theta}}_i = 2\mu\bar{\omega}^T\dot{\bar{\omega}}(-5\eta_i + 5\hat{\psi}_i) + (1+\mu\bar{\omega}^T\bar{\omega})^2\bar{c}^T(25\eta_i - 25\hat{\psi}_i - 5\bar{\omega}_i\varepsilon)$$

Фильтрованный регрессор и его производные

$$\bar{\omega} = \frac{1}{s^2+5s+6}[\omega],$$

$$\dot{\bar{\omega}} = \frac{s}{s^2+5s+6}[\omega], \quad \ddot{\bar{\omega}} = \frac{s^2}{s^2+5s+6}[\omega]$$

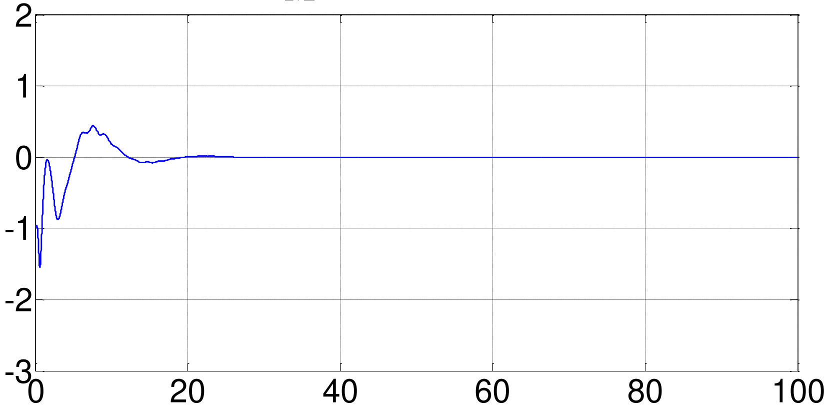
Ошибка $\varepsilon = y_M - y$ *Коэффициент* $\mu = 54$

Результаты моделирования

$$g(t) = 15\sin(2t)\ (NOT\ \ persistently\ exciting)$$

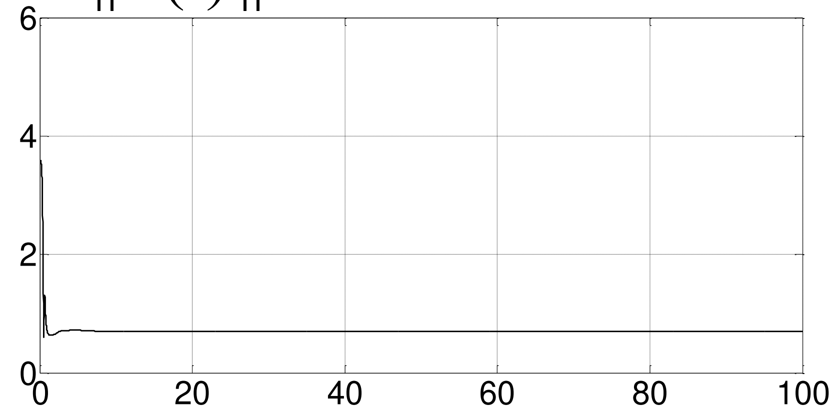
АРО

$$\varepsilon(t) = y_M(t) - y(t)$$



t

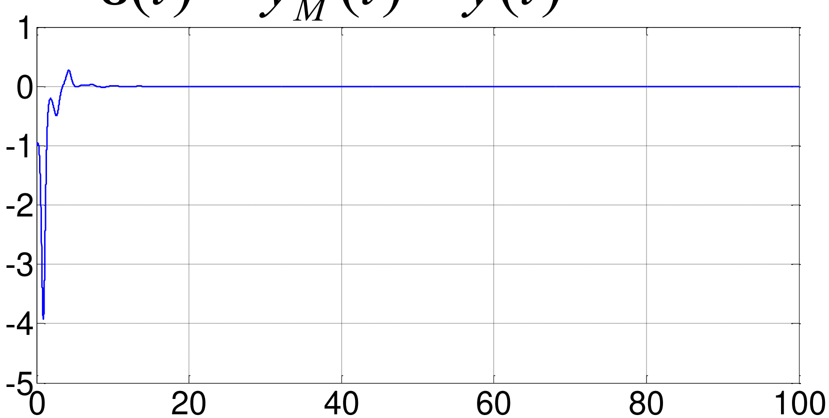
$$\|\tilde{\theta}(t)\|$$



t

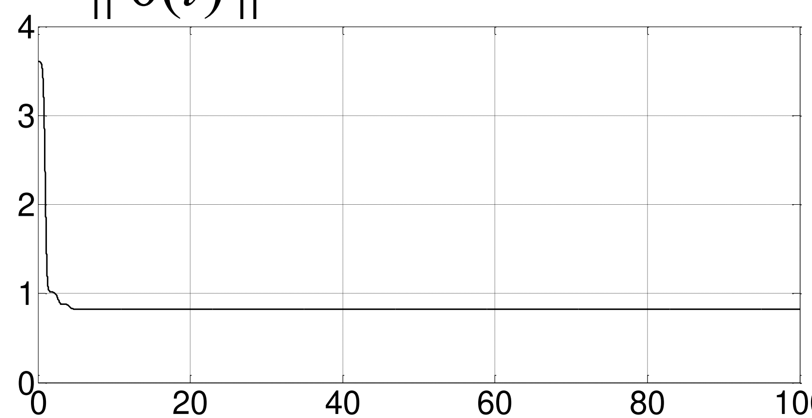
АВП

$$\varepsilon(t) = y_M(t) - y(t)$$



t

$$\|\tilde{\theta}(t)\|$$



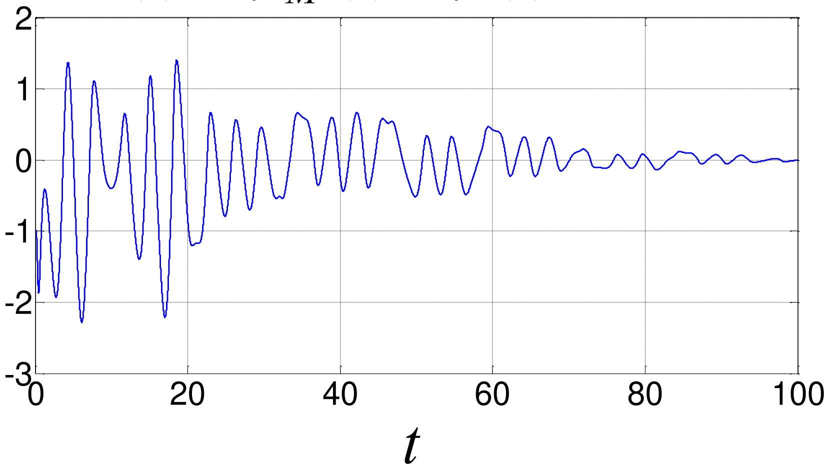
t

Результаты моделирования

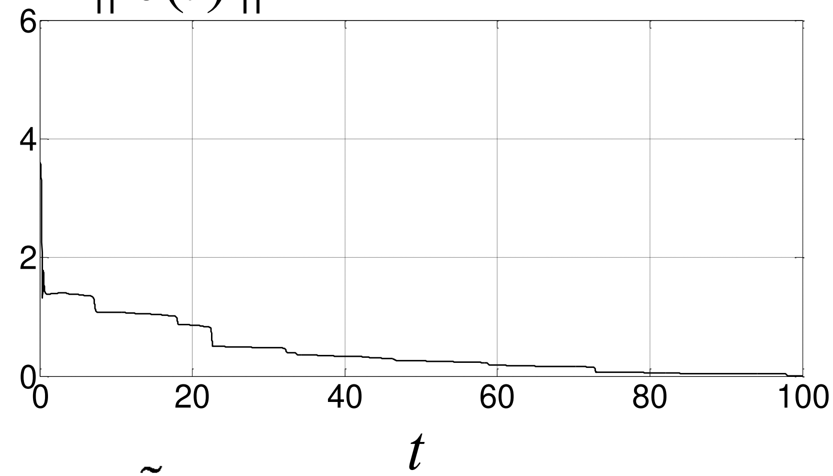
$$g(t)=15\sin(2t)+10\cos(0.25t)\ (persistently\ exciting)$$

АРО

$$\varepsilon(t)=y_M(t)-y(t)$$

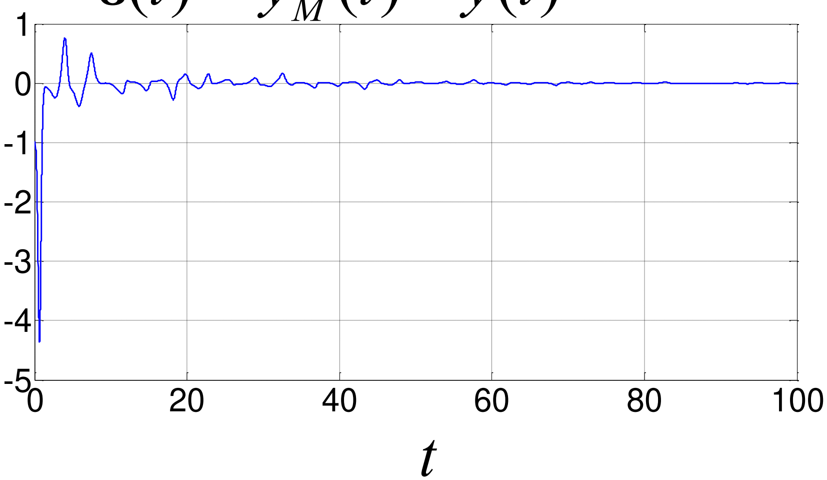


$$\|\tilde{\theta}(t)\|$$



АВП

$$\varepsilon(t)=y_M(t)-y(t)$$



$$\|\tilde{\theta}(t)\|$$