Работа №2. ПРИНЦИП ПОСТРОЕНИЯ СИСТЕМ АДАПТИВНОГО И РОБАСТНОГО УПРАВЛЕНИЯ ВОЗМУЩЕННЫМИ ОБЪЕКТАМИ

Цель работы: освоение принципов построения систем адаптивного и робастного управления на примере задачи слежения выхода скалярного объекта за эталонным сигналом.

Методические рекомендации. До начала работы студенты должны ознакомиться с анализом устойчивости нелинейных систем методом функций Ляпунова [6, 13, 15] (см. также приложение А).

Теоретические сведения. Рассмотрим пример задачи слежения выхода параметрически неопределенного возмущенного объекта за эталонным сигналом. Приведем два решения поставленной задачи. При этом воспользуемся результатами, приведенными в работе №1.

Постановка задачи. Дан объект, представленный моделью вида

$$\dot{x} = \theta x + u + \delta, \tag{2.1}$$

где δ — ограниченное внешнее возмущение, удовлетворяющее неравенству $|\delta(t)| \le \bar{\delta}$. Как и ранее, x — выход объекта (совпадает с переменной состояния), u — сигнал управления, θ — неизвестный постоянный параметр.

Цель управления заключается в построении закона управления, обеспечивающего следующее целевое неравенство:

$$|x_m(t) - x(t)| \le \Delta, \qquad \forall t \ge T, \tag{2.2}$$

где Δ, T — точность работы системы управления и время ее настройки соответственно, $x_m(t)$ — эталонный сигнал, генерируемый моделью (1.2). Предполагается, что параметры Δ и T можно изменять в соответствии с требованиями, предъявляемыми к системе.

Рассмотрим возможность использования в качестве решения сформулированной задачи регулятор (1.6) и (1.9). Построим модель ошибки $\varepsilon = x_m - x$:

$$\dot{\varepsilon} = -\lambda \varepsilon - \tilde{\theta} x - \delta. \tag{2.3}$$

Далее проведем анализ устойчивости замкнутой системы с помощью функции Ляпунова (1.8). Учитывая последнее выражение и алгоритм адаптации (1.9), для производной функции Ляпунова получим:

$$\dot V=\frac{1}{2}2\varepsilon\dot\varepsilon+\frac{1}{2\gamma}2\tilde\theta\dot{\tilde\theta}=\varepsilon\left(-\lambda\,\varepsilon-\tilde\theta\,x-\delta\right)-\frac{1}{\gamma}\tilde\theta\dot{\hat\theta}=-\lambda\,\varepsilon^2-\tilde\theta\,x\varepsilon-\delta\varepsilon+\tilde\theta\frac{1}{\gamma}\gamma x\varepsilon=$$

$$=-\lambda\,\varepsilon^2-\delta\varepsilon=-\frac{\lambda}{2}\varepsilon^2-\frac{\lambda}{2}\varepsilon^2-\delta\varepsilon\pm\frac{1}{2\lambda}\delta^2=-\frac{\lambda}{2}\varepsilon^2-\left(\sqrt{\frac{\lambda}{2}}\varepsilon+\sqrt{\frac{1}{2\lambda}}\delta\right)^2+\frac{1}{2\lambda}\delta^2\le$$

$$\le-\frac{\lambda}{2}\varepsilon^2+\frac{1}{2\lambda}\delta^2\le-\frac{\lambda}{2}\varepsilon^2+\frac{1}{2\lambda}\bar\delta^2.$$

Из полученного неравенства следует асимптотическое стремление ошибки ε к некоторому ограниченному множеству, определяемому верхней границей сигнала возмущения $\bar\delta$ и параметром λ. При этом точность системы управления может быть увеличена путем увеличения λ. Однако из приведенного анализа не следует ограниченности сигнала $\hat\theta$. Если продолжить анализ и рассмотреть частный случай, когда переменная x и ошибка ε стремятся к ненулевым постоянным значениям ввиду влияния возмущения, то

$$\dot{\hat\theta}=-\gamma x_{уст}\varepsilon_{уст}=C=const,$$

откуда следует, что

$$\hat\theta=Ct,$$

и неограниченный рост оценки $\hat\theta$ с течением времени. Данное явление получило название неограниченного параметрического дрейфа.

Таким образом, представленный регулятор (1.6) и (1.9) в общем случае не обеспечивает ограниченность всех сигналов и не является робастным по отношению к внешнему возмущению.

Предложенный подход не является практически применимым и требует модификации алгоритма управления. Рассмотрим два возможных решения.

Решение № 1. Представим модификацию алгоритма (1.9) в форме

$$\hat\theta=-\gamma x\varepsilon. \qquad (2.4)$$

Подставляя (2.4) в (1.6), получаем алгоритм управления

$$u=\gamma x^2\varepsilon-\lambda x+\lambda\,g\,. \qquad (2.5)$$

Данный алгоритм является статическим, так как не содержит интегральной обратной связи, и нелинейным, так как содержит член $\gamma x^2\varepsilon$.

Покажем, что предложенный алгоритм управления (2.5) гарантирует ограниченность сигналов ε и $\hat\theta$. Для этого выберем функцию Ляпунова

$$V=\frac{1}{2}\varepsilon^2 \tag{2.6}$$

и рассчитаем ее производную. Учитывая (2.5) и модель ошибки (2.3), проведем алгебраические преобразования:

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= \frac{1}{2}2\varepsilon\dot{\varepsilon} = -\lambda\,\varepsilon^2 - \tilde{\theta}\,x\varepsilon - \delta\varepsilon = -\frac{\lambda}{2}\varepsilon^2 - \frac{\lambda}{2}\varepsilon^2 - \left(\theta-\hat{\theta}\right)x\varepsilon - \delta\varepsilon = \\
&= -\frac{\lambda}{2}\varepsilon^2 \underline{-\frac{\lambda}{2}\varepsilon^2 - \delta\varepsilon \pm \frac{1}{\lambda}\delta^2} - \left(\theta+\gamma x\varepsilon\right)x\varepsilon = \\
&= -\frac{\lambda}{2}\varepsilon^2 \underline{-\left(\sqrt{\frac{\lambda}{2}}\varepsilon + \sqrt{\frac{1}{2\lambda}}\delta\right)^2 + \frac{1}{2\lambda}\delta^2} \; \underline{\pm\frac{\theta^2}{4\gamma} - \theta x\varepsilon - \gamma x^2\varepsilon^2} = \\
&= -\frac{\lambda}{2}\varepsilon^2 \underline{-\left(\sqrt{\frac{\lambda}{2}}\varepsilon + \sqrt{\frac{1}{2\lambda}}\delta\right)^2 + \frac{1}{2\lambda}\delta^2} \; \underline{-\left(\frac{\theta}{2\sqrt{\gamma}} + \sqrt{\gamma}x\varepsilon\right)^2 + \frac{\theta^2}{4\gamma}} \le \\
&\le -\frac{\lambda}{2}\varepsilon^2 + \frac{1}{2\lambda}\bar{\delta}^2 + \frac{\theta^2}{4\gamma} = -\lambda V + \frac{1}{2\lambda}\bar{\delta}^2 + \frac{\theta^2}{4\gamma} = -\lambda V + \bar{\Delta},
\end{aligned}$$

где $\bar{\Delta} = \bar{\delta}^2/2\lambda + \theta^2/4\gamma$ — постоянная величина. Решая полученное дифференциальное неравенство, получаем:

$$V(\varepsilon(t)) \le e^{-\lambda t}V(0) + \frac{\bar{\Delta}}{\lambda} - \frac{\bar{\Delta}}{\lambda}e^{-\lambda t},$$

откуда с учетом (2.6) следует, что

$$\frac{1}{2}\varepsilon^2 \le e^{-\lambda t}V(0) + \frac{\bar{\Delta}}{\lambda} - \frac{\bar{\Delta}}{\lambda}e^{-\lambda t}$$

или

$$\left|\varepsilon(t)\right| \le \sqrt{2\left(e^{-\lambda t}V(0) + \frac{\bar{\Delta}}{\lambda} - \frac{\bar{\Delta}}{\lambda}e^{-\lambda t}\right)}. \tag{2.7}$$

Из последнего неравенства следует экспоненциальная сходимость ошибки управления ε к ограниченному множеству с границей $\Delta = \sqrt{2\bar{\Delta}/\lambda}$. При этом величину Δ можно уменьшить путем увеличения коэффициентов λ и γ. Как следствие, величина $\hat{\theta}$ становится ограниченной.

Таким образом, алгоритм управления (2.5) обеспечивает устойчивость в замкнутой системе и является робастным по отношению к внешнему возмущению. В то же время этот алгоритм имеет следующие недостатки:

— даже при отсутствии возмущения установившаяся ошибка $\varepsilon(t)$ может быть отлична от нуля, что видно из неравенства (2.7);

— управление пропорционально величине x^2. Следовательно, при росте x амплитуда управления возрастает квадратично, в связи с чем практическая применимость такого закона (1.6) имеет существенные ограничения.

Рассмотрим решение, лишенное недостатков алгоритмов (1.6), (1.9) и (1.6), (2.4) за счет наделения нового алгоритма управления адаптивными и робастными свойствами.

Решение № 2. Рассмотрим совместно с настраиваемым регулятором (1.6) алгоритм адаптации, параметрический дрейф в котором ограничивается обратной связью по величине настраиваемого параметра:

$$\dot{\hat{\theta}} = -\sigma\hat{\theta} - \gamma x\varepsilon, \tag{2.8}$$

где σ — постоянная положительная величина.

Проведем анализ устойчивости замкнутой системы, представленной объектом (2.1), регулятором (1.6) и алгоритмов адаптации (2.8) с помощью функции Ляпунова (1.8). Возьмем производную от функции и проведем ряд преобразований:

$$\dot{V} = \frac{1}{2}2\varepsilon\dot{\varepsilon} + \frac{1}{2\gamma}2\tilde{\theta}\dot{\tilde{\theta}} = \varepsilon\left(-\lambda\varepsilon - \tilde{\theta}x - \delta\right) - \frac{1}{\gamma}\tilde{\theta}\dot{\hat{\theta}} = -\lambda\varepsilon^2 - \tilde{\theta}x\varepsilon - \delta\varepsilon - \frac{\tilde{\theta}}{\gamma}\left(-\sigma\hat{\theta} - \gamma x\varepsilon\right) =$$

$$= -\lambda\varepsilon^2 - \delta\varepsilon + \frac{\sigma}{\gamma}\tilde{\theta}\hat{\theta} = -\lambda\varepsilon^2 - \delta\varepsilon + \frac{\sigma}{\gamma}\tilde{\theta}\left(-\tilde{\theta} + \theta\right) = -\lambda\varepsilon^2 - \delta\varepsilon - \frac{\sigma}{\gamma}\tilde{\theta}^2 + \frac{\sigma}{\gamma}\tilde{\theta}\theta =$$

$$= -\frac{\lambda}{2}\varepsilon^2 \underline{- \frac{\lambda}{2}\varepsilon^2 - \delta\varepsilon \pm \frac{1}{2\lambda}\delta^2} - \frac{\sigma}{2\gamma}\tilde{\theta}^2 \underline{- \frac{\sigma}{2\gamma}\tilde{\theta}^2 + \frac{\sigma}{\gamma}\tilde{\theta}\theta \pm \frac{\sigma}{2\gamma}\theta^2} =$$

$$= -\frac{\lambda}{2}\varepsilon^2 - \frac{\sigma}{2\gamma}\tilde{\theta}^2 - \left(\sqrt{\frac{\lambda}{2}}\varepsilon + \sqrt{\frac{1}{2\lambda}}\delta\right)^2 - \frac{\sigma}{\gamma}\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\tilde{\theta} + \sqrt{\frac{1}{2}}\theta\right)^2 + \frac{1}{2\lambda}\delta^2 + \frac{\sigma}{2\gamma}\theta^2 \le$$

$$\le -\frac{\lambda}{2}\varepsilon^2 - \frac{\sigma}{2\gamma}\tilde{\theta}^2 + \frac{1}{2\lambda}\delta^2 + \frac{\sigma}{2\gamma}\theta^2 \le -\frac{\lambda}{2}\varepsilon^2 - \frac{\sigma}{2\gamma}\tilde{\theta}^2 + \frac{1}{2\lambda}\bar{\delta}^2 + \frac{\sigma}{2\gamma}\theta^2.$$

Введем обозначение $\kappa = \min\{\lambda, \sigma\}$. Тогда, считая λ, σ положительными, имеем:

$$\dot{V} \le -\kappa\left(\frac{1}{2}\varepsilon^2 - \frac{1}{2\gamma}\tilde{\theta}^2\right) + \frac{1}{2\lambda}\bar{\delta}^2 + \frac{\sigma}{2\gamma}\theta^2$$

или

$$\dot{V} \le -\kappa V + \bar{\Delta},$$

где $\bar{\Delta} = \bar{\delta}^2 / 2\lambda + \sigma\theta^2 / 2\gamma$ — постоянная величина. Далее, решая данное дифференциальное неравенство, получаем:

$$V(\varepsilon(t)) \le e^{-\kappa t} V(0) + \frac{\bar{\Delta}}{\kappa} - \frac{\bar{\Delta}}{\kappa} e^{-\kappa t},$$

откуда следует, что

$$|\varepsilon(t)| \le \sqrt{2\left(e^{-\kappa t} V(0) + \frac{\bar{\Delta}}{\kappa} - \frac{\bar{\Delta}}{\kappa} e^{-\kappa t} \right)}.$$

Из последнего неравенства следует экспоненциальная сходимость ошибки управления к ограниченному множеству с границей $\Delta = \sqrt{2\bar{\Delta} / \kappa}$.

Алгоритм управления (1.6), основанный на алгоритме адаптации (2.8), также обеспечивает устойчивость замкнутой системы и является робастным по отношению к внешнему возмущению. В то же время алгоритм (1.6), (2.8) позволяет парировать недостатки робастного алгоритма управления (2.5). Так, при отсутствии внешнего возмущения или при его несущественном влиянии верхняя граница $\bar{\Delta}$ может быть снижена до нуля за счет обнуления коэффициента σ (т.н. гибридная σ-модификация). Кроме того, для уменьшения Δ нет необходимости в значительном увеличении γ, которое влечет за собой рост амплитуды управляющего воздействия. Снижение Δ можно обеспечить путем уменьшения коэффициента σ.

Порядок выполнения работы

1. На основе данных, приведенных в Таблице 1.1, провести моделирование адаптивной системы управления, полученной в Работе №1, в условиях действия на объект возмущения вида [12]

$$\delta(t) = (1+t)^{-1/8} \left[1 - \theta(1+t)^{-1/4} - \frac{3}{8}(1+t)^{-5/4} \right].$$

При моделировании использовать следующие значения параметров: $\gamma = 0.25$, $x(0) = 1$ и $\hat{\theta}(0) = 1$. Сигнал задания $g(t)$ принять равным нулю. По результатам моделирования построить три графика. На первом вывести $x(t)$ и $x_m(t)$, на втором — $u(t)$, на третьем — $\tilde{\theta}(t) = \theta - \hat{\theta}(t)$. Время моделирования выбрать 1000 с.

2. Заменить алгоритм адаптации (1.9) на статическую обратную связь (2.4) и провести эксперимент для трех различных значений коэффициента γ и отличного от нуля сигнала задания $g(t)$ из Таблицы 1.1. Определить влияние этого коэффициента на свойства системы. По результатам

моделирования для каждого γ построить два графика. На первом вывести x и x_m, на втором — u.

3. Заменить алгоритм адаптации (1.9) на робастную σ-модификацию (2.8). Повторить эксперимент для трех различных значений коэффициента σ. Сигнал задания $g(t)$ выбрать из Таблицы 1.1 согласно варианту. Определить влияние этого коэффициента на свойства системы. По результатам моделирования для каждого σ построить два графика. На первом вывести x и x_m, на втором — u.

Задачи и вопросы

1. Показать, что приведенные в работе алгоритмы робастного управления обеспечивают устойчивость замкнутых систем при незначительных отклонениях параметра θ.
2. Является ли асимптотически устойчивая система грубой по отношению к внешним возмущениям? Ответ пояснить.
3. Является ли экспоненциально устойчивая система грубой по отношению к внешним возмущениям? Ответ пояснить.
4. Следует ли из роста параметра σ в алгоритме (2.8) рост максимальной установившейся ошибки управления ε? Ответ пояснить.
5. Следует ли из роста параметра γ в алгоритме (2.8) снижение максимальной установившейся ошибки управления ε? Ответ пояснить.
6. Решить задачу робастного управления для объекта вида

$$\dot{x} = x^4 + \theta x + u,$$

где θ — неизвестный параметр. Цель управления заключается в построении закона управления, обеспечивающего выполнение неравенства (2.2).

7. Доказать устойчивость робастной системы управления, включающей объект (2.1), регулятор (1.6) и нелинейную обратную связь вида

$$\hat{\theta} = -\gamma x sign(\varepsilon),$$

где γ — положительный параметр.

8. Доказать устойчивость робастной системы управления, включающей объект (2.1), регулятор (1.6) и модифицированный алгоритм адаптации вида

$$\dot{\hat{\theta}} = -\sigma\hat{\theta} - \gamma x sign(\varepsilon),$$

где γ, σ — положительные параметры.

9. Решить задачу робастного управления объектом вида

$$\dot{x} = \theta\left(x^2 + 1\right) + u + \delta,$$

где θ — неизвестный параметр, δ — ограниченное возмущение, удовлетворяющее неравенству $\left|\delta(t)\right| \le \bar{\delta}$. Цель управления заключается в построении закона управления, обеспечивающего выполнение неравенства (2.2).

10. Решить задачу робастного управления для объекта вида

$$\dot{x} = \theta \sin(x) + u + \delta,$$

где θ — неизвестный параметр, δ — ограниченное возмущение, удовлетворяющее неравенству $\left|\delta(t)\right| \le \bar{\delta}$. Цель управления заключается в построении закона управления, обеспечивающего выполнение неравенства (2.2).

Задачи и вопросы повышенной сложности

1. Решить задачу робастного управления для объекта вида

$$\dot{x} = \theta\left(x^2 + 1\right)u,$$

где $\theta \ge \theta_0 > 0$ — неизвестный параметр. Цель задачи заключается в построении закона управления, обеспечивающего выполнение неравенства (2.2), в котором $x_m(t) = 0$.

2. Решить задачу робастного управления для объекта вида

$$\dot{x} = \theta_1 x + \theta_2 \frac{x}{1 + x^2} + u + \delta,$$

где θ_1, θ_2 — неизвестные параметры, δ — ограниченное возмущение, удовлетворяющее неравенству $\left|\delta(t)\right| \le \bar{\delta}$. Цель управления заключается в построении закона управления, обеспечивающего выполнение неравенства (2.2).

3. Система стабилизации описывается следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} &\dot{x} = \theta x + u + \delta, \\ &u = -\hat{\theta} x, \\ &\dot{\hat{\theta}} = \gamma x^2, \end{aligned}$$

где θ — неизвестный параметр, δ — ограниченное возмущение, $\hat{\theta}$ — настраиваемый параметр регулятора. Проанализировать устойчивость замкнутой системы и ее робастность по отношению к внешнему возмущению.

4. Решить предыдущую задачу для случая, когда $\hat{\theta}$ генерируется нелинейной обратной связью вида

$$\hat{\theta} = \gamma x^2 .$$

5. Решить задачу робастного управления для объекта вида

$$\dot{x} = \theta_1 x + u + \theta_2 \sin t + \delta ,$$

где θ_1, θ_2 — неизвестные параметры, δ — ограниченное возмущение, удовлетворяющее неравенству $|\delta(t)| \le \bar{\delta}$. Цель управления заключается в построении закона управления, обеспечивающего выполнение неравенства (2.2).

Работа № 3. АДАПТИВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫМ МНОГОМЕРНЫМ ОБЪЕКТОМ ПО СОСТОЯНИЮ

Цель работы: освоение принципов построения адаптивной системы управления многомерным объектом.

Методические рекомендации. До начала работы студенты должны ознакомиться с принципом построения алгоритмов адаптации на основе стандартной модели ошибки с измеряемым состоянием [2, 20].

Теоретические сведения. Рассмотрим задачу адаптивного управления многомерным объектом с использованием эталонной модели. При этом воспользуемся принципами решения аналогичной задачи для объекта первого порядка (см. Работу №1).

Постановка задачи. Дан объект

$$\dot{x} = Ax + bu, \qquad x(0) \tag{3.1}$$

$$y = Cx, \tag{3.2}$$

где $x \in R^n$ — вектор состояния, u — управление, $y \in R$ — регулируемая переменная,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \; b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

a_i, $i = \overline{0, n-1}$ — неизвестные параметры, b_0 — известный коэффициент.

Задача управления заключается в компенсации параметрической неопределенности объекта и обеспечении следующего целевого равенства:

$$\lim_{t\to\infty} \|x_M(t) - x(t)\| = \lim_{t\to\infty} \|e(t)\| = 0, \tag{3.3}$$

где $e = x_M - x$ — вектор ошибки управления, $x_M \in R^n$ — вектор, генерируемый эталонной моделью

$$\dot{x}_M = A_M x_M + b_M g, \tag{3.4}$$

$$y_M = C_M x_M \tag{3.5}$$

с задающим воздействием $g(t)$ и матрицами

$$A_M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_{M\,0} & -a_{M\,1} & -a_{M\,2} & \cdots & -a_{M\,n-1} \end{bmatrix},\ b_M = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_{M\,0} \end{bmatrix},$$

$$C_M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Параметры эталонной модели $a_{M\,i},\ i = \overline{1, n-1}$ строятся на основе метода стандартных характеристических полиномов [4, 5] для обеспечения желаемого качества воспроизведения задающего воздействия $g(t)$. Другими словами, модель (3.4), (3.5) определяет желаемое качество замкнутой системы после завершения процессов настройки адаптивного управления.

Отметим, что в задаче класс объектов (3.1), (3.2) ограничен следующим допущением.

Допущение (Условие согласования). Для некоторого n - мерного вектора θ и скаляра κ матрицы A, b, A_M и b_M связаны соотношениями

$$A_M = A + b\theta^T, \qquad b = \kappa b_M. \tag{3.6}$$

Решение задачи. Предполагая параметры объекта известными, синтезируем регулятор, который обеспечит условие (3.3) с заданными динамическими показателями качества — временем переходного процесса t_n и перерегулированием $\bar{\sigma}$.

Для синтеза регулятора сформируем ошибку слежения $e = x_M - x$, рассчитаем ее производную в силу (3.1), (3.4) и условия (3.6):

$$\dot{e} = \dot{x}_M - \dot{x} = A_M x_M + b_M g - Ax - bu =$$

$$= \underline{A_M x_M} + \frac{1}{\kappa}\underline{\underline{b}}g - (\underline{A_M} - \underline{\underline{b}}\theta^T)x - \underline{\underline{b}}u = A_M e + b\left(\theta^T x - u + \frac{1}{\kappa}g\right), \tag{3.7}$$

где $\theta^T = [\theta_1, \theta_2, ..., \theta_n]$ — вектор постоянных параметров, определяемый параметрическими рассогласованиями между матрицами A и A_M,

$$\theta_1 = \frac{-a_{M\,0} + a_0}{b_0},\ \theta_2 = \frac{-a_{M\,1} + a_1}{b_0},\ ...,\ \theta_n = \frac{-a_{M\,n-1} + a_{n-1}}{b_0},\ \kappa = \frac{b_0}{a_{M\,0}}$$

— коэффициенты, рассчитываемые из условия (3.6).

Выражение (3.7) сводится к виду

$$\dot{e} = A_M e + b\left(\theta^T x - u + \frac{1}{\kappa} g\right), \tag{3.8}$$

позволяющему синтезировать управление

$$u = \theta^T x + \frac{1}{\kappa} g\,. \tag{3.9}$$

После подстановки (3.9) в (3.8) получаем закон экспоненциальной сходимости ошибки управления неадаптивной системы:

$$\dot{e} = A_M e\,.$$

Однако в исходной постановке задачи параметры матрицы A неизвестны. Следовательно, закон (3.9) физически нереализуем. Так как параметры a_i неизвестны, то вектор θ также неизвестен. Заменим в (3.9) этот вектор на оценку $\hat{\theta}$ и получим настраиваемый закон управления:

$$u = \hat{\theta}^T x + \frac{1}{\kappa} g\,. \tag{3.10}$$

Подставим последнее выражение в (3.8) и получим модель ошибок

$$\dot{e} = A_M e + b\tilde{\theta}^T x, \tag{3.11}$$

где $\tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta}$ — вектор параметрических ошибок.

Расширяя подход, приведенный в Работе №1, на многомерный случай, выберем функцию Ляпунова

$$V = \frac{1}{2} e^T P e + \frac{1}{2\gamma} \tilde{\theta}^T \tilde{\theta}\,,$$

где $P = P^T \succ 0$ — положительно определенная симметричная матрица, удовлетворяющая уравнению Ляпунова

$$A_M^T P + P A_M = -Q \tag{3.12}$$

с произвольно выбранной симметричной положительно определенной матрицей Q. Далее, вычисляя производную функции Ляпунова в силу модели ошибок (3.11), получаем:

$$\dot{V} = -\frac{1}{2} e^T Q e + \tilde{\theta}^T x b^T P e + \frac{1}{\gamma} \tilde{\theta}^T \dot{\tilde{\theta}}\,.$$

Из анализа последнего выражения видно, что если алгоритм адаптации выбрать в виде

$$\dot{\hat{\theta}} = \gamma x b^T P e\,, \qquad \hat{\theta}(0) = 0 \tag{3.13}$$

то производная функции Ляпунова будет удовлетворять неравенству

$$\dot{V} = -\frac{1}{2} e^T Q e \le 0 ,$$

откуда следует выполнение целевого условия (3.3).

Отметим, что в выражении (3.13) коэффициент $\gamma > 0$ носит название коэффициента адаптации, и его величина определяет скорость настройки коэффициентов регулятора (3.10).

Таким образом, алгоритм адаптивного управления состоит из настраиваемого регулятора (3.10), алгоритма адаптации (3.13), в котором матрица P находится из (3.12).

Адаптивный регулятор (3.10), (3.13) для любых начальных условий $x(0)$, $\hat{\theta}(0)$ и ограниченного g обеспечивает [20]:

C.1. ограниченность всех сигналов в замкнутой системе;

C.2. асимптотическое стремление ошибки e к нулю;

C.3. ограниченность сигнала $\hat{\theta}$. Вектор $\hat{\theta}$ экспоненциально стремится к θ, если вектор x удовлетворяет условию неисчезающего возбуждения:

$$\int_t^{t+T} x(\tau) x^T(\tau) d\tau > \alpha I , \tag{3.14}$$

где $\alpha > 0$, $T > 0$ — постоянные величины.

Условие (3.14) эквивалентно условию наличия не менее $(n+1)/2$ гармоник (спектральных линий) в векторе x. Отметим, что в рамках решаемой задачи слежения характер поведения регрессора x целиком определяется характером задающего воздействия g. Поэтому условие неисчезающего возбуждения может быть переформулировано в терминах сигнала g;

C.4. если вектор x удовлетворяет условию (3.14), то существует оптимальное значение коэффициента γ, при котором скорость сходимости параметрических ошибок $\tilde{\theta}$ к нулю максимальна.

Порядок выполнения работы

1. На основе заданных в Таблице 3.1 значений времени переходного процесса t_n и максимального перерегулирования $\bar{\sigma}$ сформировать эталонную модель в форме (3.4), (3.5). Построить график переходной функции модели, на котором показать время переходного процесса t_n и перерегулирование $\bar{\sigma}$;

2. На основе предположения, что параметры объекта известны, построить и промоделировать систему управления с регулятором (3.9). Провести три эксперимента, в которых:

— использовать расчетные значения параметров объекта, заложенные в θ_1 и θ_2;

— незначительно отклонить параметры объекта так, чтобы система не потеряла устойчивость;

— отклонить параметры объекта так, чтобы система потеряла устойчивость.

По результатам каждого эксперимента построить траектории $x(t)$ и $x_M(t)$ на одном графике и $e(t)$ — на другом.

3. Провести моделирование адаптивной системы управления с регулятором (3.10) и алгоритмом адаптации (3.13). В ходе моделирования проиллюстрировать свойства 1-4 алгоритма управления. Для этого необходимо:

— повторить три эксперимента п.п. 2 для фиксированного значения γ;

— используя расчетные значения параметров объекта, провести эксперимент с тремя различными значениями γ;

— провести один из предыдущих экспериментов данного пункта при $g(t)=1$.

По результатам каждого эксперимента построить траектории $x(t)$ и $x_M(t)$ на одном графике, $e(t)$ — на втором, $\tilde{\theta}=\theta-\hat{\theta}$ — на третьем.

4. Сделать выводы по каждому пункту работы.

Таблица 3.1. Варианты заданий

Вар.	Матрица A	Коэфф. передачи b_0	Время переходного процесса, t_n	Максимальное перерегулирование $\bar{\sigma}$, %	Сигнал задания $g(t)$
1	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$	1	0,16	0	$3sign(\cos 0,2t)+3$
2	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$	2	0,3	0	$sign(\sin 0,5t)+2$
3	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$	3	0,9	0	$0,8\sin 2t+\cos 0,8t+2$
4	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$	4	0,2	0	$sign(\sin 0,3t)+1,5$
5	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$	5	0,6	0	$7sign(\cos 0,9t)+8$
6	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 9 & -1 \end{bmatrix}$	6	0,3	0	$0,4\sin 3t+\cos 0,1t+1.5$
7	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$	7	0,7	0	$6sign(\sin 0.,1t)+9$
8	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$	8	0,1	0	$2sign(\sin t)+4$
9	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	9	0,9	0	$9\sin 0,2t+9\cos 0,1t+15$
10	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$	1	3,5	<15	$4sign(\sin 6t)+5$
11	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$	2	0,6	<15	$4sign(\cos t)+3$
12	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 10 & 1 \end{bmatrix}$	3	0,9	<15	$\sin 0,1t+\cos 5t+2$
13	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$	4	0,4	<15	$9sign(\sin 0,1t)+12$
14	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 9 & 0 \end{bmatrix}$	5	0,2	<15	$3sign(\sin 4t)+8$
15	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -9 & 1 \end{bmatrix}$	6	0,5	<15	$7\sin 0,3t+8\cos t+20$
16	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -7 & 6 \end{bmatrix}$	7	0,5	<15	$2sign(\cos t)+3$
17	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}$	8	0,45	<15	$\cos t+3\sin 2t+5$

18	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & 6 \end{bmatrix}$	9	0,15	<15	$sign(\cos 2t)$
19	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$	1	0,7	<15	$sign(\sin 0,5t)+2$
20	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -15 & 6 \end{bmatrix}$	2	1,2	0	$10\cos 0,5t+2\sin t+12$
21	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 11 & 1 \end{bmatrix}$	3	1,5	0	$sign(\sin 0,5t)+3$
22	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$	4	0,8	0	$0,5sign(\sin 0,7t)+1$
23	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 12 & 6 \end{bmatrix}$	5	0,9	0	$5\sin 0,5t+4\cos 0,1t+8$
24	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 11 \end{bmatrix}$	6	0,2	0	$sign(\cos t)+3$
25	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 13 & 2 \end{bmatrix}$	7	0,5	0	$sign(\sin 2t)$
26	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 15 & 6 \end{bmatrix}$	8	0,9	0	$\sin 5t+0,5\cos 0,2t+2$
27	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 13 & -1 \end{bmatrix}$	9	1,3	0	$2sign(\sin 0,4t)+3$
28	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$	1	1,6	0	$3sign(\sin 0,5t)+3$
29	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 9 & 7 \end{bmatrix}$	2	0,75	15	$2\sin 0,2t+\sin 0,1t+8$
30	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 9 \end{bmatrix}$	3	0,65	15	$4sign(\cos 2t)+5$

Задачи и вопросы

1. Выполняется ли условие (3.14) в задаче адаптивного управления скалярным объектом, решаемой в Работе №1 при $g(t)=1$?

2. Может ли решением уравнения Ляпунова (3.12) являться отрицательно определенная матрица P? Ответ пояснить.

3. Может ли решением уравнения Ляпунова (3.12) являться диагональная матрица P? Ответ пояснить.

4. При каких γ адаптивная система может быть неустойчива?

5. Привести пример скалярной функции $x(t)$, не удовлетворяющей условию (3.14).

6. Решить задачу адаптивной стабилизации для объекта вида

$$\dot{x}_1 = x_2,$$
$$\dot{x}_2 = \theta_1 x_1 + \theta_2 x_1^3 + u,$$

где $\theta_1 = 2$, $\theta_2 = 5$ — неизвестные коэффициенты. Задать неадаптивной системе нулевое перерегулирование и время переходного процесса $t_n = 1c$.

7. Решить задачу адаптивного управления для объекта

$$\dot{x}_1 = x_2,$$
$$\dot{x}_2 = \theta_1 x_1 x_2 + \theta_2 (x_1^2 + 1) + u,$$

где θ_1, θ_2 — неизвестные коэффициенты. Цель управления задается равенством (3.3). Задать неадаптивной системе нулевое перерегулирование и время переходного процесса $t_n = 1c$. В качестве сигнала задания использовать $g = 2sign(\sin t) + 1$.

8. Решить задачу адаптивного управления для объекта вида

$$\dot{x}_1 = x_2,$$
$$\dot{x}_2 = \theta x_1 + u,$$

где θ — неизвестный коэффициент. Цель управления задается равенством (3.3).

9. Решить задачу адаптивного управления для объекта вида

$$\dot{x}_1 = 3x_2,$$
$$\dot{x}_2 = \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + u,$$

где $\theta_1 = 1$, $\theta_2 = 2$ — неизвестные коэффициенты. Цель управления задается равенством (3.3). Задать неадаптивной системе нулевое перерегулирование и время переходного процесса $t_n = 1c$. В качестве сигнала задания использовать $g = 3sign(\sin 2t) + 2$.

10. Решить задачу адаптивного управления для объекта вида

$$\dot{x}_1 = x_2,$$
$$\dot{x}_2 = \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + \theta_3 u,$$

где θ_1, θ_2, $\theta_3 \geq \theta_{03} > 0$ — неизвестные коэффициенты. Цель управления задается равенством (3.3).

Задачи и вопросы повышенной сложности

1. Обеспечивает ли представленный в работе алгоритм адаптивного управления цель (3.3) для объекта с переменными параметрами? Ответ пояснить.

2. Как бы изменился ход решения задачи, если бы в объекте (3.1) параметр b_0 был бы положителен и неизвестен? Решить задачу адаптивного управления для данного случая, модифицировав имеющееся решение.

3. Удовлетворяет ли вектор

$$\omega(t) = [\sin t,\ \cos t + k \sin 2t]^T$$

условию (3.14) при $k = 0$ и $k = 1$? Ответ пояснить.

4. Удовлетворяет ли вектор

$$\omega(t) = [\sin \sqrt{t},\ \cos \sqrt{t}]^T$$

условию (3.14)? Ответ пояснить.

5. Решить задачу адаптивного управления для объекта, представленного дискретной моделью вида[1]

$$x_1(k+1) = x_2(k),$$
$$x_2(k+1) = \theta_1 x_1(k) + \theta_2 x_2(k) + u(k),$$

где θ_1, θ_2 — неизвестные коэффициенты, k — дискретное время. Цель управления задается следующим равенством:

$$\lim_{k\to\infty}\bigl(x_M(k) - x(k)\bigr) = \lim_{k\to\infty}\bigl(e(k)\bigr) = 0.$$

Вектор x_M генерируется эталонной моделью вида

$$x_M(k+1) = A_M x_M(k) + b_M g(k)$$

[1] При построении дискретной реализации алгоритма адаптации необходимо нормировать вектор измеряемых функций (регрессор) с целью предотвращения неограниченного роста оценок. Так, например, в модификации алгоритма (3.13) необходимо использовать $x/(1 + x^T x)$ вместо x.

с задающим воздействием g и матрицами

$$A_M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_{M0} & a_{M1} \end{bmatrix}, \; b_M = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 + a_{M1} + a_{M0} \end{bmatrix}.$$

Параметры эталонной модели a_{M0}, a_{M1} задаются, исходя из условия устойчивости эталонной модели и заданных динамических показателей качества.

Работа № 4. РОБАСТНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫМ МНОГОМЕРНЫМ ОБЪЕКТОМ ПО СОСТОЯНИЮ

Цель работы: освоение принципов построения робастной системы управления многомерным объектом на основе метода функций Ляпунова.

Методические рекомендации. До начала работы студенты должны ознакомиться с принципом построения алгоритмов робастного управления на основе стандартной модели ошибки с измеряемым состоянием.

Теоретические сведения. Рассмотрим задачу робастного управления многомерным объектом с использованием эталонной модели. При этом воспользуемся результатами решения аналогичной задачи для объекта первого порядка (см. Работу №2).

Постановка задачи. Дан возмущенный объект, модель которого описывается уравнениями вида

$$\dot{x} = Ax + bu + \delta, \quad x(0) \tag{4.1}$$

$$y = Cx, \tag{4.2}$$

где δ — вектор возмущающих воздействий, удовлетворяющий неравенству $\|\delta(t)\| \le \bar{\delta}$. В модели $x \in R^n$ — вектор состояния, y — регулируемая переменная, матрицы A, b и C идентичны соответствующим матрицам объекта (3.1), (3.2).

Цель управления заключается в обеспечении целевого неравенства

$$\|x_M(t) - x(t)\| \le \Delta, \ \forall t \ge T, \tag{4.3}$$

где Δ, T — точность работы системы управления и время ее настройки соответственно, $x_M(t) \in R^n$ — эталонный сигнал, генерируемый моделью (3.4), (3.5).

Приведем два решения поставленной задачи, основанных на алгоритмах робастного управления скалярным объектом (см. Работу №2) и разработанном в Работе №3 базовом алгоритме адаптивного управления.

Решение №1. Решение основано на законе управления (3.10) и модификации алгоритма (3.13), представленной в следующей статической форме:

$$\hat{\theta} = \gamma x b^T P e, \tag{4.4}$$

где $\gamma > 0$ — коэффициент нелинейной обратной связи, P — матрица, определяемая из решения (3.12), $e = x_M(t) - x(t)$ — ошибка управления.

Анализ замкнутой системы может быть проведен на основе модели ошибки (3.11) и функции Ляпунова вида

$$V = \frac{1}{2} e^T P e. \tag{4.5}$$

В результате анализа можно установить, что система управления, замкнутая алгоритмом робастного управления (3.10), (4.4), обладает свойствами, аналогичными свойствам алгоритма (1.6), (2.4) в системе управления скалярным объектом (2.1). Для любых начальных условий $e(0)$ система обладает следующими свойствами:

С1.1. ограниченность всех сигналов;

С1.2. экспоненциальная сходимость нормы вектора ошибки e к ограниченной окрестности нулевого положения равновесия $e^* = 0$. При этом радиус окрестности можно уменьшить путем увеличения коэффициента γ;

С1.3. при отсутствии возмущения установившаяся ошибка $e(t)$ отлична от нуля.

Заметим, что после подстановки (4.4) в (3.10) в законе управления появляется "сильная" обратная связь в виде члена $x^T x$, которая позволяет исключить настройку регулятора и подавить влияние как неопределенности θ, так и возмущения δ.

Решение №2. Решение также основано на законе управления (3.10) и модификации алгоритма (3.13), представленной в виде

$$\dot{\hat{\theta}} = -\sigma\hat{\theta} + \gamma x b^T P e, \tag{4.6}$$

где $\gamma > 0$ — коэффициент адаптации, $\sigma > 0$ — коэффициент параметрической обратной связи, P — матрица, определяемая из решения (3.12).

Анализ замкнутой системы может быть проведен на основе модели ошибки (3.11) и функции Ляпунова

$$V = \frac{1}{2} e^T P e + \frac{1}{2\gamma} \tilde{\theta}^T \tilde{\theta},$$

где $\tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta}$ — вектор параметрических ошибок.

В результате анализа можно установить, что система управления, замкнутая алгоритмом робастного управления (3.10), (4.6), обладает свойствами, аналогичными свойствам алгоритма (1.6), (2.7) в системе управления объектом первого порядка (2.1). Для любых начальных условий $e(0)$ система обладает следующими свойствами:

С2.1. ограниченность всех сигналов;

C2.2. экспоненциальная сходимость норм векторов ошибки e и $\tilde{\theta}$ к ограниченным окрестностям нулевых положений равновесия $e^* = 0$ и $\tilde{\theta}^* = 0$. Радиус окрестности можно уменьшить путем увеличения коэффициента γ и снижения параметра σ;

C2.3. в общем случае при отсутствии возмущения в установившемся режиме e и $\tilde{\theta}$ отличны от нулей, но при этом их максимальные значения могут быть уменьшено путем уменьшения σ.

Порядок выполнения работы

1. На основе результатов, полученных при выполнении работы №3, модифицировать алгоритм адаптации (3.13) и сформировать закон нелинейного робастного управления (3.10), (4.4) и закон адаптивного и робастного управления (3.10), (4.6). Построить в пакете Simulink модели соответствующих замкнутых систем управления, приняв в качестве возмущения следующую вектор-функцию:

$$\delta(t) = \left[0{,}6\sin 10t + 0{,}1\sin 50t, \quad 0{,}5\cos 12t + 0{,}2\sin 30t\right]^T .$$

2. Провести эксперименты с системой робастного управления, замкнутой алгоритмом (3.10), (4.4), для трех различных коэффициентов γ при отсутствии и наличии возмущения $\delta(t)$.

По результатам каждого эксперимента построить траектории $x(t)$ и $x_M(t)$ на одном графике, $e(t)$ — на другом.

3. Провести эксперименты с системой робастного управления, замкнутой алгоритмом (3.10), (4.6), для выбранного параметра σ и двух различных коэффициентов γ, принятых в п.п.2, при отсутствии и наличии возмущения $\delta(t)$. Далее уменьшить параметр σ и повторить предыдущий эксперимент (при отсутствии и наличии возмущения $\delta(t)$) для одного из выбранных коэффициентов γ.

По результатам каждого эксперимента построить траектории $x(t)$ и $x_M(t)$ на одном графике, $e(t)$ — на втором и $\tilde{\theta}(t)$ — на третьем.

4. Сделать выводы по каждому пункту работы.

Задачи и вопросы

1. Доказать свойство экспоненциальной сходимости ошибки управления к ограниченному множеству для замкнутой системы с управлением (3.10) и нелинейной обратной связью (4.4).

2. Доказать свойство экспоненциальной сходимости ошибки управления к ограниченному множеству для замкнутой системы с управлением (3.10) и алгоритмом адаптации (4.6).

3. С какой целью в алгоритм (4.6) добавляется параметрическая обратная связь с коэффициентом σ?

4. Будет ли равна нулю ошибка управления в алгоритмах робастного управления (3.10), (4.4) и (3.10), (4.6) при отсутствии возмущений? Ответ пояснить.

5. Как изменится гарантированный радиус окрестности, в которую попадет норма ошибки $\|x_M(t) - x(t)\|$ при использовании в системе управления алгоритма (4.6) и одновременном двукратном увеличении коэффициентов γ и σ?

6. Будет ли устойчива система робастного управления с регулятором (3.10) и нелинейной обратной связью (4.4), если коэффициент γ положителен, матрица A_M гурвицева и задана в канонической управляемой форме, а матрица P имеет одно из следующих значений:

а) $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$; б) $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$; в) $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$; г) $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$?

7. Решить задачу робастного управления для маятника, представленного моделью вида

$$\dot{x}_1 = x_2,$$
$$\dot{x}_2 = \theta_1 \sin(x_1) + \theta_2 x_2 + u + \delta,$$

где θ_1, θ_2 — неизвестные параметры, δ — ограниченное возмущение, удовлетворяющее неравенству $|\delta(t)| \le \bar{\delta}$. Цель управления заключается в построении закона управления, обеспечивающего выполнение неравенства (4.3).

8. Решить задачу робастного управления для объекта вида

$$\dot{x}_1 = x_2,$$
$$\dot{x}_2 = \theta + x_2 + u + \delta,$$

где θ — неизвестный параметр, δ — ограниченное возмущение, удовлетворяющее неравенству $|\delta(t)| \le \bar{\delta}$. Цель управления заключается в построении закона управления, обеспечивающего выполнение неравенства (4.3). В ходе синтеза задействовать алгоритм адаптации (4.6).

9. Промоделировать замкнутую систему робастного управления, синтезированную согласно одному из вариантов выполнения работы, с использованием следующей модификации алгоритма адаптации:

$$\dot{\hat{\theta}} = \begin{cases} -\sigma\hat{\theta} + \gamma x k^T P e, & \text{если } \|\hat{\theta}\|_2 \geq \theta_0 \\ \gamma x k^T P e, & \text{если } \|\hat{\theta}\|_2 < \theta_0, \end{cases}$$

где $\theta_0 = 1.5\|\theta\|_2$. Значения коэффициентов γ и σ принять идентичными значениям в п. 3 порядка выполнения работы. Функцию возмущения принять равной функции в п. 1 порядка выполнения работы.

Сравнить результат с результатом, полученным при использовании алгоритма адаптации (4.6). Пояснить достоинство данной модификации.

10. Решить задачу робастного управления для объекта вида

$$\dot{x}_1 = 2x_2,$$
$$\dot{x}_2 = \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + u + \delta,$$

где θ_1, θ_2 — неизвестные параметры, δ — ограниченное возмущение, удовлетворяющее неравенству $|\delta(t)| \leq \bar{\delta}$. Цель управления заключается в построении закона управления, обеспечивающего выполнение неравенства (4.3).

Задачи и вопросы повышенной сложности

1. Показать, что система управления, замкнутая управлением (3.10) с нелинейной обратной связью (4.4), робастна по отношению к незначительным вариациям параметров θ.

2. Решить задачу робастного управления для объекта вида

$$\dot{x}_1 = x_2,$$
$$\dot{x}_2 = \theta_1 x_1 + x_2 + \theta_2 u + \delta,$$

где θ_1, $\theta_2 \geq \theta_{02} > 0$ — неизвестные параметры, δ — ограниченное возмущение, удовлетворяющее неравенству $|\delta(t)| \leq \bar{\delta}$. Цель управления заключается в построении закона управления, обеспечивающего выполнение неравенства (4.3).

3. Решить задачу робастного управления для объекта вида

$$\dot{x}_1 = x_2,$$
$$\dot{x}_2 = x_3,$$
$$\dot{x}_3 = x_1^2 - \theta u + \delta,$$

где $\theta \ge \theta_0 > 0$ — неизвестный параметр, δ — ограниченное возмущение, удовлетворяющее неравенству $|\delta(t)| \le \bar{\delta}$. Цель управления заключается в построении закона управления, обеспечивающего выполнение неравенства (4.3).

4. Решить задачу робастного управления для электропривода, описываемого уравнениями вида

$$\dot{x} = -ax + bu,$$
$$\dot{y} = x + \delta,$$

где $a, b \ge b_0 > 0$ — неизвестные параметры, δ — ограниченное возмущение, удовлетворяющее неравенству $|\delta(t)| \le \bar{\delta}$, x, y — скорость и положение ротора соответственно. Цель управления заключается в построении управления, обеспечивающего выполнение следующего неравенства:

$$|y_M(t) - y(t)| \le \Delta, \ \forall t \ge T,$$

где Δ, T — точность работы системы управления в установившемся режиме и время настройки системы соответственно, y_M — выход эталонной модели

$$y_M = \frac{\omega^2}{s^2 + 2\omega s + \omega^2}[g] \ ,$$

ω — положительная величина (среднегеометрический корень), g — сигнал задания.

5. Решить задачу повышенной сложности №5 в Работе №3 с использованием дискретной версии алгоритма адаптации (4.6). Привести доказательство экспоненциальной сходимости ошибок управления к ограниченным множествам.