11. Алгоритмы адаптации с улучшенной параметрической сходимостью

1. Мотивация

Рассмотрим алгоритм адаптации

$$\dot{\hat{\theta}} = \gamma\omega\varepsilon \tag{11.1}$$

где $\gamma > 0$ – коэффициент адаптации, $\omega \in \mathbb{R}^m$ – регрессор,

$$\varepsilon = y - \hat{\theta}^T\omega \tag{11.2}$$

– сигнал ошибки (например, ошибки идентификации или управления),

$$y = \theta^T\omega + \sigma \tag{11.3}$$

– выход линейной регрессии, $\hat{\theta}$ – вектор настраиваемых параметров (или оценок), θ – вектор неизвестных параметров, $\sigma(t)$ – экспоненциально затухающий член.

11. Алгоритмы адаптации с улучшенной параметрической сходимостью

1. Мотивация

Рассмотрим алгоритм адаптации

$$\dot{\hat{\theta}} = \gamma\omega\varepsilon \tag{11.1}$$

где $\gamma > 0$ – коэффициент адаптации, $\omega \in \mathbb{R}^m$ – регрессор,

$$\varepsilon = y - \hat{\theta}^T\omega \tag{11.2}$$

– сигнал ошибки (например, ошибки идентификации или управления),

$$y = \theta^T\omega + \sigma = \varepsilon + \hat{\theta}^T\omega \tag{11.3}$$

– выход линейной регрессии, $\hat{\theta}$ – вектор настраиваемых параметров (или оценок), θ – вектор неизвестных параметров, $\sigma(t)$ – экспоненциально затухающий член.

σ в дальнейшем опускается

1. Мотивация

Свойства:

1. Вектор параметрических ошибок $\tilde{\theta}(t)$ ограничен.

   Если $\omega(t), \dot{\omega}(t)$ ограничены, то $\varepsilon(t), \dot{\hat{\theta}}(t)$ ограничены;

2. Если $\omega(t), \dot{\omega}(t)$ ограничены, то $\varepsilon(t)$ стремится к нулю при $t \to 0$;

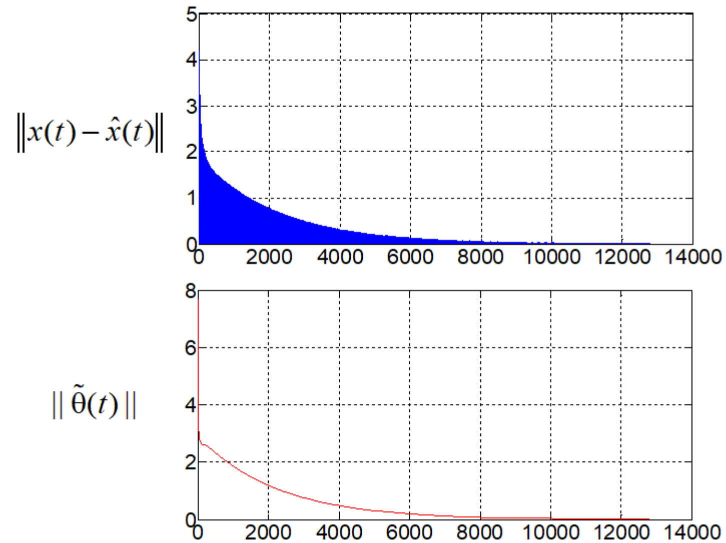
3. $\left\|\tilde{\theta}(t)\right\|$ стремится к нулю экспоненциально т.т.т, когда $\omega \in PE$, т.е.,

$$\int_{t}^{t+T} \omega(\tau)\omega^{T}(\tau)d\tau \geq \alpha I > 0 \tag{11.4}$$

   для некоторых $\alpha,\ T > 0$;

4. Если $\omega \in PE$, то существует оптимальное значение γ, при котором скорость сходимости $\left\|\tilde{\theta}(t)\right\| \to 0$ максимальна.

Максимальная скорость может быть произвольно низкой!



См. моделирование для адаптивного наблюдателя (Лекция 8) 7000-9000с

4. Если $\omega \in PE$, то существует оптимальное значение γ , при котором скорость сходимости $\left\|\tilde{\theta}(t)\right\| \to 0$ максимальна.

2. Схема Крейссельмейера

Алгоритм с РПР (G. Kreisselmeier, TAC, 1977)

Расширение регрессора:

$$y = \theta^T \omega \tag{11.5}$$

2. Схема Крейссельмейера

Алгоритм с РПР (G. Kreisselmeier, TAC, 1977)

Расширение регрессора:

$$y = \theta^T \omega \tag{11.5}$$

$$\Downarrow$$

$$\omega y = \omega \omega^T \theta$$

2. Схема Крейссельмейера

Алгоритм с РПР (G. Kreisselmeier, TAC, 1977)

Расширение регрессора:

$$y = \theta^T \omega \tag{11.5}$$

$$\Downarrow$$

$$\omega y = \omega\omega^T \theta$$

Выберем и применим оператор передаточной функции

$$L(s)\left[\omega y\right] = L(s)\left[\omega\omega^T\right]\theta$$

$L(s)$ должна быть устойчивой и минимально фазовой

$$\Downarrow$$

2. Схема Крейссельмейера

Алгоритм с РПР (G. Kreisselmeier, TAC, 1977)

Расширение регрессора:

$$y = \theta^T \omega \qquad (11.5)$$

$$\Downarrow$$

$$\omega y = \omega \omega^T \theta$$

Выберем и применим оператор передаточной функции

$$\underbrace{L(s)\left[\omega y\right]}_{Y} = \underbrace{L(s)\left[\omega \omega^T\right]}_{\Omega} \theta$$

$L(s)$ должна быть устойчивой и минимально фазовой

2. Схема Крейссельмейера

Алгоритм с РПР (G. Kreisselmeier, TAC, 1977)

Расширение регрессора:

$$y = \theta^T \omega \qquad (11.5)$$

$$\Downarrow$$

$$\omega y = \omega \omega^T \theta$$

Выберем и применим оператор передаточной функции

$$\underbrace{L(s)\left[\omega y\right]}_{Y} = \underbrace{L(s)\left[\omega \omega^T\right]}_{\Omega = \Omega^T} \theta$$

$L(s)$ должна быть устойчивой и минимально фазовой

Результат расширения:

$$Y = \Omega \theta \qquad (11.6)$$

Алгоритм с РПР (G. Kreisselmeier, TAC, 1977)

Результат расширения:

$$Y = \Omega\theta \tag{11.7}$$

Алгоритм адаптации:

$$\dot{\hat{\theta}} = \gamma\Omega E, \tag{11.8}$$

где $E = Y - \Omega\hat{\theta}$ – ошибка, расширенная с памятью регрессора;

$\gamma > 0$ – положительный коэффициент.

Алгоритм с РПР (G. Kreisselmeier, TAC, 1977)

Результат расширения:

$$Y = \Omega\theta \tag{11.7}$$

Алгоритм адаптации:

$$\dot{\hat{\theta}} = \gamma\Omega E, \tag{11.8}$$

где $E = Y - \Omega\hat{\theta}$ – ошибка, расширенная с памятью регрессора;

$\gamma > 0$ – положительный коэффициент..

Замечание 11.1. Если выбранная $L(s)$***положительна, т.е., для любой функции времени*** $f(t) > 0$ ***справедливо*** $L(s)[f(t)] > 0 \;\; \forall t \geq T_0$***, то алгоритм (11.8) может быть упрощен:***

Алгоритм с РПР (G. Kreisselmeier, TAC, 1977)

Результат расширения:

$$Y = \Omega\theta \tag{11.7}$$

Алгоритм адаптации:

$$\dot{\hat{\theta}} = \gamma\Omega E, \tag{11.8}$$

где $E = Y - \Omega\hat{\theta}$ – ошибка, расширенная с памятью регрессора;

$\gamma > 0$ – положительный коэффициент..

Замечание 11.1. Если выбранная $L(s)$ ***положительна, т.е., для любой функции времени*** $f(t) > 0$ ***справедливо*** $L(s)\left[f(t)\right] > 0 \ \forall t \geq T_0$***, то алгоритм (11.8) может быть упрощен:***

$$\dot{\hat{\theta}} = \gamma E$$

$$L(s) = \prod_{i=1}^{N} \frac{d_i}{s + d_i}$$

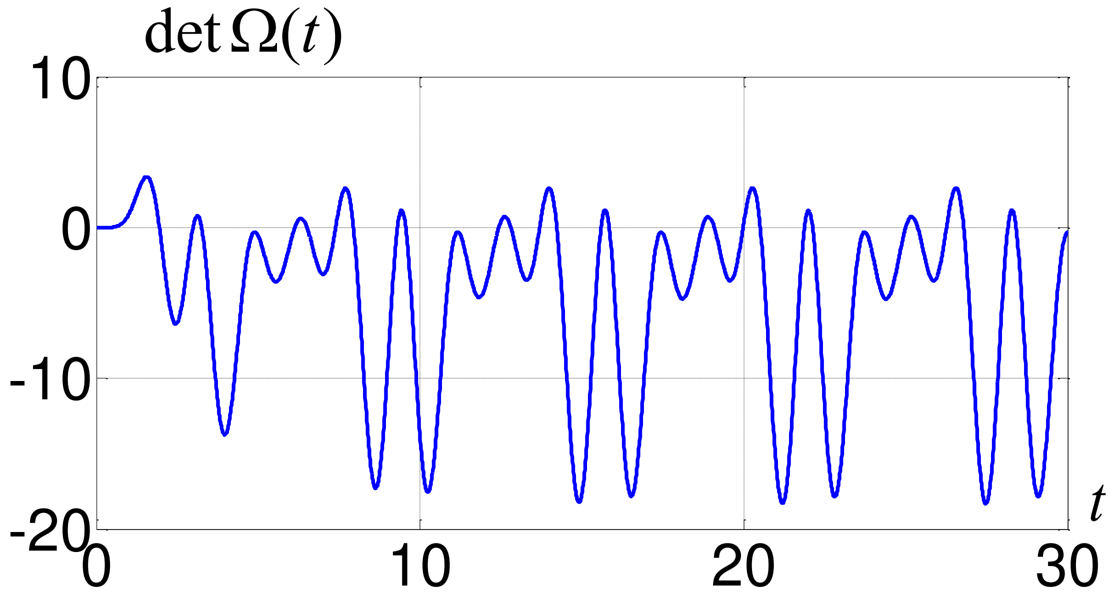
$$L(s) = \frac{1}{T^2 s^2 + T\xi s + 1}$$

$$\xi \in (0,1)$$

Пример 11.1. Свойство неположительности колебательного звена

$$\Omega = L(s)\left[\omega\omega^T\right]$$

$$L(s) = \frac{1}{0.25s^2 + 0.2s + 1}, \quad \omega = [1+\sin t, 1+\cos 2t]^T$$



Алгоритм с РПР (G. Kreisselmeier, TAC, 1977)

Модель параметрической ошибки

$$\dot{\tilde{\theta}} = -\dot{\hat{\theta}},\ E = Y - \Omega\hat{\theta},$$

$$L(s) = \prod_{i=1}^{N} \frac{d_i}{s+d_i} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$$

$$\dot{\tilde{\theta}} = -\gamma\Omega\tilde{\theta} \tag{11.10}$$

Алгоритм с РПР (G. Kreisselmeier, TAC, 1977)

1. Ограниченность

Выберем функцию Ляпунова

$$V = \frac{1}{2\gamma}\tilde{\theta}^T\tilde{\theta} \qquad (11.11)$$

и вычислим ее производную в силу (11.10):

$$\dot{\tilde{\theta}} = -\gamma\Omega\tilde{\theta}$$

$\dot{V} = -\tilde{\theta}^T\Omega(t)\tilde{\theta} \le 0.$

Следовательно, $\left\|\tilde{\theta}(t)\right\|$ ограничена (для любого ω).

Если ω ограничен, то ε, E и $\dot{\hat{\theta}}$ ограничены.

Алгоритм с РПР (G. Kreisselmeier, TAC, 1977)

1. Ограниченность

Выберем функцию Ляпунова

$$V = \frac{1}{2\gamma}\tilde{\theta}^T\tilde{\theta} \qquad (11.11)$$

и вычислим ее производную в силу (11.10):

$$\dot{V} = -\tilde{\theta}^T\Omega(t)\tilde{\theta} \le 0.$$

Следовательно, $\left\|\tilde{\theta}(t)\right\|$ ограничена (для любого ω).

Если ω ограничен, то ε, E и $\dot{\hat{\theta}}$ ограничены.

$$V(t) = V(0) - \int_0^\infty \tilde{\theta}^T(\tau)\Omega(\tau)\tilde{\theta}(\tau)d\tau \le c_1 < \infty.$$

$$\sqrt{\Omega\ (t)}\tilde{\theta}(t) \to 0 \qquad t \to \infty$$

Алгоритм с РПР (G. Kreisselmeier, TAC, 1977)

2. Сходимость по ε и E

Так как ω ограничен, то существуют константы $c_2, c_3 > 0$ такие, что

$$\int_0^\infty \tilde{\theta}^T \Omega^2 \tilde{\theta} d\tau \le c_2 \int_0^\infty \tilde{\theta}^T \Omega \tilde{\theta} d\tau \le c_3 < \infty.$$

Как следствие, $\Omega(t)\tilde{\theta}(t) = E(t) \to 0$ и $\dot{\hat{\theta}}(t) = -\dot{\tilde{\theta}}(t) = \gamma E(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

Алгоритм с РПР (G. Kreisselmeier, TAC, 1977)

2. Сходимость по ε и E

Так как ω ограничен, то существуют константы $c_2, c_3 > 0$ такие, что

$$\int_0^\infty \tilde{\theta}^T \Omega^2 \tilde{\theta} d\tau \le c_2 \int_0^\infty \tilde{\theta}^T \Omega \tilde{\theta} d\tau \le c_3 < \infty.$$

Как следствие, $\Omega(t)\tilde{\theta}(t) = E(t) \to 0$ и $\dot{\hat{\theta}}(t) = -\dot{\tilde{\theta}}(t) = \gamma E(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

Продолжая, имеем

$$E = Y - \Omega\hat{\theta} = L(s)\left[\omega\varepsilon\right] + L(s)\left[\omega\omega^T\hat{\theta}\right] - L(s)\left[\omega\omega^T\right]\hat{\theta}$$

$$= \left[\textit{Swapping lemma}\right]$$

$$= L(s)\left[\omega\varepsilon\right] + L(s)\left[\omega\omega^T\right]\hat{\theta} - Z - L(s)\left[\omega\omega^T\right]\hat{\theta}$$

Алгоритм с РПР (G. Kreisselmeier, TAC, 1977)

2. Сходимость of ε и E

$$E = Y - \Omega\hat{\theta} = L(s)\left[\omega\varepsilon\right] + L(s)\left[\omega\omega^T\hat{\theta}\right] - L(s)\left[\omega\omega^T\right]\hat{\theta}$$

$$= \left[\textit{Лемма о перестановке}\right]$$

$$= L(s)\left[\omega\varepsilon\right] + \cancel{L(s)\left[\omega\omega^T\right]\hat{\theta}} - Z - \cancel{L(s)\left[\omega\omega^T\right]\hat{\theta}}$$

где матрица Z генерируется фильтрами

$$\dot{X} = \left(I_m \otimes A_L\right)X + \left(I_m \otimes b_L\right)R\dot{\hat{\theta}}, \qquad Z = \left(c_L^T \otimes I_m\right)X$$

$$\dot{R} = \left(I_m \otimes A_L\right)R + \left(I_m \otimes b_L\right)\omega\omega^T$$

Алгоритм с РПР (G. Kreisselmeier, TAC, 1977)

Тройка $\left(A_L, b_L, c_L\right)$ является минимальной реализацией

$L(s) = c_L^T \left(sI_N - A_L\right)^{-1} b_L$ и представлена как

$$A_L = \begin{bmatrix} -d_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -d_2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & -d_3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & -d_N \end{bmatrix}, \; b_L = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \prod_{i=1}^{N} d_i \end{bmatrix}, \; c_L = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Произведение Кронекера определяется как

$$I_m \otimes A_L = \begin{bmatrix} A_L & O_N & \cdots & O_N \\ O_N & A_L & \ddots & O_N \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ O_N & O_N & \cdots & A_L \end{bmatrix}, \; I_m \otimes b_L = \begin{bmatrix} b_L & O_N & \cdots & O_N \\ O_N & b_L & \ddots & O_N \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ O_N & O_N & \cdots & b_L \end{bmatrix}, \; c_L^T \otimes I_m = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ I_m \end{bmatrix}^T.$$

Алгоритм с РПР (G. Kreisselmeier, TAC, 1977)

2. Сходимость по ε и E

$$E = Y - \Omega\hat{\theta} = L(s)[\omega\varepsilon] + L(s)\left[\omega\omega^T\hat{\theta}\right] - L(s)\left[\omega\omega^T\right]\hat{\theta}$$

$$= [\textit{Лемма о перестановке}]$$

$$= L(s)[\omega\varepsilon] + L(s)\left[\omega\omega^T\right]\hat{\theta} - Z - L(s)\left[\omega\omega^T\right]\hat{\theta}$$

$$= L(s)[\omega\varepsilon] - Z,$$

где матрица Z генерируется фильтрами

$$\dot{X} = (I_m \otimes A_L)X + (I_m \otimes b_L)R\dot{\hat{\theta}}, \qquad Z = \left(c_L^T \otimes I_m\right)X$$

$$\dot{R} = (I_m \otimes A_L)R + (I_m \otimes b_L)\omega\omega^T$$

Алгоритм с РПР (G. Kreisselmeier, TAC, 1977)

2. Сходимость по ε и E

$$E = Y - \Omega\hat{\theta} = L(s)[\omega\varepsilon] + L(s)\left[\omega\omega^T\hat{\theta}\right] - L(s)\left[\omega\omega^T\right]\hat{\theta}$$

$$= [\textit{Лемма о перестановке}]$$

$$= L(s)[\omega\varepsilon] + L(s)\left[\omega\omega^T\right]\hat{\theta} - Z - L(s)\left[\omega\omega^T\right]\hat{\theta}$$

$$= L(s)[\omega\varepsilon] + Z,$$

где матрица Z генерируется фильтрами

$$\dot{X} = (I_m \otimes A_L)X + (I_m \otimes b_L)R\dot{\hat{\theta}}, \quad Z = \left(c_L^T \otimes I_m\right)X$$

$$\dot{R} = (I_m \otimes A_L)R + (I_m \otimes b_L)\omega\omega^T$$

$$E(t) \to 0$$

$$\dot{\hat{\theta}}(t) = \gamma\Omega(t)E(t) \to 0$$

$$Z(t) \to 0$$

if ω is bounded

Алгоритм с РПР (G. Kreisselmeier, TAC, 1977)

3. Сходимость по $\tilde{\theta}(t)$:

Select the Lyapunov function candidate

$$V = \frac{1}{2\gamma}\tilde{\theta}^T\tilde{\theta} \qquad (11.11)$$

and evaluate its time derivative in view of (11.10):

$$\dot{\tilde{\theta}} = -\gamma\Omega\tilde{\theta}$$

$$\dot{V} = -\tilde{\theta}^T\Omega(t)\tilde{\theta} = -\tilde{\theta}^T L(s)\left[\omega\omega^T\right]\tilde{\theta}$$

$$= -\tilde{\theta}^T c_L^T \int_0^t \mathrm{e}^{A_L(t-\tau)} b_L \omega(\tau)\omega^T(\tau) d\tau\, \tilde{\theta}$$

$$A_L = \begin{bmatrix} -d_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -d_2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & -d_3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & -d_N \end{bmatrix}, \quad b_L = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \prod_{i=1}^{N} d_i \end{bmatrix}, \quad c_L = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Алгоритм с РПР (G. Kreisselmeier, TAC, 1977)

3. Сходимость по $\tilde{\theta}(t)$:

Select the Lyapunov function candidate

$$V = \frac{1}{2\gamma}\tilde{\theta}^T\tilde{\theta} \tag{11.11}$$

and evaluate its time derivative in view of (11.10):

$$\dot{V} = -\tilde{\theta}^T\Omega(t)\tilde{\theta} = -\tilde{\theta}^T L(s)\left[\omega\omega^T\right]\tilde{\theta}$$

$$= -\tilde{\theta}^T c_L^T \int_0^t e^{A_L(t-\tau)} b_L \omega(\tau)\omega^T(\tau)d\tau\,\tilde{\theta} = -\tilde{\theta}^T\left(\int_0^t \sum_{i=1}^N c_i e^{-d_i(t-\tau)}\omega(\tau)\omega^T(\tau)d\tau\right)\tilde{\theta}$$

where c_i are constants depending on the elements of A_L, b_L, c_L.

Алгоритм с РПР (G. Kreisselmeier, TAC, 1977)

3. Сходимость of $\tilde{\theta}(t)$

Select the Lyapunov function candidate

$$V = \frac{1}{2\gamma}\tilde{\theta}^T\tilde{\theta} \tag{11.11}$$

and evaluate its time derivative in view of (11.10):

$$\dot{V} = -\tilde{\theta}^T\Omega(t)\tilde{\theta} = -\tilde{\theta}^T L(s)\left[\omega\omega^T\right]\tilde{\theta}$$

$$= -\tilde{\theta}^T c_L^T \int_0^t \mathrm{e}^{A_L(t-\tau)} b_L \omega(\tau)\omega^T(\tau)d\tau\,\tilde{\theta} = -\tilde{\theta}^T\left(\int_0^t \sum_{i=1}^N c_i \mathrm{e}^{-d_i(t-\tau)}\omega(\tau)\omega^T(\tau)d\tau\right)\tilde{\theta}$$

$$\leq -\tilde{\theta}^T\left(\sum_{i=1}^N \int_{t-T}^t c_i \mathrm{e}^{-d_i(t-\tau)}\omega(\tau)\omega^T(\tau)d\tau\right)\tilde{\theta}$$

Алгоритм с РПР (G. Kreisselmeier, TAC, 1977)

3. Сходимость of $\tilde{\theta}(t)$

Select the Lyapunov function candidate

$$V = \frac{1}{2\gamma}\tilde{\theta}^T\tilde{\theta} \qquad (11.11)$$

and evaluate its time derivative in view of (11.10):

$$\dot{V} = -\tilde{\theta}^T\Omega(t)\tilde{\theta} = -\tilde{\theta}^T L(s)\left[\omega\omega^T\right]\tilde{\theta}$$

$$= -\tilde{\theta}^T c_L^T \int_0^t e^{A_L(t-\tau)} b_L \omega(\tau)\omega^T(\tau)d\tau\,\tilde{\theta} = -\tilde{\theta}^T\left(\int_0^t \sum_{i=1}^N c_i e^{-d_i(t-\tau)}\omega(\tau)\omega^T(\tau)d\tau\right)\tilde{\theta}$$

$$\leq -\tilde{\theta}^T\left(\sum_{i=1}^N \int_{t-T}^t c_i e^{-d_i(t-\tau)}\omega(\tau)\omega^T(\tau)d\tau\right)\tilde{\theta}$$

$$\leq -\tilde{\theta}^T\left(\sum_{i=1}^N c_i e^{-d_i T}\right)\int_{t-T}^t \omega(\tau)\omega^T(\tau)d\tau\,\tilde{\theta} \qquad c_i > 0$$

Алгоритм с РПР (G. Kreisselmeier, TAC, 1977)

3. Сходимость of $\tilde{\theta}(t)$

Select the Lyapunov function candidate

$$V = \frac{1}{2\gamma}\tilde{\theta}^T\tilde{\theta} \qquad (11.11)$$

and evaluate its time derivative in view of (11.10):

$$\dot{V} = -\tilde{\theta}^T\Omega(t)\tilde{\theta} = -\tilde{\theta}^T L(s)\left[\omega\omega^T\right]\tilde{\theta}$$

$$= -\tilde{\theta}^T c_L^T \int_0^t e^{A_L(t-\tau)} b_L \omega(\tau)\omega^T(\tau)d\tau\,\tilde{\theta} = -\tilde{\theta}^T\left(\int_0^t \sum_{i=1}^N c_i e^{-d_i(t-\tau)}\omega(\tau)\omega^T(\tau)d\tau\right)\tilde{\theta}$$

$$\le -\tilde{\theta}^T\left(\sum_{i=1}^N \int_{t-T}^t c_i e^{-d_i(t-\tau)}\omega(\tau)\omega^T(\tau)d\tau\right)\tilde{\theta}$$

if $\omega \in PE$, *i.e.*,

$$\int_{t-T}^t \omega(\tau)\omega^T(\tau)d\tau \ge \alpha I > 0$$

$$\le -\tilde{\theta}^T\left(\sum_{i=1}^N c_i e^{-d_i T}\right)\int_{t-T}^t \omega(\tau)\omega^T(\tau)d\tau\,\tilde{\theta} \le -2\alpha\gamma\left(\sum_{i=1}^N c_i e^{-d_i T}\right)V$$

Алгоритм с РПР (G. Kreisselmeier, TAC, 1977)

3. Сходимость of $\tilde{\theta}(t)$

$$\dot{V} \le -2\alpha\gamma\left(\sum_{i=1}^{N} c_i \mathrm{e}^{-d_i T}\right)V$$

$$\Downarrow$$

$$V(t) \le \mathrm{e}^{-2\alpha\gamma\left(\sum_{i=1}^{N} c_i \mathrm{e}^{-d_i T}\right)t} V(0)$$

$$\left\|\tilde{\theta}(t)\right\|^2 \le \mathrm{e}^{-2\alpha\gamma\left(\sum_{i=1}^{N} c_i \mathrm{e}^{-d_i T}\right)t} \left\|\tilde{\theta}(0)\right\|^2$$

if $\omega \in PE$, *i.e.*,

$$\int_{t-T}^{t} \omega(\tau)\omega^T(\tau)d\tau \ge \alpha I > 0$$

Hence, $\tilde{\theta}(t)$ tends to zero exponentially iff $\omega(t) \in PE$.

Алгоритм с РПР (G. Kreisselmeier, TAC, 1977)

Свойства:

1. The vector of parametric errors $\tilde{\theta}(t)$ is bounded.

   If $\omega(t)$ are bounded, then $\varepsilon(t), E(t), \dot{\hat{\theta}}(t)$ are bounded;

2. If $\omega(t)$ are bounded, then $E(t)$ and $\varepsilon(t)$ tend to zero asymptotically as $t \to 0$;

3. $\left\|\tilde{\theta}(t)\right\|$ approaches zero exponentially fast iff $\omega \in PE$, i.e.,

$$\int_t^{t+T} \omega(\tau)\omega^T(\tau)d\tau \geq \alpha I > 0$$

   for some positive α, T;

4. If $\omega \in PE$, then the rate of parametric Сходимость can be increased arbitrarily (in theory) by increasing the gain γ .

Алгоритм с РПР (G. Kreisselmeier, TAC, 1977)

Свойства:

1. The vector of parametric errors $\tilde{\theta}(t)$ is bounded.

   If $\omega(t)$ are bounded, then $\varepsilon(t), E(t), \dot{\hat{\theta}}(t)$ are bounded;

2. If $\omega(t)$ are bounded, then $E(t)$ and $\varepsilon(t)$ tend to zero asymptotically as $t \to 0$;

3. $\left\|\tilde{\theta}(t)\right\|$ approaches zero exponentially fast iff $\omega \in PE$, i.e.,

$$\int_t^{t+T} \omega(\tau)\omega^T(\tau)d\tau \geq \alpha I > 0$$

is not provided
by the gradient algorithm
$\dot{\hat{\theta}} = \gamma\omega\varepsilon$

for some positive α, T;

4. If $\omega \in PE$, then the rate of parametric Сходимость can be increased arbitrarily (in theory) by increasing the gain γ.

Алгоритм с РПР (G. Kreisselmeier, TAC, 1977)

Свойства:

5. Denote by $\lambda_\Omega(t)$ the minimum eigenvalue of the matrix $\Omega(t)$. Then it follows from the inequality

$$\dot V = -\tilde\theta^T \Omega(t)\tilde\theta \le -\lambda_\Omega(t)\tilde\theta^T\tilde\theta = -2\gamma\lambda_\Omega(t)V,$$

that

$$V(t) \le e^{-2\gamma\int_0^t \lambda_\Omega(\tau)d\tau} V(0), \quad \text{or} \quad \left\|\tilde\theta(t)\right\|^2 \le e^{-2\gamma\int_0^t \lambda_\Omega(\tau)d\tau} \left\|\tilde\theta(0)\right\|^2,$$

and, hence, even if $\omega \notin PE$ but $\lambda_\Omega(t) \notin L_1$, i.e.,

$$\int_0^\infty \lambda_\Omega(\tau)d\tau = \infty,$$

$\left\|\tilde\theta(t)\right\|$ approaches zero **asymptotically** as $t \to 0$.

Алгоритм с РПР (G. Kreisselmeier, TAC, 1977)

Свойства:

5. Denote by $\lambda_\Omega(t)$ the minimum eigenvalue of the matrix $\Omega(t)$. Then it follows from the inequality

$$\dot V = -\tilde\theta^T\Omega(t)\tilde\theta \le -\lambda_\Omega(t)\tilde\theta^T\tilde\theta = -2\gamma\lambda_\Omega(t)V,$$

that

$$V(t) \le \mathrm{e}^{-2\gamma\int_0^t \lambda_\Omega(\tau)d\tau} V(0), \text{ or } \left\|\tilde\theta(t)\right\|^2 \le \mathrm{e}^{-2\gamma\int_0^t \lambda_\Omega(\tau)d\tau}\left\|\tilde\theta(0)\right\|^2,$$

and, hence, even if $\omega \notin PE$ but $\lambda_\Omega(t) \notin L_1$, i.e.,

$$\int_0^\infty \lambda_\Omega(\tau)d\tau = \infty,$$

$\left\|\tilde\theta(t)\right\|$ approaches zero **asymptotically** as $t \to 0$.

не обеспечивается градиентным АА

$$\dot{\hat\theta} = \gamma\omega\varepsilon$$

Алгоритм с РПР (G. Kreisselmeier, TAC, 1977)

Свойства:

6. Consider the model of parametric error

$$\dot{\tilde{\theta}} = -\gamma\Omega\tilde{\theta} \tag{11.12}$$

a) If we select the adaptation gain as

$$\gamma = \gamma(t) = \gamma_0\left(\rho I + \Omega(t)\right)^{-1},$$

where $\gamma_0 > 0$ is a constant, $\rho > 0$ is a small constant.

Алгоритм с РПР (G. Kreisselmeier, TAC, 1977)

Свойства:

6. Consider the model of parametric error

$$\dot{\tilde{\theta}} = -\gamma\Omega\tilde{\theta} \qquad (11.12)$$

a) If we select the adaptation gain as

$$\gamma = \gamma(t) = \gamma_0 \left(\rho I + \Omega(t)\right)^{-1},$$

where $\gamma_0 > 0$ is a constant, $\rho > 0$ is a small constant.

Then

$$\dot{\tilde{\theta}} \approx -\gamma_0 \tilde{\theta},$$

and we obtain "almost" monotonic element-wise exponential Сходимость of the parametric error if $\omega \in PE$:

$$\tilde{\theta}_i(t) \approx e^{-\gamma_0 t} \tilde{\theta}_i(0).$$

Алгоритм с РПР (G. Kreisselmeier, TAC, 1977)

Свойства:

6. Consider the model of parametric error

$$\dot{\tilde{\theta}} = -\gamma\Omega\tilde{\theta} \tag{11.12}$$

b) If we select the adaptation gain as

$$\gamma = \gamma(t) = \gamma_0 adj\{\Omega\},$$

where $\gamma_0 > 0$ is a constant, $adj\{\Omega\}$ is the adjugate of Ω such that

$$adj\{\Omega\} = \Omega^{-1} det\{\Omega\}.$$

Алгоритм с РПР (G. Kreisselmeier, TAC, 1977)

Свойства:

6. Consider the model of parametric error

$$\dot{\tilde{\theta}} = -\gamma\Omega\tilde{\theta} \tag{11.12}$$

b) If we select the adaptation gain as

$$\gamma = \gamma(t) = \gamma_0 adj\{\Omega\},$$

where $\gamma_0 > 0$ is a constant, $adj\{\Omega\}$ is the adjugate of Ω such that

$$adj\{\Omega\} = \Omega^{-1} det\{\Omega\},$$

then

$$\dot{\tilde{\theta}} = -\gamma_0 det\{\Omega\}\tilde{\theta},$$

and if $\omega \in PE$, we obtain monotonic element-wise exponential

Сходимость of the parameters.

Алгоритм с РПР (G. Kreisselmeier, TAC, 1977)

Свойства:

7. Let the positive operator

$$L(s) = d_0 \prod_{i=1}^{\rho} \frac{1}{s + p_i} = \frac{d_0}{s^{\rho} + d_{\rho-1}s^{\rho-1} + d_{\rho-2}s^{\rho-2} + \cdots d_0}, \qquad (11.13)$$

where p_i are positive real numbers, d_i $(i = 1, 2, \ldots, \rho)$ are the coefficients of the Hurwitz polynomial, ρ is a sufficiently large order.

Алгоритм с РПР (G. Kreisselmeier, TAC, 1977)

Свойства:

7. Let the positive operator

$$L(s) = d_0 \prod_{i=1}^{\rho} \frac{1}{s+p_i} = \frac{d_0}{s^{\rho} + d_{\rho-1} s^{\rho-1} + d_{\rho-2} s^{\rho-2} + \cdots d_0}, \qquad (11.13)$$

where p_i are positive real numbers, d_i $(i = 1, 2, \ldots, \rho)$ are the coefficients of the Hurwitz polynomial, ρ is a sufficiently large order.

Then the algorithm

$$\dot{\hat{\theta}} = \gamma E = \gamma \left(L(s)\left[\omega y\right] - L(s)\left[\omega\omega^T\right]\hat{\theta} \right)$$

can be represented in the closed-loop form generating the high-order time derivatives of the adjustable parameters $\hat{\theta}^{(j)}, j = 1, 2, \ldots, \rho+1.$

Алгоритм с РПР (G. Kreisselmeier, TAC, 1977)

Свойства:

$$\dot{\hat{\theta}} = \gamma\Big(L(s)\big[\omega y\big] - L(s)\big[\omega\omega^T\big]\hat{\theta}\Big)$$

$$\Downarrow$$

$$\hat{\theta}^{(\rho+1)} + \big(d_{\rho-1}I_m + \gamma d_\rho \Omega\big)\hat{\theta}^{(\rho)} + \big(d_{\rho-2}I_m + \gamma d_{\rho-1}\Omega + \gamma d_\rho C_{\rho-1}^{\rho}\dot{\Omega}\big)\hat{\theta}^{(\rho-1)} + \cdots$$

$$+\left(d_1 I_m + \gamma\sum_{j=2}^{\rho} d_j C_2^j \Omega^{(j-2)}\right)\ddot{\hat{\theta}} + \left(d_0 I_m + \gamma\sum_{j=1}^{\rho} d_j C_1^j \Omega^{(j-1)}\right)\dot{\hat{\theta}} = \gamma\omega\varepsilon,$$

where $d_\rho = 1,\ \dot{\hat{\theta}}(0) = \ddot{\hat{\theta}}(0) = \ldots = \hat{\theta}^{(\rho)}(0) = 0,$

$$\Omega^{(j)} = \frac{d_0 s^j}{s^\rho + d_{\rho-1}s^{\rho-1} + d_{\rho-2}s^{\rho-2} + \cdots d_0},\quad C_i^j = \frac{j!}{i!\,(j-i)!}.$$

Алгоритм с РПР (G. Kreisselmeier, TAC, 1977)

Свойства:

$$\dot{\hat{\theta}} = \gamma\Big(L(s)[\omega y] - L(s)\left[\omega\omega^T\right]\hat{\theta}\Big)$$

$$\Downarrow$$

$$\hat{\theta}^{(\rho+1)} + \left(d_{\rho-1}I_m + \gamma d_\rho \Omega\right)\hat{\theta}^{(\rho)} + \left(d_{\rho-2}I_m + \gamma d_{\rho-1}\Omega + \gamma d_\rho C^{\rho}_{\rho-1}\dot{\Omega}\right)\hat{\theta}^{(\rho-1)} + \cdots$$

$$+\left(d_1 I_m + \gamma\sum_{j=2}^{\rho} d_j C_2^j \Omega^{(j-2)}\right)\ddot{\hat{\theta}} + \left(d_0 I_m + \gamma\sum_{j=1}^{\rho} d_j C_1^j \Omega^{(j-1)}\right)\dot{\hat{\theta}} = \gamma\omega\varepsilon,$$

не обеспечивается градиентным АА $\dot{\hat{\theta}} = \gamma\omega\varepsilon$

где $d_\rho = 1,\ \dot{\hat{\theta}}(0) = \ddot{\hat{\theta}}(0) = \ldots = \hat{\theta}^{(\rho)}(0) = 0,$

$$\Omega^{(j)} = \frac{d_0 s^j}{s^\rho + d_{\rho-1}s^{\rho-1} + d_{\rho-2}s^{\rho-2} + \cdots d_0},\quad C_i^j = \frac{j!}{i!(j-i)!}.$$

Алгоритм с РПР (G. Kreisselmeier, TAC, 1977)

Свойства:

Пример 11.2. Алгоритмы 2-го и 3-го порядков

$$L(s) = \frac{d_0}{s + d_0}:$$

$$\ddot{\hat{\theta}} + \left(d_0 I_m + \gamma\Omega\right)\dot{\hat{\theta}} = \gamma\omega\varepsilon, \quad \dot{\hat{\theta}}(0) = 0$$

$$L(s) = \frac{d_0}{s^2 + d_1 s + d_0}:$$

$$\dddot{\hat{\theta}} + \left(d_1 I_m + \gamma\Omega\right)\ddot{\hat{\theta}} + \left(d_0 I_m + \gamma d_1\Omega + 2\gamma\dot{\Omega}\right)\dot{\hat{\theta}} = \gamma\omega\varepsilon, \quad \dot{\hat{\theta}}(0) = \ddot{\hat{\theta}}(0) = 0$$

Алгоритм с РПР (G. Kreisselmeier, TAC, 1977)

Пример 11.3. Адаптивный идентификатор параметров на основе алгоритма адаптации с РПР

Линейная регрессия

$$y = \theta^T \omega, \tag{11.14}$$

$$\theta = [2,\ 3,\ 4,\ 5]^T,\ \ \omega(t) = [\sin t,\ \cos t,\ \sin 2t,\ \cos 2t]^T \in PE$$

Градиентный алгоритм адаптации

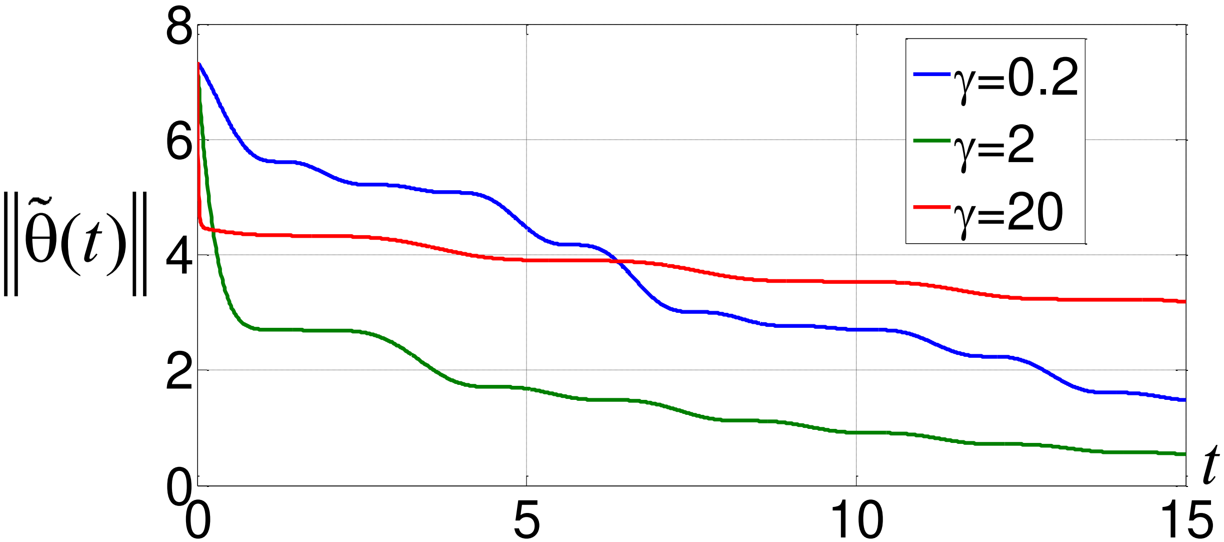
$$\dot{\hat{\theta}} = \gamma\omega\left(y - \hat{\theta}^T\omega\right) \tag{11.15}$$

Алгоритм адаптации с РПР

$$\dot{\hat{\theta}} = \gamma\left(L(s)[\omega y] - L(s)\left[\omega\omega^T\right]\hat{\theta}\right), \tag{11.16}$$

$$L(s) = \frac{1}{s+1}$$

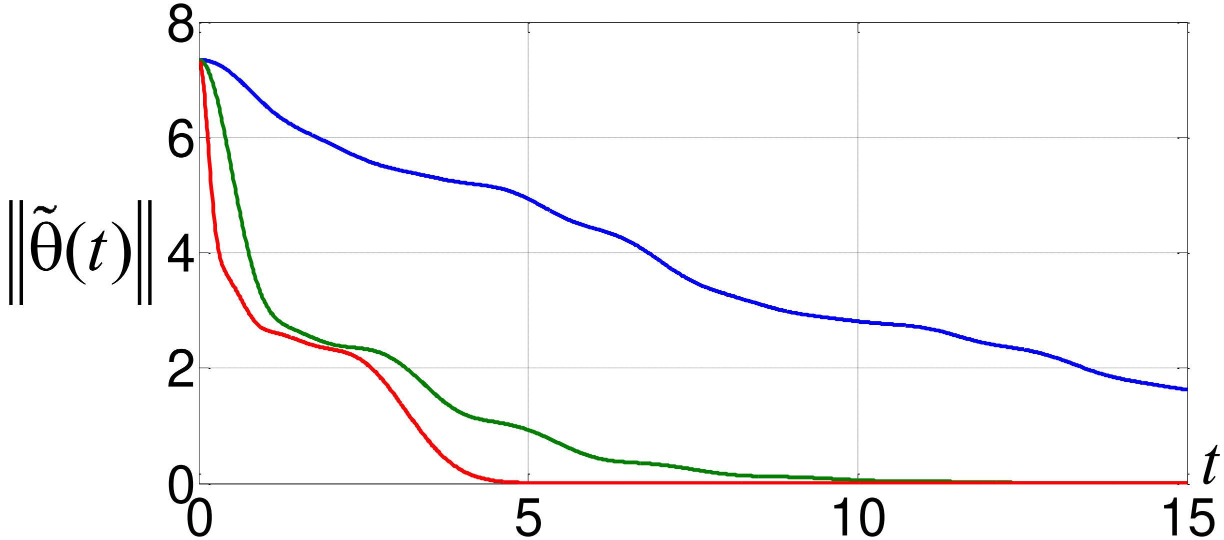
Алгоритм с РПР (G. Kreisselmeier, TAC, 1977)



Градиентный АА

$$\dot{\tilde{\theta}} = -\gamma\omega\omega^T\tilde{\theta}$$

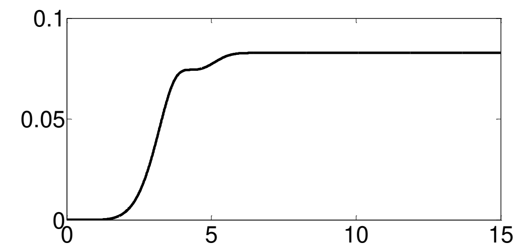
$$\lambda_{\min}\left\{\omega\omega^T\right\} \equiv 0$$



АА с РПР

$$\dot{\tilde{\theta}} = -\gamma\Omega\tilde{\theta}$$

$$\lambda_{\Omega}(t) \geq 0$$



3. Схема Лайона

Алгоритм с динамическим расширением регрессора (P. Lion, AIAA, 1967)

Расширение регрессора:

$$y = \theta^T \omega = \omega^T \theta \qquad (11.17)$$

$$\Downarrow$$

3. Схема Лайона

Алгоритм с динамическим расширением регрессора (P. Lion, AIAA, 1967)

Расширение регрессора:

$$y = \theta^T \omega = \omega^T \theta \qquad (11.17)$$

$$\Downarrow$$

Выберем различные асимптотически устойчивые и минимально фазовые (РАУМФ) передаточные функции $H_i(s),\ i = 1, 2, \ldots, p-1$

3. Схема Лайона

Алгоритм с динамическим расширением регрессора (P. Lion, AIAA, 1967)

Расширение регрессора:

$$y = \theta^T \omega = \omega^T \theta \tag{11.17}$$

$$\Downarrow$$

Выберем различные асимптотически устойчивые и минимально фазовые (РАУМФ) передаточные функции $H_i(s),\ i = 1, 2, \ldots, p-1$

$$\underbrace{H_i(s)\left[y\right]}_{Y_i} = \underbrace{H_i(s)\left[\omega^T\right]}_{W_i^T}\theta$$

Алгоритм с динамическим расширением регрессора (P. Lion, AIAA, 1967)

Расширение регрессора:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y \\ H_1(s)[y] \\ \vdots \\ H_{p-1}(s)[y] \end{bmatrix}}_{Y} = \underbrace{\begin{bmatrix} \omega^T \\ H_1(s)\left[\omega^T\right] \\ \vdots \\ H_{p-1}(s)\left[\omega^T\right] \end{bmatrix}}_{W^T} \theta$$

Результат расширения:

$$Y = W^T \theta \tag{11.18}$$

Алгоритм с динамическим расширением регрессора (P. Lion, AIAA, 1967)

Результат расширения:

$$Y = W^T \theta \tag{11.19}$$

Алгоритм адаптации:

$$\dot{\hat{\theta}} = \gamma W E, \tag{11.20}$$

где $E = Y - W^T \hat{\theta}$ – динамически расширенная ошибка, $\gamma > 0$ – коэффициент адаптации

Алгоритм с динамическим расширением регрессора (P. Lion, AIAA, 1967)

Модель параметрической ошибки:

$$\dot{\tilde{\theta}} = -\dot{\hat{\theta}}, \quad E = Y - W^T \hat{\theta}$$

$$\dot{\tilde{\theta}} = -\gamma W W^T \tilde{\theta} \qquad (11.21)$$

Алгоритм с динамическим расширением регрессора (P. Lion, AIAA, 1967)

1. Ограниченность

Выберем функцию Ляпунова

$$V = \frac{1}{2\gamma}\tilde{\theta}^T\tilde{\theta} \qquad (11.22)$$

и вычислим ее производную в силу (11.21):

$$\dot{V} = -\tilde{\theta}^T W(t) W^T(t)\tilde{\theta} \le 0. \qquad \dot{\tilde{\theta}} = -\gamma W W^T \tilde{\theta},$$

Следовательно $\left\|\tilde{\theta}(t)\right\|$ ограничена (независимо от ω).

Если $\omega, \dot{\omega}$ ограничены, то ε, E и $\dot{\hat{\theta}}$ ограничены.

Алгоритм с динамическим расширением регрессора (P. Lion, AIAA, 1967)

1. Ограниченность

Выберем функцию Ляпунова

$$V = \frac{1}{2\gamma}\tilde{\theta}^T\tilde{\theta} \qquad (11.22)$$

и вычислим ее производную в силу (11.21):

$$\dot{V} = -\tilde{\theta}^T W(t) W^T(t)\tilde{\theta} \le 0.$$

Следовательно $\left\|\tilde{\theta}(t)\right\|$ ограничена (независимо от ω).

Если ω, $\dot{\omega}$ ограничены, то ε, E и $\dot{\hat{\theta}}$ ограничены.

$$V(t) = V(0) - \int_0^\infty \tilde{\theta}^T(\tau) W(\tau) W^T(\tau)\tilde{\theta}(\tau)\, d\tau \le c_1 < \infty.$$

Следовательно $E(t) = W^T(t)\tilde{\theta}(t) \to 0$ при $t \to \infty$ (ввиду леммы Барбалата).

Алгоритм с динамическим расширением регрессора (P. Lion, AIAA, 1967)

2. Сходимость ε и E:

Since $\Omega(t)\tilde{\theta}(t) = E(t) \to 0$

As a result, if $W(t)$ is bounded then

$$\dot{\hat{\theta}}(t) = -\dot{\tilde{\theta}}(t) = \gamma W(t) E(t) \to 0.$$

Алгоритм с динамическим расширением регрессора (P. Lion, AIAA, 1967)

2. Сходимость ε и E:

Proceeding, we have

$$E = Y - W^T\hat{\theta} = H(s)[\varepsilon] + H(s)\left[\omega^T\hat{\theta}\right] - H(s)\left[\omega^T\right]\hat{\theta}$$

$$= H(s)[\varepsilon] + \begin{bmatrix} \omega^T\hat{\theta} \\ H_1(s)\left[\omega^T\hat{\theta}\right] \\ \vdots \\ H_{p-1}(s)\left[\omega^T\hat{\theta}\right] \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \omega^T \\ H_1(s)\left[\omega^T\right] \\ \vdots \\ H_{p-1}(s)\left[\omega^T\right] \end{bmatrix}\hat{\theta}$$

$$H(s) = \left[1, H_1(s), H_2(s), \ldots, H_{p-1}(s)\right]^T$$

Алгоритм с динамическим расширением регрессора (P. Lion, AIAA, 1967)

2. Сходимость ε и E:

$$E = Y - W^T\hat{\theta} = H(s)[\varepsilon] + \begin{bmatrix} \omega^T\hat{\theta} \\ H_1(s)\left[\omega^T\hat{\theta}\right] \\ \vdots \\ H_{p-1}(s)\left[\omega^T\hat{\theta}\right] \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \omega^T \\ H_1(s)\left[\omega^T\right] \\ \vdots \\ H_{p-1}(s)\left[\omega^T\right] \end{bmatrix}\hat{\theta}$$

$$= H(s)[\varepsilon] + \begin{bmatrix} 0 \\ H_1(s)\left[\omega^T\hat{\theta}\right] - H_1(s)\left[\omega^T\right]\hat{\theta} \\ \vdots \\ H_{p-1}(s)\left[\omega^T\hat{\theta}\right] - H_{p-1}(s)\left[\omega^T\right]\hat{\theta} \end{bmatrix}$$

Алгоритм с динамическим расширением регрессора (P. Lion, AIAA, 1967)

2. Сходимость ε и E:

$$E = Y - W^T\hat{\theta} = H(s)[\varepsilon] + \begin{bmatrix} 0 \\ H_1(s)\left[\omega^T\hat{\theta}\right] - H_1(s)\left[\omega^T\right]\hat{\theta} \\ \vdots \\ H_{p-1}(s)\left[\omega^T\hat{\theta}\right] - H_{p-1}(s)\left[\omega^T\right]\hat{\theta} \end{bmatrix}$$

$$= H(s)[\varepsilon] + \begin{bmatrix} 0 \\ H_1(s)\left[\omega^T\right]\hat{\theta} - H_{C1}(s)\left[H_{B1}(s)\left[\omega^T\right]\dot{\hat{\theta}}\right] - H_1(s)\left[\omega^T\right]\hat{\theta} \\ \vdots \\ H_{p-1}(s)\left[\omega^T\right]\hat{\theta} - H_{C\,p-1}(s)\left[H_{B\,p-1}(s)\left[\omega^T\right]\dot{\hat{\theta}}\right] - H_{p-1}(s)\left[\omega^T\right]\hat{\theta} \end{bmatrix}$$

$$H_i(s) = c_i^T\left(Is - A_i\right)^{-1} b_i,\ H_{Bi}(s) = \left(Is - A_i\right)^{-1} b_i,\ H_{Ci}(s) = c_i^T\left(Is - A_i\right)^{-1}$$

Алгоритм с динамическим расширением регрессора (P. Lion, AIAA, 1967)

2. Сходимость ε и E:

$$E = Y - W^T\hat{\theta} = H(s)[\varepsilon] + \begin{bmatrix} 0 \\ H_1(s)\left[\omega^T\hat{\theta}\right] - H_1(s)\left[\omega^T\right]\hat{\theta} \\ \vdots \\ H_{p-1}(s)\left[\omega^T\hat{\theta}\right] - H_{p-1}(s)\left[\omega^T\right]\hat{\theta} \end{bmatrix}$$

$$= H(s)[\varepsilon] + \begin{bmatrix} 0 \\ \cancel{H_1(s)\left[\omega^T\right]}\hat{\theta} - H_{C1}(s)\left[H_{B1}(s)\left[\omega^T\right]\dot{\hat{\theta}}\right] - \cancel{H_1(s)\left[\omega^T\right]}\hat{\theta} \\ \vdots \\ \cancel{H_{p-1}(s)\left[\omega^T\right]}\hat{\theta} - H_{C\,p-1}(s)\left[H_{B\,p-1}(s)\left[\omega^T\right]\dot{\hat{\theta}}\right] - \cancel{H_{p-1}(s)\left[\omega^T\right]}\hat{\theta} \end{bmatrix}$$

$$H_i(s) = c_i^T\left(Is - A_i\right)^{-1} b_i,\ H_{Bi}(s) = \left(Is - A_i\right)^{-1} b_i,\ H_{Ci}(s) = c_i^T\left(Is - A_i\right)^{-1}$$

Алгоритм с динамическим расширением регрессора (P. Lion, AIAA, 1967)

2. Сходимость ε и E:

$$E = Y - W^T\hat{\theta} = H(s)[\varepsilon] - \begin{bmatrix} 0 \\ H_{C1}(s)\left[H_{B1}(s)\left[\omega^T\right]\dot{\hat{\theta}}\right] \\ \vdots \\ H_{C\,p-1}(s)\left[H_{B\,p-1}(s)\left[\omega^T\right]\dot{\hat{\theta}}\right] \end{bmatrix}$$

Алгоритм с динамическим расширением регрессора (P. Lion, AIAA, 1967)

2. Сходимость ε и E :

$$E = Y - W^T\hat{\theta} = H(s)[\varepsilon] - \begin{bmatrix} 0 \\ H_{C1}(s)\left[H_{B1}(s)\left[\omega^T\right]\dot{\hat{\theta}}\right] \\ \vdots \\ H_{C\,p-1}(s)\left[H_{B\,p-1}(s)\left[\omega^T\right]\dot{\hat{\theta}}\right] \end{bmatrix}$$

$E(t) \to 0$

$\dot{\hat{\theta}}(t) = \gamma W(t)E(t) \to 0$

Следовательно $\varepsilon(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

Алгоритм с динамическим расширением регрессора (P. Lion, AIAA, 1967)

3. Сходимость по $\tilde{\theta}(t)$:

Выберем функцию Ляпунова

$$V = \frac{1}{2\gamma}\tilde{\theta}^T\tilde{\theta} \qquad (11.23)$$

и вычислим ее производную по (11.21):

$$\dot{\tilde{\theta}} = -\gamma W W^T \tilde{\theta},$$

$$\dot{V} = -\tilde{\theta}^T W(t) W^T(t)\tilde{\theta} =$$

$$= -\tilde{\theta}^T\left(\omega\omega^T + \sum_{i=1}^{p-1} H_i(s)[\omega] H_i(s)\left[\omega^T\right]\right)\tilde{\theta}$$

$$W = \left[\,\omega \,\vdots\, H_1(s)[\omega] \,\vdots \ldots \vdots\, H_{p-1}(s)[\omega]\right],\quad W^T = \begin{bmatrix} \omega^T \\ H_1(s)\left[\omega^T\right] \\ \vdots \\ H_{p-1}(s)\left[\omega^T\right] \end{bmatrix}$$

Алгоритм с динамическим расширением регрессора (P. Lion, AIAA, 1967)

3. Сходимость по $\tilde{\theta}(t)$:

Выберем функцию Ляпунова

$$V = \frac{1}{2\gamma}\tilde{\theta}^T\tilde{\theta} \qquad (11.23)$$

и вычислим ее производную по (11.21):

$$\dot{V} = -\tilde{\theta}^T W(t) W^T(t)\tilde{\theta} =$$

$$= -\tilde{\theta}^T\left(\omega\omega^T + \sum_{i=1}^{p-1} H_i(s)[\omega] H_i(s)\left[\omega^T\right]\right)\tilde{\theta}$$

Если $\omega \in PE$, т.е.,

$$\int_t^{t+T} \omega(\tau)\omega^T(\tau)d\tau \geq \alpha I > 0,$$

$\Rightarrow$

тогда $H_i(s)[\omega] \in PE$, т.е.,

$$\int_t^{t+T} H_i(s)[\omega(\tau)] H_i(s)\left[\omega^T(\tau)\right] d\tau \geq \alpha_i I > 0$$

Алгоритм с динамическим расширением регрессора (P. Lion, AIAA, 1967)

3. Сходимость по $\tilde{\theta}(t)$:

Выберем функцию Ляпунова

$$V = \frac{1}{2\gamma}\tilde{\theta}^T\tilde{\theta} \tag{11.23}$$

и вычислим ее производную по (11.21):

$$\dot{V} = -\tilde{\theta}^T W(t) W^T(t)\tilde{\theta} =$$

$$= -\tilde{\theta}^T\left(\omega\omega^T + \sum_{i=1}^{p-1} H_i(s)[\omega] H_i(s)\left[\omega^T\right]\right)\tilde{\theta} \le -\beta\tilde{\theta}^T\tilde{\theta} = -2\gamma\beta V$$

Если $\omega \in PE$, т.е.,

$$\int_t^{t+T} \omega(\tau)\omega^T(\tau)d\tau \ge \alpha I > 0,$$

тогда $H_i(s)[\omega] \in PE$, т.е.,

$$\int_t^{t+T} H_i(s)[\omega(\tau)] H_i(s)\left[\omega^T(\tau)\right]d\tau \ge \alpha_i I > 0$$

Элементы ω линейно независимы

Алгоритм с динамическим расширением регрессора (P. Lion, AIAA, 1967)

3. Сходимость по $\tilde{\theta}(t)$:

$$\dot{V} \leq -2\gamma\beta V$$

если $\omega \in PE$, *т.е.*,

$$\int_{t-T}^{t} \omega(\tau)\omega^T(\tau)d\tau \geq \alpha I > 0$$

$$\Downarrow$$

$$V(t) \leq \mathrm{e}^{-2\beta\gamma t} V(0)$$

$$\left\|\tilde{\theta}(t)\right\|^2 \leq \mathrm{e}^{-2\beta\gamma t} \left\|\tilde{\theta}(0)\right\|^2.$$

Следовательно $\tilde{\theta}(t)$ стремится к нулю при $\omega(t) \in PE$.

Алгоритм с динамическим расширением регрессора (P. Lion, AIAA, 1967)

Свойства:

1. Вектор параметрических ошибок $\tilde{\theta}(t)$ ограничен:

   Если $\omega(t), \dot{\omega}(t)$ ограничены, то $\varepsilon(t), E(t), \dot{\hat{\theta}}(t)$ ограничены;

2. Если $\omega(t), \dot{\omega}(t)$ ограничены, то $E(t)$ и $\varepsilon(t)$ стремятся к нулю асимптотически при $t \to 0$;

3. $\left\|\tilde{\theta}(t)\right\|$ стремится к нулю экспоненциально, т.т.т, когда $\omega \in PE$, т.е.,

$$\int_t^{t+T} \omega(\tau)\omega^T(\tau)d\tau \geq \alpha I > 0$$

   для некоторых положительных $\alpha,\ T$;

4. Если $\omega \in PE$, то скорость параметрической сходимости может быть увеличена произвольно (в теории) путем увеличения γ .

Алгоритм с динамическим расширением регрессора (P. Lion, AIAA, 1967)

Свойства:

1. Вектор параметрических ошибок $\tilde{\theta}(t)$ ограничен:

   Если $\omega(t), \dot{\omega}(t)$ ограничены, то $\varepsilon(t), E(t), \dot{\hat{\theta}}(t)$ ограничены;

2. Если $\omega(t), \dot{\omega}(t)$ ограничены, то $E(t)$ и $\varepsilon(t)$ стремятся к нулю асимптотически при $t \to 0$;

3. $\left\|\tilde{\theta}(t)\right\|$ стремится к нулю экспоненциально, т.т.т, когда $\omega \in PE$, т.е.,

$$\int_t^{t+T} \omega(\tau)\omega^T(\tau)d\tau \geq \alpha I > 0$$

   для некоторых положительных $\alpha,\ T$;

не обеспечивается градиентным АА

$$\dot{\hat{\theta}} = \gamma\omega\varepsilon$$

4. Если $\omega \in PE$, то скорость параметрической сходимости может быть увеличена произвольно (в теории) путем увеличения γ.

Алгоритм с динамическим расширением регрессора (P. Lion, AIAA, 1967)

Свойства:

5. Введем обозначение λ_W для минимального собственного числа WW^T.

Тогда, продолжая анализ, получаем неравенство

$$\dot{V} = -\tilde{\theta}^T W(t) W^T(t)\tilde{\theta} \le -\lambda_W(t)\tilde{\theta}^T\tilde{\theta} = -2\gamma\lambda_W(t)V,$$

из которого следует

$$V(t) \le e^{-2\gamma\int_0^t \lambda_W(\tau)d\tau} V(0), \text{ или } \left\|\tilde{\theta}(t)\right\|^2 \le e^{-2\gamma\int_0^t \lambda_W(\tau)d\tau} \left\|\tilde{\theta}(0)\right\|^2.$$

Следовательно, даже если $\omega \notin PE$, но $\lambda_W(t) \notin L_1$, т.е.,

$$\int_0^\infty \lambda_W(\tau)d\tau = \infty,$$

то $\left\|\tilde{\theta}(t)\right\|$ стремится к нулю **асимптотически** при $t \to 0$.

Алгоритм с динамическим расширением регрессора (P. Lion, AIAA, 1967)

Свойства:

5. Введем обозначение λ_W для минимального собственного числа WW^T.

Тогда, продолжая анализ, получаем неравенство

$$\dot{V} = -\tilde{\theta}^T W(t) W^T(t)\tilde{\theta} \le -\lambda_W(t)\tilde{\theta}^T\tilde{\theta} = -2\gamma\lambda_W(t)V,$$

из которого следует

$$V(t) \le \mathrm{e}^{-2\gamma\int_0^t \lambda_W(\tau)d\tau} V(0), \text{ или } \left\|\tilde{\theta}(t)\right\|^2 \le \mathrm{e}^{-2\gamma\int_0^t \lambda_W(\tau)d\tau} \left\|\tilde{\theta}(0)\right\|^2.$$

Следовательно, даже если $\omega \notin PE$, но $\lambda_W(t) \notin L_1$, т.е.,

$$\int_0^\infty \lambda_W(\tau)d\tau = \infty,$$

то $\left\|\tilde{\theta}(t)\right\|$ стремится к нулю **асимптотически** при $t \to 0$.

не обеспечивается градиентным АА

$$\dot{\hat{\theta}} = \gamma\omega\varepsilon$$

Алгоритм с динамическим расширением регрессора (P. Lion, AIAA, 1967)

Свойства:

6. Модель параметрических ошибок:

$$\dot{\tilde{\theta}} = -\gamma W W^T \tilde{\theta} \tag{11.24}$$

а) При выборе коэффициента адаптации в виде

$$\gamma = \gamma(t) = \gamma_0 \left(\rho I + W(t) W^T(t) \right)^{-1},$$

где $\gamma_0 > 0$ – константа, $\rho > 0$ – малая константа.

Алгоритм с динамическим расширением регрессора (P. Lion, AIAA, 1967)

Свойства:

6. Модель параметрических ошибок:

$$\dot{\tilde{\theta}} = -\gamma W W^T \tilde{\theta} \qquad (11.24)$$

а) При выборе коэффициента адаптации в виде

$$\gamma = \gamma(t) = \gamma_0 \left(\rho I + W(t) W^T(t) \right)^{-1},$$

где $\gamma_0 > 0$ – константа, $\rho > 0$ – малая константа, имеем почти экспоненциальную сходимость параметров согласно уравнению

$$\dot{\tilde{\theta}} \approx -\gamma_0 \tilde{\theta},$$

при $\omega \in PE$. Решение уравнения:

$$\tilde{\theta}_i(t) \approx e^{-\gamma_0 t} \tilde{\theta}_i(0).$$

Алгоритм с динамическим расширением регрессора (P. Lion, AIAA, 1967)

Свойства:

6. Модель параметрических ошибок:

$$\dot{\tilde{\theta}} = -\gamma W W^T \tilde{\theta} \tag{11.24}$$

б) При выборе коэффициента адаптации в виде

$$\gamma = \gamma(t) = \gamma_0 adj\left\{W W^T\right\},$$

где $\gamma_0 > 0$ – константа, $adj\left\{W W^T\right\}$ – союзная матрица от $W W^T$

имеем

$$adj\left\{W W^T\right\} = \left(W W^T\right)^{-1} det\left\{W W^T\right\}.$$

Алгоритм с динамическим расширением регрессора (P. Lion, AIAA, 1967)

Свойства:

6. Модель параметрических ошибок:

$$\dot{\tilde{\theta}} = -\gamma W W^T \tilde{\theta} \qquad (11.24)$$

б) При выборе коэффициента адаптации в виде

$$\gamma = \gamma(t) = \gamma_0 adj\left\{WW^T\right\},$$

где $\gamma_0 > 0$ – константа, $adj\left\{WW^T\right\}$ – союзная матрица от WW^T имеем

$$adj\left\{WW^T\right\} = \left(WW^T\right)^{-1} det\left\{WW^T\right\}.$$

Тогда

$$\dot{\tilde{\theta}} = -\gamma_0 det\left\{WW^T\right\}\tilde{\theta},$$

и если $\omega \in PE$, то имеем монотонную поэлементную сходимость параметров.

Алгоритм с динамическим расширением регрессора (P. Lion, AIAA, 1967)

Пример 11.4. Адаптивный идентификатор параметров на основе алгоритма адаптации с ДРР

Линейная регрессия

$$y = \theta^T \omega, \tag{11.25}$$

$$\theta = [2,\ 3,\ 4,\ 5]^T,\ \ \omega(t) = [\sin t,\ \cos t,\ \sin 2t,\ \cos 2t]^T \in PE$$

Градиентный алгоритм адаптации

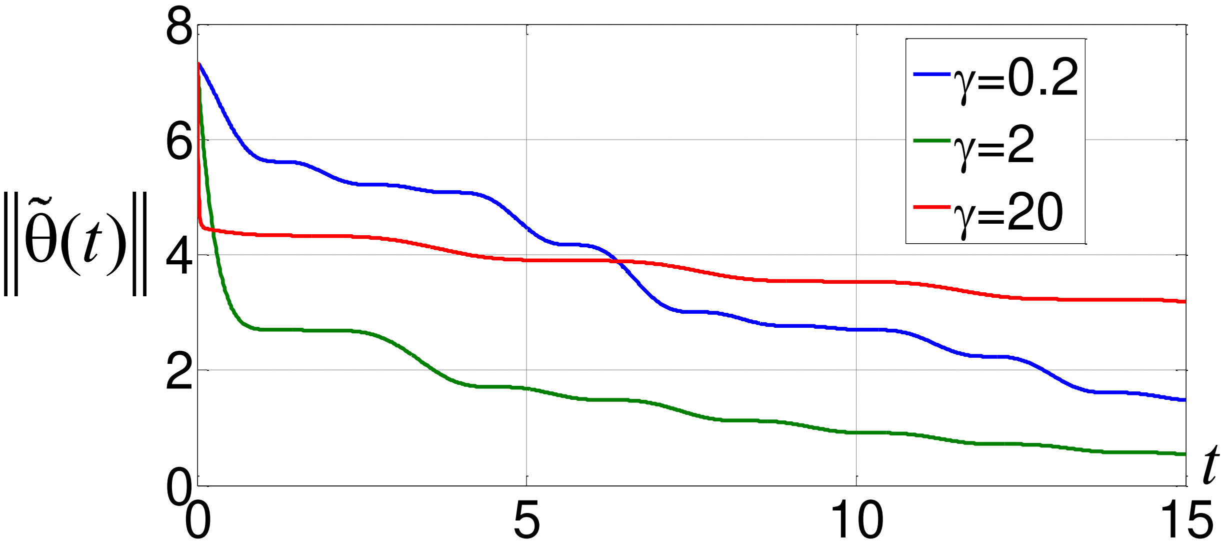
$$\dot{\hat{\theta}} = \gamma\omega\left(y - \hat{\theta}^T \omega\right) \tag{11.26}$$

Алгоритм адаптации с ДРР

$$\dot{\hat{\theta}} = \gamma\left(H(s)\left[\omega^T\right]\right)^T\left(H(s)[y] - H(s)\left[\omega^T\right]\hat{\theta}\right), \tag{11.27}$$

$$H(s) = [1, H_1(s), H_2(s), H_3(s)]^T,\ H_1(s) = \frac{1}{2s+1},\ H_2(s) = \frac{1}{s+1},\ H_3(s) = \frac{2}{s+2}.$$

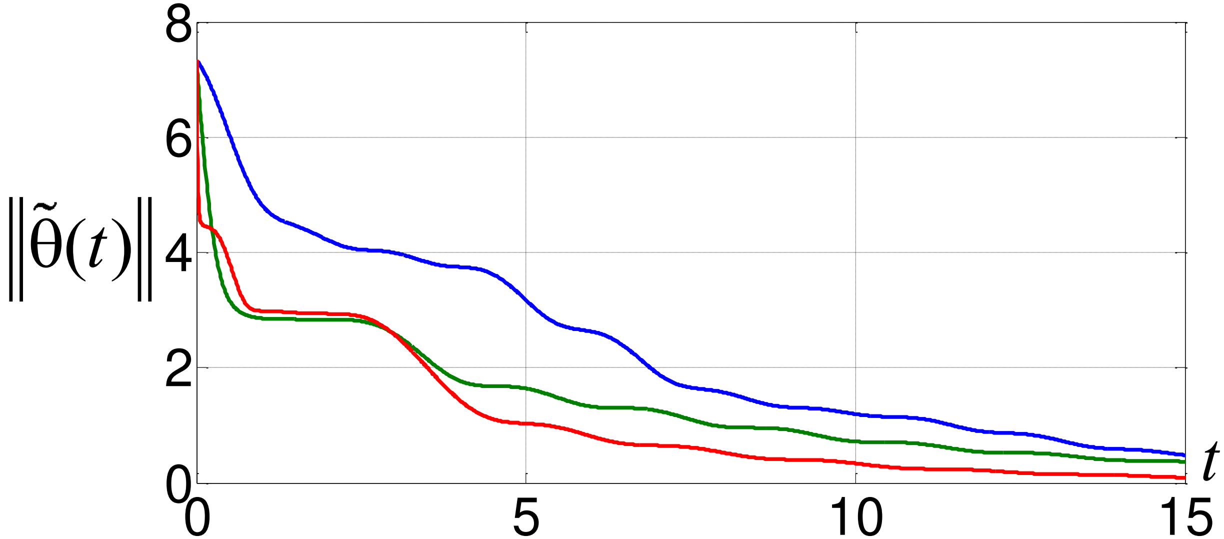
Алгоритм с ДРР (P. Lion, AIAA, 1967)



Градиентный АА

$$\dot{\tilde{\theta}} = -\gamma \omega \omega^T \tilde{\theta}$$

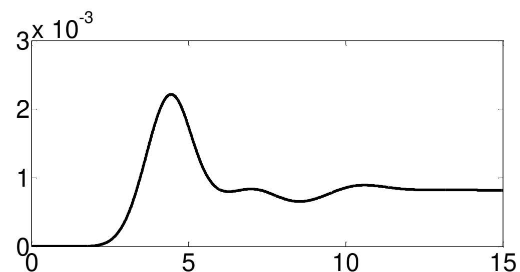
$$\lambda_{\min}\left\{\omega\omega^T\right\} \equiv 0$$



АА с ДРР

$$\dot{\tilde{\theta}} = -\gamma W W^T \tilde{\theta}$$

$$\lambda_W(t) \geq 0$$



Пример 11.5. Неэкспоненциальная сходимость алгоритмов с РПР и ДРР

Линейная регрессия

$$y = \theta^T \omega, \quad \theta = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \omega(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ \dfrac{\sin t + \cos t}{\sqrt{1+t}} - \dfrac{\sin t}{2\sqrt{(1+t)^3}} \end{bmatrix} \notin PE$$

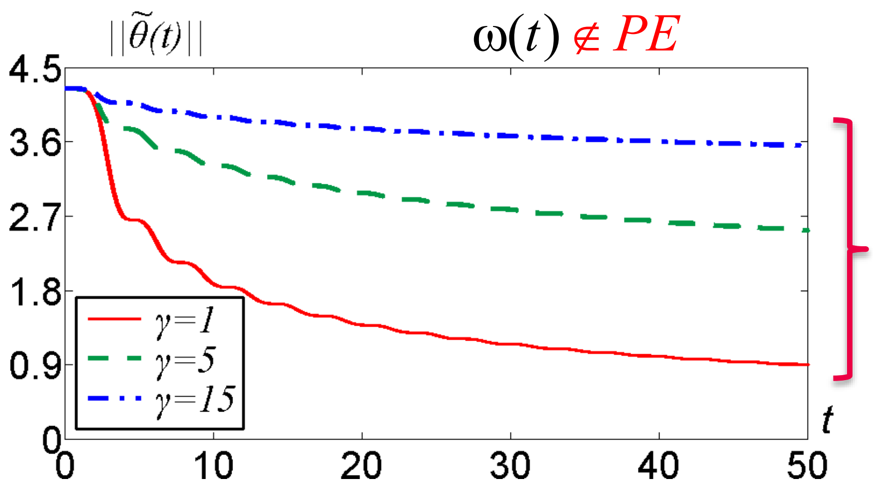
Алгоритм адаптации с РПР

$$\dot{\hat{\theta}} = \gamma\left(L(s)[\omega y] - L(s)\left[\omega\omega^T\right]\hat{\theta}\right), \qquad L(s) = \frac{1}{s+1}$$

Алгоритм адаптации с ДРР

$$\dot{\hat{\theta}} = \gamma\left(H(s)\left[\omega^T\right]\right)^T\left(H(s)[y] - H(s)\left[\omega^T\right]\hat{\theta}\right), \quad H(s) = \begin{bmatrix} 1 \\ \dfrac{1}{s+1} \end{bmatrix}$$

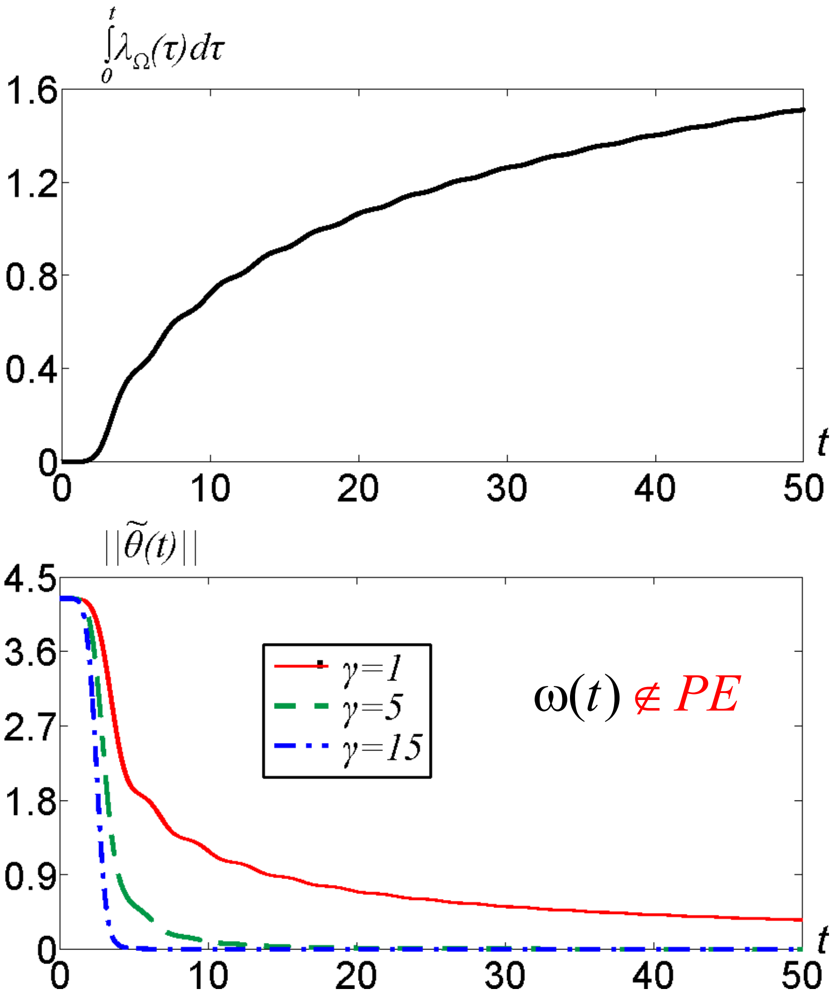
Базовый алгоритм адаптации



Не сходится

к нулю

Алгоритм адаптации с расширением памяти регрессора



Алгоритм адаптации с динамическим расширением регерссора