Global Maths Club : Challenge 1

Département Académique

Date limite pour chacun des trois sujets ; 11 septembre 2023 à 23h59, heure de Yaoundé.

Lycée (à soumettre à ngandjia@gmail.com)

Les mathématiciens de l'Egypte pharaonique (les africains) avaient une connaissance étonnement poussée en Géométrie, qui était naguère considérée comme sacrée. Ils avaient connaissance des notions géométriques ainsi que leurs interactions avec l'arithmétique. Les africains avaient connaissance de l'existence des constantes géométriques telles que π, et les manipulaient avec une aisance qui défie encore la communauté scientifique contemporaine. On retrouve leur géni dans de nombreuses constructions, en occurrence dans la grande pyramide de Gizeh (pyramide de Khéops). Les africains maîtrisaient à la perfection la notion d'angle. On se donne dans ce challenge de déterminer la valeur exacte du cosinus de l'angle $\frac{\pi}{5}$. On verra que dans ce problème, **Géométrie** et **Arithmétique** s'entremêlent.

Soit ABC un triangle isocèle de sommet principal A dont l'angle est $\frac{\pi}{5}$. On pose $BC = b$ et $AB = a$. Soit K le point d'intersection du segment $[AC]$ avec la bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$. Enfin, soit I, le milieu du segment $[BC]$.

1. Montrer que les triangles KAB et KCB sont isocèles.
2. En déduire que $\cos(\frac{\pi}{5}) = \frac{a}{2b}$.
3. En considérant le triangle AIB, déterminer $\cos(\frac{2\pi}{5})$ en fonction de a et b.
4. Déduire des deux questions précédantes que $\cos(\frac{\pi}{5})$ est solution de l'équation $8x^3 - 4x - 1 = 0$.
   (*En Arithmétique, on dit que* $\cos(\frac{\pi}{5})$ *est un nombre algébrique. Les africains avaient conscience de ce caractère algébrique de certains nombres irrationnel.*)
5. Sachant que $-\frac{1}{2}$ est solution de l'équation précédante, déterminer avec justification la valeur exacte de $\cos(\frac{\pi}{5})$.

Licence (à soumettre à patrick.challengegmc@gmail.com)

Au cœur des mystères des mathématiques, il y a des suites infinies qui semblent errer entre le chaos et la perfection. Dans notre quête pour comprendre l'ordre caché dans le chaos, nous nous tournons vers une suite harmonique en apesanteur : la séquence de nombres générée par la fonction $cos(n) + sin(n)$.

Imaginez une mathématicienne intrépide, du nom de Doliciane, vivant à une époque où les idées nouvelles circulaient aussi librement que les vents du changement. Doliciane avait entendu parler d'une suite fascinante : $cos(n) + sin(n)$. C'était une fonction en apparence simple, résultant de la combinaison de deux fonctions trigonométriques élémentaires. Cependant, dès qu'elle essaya de l'étudier en profondeur, elle découvrit que cette suite était aussi capricieuse que les saisons, oscillant apparemment sans fin.

Déterminé à percer le mystère, elle se tourna vers le théorème de Bolzano-Weierstrass, un outil puissant dans la boîte à outils de la mathématicienne pour traquer la convergence dans des séquences apparemment chaotiques. Ce théorème énonce que toute séquence bornée possède une sous-suite convergente. Autrement dit, dans la cacophonie des nombres, il doit y avoir une mélodie qui émerge de l'ensemble. Doliciane se promit de trouver cette mélodie dans la suite $cos(n) + sin(n)$ et de la nommer "Sous-suite Harmonique".

Dans ce défi, nous vous invitons à suivre ces traces et à résoudre ce problème mathématique. Utilisez le théorème de Bolzano-Weierstrass comme votre boussole et la suite $cos(n) + sin(n)$ comme votre carte. Votre mission est de construire explicitement une sous-suite qui converge, rejoignant ainsi Doliciane dans sa quête de la convergence harmonique.

Master(à soumettre à ngandjia@gmail.com)

Dans ce challenge, toutes les structures algébriques sont commutatives.

1) Soit K_0 un corps quelconque. Montrer que les affirmations (a) et (b) ci-dessous sont fausses.

a) Pour tout corps K, il existe un morphisme de corps $K_0 \xrightarrow{\varphi} K$.

b) Pour tout corps K, il existe un morphisme de corps $K \xrightarrow{\varphi} K_0$.

c) Que pouvons nous donc dire de la catégorie $\mathcal{K}$ des corps commutatif?

d) Pouvez-vous en donner une interprétation géométrique?

e) **Bonus** (facultative) : Soit L une K_0-algèbre de type finie.

   1. Montrer que si L est un corps alors l'extension L/K_0 est algébrique (Penser à la normalisation de Noether).
   2. En déduire que les $\mathbb{Q}$-algèbres $\mathbb{R}$ et $\mathbb{Q}(t) := \mathrm{Frac}(\mathbb{Q}[t])$ ne sont pas de type finie.

2) On considère la catégorie **Ring** des anneaux commutatifs unitaires.

a) Montrer qu'il n'existe pas de morphisme d'anneaux unitaires $\mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$.

b) En déduire que la catégorie **Ring** ne possède pas d'objet nul.

Rappel

Toute soumission non lisible, soumise à la mauvaise adresse ou après la date limite ne sera pas considérée. Les candidats sont invités à lire le document sous le lien https://drive.google.com/file/d/1sVodnFINNxCx8J-r1PVUzszxcZUZjmnT/view?usp=drive$_{link}$