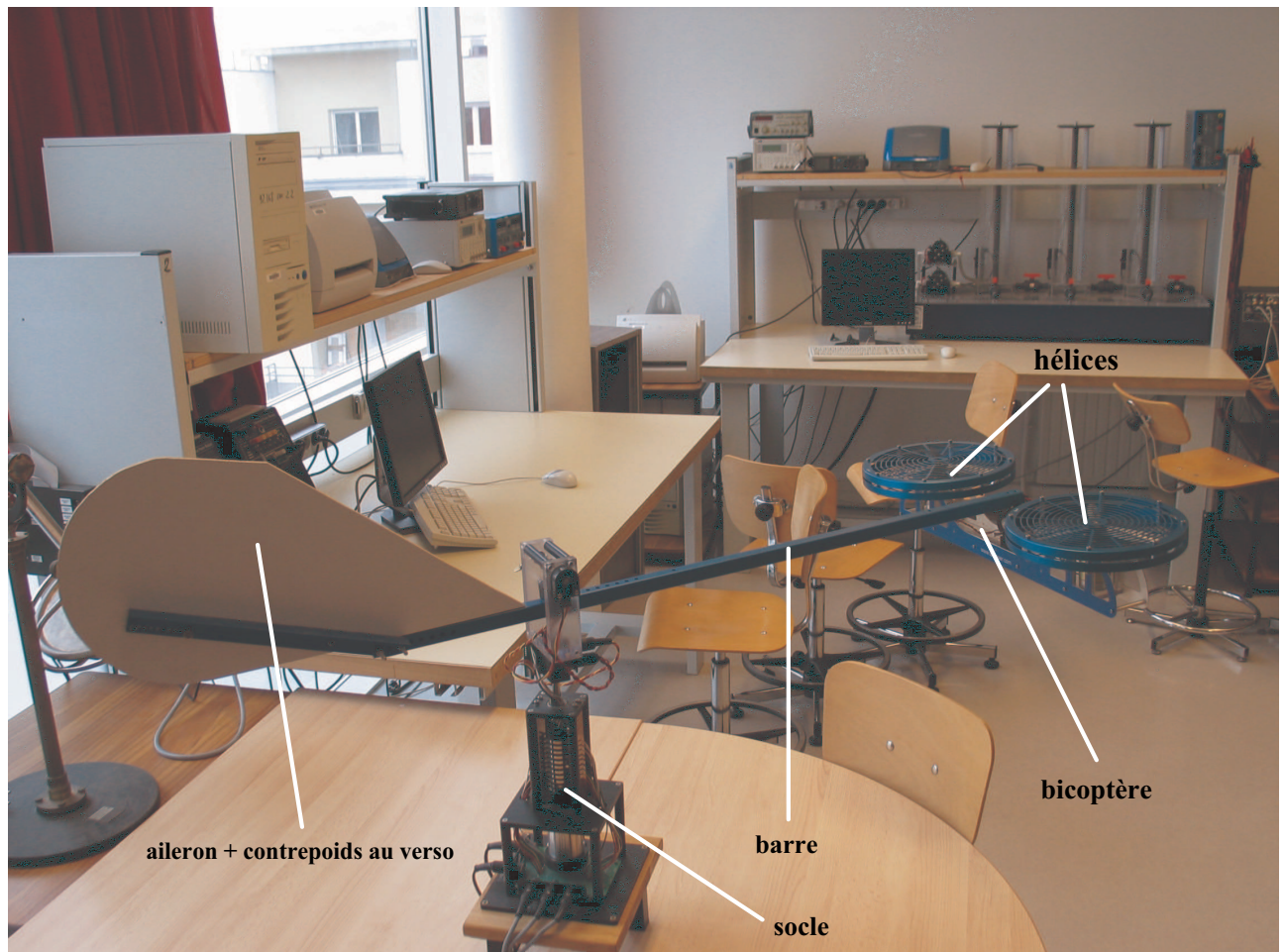


COMMANDE PAR RETOUR D'ETAT D'UNE MAQUETTE D'HELICOPTERE

But : Etude d'un régulateur LQ permettant le pilotage d'un hélicoptère, système multivariable. Il y a deux maquettes d'hélicoptère disponibles, que l'on désigne tout au long de ce texte par hélicoptère n°1 et hélicoptère n°2.



1 Présentation de la maquette

Le système hélicoptère étudié ici (Figure 1) est constitué d'un socle sur lequel est monté un bras. L'hélicoptère est positionné à l'une de ses extrémités, alors qu'un contrepoids est porté par le bras à son autre extrémité. Deux hélices sont entraînées par des moteurs à courant continu et permettent à l'hélicoptère de décoller et de se mouvoir dans l'espace. Le bras peut se balancer de haut en bas autour d'un axe horizontal d'élévation. L'hélicoptère s'élève alors de ϵ , **angle d'élévation** (Figure 12).

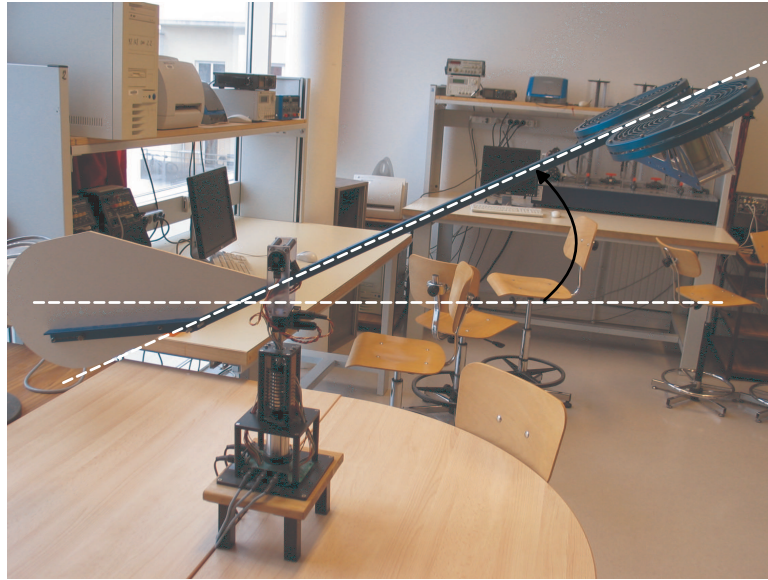


FIGURE 12 – *Mouvement d'élévation de l'hélicoptère.*

Il peut pivoter sur lui-même autour du bras, axe de tangage. Il tangue alors de θ , **angle de tangage** (Figure 13).

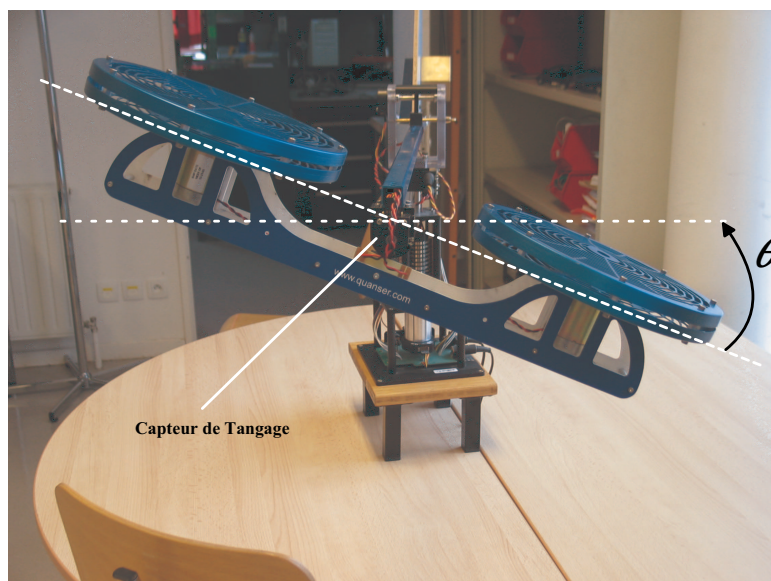


FIGURE 13 – *Mouvement de tangage de l'hélicoptère.*

Ce mouvement de tangage induit alors un troisième mouvement autour d'un axe vertical. L'appareil effectue alors un lacet de λ , **angle de lacet** (Figure 14).

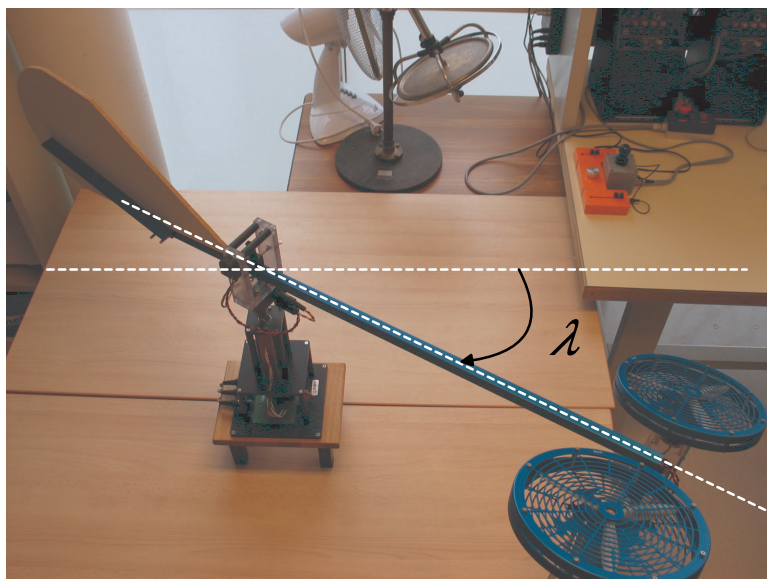


FIGURE 14 – *Mouvement de lacet de l'hélicoptère.*

Ces trois angles ϵ , λ et θ définissent alors complètement la position de l'hélicoptère dans l'espace. Leur mesure est accessible grâce à des capteurs de position : les deux **capteurs d'élévation et de lacet** sont situés au niveau du socle (Figure 15), sur les axes concernés, tandis que le **capteur de tangage** est monté sur l'hélicoptère lui-même, dans la liaison qui sert à fixer celui-ci au bras (Figure 13). Tous les signaux électriques, mesurés ou transmis, transitent à travers un anneau glissant comportant huit contacts (Figure 15). Ce dispositif permet d'éviter de tordre les fils de connexion, et réduit les frottements ainsi que les charges embarquées au niveau des axes en mouvement.

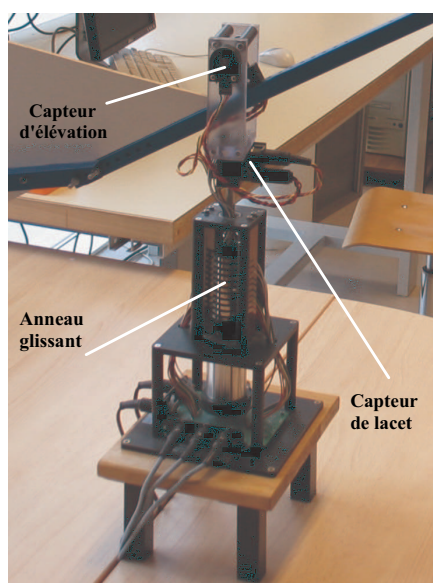


FIGURE 15 – *Socle.*

2 Obtention d'un modèle de fonctionnement pour l'hélicoptère

On pourrait utiliser pour cela une approche de physicien, à savoir écrire les équations différentielles non linéaires de comportement du système à partir des équations de Lagrange, ou encore du théorème des moments. Cette approche est très compliquée, et même si elle est menée avec succès, il reste ensuite beaucoup de paramètres à identifier, en particulier à cause de la position des différents centres de gravité intervenant dans le système, très difficile à exprimer avec précision étant donnée la configuration géométrique de l'appareil. Il faudrait ensuite linéariser les équations obtenues afin d'obtenir le modèle recherché. On préfère donc ici utiliser une approche d'automaticien, à savoir effectuer des essais indiciels autour d'un point de fonctionnement, afin de choisir ensuite sur la base de ceux-ci des modèles de comportement simples et d'en identifier les différents paramètres.

2.1 Choix d'un modèle et identification de la balancelle "élévation"

L'élévation ϵ de l'hélicoptère est liée à la force engendrée par l'addition du mouvement des deux hélices, lui-même induit par les tensions, notées u_d et u_g , appliquées aux moteurs droit et gauche. On cherche donc à obtenir la fonction de transfert reliant $\hat{u}_d(s) + \hat{u}_g(s)$ à $\hat{\epsilon}(s)$, soit

$$H_e(s) = \frac{\hat{\epsilon}(s)}{\hat{u}_d(s) + \hat{u}_g(s)}.$$

Pour cela, on change brusquement la tension d'alimentation de chacun des moteurs. Les enregistrements des Figures 16 (pour l'hélicoptère n°1) et 17 (pour l'hélicoptère n°2) représentent ainsi, à un coefficient 0,1 près, la tension appliquée à **chacun des moteurs** au cours de cette expérience. On relève alors le mouvement d'élévation de l'hélicoptère en enregistrant l'évolution de la variable ϵ en réponse à cet échelon sur les tensions des moteurs (Figure 18 pour l'hélicoptère n°1 et Figure 19 pour l'hélicoptère n°2).

Travail n°1 à réaliser : à quel type de modèle connu s'apparente la courbe de réponse indicielle obtenue (on utilisera le fascicule d'identification fourni à la fin de ce document)? Identifier ses paramètres et en déduire $H_e(s)$.

2.2 Choix d'un modèle et identification de la balancelle "tangage"

Le tangage θ de l'hélicoptère est lié à la force engendrée par la différence de vitesse de rotation des deux hélices, elle-même induite par la différence de tension appliquée entre les moteurs droit et gauche, soit $u_g - u_d$. On cherche donc à obtenir la fonction de transfert reliant $\hat{u}_g(s) - \hat{u}_d(s)$ à $\hat{\theta}(s)$, soit

$$H_t(s) = \frac{\hat{\theta}(s)}{\hat{u}_g(s) - \hat{u}_d(s)}.$$

Pour cela, on maintient l'hélicoptère à l'horizontale et on applique brusquement une tension d'alimentation différente sur chacun des moteurs (pour l'hélicoptère n°1 : 1,5 V sur le moteur droit et 3,5 V sur le moteur gauche, et pour l'hélicoptère n°2 : 2,8 V sur le moteur droit et 3,2 V sur le moteur gauche). On relève alors le mouvement de tangage de l'hélicoptère qui en résulte en enregistrant l'évolution de la variable θ en réponse à cet échelon sur la différence de tension $u_g - u_d$ (Figure 20 pour l'hélicoptère n°1, et Figure 21 pour l'hélicoptère n°2).

Travail n°2 à réaliser : à quel type de modèle connu s'apparente la courbe de réponse indicielle obtenue? Identifier ses paramètres et en déduire $H_t(s)$.

2.3 Choix d'un modèle et identification du "lacet" de la balancelle

Le lacet λ de l'hélicoptère est directement lié à l'inclinaison de la balancelle, c'est-à-dire à la variation du tangage θ . On cherche donc à obtenir la fonction de transfert reliant ces deux angles, soit

$$H_l(s) = \frac{\hat{\lambda}(s)}{\hat{\theta}(s)}.$$

Pour cela, on incline l'hélicoptère (on lui fait prendre un angle de tangage non nul) et on le maintient dans cette position au moyen d'une vis. On a appliqué $\theta = -0,666$ rad pour l'hélicoptère n°1 et $\theta = 0,709$ rad pour l'hélicoptère n°2. Lorsqu'on est bien calé, on lâche l'hélicoptère qui se met à tourner en prenant du lacet sous l'influence de cet angle de tangage non nul. Le relevé de la Figure (22) montre l'évolution du lacet λ au cours de cette expérience pour l'hélicoptère n°1, et celui de la Figure 23 l'évolution du lacet pour l'hélicoptère n°2. Attention, l'expérience démarre à $t = 30$ s, que l'on prendra comme origine de l'axe des temps.

Travail n°3 à réaliser : à quel type de modèle connu s'apparente la courbe de réponse indicielle obtenue ? Identifier ses paramètres et en déduire $H_l(s)$.

3 Commande LQ de l'hélicoptère

Afin d'élaborer cette commande, on a besoin d'une représentation d'état de l'hélicoptère.

Travail n°4 à réaliser : à partir des trois fonctions de transfert que vous avez identifiées, à savoir

$$H_e(s) = \frac{\hat{\epsilon}(s)}{\hat{u}_g(s) - \hat{u}_d(s)}, \quad H_l(s) = \frac{\hat{\lambda}(s)}{\hat{\theta}(s)} \quad \text{et} \quad H_t(s) = \frac{\hat{\theta}(s)}{\hat{u}_g(s) + \hat{u}_d(s)},$$

repasser aux 3 équations différentielles décrivant le comportement linéarisé de l'hélicoptère. Plutôt qu'à l'angle de lacet λ , on s'intéressera à la vitesse de lacet que l'on appellera **vitesse de l'hélicoptère**, notée

$$v(t) = \dot{\lambda}(t).$$

En faisant intervenir cette nouvelle variable, récrire les 3 équations différentielles obtenues. Proposer alors un vecteur d'état et en déduire les matrices A et B de la représentation d'état associée.

On souhaite concevoir un régulateur LQ avec bouclage intégral qui permette de suivre des consignes en échelon sur l'angle d'élévation ϵ , **altitude de l'hélicoptère**, et sa vitesse v . Le vecteur y des variables à asservir est donc égal à

$$y = \begin{bmatrix} \epsilon \\ v \end{bmatrix}.$$

Travail n°5 à réaliser : Donner la matrice C qui résulte de ce choix. Rappeler le principe du régulateur à retour d'état et bouclage intégral, ainsi que les conditions d'existence d'un tel régulateur. Assurez-vous à l'aide de Matlab que ces conditions sont satisfaites. Donner la représentation d'état du système augmenté, sur la base duquel sera calculé le régulateur recherché. Sachant qu'il n'y a pas de raison particulière de pénaliser une commande plus que l'autre, que proposez vous de choisir pour la matrice R qui pondère ces commandes ?

On cherche à satisfaire le cahier des charges suivant :

1. objectifs de performance : pour l'élévation et le lacet, temps de réponse à 95% inférieurs ou égaux à 5s,
2. contrainte n°1 : dépassements inférieurs ou égaux à 3,5%,
3. contrainte n°2 : afin d'assurer un bon confort de voyage à des passagers virtuels, on veut s'assurer que θ évolue entre $-0,3$ et $+0,3$ radians,
4. contrainte n°3 : la puissance disponible au niveau des moteurs impose aux tensions u_d et u_g d'évoluer entre -2 et $+2V$.

Travail n°6 à réaliser : Ecrire un programme Matlab à même de calculer un régulateur à retour d'état LQ et bouclage intégral pour l'hélicoptère. Construire un schéma Simulink de simulation du système corrigé en boucle fermée. En jouant sur les paramètres des matrices de pondération R et Q , calculer par essai-erreur un régulateur vérifiant le cahier des charges.

FASCICULE D'IDENTIFICATION DE SYSTEMES SIMPLES A PARTIR DE LEUR REPONSE INDICIELLE

Identifier un processus, c'est chercher un modèle mathématique appartenant à un ensemble de modèles connus, tel que ce modèle soumis à des signaux caractéristiques donne des réponse en statique et en dynamique les plus proches possible de celles du système réel lorsqu'il est soumis aux mêmes excitations.

On présente dans ce fascicule des méthodes d'identification pour les systèmes suivants :

$$P(s) = \frac{K}{1 + \tau s} \quad 1^{\text{er}} \text{ ordre},$$

$$P(s) = \frac{K}{s(1 + \tau s)} \quad 2^{\text{ème}} \text{ ordre avec intégrateur},$$

$$P(s) = \frac{K}{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)} \quad 2^{\text{ème}} \text{ ordre apériodique},$$

$$P(s) = \frac{K}{\frac{s^2}{\omega_0^2} + \frac{2\xi}{\omega_0}s + 1} \quad 2^{\text{ème}} \text{ ordre oscillant},$$

$$P(s) = \frac{K}{s^2} \quad \text{double intégrateur}.$$

1 Système du 1^{er} ordre

On applique un échelon d'amplitude a connue en entrée du système. On a alors

$$\hat{y}(s) = P(s) \hat{u}(s) = \frac{K}{1 + \tau s} \frac{a}{s} \Rightarrow y(t) = a K (1 - e^{-t/\tau}) .$$

Si l'on enregistre la réponse d'un tel système, on obtient le tracé de la Figure 24.

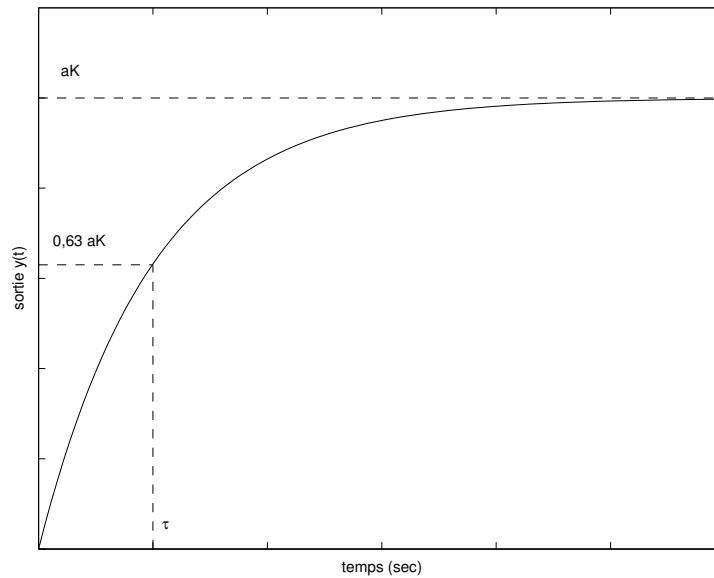


FIGURE 24 – Enregistrement de la réponse indicielle d'un système du premier ordre.

On suit alors la méthode suivante.

Procédure d'identification : à partir de l'enregistrement de la réponse,

- on lit la valeur finale, égale à aK , et on en déduit K puisque a est connu,
- on positionne sur la courbe le point pour lequel la sortie est égale à 63% de la valeur finale, et on lit le temps correspondant, qui est égal à τ .

2 Système du 2^{ème} ordre avec intégrateur

On applique un échelon d'amplitude a connue en entrée du système. On a alors

$$\hat{y}(s) = P(s) \hat{u}(s) = \frac{K}{s(1 + \tau s)} \frac{a}{s} \Rightarrow y(t) = a K (t - \tau + \tau e^{-t/\tau}).$$

Si l'on enregistre la réponse d'un tel système, on obtient le tracé de la Figure 25.

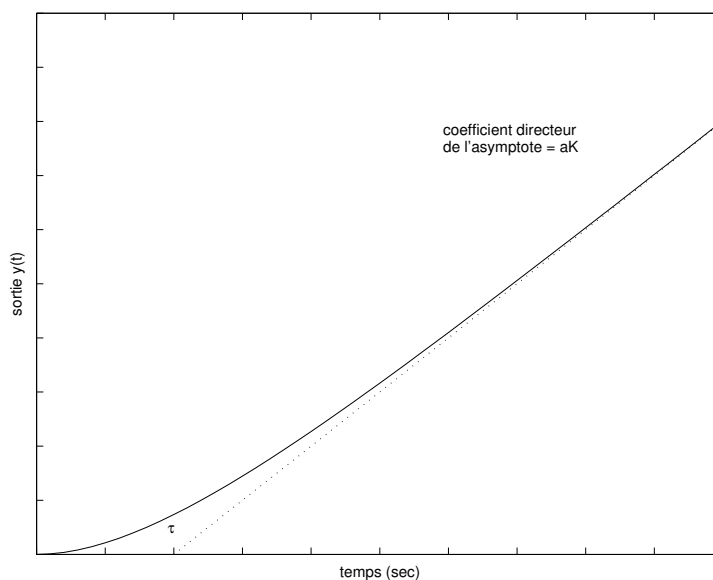


FIGURE 25 – Enregistrement de la réponse indicielle d'un système du deuxième ordre avec intégrateur.

On suit alors la méthode suivante.

Procédure d'identification : à partir de l'enregistrement de la réponse,

- on trace l'asymptote de la courbe,
- on calcule son coefficient directeur, qui est égal à aK , et on en déduit K puisque a est connu,
- on lit τ à l'intersection de l'asymptote et de l'axe des temps.

3 Système du 2^{ème} ordre apériodique

On applique un échelon d'amplitude a connue en entrée du système. On a alors

$$\hat{y}(s) = P(s) \hat{u}(s) = \frac{K}{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)} \frac{a}{s} \Rightarrow y(t) = a K \left[1 + \frac{1}{\tau_2 - \tau_1} (\tau_1 e^{-t/\tau_1} - \tau_2 e^{-t/\tau_2}) \right].$$

Si l'on enregistre la réponse d'un tel système, on obtient le tracé de la Figure 26.

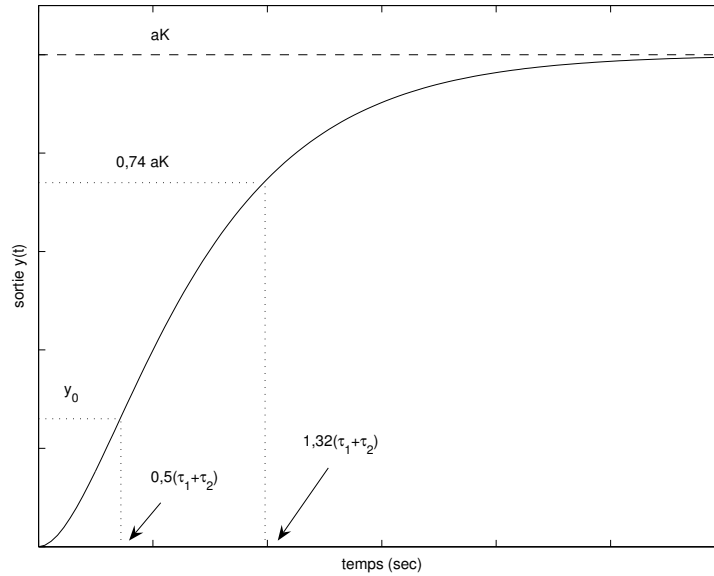


FIGURE 26 – Enregistrement de la réponse indicielle d'un système du deuxième ordre apériodique.

On considérera, sans perte de généralité, que $\tau_1 > \tau_2$, et on posera

$$\tau_2 = \alpha \tau_1, \text{ soit } \alpha = \frac{\tau_2}{\tau_1} \text{ avec } \alpha < 1.$$

On suit alors la méthode suivante.

Procédure d'identification : à partir de l'enregistrement de la réponse,

- on lit la valeur finale, égale à aK , et on en déduit K puisque a est connu,
- on positionne le point correspondant à $y = 0,74 a K$ et on lit le temps qui lui est associé. La théorie nous dit que celui-ci est égal à $1,32 (\tau_1 + \tau_2)$. On en déduit alors la valeur de $\tau_1 + \tau_2$, ce qui donne l'**équation 1**.
- On positionne ensuite le point correspondant à $t_0 = 0,5 (\tau_1 + \tau_2)$, et on lit la valeur y_0 qui lui est associée.
- On utilise alors l'abaque de Caldwell donné à la figure 27. Sur celui-ci, on positionne le point correspondant en ordonnée à $\frac{y_0}{aK}$ et on lit en abscisse la valeur de $\alpha = \frac{\tau_2}{\tau_1}$, ce qui donne l'**équation 2**.
- On déduit τ_1 et τ_2 des équations 1 et 2.

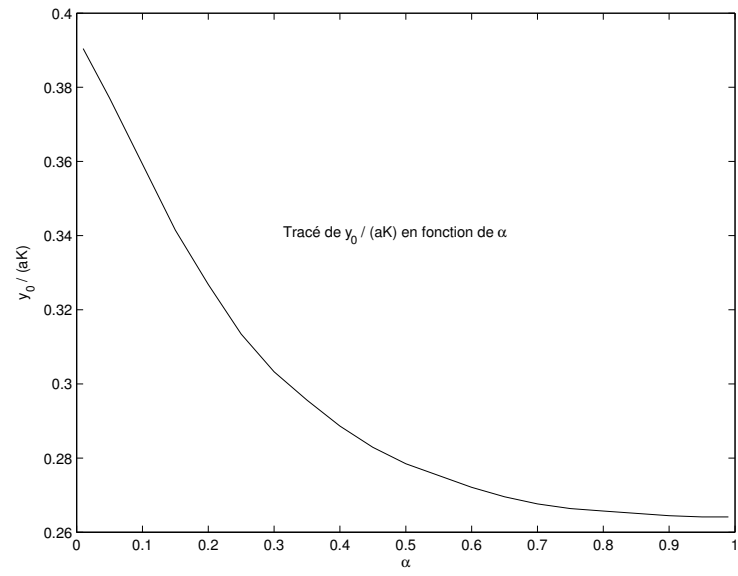


FIGURE 27 – *Abaque de Caldwell.*

4 Système du 2^{ème} ordre oscillant

On applique un échelon d'amplitude a connue en entrée du système. On a alors

$$\hat{y}(s) = P(s) \hat{u}(s) = \frac{K}{\frac{s^2}{\omega_0^2} + \frac{2\xi}{\omega_0}s + 1} \frac{a}{s}$$

$$\Rightarrow y(t) = aK \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_0 t} \sin\left(\omega_0 \sqrt{1-\xi^2} t + \phi\right) \right] \text{ avec } \phi = \arctan\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right).$$

Si l'on enregistre la réponse d'un tel système, on obtient le tracé de la Figure 28.

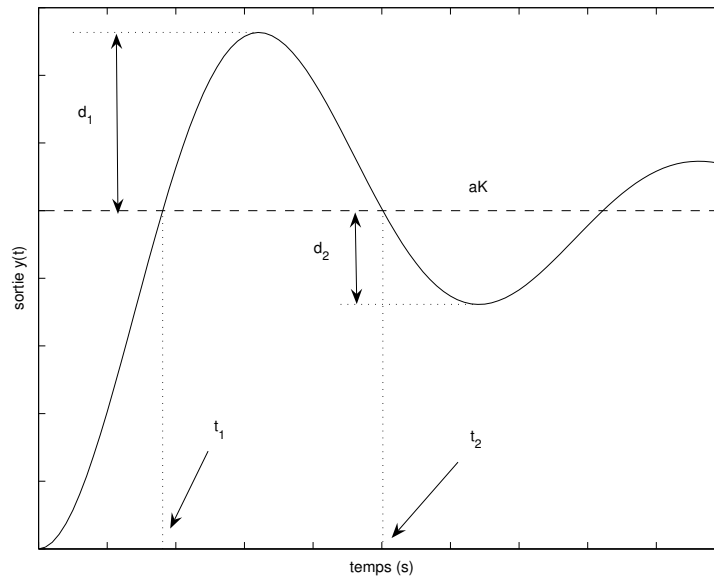


FIGURE 28 – Enregistrement de la réponse indicielle d'un système du deuxième ordre oscillant.

On suit alors la méthode suivante.

Procédure d'identification : à partir de l'enregistrement de la réponse,

- on lit la valeur finale, égale à aK , et on en déduit K puisque a est connu,
- on mesure d_1 et d_2 . On déduit alors le coefficient d'amortissement ξ de l'équation

$$\frac{d_2}{d_1} = \exp\left(-\frac{\pi \xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right).$$

- On mesure t_1 et t_2 . La pulsation propre non amortie ω_0 est alors donnée par

$$\omega_0 = \frac{\pi}{\sqrt{1-\xi^2}} \frac{1}{t_2 - t_1}.$$

5 Double intégrateur

Si l'on enregistre la réponse d'un tel système **sans connaître l'origine des temps**, on obtient le tracé de la Figure 29.

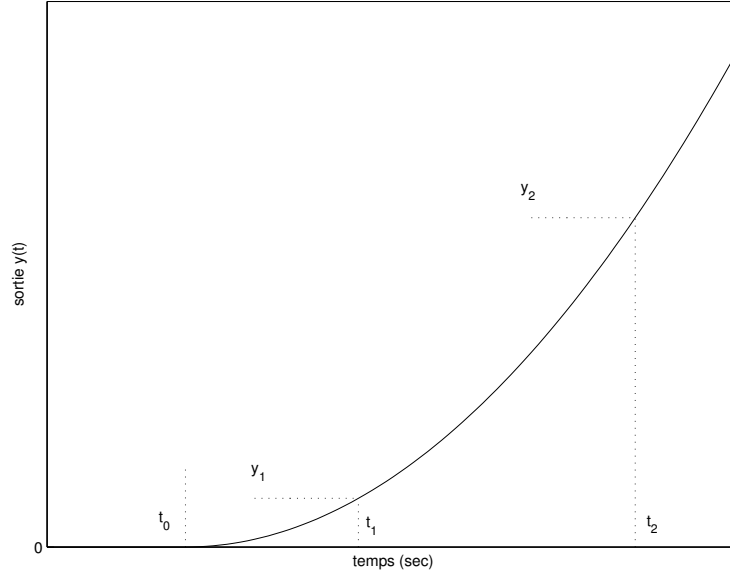


FIGURE 29 – Enregistrement de la réponse indicielle d'un double intégrateur - démarrage à t_0 .

Cela revient à appliquer en entrée du système un échelon d'amplitude a connue, qui démarre à $t = t_0$. On a alors

$$\hat{y}(s) = P(s) \hat{u}(s) = \frac{K}{s^2} \frac{a e^{-t_0 s}}{s} \Rightarrow y(t) = a K \frac{(t - t_0)^2}{2} \text{ et } y(t) = 0 \quad \forall t \leq t_0.$$

On suit alors la méthode suivante.

Procédure d'identification : à partir de l'enregistrement de la réponse,

- on choisit deux points de la courbe, de préférence éloignés, que l'on note (t_1, y_1) et (t_2, y_2) .
- On a alors

$$\begin{aligned} y(t_1) = y_1 &= a K \frac{(t_1 - t_0)^2}{2} \text{ et } y(t_2) = y_2 = a K \frac{(t_2 - t_0)^2}{2} \\ \Rightarrow t_1 - t_0 &= \sqrt{\frac{2 y_1}{a K}} \text{ et } t_2 - t_0 = \sqrt{\frac{2 y_2}{a K}} \\ \Rightarrow t_2 - t_1 &= \sqrt{\frac{2}{a K}} (\sqrt{y_1} - \sqrt{y_2}) \\ \Rightarrow K &= \frac{2}{a} \frac{(\sqrt{y_1} - \sqrt{y_2})^2}{(t_2 - t_1)^2}. \end{aligned}$$