Quantitative Methods in Geography

——河北师范大学资环学院　　胡引翠

1、地理系统的空间趋势面分析

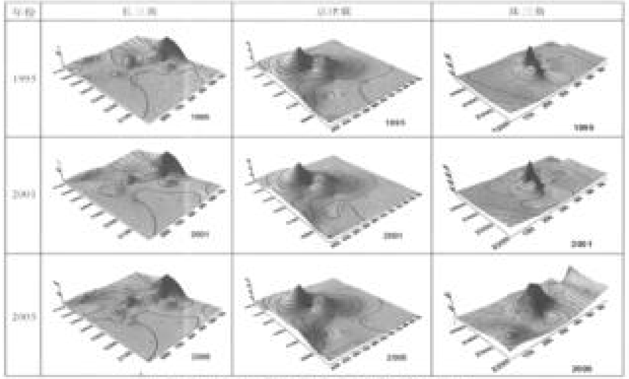


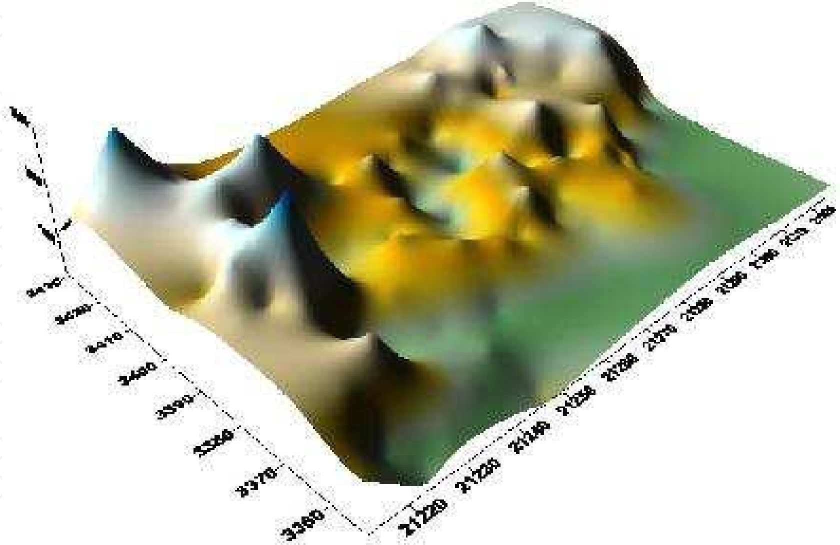
图2 中国三大城市群非农人口数量空间趋势面图谱

趋势面？

用数学的方法，以数学模型来模拟（或拟合）地理数据的空间分布及其区域性变化趋势的方法。

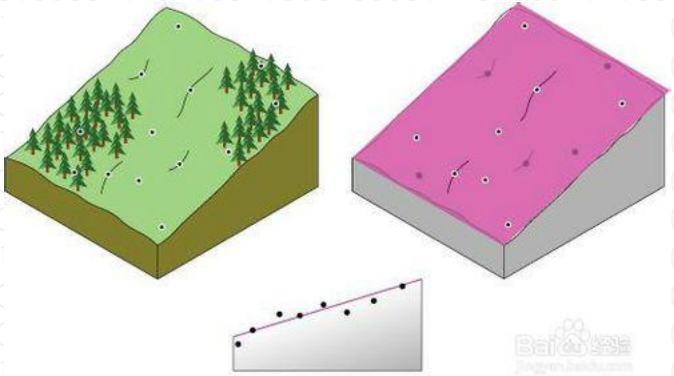
它实质上是通过回归分析原理，运用最小二乘法拟合一个二维非线性函数，模拟地理要素在空间上的分布规律，展示地理要素在地域空间上的变化趋势。

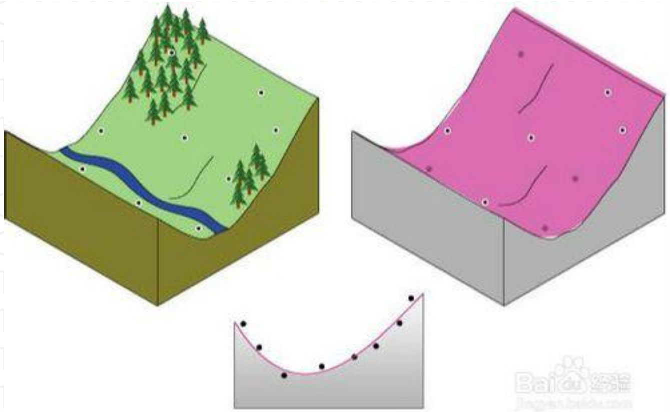
趋势面分析：



——趋势面分析方法常常被用来模拟资源、环境、人口及经济要素在空间上的分布规律，它在空间分析方面具有重要的应用价值。

——趋势面是一种抽象的数学曲面，它抽象并过滤掉了一些局域随机因素的影响，使地理要素的空间分布规律明显化。

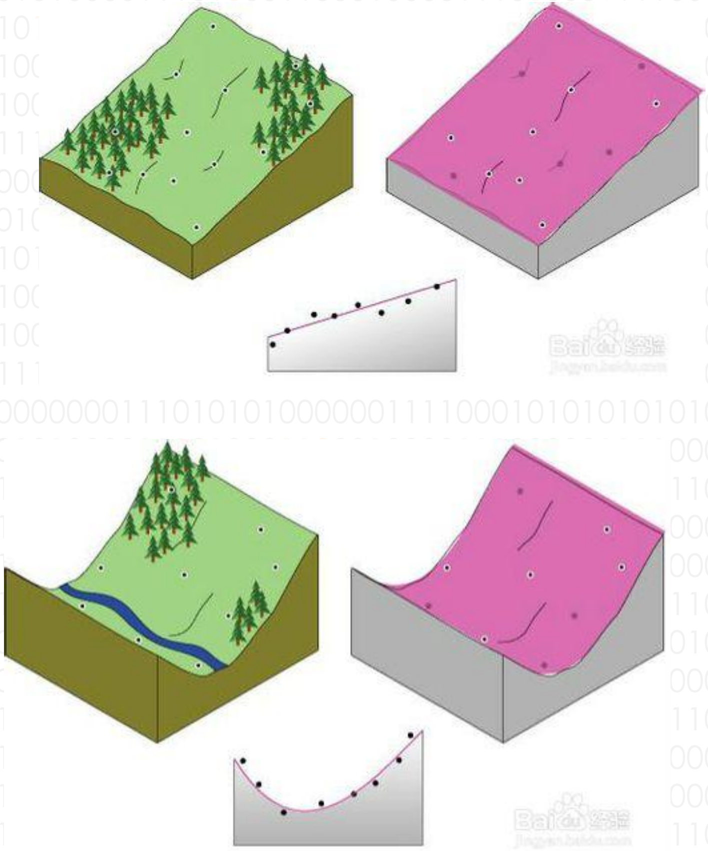




趋势面的性质与特点：

——通常把实际的地理曲面分解为**趋势面**和**剩余面**两部分，前者反映地理要素的宏观分布规律，属于确定性因素作用的结果；而后者则对应于微观局域，是随机因素影响的结果。

——趋势面分析的一个基本要求，就是所选择的趋势面模型应该是剩余值最小，而趋势值最大，这样拟合度精度才能达到足够的准确性。空间趋势面分析，正是从地理要素分布的实际数据中分解出趋势值和剩余值，从而揭示地理要素空间分布的趋势与规律。



趋势面的性质与特点：

——是一种光滑的数学曲面，它能集中地代表地理数据在大范围内的空间分布变化趋势。

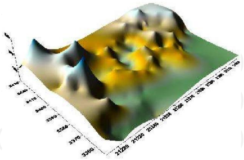
——与实际上的地理曲面不同，它只是实际曲面的一种近似值。

——实际曲面包括趋势面和剩余（或离差）曲面两部分，即

实际曲面＝趋势面+剩余曲面

2、趋势面分析的数学模型

趋势面分析的数学原理？



设以$Z_i(x_i，y_i)$表示某一地理特征值在空间上的分布。其中$(x_i，y_i)$为平面上点的坐标。任一观测点Z_i可分解为两个部分即。式中：εi即为剩余值（残差值）。

显然，当（xi，yi）在空间上变动时,式就刻画了地理要素的实际分布曲面、趋势面和剩余面之间的互动关系

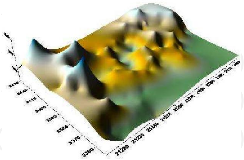
$$Z_i(x_i, y_i) = T_i(x_i, y_i) + \varepsilon_i$$

$$\hat{z} = f(x, y) = T_i(x_i, y_i), Z_i(x_i, y_i) = \hat{z}_i(x_i, y_i) + \varepsilon_i$$

$$\varepsilon_i = z_i - \hat{z}_i$$

2、趋势面分析的数学模型

趋势面分析的核心:



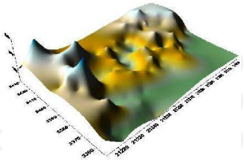
从实际观测值出发推算趋势面，一般采用回归分析方法，使得残差平方和趋于最小，即：

$$Q=\sum_{i=1}^{n}\varepsilon^{2}=\sum_{i=1}^{n}[z_i(x_i,y_i)-\hat{z}_i(x_i,y_i)]^{2}\rightarrow \min$$

这就是在最小二乘法意义下的趋势面拟合。

2、趋势面分析的数学模型

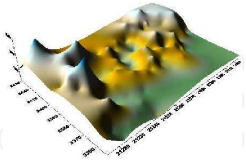
趋势面分析的核心:



用来计算趋势面的数学方程式有多项式函数和傅立叶级数，其中最为常用的是多项式函数形式。因为任何一个函数都可以在一个适当的范围内用多项式来逼近，而且调整多项式的次数，可使所求的回归方程适合实际问题的需要。

2、趋势面分析的数学模型

多项式方程作为趋势面方程:



因为任何函数在一定范围内总可以用多项式来逼近，并可调整多项式的次数来满足趋势面分析的需要，一般来说，多项式的次数越高则趋势值越接近于观测值，而剩余值越小。

2、趋势面分析的数学模型

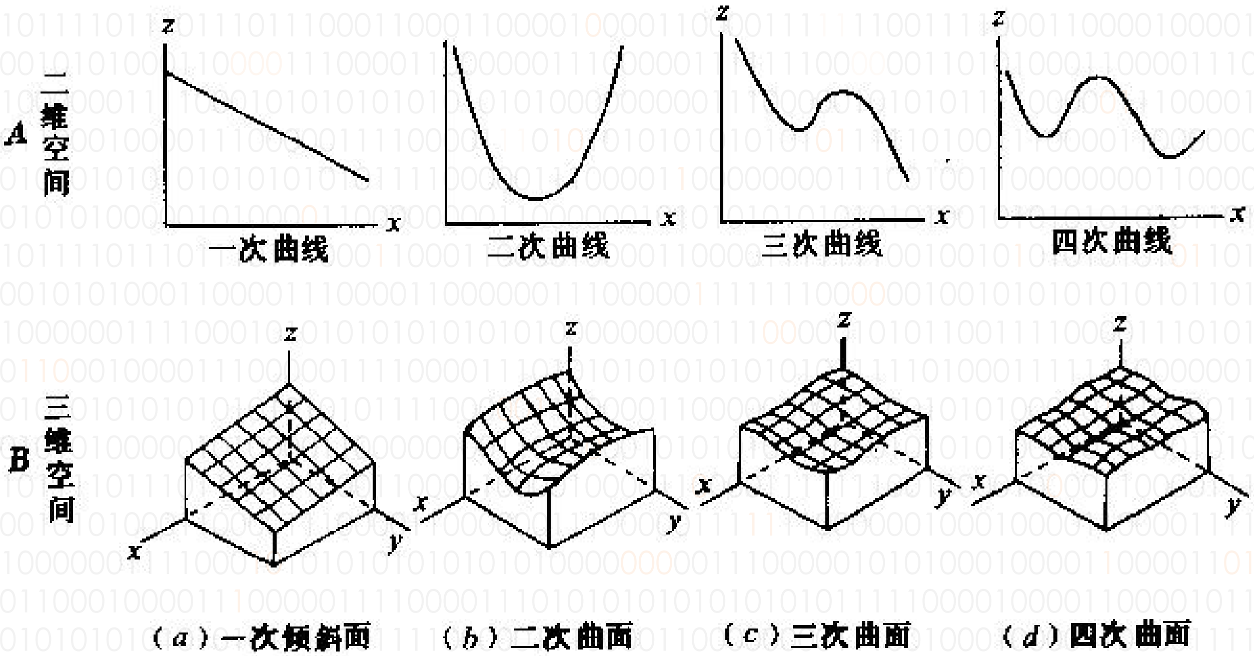
多项式趋势面的数学模型:

1. $z = b_0 + b_1 x + b_2 y$

2. $z = b_0 + b_1 x + b_2 y + b_3 x^2 + b_4 xy + b_5 y^2$

3. $z = b_0 + b_1 x + b_2 y + b_3 x^2 + b_4 xy + b_5 y^2 + b_6 x^3 + b_7 x^2 y + b_8 xy^2 + b_9 x^3$

4. $z = b_0 + b_1 x + b_2 y + b_3 x^2 + b_4 xy + b_5 y^2 + b_6 x^3 + b_7 x^2 y + b_8 xy^2 + b_9 x^3 + b_{10} x^3 y + b_{11} xy^3 + b_{12} x^2 y^2 + b_{13} x^4 + b_{14} y^4$


A
二维空间
z
x
一次曲线
二次曲线
三次曲线
四次曲线
B
三维空间
y
(a) 一次倾斜面
(b) 二次曲面
(c) 三次曲面
(d) 四次曲面

2、趋势面分析的数学模型

估计趋势面模型的参数:

根据观测值zi，xi，yi（i=1,2,…,n）确定多项式的系数b0，b1，…，bn，使每一个观测值与趋势值的残差平方和为最小，即

$$Q=\sum_{i=1}^{n}(z_i-\hat{z}_i)^2 \Rightarrow \min$$

按建立多元线性方程的方法，使Q对系数b0，b1，…，bn求偏导，并令这些偏导数等于零，得趋势面的正规方程组，解正规方程组，即可求出系数，从而得到趋势面方程

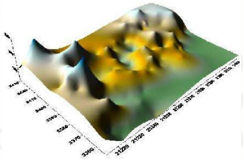
2、趋势面分析的数学模型

过程:

① 将多项式回归（非线性模型）模型转化为多元线性回归模型。

3、趋势面拟合程度的检验

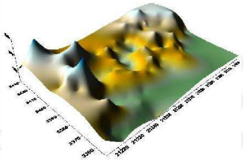
意义:



趋势面分析拟合程度与回归模型的效果直接相关，因此，对趋势面分析进行适度性检验是一个关系到趋势面能否在实际研究中加以应用的关键问题，也是趋势面分析中不可缺少的重要环节。

3、趋势面拟合程度的检验

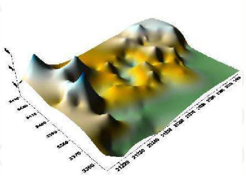
方法:



- — 趋势面拟合适度的R^2检验
- — 趋势面拟合适度的显著性F检验
- — 趋势面适度的逐次检验

3、趋势面拟合程度的检验

趋势面拟合适度的R^2检验:



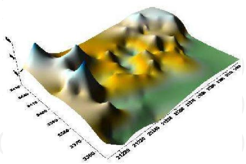
趋势面与实际面的拟合度系数R^2是测定回归模型拟合优度的重要指标。

一般用变量z的总离差平方和中回归平方和所占的比重表示回归模型的拟合优度。

$$SS_T=\sum_{i=1}^{n}(z_i-\hat{z}_i)^2+\sum_{i=1}^{n}(\hat{z}_i-\bar{z})^2=SS_D+SS_R$$

3、趋势面拟合程度的检验

趋势面拟合适度的R^2检验:

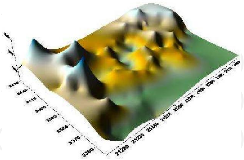


$SS_D=\sum_{i=1}^{n}(z_i-\hat{z}_i)^2$ 为剩余平方和，它表示随机因素对离差的影响， $SS_R=\sum_{i=1}^{n}(\hat{z}_i-\bar{z})^2$ 为回归平方和，它表示自变量对因变量的离差的总影响。

$$SS_T=\sum_{i=1}^{n}(z_i-\hat{z}_i)^2+\sum_{i=1}^{n}(\hat{z}_i-\bar{z})^2=SS_D+SS_R$$

3、趋势面拟合程度的检验

趋势面拟合适度的R^2检验:



SS_R越大（或SS_D越小）就表示因变量与自变量的关系越密切，回归的规律性越强、效果越好。

记

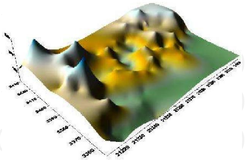
$$R^2=\frac{SS_R}{SS_T}=1-\frac{SS_D}{SS_T}$$

R^2 越大，趋势面的拟合度就越高。

$$SS_T=\sum_{i=1}^{n}(z_i-\hat{z}_i)^2+\sum_{i=1}^{n}(\hat{z}_i-\bar{z})^2=SS_D+SS_R$$

3、趋势面拟合程度的检验

趋势面拟合适度的F检验：是对趋势面回归模型整体的显著性检验



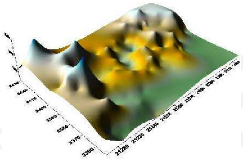
利用变量z的总离差平方和中剩余平方和与回归平方和的比值，确定变量z与自变量x、y之间的回归关系是否显著。即:

$$F = \frac{SS_R / p}{SS_D / n - p - 1}$$

结果分析：在显著性水平α下，查F分布表得F_α，若计算的F值大于临界值F_α，则认为趋势面方程显著；反之则不显著。

3、趋势面拟合程度的检验

趋势面适度的逐次检验:



方法

(1)求出较高次多项式方程的回归平方和与较低次多项式方程的回归平方和之差;

(2)将此差除以回归平方和的自由度之差，得出由于多项式次数增高所产生的回归均方差;

(3)将此均方差除以较高次多项式的剩余均方差，得出相继两个阶次趋势面模型的适度性比较检验值F。

若所得的F值是显著的，则较高次多项式对回归作出了新贡献，若F值不显著，则较高次多项式对于回归并无新贡献。

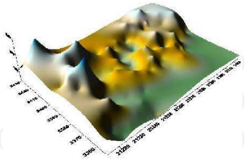
多项式趋势面由*K*次增高至（*K*+1）次的回归显著性检验

离差来源	平方和	自由度	均方差	*F*检验
（*K*+1）次回归	$SS_R^{(K+1)}$	***p***	$MS_R^{(K+1)} = SS_R^{(K+!)} / p$	$MS_R^{(K+1)} / MS_D^{(K+1)}$
（*K*+1）次剩余	$SS_D^{(K+1)}$	***n*－*p*－1**	$MS_D^{(K+1)} = SS_D^{(K+!)} /(n - p - 1)$	
*K*次回归	$SS_R^{(K)}$	***q***	$MS_R^{(K)} = SS_R^{(K)} / q$	$MS_R^{(K)} / MS_D^{(K)}$
*K*次剩余	$SS_D^{(K)}$	***n*－*q*－1**	$MS_D^{(K)} = SS_D^{(K)} /(n - q - 1)$	
由*K*次增高至（*K*+1）次的回归	$SS_R^{(I)} = SS_R^{(K+1)} - SS_R^{K}$	***p*－*q***	$MS_R^{(I)} = SS_R^{(I)} /(p - q)$	$MS_R^{(I)} / MS_D^{(K+1)}$
总离差	SS_T			

3、趋势面拟合程度的检验

趋势面适度的逐次检验:

注意:

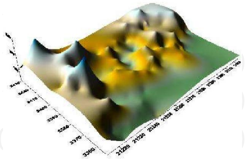


在实际应用中，往往用次数低的趋势面逼近变化比较小的地理要素数据，用次数高的趋势面逼近起伏变化比较复杂的地理要素数据。

次数低的趋势面使用起来比较方便，但具体到某点拟合较差；次数较高的趋势面只在观测点附近效果较好，而在外推和内插时则效果较差。

4、趋势面分析应用实例

实例1:



某流域1月份降水量与各观测点的坐标位置数据如表所示。下面，我们以降水量为因变量z，地理位置的横坐标和纵坐标分别为自变量x、y，进行趋势面分析，并对趋势面方程进行适度 F 检验。

流域降水量及观测点的地理位置数据

序号	降水量 Z/mm	横坐标 $x/10^4$ m	纵坐标 $y/10^4$ m
1	27.6	0	1
2	38.4	1.1	0.6
3	24	1.8	0
4	24.7	2.95	0
5	32	3.4	0.2
6	55.5	1.8	1.7
7	40.4	0.7	1.3
8	37.5	0.2	2
9	31	0.85	3.35
10	31.7	1.65	3.15
11	53	2.65	3.1
12	44.9	3.65	2.55

4、趋势面分析应用实例

实例1:

- 建立趋势面模型

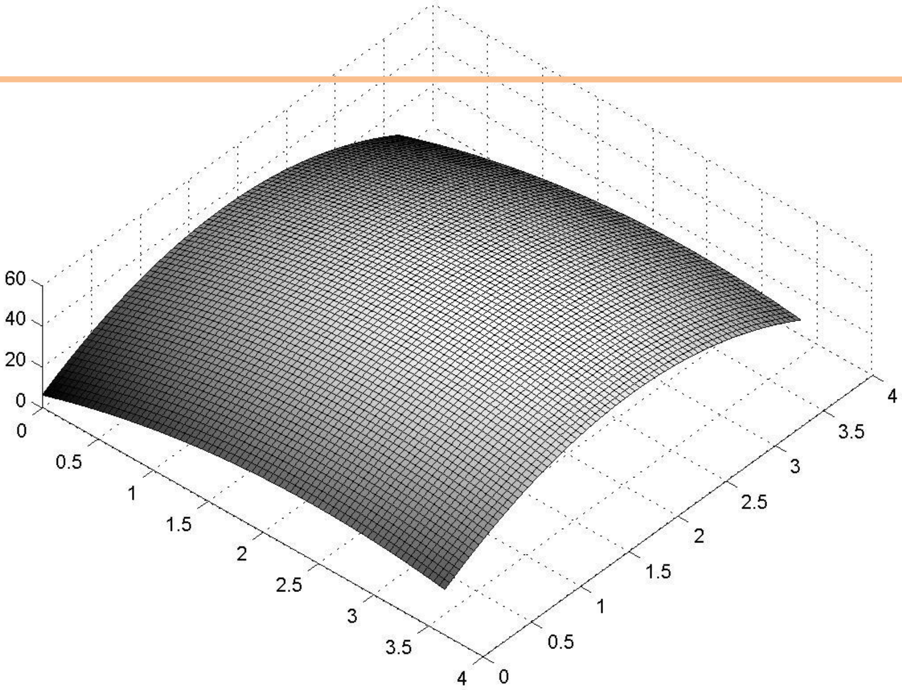
（1）首先采用二次多项式进行趋势面拟合，用最小二乘法求得拟合方程为

$$z = 5.998 + 17.438x + 29.787y - 3.558x^2 + 0.357xy - 8.070y^2$$

$$R^2 = 0.839, F = 6.236$$

4、趋势面分析应用实例

实例1:



某流域降水量的二次多项式趋势面

4、趋势面分析应用实例

实例1:

(2) 再采用三次趋势面进行拟合，用最小二乘法求得拟合方程为

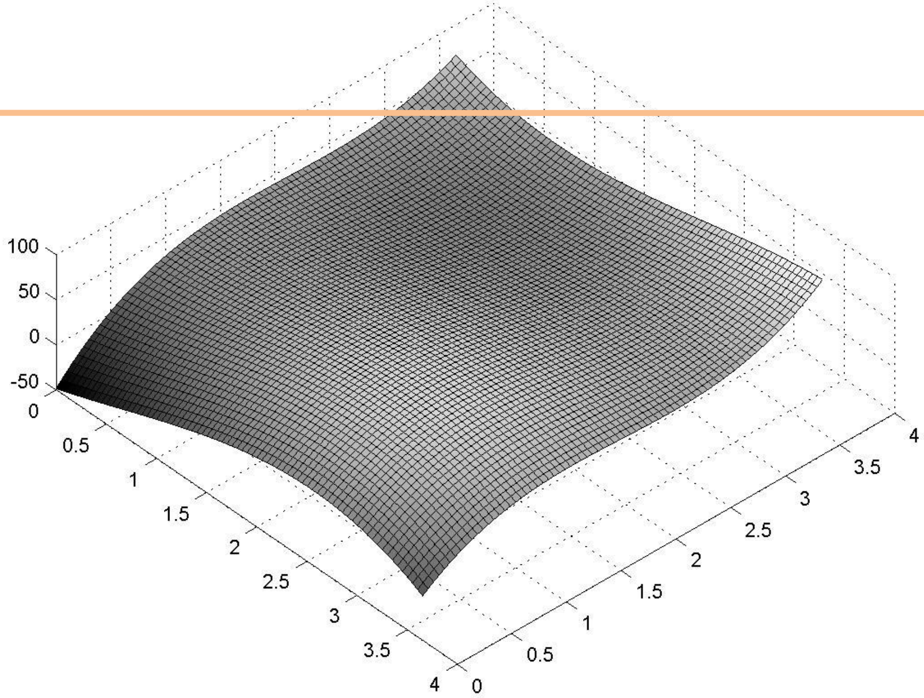
$$z = -48.810 + 37.557x + 130.130y + 8.389x^2 - 33.166xy$$

$$-62.740y^2 - 4.133x^3 + 6.138x^2y + 2.566xy^2 + 9.785y^3$$

$$R^2 = 0.965, F = 6.054$$

4、趋势面分析应用实例

实例1:



某流域降水量的三次多项式趋势面

4、趋势面分析应用实例

实例1:

■模型检验

(1)趋势面拟合适度的R^2检验: 根据R^2检验方法计算，结果表明，二次趋势面的判定系数为R_2^2=0.839，三次趋势面的判定系数为R_3^2=0.965，可见二次趋势面回归模型和三次趋势面回归模型的显著性都较高，而且三次趋势面较二次趋势面具有更高的拟合程度。

4、趋势面分析应用实例

实例1:

(2) 趋势面适度的显著性F检验：根据F检验方法计算，结果表明，二次趋势面和三次趋势面的F值分别为F_2=6.236和F_3=6.054。在置信水平α=0.05下，查F分布表得 $F_{2\alpha}=F_{0.05}(5,6)=4.53$。$F_{3\alpha}$= $F_{0.05}(9,2)=19.4$。显然 $F_2>F_{2\alpha}$，$F_3<F_{3\alpha}$，故二次趋势面的回归方程显著而三次趋势面不显著。因此，F检验的结果表明，用二次趋势面进行拟合比较合理。

4、趋势面分析应用实例

实例1:

(3)趋势面适度的逐次检验:

趋势面比较:

在二次和三次趋势面检验中，对两个阶次趋势面模型的适度进行比较，相应的方差分析计算结果见表。

二次和三次趋势面回归模型的逐次检验方差分析表

离差来源	平方和	自由度	均方差	F检验
三次回归	1 129.789	9	125.532	
三次剩余	41.474	12-9-1	20.737	6.054
二次回归	982.244	5	196.449	
二次剩余	189.018	12-5-1	31.503	6.236
由二次增高至三次的回归	147.545	4	36.886	1.779

4、趋势面分析应用实例

实例1:

分析：从二次趋势面增加到三次趋势面，$F_{3\to2}=1.779$。在置信度水平$\alpha=0.05$下，查F分布表得$F_{0.05}(4,2)=6.94$，由于$F_{3\to2}<F_{0.05}(4,2)=6.94$，故将趋势面拟合次数由二次增高至三次，对回归方程并无新贡献，因而选取二次趋势面比较合适。这也进一步验证了趋势面拟合适度的显著性F检验的结论。

4、趋势面分析应用实例

趋势面的具体计算方法与步骤:

- 原始数据列表
- 等间隔选取纵横坐标网，将原始数据点入坐标
- 按多元线性回归分析方法求出趋势面的正规方程组，解出参数
- 从趋势值等值线图中，获得地理要素的区域性变化规律
- 用F分布对趋势面进行拟合程度检验