Chương 4: PHÉP NỘI SUY ĐA THỨC

Minh-Phuong Tran

Ton Duc Thang University

Ngày 5 tháng 4 năm 2016

4.1. Giới thiệu bài toán (Basic Motivation)

- Trên thực tế, các đại lượng khảo sát không được cho dưới dạng hàm cụ thể mà chỉ là một bảng các giá trị rời rạc (thực nghiệm).

x	x_0	x_1	$\cdots$	x_n
$y = f(x)$	y_0	y_1	$\cdots$	y_n

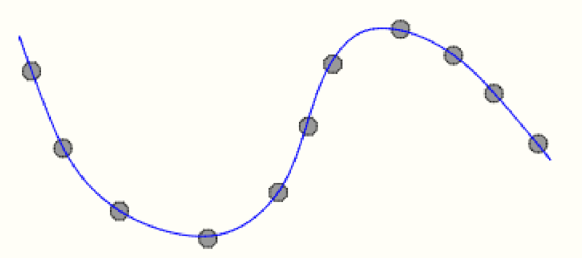
- Giả sử một hàm thực $y = f(x)$ biểu diễn một đại lượng cần khảo sát.

$$f(x) = \text{unknown}$$

- Hãy vẽ đường đi qua các điểm rời rạc cho trước. (Matlab)

4.1. Giới thiệu bài toán (Basic Motivation)

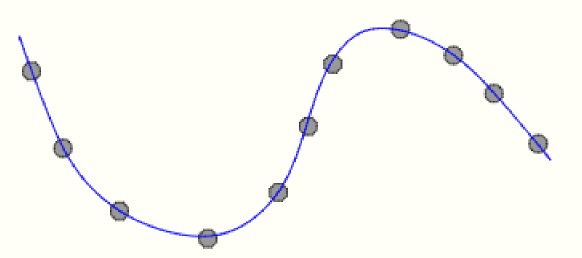
- Hãy vẽ đường đi qua các điểm rời rạc cho trước. (Matlab)



- Có bao nhiêu cách vẽ?

4.1. Giới thiệu bài toán (Basic Motivation)

- Hãy vẽ đường đi qua các điểm rời rạc cho trước. (Matlab)



- Có bao nhiêu cách vẽ? $\longrightarrow$ vô số.

Vấn đề đặt ra:

- Làm thế nào để tính $y = f(x)$ với x là điểm bất kỳ không nằm trong các giá trị đã biết?

4.1. Giới thiệu bài toán (Basic Motivation)

Vấn đề đặt ra:

- Làm thế nào để tính $y = f(x)$ với x là điểm bất kỳ không nằm trong các giá trị đã biết?

$\longrightarrow$ Bài toán nội suy và Bài toán ngoại suy

- Cho $x_0 < x_1 < \cdots < x_i < \cdots < x_n$ có thể phân bố cách đều hoặc không và cho biết các giá trị $y_i = f(x_i)$ tại các điểm trên.
- **Bài toán nội suy**: Bài toán tìm giá trị gần đúng của y^* tại điểm x^* nào đó nằm giữa các giá trị x_i đã biết.

x	x_0	$\cdots$	x^*	x_n
$y = f(x)$	y_0	$\cdots$	$y^* = ?$	y_n

- **Bài toán ngoại suy**: Bài toán tìm giá trị gần đúng của y^* tại điểm x^* nào đó nằm ngoài khoảng $[x_0, x_n]$.

x	x_0	x_1	$\cdots$	x_n	$\cdots$	x^*
$y = f(x)$	y_0	y_1	$\cdots$	y_n	$\cdots$	$y^* = ?$

- Cho $x_0 < x_1 < \cdots < x_i < \cdots < x_n$ có thể phân bố cách đều hoặc không và cho biết các giá trị $y_i = f(x_i)$ tại các điểm trên.
- **Bài toán nội suy**: Bài toán tìm giá trị gần đúng của y^* tại điểm x^* nào đó nằm giữa các giá trị x_i đã biết.

x	x_0	$\cdots$	x^*	x_n
$y = f(x)$	y_0	$\cdots$	$y^*=?$	y_n

- **Bài toán ngoại suy**: Bài toán tìm giá trị gần đúng của y^* tại điểm x^* nào đó nằm ngoài khoảng $[x_0, x_n]$.

x	x_0	x_1	$\cdots$	x_n	$\cdots$	x^*
$y = f(x)$	y_0	y_1	$\cdots$	y_n	$\cdots$	$y^*=?$

- **BÀI TOÁN NỘI SUY**

NỘI DUNG

Vấn đề đặt ra:

- Hàm cần tìm $y = f(x)$ phải có dạng biểu diễn đơn giản, sơ cấp.
- Hàm cần tìm phải thỏa những tính chất nhất định: đơn điệu, liên tục, khả vi, khả tích... tùy thuộc vào mục đích sử dụng hàm đó.

Vấn đề đặt ra:

- Hàm cần tìm $y = f(x)$ phải có dạng biểu diễn đơn giản, sơ cấp.
- Hàm cần tìm phải thỏa những tính chất nhất định: đơn điệu, liên tục, khả vi, khả tích... tùy thuộc vào mục đích sử dụng hàm đó.

$\longrightarrow$ Hàm đa thức

Định lý Weierstrass 1 về xấp xỉ hàm

Cho $f(x)$ là một hàm liên tục xác định trên khoảng $[a, b]$. Khi đó với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại một **đa thức thực** $P(x)$ bậc $m > 0$ sao cho:

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in [a, b]$$

Định lý Weierstrass 2 về xấp xỉ hàm

Cho $f(x)$ là một hàm liên tục xác định trên khoảng $[-\pi, \pi]$ và $f(-\pi) = f(\pi)$. Khi đó với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại **đa thức lượng giác**:

$$Q_m(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{m} [a_j \cos(jx) + b_j \sin(jx)]$$

sao cho $|f(x) - Q_m(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in [-\pi, \pi]$

Một vài lưu ý:

- Các đa thức P và Q_m trên đây được gọi là các **đa thức nội suy**.
- Phương pháp tìm hàm P như vậy được gọi là **phương pháp nội suy đa thức**.

Một vài lưu ý:

- Các đa thức P và Q_m trên đây được gọi là các **đa thức nội suy**.
- Phương pháp tìm hàm P như vậy được gọi là **phương pháp nội suy đa thức**.
- Trong một số bài toán vật lý, hàm cần xấp xỉ có tính chất tuần hoàn. Khi đó nội suy bằng đa thức lượng giác Q_m được ưu tiên hơn.

Định lý (Sự duy nhất của đa thức nội suy)

Cho $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$ *là* $n+1$ *số thực phân biệt, và* $y_0, y_1, ..., y_n$ *là các giá trị bất kỳ. Khi đó tồn tại duy nhất một đa thức* $P(x)$ *có bậc n thỏa mãn điều kiện:*

$$P(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, 2, ..., n$$

4.2 Nội suy đa thức (Polynomial Interpolation)

Một đa thức nội suy bậc n được tìm dưới dạng:

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

thỏa mãn hệ phương trình $n+1$ ẩn và $n+1$ phương trình:

$$\begin{cases} P_n(x_0) & = y_0 \\ P_n(x_1) & = y_1 \\ \cdots\cdots \\ P_n(x_n) & = y_n \end{cases}$$

Ta nghiên cứu hai phương pháp nội suy đa thức:

1. Phương pháp nội suy Lagrange.
2. Phương pháp nội suy Newton.

- Giả sử ta có một dãy các điểm $x_0, x_1, ..., x_n$ và một dãy các giá trị $y_0, y_1, ..., y_n$ tương ứng.
- Phương pháp Lagrange tìm đa thức nội suy $P_n(x)$ có bậc n, được viết dưới dạng:

$$P_n(x) \equiv L(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + ... + y_n L_n(x)$$

trong đó L_i có bậc n và

$$L_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{nếu} \quad j = i \\ 0 & \text{nếu} \quad j \neq i \end{cases}$$

- Do $P_n(x_i) = y_i$ với $i = 0, 1, 2, ..., n$, nên hàm L_i được cho bởi công thức sau:

$$L_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})...(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)...(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})...(x_i - x_n)}$$

- Đa thức nội suy theo cách này được gọi là **đa thức nội suy Lagrange**.

Bài tập thực hành

Hãy viết thuật toán và chương trình minh họa cho phương pháp nội suy Lagrange.

Sai số của đa thức nội suy

Mệnh đề

Cho hàm $f(x)$ có đạo hàm liên tục đến cấp $n+1$ trên $[a, b]$ và P_n là đa thức nội suy của nó. Các điểm mốc nội suy là

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$$

Đặt $\omega_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$ và $R(x) = f(x) - P_n(x)$ là đa thức dư. Khi đó với mọi $x \in [a, b]$ tồn tại $\eta_x \in [a, b]$ sao cho

$$R(x) = \frac{f^{(n+1)}(\eta_x)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$$

Sai số của đa thức nội suy

Hệ quả

Giả sử

$$M = \sup_{a \le x \le b} |f^{(n+1)}(x)|$$

Khi đó:

$$|R(x)| \le |f(x) - P_m(x)| \le \frac{M}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$$

Ví dụ minh họa

Cho hàm số $y = \sin(x/2)$ có các nút giá trị như sau:

i	x_i	y_i
0	0	0.000
1	1.5	0.682
2	2	0.841

Hãy xác định đa thức nội suy Lagrange đi qua các điểm trên? Hãy tính giá trị gần đúng của hàm số tại điểm $x = 1$.

Ví dụ minh họa

- Đa thức nội suy Lagrange đi qua các điểm (x_i, y_i) được cho bởi công thức:

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x)$$

trong đó

$$L_i(x) = \frac{\prod_{j=0, j\neq i}^{n} (x - x_j)}{\prod_{j=0, j\neq i}^{n} (x_i - x_j)}$$

- Ta có

$$L_0(x) = \frac{(x-1.5)(x-2)}{(0-1.5)(0-2)} = \frac{1}{3}(x-1.5)(x-2)$$

$$L_1(x) = \frac{(x-0)(x-2)}{(1.5-0)(1.5-2)} = -\frac{4}{3}x(x-2)$$

$$L_2(x) = \frac{(x-0)(x-1.5)}{(2-0)(2-1.5)} = x(x-1.5)$$

Ví dụ minh họa

- Do đó đa thức nội suy là:

$$P(x) = y_0L_0(x) + y_1L_1(x) + y_2L_2(x)$$
$$= 0.000 - \frac{4}{3} \cdot 0.0682x(x-2) + 0.841x(x-1.5)$$

- Tại $x = 1$ ta có $P(1) = 0.4888$.
- Sai số của phương pháp:

$$R(x) = \frac{f'''(\eta)}{3!}x(x-1.5)(x-2)$$

- Ta có $|f'''(\eta)| = |-1/8\cos(\eta/2)| \leq 1/8$ nên sai số tại $x = 1$ được cho bởi:

$$R(1) \leq \frac{|f'''(\eta)|}{3!}|1 \cdot (1-1.5)(1-2)| \simeq 0.01042$$

Ví dụ minh họa

Câu hỏi tương tự ví dụ trước với hàm số $y = \sin(x/3)$ và bảng giá trị như sau:

i	x_i	y_i
0	0	0.000
1	1.5	0.479
2	2	0.618

Bài tập

1. Hãy viết đa thức nội suy Lagrange của các mốc nội suy sau đây:

x	0	1	-1	2	-2
$y = f(x)$	-5	-3	-15	39	-9

2. Tìm số liệu còn thiếu trong bảng sau:

x	0	1	2	3	4
y	1	3	9	?	81

3. Tính $f(0.3)$ từ bảng dữ liệu sau đây:

x	0	1	3	4	7
y	1	3	49	129	813

Bài toán phân tích về dạng phân thức tối giản

Bài toán: Cần phân tích $B(x) = \dfrac{P_n(x)}{(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_n)}$ về dạng tối giản:

$$\frac{A_0}{(x - x_0)} + \frac{A_1}{(x - x_1)} + ... + \frac{A_n}{(x - x_n)}$$

trong đó P_n là đa thức bậc không quá n và $x_0, x_1, ..., x_n$ là các điểm phân biệt.

Áp dụng phương pháp đa thức nội suy đa thức Lagrange: $P_n(x) \equiv L(x)$ và $y_i = P_n(x_i)$ ta có:

$$B(x) = \frac{y_0}{T_0(x - x_0)} + \frac{y_1}{T_1(x - x_1)} + ... + \frac{y_n}{T_n(x - x_n)}$$

trong đó

$$T_i = (x_i - x_0)(x_i - x_1)...(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})...(x - x_n)$$

Suy ra

$$A_i = \frac{P_n(x_i)}{T_i}, \quad i = 0, 1, ..., n$$

là các hệ số cần tìm.

Ví dụ

Phân tích về dạng phân thức tối giản: $f(x) = \dfrac{-x^3 + 2x^2 + 5}{(x-1)x(x+1)(x+2)}$

- **Ý tưởng**: Ta cần tìm một đa thức nội suy bậc n có các nút giá trị đã biết là $(x_i, y_i), i = 0, 1, .., n$ sao cho mỗi lần bổ sung thêm số liệu vào cuối mẫu quan sát ta vẫn tận dụng được đa thức nội suy đã tính trước đó.

- **Ý tưởng**: Ta cần tìm một đa thức nội suy bậc n có các nút giá trị đã biết là $(x_i, y_i), i = 0, 1, .., n$ sao cho mỗi lần bổ sung thêm số liệu vào cuối mẫu quan sát ta vẫn tận dụng được đa thức nội suy đã tính trước đó.
- Đa thức nội suy Newton được tìm dưới dạng:

$$P_n(x) = D_0(x) + D_1(x) + ... + D_n(x)$$

sao cho $P_i(x)$ là đa thức nội suy của mẫu $(x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_i, y_i)$.

- Bài toán nội suy Newton được chia làm hai trường hợp:
  - Trường hợp tổng quát: Lưới chia x_i không đều.
  - Lưới chia x_i cách đều.

Trên lưới nội suy ta đặt các tỷ sai phân như sau:

- Tỷ sai phân cấp 1: Với $i = 0, 1, 2, ..., n-1$

$$T_0^{(1)} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}; \quad T_1^{(1)} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}; \cdots \quad T_i^{(1)} = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}$$

- Tỷ sai phân cấp 2: Với $i = 0, 1, 2, ..., n-2$

$$T_0^{(2)} = \frac{T_1^{(1)} - T_0^{(1)}}{x_2 - x_0}; \cdots \quad T_i^{(2)} = \frac{T_{i+1}^{(1)} - T_i^{(1)}}{x_{i+2} - x_i}$$

- Tỷ sai phân cấp k: $(0 \le k \le n)$: Với $i = 0, 1, ..., n-k$

$$T_0^{(k)} = \frac{T_1^{(k-1)} - T_0^{(k-1)}}{x_k - x_0}; \cdots \quad T_i^{(k)} = \frac{T_{i+1}^{(k-1)} - T_i^{(k-1)}}{x_{i+k} - x_i}$$

Lập bảng tỷ sai phân

- Lập bảng tỷ sai phân sau:

x	y	$T^{(1)}$	$T^{(2)}$	$\dots$	$T^{(n)}$
x_0	y_0	$T_0^{(1)}$	$T_0^{(2)}$	$\dots$	$T_0^{(n)}$
x_1	y_1	$T_1^{(1)}$	$T_1^{(2)}$	$\dots$	$T_1^{(n)}$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$

- Nếu P_n là đa thức bậc không quá n thì mọi tỷ sai phân cấp $(n+1)$ đều bằng không.
- Nếu thêm một nút nội suy mới, bảng tỷ sai phân sẽ có thêm 1 dòng và 1 cột (không cần thứ tự).

Lập bảng tỷ sai phân

- Lập bảng tỷ sai phân sau:

x	y	$T^{(1)}$	$T^{(2)}$	$\ldots$	$T^{(n)}$
x_0	y_0	$T_0^{(1)}$	$T_0^{(2)}$	$\ldots$	$T_0^{(n)}$
x_1	y_1	$T_1^{(1)}$	$T_1^{(2)}$	$\ldots$	$T_1^{(n)}$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$

- Nếu P_n là đa thức bậc không quá n thì mọi tỷ sai phân cấp $(n+1)$ đều bằng không.
- Nếu thêm một nút nội suy mới, bảng tỷ sai phân sẽ có thêm 1 dòng và 1 cột (không cần thứ tự).

Đa thức nội suy Newton

Đa thức nội suy Newton (dạng Newton tiến) được cho bởi công thức sau đây:

$$N_n(x) = y_0 + T_0^{(1)}(x - x_0) + T_0^{(2)}(x - x_0)(x - x_1) + \\ + \ldots + T_0^{(n)}(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})$$

4.3.2. Phương pháp nội suy Newton

Trường hợp lưới cách đều

- Các mốc nội suy cách đều một khoảng cách h, tức là:

$$x_i = x_0 + ih, \quad i = 0, 1, ..., n$$

- Dựa vào công thức tỷ sai phân trên, mẫu số là hằng số. Do đó ta tính tỷ sai phân dạng đơn giản như sau:
    - Tỷ sai phân cấp 1: Với $i = 0, 1, ..., n-1$

$$D_0^{(1)} = y_1 - y_0; D_1^{(1)} = y_2 - y_1, ..., D_i^{(1)} = y_{i+1} - y_i$$

    - Tỷ sai phân cấp k $(0 \leq k \leq n)$: Với $i = 0, 1, ..., n-k$

$$D_0^{(k)} = D_1^{(k-1)} - D_0^{(k-1)}; D_i^{(k)} = D_{i+1}^{(k-1)} - D_i^{(k)}$$

- Tương quan giữa hai công thức tỷ sai phân:

$$T_i^{(k)} = \frac{D_i^{(k)}}{k!h^k}$$

Đặt $t = \dfrac{x - x_0}{h}$.

Đa thức nội suy Newton lưới chia đều

Đa thức nội suy Newton với dạng lưới đều được cho bởi:

$$N_n(x) = y_0 + \frac{D_0^{(1)}}{1!}t + \frac{D_0^{(2)}}{2!}t(t-1) + \ldots + \frac{D_0^{(n)}}{n!}t(t-1)\ldots(t-n+1)$$

Thực hành

Hãy viết thuật toán và chương trình của phép nội suy Newton cho hai trường hợp.

Ví dụ minh họa

Cho bảng giá trị (x_i, y_i) như sau:

x	-4	-1	0	2	5
y	1245	35	5	9	1335

Hãy thiết lập đa thức nội suy Newton qua các điểm trên.

Ví dụ minh họa

- Lập bảng tỷ sai phân:

x	y	$T^{(1)}$	$T^{(2)}$	$T^{(3)}$	$T^{(4)}$
-4	1245	-404	94	-14	3
-1	33	-28	10	13	
0	5	2	88		
2	9	442			
5	1335				

- Chọn $x_0 = -4$ ta có đa thức nội suy Newton, theo công thức đã cho:

$$\begin{aligned} P_4(x) &= 1245 - 404(x+4) + 94(x+4)(x+1) - 14x(x+1)(x+4) \\ &+ 3x(x+4)(x-2) \\ &= 3x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 14x + 5 \end{aligned}$$

- Phép nội suy Hermite dựa vào các giá trị của hàm tại mốc nội suy và cả các giá trị đạo hàm của hàm đó tại các mốc nội suy.
- Cho n mốc nội suy phân biệt nhau (x_i, y_i) với $i = 0, 1, 2, ..., n$ và cho biết các giá trị đạo hàm $f'(x_i)$ tại các mốc nội suy đó.
- Phương pháp nội suy Hermite tìm một đa thức nội suy bậc $2n + 1$ $P(x)$ thỏa mãn các điều kiện sau:

$$\begin{cases} P(x_i) = y_i \\ P'(x_i) = f'(x_i) \end{cases} \quad , i = 0, 1, ..., n$$

Định lý về sự tồn tại của đa thức nội suy Hermite

Nếu $f \in C[a, b]$ và $x_i \in [a, b]$ với $i = 0, 1, .., n$ là các mốc nội suy phân biệt, thì đa thức nội suy Hermite bậc $2n+1$ H_{2n+1} thỏa mãn điều kiện của f và f' tại $x_0, x_1, ..., x_n$ được cho bởi công thức:

$$H_{2n+1}(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j)H_{n,j}(x) + \sum_{j=0}^{n} f'(x_j)\hat{H}_{n,j}(x)$$

trong đó $H_{n,j}(x) = [1 - 2(x - x_j)L'_{n,j}(x_j)]L^2_{n,j}(x)$ và $\hat{H}_{n,j}(x) = (x - x_j)L^2_{n,j}(x)$, với $L_{n,j}$ là hệ số thứ j của đa thức nội suy Lagrange bậc n. Hơn nữa, nếu $f \in C^{2n+2}[a, b]$ thì tồn tại $\xi \in (a, b)$ sao cho:

$$f(x) = H_{2n+1}(x) + \frac{(x - x_0)^2 ... (x - x_n)^2}{(2n+2)!} f^{(2n+2)}(\xi)$$

Ví dụ

Use the Hermite polynomial that agrees with the data listed in following table to find an approximation of $f(1.5)$.

k	x_k	$f(x_k)$	$f'(x_k)$
0	1.3	0.620086	-0.5220232
1	1.6	0.4554022	-0.5698959
2	1.9	0.2818186	-0.5811571

- Viết đa thức nội suy Lagrange và tính các giá trị đạo hàm tương ứng:

$$L_{2,0}(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{50}{9}x^2 - \frac{175}{9}x + \frac{152}{9};$$

$$L'_{2,0}(x) = \frac{100}{9}x - \frac{175}{9}$$

$$L_{2,1}(x) = -\frac{100}{9}x^2 + \frac{320}{9}x - \frac{247}{9}, \quad L'_{2,1}(x) = -\frac{200}{9}x + \frac{320}{9}$$

$$L_{2,2}(x) = \frac{50}{9}x^2 - \frac{145}{9}x + \frac{104}{9}, \quad L'_{2,2}(x) = \frac{100}{9}x - \frac{145}{9}$$

- Các đa thức $H_{2,j}(x)$ và $\hat{H}_{2,j}(x)$ lần lượt là:

$$H_{2,0}(x) = [1 - 2(x-1.3)(-5)]\left(\frac{50}{9}x^2 - \frac{175}{9}x + \frac{152}{9}\right)^2$$

$$H_{2,1}(x) = \left(-\frac{100}{9}x^2 + \frac{320}{9}x - \frac{247}{9}\right)^2$$

Ví dụ

- $$H_{2,2}(x) = 10(2-x)\left(\frac{50}{9}x^2 - \frac{145}{9}x + \frac{104}{9}\right)^2$$
$$\hat{H}_{2,0}(x) = (x-1.3)\left(\frac{50}{9}x^2 - \frac{145}{9}x + \frac{104}{9}\right)^2$$
$$\hat{H}_{2,1}(x) = (x-1.6)\left(-\frac{100}{9}x^2 + \frac{320}{9}x - \frac{247}{9}\right)^2$$
$$\hat{H}_{2,2}(x) = (x-1.9)\left(-\frac{50}{9}x^2 - \frac{145}{9}x + \frac{104}{9}\right)^2$$

- Do đó
$$\begin{aligned} H_5(x) &= 0.6200860H_{2,0}(x) + 0.4554022H_{2,1}(x) + 0.2818186H_{2,2}(x) \\ &\quad - 0.5220232\hat{H}_{2,0}(x) - 0.5698959\hat{H}_{2,1}(x) - 0.581157\hat{H}_{2,2}(x) \end{aligned}$$

- Vậy $H_5(1.5) = 0.5118277$

Cho hàm f xác định trên [a,b] và các mốc nội suy tương ứng $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$. Một đa thức nội suy spline bậc 3 S của f là một hàm thỏa mãn các điều kiện

(a) $S(x)$ là một đa thức bậc 3, trên $[x_j, x_{j+1}]$ xác định đa thức ký hiệu là $S_j(x)$ với $j = 0, 1, ..., n-1$

(b) $S_j(x_j) = y_j$ và $S_j(x_{j+1}) = y_{j+1}$ với mỗi $j = 0, 1, ..., n-1$.

(c) $S_{j+1}(x_{j+1}) = S_j(x_{j+1})$ với mỗi $j = 0, 1, ..., n-2$

(d) $S'_{j+1}(x_{j+1}) = S'_j(x_{j+1})$ với mỗi $j = 0, 1, ..., n-2$

(e) $S''_{j+1}(x_{j+1}) = S''_j(x_{j+1})$ với mỗi $j = 0, 1, ..., n-2$

(f) Một trong hai điều kiện biên sau đây phải thỏa:

1. $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$ (natural boundary) $\surd$
2. $S'(x_0) = f'(x_0)$ và $S'(x_n) = f'(x_n)$ (clamped boundary)

- Một đa thức spline bậc 3 được xây dựng dưới dạng sau:

$$S_j(x) = a_j + b_j(x - x_j) + c_j(x - x_j)^2 + d_j(x - x_j)^3$$

  với mỗi $j = 0, 1, .., n - 1$.
- Do $S_j(x_j) = y_j$, từ điều kiện (c) ta được

  $a_{j+1} = S_{j+1}(x_{j+1}) = S_j(x_{j+1}) = a_j + b_j(x_{j+1} - x_j) + c_j(x_{j+1} - x_j)^2 + d_j(x_{j+1}$

  với mỗi $j = 0, 1, ..., n - 2$.
- Đặt $h_j = x_{j+1} - x_j$, nếu ta xác định $a_n = f(x_n)$ thì ta được:

$$a_{j+1} = a_j + b_j h_j + c_j h_j^2 + d_j h_j^3$$

- Nếu đặt $b_n = S'(x_n)$ ta được:

$$S_j'(x) = b_j + 2c_j(x - x_j) + 3d_j(x - x_j)^2 \Rightarrow S_j'(x_j) = b_j$$

- Sử dụng (d) ta được $b_{j+1} = b_j + 2c_j h_j + 3d_j h_j^3$.

4.3.4. Phương pháp Spline bậc 3 (Cubic Spline)

- Đặt $c_n = S''(x_n)/2$ và áp dụng điều kiện (e) ta có

$$c_{j+1} = c_j + 3d_j h_j$$

- Giải được d_j và thay vào các phương trình trước ta được

$$a_{j+1} = a_j + b_j h_j + \frac{h_j^2}{3}(2c_j + c_{j+1})$$
$$b_{j+1} = b_j + h_j(c_j + c_{j+1})$$

- Khi đó

$$b_j = \frac{1}{h_j}(a_{j+1} - a_j) - \frac{h_j}{3}(2c_j + c_{j+1})$$

- Ta giải một hệ phương trình tuyến tính

$$h_{j-1}c_{j-1} + 2(h_{j-1} + h_j)c_j + h_j c_{j+1} = \frac{3}{h_j}(a_{j+1} - a_j) - \frac{3}{h_{j-1}}(a_j - a_{j-1})$$

Với điều kiện Natural Boundary.

Định lý

Nếu hàm f xác định tại các mốc $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ thì f có duy nhất một nội suy natural spline S trên [a,b], và điều kiện natural boundary của S thỏa

$$S''(a) = 0 \quad \text{và} \quad S''(b) = 0$$

Bài tập thực hành

Hãy viết thuật toán và chương trình cho phép nội suy spline bậc 3 với điều kiện biên tự nhiên.

Ví dụ

Let the function $f(x) = e^x$. Use the data points $(0, 1), (1, e), (2, e^2)$ and $(3, e^3)$ to form a natural spline $S(x)$ that approximates f.

Ví dụ

- Ta có $n = 3$ và $h_0 = h_1 = h_2 = 1$, $a_0 = 1, a_1 = e, a_2 = e^2$ và $a_3 = e^3$.
- Do đó, hệ phương trình $Ax = b$ được cho bởi:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 3(e^2 - 2e + 1) \\ 3(e^3 - 2e^2 + e) \\ 0 \end{bmatrix}; \quad x = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

- Giải hệ này ta được nghiệm như sau:

$$c_0 = c_3 = 0, c_1 = \frac{1}{5}(-e^3 + 6e^2 - 9e + 4), c_2 = \frac{1}{5}(4e^3 - 9e^2 + 6e - 1)$$

- Giải tiếp các hệ tìm các hệ số b_j ta có

$$b_0 = \frac{1}{h_0}(a_1 - a_0) - \frac{h_0}{3}(c_1 + 2c_0) \simeq 1.466$$
$$b_1 = 2.22285, b_2 \simeq 8.80977$$

Ví dụ

- Các hệ tìm các hệ số d_j:

$$d_0 = \frac{1}{3h_0}(c_1 - c_0) \simeq 0.25288$$
$$d_1 = 1.69107, d_2 \simeq -1.94336$$

- Vậy hàm nội suy spline cần tìm là:

$$S(x) = \begin{cases} 1 + 1.466x + 0.25228x^3, & x \in [0,1] \\ 2.71828 + 2.22285(x-1) + 0.75685(x-1)^2 + \\ \quad +1.69107(x-1)^3, & x \in [1,2] \\ 7,38906 + 8.80977(x-2) + 5.83007(x-2)^2 - \\ \quad -1.94336(x-2)^3, & x \in [2,3] \end{cases}$$