Chương 3: GIẢI GẦN ĐÚNG HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

Minh-Phuong Tran

Ton Duc Thang University

Ngày 5 tháng 4 năm 2016

NỘI DUNG

Cho hệ phương trình tuyến tính:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{1}$$

Bài toán: Tìm vectơ nghiệm $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Phương pháp:

1. *Phương pháp giải đúng*: sau một số hữu hạn bước, ta nhận được nghiệm đúng của phương trình và trong quá trình đó không làm tròn số.
2. *Phương pháp giải gần đúng*: cho nghiệm cần tìm một giá trị ban đầu, từ giá trì này tính đến các giá trị gần đúng tốt hơn theo một quy tắc nào đó. Quá trình được lặp lại nhiều lần dưới những điều kiện nhất định, cho ta nghiệm gần đúng của hệ phương trình.

3.1. Đặt bài toán

1. Hệ phương trình tuyến tính được viết dưới dạng:

$$A \cdot x = b \tag{2}$$

được giải gần đúng bằng phương pháp tính lặp.

2. Nghiệm gần đúng có dạng:

$$x^{[k+1]} = C \cdot x^{[k]} + d \tag{3}$$

trong đó C được gọi là ma trận lặp, k là bước lặp.

3. Chuẩn của ma trận, ta có thể sử dụng các công thức sau
    - Chuẩn cột: $\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$
    - Chuẩn hàng: $\|A\|_\infty = \max_i \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$

1. Phương pháp giải đúng (giải trực tiếp): Phương pháp khử Gauss.
2. Phương pháp giải gần đúng:
   - Phương pháp lặp Jacobi.
   - Phương pháp lặp Gauss-Seidel.

NỘI DUNG

- Phương pháp khử Gauss dùng cách khử dần các ẩn đưa hệ phương trình đang xét về dạng **tam giác trên** rồi giải hệ tam giác này từ dưới lên trên.
- Phương pháp khử Gauss không cần phải tính định thức.

Mô tả các bước của phương pháp khử Gauss

1. Bước 1: Dùng phương trình đầu tiên để khử x_1 trong $(n-1)$ phương trình còn lại. Giả sử $a_{11} \neq 0$ ta chia phương trình thứ nhất cho a_{11}. Để khử x_1 ở hàng thứ k phải tính các hệ số a_{kj} như sau:

$$a_{kj} = a_{kj} - \frac{a_{1j} * a_{k1}}{a_{11}}$$

2. Bước 2: Dùng phương trình thứ 2 để khử x_2 trong $(n-2)$ phương trình còn lại. Tương tự ta chia phương trình thứ 2 cho $a_{22} \neq 0$, hệ số a_{kj} được tính như sau:

$$a_{kj} = a_{kj} - \frac{a_{2j} * a_{k2}}{a_{22}}$$

Mô tả các bước của phương pháp khử Gauss

1. Bước i: Dùng phương trình thứ i để khử x_i trong $(n-i)$ phương trình còn lại. Tương tự ta chia phương trình thứ i cho $a_{ii} \neq 0$, hệ số a_{kj} được tính như sau:
$$a_{kj} = a_{kj} - \frac{a_{ij} * a_{ki}}{a_{ii}}$$
2. Bước $(n-1)$: Dùng phương trình thứ (n-1) để khử x_{n-1} trong phương trình thứ n. Tương tự ta chia phương trình thứ $(n-1)$ cho $a_{n-1n-1} \neq 0$, hệ số a_{nj} được tính như sau:
$$a_{nj} = a_{nj} - \frac{a_{n-1j} * a_{n-1i}}{a_{n-1n-1}}$$

Hạn chế của phương pháp khử Gauss:

1. Trong quá trình khử ta giả sử $a_{jj} \neq 0, \forall j = 1, 2, ..., n-1$. Do đó nếu một trong các hệ số này bằng 0 ta phải thay đổi cách tính.
2. Giả sử khi khử x_1 ta gặp $a_{11} \neq 0$, ta nhìn các hệ số $a_{21}, a_{31}, ..., a_{n1}$.
   - Nếu tồn tại một hệ số khác 0, lấy nó thay cho a_{11} bằng cách hoán vị hai phương trình.
   - Nếu mọi hệ số đều bằng 0, hệ đã cho suy biến.

Khắc phục: Trước khi khử x_1 ta chọn các hệ số $a_{11}, a_{21}, a_{31}, ..., a_{n1}$ có giá trị tuyệt đối lớn nhất. Tức là chọn hàng r như sau và đổi hàng đó cho hàng 1:

$$|a_{r1}| = \max\{|a_{k1}|, k = 1, 2, ..., n\}$$

Tương tự trong các bước khử x_i với $i = 2, ..., n$ ta cũng tìm hàng r và đổi hàng đó cho hàng i:

$$|a_{ri}| = \max\{|a_{ki}|, k = i, i+1, ..., n\}$$

Sau khi áp dụng phương pháp khử Gauss, ta đưa hệ phương trình về dạng:

$$\begin{cases} c_{11}x_1 & +c_{12}x_2 & +\cdots & +c_{1n}x_n & = & d_1 \\ & +c_{22}x_2 & +\cdots & +c_{1n}x_n & = & d_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & c_{nn}x_n & = & d_n \end{cases}$$

Nghiệm của hệ phương trình

Giải ngược hệ này từ dưới lên trên, khi đó nghiệm của hệ được cho bởi:

$$\begin{cases} x_n = \dfrac{d_n}{c_{nn}} \\ \dots \\ x_i = \left(d_i - \dfrac{1}{c_{ii}} \displaystyle\sum_{j=i+1}^{n} c_{ij}x_j \right), \quad i = n-1, n-2, ..., 2, 1 \end{cases}$$

Thực hành

Hãy viết thuật toán + chương trình minh hoạ giải hệ phương trình bằng phương pháp khử Gauss.

Nếu $\det A \neq 0$ thì nghiệm của hệ phương trình được tính bởi

$$x = A^{-1} \cdot b$$

theo định lý sau đây:

Theorem

Định lý Cramer Gọi A_j là ma trận có được bằng cách thay cột thứ j của ma trận A bằng cột b. Khi đó, hệ phương trình ban đầu có nghiệm **duy nhất** *và x_j được cho bởi:*

$$x_j = \frac{\det A_j}{\det A}, \quad j = 1, 2, ..., n$$

- Với ma trận vuông A cấp n, phân tích LU của A là cách viết A thành tích của hai ma trận dưới dạng:

$$A = LU$$

trong đó L là ma trận tam giác dưới và U là ma trận tam giác trên.

- Khi đó ta có

$$Ax = b \Leftrightarrow L(Ux) = b$$

- Đặt $y = Ux$, ta đưa việc giả hệ phương trình về việc giải hệ sau:

$$\begin{cases} Ly = b \\ Ux = y \end{cases}$$

- A được phân tích thành $A = LU$, trong đó

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix}; U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

- Các phần tử của ma trận L và U được xác định theo công thức sau:

$$\begin{cases} u_{1j} & = a_{1j}, \quad 1 \le j \le n \\ l_{i1} & = \dfrac{a_{i1}}{u_{11}}, \quad 2 \le i \le n \\ u_{ij} & = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj}, \quad 1 < i \le j \\ l_{ij} & = \dfrac{1}{u_{jj}} [a_{ij} - \sum\limits_{k=1}^{j=1} l_{ik} u_{kj}], \quad 1 < j < i \end{cases}$$

Ví dụ

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 9 \\ -4x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -15 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

- Phân tích A như sau:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -3 \\ -4 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

- Các phần tử còn lại được tính như sau:

$$\begin{cases} u_{22} = a_{22} - l_{21}u_{12} = 1 \\ u_{23} = a_{23} - l_{21}u_{13} = -2 \\ l_{32} = \frac{1}{u_{22}}(a_{32} - l_{31}u_{12}) = -1 \\ u_{33} = a_{33} - l_{31}u_{13} - l_{32}u_{23} = 3 \end{cases}$$

- Giải $Ly = b$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ -15 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow y = \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}$$

- Giải $Ux = y$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix} \Rightarrow x = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Các định nghĩa

1. Ma trận A được gọi là đối xứng nếu $A = A^t$
2. Ma trận A được gọi là xác định dương nếu:

$$x^t Ax = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$$

3. Dấu hiệu nhận biết ma trận xác định dương dựa vào định lý sau đây: Ma trận A được gọi là xác định dương khi và chỉ khi tất cả các định thức con chính của nó đều dương.

Ví dụ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

có các định thức con chính là

$$\Delta_1 = 1 > 0, \Delta_2 = 1 > 0, \Delta_3 = 2 > 0$$

nên A xác định dương.

Định lý Cholesky

Nếu A là ma trận đối xứng và xác định dương thì tồn tại ma trận tam giác dưới B sao cho:

$$A = BB^t$$

Ma trận $B = (b_{ij})$ được cho bởi:

$$\begin{cases} b_{11} = \sqrt{a_{11}} \\ b_{i1} = \frac{a_{i1}}{a_{11}}, \quad 2 \leq i \leq n \\ b_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} b_{ik}^2}, \quad 2 \leq i \leq n \\ b_{ij} = \frac{1}{b_{jj}}[a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} b_{ik} b_{jk}], \quad 2 \leq j \leq i \end{cases}$$

Ví dụ

Giải hệ phương trình $Ax = b$ với

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}; b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

- Ma trận B được cho bởi:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & b_{22} & 0 \\ -1 & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

có các hệ số được tìm là $b_{22} = b_{32} = 1$ và $b_{33} = \sqrt{2}$.

- Giải $By = b$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow y = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

- Giải $B^t x = y$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3/\sqrt{2} \end{bmatrix} \Rightarrow x = \begin{bmatrix} 3 \\ -1/2 \\ 3/2 \end{bmatrix}$$

- Các phương pháp giải đúng trên đây chỉ sử dụng được khi số ẩn n đủ bé $(n = 2, 3)$.

- Các phương pháp giải đúng trên đây chỉ sử dụng được khi số ẩn n đủ bé ($n = 2, 3$).
- Khi n tăng lên thì số các phép tính trong phương pháp sẽ tăng lên gấp rất nhiều lần, cụ thể là $(n-1)(n+1)n!$.

- Các phương pháp giải đúng trên đây chỉ sử dụng được khi số ẩn n đủ bé ($n = 2, 3$).
- Khi n tăng lên thì số các phép tính trong phương pháp sẽ tăng lên gấp rất nhiều lần, cụ thể là $(n-1)(n+1)n!$.
- Vì lý do làm tròn số trong quá nhiều phép tính, ta không thể thu được kết quả mong muốn.

- Các phương pháp giải đúng trên đây chỉ sử dụng được khi số ẩn n đủ bé ($n = 2, 3$).
- Khi n tăng lên thì số các phép tính trong phương pháp sẽ tăng lên gấp rất nhiều lần, cụ thể là $(n-1)(n+1)n!$.
- Vì lý do làm tròn số trong quá nhiều phép tính, ta không thể thu được kết quả mong muốn.
- Hơn nữa, đối với một số hệ được gọi là "suy biến" với $\mathrm{cond}(A)$ (condition number) lớn làm cho hệ trở nên vô nghiệm, nhưng đáng lẽ ra hệ phải có nghiệm.

- Với một hệ phương trình $Ax = b$, người ta định nghĩa đại lượng sau:

$$Cond(A) = \left(\sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}\right)\left(\inf_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}\right)^{-1}$$

- Hệ được gọi là xấu nếu $Cond(A) \gg 1$. Khi đó, khi các hệ số trong hệ phương trình thay đổi rất ít cũng sẽ dẫn đến nghiệm của hệ thay đổi rất lớn.

- Với một hệ phương trình $Ax = b$, người ta định nghĩa đại lượng sau:

$$Cond(A) = \left(\sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \right) \left(\inf_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \right)^{-1}$$

- Hệ được gọi là xấu nếu $Cond(A) \gg 1$. Khi đó, khi các hệ số trong hệ phương trình thay đổi rất ít cũng sẽ dẫn đến nghiệm của hệ thay đổi rất lớn.
- Ví dụ, xét hệ sau: $\begin{cases} 2x_1 + x_2 & = 2 \\ 2x_1 + 1.01x_2 & = 2.01 \end{cases}$ có nghiệm đúng là $x_1 = 0.5$ và $x_2 = 1$.

- Với một hệ phương trình $Ax = b$, người ta định nghĩa đại lượng sau:

$$Cond(A) = \left(\sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \right) \left(\inf_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \right)^{-1}$$

- Hệ được gọi là xấu nếu $Cond(A) \gg 1$. Khi đó, khi các hệ số trong hệ phương trình thay đổi rất ít cũng sẽ dẫn đến nghiệm của hệ thay đổi rất lớn.
- Ví dụ, xét hệ sau: $\begin{cases} 2x_1 + x_2 & = 2 \\ 2x_1 + 1.01x_2 & = 2.01 \end{cases}$ có nghiệm đúng là $x_1 = 0.5$ và $x_2 = 1$.
- Tuy nhiên, khi ta thay đổi hệ số trong hệ này: $\begin{cases} 2x_1 + x_2 & = 2 \\ 2.01x_1 + 1x_2 & = 2.05 \end{cases}$ thì hệ lại có nghiệm $x_1 = 5$ và $x_2 = -8$. Với hệ trên thì $Cond(A) > 500$.

Tầm quan trọng của phương pháp số (phương pháp giải gần đúng)

NỘI DUNG

Định lý tồn tại suy nhất của nghiệm xấp xỉ

Xét phương trình lặp $x = Cx + d$. Nếu $\|C\| < 1$ thì với mọi $x^{[0]} \in \mathbb{R}^n$, dãy $\left(x^{[k]}\right)$ thỏa

$$x^{[k+1]} = Cx^{[k]} + d$$

hội tụ đến nghiệm duy nhất của hệ $Ax = b$, hơn nữa

$$\|x^{[k+1]} - x^*\| \leq \frac{\|C\|}{1 - \|C\|} \|x^{[k+1]} - x^{[k]}\|$$

Định nghĩa tính chéo trội của ma trận vuông

Ma trận A với các thành phần a_{ij} được gọi là có **tính chéo trội** nếu giá trị tuyệt đố của các phần tử nằm trên đường chéo chính lớn hơn tổng các giá trị tuyệt đối của các giá trị còn lại nằm cùng một hàng, tức là:

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|, \quad i = 1, 2, ..., n$$

Với giả thiết ma trận A của hệ phương trình (2) có tính chéo trội, ta giải gần đúng hệ phương trình bằng các phép lặp.

- Do A có tính chéo trội, nên $a_{ii} \neq 0, \forall i = 1, 2, ..., n$. Ta chia phương trình thứ i cho a_{ii} và có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_1 + \dfrac{a_{12}}{a_{11}} x_2 + ... + \dfrac{a_{1n}}{a_{11}} x_n = \dfrac{b_1}{a_{11}} \\ \dfrac{a_{21}}{a_{22}} x_1 + x_2 + ... + \dfrac{a_{2n}}{a_{22}} x_n = \dfrac{b_2}{a_{22}} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{a_{i1}}{a_{ii}} x_1 + \dfrac{a_{i2}}{a_{ii}} x_2 + ... + x_i + ... + \dfrac{a_{in}}{a_{ii}} x_n = \dfrac{b_i}{a_{ii}} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{a_{n1}}{a_{nn}} x_1 + \dfrac{a_{n2}}{a_{nn}} x_2 + ... + x_n = \dfrac{b_n}{a_{nn}} \end{cases} \tag{4}$$

- Khi đó hệ phương trình biến đổi về dạng:

$$\begin{cases} x_1 = -\left(0.x_1 + \dfrac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + ... + \dfrac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right) + \dfrac{b_1}{a_{11}} \\ x_2 = -\left(\dfrac{a_{21}}{a_{22}}x_1 + 0.x_2 + ... + \dfrac{a_{2n}}{a_{22}}x_n\right) + \dfrac{b_2}{a_{22}} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_i = -\left(\dfrac{a_{i1}}{a_{ii}}x_1 + \dfrac{a_{i2}}{a_{ii}}x_2 + ... + 0.x_i + ... + \dfrac{a_{in}}{a_{ii}}x_n\right) + \dfrac{b_i}{a_{ii}} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = -\left(\dfrac{a_{n1}}{a_{nn}}x_1 + \dfrac{a_{n2}}{a_{nn}}x_2 + ... + 0.x_n\right) + \dfrac{b_n}{a_{nn}} \end{cases} \tag{5}$$

- Đặt ma trận C và vectơ d như sau:

$$C = -\begin{bmatrix} 0 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \dots & \frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ \frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \dots & \frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{a_{n1}}{a_{nn}} & \frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \dots & 0 \end{bmatrix}; \quad d = \begin{bmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \frac{b_2}{a_{22}} \\ \dots \\ \frac{b_n}{a_{nn}} \end{bmatrix}$$

- Phương pháp lặp Jacobi có thể được đưa ra dưới đây.

3.3.1. Phương pháp lặp Jacobi

Sơ đồ lặp Jacobi

1. Chọn trước vectơ $x^{[0]}$ bất kỳ (có thể chọn vectơ không).
2. Công thức lặp của nghiệm xấp xỉ tại bước lặp thứ $k+1$ được tính từ nghiệm xấp xỉ tại bước lặp thứ k bởi công thức:

$$x^{[k+1]} = C \cdot x^{[k]} + d, \quad k = 1, 2, ... \qquad (6)$$

3.3.1. Phương pháp lặp Jacobi

Nếu $x^{[k]} = \left(x_1^{[k]}, x_2^{[k]}, ..., x_n^{[k]}\right)$ thì:

$$\begin{bmatrix} x_1^{[k+1]} \\ x_2^{[k+1]} \\ \dots \\ x_n^{[k+1]} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{a_{12}}{a_{11}} & \dots & \dfrac{a_{1n}}{a_{11}} \\ \dfrac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \dots & \dfrac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{a_{n1}}{a_{nn}} & \dfrac{a_{n2}}{a_{nn}} & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{[k]} \\ x_2^{[k]} \\ \dots \\ x_n^{[k]} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{b_1}{a_{11}} \\ \dfrac{b_2}{a_{22}} \\ \dots \\ \dfrac{b_n}{a_{nn}} \end{bmatrix} \tag{7}$$

Ta có thể viết lại công thức tính như sau:

$$x_i^{[k+1]} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij} x_j^{[k]} \right), i = 1, 2, ..., n; k = 1, 2, ... \tag{8}$$

Định lý về sự hội tụ của phương pháp lặp Jacobi

1. Nếu ma trận A có tính chéo trội thì phương pháp lặp hội tụ, tức tồn tại x^* sao cho $x^* = \lim_{k\to\infty} x^{[k]}$ là nghiệm của hệ phương trình ban đầu.
2. Sai số giữa nghiệm gần đúng $x^{[k]}$ với nghiệm chính xác x^* có thể được đánh giá bởi:

$$\left\| x^{[k]} - x^* \right\| \le \frac{\|C\|}{1 - \|C\|} \left\| x^{[k]} - x^{[k-1]} \right\|$$

hoặc

$$\left\| x^{[k]} - x^* \right\| \le \frac{\|C\|^k}{1 - \|C\|} \left\| x^{[1]} - x^{[0]} \right\|$$

với $\|.\|$ đã được định nghĩa.

Thực hành

Hãy viết thuật toán và chương trình minh họa cho phương pháp lặp Jacobi.

Ví dụ minh họa

Hãy dùng phương pháp lặp Jacobi để tìm nghiệm gần đúng của hệ phương trình

$$\begin{cases} 4x_1 + 0.24x_2 - 0.08x_3 = 8 \\ 0.09x_1 + 3x_2 - 0.15x_3 = 9 \\ 0.04x_1 - 0.08x_2 + 4x_3 = 20 \end{cases} \tag{9}$$

- Kiểm tra rằng hệ (9) có tính chéo trội, do đó có thể áp dụng phương pháp Jacobi.
- Chia 2 vế phương trình đầu tiên cho 4, phương trình thứ 2 cho 3, phương trình thứ 3 cho 4 ta được:

$$\begin{cases} x_1 = 2 - 0.06x_2 + 0.02x_3 \\ x_2 = 3 - 0.03x_1 + 0.05x_3 \\ x_3 = 5 - 0.01x_1 + 0.02x_2 \end{cases}$$

- Viết lại hệ như sau:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0.06 & 0.02 \\ -0.03 & 0 & 0.05 \\ -0.01 & 0.02 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} = Cx + d$$

- Ta có $\|C\|_\infty = 0.08 < 1$.
- Chọn giá trị đầu $x^{(0)} = (2, 3, 5)^T$ ta tính $x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}$ theo công thức lặp Jacobi ta có bảng sau:

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	2	3	5
1	1.92	3.19	5.04
2	1.9094	3.1944	5.0446
3	1.909228	3.194948	5.044794

Ví dụ minh họa

- Giả sử $x^{(3)}$ là nghiệm gần đúng của hệ phương trình.
- Ta đánh giá sai số của phương pháp Jacobi giữa nghiệm gần đúng $x^{(3)}$ và nghiệm đúng x^* như sau:

$$\begin{aligned} \|x^{(3)} - x^*\|_\infty &\leq \frac{\|C\|_\infty}{1 - \|C\|_\infty}\|x^{(3)} - x^{(2)}\|_\infty \\ &= \frac{0.08}{1 - 0.08} 0.000548 \simeq 0.00005 \end{aligned}$$

- Như vậy, có thể coi $x^{(3)}$ là nghiệm xấp xỉ của hệ phương trình đã cho bằng phương pháp Jacobi, với sai số là 5×10^{-5}.

Ví dụ

Ví dụ

1. Giải hệ sau với sai số 10^{-3}:

$$\begin{cases} 5x + y + z = 7 \\ x + 10y + z = 12 \\ x + y + 20z = 22 \end{cases} \tag{10}$$

2. Giải hệ sau với 4 lần lặp, đánh giá sai số

$$\begin{cases} x + 0.1y + 0.1z + 0.1w = 1.2 \\ 0.1x + y + 0.1z + 0.1w = 1.2 \\ 0.1x + 0.1y + z + 0.1w = 1.2 \\ 0.1x + 0.1y + 0.1z + w = 1.2 \end{cases} \tag{11}$$

- Từ công thức xấp xỉ nghiệm trong công thức của phương pháp Jacobi (8), ta thấy phần tử thứ i của nghiệm tại bước lặp thứ $k+1$ được tính từ các phần tử khác i tại bước lặp thứ k.
- Phương pháp Gauss-Seidel cải tiến phương pháp Jacobi trong công thức đó như sau:

$$\begin{cases} x_1^{[1]} \leftarrow x_2^{[0]}, x_3^{[0]}, \dots, x_n^{[0]} \\ x_2^{[1]} \leftarrow x_1^{[1]}, x_3^{[0]}, \dots, x_n^{[0]} \\ \vdots \\ x_n^{[1]} \leftarrow x_1^{[1]}, x_2^{[1]}, \dots, x_n^{[1]} \end{cases} \quad \dots \begin{cases} x_1^{[k]} \leftarrow x_2^{[k-1]}, x_3^{[k-1]}, \dots, x_n^{[k-1]} \\ x_2^{[k]} \leftarrow x_1^{[k]}, x_3^{[k-1]}, \dots, x_n^{[k-1]} \\ \vdots \\ x_n^{[k]} \leftarrow x_1^{[k]}, x_2^{[k]}, \dots, x_n^{[k]} \end{cases}$$

Sơ đồ của phương pháp lặp Gauss-Seidel

1. Chọn trước vectơ $x^{[0]}$ bất kỳ (có thể chọn vectơ không).
2. Công thức lặp của nghiệm xấp xỉ tại bước lặp thứ $k+1$ được tính từ nghiệm xấp xỉ tại bước lặp thứ k bởi công thức:

$$x_j^{[k+1]} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \left(\sum_{j=1}^{i-1} a_j x_j^{[k]} + \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{[k-1]} \right) \right) \tag{12}$$

Sự hội tụ của phương pháp lặp Gauss-Seidel

- Giả sử x^* là nghiệm đúng của hệ phương trình. Ta đặt

$$p_i = \sum_{j=1}^{i-1} |c_{ij}| \quad q_i = \sum_{j=1}^{n} |c_{ij}| \quad \mu = \max_i \frac{q_i}{1 - p_i}$$

- Sai số của phương pháp Gauss-Seidel được tính bởi:

$$\left\| x^{[k]} - x^* \right\| \leq \frac{\mu}{1-\mu} \left\| x^{[k]} - x^{[k-1]} \right\|$$

hoặc

$$\left\| x^{[k]} - x^* \right\| \leq \frac{\mu^k}{1-\mu} \left\| x^{[1]} - x^{[0]} \right\|$$

Thực hành

Hãy viết thuật toán và chương trình minh họa cho phương pháp lặp Gauss-Seidel.

Ví dụ minh họa

Hãy dùng phương pháp lặp Gauss-Seidel để tìm nghiệm gần đúng của hệ phương trình

$$\begin{cases} 4x_1 + 0.24x_2 - 0.08x_3 = 8 \\ 0.09x_1 + 3x_2 - 0.15x_3 = 9 \\ 0.04x_1 - 0.08x_2 + 4x_3 = 20 \end{cases} \tag{13}$$

- Kiểm tra rằng hệ (13) có tính chéo trội, do đó có thể áp dụng phương pháp G-S.
- Chia 2 vế phương trình đầu tiên cho 4, phương trình thứ 2 cho 3, phương trình thứ 3 cho 4 ta được:

$$\begin{cases} x_1 = 2 - 0.06x_2 + 0.02x_3 \\ x_2 = 3 - 0.03x_1 + 0.05x_3 \\ x_3 = 5 - 0.01x_1 + 0.02x_2 \end{cases}$$

- Viết lại hệ như sau:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0.06 & 0.02 \\ -0.03 & 0 & 0.05 \\ -0.01 & 0.02 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} = Cx + d$$

- Ta có $\|C\|_\infty = 0.08 < 1$.
- Chọn giá trị đầu $x^{(0)} = (2, 3, 5)^T$ ta tính $x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}$ theo công thức lặp Gauss-Seidel ta có bảng sau:

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	2	3	5
1	1.92	3.1924	5.044648
2	1.9093489	3.194952	5.0448056
3	1.909199	3.1949643	5.0448073

- Giả sử $x^{(3)}$ là nghiệm gần đúng của hệ phương trình.
- Ta đánh giá sai số của phương pháp Jacobi giữa nghiệm gần đúng $x^{(3)}$ và nghiệm đúng x^* theo công thức sau:

$$\|x^{(k)} - x^*\|_\infty \leq \frac{\mu}{1-\mu}\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|_\infty$$

trong đó:

$$\mu = \max_i \frac{q_i}{1-p_i} = \max(0.08, 0.0515463, 0) = 0.08$$

$$\|x^{(3)} - x^{(2)}\|_\infty = \max_i |x_i^{(3)} - x_i^{(2)}| = 0.0001499$$

Ví dụ minh họa

- Sai số của phương pháp Gauss-Seidel là:

$$\|x^{(3)} - x^*\|_\infty \leq \frac{0.08}{1 - 0.08} \cdot 0.0001499 \simeq 0.000013$$

- Như vậy, có thể coi $x^{(3)}$ là nghiệm xấp xỉ của hệ phương trình đã cho bằng phương pháp Gauss-Seidel, với sai số là 10^{-5}.
- Ta nhận thấy rằng sai số của phương pháp này tốt hơn phương pháp Jacobi, với cùng số bước lặp $k = 3$.
- Thuật toán Gauss-Seidel có tốc độ hội tụ nhanh hơn thuật toán Jacobi.

Bài tập

Let the linear system

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 & = 3 \\ x_1 + kx_2 - x_3 & = 4 \\ -x_2 + 4x_3 & = 5 \end{cases}$$

Can we solve the system by using Jacobi's iterative method, for:

a) $k = 3$?

b) $k = 1$?

c) $k = 1/4$?