Numerical Analysis
Exercises

Minh-Phuong Tran

Ngày 13 tháng 12 năm 2017

1 Số xấp xỉ và Sai số (Error Analysis)

1. Hãy sử dụng công thức khai triển Taylor hoặc MacLaurin để tính xấp xỉ e chính xác đến 8 chữ số sau dấu chấm thập phân.

2. Hãy sử dụng công thức khai triển Taylor hoặc MacLaurin để tính xấp xỉ $\arctan(1)$ với độ chính xác 10^{-6}.

3. Hãy sử dụng công thức khai triển Taylor hoặc MacLaurin để tính xấp xỉ $\sin 0.5$ và $\cos 1/3$ với độ chính xác 0.5×10^{-5}.

4. Hãy dung 2 cách để tính xấp xỉ π với 7 chữ số chắc sau dấu chấm thập phân.

5. Khẳng định
$$\frac{\pi}{4} = \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3}$$
chính xác như thế nào?

6. Tương tự câu hỏi bài trên, với công thức được cho như sau:
$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}$$

7. Vào thế kỷ 17, người ta đã đưa ra công thức số π dưới dạng chuỗi sau:
$$\pi = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{16^k}\left(\frac{4}{8k+1} - \frac{2}{8k+4} - \frac{1}{8k+5} - \frac{1}{8k+6}\right)$$
Hãy kiểm tra khẳng định đó đúng như thế nào?

8. Hãy tính tổng
$$S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{1}{n^3}$$
với sai số không quá 5×10^{-4}.

9. Con số $(\sqrt{2}-1)^{10}$ có hai cách tính:

(a) Tính trực tiếp
(b) Thông qua khai triển nhị thức Newton.

Hãy thực hiện các phép tính đó riêng biệt, với độ chính xác cùng là 10^{-7}. Sau đó hãy so sánh hai đại lượng vừa tính trong mỗi cách tính.

10. Với các giá trị nào của x thì
$$\sin x \simeq x$$
với độ chính xác 10^{-4}.

11. Tính hiệu $\sqrt{102} - \sqrt{101}$ chính xác đến 4 chữ số sau dấu châm thập phân.

12. Dùng các phương pháp lặp sau để tính xấp xỉ $21^{1/3}$ và xếp hạng chúng dựa trên tốc độ hội tụ. (Chú ý, tốc độ hội tụ được coi là nhanh nếu sai số qua mỗi bước lặp giảm nhanh về 0). Giả sử $p_0 = 1$,

(a) $p_n = \frac{20p_{n-1}+21/p_{n-1}^2}{21}$,
(b) $p_n = p_{n-1} - \frac{p_{n-1}^3-21}{3p_{n-1}^2}$,
(c) $p_n = \left(\frac{21}{p_{n-1}}\right)^{1/2}$,
(d) $p_n = p_{n-1} - \frac{p_{n-1}^4-21p_{n-1}}{p_{n-1}^2-21}$.

Hãy cho biết phương pháp nào hội tụ nhanh nhất.

13. Dùng các phương pháp lặp sau để tính xấp xỉ $7^{1/5}$ và xếp hạng chúng dựa trên tốc độ hội tụ. (Chú ý, tốc độ hội tụ được coi là nhanh nếu sai số qua mỗi bước lặp giảm nhanh về 0). Giả sử $p_0 = 1$,

(a) $p_n = p_{n-1}\left(1 + \frac{7-p_{n-1}^5}{p_{n-1}^2}\right)^3$,
(b) $p_n = p_{n-1} - \frac{p_{n-1}^5-7}{p_{n-1}^2}$,
(c) $p_n = p_{n-1} - \frac{p_{n-1}^5-7}{5p_{n-1}^4}$,
(d) $p_n = p_{n-1} - \frac{p_{n-1}^5-7}{12}$.

Hãy cho biết phương pháp nào hội tụ nhanh nhất.

14. Cho hàm số
$$f(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x - \sin x}$$

(a) Tìm $\lim_{x\to 0} f(x)$.
(b) Hãy tính $f(0.1)$ đến 5 chữ số chắc.
(c) Hãy thay các hàm lượng giác trong biểu thức $f(x)$ bởi khai triển MacLaurin của nó đến bậc 3 và hãy lặp lại câu (b).

(d) Cho biết giá trị chính xác của $f(0.1)$ là -1.99899998. Hãy tìm sai số tương đối của các giá trị tìm được trong câu (b) và (c).

15. Cho hàm số

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{x}$$

(a) Tìm $\lim_{x\to 0} f(x)$.

(b) Hãy tính $f(0.1)$ đến 5 chữ số chắc.

(c) Hãy thay các hàm lượng giác trong biểu thức $f(x)$ bởi khai triển MacLaurin của nó đến bậc 3 và hãy lặp lại câu (b).

(d) Cho biết giá trị chính xác của $f(0.1)$ là 2.003335000. Hãy tìm sai số tương đối của các giá trị tìm được trong câu (b) và (c).

16. Hãy tính xấp xỉ e^{-5} theo các công thức dưới đây với độ chính xác 6.74×10^{-3} và cho biết công thức nào xấp xỉ tốt hơn.

(a) $e^{-5} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-5)^k}{k!}$

(b) $e^{-5} = \dfrac{1}{e^5} = \dfrac{1}{\sum_{k=0}^{n} \frac{5^k}{k!}}$

17. Các số hạng của dãy Fibonacci được cho bởi:

$$\begin{cases} F_0 = 1; \\ F_1 = 1; \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \end{cases}, \quad n \geq 0$$

và dãy số đó cũng được cho bởi:

$$\tilde{F}_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

(a) Hãy viết chương trình tính F_{100} và $\tilde{F}_{100}$.

(b) Công thức nào cho kết quả chính xác hơn?

2 Giải phương trình phi tuyến

1. Hãy tính $x = \sqrt[5]{2}$ bằng 2 cách, với yêu cầu chính xác đến 7 chữ số sau dấu chấm thập phân.

2. Giải các phương trình sau đây bằng phương pháp lặp:

- $x^3 - 3x = 2016$,
- $e^x + 2x = 0$, biết khoảng tách nghiệm là $[-1, 0]$,
- $x = \cos x$, với khoảng tách nghiệm là $[0.6; 0.8]$,
- $x^5 - 15x + 30 = 0$,

- $x^6 - x^4 + x^3 - 1 = 0$,
- $x^4 - 3x^2 + 75x - 10^4 = 0$.

3. Hãy giải phương trình $x^4 - 4x^3 = -26$ bằng phương pháp lặp và phương pháp Newton với sai số cho trước là 10^{-4}. So sánh hai phương pháp.

4. Giải phương trình sau bằng phương pháp tuỳ ý:

$$1.8x^2 - \sin 10x = 0$$

với sai số không quá 10^{-5}, biết khoảng tách nghiệm $[0, 1/2]$.

5. Cho phương trình

$$(x+1)^4(1-9.5x) = 1 - 9.9x$$

Dùng phương pháp Newton hãy tìm nghiệm gần đúng sau 4 lần lặp trên đoạn $[0.1, 0.2]$. Đánh giá sai số khi nhận giá trị xấp xỉ ở lần lặp thứ 4.

6. Dùng phương pháp Newton hãy tính xấp xỉ $\sqrt{0.91}$ và $\sqrt[4]{7}$ với sai số không quá 10^{-4}.

7. Giải phương trình $x = 1 + \sin x$ trên khoảng tách nghiệm $[1, 2]$ với sai số cho phép 0.5×10^{-6}.

8. Hãy dùng phương pháp Bisection để tìm nghiệm xấp xỉ chính xác đến 10^{-5}:

   (a) $x - 2^{-x} = 0$ trên $0 \le x \le 1$
   (b) $2x\cos 2x - (x+1)^2 = 0$ trên $-3 \le x \le -2$ và $-1 \le x \le 0$
   (c) $x\cos x - 2x^2 + 3x - 1 = 0$ trên $0.2 \le x \le 0.3$ và $1.2 \le x \le 1.3$
   (d) $x + 1 - 2\sin \pi x = 0$ trên $0 \le x \le 0.5$ và $0.5 \le x \le 1$
   (e) $x^2 - 4x + 4 - \ln x = 0$ trên $1 \le x \le 2$ và $2 \le x \le 4$

9. Hãy vẽ đồ thị của $y = x$ và $y = 2\sin x$. Từ đó hãy dùng phương pháp Bisection để tính xấp xỉ nghiệm của

$$x = 2\sin x$$

chính xác đến 10^{-5}.

10. Hãy vẽ đồ thị của $y = e^x - 2$ và $y = \cos(e^x - 2)$. Từ đó hãy dùng phương pháp Bisection để tính xấp xỉ nghiệm của

$$e^x - 2 = \cos(e^x - 2)$$

trên $[0.5, 1.5]$ chính xác đến 10^{-5}.

11. Hãy dùng phương pháp Newton và phương pháp lặp đơn để tìm nghiệm xấp xỉ của các phương trình dưới đây đến 0.5×10^{-4}. Sau đó hãy so sánh hai phương pháp.

   (a) $x^2 - 2xe^{-x} + e^{-2x} = 0$ trên $[0, 1]$.
   (b) $\cos(x + \sqrt{2}) + x(x/2 + \sqrt{2}) = 0$ trên $[-2, -1]$.
   (c) $x^3 - 3x^2(2^{-x}) + 3x(4^{-x}) - 8^{-x} = 0$ trên $[0, 1]$.

(d) $e^{6x} + 3(\ln 2)^2 e^{2x} - (\ln 8)e^{4x} - (\ln 2)^3 = 0$ trên $[-1, 0]$.
(e) $1 - 4x\cos x + 2x^2 + \cos 2x = 0$ trên $[0, 1]$.
(f) $x^2 + 6x^5 + 9x^4 - 2x^3 - 6x^2 + 1 = 0$ trên $[-3, -2]$.
(g) $e^{3x} - 27x^6 + 27x^4 e^x - 9x^2 e^{2x} = 0$ trên $[3, 5]$.
(h) $\sin 3x + 3e^{-2x}\sin x - 3e^{-x}\sin 2x - e^{-3x} = 0$ trên $[3, 4]$.

12. Hãy sử dụng các phương pháp đã học để tìm nghiệm xấp xỉ của phương trình dưới đây, chính xác đến 10^{-6}.

$$600x^4 - 550x^3 + 200x^2 - 20x - 1 = 0$$

rồi so sánh các phương pháp đó với nhau.

13. Với phương pháp lặp, hãy chọn các hàm $\varphi(x)$ khác nhau dưới đây để xấp xỉ nghiệm của phương trình

$$x^4 + 2x^2 - x - 3 = 0$$

(a) $\varphi(x) = (3 + x - 2x^2)^{1/4}$
(b) $\varphi(x) = \left(\frac{x+3-x^4}{2}\right)^{1/2}$
(c) $\varphi(x) = \left(\frac{x+3}{x^2+2}\right)^{1/2}$
(d) $\varphi(x) = \frac{3x^4+2x^2+3}{4x^3+4x-1}$

Hãy cho biết phương pháp nào hội tụ nhanh nhất.

3 Giải hệ phương trình tuyến tính

1. Hãy viết chương trình giải đúng hệ phương trình tuyến tính bằng phương pháp khử Gauss và Cramer. (do nhóm SV thuyết trình làm).

2. Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp lặp Jacobi thông qua 3 bước lặp. Đánh giá sai số ở bước lặp thứ 3. Hãy so sánh kết quả nghiệm với phương pháp giải đúng ở câu 1, và nghiệm được tính bằng ký hiệu \ trong Matlab.

$$\begin{cases} 2x + 5y + 2z - 20t & = 20 \\ 10x - 2y - z + 3t & = 20 \\ x + y + 10z + 2t & = 30 \\ x - 10y - 2z + 3t & = 20 \end{cases}$$

3. Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp lặp Gauss-Seidel thông qua 4 bước lặp. Đánh giá sai số ở bước lặp thứ 4. Hãy so sánh kết quả nghiệm với phương pháp giải đúng ở câu 1, và nghiệm được tính bằng lệnh “’ trong Matlab.

$$\begin{cases} -10x + y - 2z + 3t & = 0 \\ -1x - 10y + z - 2t & = -5 \\ -2x - 3y - 20z + t & = 10 \\ -3x - 2y - z - 20t & = 15 \end{cases}$$

4. Phương pháp Jacobi, sai số 10^{-5}, hãy so sánh kết quả nghiệm với phương pháp giải đúng ở câu 1, và nghiệm được tính bằng lệnh "\" trong Matlab.

$$\begin{cases} 4x + 0.24y - 0.08z + 0.16t - 8 &= 0 \\ 0.09x + 3y - 0.15z - 0.12t - 9 &= 0 \\ 0.04x - 0.08y + 4z + 0.06t &= 20 \\ 0.02x + 0.06y + 0.04z - 10t + 1 &= 0 \end{cases}$$

5. Tìm hai bước lặp đầu tiên của phương pháp Jacobi cho các hệ tuyến tính sau, dùng $x^{[0]} = 0$:

   (a)

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + 7x_3 &= 4 \end{cases}$$

   (b)

$$\begin{cases} 10x_1 - x_2 &= 9 \\ -x_1 + 10x_2 - 2x_3 &= 7 \\ -2x_2 + 10x_3 &= 6 \end{cases}$$

   (c)

$$\begin{cases} 10x_1 + 5x_2 &= 6 \\ 5x_1 + 10x_2 - 4x_3 &= 25 \\ -4x_2 + 8x_3 - x_4 &= -11 \\ -x_3 + 5x_4 &= -11 \end{cases}$$

   (d)

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + x_3 + x_5 &= 6 \\ -x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 &= 6 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 - x_4 - x_5 &= 6 \\ -x_1 - x_2 - x_3 + 4x_4 &= 6 \\ 2x_2 - x_3 + x_4 + 4x_5 &= 6 \end{cases}$$

6. Xét hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 &= -1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 4 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 &= -5 \end{cases}$$

   có nghiệm $(1, 2, -1)^t$.

(a) Chứng minh $\rho(C) > 1$ với C trong công thức Jacobi.

(b) Chứng minh phương pháp lặp Jacobi với $x^{[0]} = 0$ không xấp xỉ tốt sau 25 bước lặp.

(c) Chứng minh $\rho(C) < 1$ với C trong công thức Gauss-Seidel.

(d) Dùng phương pháp G-S với $x^{[0]} = 0$ để xấp xỉ nghiêm của hệ tới 10^{-5} trong chuẩn $\|.\|_\infty$.

7. Xét hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 & = 7 \\ x_1 + x_2 + x_3 & = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 & = 5 \end{cases}$$

có nghiệm chính xác là $(1, 2, -1)^t$.

(a) Chứng minh $\rho(C) = 0$ với C trong công thức Jacobi.

(b) Dùng phương pháp Jacobi với $x^{[0]} = 0$ để xấp xỉ nghiêm của hệ tới 10^{-5} trong chuẩn $\|.\|_\infty$.

(c) Chứng minh $\rho(C) = 2$ với C trong công thức Gauss-Seidel.

(d) Chứng minh phương pháp lặp G-S với $x^{[0]} = 0$ không xấp xỉ tốt sau 25 bước lặp.

8. Cho hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} 10x_1 - x_2 + 2x_3 - 6 & = 0 \\ -x_1 + 11x_2 - x_3 + 3x_4 - 5 & = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 10x_3 - x_4 + 11 & = 0 \\ 3x_2 - x_3 + 8x_4 - 15 & = 0 \end{cases}$$

Hãy giải xấp xỉ hệ này bằng 2 phương pháp lặp Jacobi và Gauss-Seidel đến 20 lần lặp rồi so sánh chúng với nhau.

4 Phép nội suy đa thức

1. Tìm số hạng tổng quát của dãy số: 3, 9, 20, 38, 65...

2. Cho bảng giá trị của hàm số $y = \sin x$ như sau:

x	0	$\pi/4$	$\pi/2$
y	0	0.707	1

Hãy đánh giá sai số khi dùng đa thức nội suy để tính gần đúng $\sin(\pi/3)$.

3. Cho bảng

x	0.78	1.56	2.34	3.12	3.81
y	2.5	1.20	1.12	2.25	4.28

   Hãy tìm $f(3)$.

4. Cho bảng

x	50	52	54	56
y	3.684	3.732	3.779	3.825

   Hãy tìm $f(55)$.

5. Tìm đa thức nội suy bậc 4 của:

x	-2	$-4/3$	0	$4/3$	2
y	0	1	2	1	0

   Cho biết hàm số đó là $y = f(x) = 2\cos\frac{\pi x}{4}$. Hãy cho biết sai số của đa thức nội suy và đa thức gốc ban đầu tại $x = 1$.

6. Từ bảng sau, hãy tìm số học sinh bị điểm kém hơn 4.5

Điểm	3.0-4.0	4.0-5.0	5.0-6.0	6.0-7.0	7.0-8.0
Số học sinh	31	42	51	35	31

7. Tìm số liệu còn thiếu trong bảng sau:

x	0	1	2	3	4
y	1	3	9	?	81

8. Cho $q(x)$ là đa thức nội suy của hàm số $f(x)$ với các mốc nội suy $x_0, x_1, ..., x_n$ và $r(x)$ là đa thức nội suy của $f(x)$ với các mốc nội suy $x_2, x_3, ..., x_{n+1}$. Chứng minh rằng đa thức nội suy của $f(x)$ với các mốc nội suy $x_0, x_1, ..., x_{n+1}$ là

$$P(x) = \frac{(x - x_0)r(x) - (x - x_{n+1})q(x)}{x_{n+1} - x_0}$$

9. Tìm A_1, A_2, A_3 sao cho:

$$\frac{x-1}{x(x+1)(x+3)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x+1} + \frac{A_3}{x+3}$$

10. Cho các hàm $f(x)$ như dưới đây và 3 mốc nội suy $x_0 = 0, x_1 = 0.6, x_2 = 0.9$. Hãy xây dựng đa thức nội suy Lagrange bậc 2 để tính xấp xỉ $f(0.45)$.

(a) $f(x) = \cos x$,

(b) $f(x) = \sqrt{x+1}$,

(c) $f(x) = \ln(x+1)$,

(d) $f(x) = \tan x$.

Hãy sử dụng khai triển MacLaurin đến bậc 2 của các hàm số đó để tính $f(0.45)$. Sau đó, hãy so sánh hai kết quả có được từ phép nội suy đa thức và đa thức MacLaurin.

11. Cho đa thức $P(x)$ bậc n thỏa mãn điều kiện

$$P(k) = \frac{k}{k+1}, \quad \forall k = 0, 1, 2, .., n$$

Hãy tìm $P(n+1)$.

12. Cho đa thức $P(x) = x^{10} + a_9 x^9 + ... + a_1 x + a_0$. Biết rằng $P(1) = P(-1), P(2) = P(-2), ..., P(5) = P(-5)$. Chứng minh rằng $P(-x) = P(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

5 Advanced Exercises

1. Suppose that you need to evaluate $f(x) = \sqrt{x^4+4} - 2$ for x near 0. Show that a direct calculation of $f(0.5)$ using the definition of $f(x)$ with 3-digit rounding arithmetic.

2. Use the MacLaurin polynomial for $\sin x$ to evaluate $\sin(3.0)$. How many terms must be used to ensure a relative error less than 10^{-8}.

3. Let $f(x) = x^3$.

   (a) Find the Taylor's polynomial $P_2(x)$ at $x_0 = 0$.

   (b) Find $R_2(0.5)$ and error when use $P_2(0.5)$ to approximate $f(0.5)$

   (c) Repeat the (a) for $x_0 = 1$.

   (d) Repeat the (b) use the polynomial in (c).

4. Find the Taylor's polynomial P_3 for $f(x) = \sqrt{x+1}$ at $x_0 = 0$. Approximate $\sqrt{0.5}$, $\sqrt{0.75}$, $\sqrt{1.25}$, $\sqrt{1.5}$ use $P_3(x)$ and find the error.

5. Find the third Taylor polynomial $P_3(x)$ for

$$f(x) = (x-1)\ln x$$

about $x_0 = 1$.

   (a) Use $P_3(0.5)$ to approximate $f(0.5)$, find an upper bound for

$$|f(0.5) - P_3(0.5)|$$

   (b) Find a bound for the error $|f(x) - P_3(x)|$ for $x \in [0.5, 1.5]$.

   (d) Find the upper bound for the error in (c).

6. Find the second Taylor polynomial $P_2(x)$ for
$$f(x) = e^x \cos x$$
about $x_0 = 0$.
   (a) Use $P_2(0.5)$ to approximate $f(0.5)$, find an upper bound for
   $$|f(0.5) - P_2(0.5)|$$
   (b) Find a bound for the error $|f(x) - P_2(x)|$ for $x \in [0, 1]$.
   (d) Find the upper bound for the error in (c).
7. Let $f(x) = 2x \cos 2x - (x - 2)^2$ and $x_0 = 0$.
   (a) Find $P_3(x)$ to approximate $f(0.4)$. Find an upper bound for
   $$|f(0.4) - P_3(0.4)|$$
   (b) Find the Taylor's polynomial $P_4(x)$ and use it to approximate $f(0.4)$.
   (c) Find an upper bound for
   $$|f(0.4) - P_4(0.4)|$$
8. Find the Taylor's polynomial P_4 for function $f(x) = xe^{x^2}$ at $x_0 = 0$.
   (a) Find a bound for $|f(x) - P_4(x)|$ for $0 \leq x \leq 0.4$.
   (d) Approximate $f'(0.2)$ using $P_4'(0.2)$, and find the error.
9. Use the Maclaurin polynomial of the exponential function $f(x) = e^x$ to find an approximate value S_1 of e^{-7} correct to 10^{-5}. On the other hand, use the following method to approximate e^{-7}:
   (a)
   $$e^{-7} \approx S_2 = \sum_{n=0}^{10} \frac{(-1)^n 7^n}{n!}$$
   (b)
   $$e^{-7} \approx S_3 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{10} \frac{7^n}{n!}}$$
   (c) Calculate the error between S_1 and S_2, S_1 and S_3.
10. Use the MacLaurin polynomial of the arctangent function to find an approximate value of π by:
$$\pi = 4 \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3}$$
that correct to 10^{-3}.

11. Use the error term of a Taylor polynomial to estimate the error involved in using

$$\sin x \approx x$$

to approximate $\sin 1^o$.

12. Let the function

$$f(x) = e^{x/2} \sin \frac{x}{3}$$

(a) Determine the third MacLaurin polynomial $P_3(x)$ for $f(x)$.

(b) Bound the error $|f(0.5) - P_3(0.5)|$.

13. The fifth MacLaurin polynomial for e^{2x} and e^{-2x} are

$$P_5(x) = \left(\left(\left(\left(\frac{4}{15}x + \frac{2}{3}\right)x + \frac{4}{3}\right)x + 2\right)x + 2\right)x + 1$$

$$\tilde{P}_5(x) = \left(\left(\left(\left(-\frac{4}{15}x + \frac{2}{3}\right)x - \frac{4}{3}\right)x + 2\right)x - 2\right)x + 1$$

(a) Approximate $e^{-0.98}$ using $\tilde{P}_5(0.49)$ and four-digit rounding arithmetic.

(b) Compute the absolute and relative error for the approximations in (a).

(c) Approximate $e^{-0.98}$ using $1/P_5(0.49)$ and four-digit rounding arithmetic.

(d) Compute the absolute and relative error for the approximations in (a).

14. Let the equation

$$x^2 - 4x + 4 - \ln x = 0$$

has two solutions on [1,2] and [2,4], respectively. Find the approximate values of them, correct to 10^{-5}.

15. Let the equation

$$2x \cos 2x = (x-2)^2$$

has two solutions on [2,3] and [3,4], respectively. Find the approximate values of them, correct to 10^{-5}.

16. Define $f \in C^1(\mathbb{R})$

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & \frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2} \\ 1, & x \ge \frac{\pi}{2} \\ -1, & x \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

(a) Prove that the Newton's method converges to the unique root $x^* = 0$ of f if initial $|x_0|$ is sufficient small.

(b) Prove there exists a unique $\beta \in (0, \pi/2)$ satisfying

$$2\beta = \tan \beta$$

(c) What happens to the Newton's method if we choose $x_0 \in (\beta, \pi/2)$?

17. Let

$$f(x) = e^{-x}(2x^2 + 5x + 2) + 1$$

Show that f has a unique root in (- 3/4,1).

18. Show that the equation

$$x - (\ln x)^x = 0$$

has at least one solution in $[4, 5]$.

19. Show that the polynomial nesting technique can be used to evaluate:

$$f(x) = 1.01e^{4x} - 4.62e^{3x} - 3.11e^{2x} + 12.2e^x - 1.99$$

Use three-digit rounding arithmetic and the formula given in (a) to evaluate $f(1.53)$.

20. Let $f(x) = x^4 + 2x^2 - x - 3$.

a) Prove that the equation $f(x) = 0$ has at least a negative solution x^*.

b) Find the approximate value of x^* using the Newton's method after the first 5 steps, starting with $x_0 = -0.5$.

21. Let $f(x) = x^4 - 3x^2 + 10x - 100$.

a) Prove that the equation $f(x) = 0$ has at least a negative solution x^*.

b) Find the approximate value of x^* using the Newton's method after the first 5 steps, starting with $x_0 = -2.5$.

22. Consider the following equation, for $x > 0$

$$x + \ln(x) = 0$$

This equation has exactly one root, which is between 0.5 and 0.6. Write Matlab routines for finding the root, using:

(a) The bisection method. Explain why the choice [0.5,0.6] is valid.

(b) A linear convergent fixed point iteration, with $x_0 = 0.5$. Show that the conditions of the Fixed Point Theorem are satisfied.

(c) Newton method with $x_0 = 0.5$.

(d) The secant method, with $x_0 = 0.5, x_1 = 0.6$.

For each of the methods:

- Use $|x_k - x_{k-1}| < 10^{-10}$ as a convergence criterion.
- Print out the iterates and show the progress in the number of correct decimal digits throughout the iteration.
- Explain the convergence behaviour and how it matches the theoretical expectations.

23. Let the equation $f(x) = e^x + x^2 - 5x = 0$

    (a) Use the Matlab plot to estimate the location of the two roots.

    (b) Locate the smaller root to an accuracy of at least six decimals using Newton's method.

    (c) Find the other root using Bisection method.

24. Consider the function

$$g(x) = x^2 + \frac{3}{16}$$

    (a) This function has two fixed points. What are they?

    (b) Consider the fixed point iteration $x_{k+1} = g(x_k)$ for this g. For which of the points you have found in (a) can you be sure that the iterations will converge (to the fixed point). Briefly justify your answer. You may assume that the initial guess is sufficiently close to the fixed point.

25. Consider the following function

$$f(x) = c(1 - e^{-dx}), \quad c > 0, \quad cd > 1$$

Show that f has a unique fixed point on $(0, c]$. Be sure to show there is a unique fixed point x^* other than 0 (i.e. $0 < x \leq c$).

26. For the function $f(x) = e^x + x^2 - 5x$:

    (a) Use matlab plot to estimate the location of the two roots.

    (b) Locate the small root to an accuracy of at least six decimal using fixed-point iteration.

    (c) Find the other root accurate to at least six decimal using Newton's method.

    (d) Which is better?

27. (a) Prove that $g(x) = \pi + 0.5 \sin \frac{x}{2}$ has a unique fixed point on $[0, 2\pi]$. (b) For $x_0 = \pi$ compute x_1. (c) How many iterations are necessary to achieve accuracy 10^{-5}?

28. (a) Prove the $g(x) = 2^{-x}$ has a unique fixed point p on $[\frac{1}{3}, 1]$. (b) For $p_0 = 1/2$, compute p_1.

29. In general, when a smooth function $f(x)$ has a multiple root at x^*, the function

$$\psi(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$$

has a simple root there.

    (a) Show that Newton's method applied to $\psi(x)$ yields the iterations

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)f'(x_k)}{[f'(x_k)]^2 - f(x_k)f''(x_k)}$$

(b) Try this method on the function $f(x) = (x-1)^2 e^x$, which has a double root at $x^* = 1$. What are your observations?

30. (a) Do three iterations of the bisection method , applied to $f(x) = x^3 - 2$, using $a = 0, b = 2$ (i.e. find x_0, x_1, x_2). (b) How many iterations does the theory predict it will take to achieve 10^{-5} accuracy, to approximate the root of $x^3 - 2 = 0$ by the bisection method on the interval $[0, 2]$.

31. Give $(n+1)$ data pairs (x_0, y_0), ..., (x_n, y_n). Define the functions

$$\rho_j = \prod_{i \neq j} (x_j - x_i), \quad j = 0, 1, ..., n$$

And let

$$\psi(x) = \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

(a) Show that $\rho_j = \psi'(x_j)$.

(b) Show that the interpolation polynomial of degree at most n is given by

$$\rho_n(x) = \psi(x) \sum_{j=0}^{n} \frac{y_j}{(x - x_j)\psi'(x_j)}$$

32. Let the polynomial:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

and one has that

$$\begin{cases} y_0 = P(x_0) \\ y_1 = P(x_1) \\ \cdots \\ y_n = P(x_n) \end{cases}$$

Prove that there exists a unique $(a_0, a_1, ..., a_n)$ that satisfies the previous system. Find them.

33. Construct the polynomial of degree 3 that interpolates to the data $x_0 = 1, y_0 = 1, x_1 = 2, y_1 = 1/2, x_2 = 4, y_2 = 1/4$ and $x_3 = 3, y_3 = 1/3$. You should get $p(t) = (50 - 35t + 10t^2 - t^3)/24$.

34. For each function listed below, use divided-difference tables to construct the Newton interpolating polynomial for the set of nodes specified. Plot both the function and the interpolating polynomial, and also the error, on the interval defined by the nodes.

(a) $f(x) = \sqrt{x}, x_i = 0, 1, 4$.

(b) $f(x) = \sin \pi x, x_i = 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$.

(c) $f(x) = \ln x, x_i = 1, \frac{3}{2}, 2$.

x	0	0.5	1	2
y	0	y^*	3	2

(d) $f(x) = \log_2 x, x_i = 1, 2, 4.$

(e) $f(x) = \sin \pi x, x_i = -1, 0, 1.$

35. Let $P_3(x)$ be the interpolating polynomial for the data:
The coefficient of x^3 in $P_3(x)$ is 6. Find y^*.

36. Let the function
$$f(x) = \frac{1}{2^x}$$
and $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2.$

(a) Determine P_2 the second-order Lagrange polynomial interpolation of f at x_0, x_1, x_2.

(b) Use the following table to estimate $P_2(1.5)$ with two digits arithmetic.

x	x^2	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{8}$
1.5	2.25	0.125	0.625

(c) Calculate $|f(1.5) - P_2(1.5)|$, knowing that $f(1.5) = 0.3535$.

37. The following data determines a function $y = f(x)$

x	2	3	6	8	12
y	14	20	17	16	23

(a) Find the 4th degree Newton's interpolating polynomial of data.

(b) Find the piecewise cubic splines that interpolates the given data (you may use Matlab).

(c) Sketch the plot of (a) and (b).

(d) Determine the value $f'(5)$ using the two interpolating functions in (a) and (b).

38. Repeat the above questions with following interpolating data:

39. Let $f(x) = \sqrt{\pi x} - \cos \pi x$.

(a) Prove that equation $f(x) = 0$ has at least a solution x^* on the interval $[0, 1]$.

(b) By the Bisection method, find $x_n, x \geq 2$ on $[0, 1]$.

(c) How many iterations are necessary to solve $f(x) = 0$ with accuracy 10^{-5} on [0,1].

40. Let $f(x) = \sqrt{x - x^2}$ and $P_2(x)$ b the interpolating polynomial on $x_0 = 0$ and $x_2 = 1$. Find the largest value of x_1 in $(0, 1)$ for which $f(0.5) - P_2(0.5) = -0.25$.

41. Let the function
$$f(x) = x - 2\cos x$$

x	-1	0	1	3
y	13.65	1.38	0.49	0.15

(a) Prove that the equation $f(x) = 0$ admits a solution p in the interval $[0, \frac{\pi}{2}]$.

(b) Use the following table to determine the first steps of the bisection method when starting with the points 0 and $\frac{\pi}{2}$.

x	0	$\frac{\pi}{16}$	$\frac{2\pi}{16}$	$\frac{3\pi}{16}$	$\frac{4\pi}{16}$	$\frac{5\pi}{16}$	$\frac{6\pi}{16}$	$\frac{7\pi}{16}$	$\frac{8\pi}{16}$
$f(x)$	-2	-1.76	-1.45	-1.07	-0.62	-0.12	0.41	0.98	1.57

You will summarize results in table

n	a_n	b_n	p_n	$f(p_n)$
0	0	$\frac{\pi}{2}$		

42. Consider the linear system $Ax = b$, where

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 \\ -1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}; \quad b = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

(a) First, solve the equation directly by Gaussian Elimination.

(b) Using the initial value $x^{[0]} = (0, 0, 0)^T$, carry out three iterations of the Jacobi's method to compute $x^{[1,2,3]}$.

(c) How close are you to the exact solution?

(d) Repeat the (b) and (c) with the Gauss-Seidel algorithm.

(e) Which is better, the Jacobi or Gauss-Seidel method?

(f) Calculate the spectral radius of Jacobi and G-S methods. Which converges faster?

43. Calculate LU factorizations of the matrix

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 6 & -2 & 1 \\ 10 & 10 & -5 & 0 \\ -2 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

where all diagonal elements of L are 1. By using one of these factorizations, find the solution of the equation $Ax = b$, where $b = (-2, 0, 2, 1)^T$.

44. Consider the Hilbert matrix of order 3:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{bmatrix}$$

Calculate LU decomposition of A.

45. Let $t > 0$ and $f(x) = e^{tx}$. We call P_n the Lagrange polynomial of degree $n-1$ at the points $x_1, x_2, ...x_n$.

    (a) Check that, for any positive integer n and $x \in \mathbb{R}$:

    $$f^{(n)}(x) = t^n e^{tx}$$

    (b) Give the absolute error $|f(0) - P_n(0)|$ and prove that

    $$t^n \leq |f(0) - P_n(0)| \leq t^n e^{tn}$$

46. Let $f(x) = \dfrac{1}{1+12x^2}, x \in [-1, 2]$. Find the nodes $x_0, x_1, ..., x_{11} \in [-1, 5]$ such that the corresponding Lagrange polynomial $P_{10}(x)$ approximating to $f(x)$.

47. Consider the following interpolating data (x_i, y_i).

x_i	-2	$-\frac{4}{3}$	0	$\frac{4}{3}$	2
y_i	0	1	2	1	0

a) Determine P_4 the fourth-order Lagrange polynomial interpolation of f at the given data.
Estimate $P_4(1)$.

b) Let $f(x) = 2\cos\dfrac{\pi x}{4}$ be the exact function. Find the upper bound for

$$|f(1) - P_4(1)|$$

c) Let M_4 be the fourth-order MacLaurin polynomial of the function f.
Estimate the upper bound for

$$|P_4(1) - M_4(1)|$$

e) Find the approximate value of the derivative $f'(1.3)$.

48. Consider the following interpolating data (x_i, y_i).

x_i	1.0	1.05	1.08	1.1
y_i	0	0.049	0.077	0.095

a) Determine P_3 the third-order Lagrange polynomial interpolation of f at the given data.
Estimate $P_3(1.04)$.

b) Let $f(x) = \ln x$ be the exact function. Find the upper bound for

$$|f(1.04) - P_3(1.04)|$$

c) Let M_3 be the third-order MacLaurin polynomial of the function f.
Estimate the upper bound for

$$|P_3(1.04) - M_3(1.04)|$$

e) Find the approximate value of the derivative $f'(1.06)$.

49. Let $f(x) = 3x - e^x$, and the following table

x	1	1.125	1.250	1.375	1.500	1.625	1.750	1.875	2
$f(x)$	0.2817	0.2948	0.2597	0.1699	0.0183	-0.2034	-0.5046	-0.8958	-1.3891

(a) Prove that the equation $f(x) = 0$ has at least a solution in $[1, 2]$.

(b) By the Bisection method, find p_n for $n = 5$.

(c) How many iterations are necessary to solve the equation with accuracy 10^{-4}.

50. Use the interpolating polynomial to find an approximation to the solution of $x - e^{-x} = 0$ using the following data:

x	0.3	0.4	0.5	0.6
e^{-x}	0.740818	0.670320	0.606531	0.548812

51. Let $f(x) = e^x$, for $0 \le x \le 2$.

a) Approximate $f(0.25)$ using linear interpolation with $x_0 = 0, x_1 = 0.5$.

b) Approximate $f(0.75)$ using linear interpolation with $x_0 = 0.5, x_1 = 1$.

c) Approximate $f(0.25)$ and $f(0.75)$ using the second interpolating polynomial with $x_0 = 0, x_1 = 1$ and $x_2 = 2$.

d) Which approximations are better and why?

52. Suppose that we want to approximate the function e^x on the interval [0,1] by using polynomial interpolation with $x_0 = 0, x_1 = 1/2$ and $x_2 = 1$. Let $p_2(x)$ denote the interpolating polynomial.

(a) Find the upper bound of the error

$$\max_{0 \le x \le 1} |e^x - p_2(x)|$$

(b) Find the interpolating polynomial using the technique of your choice.

(c) Plot the function e^x and the interpolation function you found, both on the same figure.

(d) Plot the error $e(x) = e^x - p_2(x)$ on the interval and verify by your inspection that the error is below the bound you found in (a).

53. Consider the following linear system:

$$\begin{cases} ax_1 + 2x_2 - 2x_3 & = 7 \\ x_1 + bx_2 + x_3 & = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + cx_3 & = 5 \end{cases}$$

a) Let $a = 10, b = 7, c = 5$. Use the Jacobi's iterative method to find the approximate solution of the system after 3 iterations, starting with $x^{[0]} = (7, 2, 5)^T$.

b) Let $a = b = c = 1$. Prove that we cannot use the Gauss-Seidel method to approximate solution, but we can use the Jacobi's method.

c) Use the Gauss-Seidel method to find the approximate solution after 3 iterations, starting with $x^{[0]} = (7, 2, 5)^T$.

54. Consider the following linear system:

$$\begin{cases} ax_1 - x_2 + x_3 & = -1 \\ 2x_1 + bx_2 + 2x_3 & = 4 \\ -x_1 - x_2 + cx_3 & = -5 \end{cases}$$

a) Let $a = 3, b = 7$ and $c = 10$. Use the Jacobi's iterative method to find the approximate solution of the system after 3 iterations, starting with $x^{[0]} = (-1, 4, -5)^T$.

b) Let $a = b = c = 2$. Prove that we cannot use the Jacobi's method to approximate solution, but we can use the Gauss-Seidel method.

c) Use the Gauss-Seidel method to find the approximate solution after 4 iterations, starting with $x^{[0]} = (-1, 4, -5)^T$.

55. Consider the linear system $Ax = b$, where

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}; \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

(a) Is A positive-definite?

(b) Obtain the exact solution to the system using the Gaussian Elimination method.

(c) Apply 6 iterations of the Gauss-Seidel method with initial value $x^{[0]} = (0, 0, 0)^T$.

(d) Calculate the error between solution in (c) and the exact one in (b).

56. Consider the linear system $Ax = b$, where

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}; \quad b = \begin{bmatrix} -5 \\ 12 \\ 3 \end{bmatrix}$$

(a) Use Matlab to find LU factorization with partial pivoting for the matrix A, i.e. matrices L, U and a permutation matrix P so that $PA = LU$.

(b) Use the (a) to obtain the exact solution to the system.

(c) The vector $\hat{x} = (2, -5, 12)^T$ is an approximate solution to the system. Apply the iterative method (Jacobi or G-S) to obtain the solution in (b) with initial value $\hat{x}$.

57. Given the function

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^3}$$

(a) Find the third-order MacLaurin polynomial for $f(x)$. Estimate $f(0.2)$ and find a bound for error in this approximation.

(b) Use the Lagrange interpolation to find a third-order with data at $x_0 = 0, x_1 = 0.25, x_2 = 1, x_3 = 2$ and use it to approximate $f(0.2)$. Determine the bound for this interpolation.

58. Phuong has decided to buy stocks of a particularly promising internet company. The price per share was $100,000$ VND (also said $100k$), and Phuong subsequently recorded the stock price at the end of each week. With the x-value measured in days, the following data are acquired

$$(0, 100), (7, 98), (14, 101), (21, 50), (28, 51), (35, 50)$$

In attempting to analyse what happened, it was desired to approximately evaluate the stock price a few days before the crash.

(a) Pass a linear polynomial function through the points with x-values 7 and 14. Then at to this data set the value at 0 and (separately) the value at 21 to obtain two quadratic interpolation functions. Evaluate all three interpolation functions at $x = 12$. Which one do you think is the most accurate? Why?

(b) Plot the two polynomial functions above, together with the data over the interval [0,21]. What are your observations?

59. Consider interpolating data $(x_0, y_0), ..., (x_6, y_6)$ given by Construct the interpolating

x	0.1	0.15	0.2	0.3	0.35	0.5	0.75
y	3.0	2.0	1.2	2.1	2.0	2.5	2.5

polynomial specified below, evaluate them at the points $0.05 : 0.01 : 0.8$. Plot and comment on their respective properties

(a) A polynomial interpolant.

(b) A cubic spline interpolant (you may use Matlab's *spline* function).

60. Consider the function

$$s(x) = \begin{cases} 0, & -1 \leq x \leq 0 \\ x^3 + ax^2 + bx + c, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Is there a choice of coefficients a, b, c such that $S(x)$ is a natural cubic spline function on [-1,1]?

61. Suppose

$$S(x) = \begin{cases} 1 + b_1 x + c_1 x^2 + d_1 x^3, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 + b_2(x-1) + c_2(x-1)^2 + d_2(x-1)^3, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

is a natural cubic spline approximation for a function f that satisfies $f(0) = 1, f(1) = 0$ and $f(2) = 3$. Write down and solve the system of six equations that must be satisfied by the six unknowns b_1, c_1, d_2 and b_2, c_2, d_2.

62. A natural cubic spline S on [0,2] is defined by:

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x), & 0 \leq x < 1 \\ S_1(x), & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

where $S_0(x) = 1 + 2x - x^3$ and $S_1(x) = a + b(x-1) + c(x-1)^2 + d(x-1)^3$. Find a, b, c, d.

63. Determine the exact conditions on a, b, c, d, e under which the following function is a cubic spline:

$$S(x) = \begin{cases} a(x-2)^2 + b(x-1)^3, & x \in (-\infty, 1] \\ c(x-2)^2, & x \in (1, 3] \\ d(x-3) + e(x-2)^2, & x \in [3, \infty) \end{cases}$$

64. Let $f(x)$ be a given function that can be evaluated at points $x_0 \pm jh$, $j = 0, 1, 2, ...$ for any fixed value of h, $0 < h \ll 1$.

(a) Find the 2nd-order accurate formula (truncation error $O(h^2)$)approximating $f'''(x_0)$. Give the formula, as well as an expression for the truncation error.

(b) Use the formula to find approximations to $f'''(0)$ for the function $f(x) = e^x$, employing values $h = 10^{-1}, 10^{-2}, ..., 10^{-9}$.Verify that for larger values of h your formula is indeed 2nd-order accurate. Which values of h gives the closest approximation to $e^0 = 1$.

(c) Use the formula that you derived in (a) , how does the roundoff error behave as a function of h, as $h \to 0$.

(d) How would you go about obtaining a 4th-order accurate formula for $f'''(x_0)$? You don't have to actually derive it, just describe in one or two sentences. How many points would this formula require?

65. Let $g(x) = \cos(\log x), x > 0$.

(a) Compute the fourth-order derivatives $g^{(4)}(x)$.

(b) Find out $M = \max_{1\leq x\leq 5} |g^{(4)}(x)|$.

66. Let $f(x) = 1/(x+2)$ and suppose that p is the cubic polynomial that interpolates f at the points $x = -1, -1/3, 1/3, 1$. Determine the best bound you can for

$$\max_{1/3\leq x\leq 1/3} |f(x) - p(x)|$$

67. Consider the following approximation of the second derivative $f''(x_0)$ of a smooth function $f(x)$ using three points $x_{-1}, x_0 = x_{-1} + h_0$ and $x_1 = x_0 + h_1$ where $h_0 \neq h_1$:

$$f''(x_0) \approx \frac{g_{1/2} - g_{-1/2}}{(h_0 + h_1)/2}$$

where

$$g_{1/2} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{h_1} \quad g_{-1/2} = \frac{f(x_0) - f(x_{-1})}{h_0}$$

(a) Show that this method is only first order accurate.

(b) Use this formula to approximate $f''(0)$ for $f(x) = e^x$, with $h_1 = 10^{-1}, ..., 10^{-5}$ and $h_0 = h_1/2$. Report your findings.

68. Determine an upper bound on the interpolation error from approximating the function $f(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{\varepsilon}\right)$ on the interval $[-h, h]$ using cubic Hermite interpolation on the evenly spaced nodes $x_0 = -h, x_1 = h$.

69. We define the polynomials $H_n(x)$ by

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$$

(a) Prove that $\omega(x,t) = exp(2xt - t^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n$.

(b) Using that $\partial w/\partial t - (2x - 2t)\omega = 0$, prove that $H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0$.

(c) Using $\partial\omega/\partial x - 2t\omega = 0$ prove that $H_n'(x) = 2nH_{n-1}(x)$.

(d) Combine the previous two results to prove that

$$H_n''(x) - 2xH_n'(x) + 2nH_n(x) = 0$$

(e) Prove that $y_n(x) = e^{-x^2/2}H_n(x)$ is a solution of $y_n''(x) + (2n+1-x^2)y_n(x) = 0$.

70. Let us define the function

$$W_n(x) = \frac{\sin((n+1/2)\theta)}{\sin(\theta/2)}, \quad \theta = \arccos x, x \in (-1, 1)$$

Prove that $W_{n+1}(x) + W_{n-1}(x) = 2xW_n(x)$, with $W_0(x) = 1, W_1(x) = 1 + 2x$ (therefore the functions $W_n(x)$ are polynomials of degree n).

71. Show that the equation

$$xe^x - 1 = 0$$

has a root in $[1/2, 1]$ and find the approximation to this root within 10^{-1}, using bisection method.

   (a) Show that $\alpha = 0$ is a root for $x = \ln(x+1)$. Use the second order iterative method with $x_0 = 0.5$ to compute an approximate solution with accuracy 10^{-2}.

   (b) The iterative scheme

$$x_{n+1} = \frac{2x_n[\ln(2x_n+1) - 1] + \ln(2x_n+1)}{2x_n - 1}$$

   converges to zero. Show that the rate of the convergence of this scheme is faster than linear.

   (c) Let $x_0 = 0.85, x_1 = 0.87, x_2 = 0.89$. Find the interpolating polynomial of function $f(x) = e^x$ by using the Newton's formula. Find $f(0.86)$.

   (e) Estimate $f''(1)$ for the function $f(x) = \sin 4x$ using $h = 0.01$.

   (f) Consider the following linear system

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 7x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 + 20x_3 = 7 \end{cases}$$

   Show that the Jacobi iteration matrix norm $\|C\|_\infty < 1$. Starting with $x^{[0]} = (0, 0, 0)^T$, apply Jacobi's iterative method to find the first approximate solution of the system. Estimate the number of iteration k needed to achieve the accuracy within 10^{-4}.

72. Show that the Newton's method for $xe^x = 0$ is given by

$$x_{n+1} = \frac{(k-1)x_n + x_n^2}{k + x_n}$$

Starting with $x_0 = 1$, calculate x_2 when $k = 2$ and discuss its order of the convergence.

73. Given the table of values

   (a) Construct the best quadratic Lagrange interpolating polynomial to approximate the function $f(x) = 3xe^x - 2e^x$ at $x = 1.04$.

x	1.0	1.05	1.08	1.1
$f(x)$	2.72	3.29	3.66	3.90

(b) Compute the error bound for your approximation in (a).

(c) Use three point formula to find the approximate value of the $f'(1.05)$. Compute the actual error.

74. Consider the linear system

$$\begin{cases} 0.5x_1 + 1.1x_2 + 3.1x_3 = 6.0 \\ 2.0x_1 + 4.5x_2 + 0.4x_3 = 0.02 \\ 5.0x_1 + 1.0x_2 + 6.5x_3 = 1.0 \end{cases}$$

(a) Solve the system using Gauss elimination by partial pivoting.

(b) Rearrange the linear system such that the convergence of Jacobi method is guaranteed.Use the Jacobi method to find the first two iterations, using the initial approximation $x^{[0]} = (-1, 1, 2)^T$.

(c) Compute the error bound for approximation in (b).

75. (a) Solve the system of equations

$$\begin{cases} 2x + 4y - z = 1 \\ 4x + y + z = -2 \\ 2x - 3y + 6z = 1 \end{cases}$$

using the Gaussian elimination. Write down the LU factorization of the coefficient matrix A. Given that the inverse of A is

$$A^{-1} = \frac{1}{56}\begin{bmatrix} -9 & 21 & -5 \\ 22 & -14 & 6 \\ 14 & -14 & 14 \end{bmatrix}$$

(b) Apply the Gauss-Seidel method to find the 3 iterations approximate solution with $x^{[0]} = (1, -2, 1)^T$.

(c) Calculate the error of G-S method.

76. Which of the following iteration methods will converge to the solution $\alpha = 1$, assuming x_0 is sufficiently close to 1. If it does converge, give the order of convergence

(a) $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^4 - 1}{4}$

(b) $x_{n+1} = x_n + x_n^4 - 1$

(c) $x_{n+1} = x_n + \frac{x_n^4 - 1}{4}$

(d) $x_{n+1} = \frac{3}{4}x_n + \frac{1}{4x_n^3}$