Chương 1: SỐ XẤP XỈ VÀ SAI SỐ

Minh-Phuong Tran

Ton Duc Thang University

Ngày 5 tháng 4 năm 2016

NỘI DUNG

- **Giải tích số**: Giải số cho các bài toán lý thuyết, bài toán thực tế mà không có lời giải chính xác.
- **Ví dụ**: Các tích phân sau đây không thể biểu diễn dưới dạng giải tích:

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx, \quad \int_1^2 \frac{\sin x}{x} dx, \quad \int_0^1 \sin x^2 dx$$

  tuy nhiên ta có thể xấp xỉ giá trị của chúng bằng các phương pháp số.
- **Nhiệm vụ**:
  1. Tìm ra phương pháp giải cho bài toán: phương pháp đúng và phương pháp gần đúng.
  2. Xác định tính chất nghiệm.
  3. Giải các bài toán về cực trị.
  4. Xấp xỉ hàm: một số hàm phức tạp.
  5. Đánh giá sai số: để chọn ra phương pháp xấp xỉ tối ưu.

1. Khảo sát, phân tích bài toán.
2. Lựa chọn phương pháp tối ưu theo nghĩa:
    - Xây dựng thuật toán đơn giản.
    - Khối lượng tính toán ít.
    - Sai số bé.
    - Tính khả thi cao.
3. Xây dựng thuật toán.
4. Viết chương trình: sử dụng các ngôn ngữ lập trình.
5. Thực hiện chương trình: chạy, thử nghiệm, sửa đổi, hoàn chỉnh.

1.1.2. Cách viết dữ liệu số

- Dữ liệu số: dưới dạng số, được sử dụng để tính toán, đếm và đánh dấu.
- Các dữ liệu số có thể là các số nguyên, số thực.
- Trong hệ "thập" phân, số nguyên I được biểu diễn dưới dạng:

$$I = a_{m-1}a_{m-2}...a_2a_1a_0$$

có thể được hiểu là với $a_i \in \{0, 1, ..., 9\}, \forall i = m-1, m-2, ..., 2, 1, 0$:

$$I_{10} = a_{m-1}10^{m-1} + a_{m-2}10^{m-2} + ... + a_2 10^2 + a_1 10^1 + a_0 10^0$$

- Tổng quát, trong hệ cơ số b, một số I được biểu diễn là:

$$I_m = (a_{m-1}a_{m-2}...a_2a_1a_0)_b, \quad a_j \in \{0, 1, ..., b-1\}$$

Ví dụ

Hãy viết các số sau theo hệ cơ số tương ứng:

- $I_5 = (11011)_2$ theo hệ ccơ số 10.
- $I_3 = (1034)_5$ theo hệ cơ số 10.

- Giả sử x^* là số xấp xỉ của x (x là số đúng). Khi đó:

$$\Delta = |x - x^*|$$

được gọi là **sai số đúng** của x.

- Trên thực tế, ta không biết được số đúng, do đó cũng không biết được sai số đúng.
- Ta xét hai loại sai số sau đây:
  - **Sai số tuyệt đối**: Số $\Delta x > 0$ thỏa mãn $|x - x^*| \leq \Delta x$.
  - **Sai số tương đối**: Số $\delta x > 0$ thỏa mãn $\delta x = \dfrac{\Delta x}{|x^*|}$.

- Sai số tuyệt đối cho phép ta xác định khoảng giá trị của số đúng x, tức là:

$$x \in [x^* - \Delta, x^* + \Delta] \quad \text{hay} \quad x = x^* \pm \Delta$$

- Sai số tuyệt đối không cho biết mức chính xác của phép tính.
- Sai số tương đối dùng để so sánh các sai số trong các phép tính khác nhau.

Ví dụ: Lấy gần đúng $\pi \sim 3.14$ ta có:

$$|\pi - 3.14| \leq 0.0016 \leq 0.002$$

Do đó ta có thể chọn sai số tuyệt đối của π là 0.0016 hay 0.002... Ta có thể viết là:

$$\pi \simeq 3.14 \pm 2 \times 10^{-3}$$

1.2.2. Chữ số chắc

- Cho $A = a \pm \Delta_a$ trong đó a gồm các chữ số $a = \overline{...a_1 a_0, a_{-1}...}$. Khi đó chữ số a_i được gọi là chắc khi và chỉ khi

$$\Delta_a \leq 0.5 \times 10^i$$

- Viết lại a dưới dạng cơ số 10:

$$a = (\beta_p \beta_{p-1} ... \beta_j ... \beta_{p-s})_{10} = \beta_p 10^p + ... + \beta_j 10^j + ... + \beta_{p-s} 10^{p-s}$$

và ta giữ lại đến hạng thứ j, phần bỏ đi là phần μ:

$$\overline{a} = \beta_p 10^p + ... + \beta_{j+1} 10^{j+1} + \widehat{\beta}_j 10^j$$

trong đó

$$\widehat{\beta} = \begin{cases} \beta_j + 1 & \text{nếu } 0.5 \times 10^j < \mu < 10^j \\ \beta_j & \text{nếu } 0 \leq \mu < 0.5 \times 10^j \end{cases}$$

Ví dụ

Ví dụ

$\pi \simeq 3.141592$

Ví dụ

$\pi \simeq 3.141592 \simeq 3.14159$

Ví dụ

Ví dụ

$\pi \simeq 3.141592 \simeq 3.14159 \simeq 3.14156$

Ví dụ

Ví dụ

$\pi \simeq 3.141592 \simeq 3.14159 \simeq 3.14156 \simeq 3.142$

Ví dụ

$\pi \simeq 3.141592 \simeq 3.14159 \simeq 3.14156 \simeq 3.142 \simeq 3.14$

Ví dụ

Ví dụ

$\pi \simeq 3.141592 \simeq 3.14159 \simeq 3.14156 \simeq 3.142 \simeq 3.14 \simeq 3.1$

Ví dụ

Ví dụ

$\pi \simeq 3.141592 \simeq 3.14159 \simeq 3.14156 \simeq 3.142 \simeq 3.14 \simeq 3.1 \simeq 3$

Ví dụ

Ví dụ

$\pi \simeq 3.141592 \simeq 3.14159 \simeq 3.14156 \simeq 3.142 \simeq 3.14 \simeq 3.1 \simeq 3$

Ví dụ

Hãy là tròn chữ số gần đúng với một chữ số không chắc trong phép tính sau: $A = 12,345677 \pm 3 \times 10^{-4}$.

Ví dụ

Ví dụ

$\pi \simeq 3.141592 \simeq 3.14159 \simeq 3.14156 \simeq 3.142 \simeq 3.14 \simeq 3.1 \simeq 3$

Ví dụ

Hãy là tròn chữ số gần đúng với một chữ số không chắc trong phép tính sau: $A = 12,345677 \pm 3 \times 10^{-4}$.

Với sai số 3×10^{-4} ta có i nhỏ nhất thỏa điều kiện là $i = -3$, bởi vì:

$$0,5 \times 10^{-4} \leq 3 \times 10^{-4} \leq 0,5 \times 10^{-3}$$

Ta có 5 chữ số chắc là 1,2,3,4,5. Theo yêu cầu đề bài ta sẽ làm tròn $A \simeq 12,3457$. Khi đó sai số quy tròn là $2,3 \times 10^{-5} < 3 \times 10^{-4}$

1.2.3. Các loại sai số

1. SAI SỐ GIẢ THUYẾT: do việc mô hình hóa bài toán đạt được một số điều kiện lý tưởng nhằm làm giảm độ phức tạp của bài toán.
2. SAI SỐ ĐO ĐẠC: do việc đo đạc và cung cấp giá trị đầu vào không chính xác.
3. SAI SỐ TÍNH TOÁN: do làm tròn số trong quá trình tính toán, tính càng nhiều thì sai số tính toán càng lớn.
4. SAI SỐ PHƯƠNG PHÁP: do việc giải bài toán bằng phương pháp gần đúng, mỗi phương pháp khác nhau cho sai số khác nhau.
5. SAI SỐ CHẶT CỤT: sai số rút gọn xảy ra trong quá trình tính toán.

Ví dụ

Tính gần đúng tích phân $I = \int_0^1 e^{x^2} dx$.

Ví dụ

Tính gần đúng tích phân $I = \int_0^1 e^{x^2} dx$.

- Trước hết ta thay công thức tích phân (diện tích hình thang cong) thành diện tích hình thang thì:

$$I \simeq \frac{1}{2}(1+e)$$

  sai số ở đây gọi là **sai số phương pháp**, gọi là ε.

- Tiếp theo, ta tính biểu thức $\frac{1}{2}(1+e)$ dạng số thập phân: $\frac{1}{2}(1+e) \simeq 1.85914... \simeq 1.859$ thì **sai số tính toán** phát sinh trong quá trình làm tròn là:

$$|1.85914 - 1.859| \leq 2 \times 10^{-4}$$

- Như vậy trong quá trình tính xấp xỉ tích phân trên, ta có hai sai số cần chú ý:

$$I = 1.859 \pm (\varepsilon + 2 \times 10^{-4})$$

NỘI DUNG

- Giả sử A là đại lượng xấp xỉ của đại lượng chính xác B sau một quá trình tính toán có vô hạn bước.
- Ta nói quá trình tính toán là **ổn định** nếu sai số tính toán không tăng vô hạn.
- Nếu quá trình tính toán không ổn định thì ta không thể xấp xỉ B với sai số nhỏ hơn sai số cho phép.

1. Tính số e chính xác tới 8 chữ số sau dấu chấm thập phân.
2. Sử dụng khai triển:

$$(\tan x)^{-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + ... + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)}$$

   để tìm $(\tan 1)^{-1}$ với 8 chữ số chắc.
3. Tính $ln(1.2)$ với 9 chữ số sau dấu chấm thập phân, biết rằng:

$$ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left[x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + ...\right]$$