

PHÂN TÍCH MA TRẬN

THỰC HÀNH PHƯƠNG PHÁP SỐ CHO KHOA HỌC DỮ LIỆU

Buổi 1

Ngày 16 tháng 3 năm 2023

Liên hệ

GOOGLE CLASSROOM: **mrhvcvm**

TRỢ GIẢNG:

- ▶ Nguyễn Thị Kiều Trang: ntktrang@hcmus.edu.vn
- ▶ Lý Như Bình: lnbinh@hcmus.edu.vn

LƯU Ý:

- ▶ Email đăng nhập google classroom thể hiện đầy đủ họ và tên, tránh sử dụng email có biệt danh.
- ▶ Tiêu đề mail (bắt buộc):
[2023-HK2-THPPSKHDL] [Tiêu đề thư]
VD: [2023-HK2-THPPSKHDL] HỎI BÀI
Vui lòng giới thiệu họ tên, MSSV và tên ca học khi gửi email.

Một vài điều về lớp

Điểm thực hành: Chiếm 40% tổng điểm:

- ▶ Điểm danh: 1 điểm (Mỗi buổi)
- ▶ Bài tập: 3 điểm (Nộp bài tập thực hành mỗi tuần)

Cách thức nộp bài:

- ▶ Nộp trên google classroom
- ▶ Nộp file .txt
- ▶ Tên file đặt theo yêu cầu từng bài

Cơ sở lí thuyết

Một hệ vector cơ sở $v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ được gọi là **trực giao** (orthogonal) nếu thỏa

$$\begin{cases} \|v_i\|_2^2 > 0, & \forall 1 \leq i \leq n. \\ v_i^T v_j = 0 & \forall 1 \leq i \neq j \leq n. \end{cases} \quad (1)$$

Cơ sở lí thuyết

Một hệ vector cơ sở $v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ được gọi là **trực chuẩn** (orthonormal) nếu thoả

$$\begin{cases} \|v_i\|_2^2 = 1, & \forall 1 \leq i \leq n. \\ v_i^T v_j = 0 & \forall 1 \leq i \neq j \leq n. \end{cases} \quad (2)$$

Cơ sở lí thuyết

Một ma trận trực giao là ma trận vuông mà các cột của nó là một hệ trực chuẩn. Một ma trận $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ bao gồm các cột $v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ thoả

$$\begin{cases} \|v_i\|_2^2 = 1, & \forall 1 \leq i \leq n. \\ v_i^T v_j = 0 & \forall 1 \leq i \neq j \leq n. \end{cases} \quad (3)$$

Bài 1:

Thời gian: 10 phút.

Cho hệ vector dưới đây:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Hãy viết một chương trình kiểm tra xem hệ vector trên có trực giao không.

Bài 2:

Thời gian: 10 phút.

Ma trận dưới đây có phải ma trận trực giao hay không?

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{-2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \quad (5)$$

Viết một chương trình trong Python giúp chúng ta trả lời câu trên.

Bài 3:

Thời gian: 30 phút.

Viết chương trình nhập một ma trận vuông cấp n bất kì, hãy

- Kiểm tra xem có phải ma trận trực giao không.
- Tính trace của một ma trận trên.
- Tính chuẩn $\|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_F$ của ma trận.

Gợi ý: sử dụng hàm `random.rand` để tạo ma trận.

Note:

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii} \text{ là trace(vết) của ma trận vuông } A \text{ cấp } n. \quad (6)$$

Với $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, ta có các chuẩn sau:

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}|. \quad (7)$$

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|. \quad (8)$$

Chuẩn Frobenius của ma trận A:

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_i^m \sum_j^n |a_{ij}|^2} = \sqrt{\text{tr}(A^T A)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{\min\{m,n\}} \sigma_i^2(A)} \quad (9)$$

Phân tích suy biến

Phân tích suy biến là phương pháp phân tích ma trận A kích thước $m \times n$ thành

$$A = U\Sigma V^T, \quad (10)$$

trong đó

- ▶ U là ma trận trực giao có kích thước $m \times m$.
- ▶ Σ là ma trận đường chéo có kích thước $m \times n$.
- ▶ V là ma trận trực giao có kích thước $n \times n$.

Bài 4:

Thời gian: 30 phút.

Sử dụng hàm **svd** của package **scipy** trong Python để viết một chương trình cho phép tính dạng phân tích suy biến của ma trận dưới đây theo thứ tự sau đây:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

Bài 4:

Thời gian: 30 phút.

- a. Nhập và xuất ma trận A.
- b. Tính số dòng và cột của ma trận A.
- c. Tìm phân tích SVD của A. (gợi ý: `scipy.linalg.svd()`).
- d. Viết lại vectors đường chéo ở trên thành ma trận đường chéo.

Bài 5:

Thời gian: 30 phút.

Sử dụng hàm **svd** của package **scipy** trong Python để viết một chương trình cho phép tính dạng phân tích suy biến của ma trận bất kỳ.

Phép giảm chiều của phân tích suy biến

Compact SVD:

Giả sử trên đường chéo chính có r phần tử khác không

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \lambda_r > 0. \quad (12)$$

Phân tích compact SVD

$$A = U_r \Sigma_r V_r^T, \quad (13)$$

trong đó

- ▶ U_r và V_r là ma trận được tạo từ r cột đầu tiên của U và V .
- ▶ Σ_r là ma trận được tạo từ r hàng và r cột đầu tiên của Σ .

Bài 6:

Thời gian: 30 phút Viết chương trình cho phép nhập vào một ma trận, sau đó tính compact SVD của ma trận đó. Sử dụng ma trận dưới đây để kiểm tra.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

Bài 7:

Thời gian: 30 phút

Viết chương trình cho phép nhập vào một ma trận, sau đó tính truncated SVD của ma trận đó. Sử dụng ma trận dưới đây để kiểm tra.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (15)$$