Hornerovo schéma a jeho aplikace v Newtonově metodě

Nechť $p_n(x)$ je polynom stupně n

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \tag{1}$$

a $q_{n-1}(x,\alpha)$ je polynom stupně $n-1$

$$q_{n-1}(x,\alpha) = b_n x^{n-1} + b_{n-1}x^{n-2} + \cdots + b_2 x + b_1, \tag{2}$$

kde

$$b_n = a_n \tag{3}$$

$$b_i = b_{i+1}\alpha + a_i \quad \text{pro} \quad i = n-1, n-2, \cdots, 1, 0. \tag{4}$$

Potom platí

$$b_0 = p_n(\alpha) \tag{5}$$

$$p_n(x) = q_{n-1}(x,\alpha)(x-\alpha) + b_0, \tag{6}$$

a tedy také

$$p_n'(x) = q_{n-1}'(x,\alpha)(x-\alpha) + q_{n-1}(x,\alpha) \tag{7}$$

$$p_n'(\alpha) = q_{n-1}(\alpha,\alpha) \tag{8}$$

Aplikace vztahu 5 se nazývá Hornerovou metodou pro výpočet funkční hodnoty polynomu. Jde o efektivní algoritmus vzhledem k potřebnému počtu násobení. Hornerovou metodou lze určit i hodnotu derivace $p_n'(\alpha)$ jako funkční hodnotu polynomu $q_{n-1}(\alpha,\alpha)$

$$c_n = b_n \tag{9}$$

$$c_i = c_{i+1}\alpha + b_i \quad \text{pro} \quad i = n-1, n-2, \cdots, 2, 1 \tag{10}$$

$$q_{n-1}(\alpha,\alpha) = c_1. \tag{11}$$

```r
a<-c(-21,-94,57,10)
n<-length(a)
alpha<-2
b<-a[n]
c<-b
for(i in (n-1):2){
  b<-b*alpha+a[i]
  c<-c*alpha+b
}
b<-b*alpha+a[1]
cat("p(alpha)  =",b,"\n")
cat("p'(alpha) =",c)
```