Bài 7 Tính gần đúng đạo hàm và tích phân xác định

Bài 7 Đạo hàm và tích phân xác định

7.1. Đặt vấn đề

7.2. Tính gần đúng đạo hàm

7.3. Tính gần đúng tích phân xác định

Bài tập

7.1 Đặt vấn đề

Trong thực tế chúng ta gặp:

- Hàm y = *f*(x) ở dạng bảng số và công thức tường minh chưa biết.
- Hoặc hàm số *f*(x) phức tạp.

=> để tính đạo hàm hoặc tích phân của *f*(x) ta chọn công thức gần đúng.

- Ngoai ra, công thức gần đúng còn cho phép chúng ta dễ lập trình trên máy tính.

7.2 Tính gần đúng đạo hàm

Cho hàm y = *f*(x) và bảng số

x_k	x_0	…	x_n
$y_k = f(x_k)$	y_0	…	y_n

Để tính gần đúng đạo hàm, ta xấp xỉ hàm bằng công thức Taylor , đa thức nội suy Lagrange $L(x)$ hay đa thức nội suy Newton $N(x)$. Khi đó ta có:

$$f'(x) \approx T'(x) \text{ và } f''(x) \approx T''(x) \qquad (7.1)$$

$$f'(x) \approx L'(x) \text{ và } f''(x) \approx L''(x) \qquad (7.2)$$

$$f'(x) \approx N'(x) \text{ và } f''(x) \approx N''(x) \qquad (7.3)$$

7.2 Tính gần đúng đạo hàm

7.2.1 Biểu diễn *f*(x) qua chuỗi Taylor bậc 2

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{f'(x_0)(x - x_0)}{1!} + \frac{f''(x_0)(x - x_0)^2}{2!} \qquad (6.4)$$

Đặt: $h = x - x_0 \Rightarrow x = x_0 + h$

$$f\left(x_0 + h\right) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2}h^2 \qquad (6.5)$$

Khi $|h|$ khá bé ta có:

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \qquad (6.6)$$

Vì: $\frac{f''(x_0)}{2}h^2$ rất bé.

7.2 Tính gần đúng đạo hàm

Sai số:

$$|R(x_0)| = \left|\frac{f''(\xi)}{2}\right| h \le \frac{M}{2}h; |f''(x)| \le M, \forall x \in [x_0, x_0 + h] \quad (7.7)$$

Ví dụ 7.1: Cho $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3$. Tính $f'(1)$?

Giải: chọn $h = 0.001$ ta có:

$$f'(1) = \frac{f(1+0.001) - f(1)}{0.001} = \frac{(1.001^3 + 2\times 1.001^2 - 3) - (1^3 + 2\times 1^2 - 3)}{0.001}$$

$$= \frac{0.007005}{0.001} = 7.005001$$

Sai số:

$$f''(x) = 6x + 4 \Rightarrow |f''(1)| = 10 = M$$

$$\Delta = \frac{M}{2}h = \frac{10}{2}\times 0.001 = 0.005$$

KQ đúng:

$f'(x) = 3x^2 + 4x.$

$f'(1) = 7$

7.2 Tính gần đúng đạo hàm

7.2.2 Tính đạo hàm bằng đa thức nội suy

Xấp xỉ hàm $f(x)$ bằng đa thức nội suy $P_n(x)$ tại n + 1 mốc:

$$f(x) = P_n(x) + R(x) \tag{7.8}$$

$$f'(x) = P_n^{'}(\mathrm{x}) + \mathrm{R}^{'}(x) \tag{7.9}$$

$$\Rightarrow f'(x) \approx P_n^{'}(\mathrm{x}), \forall\, \mathrm{x} \in [a,b] \tag{7.10}$$

Sai số:

$$R'(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i), c \in [a,b] \tag{7.11}$$

$$R'(x) \le \frac{\max\limits_{[a,b]} \left| f^{(n+1)}(x) \right|}{(n+1)!} \left| (x - x_0) \ldots (x - x_n) \right| = \Delta \tag{7.12}$$

6.2 Tính gần đúng đạo hàm

Tính đạo hàm bằng đa thức nội suy Lagrange

$$L(x) = \sum_{k=0}^{n} p_n^{(k)}(x)\, y_k \qquad (7.13)$$

$$p_n^{(k)}(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\ldots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})(x_k-x_n)} \qquad (7.14)$$

Trường hợp các mốc cách đều $x_{k+1} - x_k = h = \text{const}$

Đặt $q = (x - x_0)/h$

$$L(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k} q(q-1)\ldots(q-n)}{k!(n-k)!(q-k)} y_k \qquad (7.15)$$

7.2 Tính gần đúng đạo hàm

Tính đạo hàm bằng đa thức nội suy Lagrange

Tính đạo hàm tại 2 mốc:

x	x_0	x_1
y	y_0	y_1

$y_0 = f(x_0)$ và

$y_1 = f(x_1) = f(x_0 + h)$

Đa thức nội suy Lagrange có dạng

$$L(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1 = -\frac{x - x_1}{h} y_0 + \frac{x - x_0}{h} y_1 \qquad (7.16)$$

$$f'(x) \approx L'(x) = \left(\frac{y_1 x - y_1 x_0 - y_0 x + y_0 x_1}{h} \right)' = \frac{y_1 - y_0}{h} \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \qquad (7.17)$$

$\forall\, x$ trên $[x_0, x_1]$ $\qquad h = x_1 - x_0 \qquad (7.18)$

7.2 Tính gần đúng đạo hàm

Tính đạo hàm bằng đa thức nội suy Lagrange

Ví dụ 7.2: Cho $f(x) = \ln(x)$. Tính $f'(1.2)$?

Giải: chọn h = 0.001 ta có:

$$f'(1.2) \approx \frac{f(1.2+h)-f(1.2)}{h} = \frac{f(1.201)-f(1.2)}{0.001}$$

$$= \frac{0.183155-0.182322}{0.001} = 0.832986$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(1.2) = \frac{1}{1.2} = 0.833333}$$

7.2 Tính gần đúng đạo hàm

Tính đạo hàm bằng đa thức nội suy Lagrange

Tính đạo hàm tại 3 mốc:

x	x_0	x_1	x_2
y	y_0	y_1	y_2

$x_2 - x_1 = x_1 - x_0 = h$

$y_0 = f(x_0)$

$y_1 = f(x_1) = f(x_0 + h)$

$y_2 = f(x_2) = f(x_0 + 2h)$

Đa thức Lagrange có dạng

$$L(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{2h^2} y_0 - \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{h^2} y_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2h^2} y_2 \quad (7.19)$$

$$L'(x) \approx \frac{x-x_0}{2h^2}(y_2 - 2y_1) + \frac{x-x_1}{2h^2}(y_0 + y_2) + \frac{x-x_2}{2h^2}(y_0 - 2y_1) \quad (7.20)$$

$$L''(x) \approx \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{h^2} \quad (7.21)$$

7.2 Tính gần đúng đạo hàm

Tính đạo hàm bằng đa thức nội suy Lagrange

$$L'(x) \approx \frac{x-x_0}{2h^2}(y_2-2y_1)+\frac{x-x_1}{2h^2}(y_0+y_2)+\frac{x-x_2}{2h^2}(y_0-2y_1)$$

$$f'(x_0) \approx L'(x_0) = \frac{-3y_0+4y_1-y_2}{2h} = \frac{-3f(x_0)+4f(x_0+h)-f(x_0+2h)}{2h} \qquad (7.22)$$

➡ công thức sai phân tiến

$$f'(x_2) \approx L'(x_2) = \frac{y_0-4y_1+3y_2}{2h} = \frac{f(x_0)-4f(x_0+h)+3f(x_0+2h)}{2h} \qquad (7.23)$$

➡ công thức sai phân lùi

$$f'(x_1) \approx L'(x_1) = \frac{y_2-y_0}{2h} = \frac{f(x_0+2h)-f(x_0)}{2h} \qquad (7.24)$$

➡ công thức sai phân hướng tâm

7.2 Tính gần đúng đạo hàm

Tính đạo hàm bằng đa thức nội suy Lagrange

Công thức sai phân hướng tâm thường được viết dưới dạng

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} \tag{7.25}$$

Công thức sai phân lùi được viết dưới dạng

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0-2h) - 4f(x_0-h) + 3f(x_0)}{2h} \tag{7.26}$$

Sử dụng công thức sai phân hướng tâm để xấp xỉ đạo hàm cấp 2

$$f''(x_0) \approx \frac{f(x_0+h) - 2f(x_0) + f(x_0-h)}{h^2} \tag{7.27}$$

7.2 Tính gần đúng đạo hàm

Tính đạo hàm bằng đa thức nội suy Lagrange

Sử dụng công thức sai phân hướng tâm để xấp xỉ đạo hàm cấp 2:

$$f^{''} \approx L''(x) \approx \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{h^2} \qquad (7.28)$$

7.2 Tính gần đúng đạo hàm

Tính đạo hàm bằng đa thức nội suy Lagrange

Sai số:

TH1: Đạo hàm cấp 1 có 2 mốc

$$\Delta = \frac{M_2 \cdot h}{2} \qquad M_2 = \max_{x\in[a,b]} \left| f''(x) \right| \qquad (7.29)$$

TH2: Đạo hàm cấp 1 có 3 mốc

$$\Delta = \frac{M_3 h^2}{3} \qquad M_3 = \max_{x\in[a,b]} \left| f^{(3)}(x) \right| \qquad (7.30)$$

7.2 Tính gần đúng đạo hàm

Tính đạo hàm bằng đa thức nội suy Lagrange

Sai số:

TH3: Đạo hàm cấp 1 có 3 mốc hướng tâm

$$\Delta = \frac{M_3 \cdot h^2}{6} \qquad (7.31)$$

TH4: Đạo hàm cấp 2 có 3 mốc

$$\Delta = \frac{M_4 h^2}{12} \qquad M_4 = \max_{x\in[a,b]}\left|f^{(4)}(x)\right| \qquad (7.32)$$

7.2 Tính gần đúng đạo hàm

Tính đạo hàm bằng đa thức nội suy Lagrange

Ví dụ 7.3: Tính $f'(x)$ khi $x = 0$ $\quad f(x) = e^{-x}$

x	–0.5	0	0.5
y	1.6487	1	0.6065

Giải:

h = 0.5

Sử dụng công thức hướng tâm:

$$f'(x_1) \approx L'(x_1) = \frac{y_2 - y_0}{2h} = \frac{f(x_0 + 2h) - f(x_0)}{2h}$$

$$f'(x_1) \approx L'(x_1) = \frac{y_2 - y_0}{2h} = \frac{0.6065 - 1.6487}{2 \times 0.5} = -1.0422$$

Sai số:

$$\Delta = \frac{M_3 \cdot h^2}{6} = \frac{1.6487 \times (0.5)^2}{6} = 0.068696$$

7.2 Tính gần đúng đạo hàm

Tính đạo hàm bằng đa thức nội suy Lagrange

Ví dụ 7.4: Tính *f'(x)* khi *x* = -1 và x = 1; $f(x) = 2^x$

x	-1	0	1
y	0.5	1	2

Giải: h = 1

Sử dụng công thức sai phân tiến:

$$f'(x_0) \approx L'(x_0) = \frac{-3y_0 + 4y_1 - y_2}{2h} = \frac{-3f(x_0) + 4f(x_0+h) - f(x_0+2h)}{2h}$$

$$f'(-1) \approx L'(-1) = \frac{-3y_0 + 4y_1 - y_2}{2h} = \frac{-3\times 0.5 + 4\times 1 - 2}{2\times 1} = 1$$

Sử dụng công thức sai phân lùi:

$$f'(x_2) \approx L'(x_2) = \frac{y_0 - 4y_1 + 3y_2}{2h} = \frac{f(x_0) - 4f(x_0+h) + 3f(x_0+2h)}{2h}$$

$$f'(1) \approx L'(1) = \frac{y_0 - 4y_1 + 3y_2}{2h} = \frac{0.5 - 4\times 1 + 3\times 2}{2\times 1} = 0.5$$

7.3 Tính gần đúng tích phân

Đặt vấn đề

Theo công thức Newton-Leibnitz:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a), F'(x) = f(x) \qquad (7.30)$$

Trong thực tế hàm *f*(x) có thể cho ở dạng bảng, khi đó khái niệm nguyên hàm không còn ý nghĩa.

==> thay hàm *f*(x) bằng một đa thức nội suy sau đó tính tích phân gần đúng của đa thức.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P_n(x)dx \qquad (7.31)$$

7.3 Tính gần đúng tích phân

Ví dụ 7.5:

$$\int_1^2 (y-1).y.dy$$

$$= \frac{1}{3}y^3\Big|_1^2 - \frac{1}{2}y^2\Big|_1^2 = \frac{1}{3}(8-1) - \frac{1}{2}(4-1) = \frac{5}{6}$$

7.3 Tính gần đúng tích phân

Tích phân hình thang

Ta chia [a, b] thành n đoạn con bằng nhau bởi các điểm chia x_i:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

$$x_i = a + ih, h = \frac{(b-a)}{\mathrm{n}}, i = 0,1,\ldots,n$$

Đặt $y_i = f(x_i)$. Ta có:

$$\int_a^b f(\mathrm{x})\,\mathrm{dx} = \int_{x_0}^{x_1} f(\mathrm{x})\,\mathrm{dx} + \int_{x_1}^{x_2} f(\mathrm{x})\,\mathrm{dx} + \ldots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(\mathrm{x})\,\mathrm{dx} \qquad (7.32)$$

7.3 Tính gần đúng tích phân

Tích phân hình thang

Đối với vế phải, mỗi tích phân ta thay hàm f(x) bằng một đa thức Newton bậc nhất $p_1(x)$.
Với tích phân thứ nhất ta có:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(\mathrm{x})\,\mathrm{dx} = \int_{x_0}^{x_1} p_1(\mathrm{x})\,\mathrm{dx}$$

Đổi biến x = x_0 + ht => dx = hdt, ứng với x_0 là t = 0, x_1 là t = 1.

$$\int_{x_0}^{x_1} p_1(\mathrm{x})\,\mathrm{dx} = h\int_0^1 (y_0 + t\Delta y_0)dt = h(y_0 t + \frac{t^2}{2}\Delta y_0)\Big|_{t=0}^{t=1}$$

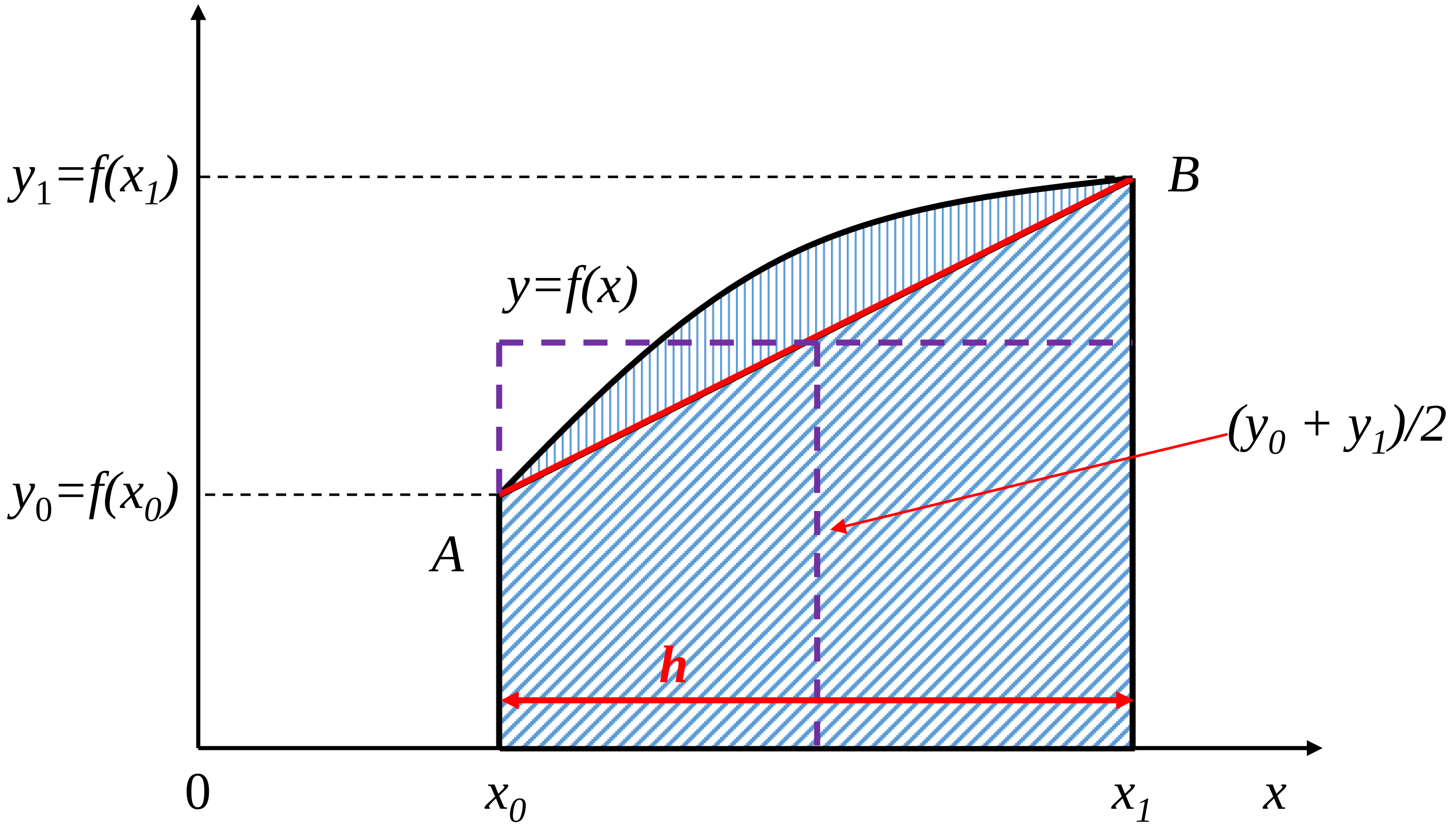
$$= h(y_0 + \frac{\Delta y_0}{2}) = h\frac{y_0 + y_1}{2}, \Delta y_0 = y_1 - y_0$$

$$\Rightarrow \int_{x_0}^{x_1} f(\mathrm{x})\,\mathrm{dx} = h\frac{y_0 + y_1}{2}$$

7.3 Tính gần đúng tích phân

Tích phân hình thang

Về mặt hình học



7.3 Tính gần đúng tích phân

Tích phân hình thang

Tương tự với tích phân i + 1, do vậy ta có:

$$\int_a^b f(\mathrm{x})\,\mathrm{dx} = \frac{h}{2}[(\mathrm{y}_0 + \mathrm{y}_1) + (\mathrm{y}_1 + \mathrm{y}_2) + \ldots + (\mathrm{y}_{n-1} + \mathrm{y}_n)] \qquad (7.33)$$

$$= \mathrm{h}[\frac{y_0 + y_n}{2} + \mathrm{y}_1 + \mathrm{y}_2 + \ldots + \mathrm{y}_{n-1}] \qquad (7.34)$$

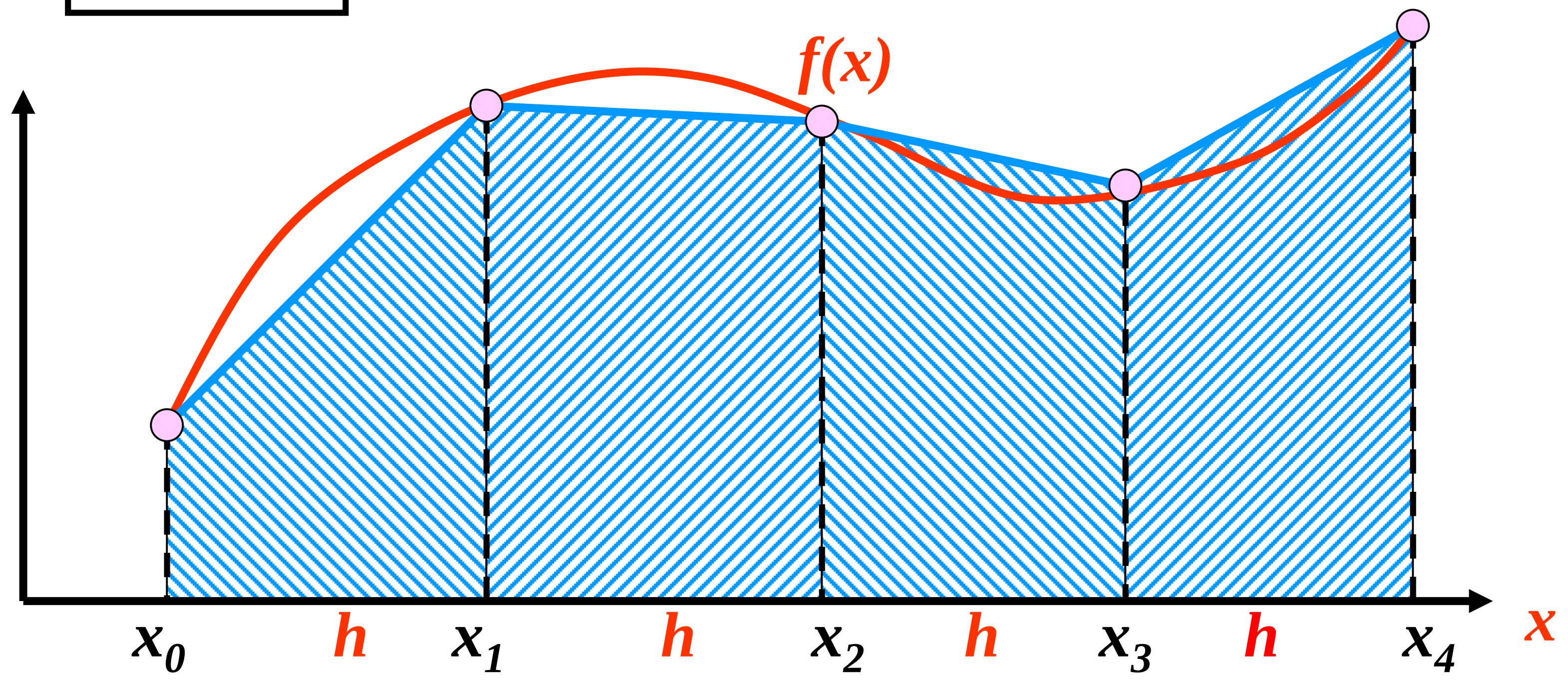
$$\mathrm{h} = \frac{(b-a)}{n} \qquad (7.35)$$

7.3 Tính gần đúng tích phân

Tích phân hình thang

Về mặt hình học:

$$\boxed{h = \frac{b-a}{n}}$$



7.3 Tính gần đúng tích phân

Tích phân hình thang

Sai số:

$$\frac{h^2(b-a)M_2}{12} \qquad (7.36)$$

$$M_2 = \max_{x\in[a,b]} \left| f''(x) \right| \qquad (7.37)$$

7.3 Tính gần đúng tích phân

Tích phân hình thang

Ví dụ 7.5: Cho hàm *f*(*x*) dưới dạng bảng sau. Tính tích phân hình thang.

x	0	0.25	0.5	0.75	1
y	1	0.77880	0.60653	0.47237	0.36788

Giải:

$$\int_0^1 f(x)\,dx = h\left[\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}\right]$$

$$h = 0.25$$

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 0.25\left[\frac{1 + 0.36788}{2} + 0.7788 + 0.60653 + 0.47237\right]$$

$$= 0.63541$$

7.3 Tính gần đúng tích phân

Tích phân hình thang

Ví dụ 6.5: Tính tích phân hình thang cho công thức sau với *n* = 10. Tính sai số.

$$I = \int_0^1 e^x dx$$

Giải:

h = 0.1

x	f(x)	y
0	1	y0
0.1	1.105170918	y1
0.2	1.221402758	y2
0.3	1.349858808	y3
0.4	1.491824698	y4
0.5	1.648721271	y5
0.6	1.8221188	y6
0.7	2.013752707	y7
0.8	2.225540928	y8
0.9	2.459603111	y9
1	2.718281828	y10

$$\int_0^1 e^x dx \approx 0.1 \times (\frac{1 + 2.718281828}{2} +$$
$$+1.105170918 + 1.221402758 +$$
$$+1.349858808 + 1.491824698 +$$
$$+1.648721271 + 1.8221188 +$$
$$+2.013752707 + 2.225540928 +$$
$$+2.459603111)$$

7.3 Tính gần đúng tích phân

Tích phân hình thang

Ví dụ 7.5: Tính tích phân hình thang cho công thức sau với n = 10. Tính sai số.

$$I = \int_0^1 e^x dx$$

Giải:

Sai số:

$$f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x, \quad f''(x) = e^x, \quad f^{(4)}(x) = e^x$$

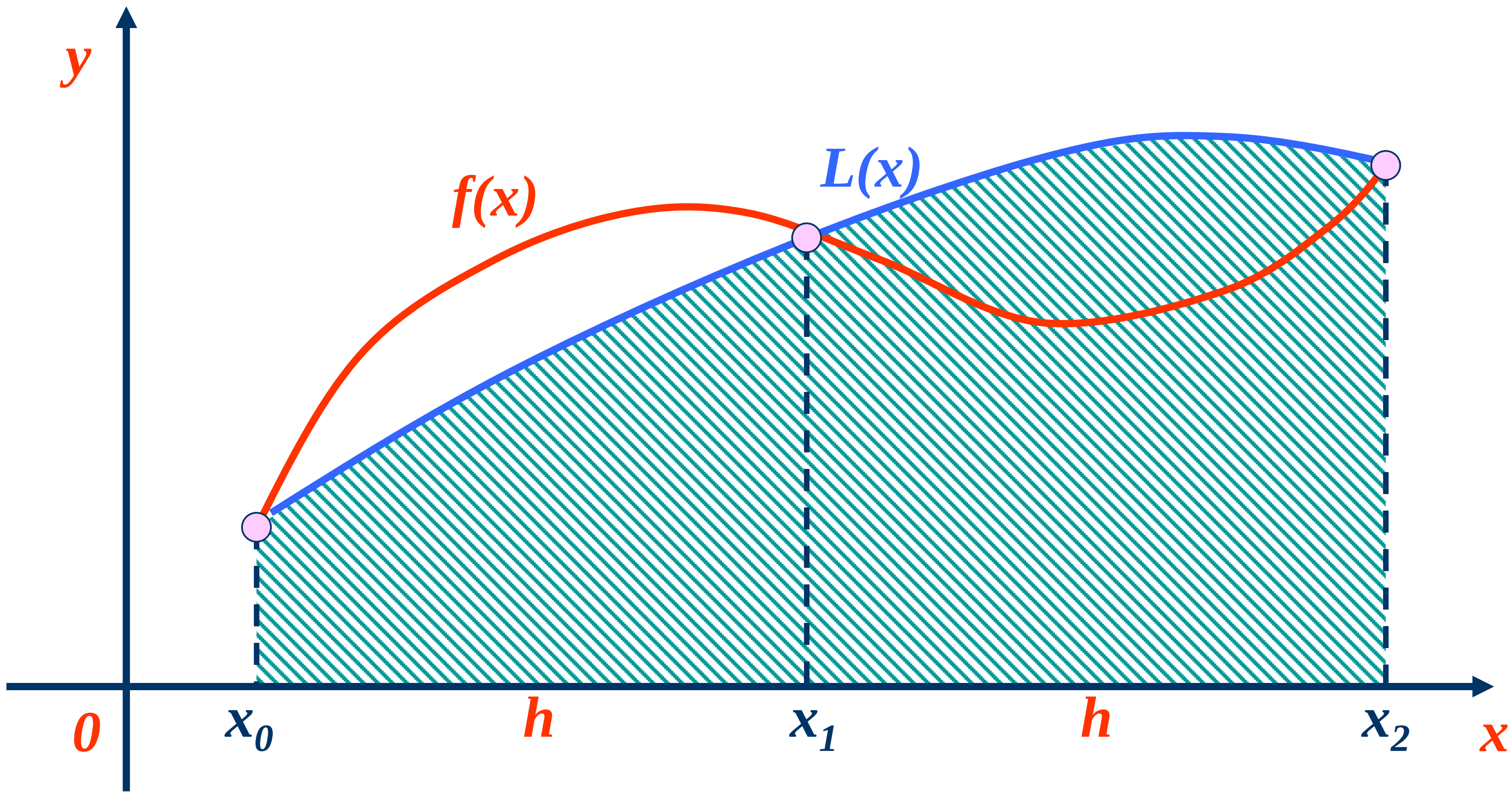
$$\max_{x\in[0,1]} \left| f''(x) \right| = f''(1) = e$$

$$\Delta = \frac{h^2 (b-a) M_2}{12} = \frac{e}{12n^2}$$

7.3 Tính gần đúng tích phân

Tích phân Simpson

Thay vì tính tích phân hàm *f*(x), công thức này tính tích phân đa thức nội suy *L*(x).



7.3 Tính gần đúng tích phân

Tích phân Simpson

Ta chia [a, b] thành **2*n*** đoạn con bằng nhau bởi các điểm chia x_i:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

$$x_i = a + ih, h = \frac{(b-a)}{2n}, i = 0,1,\ldots,2n$$

Đặt $y_i = f(x_i)$. Ta có:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + \ldots + \int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} f(x)dx \qquad (7.38)$$

Đối với về phải, mỗi tích phân ta thay hàm $f(x)$ bằng một đa thức Newton bậc hai $p_2(x)$.

7.3 Tính gần đúng tích phân

Tích phân Simpson

Chia đoạn [*a*, *b*] làm *2n* đoạn bằng nhau, độ dài $h = \frac{b-a}{2n}$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\left[(y_0 + y_{2n}) + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2n-2})\right]$$

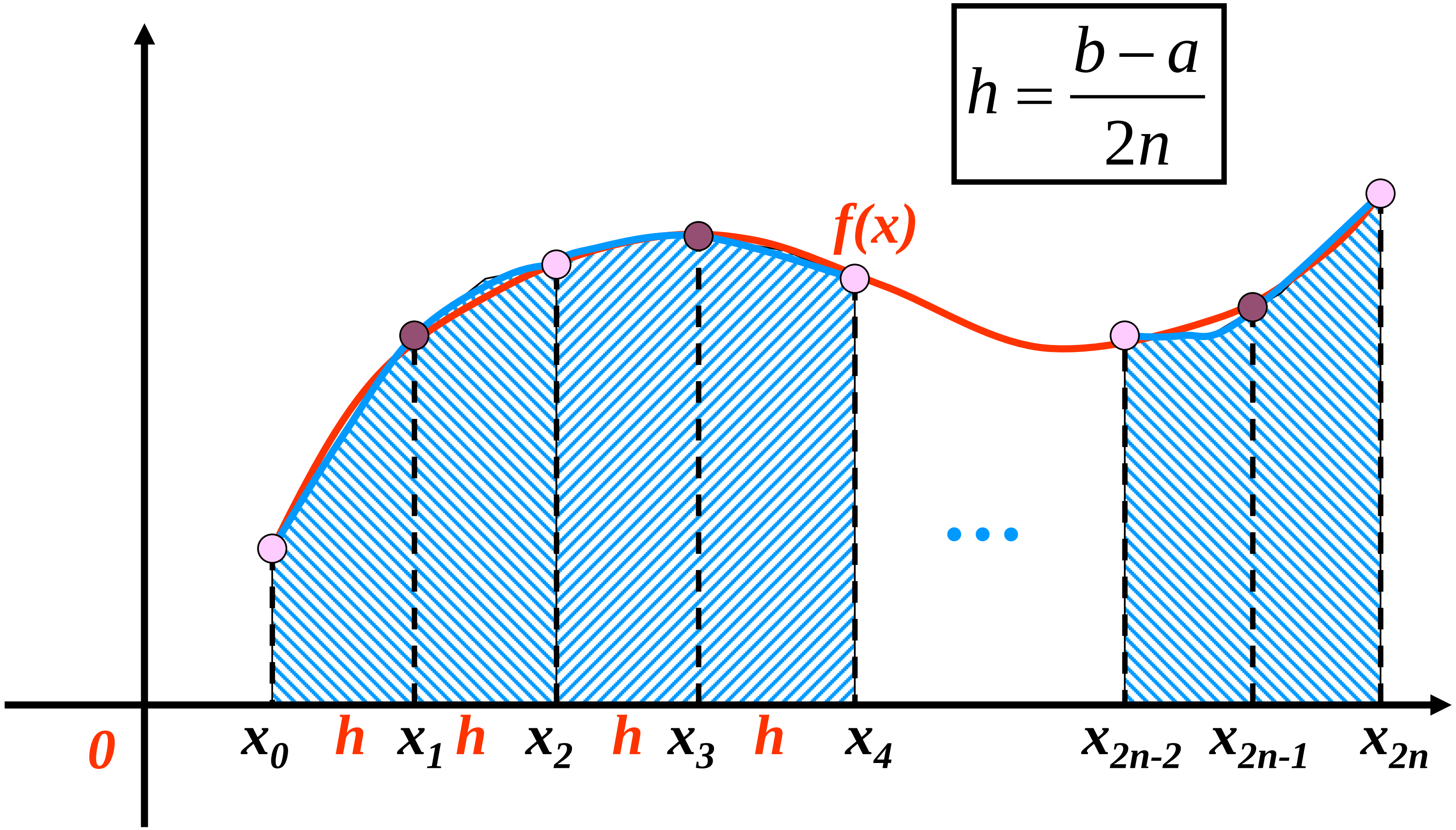
$$\approx \frac{h}{3}\left[y_0 + 4\left(\sum_{k=1}^{n} y_{2k-1}\right) + 2\left(\sum_{k=1}^{n-1} y_{2k}\right) + y_{2n}\right] \qquad (7.39)$$

Sai số $\frac{h^4(b-a)M_4}{180}$ $M_4 = \max_{x\in[a,b]}\left|f^{(4)}(x)\right|$ (7.40)

7.3 Tính gần đúng tích phân

Tích phân Simpson

Về mặt hình học:



7.3 Tính gần đúng tích phân

Tích phân Simpson

Ví dụ 6.6: Tính tích phân Simpson cho công thức sau với *n* = 5. Tính sai số.

$$I=\int_0^1 e^x dx$$

Giải:

h = 0.1

x	f(x)	y
0	1	y0
0.1	1.105170918	y1
0.2	1.221402758	y2
0.3	1.349858808	y3
0.4	1.491824698	y4
0.5	1.648721271	y5
0.6	1.8221188	y6
0.7	2.013752707	y7
0.8	2.225540928	y8
0.9	2.459603111	y9
1	2.718281828	y10

$$\int_0^1 e^x dx \approx \frac{0.1}{3}\times(1+2.718281828+$$

$$+4\times(1.105170918+1.349858808+$$

$$+1.648721271+2.013752707+$$

$$2.459603111)+2\times(1.221402758$$

$$+1.491824698+1.8221188+$$

$$+2.225540928))$$

7.3 Tính gần đúng tích phân

Tích phân Simpson

Ví dụ 6.6: Tính tích phân Simpson cho công thức sau với *n* = 5. Tính sai số.

$$I = \int_0^1 e^x dx$$

Giải:

Sai số:

$$f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x, \quad f''(x) = e^x, \quad f^{(4)}(x) = e^x$$

$$\max_{x\in[0,1]} \left| f^{(4)}(x) \right| = f^{(4)}(1) = e$$

$$\Delta = \frac{h^4 (b-a) M_4}{180} = \frac{e}{180 n^4}$$

Bài tập

Bài 1. Cho hàm số f(x) dạng bảng dưới đây. Tính tích phân hình thang và Simpson.

x	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8
y	16.23	18.55	17.42	15.59	17.78	18.73	19.81

Bài 2. Cho tích phân I. Hãy tính tích phân xấp xỉ hình thang và Simpson với n = 10.

$$I = \int_{1.1}^{2.3} \ln\sqrt{2x+2}\,dx$$