Bài 5 Trị riêng và vector riêng

Bài 5 Trị riêng và vector riêng

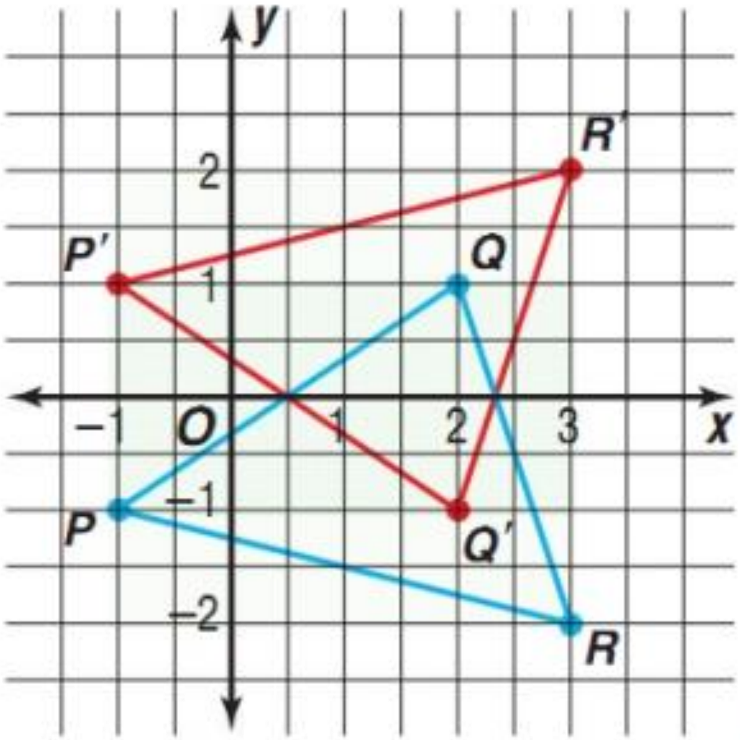
5.1. Đặt vấn đề

5.2. Trị riêng, vector riêng

5.3. Phương pháp Đanhilepski

5.1 Đặt vấn đề

Lĩnh vực đồ họa hoạt hình trên máy tính



$\triangle PQR \to \triangle P'Q'R'$

bằng cách lấy đối xứng qua trục Ox.

5.1 Đặt vấn đề

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ là ma trận của phép biến đổi.

Như vậy, với một điểm bất kỳ trong mặt phẳng có tọa độ (x_1, x_2) qua phép biến đổi này ta sẽ thu được một điểm mới có tọa độ (y_1, y_2)

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}$$

Câu hỏi: Nếu thực hiện phép biến đổi này liên tiếp đối với điểm (x_1, x_2) có nghĩa là $A^k . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ thì tọa độ của điểm mới được tính như thế nào?

5.1 Trị riêng

Định nghĩa

Cho ma trận vuông $A \in M_{n\times n}(K)$*. Nếu tồn tại* $X \in K^n, X \neq 0$ *sao cho* $AX = \lambda.X, \lambda \in K$ *thì* λ *được gọi là trị riêng của ma trận* A *và* X *được gọi là véctơ riêng của ma trận* A *ứng với trị riêng* λ*.*

Ví dụ

Tìm trị riêng, véctơ riêng của ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

5.2 Trị riêng và vector riêng

Biểu thức $AX = \lambda X$ có dạng

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 2 & 3-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$ Hệ phương trình thuần nhất này phải có nghiệm $X \neq 0$ nên

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 5.$$

5.2 Trị riêng và vector riêng

Ứng với $\lambda_1 = -1$. Ta có

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 = -2\alpha, x_2 = \alpha.$$

Vậy véctơ riêng có dạng $\alpha(-2, 1), \alpha \neq 0$.

Ứng với $\lambda_2 = 5$. Ta có

$$\begin{cases} -4x_1 + 4x_2 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 = \beta, x_2 = \beta.$$

Vậy véctơ riêng có dạng $\beta(1, 1), \beta \neq 0$.

5.2 Trị riêng và vector riêng

Ví dụ

Tìm trị riêng, véctơ riêng của ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Biểu thức $AX = \lambda X$ có dạng

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -2 & 1-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$. Hệ phương trình thuần nhất này phải có nghiệm $X \neq 0$ nên

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)^2 + 4 = 0$$

$\Leftrightarrow \lambda_{1,2} = 1 \pm 2i.$

5.2 Trị riêng và vector riêng

Ứng với $\lambda_1 = 1 + 2i$. Ta có

$$\begin{cases} -2ix_1 + 2x_2 = 0 \\ -2x_1 - 2ix_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 = \alpha, x_2 = \alpha i.$$

Vậy véctơ riêng có dạng $\alpha(1, i), \alpha \neq 0$.

Ứng với $\lambda_2 = 1 - 2i$. Ta có

$$\begin{cases} 2ix_1 + 2x_2 = 0 \\ -2x_1 + 2ix_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 = \beta, x_2 = -\beta i.$$

Vậy véctơ riêng có dạng $\beta(1, -i), \beta \neq 0$.

5.2 Trị riêng và vector riêng

Đa thức đặc trưng

Giả sử λ là trị riêng của ma trận vuông A
$\Leftrightarrow \exists X \neq 0 : AX = \lambda.X$
$\Leftrightarrow AX - \lambda X = 0 \Leftrightarrow (A - \lambda I).X = 0$. Hệ thuần nhất này có nghiệm không tầm thường
$X \neq 0 \Rightarrow det(A - \lambda I) = 0$

Định nghĩa

*Cho $A \in M_{n \times n}(K)$, I là ma trận đơn vị cấp **n**. Khi đó $\chi_A(\lambda) = \mathbf{det}(A - \lambda I)$ được gọi là đa thức đặc trưng của ma trận A.Phương trình $\mathbf{det}(A - \lambda I) = 0$ được gọi là phương trình đặc trưng của ma trận A.*

5.2 Trị riêng và vector riêng

Đa thức đặc trưng

Tìm trị riêng-véc tơ riêng của ma trận vuông

Bước 1. Lập phương trình đặc trưng

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Bước 2. Giải phương trình đặc trưng tìm trị riêng.

Bước 3. Với mỗi trị riêng λ_i, giải hệ

$$(A - \lambda_i I)X = 0:$$

Tìm véc tơ riêng X ứng với trị riêng λ_i.

5.2 Trị riêng và vector riêng

Đa thức đặc trưng

Định lý

$$Cho\ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in M_3(K),\ khi\ đó$$

$$\chi_A(\lambda) = |A - \lambda I| = -\lambda^3 + tr(A)\lambda^2 -$$

$$-\left(\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \right) \lambda + det(A)$$

ở đây $tr(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33}$ − *vết của ma trận* A.

5.2 Trị riêng và vector riêng

Tính chất của vector riêng

Định nghĩa

Các véctơ riêng ứng với trị riêng λ cùng với véctơ $\mathbf{0}$ *tạo thành 1 không gian con được gọi là không gian con riêng ứng với λ. Kí hiệu E_λ*

Định nghĩa

Số chiều của không gian con riêng ứng với trị riêng λ được gọi là bội hình học của trị riêng λ. Còn bội đại số của λ là bội của nghiệm của phương trình đặc trưng $\chi_A(\lambda) = 0$.

5.2 Trị riêng và vector riêng

Tính chất của vector riêng

Ví dụ

Cho $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

1. *Lập đa thức đặc trưng của* A
2. *Tính* $\mathbf{det}(A - 2013.I)$
3. *Tìm trị riêng, véctơ riêng của ma trận*

5.2 Trị riêng và vector riêng

Tính chất của vector riêng

1. Đa thức đặc trưng của ma trận A

$$\chi_A(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -(\lambda - 2)^2(\lambda - 6)$$

2. $det(A - 2013.I) = -(2013 - 2)^2(2013 - 6)$

3. Phương trình đặc trưng của A

$$\chi_A(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow -(\lambda - 2)^2(\lambda - 6) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 6.$$

5.2 Trị riêng và vector riêng

Tính chất của vector riêng

Ứng với $\lambda_1 = 2$ ta xét hệ

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow X_1 = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha^2 + \beta^2 \neq 0.$$

Bội đại số của $\lambda_1 = 2$ là 2. Bội hình học của $\lambda_1 = 2$ cũng là 2.

5.2 Trị riêng và vector riêng

Tính chất của vector riêng

Ứng với $\lambda_2 = 6$ ta xét hệ

$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow X_2 = \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \gamma \neq 0$. Bội đại số của $\lambda_2 = 6$ là 1. Bội hình học của $\lambda_2 = 6$ cũng là 1.

5.3 Phương pháp Đanhilepski

Ma trận đồng dạng

Định nghĩa

Ma trận B gọi là đồng dạng với ma trận A ($B \sim A$) nếu tồn tại ma trận không suy biến M ($\det(M) \neq 0$) sao cho $B = M^{-1} A M$

Tính chất:

$A \sim B \Rightarrow B \sim A$

$A \sim B, B \sim C \Rightarrow A \sim C$

$A \sim B \Rightarrow$ giá trị riêng λ của A và B trùng nhau.

5.3 Phương pháp Đanhilepski (tìm giá trị riêng)

Nội dung phương pháp

Thực hiện n-1 lần biến đổi:

* Lần biến đổi 1: Tìm M^{-1}, M sao cho $A_1 = M^{-1} A M \sim A$

và dòng n của A_1 có dạng: 0 0 0 ... 1 0

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad M^{-1}_{n-1j} = a_{nj}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{-a_{n1}}{a_{nn-1}} & \frac{-a_{n2}}{a_{nn-1}} & & \frac{1}{a_{nn-1}} & \frac{-a_{nn}}{a_{nn-1}} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_{n-1j} = \begin{cases} \dfrac{1}{a_{nn-1}} & \text{nếu } j = n-1 \\ \dfrac{-a_{nj}}{a_{nn-1}} & \text{nếu } j \# n-1 \end{cases}$$

$$A_1 = M_{-1} A M \sim A$$

5.3 Phương pháp Đanhilepski (tìm giá trị riêng)

* Lần biến đổi 2: Chọn M_{-1}, M sao cho $A_2 = M_{-1}\, A_1\, M \sim A_1$

và dòng n-1 của A_2 có dạng: $0 \quad 0 \quad 0 \; \ldots \; 1 \quad 0 \quad 0$

$A_2 \sim A_1$, $A_1 \sim A$ => $A_2 \sim A$ (tính chất)

* Lần biến đổi thứ n-1

Ta nhận được ma trận $A_{n-1} \sim A$ và A_{n-1} có dạng của P.

Khi đó định thức

$$\det(P-\lambda E) = (-1)^n (\lambda^n - p_1 \lambda^{n-1} - \ldots - p_{n-1}\lambda - p_n)$$

$$\det(p-\lambda E) = 0 \quad \Leftrightarrow \lambda^n - p_1 \lambda^{n-1} - \ldots - p_{n-1}\lambda - p_n = 0$$

Giải phương trình, suy ra λ

5.3 Phương pháp Đanhilepski (tìm giá trị riêng)

Ví dụ 1. Tìm giá trị riêng của ma trận:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 2 \end{pmatrix} \quad n = 3$$

ta tìm:

$$P = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & P_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Lần 1: Chọn

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_1 = M^{-1} A\, M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ \boxed{1} & 5 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

5.3 Phương pháp Đanhilepski (tìm giá trị riêng)

Lần 2: Chọn

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{matrix} 1 & -5 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

$$A_2 = M^{-1}A_1M = \begin{pmatrix} 7 & -14 & 8 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = P$$

Giá trị riêng λ là nghiệm phương trình: $\lambda^3 - 7\lambda^2 + 14\lambda - 8 = 0$

$\Leftrightarrow (\lambda-2)(\lambda-1)(\lambda-4) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2; \lambda=1; \lambda=4$

5.3 Phương pháp Đanhilepski (tìm giá trị riêng)

Thuật toán

- Nhập n, a_{ij} (i,j = 1→n)
- Khai báo hàm nhân 2 ma trận vuông cấp n

  $$(C = A \times B \Rightarrow c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \times b_{kj} \quad)$$

- Lặp k = n -1 → 1 (phần tử biến đổi : $a_{k+1\,k}$)

```
/* Tính 2 ma trận M, M1 (M1 la ma tran nghich dao cua M) */
    for i = 1 → n
      for j = 1  n
        if  i ≠ k
            if  i = j   {M[i,j] = 1;  M1[i,j]  = 1 }
            else        {M[i,j] = 0; M1[i,j]  = 0 }
        else  { M1[i,j]  = a[k+1,j]
             if  (j = k)      M[i,j] = 1/a[k+1,k]
             else    M[i,j]  = - a[k+1,j]/a[k+1,k]  }
/* Gọi hàm nhân 2 lần  */
    Lần 1 : vào A, M;   ra  B
    Lần 2 : vào M1; B;   ra  A
```

- Xuất a_{ij} (i,j = 1→n)

❖ Thuật toán nhân 2 ma trận

```
for (i=1, i < = n; i++)
  for (j=1; j< = n; j++)  {
    c[i] [j] = 0
    for (k=1;  k < = n; k++)   c[i] [j] + = a [i] [k] * b [k] [j]
  }
```

5.3 Phương pháp Đanhilepski (tìm vector riêng)

Xây dựng công thức

Gọi $\vec{y}$ là vectơ riêng của ma trận P ~ A

Ta có: $(P - \lambda E)\vec{y} = 0$

$$P\vec{y} = \lambda E\vec{y}$$

$$M^{-1}.A.M.\vec{y} = \lambda E\vec{y}$$

Nhân 2 vế cho M:

$$M\ M^{-1}\ A\ M\ \vec{y} = M\ \lambda E\vec{y}$$

$$A\ M\ \vec{y} = \lambda\ E\ M\vec{y}$$

Đặt $\vec{x} = M\vec{y}$

$$A\ \vec{x} = \lambda E\vec{x}$$

$$(A - \lambda E)\ \vec{x} = 0$$

Vậy $\vec{x} = M\vec{y}$ là vectơ riêng của A

$$P = M_{n-1}^{-1}.M_{n-2}^{-1}...M_1^{-1}.A.M_1.M_2.M_{n-1}$$

M_i: Ma trận M xác định được ở lần biến đổi thứ i

và $M = M_1 M_2 \ldots M_{n-1}$

5.3 Phương pháp Đanhilepski (tìm vector riêng)

Xác định $\vec{y}$

$$(P-\lambda E)\vec{y} = 0$$

$$\begin{pmatrix} p_1-\lambda & p_2 & \dots & p_{n-1} & p_n \\ 1 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \dots\dots & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} (p_1-\lambda)y_1 + p_2y_2 + \dots + p_{n-1}y_{n-1} + p_ny_n = 0 \\ y_1 - \lambda y_2 = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_{n-1} - \lambda y_n = 0 \end{cases}$$

cho: $y_n = 1 \Rightarrow y_{n-1} = \lambda$,

$y_{n-2} = \lambda\, y_{n-1} = \lambda^2$, ..., $y_1 = \lambda^{n-1}$

Vậy $\vec{y} = (\lambda^{n-1}, \lambda^{n-2}, \dots, \lambda^2, \lambda, 1)$

5.3 Phương pháp Đanhilepski (tìm vector riêng)

Ví dụ 2. Tìm vectơ riêng của A

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Giải: Gọi $\vec{y}$ là vectơ riêng của ma trận P ~ A

Ở ví dụ 1 ta có:

$\lambda_1 = 2 \Rightarrow \vec{y}_1 = (4, 2, 1)$

$\lambda_2 = 1 \Rightarrow \vec{y}_2 = (1, 1, 1)$

$\lambda_3 = 4 \Rightarrow \vec{y}_3 = (16, 4, 1)$

5.3 Phương pháp Đanhilepski (tìm vector riêng)

Tìm M:

$$M = M_1^1 . M_2^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -5 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = M \vec{y}$$

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 16 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vậy vectơ riêng của A:

$\vec{x}_1 = (-1, 0, 1)$ $\vec{x}_2 = (1, -1, 1)$ $\vec{x}_3 = (1, 2, 1)$

5.3 Phương pháp Đanhilepski (tìm vector riêng)

Bổ sung thêm lệnh trong thuật toán tìm trị riêng như sau:

- Khởi tạo B1 = E
- Lặp k = n-1 $\rightarrow$ 1

  /* Tính 2 ma trận M, M1 */

  /* Gọi hàm nhân 3 lần */

  Lần 1: vào A, M; ra B

  Lần 2: vào M1, B; ra A

  Lần 3: vào B1, M; ra B

  /* Gán lại ma trận B1=B */
- Xuất a_{ij}, b_{ij}