Chương 4 Ma trận và hệ phương trình tuyến tính

Khoa Công nghệ thông tin

Trường đại học công nghiệp – Hà Nội

Chương 4 Ma trận và hệ phương trình tuyến tính

4.1. Một số khái niệm về véc tơ và ma trận

4.2. Hệ phương trình đại số tuyến tính

4.3. Vector riêng và giá trị riêng

Bài tập

4.1 Một số kiến thức cơ bản về véc tơ và ma trận

Véc tơ (Vector) là một đoạn thẳng có hướng (dãy số có thứ tự : véc tơ hàng và véc tơ cột).

Véc tơ cột

$$u = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Véc tơ hàng

$$v = \begin{pmatrix} 8 & 12 & 5 \end{pmatrix}$$

a là 1 hằng số khác 0

$$au = \begin{pmatrix} 3a \\ 2a \\ 6a \end{pmatrix} \qquad av = \begin{pmatrix} 8a & 12a & 5a \end{pmatrix}$$

$$u_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \qquad u_2 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$v = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} \qquad u = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

$$u_1 + u_2 = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$$

$$vu = \begin{pmatrix} v_1 a_1 & v_2 a_2 & v_3 a_3 \end{pmatrix}$$

4.1 Một số kiến thức cơ bản về véc tơ và ma trận

Trong toán học, ma trận là một mảng chữ nhật.

Ma trận m hàng, n cột

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Ma trận vuông n hàng, n cột

$$B_{n\times n} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

Ma trận cột (vector) và ma trận chuyển vị

$$X_{m\times 1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_m \end{pmatrix} = \left(x_1\ x_2\ \dots\ x_m\right)^T$$

Ma trận đường chéo

$$A_{n\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

4.1 Một số kiến thức cơ bản về véc tơ và ma trận

Ma trận tam giác trên

$$A_{n\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Ma trận tam giác dưới

$$A_{n\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Ma trận đơn vị

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Ma trận đối xưng

$$A_{n\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & x_{12} & \dots & y_{1n} \\ x_{21} & a_{22} & \dots & z_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{n1} & z_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

4.1 Một số kiến thức cơ bản về véc tơ và ma trận

Tính định thức của ma trận

Để đơn gian chúng ta gọi các ma trận là A, B, … không có chỉ số hàng × cột

Định thức, trong đại số tuyến tính, là một hàm cho mỗi **ma trận vuông** A, tương ứng với một số vô hướng, ký hiệu là det(A).

Định thức (gọi là det) của 1 ma trận cấp 2

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Ví dụ 4.1.1

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = 4 * 5 - 2 * 1 = 18$$

4.1 Một số kiến thức cơ bản về véc tơ và ma trận

Tính định thức của ma trận

Định thức của 1 ma trận cấp 3

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\det(A) = a_{11}\det\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{12}\det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{13}\det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

4.1 Một số kiến thức cơ bản về véc tơ và ma trận

Tính định thức của ma trận

Ví dụ 4.1.2

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 2\times 1\times 6 - 2\times 2\times 3 + 1\times 4\times 6 - 1\times 2\times 1 + 5\times 4\times 3 - 5\times 1\times 1$$

$$= 12 - 12 + 24 - 2 + 60 - 5 = 74$$

4.1 Một số kiến thức cơ bản về véc tơ và ma trận

Tính định thức của ma trận

Định thức của 1 ma trận cấp n

$$\det(A) = a_{11}\det(M_{11}) - a_{12}\det(M_{12}) + \ldots + (-1)^{1+n} a_{1n}\det(M_{1n})$$

a_{11}, a_{12}, ..., a_{1n} là các phần tử nằm trong hàng 1 của ma trận A.

4.1 Một số kiến thức cơ bản về véc tơ và ma trận

Chuẩn vector và chuẩn ma trận

- Không gian tuyến tính thực R^n.
- Chuẩn của vector $x \in R^n$ là một số thực $\|x\|$ thỏa
  - $\forall x \in R^n$, $\|x\| \geq 0$; $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
  - $\forall x \in R^n$, $\forall \lambda \in R$, $\|\lambda x\| = |\lambda| \bullet \|x\|$
  - $\forall x, y \in R^n$, $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (bất đẳng thức tam giác)
- Xét chuẩn thường dùng sau:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Chuẩn cột $$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n| = \sum_{k=1}^{n} |x_k|$$

Chuẩn Euclid $$\|x\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2} = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 \right)^{1/2}$$

Chuẩn hàng $$\|x\|_\infty = \max\left(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\right) = \max_{k=\overline{1,n}} |x_k|$$

4.5 Hệ phương trình đại số tuyến tính

Chuẩn vector và chuẩn ma trận

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Chuẩn cột $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n| = \sum_{k=1}^{n} |x_k|$

Chuẩn Euclid $\|x\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \ldots + |x_n|^2} = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k| \right)^{1/2}$

Chuẩn hàng $\|x\|_\infty = \max\left(|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\right) = \max_{k=\overline{1,n}} |x_k|$

$$x = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} \|x\|_1 = 10 \\ \|x\|_2 = \sqrt{38} \\ \|x\|_\infty = 5 \end{cases}$$

4.5 Hệ phương trình đại số tuyến tính

Chuẩn vector và chuẩn ma trận

Ta nói chuẩn của ma trận A là một trong các số sau

$$\|A\|_1 = \max_{j=1,\dots,n} \left\{ \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}| \right\} \quad \text{(gọi là chuẩn cột)}$$

Max của "tổng cột"

$$\|A\|_\infty = \max_{i=1,\dots,m} \left\{ \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right\} \quad \text{(gọi là chuẩn hàng)}$$

Max của "tổng hàng"

$$\|A\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|^2} \quad \text{(gọi là chuẩn Euclicd)}$$

4.1 Một số kiến thức cơ bản về véc tơ và ma trận

Chuẩn vector và chuẩn ma trận

Ví dụ 4.1.3

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & -5 \end{pmatrix}$$

Max của "tổng cột"

Ta có:

$$\begin{cases} \|A\|_1 = \max\{7,4,7\} = 7 \\ \|A\|_\infty = \max\{2,7,9\} = 9 \\ \|A\|_2 = \sqrt{1+0+1+16+4+1+4+4+25} = \sqrt{56} \end{cases}$$

Max của "tổng hàng"

4.2 Hệ phương trình đại số tuyến tính

Hệ n phương trình tuyến tính, n ẩn Dạng $Ax = b$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix}^T \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

4.2 Hệ phương trình đại số tuyến tính

- Đơn giản nhất: Ma trận đường chéo

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- Hệ tương đương với *n* phương trình bậc nhất

$$a_{ii}\ x_i = b_i \quad \forall i = \overline{1, n} \qquad\qquad x_i = \frac{b_i}{a_{ii}}$$

4.2 Hệ phương trình đại số tuyến tính

- Đơn giản: Ma trận tam giác trên

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_n = \dfrac{b_n}{a_{nn}} \\ x_k = \dfrac{1}{a_{kk}}\left(b_k - \displaystyle\sum_{j=k+1}^{n} a_{kj} x_j\right), \quad k = n-1, \dots, 1 \end{cases}$$

4.2 Hệ phương trình đại số tuyến tính

- Đơn giản: Ma trận tam giác dưới

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1}{a_{11}} \\ x_k = \dfrac{1}{a_{kk}}\left(b_k - \displaystyle\sum_{j=1}^{k-1} a_{kj} x_j\right), \quad k = 2, \dots, n \end{cases}$$

4.2 Hệ phương trình đại số tuyến tính

Sự hội tụ của dãy vector

Dãy các véctơ $\left\{x^{(k)}\right\}_{k=0}^{\infty}$ với $x^{(k)} \in R^{n}$ hội tụ về véctơ $\bar{x}$ khi $k \to +\infty$

$\Leftrightarrow \left\| x^{(k)} - \bar{x} \right\| \to 0$ khi $k \to +\infty$ (hội tụ theo chuẩn)

$$\lim_{k \to \infty} x^{(k)} = \bar{x}$$

4.2 Hệ phương trình đại số tuyến tính

4.2.1 Giải hệ phương trình bằng phương pháp lặp đơn

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad \text{(I)}$$

- Giả sử hệ phương trình (I) có nghiệm duy nhất.
- Biến đổi (I) được về dạng

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_{11}x_1 & + & \alpha_{12}x_2 & + & \cdots & + & \alpha_{1n}x_n & + & \beta_1 \\ x_2 = \alpha_{21}x_1 & + & \alpha_{22}x_2 & + & \cdots & + & \alpha_{2n}x_n & + & \beta_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ x_n = \alpha_{n1}x_1 & + & \alpha_{n2}x_2 & + & \cdots & + & \alpha_{nn}x_n & + & \beta_n \end{cases} \qquad \text{(II)}$$

4.2 Hệ phương trình đại số tuyến tính

4.2.1 Giải hệ phương trình bằng phương pháp lặp đơn

Đặt $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$

Khi đó (II) được viết dưới dạng $x = \alpha x + \beta$

- Chọn $x^{(0)} = \beta$. Tính các xấp xỉ nghiệm $x^{(n+1)}$ theo công thức

$$x^{(n+1)} = \alpha x^{(n)} + \beta, \quad n = 0,1,2,\ldots$$

- Đánh giá sai số $\Delta_{n+1} = \left\| x^{(n+1)} - x^* \right\|$ với x* là nghiệm đúng của hệ

$$\Delta_{n+1} \le \frac{\|\alpha\|}{1 - \|\alpha\|} \left\| x^{(n+1)} - x^{(n)} \right\|$$

Điều kiện hội tụ: $\|\alpha\|_p < 1 \Rightarrow \|\alpha\|_\infty < 1$

4.2 Hệ phương trình đại số tuyến tính

Ví dụ 4.2.1

Giải gần đúng hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} 10x - 2y - 3z = 20 \\ -2x + 20y - 5z = 40 \\ x - 3y + 10z = 8 \end{cases} \qquad \text{(I)}$$

Thỏa yêu cầu sau số 10^{-2}

Giải

Bước 1: *Kiểm tra hệ có nghiệm duy nhất*

Ta có $\begin{vmatrix} 10 & -2 & -3 \\ -2 & 20 & -5 \\ 1 & -3 & 10 \end{vmatrix} = 1862 \neq 0$. Vậy hệ có nghiệm duy nhất

4.2 Hệ phương trình đại số tuyến tính

Ví dụ 4.2.1

Bước 2: *Tính gần đúng và đánh giá sai số*

Biến đổi (I) được về dạng

$$\begin{cases} x = 0x + 0.2y + 0.3z + 2 \\ y = 0.1x + 0y + 0.25z + 2 \\ z = -0.1x + 0.3y + 0z + 0.8 \end{cases} \qquad \text{(II)}$$

Đặt

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0.2 & 0.3 \\ 0.1 & 0 & 0.25 \\ -0.1 & 0.3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0.8 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Khi đó (II) được viết dưới dạng

$$x = \alpha x + \beta$$

Ta có $\|\alpha\|_\infty = \max\{0.5, 0.35, 0.4\} = 0.5 < 1$. Vậy ma trận α thỏa điều kiện hội tụ .

4.2 Hệ phương trình đại số tuyến tính

Ví dụ 4.2.1

Đặt $X^{(0)} = \beta = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0.8 \end{pmatrix}$. Ta tính nghiệm xấp xỉ $X^{(n+1)}$, $n = 0,1,2,\dots$ theo công thức

$$\begin{cases} x^{(1)} = \alpha x^{(0)} + \beta = \begin{pmatrix} 0 & 0.2 & 0.3 \\ 0.1 & 0 & 0.25 \\ -0.1 & 0.3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0.8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0.8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.64 \\ 2.4 \\ 1.2 \end{pmatrix} \\ \Delta_1 \le \dfrac{\|\alpha\|_\infty}{1-\|\alpha\|_\infty}\left\|x^{(1)} - x^{(0)}\right\|_\infty \approx \dfrac{0.5}{1-0.5} \times 0.64 = 0.64 > 10^{-2} \end{cases}$$

4.2 Hệ phương trình đại số tuyến tính

Ví dụ 4.2.1

$$\begin{cases} x^{(2)} = \alpha x^{(1)} + \beta = \begin{pmatrix} 2.84 \\ 2.564 \\ 1.256 \end{pmatrix} \\ \Delta_2 \le \dfrac{\|\alpha\|_\infty}{1-\|\alpha\|_\infty} \left\| x^{(2)} - x^{(1)} \right\|_\infty \approx 0.2 > 10^{-2} \end{cases} ; \quad \begin{cases} x^{(3)} = \alpha x^{(2)} + \beta = \begin{pmatrix} 2.8896 \\ 2.598 \\ 1.2852 \end{pmatrix} \\ \Delta_3 \le \dfrac{\|\alpha\|_\infty}{1-\|\alpha\|_\infty} \left\| x^{(3)} - x^{(2)} \right\|_\infty \approx 0.05 > 10^{-2} \end{cases}$$

4.2 Hệ phương trình đại số tuyến tính

Ví dụ 4.2.1

$$\begin{cases} x^{(4)} = \alpha x^{(3)} + \beta = \begin{pmatrix} 2.90516 \\ 2.61026 \\ 1.29044 \end{pmatrix} \\ \Delta_4 \le \dfrac{\|\alpha\|_\infty}{1-\|\alpha\|_\infty}\left\|x^{(4)} - x^{(3)}\right\|_\infty \approx 0.02 > 10^{-2} \end{cases} ; \begin{cases} x^{(5)} = \alpha x^{(4)} + \beta = \begin{pmatrix} 2.909184 \\ 2.613126 \\ 1.292562 \end{pmatrix} \\ \Delta_5 \le \dfrac{\|\alpha\|_\infty}{1-\|\alpha\|_\infty}\left\|x^{(5)} - x^{(4)}\right\|_\infty \approx 4\times 10^{-3} < 10^{-2} \end{cases}$$

Vậy $x^{(5)}$ hay $\begin{cases} x = 2.909184 \\ y = 2.613126 \\ z = 1.292562 \end{cases}$ là xấp xỉ nghiệm thỏa yêu cầu sai số.

4.2 Hệ phương trình đại số tuyến tính

Ví dụ 4.2.2

Giải gần đúng hệ phương trình sau bằng phương pháp lặp đơn:

$$\begin{cases} 10x_1 + 3x_2 + x_3 = 7.5 \\ -3x_1 + 10x_2 - x_3 = 9 \\ -x_1 + 2x_2 + 8x_3 = -2.5 \end{cases}$$

So với nghiệm $\alpha = [0.5, 1, -0.5]^T$

4.2 Hệ phương trình đại số tuyến tính

Ví dụ 4.2.2

Giải:

Bước 1: Tính định thức

$$\begin{vmatrix} 10 & 3 & 1 \\ -3 & 10 & -1 \\ -1 & 2 & 8 \end{vmatrix} \neq 0$$

=> Hệ phương trình có nghiệm duy nhất

4.2 Hệ phương trình đại số tuyến tính

Ví dụ 4.2.2

Bước 2: Tính nghiệm gần đúng và sai số

$$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{3}{10}x_2 - \dfrac{1}{10}x_3 + \dfrac{7.5}{10} = -0.3x_2 - 0.1x_3 + 0.75 \\ x_2 = \dfrac{3}{10}x_1 + \dfrac{1}{10}x_3 + \dfrac{9}{10} = 0.3x_1 + 0.1x_3 + 0.9 \\ x_3 = \dfrac{1}{8}x_1 - \dfrac{2}{8}x_2 - \dfrac{2.5}{8} = 0.125x_1 - 0.25x_2 - 0.3125 \end{cases}$$

Đặt

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & -0.3 & -0.1 \\ 0.3 & 0 & 0.1 \\ 0.125 & -0.25 & 0 \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad \beta = \begin{pmatrix} 0.75 \\ 0.9 \\ -0.3125 \end{pmatrix}$$

$$\|\alpha\|_\infty = \max\{0.4; 0.4; 0.375\} = 0.4 < 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha \text{ hội tụ}$$

4.2 Hệ phương trình đại số tuyến tính

Ví dụ 4.2.2

Đặt

$$x^{(0)} = \beta = \begin{pmatrix} 0.75 \\ 0.9 \\ -0.3125 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x^{(1)} = \alpha x^{(0)} + \beta \\ \Delta_1 \le \dfrac{\|\alpha\|_\infty}{1-\|\alpha\|_\infty} \left\| x^{(1)} - x^{(0)} \right\|_\infty \end{cases} \qquad \begin{cases} x^{(2)} = \alpha x^{(1)} + \beta \\ \Delta_2 \le \dfrac{\|\alpha\|_\infty}{1-\|\alpha\|_\infty} \left\| x^{(2)} - x^{(1)} \right\|_\infty \end{cases}$$

4.2 Hệ phương trình đại số tuyến tính

4.2.2 Giải hệ phương trình bằng phương pháp lặp Jacobi

Ví dụ 4.2.3

Giải gần đúng hệ phương trình sau bằng phương pháp lặp Jacobi:

$$\begin{cases} 10x_1 + 3x_2 + x_3 = 7.5 \\ -3x_1 + 10x_2 - x_3 = 9 \\ -x_1 + 2x_2 + 8x_3 = -2.5 \end{cases}$$

Giải:

Bắt đầu với vectơ $x^{(0)} = [0, 0, 0]^T$, tìm vectơ nghiệm xấp xỉ $x^{(k)}$ của phép lặp Jacobi như sau:

4.2 Hệ phương trình đại số tuyến tính

4.2.2 Giải hệ phương trình bằng phương pháp lặp Jacobi

1) Tính x trên đường chéo chính: **⇒ Đưa về dạng x = αx + β**

$$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{3}{10}x_2 - \dfrac{1}{10}x_3 + \dfrac{7.5}{10} = -0.3x_2 - 0.1x_3 + 0.75 \\ x_2 = \dfrac{3}{10}x_1 + \dfrac{1}{10}x_3 + \dfrac{9}{10} = 0.3x_1 + 0.1x_3 + 0.9 \\ x_3 = \dfrac{1}{8}x_1 - \dfrac{2}{8}x_2 - \dfrac{2.5}{8} = 0.125x_1 - 0.25x_2 - 0.3125 \end{cases}$$

$$\alpha = \begin{bmatrix} 0 & -3/10 & -1/10 \\ 3/10 & 0 & 1/10 \\ 1/8 & -2/8 & 0 \end{bmatrix}, \quad \|\alpha\|_\infty = \max\left\{\frac{4}{10}, \frac{4}{10}, \frac{3}{8}\right\} = \frac{4}{10} < 1, \quad \beta = \begin{bmatrix} 0.75 \\ 0.9 \\ -0.3125 \end{bmatrix}$$

4.2 Hệ phương trình đại số tuyến tính

4.2.2 Giải hệ phương trình bằng phương pháp lặp Jacobi

2/ Từ $x^{(0)}$ tính $x^{(1)}$:

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = -0.3x_2^{(0)} - 0.1x_3^{(0)} + 0.75 = 0.75 \\ x_2^{(1)} = 0.3x_1^{(0)} + 0.1x_3^{(0)} + 0.9 = 0.9 \\ x_3^{(1)} = 0.125x_1^{(0)} - 0.25x_2^{(0)} - 0.3125 = -0.3125 \end{cases}$$

Tổng quát: $x^{(k)} \Rightarrow x^{(k+1)}$:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -0.3x_2^{(k)} - 0.1x_3^{(k)} + 0.75 \\ x_2^{(k+1)} = 0.3x_1^{(k)} + 0.1x_3^{(k)} + 0.9 \\ x_3^{(k+1)} = 0.125x_1^{(k)} - 0.25x_2^{(k)} - 0.3125 \end{cases}$$

Sai số: Như lặp đơn với $q = \|\alpha\|_\infty$: $\left\|x^{(k)} - x^*\right\|_\infty \le \dfrac{q}{1-q}\left\|x^{(1)} - x^{(0)}\right\|_\infty$

4.2 Hệ phương trình đại số tuyến tính

Ví dụ 4.2.4

Với vectơ $x^{(0)} = (0, 0, 0)^T$, tìm nghiệm xấp xỉ $x^{(k)}$ bằng phép lặp Jacobi của hệ phương trình sau và đánh giá sai số.

$$\begin{cases} 10x_1 + x_2 + x_3 = 7 \\ 2x_1 + 10x_2 - x_3 = 10 \\ 4x_1 - x_2 + 10x_3 = 11 \end{cases}$$

Nghiệm chính xác $x = (0.5, 1, 1)^T$

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|_\infty$
0	0	0	0	
1	0.7	1.0	1.1	1.1
2	0.49	0.97	0.92	0.21
3	0.511	0.994	1.001	0.081

4.2 Hệ phương trình đại số tuyến tính

4.2.3 Giải hệ phương trình bằng phương pháp lặp Gauss - Seidel

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad \text{(I)}$$

Nghiệm của phương trình (I) có dạng:

$$x_i = \beta_i + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j \qquad i = 1,\dots,n$$

Lấy xấp xỉ ban đầu tuỳ ý $x_1^{(o)}$, $x_2^{(o)}$,...., $x_n^{(o)}$

Lặp theo công thức dưới đây:

4.2 Hệ phương trình đại số tuyến tính

4.2.3 Giải hệ phương trình bằng phương pháp lặp Gauss - Seidel

Lặp theo công thức dưới đây:

$$x_1^{(k+1)} = \beta_1 + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j^{(k)}$$

$$x_2^{(k+1)} = \beta_1 + \alpha_{21} x_1^{(k+1)} + \sum_{j=2}^{n} \alpha_{ij} x_j^{(k)}$$

......

$$x_i^{(k+1)} = \beta_i + \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i}^{n} \alpha_{ij} x_j^{(k)}$$

......

$$x_n^{(k+1)} = \beta_n + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_{ij} x_j^{(k+1)} + \alpha_{nn} x_n^{(k)}$$

Chú ý:

- n bằng số cột của ma trận α
- Sai số có thể dùng công thức

$$||x^{(k)} - x^{(k-1)}||_\infty$$

4.2 Hệ phương trình đại số tuyến tính

4.2.3 Giải hệ phương trình bằng phương pháp lặp Gauss - Seidel

Trường hợp ma trận α được thực hiện như phương pháp 4.2.1 thì công thức như dưới đây:

$$x_1^{(k+1)} = \beta_1 - \sum_{j=1}^{n} \alpha_{1j} x_j^{(k)}$$

$$x_2^{(k+1)} = \beta_2 - \alpha_{21} x_1^{(k+1)} - \sum_{j=3}^{n} \alpha_{2j} x_j^{(k)}$$

$$x_3^{(k+1)} = \beta_3 - \alpha_{31} x_1^{(k+1)} - \alpha_{32} x_2^{(k+1)} - \sum_{j=4}^{n} \alpha_{3j} x_j^{(k)}$$

....

$$x_i^{(k+1)} = \beta_i - \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} \alpha_{ij} x_j^{(k)}$$

4.2 Hệ phương trình đại số tuyến tính

Ví dụ 4.2.5 Cho hệ phương trình :

$$\begin{cases} 10x_1 + x_2 + x_3 = 12 \\ 2x_1 + 10x_2 + x_3 = 13 \\ 2x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 14 \end{cases}$$

nghiệm đúng của hệ là (1 , 1, 1)

Giải:

Chuyển về hệ phương trình tương đương

$$\begin{cases} x_1 = 1.2 - 0.1x_2 - 0.1x_3 \\ x_2 = 1.3 - 0.2x_1 - 0.1x_3 \\ x_3 = 1.4 - 0.2x_1 - 0.2x_2 \end{cases}$$

Lấy $x_1^{(0)} = 0; x_2^{(0)} = 0; x_3^{(0)} = 0$

4.2 Hệ phương trình đại số tuyến tính

Ví dụ 4.2.5 Sử dụng phương pháp lặp Gauss - Seidel ta có:

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = 1.2 - 0.1\times 0 - 0.1\times 0 = 1.2 \\ x_2^{(1)} = 1.3 - 0.2\times 1.2 - 0.1\times 0 = 1.06 \\ x_3^{(1)} = 1.4 - 0.2\times 1.2 - 0.2\times 1.06 = 0.948 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = 1.2 - 0.1\times 1.06 - 0.1\times 0.948 = 0.9992 \\ x_2^{(2)} = 1.3 - 0.2\times 0.9992 - 0.1\times 0.948 = 1.00536 \\ x_3^{(2)} = 1.4 - 0.2\times 0.9992 - 0.2\times 1.00536 = 0.999098 \end{cases}$$

Sai số:

$$\Delta_2 = \left\| \begin{pmatrix} 0.9992 \\ 1.00536 \\ 0.999098 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1.2 \\ 1.06 \\ 0.948 \end{pmatrix} \right\|_\infty = \left\| \begin{matrix} -0.2008 \\ -0.05464 \\ 0.051098 \end{matrix} \right\|_\infty = 0.2008$$

4.2 Hệ phương trình đại số tuyến tính

Ví dụ 4.2.6

Tìm nghiệm xấp xỉ $x^{(k)}$ bằng phép lặp Gauss - Seidel của hệ phương trình sau với sai số bé hơn 10^{-2}

$$\begin{cases} 10x_1 + x_2 + x_3 = 7 \\ 2x_1 + 10x_2 - x_3 = 10 \\ 4x_1 - x_2 + 10x_3 = 11 \end{cases}$$

Nghiệm chính xác $x = (0.5, 1, 1)^T$

Giải:

Chuyển về phương trình tương đương

$$\begin{cases} x_1 = 0.7 - 0.1x_2 - 0.1x_3 \\ x_2 = 1 - 0.2x_1 + 0.1x_3 \\ x_3 = 1.1 - 0.4x_1 + 0.1x_2 \end{cases}$$

Lấy $x_1^{(0)} = 0; x_2^{(0)} = 0; x_3^{(0)} = 0$

4.2 Hệ phương trình đại số tuyến tính

Ví dụ 4.2.6

Sử dụng phép lặp Gauss - Seidel ta có:

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = 0.7 - 0.1\times 0 - 0.1\times 0 = 0.7 \\ x_2^{(1)} = 1 - 0.2\times 0.7 + 0.1\times 0 = 0.86 \\ x_3^{(1)} = 1.1 - 0.4\times 0.7 + 0.1\times 0.86 = 0.906 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = 0.7 - 0.1\times 0.86 - 0.1\times 0.906 = 0.5234 \\ x_2^{(2)} = 1 - 0.2\times 0.5234 + 0.1\times 0.906 = 0.98592 \\ x_3^{(2)} = 1.1 - 0.4\times 0.5234 + 0.1\times 0.98592 = 0.989232 \end{cases}$$

$$\Delta_2 = \left\| \begin{pmatrix} 0.5234 \\ 0.98592 \\ 0.989232 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.7 \\ 0.86 \\ 0.906 \end{pmatrix} \right\|_\infty = \left\| \begin{matrix} -0.1766 \\ 0.12592 \\ 0.083232 \end{matrix} \right\|_\infty = 0.1766 > 10^{-2}$$

4.2 Hệ phương trình đại số tuyến tính

Ví dụ 4.2.6

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = 0.7 - 0.1\times 0.86 - 0.1\times 0.906 = 0.5234 \\ x_2^{(2)} = 1 - 0.2\times 0.5234 + 0.1\times 0.906 = 0.98592 \\ x_3^{(2)} = 1.1 - 0.4\times 0.5234 + 0.1\times 0.98592 = 0.989232 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^{(3)} = 0.7 - 0.1\times 0.98592 - 0.1\times 0.989232 = 0.502485 \\ x_2^{(3)} = 1 - 0.2\times 0.502485 + 0.1\times 0.989232 = 0.998426 \\ x_3^{(3)} = 1.1 - 0.4\times 0.502485 + 0.1\times 0.998426 = 0.998849 \end{cases}$$

$$\Delta_3 = \left\| \begin{pmatrix} 0.502485 \\ 0.998426 \\ 0.998849 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.5234 \\ 0.98592 \\ 0.989232 \end{pmatrix} \right\|_\infty = \left\| \begin{matrix} -0.02092 \\ 0.012506 \\ 0.009617 \end{matrix} \right\|_\infty = 0.02092 > 10^{-2}$$

4.2 Hệ phương trình đại số tuyến tính

Ví dụ 4.2.6

$$\begin{cases} x_1^{(3)} = 0.7 - 0.1\times 0.98592 - 0.1\times 0.989232 = 0.502485 \\ x_2^{(3)} = 1 - 0.2\times 0.502485 + 0.1\times 0.989232 = 0.998426 \\ x_3^{(3)} = 1.1 - 0.4\times 0.502485 + 0.1\times 0.998426 = 0.998849 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^{(4)} = 0.7 - 0.1\times 0.998426 - 0.1\times 0.998849 = 0.5002725 \\ x_2^{(4)} = 1 - 0.2\times 0.5002725 + 0.1\times 0.998849 = 0.9998304 \\ x_3^{(4)} = 1.1 - 0.4\times 0.5002725 + 0.1\times 0.9998304 = 0.99987404 \end{cases}$$

$$\Delta_4 = \left\| \begin{pmatrix} 0.5002725 \\ 0.9998304 \\ 0.99987404 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.502485 \\ 0.998426 \\ 0.998849 \end{pmatrix} \right\|_\infty = \left\| \begin{matrix} -0.00221 \\ 0.001404 \\ 0.001025 \end{matrix} \right\|_\infty = 0.00221 < 10^{-2}$$

4.2 Hệ phương trình đại số tuyến tính

Ví dụ 4.2.6

Kết quả:

Nghiệm

$$\begin{cases} x_1 = 0.5002725 \\ x_2 = 0.9998304 \\ x_3 = 0.99987404 \end{cases}$$

Sai số

$$\Delta = 0.00221$$

4.3 Vector riêng và giá trị riêng

Định nghĩa

Cho A là ma trận vuông cấp n trên trường số K (K = R; C). Số λ ($\lambda \in K$) được gọi là giá trị riêng của ma trận A, nếu tồn tại một vectơ $u \neq 0$ ($u \in Kn$) sao cho $Au = \lambda u$.

Khi đó vectơ u được gọi là vectơ riêng của ma trận A ứng với giá trị riêng λ (lambda)

$$Au = \lambda u$$

hay $$(A - \lambda I)u = 0$$

Khi đó λ là nghiệm của phương trình: $\det(A - \lambda I) = 0$ (*)

Khai triên phương trình (*) ta nhận được phương trình đặc tính:

$$a_1\lambda^n + a_2\lambda^{n-1} + \cdots + a_n\lambda + a_{n+1} = 0$$

4.3 Vector riêng và giá trị riêng

Một số tính chất

- Giá trị riêng λ chính là nghiệm của phương trình phương trình đặc trưng của ma trận A det $(A - \lambda I) = 0$.
- Một giá trị riêng có thể có nhiều vectơ riêng.
- Mỗi vectơ riêng chỉ ứng với một giá trị riêng duy nhất.
- Ma trận A là nghiệm của đa thức đặc trưng của chính nó
- Nếu $\lambda = 0$ là giá trị riêng của ma trận A thì A không khả nghịch. Ngược lại, nếu mọi giá trị riêng của A đều khác không thì A khả nghịch.
- Nếu λ là giá trị riêng của ma trận A thì λ^k là giá trị riêng của ma trận A^k

4.3 Vector riêng và giá trị riêng

4.3.1 Tìm giá trị riêng và vector riêng dựa trên định nghĩa

Bước 1: Giải phương trình đặc trưng $\det(A - \lambda I) = 0$ để tìm giá trị riêng.

Bước 2: Tìm vector riêng ứng với giá trị riêng λ_i ta giải hệ phương trình tuyến tính thuần nhất: $(A - \lambda I)u = 0$

4.3 Vector riêng và giá trị riêng

4.3.1 Tìm giá trị riêng và vector riêng dựa trên định nghĩa (tiếp)

Ví dụ 4.3.1

Tìm giá trị riêng và vector riêng của ma trận A:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$$

Bước 1: Lập phương trình đặc trưng của ma trận A:

$$det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \left| \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 \\ 8 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (3-\lambda)(-1-\lambda) = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = -1 \end{cases}$$

4.3 Vector riêng và giá trị riêng

4.3.1 Tìm giá trị riêng và vector riêng dựa trên định nghĩa (tiếp)

Ví dụ 4.3.1 (tiếp)

Bước 2: Tìm các vector riêng

1. Ta tìm các vector riêng ứng với giá trị riêng $\lambda_1 = 3$.

Ứng với giá trị riêng $\lambda_1 = 3$ ta có vector riêng $u_1=(x;y)$ là nghiệm của hệ phương trình:

$$(A-\lambda_1 * I)u_1 = 0 \Leftrightarrow \left(\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\right)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 8 & -4 \end{bmatrix}\right)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 8x - 4y = 0 \Rightarrow 2x = 1y \Rightarrow x = 1; y = 2$$

Vậy VTR ứng với GTR $\lambda_1 = 3$ có dạng $u_1 = (1a;\ 2a) = (1;\ 2)a$ với $a \neq 0$.

4.3 Vector riêng và giá trị riêng

4.3.1 Tìm giá trị riêng và vector riêng dựa trên định nghĩa (tiếp)

Ví dụ 4.3.1 (tiếp)

Bước 2: Tìm các vector riêng

2. Ta tìm các vector riêng ứng với giá trị riêng λ_2 = -1.

Ứng với giá trị riêng λ_2 = -1 ta có vector riêng u_1=(x;y) là nghiệm của hệ phương trình:

$$(A-\lambda_2 * I)u_2 = 0 \Leftrightarrow \left(\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}\right)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 4x = 0 \\ 8x = 0 \end{cases}$$

Vậy VTR ứng với GTR λ_2 = -1 có dạng u_2 = (0a; Ka) = (0; K)a với K bất kỳ và a $\neq$ 0.

4.3 Vector riêng và giá trị riêng

4.3.2 Tìm phương trình đặc trưng theo phương pháp FADDEEV – LEVERIER

Cho ma trận A cấp n:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Các giá trị riêng của ma trận A là nghiệm của đa thức đặc trưng:

$$\det(A - \lambda I) = 0 \qquad (1)$$

Khi triển khai định thức trên, ta được đa thức cấp n:

$$P_n(\lambda) = \lambda^n - p_1\lambda^{n-1} - p_2\lambda^{n-2} - \dots p_n = 0 \qquad (2)$$

Gọi vết của ma trận là tổng các phần tử trên đường chéo chính:

$$trace(A) = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn} \qquad (3)$$

4.3 Vector riêng và giá trị riêng

4.3.2 Tìm phương trình đặc trưng theo phương pháp FADDEEV – LEVERIER (tiếp)

Các hệ số của đa thức (2) được xác định theo:

$$p_1 = trace(Y_1) \quad \boxed{Y_1 = A}$$

$$p_2 = \frac{1}{2} trace(Y_2) \quad Y_2 = A(Y_1 - p_1 I)$$

$$p_3 = \frac{1}{3} trace(Y_3) \quad Y_3 = A(Y_2 - p_2 I)$$

$$\dots$$

$$p_n = \frac{1}{n} trace(Y_n) \quad Y_n = A(Y_{n-1} - p_{n-1} I)$$

4.3 Vector riêng và giá trị riêng

4.3.2 Tìm phương trình đặc trưng theo phương pháp FADDEEV – LEVERIER (tiếp)

Ví dụ 4.3.2

Tìm giá phương trình đặc trưng của ma trận A bằng phương pháp Faddeev – Leverier:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$$

Giải:

$p_1 = \text{trace}(Y_1) = \text{trace}(A) = 3 + (-1) = 2$

$Y_2 = A(Y_1 - p_1 I) = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 8 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

$p_2 = 1/2\ \text{trace}(Y_2) = 1/2(3+3) = 3$

Vậy PT đặc trưng là: $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$

4.3 Vector riêng và giá trị riêng

4.3.2 Tìm phương trình đặc trưng theo phương pháp FADDEEV – LEVERIER (tiếp)

Ví dụ 4.3.3

Tìm giá phương trình đặc trưng của ma trận A bằng phương pháp Faddeev – Leverier:

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Giải:

p_1 = trace(Y_1) = trace(A) = -1 + 4 = 3

Y_2 = A(Y_1 – p_1I) = $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

p_2 =1/2 trace(Y_2) = 1/2(-2+ -2)= -2

Vậy PT đặc trưng là: $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1$ và $\lambda_2 = 2$

4.3 Vector riêng và giá trị riêng

4.3.2 Tìm phương trình đặc trưng theo phương pháp FADDEEV – LEVERIER (tiếp)

Ví dụ 4.3.4

Tìm giá phương trình đặc trưng của ma trận A bằng phương pháp Faddeev – Leverier:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Giải:

PT đặc trưng là: $\lambda^3 - 8\lambda^2 + 18\lambda - 9 = 0$

4.3 Vector riêng và giá trị riêng

4.3.2 Tìm phương trình đặc trưng theo phương pháp Danhilepski

Ma trận đồng dạng

Ma trận B gọi là đồng dạng với ma trận A (B ~ A) nếu tồn tại ma trận M không suy biến det(M) $\neq 0$ sao cho:

$$B = M^{-1}AM$$

Tính chất

$$A \sim B \Rightarrow B \sim A$$

$$A \sim B, B \sim C \Rightarrow A \sim C$$

$A \sim B \Rightarrow$ giá trị riêng λ của A và B trùng nhau.

4.3 Vector riêng và giá trị riêng

4.3.2 Tìm phương trình đặc trưng theo phương pháp Danhilepski

Nội dung phương pháp

Cho ma trận A cấp n, chúng ta **thực hiện n – 1 phép biến đổi** đồng dạng sau:

Giả sử ma trận cấp 4 như sau:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

Lần 1: Tìm M^{-1} và M sao cho $A_1 = M^{-1}AM \sim A$

4.3 Vector riêng và giá trị riêng

4.3.2 Tìm phương trình đặc trưng theo phương pháp Danhilepski

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & \boxed{a_{43}} & a_{44} \end{pmatrix}$$

$$M_{n-1j} = \begin{cases} \dfrac{1}{a_{nn-1}} & \text{nếu } j = n-1 \\ \dfrac{-a_{nj}}{a_{nn-1}} & \text{nếu } j \# n-1 \end{cases}$$

$$M^{-1}_{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 1 & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & 1 & a_{44} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\dfrac{a_{41}}{a_{43}} & -\dfrac{a_{42}}{a_{43}} & \dfrac{1}{a_{43}} & -\dfrac{a_{44}}{a_{43}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M^{-1}_{n-1j} = a_{nj}$$

4.3 Vector riêng và giá trị riêng

4.3.2 Tìm phương trình đặc trưng theo phương pháp Danhilepski

Lần 2: Tìm M^{-1} và M sao cho $A_2 = M^{-1}A_1M \sim A_1$

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & \boxed{a_{32}} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

$$M_{n-1j} = \begin{cases} \dfrac{1}{a_{nn-1}} & \text{nếu } j = n-1 \\ \dfrac{-a_{nj}}{a_{nn-1}} & \text{nếu } j \# n-1 \end{cases}$$

$$M_{(2)}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & 1 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\dfrac{a_{31}}{a_{32}} & \dfrac{1}{a_{32}} & -\dfrac{a_{33}}{a_{32}} & -\dfrac{a_{34}}{a_{32}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_{n-1j}^{-1} = a_{nj}$$

4.3 Vector riêng và giá trị riêng

4.3.2 Tìm phương trình đặc trưng theo phương pháp Danhilepski

Lần 3: Tìm M^{-1} và M sao cho $A_3 = M^{-1}A_2M \sim A_2$

$$A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \boxed{a_{21}} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

$$M_{n-1j} = \begin{cases} \dfrac{1}{a_{nn-1}} & \text{nếu } j = n-1 \\ \dfrac{-a_{nj}}{a_{nn-1}} & \text{nếu } j \# n-1 \end{cases}$$

$$M^{-1}_{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_{(3)} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{a_{21}} & -\dfrac{a_{22}}{a_{21}} & -\dfrac{a_{23}}{a_{21}} & -\dfrac{a_{24}}{a_{21}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M^{-1}_{n-1j} = a_{nj}$$

4.3 Vector riêng và giá trị riêng

4.3.2 Tìm phương trình đặc trưng theo phương pháp Danhilepski

Lần 3: Tìm M^{-1} và M sao cho $A_3 = M^{-1}A_2M \sim A_2$

Vì ma trận cấp 4 nên chúng ta dừng tại đây khi đó phương trình đặc trưng có dạng:

$$P_n(\lambda) = (-1)^n(\lambda^n - p_1\lambda^{n-1} - p_2\lambda^{n-2} - \ldots - p_n)$$

Với p_1, p_2,..., p_n được lấy từ ma trận A_3 như sau:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \end{array} \\ A_2 = & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \end{array}$$

4.3 Vector riêng và giá trị riêng

4.3.2 Tìm phương trình đặc trưng theo phương pháp Danhilepski

Ví dụ 4.3.5

Tìm giá phương trình đặc trưng của ma trận A bằng phương pháp Danhilepski:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 2 \end{pmatrix} \quad n = 3$$

Lần 1: Chọn

$$M_{(1)}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad M_{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_1 = M_{(1)}^{-1} A M_{(1)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4.3 Vector riêng và giá trị riêng

4.3.2 Tìm phương trình đặc trưng theo phương pháp Danhilepski

Ví dụ 4.3.5

Lần 2: Chọn

$$A_1 = M_{(1)}^{-1} A M_{(1)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ \boxed{1} & 5 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_{(2)}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad M_{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_2 = M_{(2)}^{-1} A_1 M_{(2)} = \begin{pmatrix} 7 & -14 & 8 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = P$$

Giá trị riêng λ là nghiệm phương trình: $\lambda^3 - 7\lambda^2 + 14\lambda - 8 = 0$

4.3 Vector riêng và giá trị riêng

4.3.2 Tìm phương trình đặc trưng theo phương pháp Danhilepski

Ví dụ 4.3.6

Tìm giá phương trình đặc trưng của ma trận A bằng phương pháp Danhilepski:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & -5 \end{pmatrix}$$

Bài tập

Giải hệ phương trình bằng 3 phương pháp lặp đơn, lặp Jacobi và Gauss – Seidel với sai số 10^{-3}.

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 6x_1 - 7x_2 + 14x_3 = 5 \\ 4x_1 - 8x_2 + 30x_3 = 14 \end{cases}$$

Nghiệm đúng:

$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bài tập

Giải hệ phương trình bằng 3 phương pháp lặp đơn, lặp Jacobi và Gauss – Seidel với sai số 10^{-3}

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = -8 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 = -20 \\ x_1 + x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 4 \end{cases}$$

Nghiệm đúng:

$$x = \begin{pmatrix} -7 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}^T$$