Bài 3 Đa thức và hàm số

Khoa Công nghệ thông tin

Trường đại học công nghiệp – Hà Nội

Chương 3 Đa thức và hàm số

3.1 Tính giá trị đa thức bằng lược đồ Horner

3.2 Chia đa thức bằng lược đồ Horner

3.3 Các phép tính cơ bản trên đa thức

3.4 Khai triển hàm qua chuỗi Taylor

Bài tập

3.1 Tính giá trị đa thức bằng lược đồ Horner

Tính giá trị của đa thức: lược đồ Horner

Cho đa thức bậc n có dạng tổng quát ($a_0 \neq 0$)

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n \qquad (3.1)$$

tính giá trị của $P_n(x)$ khi x = c (c cho trước giá trị).

Ví dụ 3.1.1: Tính $P_7(-2)$, P_7 là đa thức dưới đây.

$$P_7(x) = 3x^7 + 5x^4 + x^3 - x - 5$$

Ví dụ 3.1.2: Tính $P_6(1.5)$, P_6 là đa thức dưới đây.

$$P_6(x) = -x^6 + 2x^5 - 5x^3 + x - 1$$

3.1 Tính giá trị đa thức bằng lược đồ Horner

Tính giá trị của đa thức: lược đồ Horner

Áp dụng lược đồ Horner

Áp dụng sơ đồ Horner nhằm làm giảm đi số phép tính (chỉ thực hiện n phép nhân), phương pháp này được phân tích như sau:

$$P_n(x) = (\ldots((a_0x + a_1)x + a_2)\ldots)x + a_n \qquad (3.2)$$

$$P_3(x) = 3x^3 + 5x^2 - 2x - 5$$

Tính giá trị $P_n(c)$:

$$P_n(\mathrm{c}) = (\ldots((a_0c + a_1)c + a_2)\ldots)c + a_n \qquad (3.3)$$

3.1 Tính giá trị đa thức bằng lược đồ Horner

Đặt:

$$P_0 = a_0,$$

$$P_1 = P_0 c + a_1,$$

$$P_2 = P_1 c + a_2,$$

$$\boxed{P_n = P_{n-1} c + a_n = P_n(c)} \qquad (3.4)$$

Lược đồ Horner:

$$\begin{array}{c|cccccc|c}
 & a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n & & \\
+ & & P_0c & P_1c & \dots & P_{n-1}c & & c \\
\hline
 & P_0 & P_1 & P_2 & \dots & P_n = P_n(c) & &
\end{array}$$

3.1 Tính giá trị đa thức bằng lược đồ Horner

Ví dụ 3.1.3:

Tính giá trị của đa thức tại x = 3:

$$P_3(x) = 3x^3 + 2x^2 - 5x + 7$$

Giải:

3	3	2	-5	7
+		9	33	84
	3	11	28	91 = $P_3(3)$

	a_0	a_1	a_2	…	a_n	
+		P_0c	P_1c	…	$P_{n-1}c$	c
	P_0	P_1	P_2	…	$P_n = P_n(c)$	

3.1 Tính giá trị đa thức bằng lược đồ Horner

Ví dụ 3.1.4:

Tính giá trị của đa thức tại x = -2:

$$P_6(x) = -x^6 - 5x^3 + x - 1$$

Giải:

-2	-1	0	0	-5	0	1	-1	
+		2	-4	8	-6	12	-26	
	-1	2	-4	3	-6	13	-27	= $P_6(-2)$

	a_0	a_1	a_2	…	a_n	
+		P_0c	P_1c	…	$P_{n-1}c$	c
	P_0	P_1	P_2	…	$P_n = P_n(c)$	

3.1 Tính giá trị đa thức bằng lược đồ Horner

Thuật toán cho lược đồ Horner

+ **Đầu vào**: n, c, các hệ số a_i ($i = 0,1, ..., n$)

+ **Xử lý**: Đặt $p = a_0$

Lặp $i = 1 \to n$:

$p = p * c + a_i$

+ **Đầu ra**: p

3.2 Chia đa thức bằng lược đồ Horner

Lược đồ Horner được sử dụng để tìm đa thức thương và đa thức dư trong phép chia đa thức f(x) cho đa thức x - α.

Giả sử ta có đa thức f(x) như sau:

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

khi đó đa thức thương g(x) và đa thức dư được xác định như bảng sau:

$$g(x) = b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \ldots + b_{n-1}$$

x	a_0	a_1	....	a_{n-1}	a_n
α	$b_0 = a_0$	$b_1 = b_0\alpha + a_1$		$b_{n-1} = b_{n-2}.\alpha + a_{n-1}$	$r = b_{n-1}.\alpha + a_n$

3.2 Chia đa thức bằng lược đồ Horner

Các bước thực hiện

Bước 1: Sắp xếp các hệ số của đa thức $f_{(x)}$ theo ẩn giảm dần và đặt số α vào vị trí đầu tiên của hàng 2. Nếu trong đa thức mà khuyết ẩn nào thì hệ số của nó coi như bằng 0 và ta vẫn phải cho vào lược đồ

Bước 2: Hạ hệ số a_0 ở hàng trên xuống hàng dưới cùng cột. Đây cũng chính là hệ số đầu tiên của $g_{(x)}$ tìm được, tức là: $b_0 = a_0$.

Bước 3: Lấy số α nhân với hệ số vừa tìm được ở hàng 2 rồi cộng chéo với hệ số hàng 1.

Ta có $$b_1 = \alpha . b_0 + a_1$$

Quy tắc nhớ: ***"Nhân ngang, cộng chéo"***

Bước 4: Cứ làm như vậy cho tới hệ số cuối cùng. và kết quả ta sẽ có:

$$f_{(x)} = (x - \alpha).g_{(x)} + r$$

3.2 Chia đa thức bằng lược đồ Horner

Ví dụ 3.2.1:

Dùng lược đồ Horner để phân tích đa thức sau thành nhân tử

$$f(x) = x^3 - 7x + 6 = A(x)$$

Giải:

Nhận xét: $f(1) = 0$ nên $f(x) = (x - 1)g(x)$

x	1	0	-7	6
1	1	1	-6	0 = r

$A(x) = (x - 1)(x^2 + x – 6)$ gọi $B(x) = (x^2 + x – 6)$

Nhận xét: $C(2) = 0 \Rightarrow C(x) = (x - 2)D(x)$

3.2 Chia đa thức bằng lược đồ Horner

Ví dụ 3.2.1:

x	1	1	-6
2	1	3	0 = r

=> C(x) = (x - 2)(x + 3)

=> A(x) = (x - 1) (x - 2)(x + 3)

3.2 Chia đa thức bằng lược đồ Horner

Ví dụ 3.2.2:

Dùng lược đồ Horner để chia đa thức f(x) cho đa thức g(x) = x - 2

$$f(x) = x^4 + x^3 - 10x^2 + 6x + 4$$

Giải:

x	1	1	-10	6	4
2	1	3	-4	-2	0 = r

$$f(x) = (x - 2)(x^3 + 3x^2 - 4x - 2)$$

3.3 Các phép tính cơ bản trên đa thức

3.3.1 Cộng hai đa thức

Cho hai đa thức $A_n(x)$ có bậc n và $B_m(x)$ có bậc m. Khi công hai đa thức này, ta công lần lược các hệ số cùng bậc với nhau.

Ví dụ 3.3.1:

Cộng hai đa thức sau:

$$\mathbf{A_3(x) = 5x^3 - 3x^2 + 7}$$

$$\mathbf{B_3(x) = 2x^3 + 3x^2 - 5x - 2}$$

Giải:

$$\begin{array}{rl} & 5x^3 - 3x^2 \qquad + 7 \\ + & \\ & 2x^3 + 3x^2 - 5x - 2 \\ \hline & 7x^3 + 0x^2 - 5x + 5 \end{array}$$

3.2 Các phép tính cơ bản trên đa thức

Mã chương trình cộng hai đa thức

Qui ước: hệ số của 2 đa thức có dạng a_0, a_1,.., a_m và b_0, b_1, ..., b_n

```
#include <stdio.h>
#include <conio.h>
#define bac_toi_da 10
void main ( )
{
	float a[bac_toi_da], b[bac_toi_da], c[bac_toi_da];		int i,m,n,q;
	printf (“Nhap bac da thuc thu nhat: ”); scanf (“%d”,&m);
	printf (“Nhap các hệ số: \n”)
	for (i = 0, i<=m; i++)
	{
		printf (“a[%d] = ”, i);   scanf (“%f”, &a[i]);
	}
```

3.2 Các phép tính cơ bản trên đa thức

Mã chương trình cộng hai đa thức

```
printf (“Nhap bac da thuc thu hai: ”); scanf (“%d”,&n);
printf (“Nhap các hệ số: \n”)
for (i = 0, i<=n; i++)
{
        printf (“b[%d] = ”, i);     scanf (“%f”, &b[i]);
}
if(m >= n) //Truong hop m lon hon hoac bang n
{
        q=m;
        for(i=0;i<=m;++i)
          if (i<=n) c[i]=a[i]+b[i];
          else c[i] = a[i];
}
```

3.3 Các phép tính cơ bản trên đa thức

Mã chương trình cộng hai đa thức

```
        if(m<n) //Truong hop m < n
        {
                q=n;
                for(i=0;i<=n;++i)
                    if(i<=n-m)    c[i]=a[i] + b[i];
                    else          c[i]= b[i];
        }
        printf("Cac he so cua da thuc tong C:\n");
        for(i=0;i<=q;++i) printf("%0.3f\t",c[i]);
    }
```

3.2 Các phép tính cơ bản trên đa thức

Mã chương trình cộng hai đa thức

```
        if(m<n) //Truong hop m < n
        {
                q=n;
                for(i=0;i<=n;++i)
                    if(i<n-m) c[i]=b[i];
                    else  c[i]= a[i-n+m] + b[i];
        }
        printf("Cac he so cua da thuc tong C:\n");
        for(i=0;i<=q;++i) printf("%0.3f\t",c[i]);
        getch();
}
```

3.3 Các phép tính cơ bản trên đa thức

3.3.2 Trừ hai đa thức

Cho hai đa thức $A_n(x)$ có bậc n và $B_m(x)$ có bậc m. Trừ đa thức A cho đa thức B thực chất là cộng đa thức A với đa thức -B. Khi công hai đa thức này, ta công lần lược các hệ số cùng bậc với nhau.

Ví dụ 3.3.2:

Trừ hai đa thức sau:

$$\mathbf{A_3(x) = 5x^3 - 3x^2 + 7}$$

$$\mathbf{B_3(x) = 2x^3 + 3x^2 - 5x - 2}$$

Giải:

$$\begin{array}{rl} & 5x^3 - 3x^2 \qquad\quad + 7 \\ + & \\ & -2x^3 - 3x^2 + 5x + 2 \\ \hline & 3x^3 - 6x^2 + 5x + 9 \end{array}$$

3.3 Các phép tính cơ bản trên đa thức

3.3.3 Nhân hai đa thức

Cho hai đa thức $A_n(x)$ có bậc n và $B_m(x)$ có bậc m. Khi nhân hai đa thức này, ta nhân mỗi hạng tử của đa thức này với từng hạng tử của đa thức kia rồi cộng các tích với nhau.

Ví dụ 3.3.3:

Nhân hai đa thức sau: $\mathbf{A_1(x) = 3x + 7}$; $\mathbf{B_2(x) = 3x^2 - 5x - 2}$

Giải:

$$(3x + 7)(3x^2 - 5x - 2) = 3x.(3x^2 - 5x - 2) + 7.(3x^2 - 5x - 2)$$

$$= 3x.3x^2 - 3x.5x - 3x.2 + 7.3x^2 - 7.5x - 7.2$$

$$= 9x^3 - 15x^2 - 6x + 21x^2 - 35x - 14$$

$$= 9x^3 + 6x^2 - 41x - 14$$

3.3 Các phép tính cơ bản trên đa thức

Mã chương trình nhân hai đa thức

Phân tích thuật toán cho trường hợp 2 đa thức A(x) bậc m và B(x) bậc n (**m > n**). Trường hợp khác phân tích tương tự. ***Chú ý***: a_i, b_i trong VD dưới đây là chỉ số mảng.

$$A(x) = a_0x^5 + a_1x^4 + a_2x^3 + a_3x^2 + a_4x + a_5$$

$$B(x) = b_0x^3 + b_1x^2 + b_2x + b_3$$

$$C(x) = A(x).B(x)$$

$$= a_0b_0x^8 + (a_0b_1 + a_1b_0)x^7 + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^6$$

$$+ (a_0b_3 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_0)x^5 + (a_1b_3 + a_2b_2 + a_3b_1 + a_4bo)x^4$$

$$+ (a_2b_3 + a_3b_2 + a_4b_1 + a_5b+)x^3 + (a_3b_3 + a_4b_2 + a_5b_1)x^2 + a_5b_2x + a_5b_3$$

3.2 Các phép tính cơ bản trên đa thức

Mã chương trình nhân hai đa thức

Các hệ số của đa thức kết quả là :

$C_0 = a_0b_0$

$C_1 = a_0b_1 + a_1b_0$

$C_2 = a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0$

$C_3 = a_0b_3 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_0$

$C_4 = a_1b_3 + a_2b_2 + a_3b_1 + a_4b_0$

$C_5 = a_2b_3 + a_3b_2 + a_4b_1 + a_5b_0$

$C_6 = a_3b_3 + a_4b_2 + a_5b_1$

$C_7 = a_5b_2$

$C_8 = a_5b_3$

Nhận xét:

- Hệ số C_k của đa thức kết quả C(x) trong trường hợp k<=m-n + 1: a_i với i đi từ 0 đến k và b_j với j đi từ k về 0 =>(i, k-i).
- Trong trường hợp k>m-n + 1 => i đi từ k-n và j bằng k-I (i=k-n,k-i).
- Bậc của C bằng tổng bậc của 2 đa thức A và B (q = m + n).

3.3 Các phép tính cơ bản trên đa thức

Mã chương trình nhân hai đa thức

```
#include <stdio.h>
#include <conio.h>
#define bac_toi_da 10
void main ( )
{
        float a[bac_toi_da], b[bac_toi_da], c[2*bac_toi_da]; int i,j,k,l,m,n,q;
        printf (“Nhap bac da thuc thu nhat: ”); scanf (“%d”,&m);
        printf (“Nhap các hệ số: \n”)
        for (i = 0, i<=m; i++)
        {
                printf (“a[%d] = ”, i);  scanf (“%f”, &a[i]);
        }
```

3.3 Các phép tính cơ bản trên đa thức

Mã chương trình nhân hai đa thức

```
printf (“Nhap bac da thuc thu hai: ”); scanf (“%d”,&n);
printf (“Nhap các hệ số: \n”)
for (i = 0, i<=n; i++)
{
        printf (“b[%d] = ”, i);     scanf (“%f”, &b[i]);
}
q = m + n;
for (k = 0, i<=q; i++)
{
        if(k<=m ) j=k;
        else j=m;
```

3.2 Các phép tính cơ bản trên đa thức

Mã chương trình nhân hai đa thức

```
                if(k<=n ) l=0;
                else l=k-n;
                c[k]=0;
                for(i=l;i<=j;++i)
                    c[k]=c[k] + a[i]*b[k-i];
            }
        printf(“\nCac he so cua da thu tich C voi bac la %d\n”,q);
        for(i=0;i<=q;++i)
                printf(“%0.4f\t”,c[i]);
        getch();
}
```

3.3 Các phép tính cơ bản trên đa thức

3.3.4 Chia đa thức

Nhắc lại chia đơn thức

$$a.x^m : b.x^n = (a:b).x^{m-n}$$

Ví dụ 3.4.1

$$8x^3y^2z : 2xy = (8 : 2).(x^3 : x).(y^2 : y).z = 4.x^2.y.z$$

3.3 Các phép tính cơ bản trên đa thức

3.3.4 Chia đa thức

A là đa thức bị chia có bậc cao nhất n, B là đa thức chia có bậc cao nhất m, Q là đa thức kết quả có bậc cao nhất n-m và R là đa thức dư (nếu có) bậc cao nhất m-1.

$$\frac{A_n(x)}{B_m(x)} = Q_{n-m}(x) + \frac{R_{m-1}(x)}{B_m(x)}$$

Các bước chia đa thức

Bước 1: Chia hạng tử bậc cao nhất của đa thức bị chia cho hạng tử bậc cao nhất của đa thức chia.

Bước 2: Nhân kết quả với đa thức chia rồi lấy đa thức bị chia trừ đi tích nhận được. Hiệu tìm được gọi là dư thứ nhất.

Bước 3: Chia hạng tử bậc cao nhất của dư thứ nhất cho hạng tử bậc cao nhất của đa thức chia.

Bước 4: Nhân kết quả với đa thức chia rồi lấy dư thứ nhất trừ đi tích nhận được. Hiệu tìm được gọi là dư thứ hai. Thực hiện tương tự cho đến khi dư bằng 0 hoặc bậc cao nhất của dư bé hơn bậc cao nhất của đa thức chia thì dừng.

3.3 Các phép tính cơ bản trên đa thức

Ví dụ 3.4.2

Thực hiện phép chia đa thức $5x^3 - 3x^2 + 7$ cho đa thức $x^2 + 1$

$$
\begin{array}{rl|l}
 & 5x^3 - 3x^2 \qquad\qquad + 7 & x^2 + 1 \\
- & 5x^3 \qquad\qquad + 5x & \hline 5x - 3 \\
\hline
 & -3x^2 \; - 5x \; + 7 & \\
- & -3x^2 \qquad\quad - 3 & \\
\hline
 & -5x \; + 10 &
\end{array}
$$

Kết quả: $5x^3 - 3x^2 + 7 = (x^2 + 1)(5x - 3) - 5x + 10$

3.3 Các phép tính cơ bản trên đa thức

Ví dụ 3.4.3

Thực hiện phép chia đa thức $x^5 - 7x^3 + x - 6$ cho đa thức $x^3 + x^2 - x - 1$

$$
\begin{array}{rl|l}
 & x^5 + 0x^4 - 7x^3 + 0x^2 + x - 6 & x^3 + x^2 - x - 1 \\
 & x^5 + x^4 - x^3 - x^2 & \hline x^2 - x - 5 \\
\hline
 & -x^4 - 6x^3 + x^2 + x - 6 & \\
- & -x^4 - x^3 + x^2 + x & \\
\hline
 & -5x^3 \qquad\qquad - 6 & \\
- & -5x^3 - 5x^2 + 5x + 5 & \\
\hline
 & 5x^2 - 5x - 11 &
\end{array}
$$

3.4 Khai triển hàm qua chuỗi Taylor

Khai triển công thức

Giả thiết hàm số y = f(x) có tất cả các dạo hàm dến cấp n + 1 (kể cả dạo hàm cấp n + 1) trong một khoảng nào dó chứa diểm x = a.

Hãy xác dịnh một da thức $y = P_n(x)$ bậc n mà giá trị của nó tại x = a bằng giá trị f(a) và giá trị của các dạo hàm dến hạng n của nó bằng giá trị của các dạo hàm tương ứng của hàm số f(x) tại diểm dó. Nghĩa là:

$$P_n(a) = f(a); P_n'(a) = f'(a); \ldots; P_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a) \qquad (1)$$

Ta hy vọng sẽ tìm dược một da thức như thế trong một ý nghĩa nào dó **"gần" với hàm số f(x)**.

3.4 Khai triển hàm qua chuỗi Taylor

Khai triển công thức (tiếp)

Ta sẽ xác định đa thức đó dưới dạng một đa thức theo lũy thừa (x – a) với các hệ số cần xác định:

$$P_n(x) = C_0 + C_1.(x-a) + C_2.(x-a)^2 + \ldots + C_n.(x-a)^n \qquad (2)$$

Các hệ số $C_0, C_1, C_2, \ldots, C_n$ được xác định sao cho điều kiện (1) được thỏa mãn.

3.4 Khai triển hàm qua chuỗi Taylor

Khai triển công thức (tiếp)

Trước hết, ta tìm các dạo hàm của $P_n(x)$:

$$\begin{cases} P_n'(x) = C_1 + 2C_2(x-a) + 3C_3.(x-a)^2 + ... + nC_n(x-a)^{n-1} \\ P_n''(x) = 2C_2 + 3.2C_3.(x-a) + ... + n(n-1)C_n(x-a)^{n-2} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ P_n^{(n)}(x) = n(n-1)...2.1.C_n \end{cases} \quad (3)$$

3.4 Khai triển hàm qua chuỗi Taylor

Khai triển công thức (tiếp)

Thay x = a vào các biểu thức (2) và (3) ta có:

$$\begin{cases} P_n(a) = C_0 \\ P_n'(a) = C_1 \\ P_n''(a) = 2.1.C_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ P_n^{(n)}(a) = n.(n-1)\dots2.1C_n \end{cases}$$

3.4 Khai triển hàm qua chuỗi Taylor

Khai triển công thức (tiếp)

So sánh với điều kiện (1) ta có:

$$\begin{cases} f(a) = C_0 \\ f'(a) = C_1 \\ f''(a) = 2.1.C_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f^{(n)}(a) = n.(n-1)\dots 2.1.C_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_0 = f(a) \\ C_1 = f'(a) \\ C_2 = \dfrac{1}{2!}.f''(a) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ C_n = \dfrac{1}{n!}.f^{(n)}(a) \end{cases} \qquad (4)$$

3.4 Khai triển hàm qua chuỗi Taylor

Khai triển công thức (tiếp)

Thay các giá trị của $C_0, C_1, C_2, \ldots, C_n$ vào công thức (2) ta có đa thức cần tìm:

$$P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

3.4 Khai triển hàm qua chuỗi Taylor

Khai triển công thức (tiếp)

Ký hiệu bằng $R_n(x)$, hiệu giữa giá trị của hàm số đã cho f(x) và đa thức mới lập $P_n(x)$

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x)$$

Hay:

$$\begin{aligned} f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \ldots \\ + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x) \end{aligned} \quad (6)$$

Vì $R_n(x)$ khá nhỏ do vậy ta có thể bỏ nó khỏi (6)

3.4 Khai triển hàm qua chuỗi Taylor

Tóm lại:

Hàm f(x) liên tục, khả tích tại x_0 (điểm a) nếu ta có thể khai triển được hàm f(x) qua chuỗi Taylor như sau:

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{f^{'}(x_0)(x - x_0)}{1!} + \frac{f^{''}(x_0)(x - x_0)^2}{2!} + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n}{n!}$$

khi $x_0 = 0$, ta có khai triển Mac Laurin.

$$f(x) \approx f(0) + \frac{f^{'}(0)x}{1!} + \frac{f^{''}(0)x^2}{2!} + \dots + \frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!}$$

Khai triển Mac Laurin có rất nhiều ứng dụng trong việc tính gần đúng một hàm thông qua triển khai ở dạng chuỗi.

3.4 Khai triển hàm qua chuỗi Taylor

Ví dụ 3.4.1

Sử dụng chuỗi Mac laurin để triển khai hàm cos(x).

Giải:

$$f(x) \approx f(0) + \frac{f'(0)x}{1!} + \frac{f''(0)x^2}{2!} + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!}$$

Ta có:

$$Cos(0) = 1; Sin(0) = 0; Cos'(x) = -Sin(x)$$

Áp dụng chuỗi Mac laurin ta có:

$$Cos(x) \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

3.4 Khai triển hàm qua chuỗi Taylor

Ví dụ 3.4.2

$$Sin(x) \approx 0 + \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots$$

Ta có:

$$Sin(0) = 0; Cos(0) = 1;\ Sin'(x) = Cos(x)$$

$$f'(x) = Cos(x)$$
$$f''(x) = -Sin(x)$$
$$f^3(x) = -Cos\ (x)$$
$$f^4(x) = Sin(x)$$
$$f^5(x) = Cos(x)$$

$$f(x) \approx f(0) + \frac{f'(0)x}{1!} + \frac{f''(0)x^2}{2!} + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!}$$

3.4 Khai triển hàm qua chuỗi Taylor

Ví dụ 3.4.3

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

Ta có:

$$(e^x)' = e^x$$

$$f(0) = 1$$
$$f'(0) = 1$$
$$f''(0) = 1$$
$$f^3(0) = 1$$

$$f(x) \approx f(0) + \frac{f'(0)x}{1!} + \frac{f''(0)x^2}{2!} + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!}$$

Bài tập

Bài 1: Dựa trên lược đồ Horner, tính giá trị của các đa thức sau:

$P_x(a) = 3x^3 - 2x^2 + 5x - 4$; $a=2$

$P_x(b) = 2x^4 - 3x^3 + 5x + 7$; $b=3$

$P_x(c) = 2x^5 - 4x^3 + 3x^2 - 8$; $c=2$

Bài 2: Cộng, trừ, nhân và chia các đa thức sau:

a) $3x^3 – x^2 - 2x + 3$ và $2x^2 – 5$

b) $-x^3 + 3x^2 - 2x + 1$ và $–x^3 + 6x^2 – 12x – 5$

c) $x^3 – 7x – x^2 + 3$ và $x – 3$

d) $x^3 – 7x – x^2 + 3$ và $x – 3$

Bài tập

Bài 3: Triển khai các hàm sau ra dạng chuỗi

a) $\ln(1 + x)$

b) $(1 + x)^n$

c) $1/x$