Bài 6 Nội suy và phương pháp bình phương cực tiểu

Bài 6 Nội suy và phương pháp bình phương cực tiểu

6.1. Nội suy đa thức

6.2. Khớp đường cong bằng nội suy spline

6.3. Xấp xỉ hàm bằng phương pháp bình phương cực tiểu

Bài tập

6.1 Nội suy đa thức

6.1.1 Đa thức nội suy

Trong thực tiễn, ta có thể gặp các hàm số y = *f*(x) mà ta không biết biểu thức giải tích cụ thể *f* của chúng. Thông thương, ta chỉ biết các giá trị $y_0, y_1, \ldots, y_n$ của hàm số tại các điểm $x_0, x_1, \ldots, x_n$ của đoạn [a, b]. Khi sử dụng hàm số trên, làm thế nào để biết giá trị của hàm tại các điểm không trùng với x_i (i = 1, 2, …, n)?.

Muốn thực hiện được điều này, ta cần xây dựng một đa thức có dạng:

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n \tag{6.1}$$

thỏa mãn:

$$P_n(x_i) = f(x_i) = y_i, i = 0, 1, 2, \ldots, n \tag{6.2}$$

$P_n(x)$ gọi là đa thức nội suy của hàm f(x).

6.1 Nội suy đa thức

6.1.1 Đa thức nội suy

Ta có: $f(x) = x^3 - 3x$

$f(1) = -2;$

$f(2) = 2;$

$f(3) = 18;$

Đa thức nội suy là một dạng bài toán ngược, tức là ta biết $f(1) = -2$; $f(2) = 2$; $f(3) = 18$; cần tìm $f(x)$.

6.1 Nội suy đa thức

6.1.1 Đa thức nội suy

Lý do chọn đa thức

- Đa thức $P_n(x)$ là hàm số dễ tính toán nhất;
- Có thể xấp xỉ hàm liên tục với sai số tùy ý;
- Có thể lấy đạo hàm và tích phân bao nhiêu lần tùy ý;
- Tính giá trị đa thức và đạo hàm dễ dàng;

Chúng ta đa thức $P_n(x)$ thay thế cho hàm số $f(x)$ nếu $f(x)$ được tính phức tạp.

6.1 Nội suy đa thức

6.1.1 Đa thức nội suy

Ví dụ 6.1.1:

Chúng ta có 1 hàm *f*, không biết thức giải tích của nó, chỉ biết giá trị của nó tại 3 mốc.

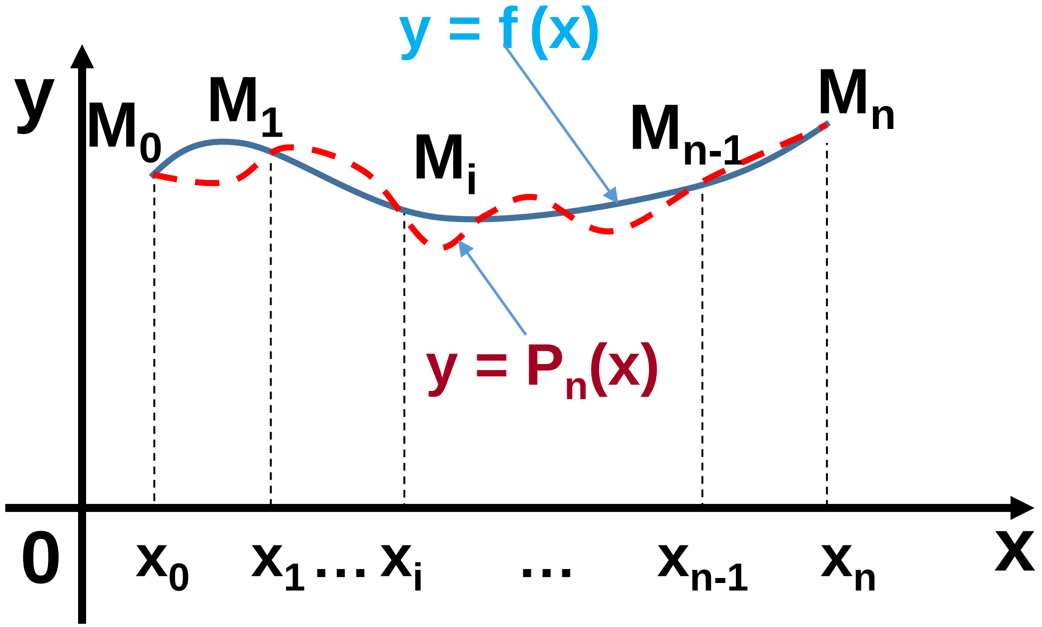
x_i	-1	0	1
y_i	0.5	1	2

Nếu muốn biết giá trị *f* tại điểm - 0.7 hay 0.5 thì ta cần xây dựng đa thức P(x), sau đó tính P(-0.7) và P(0.5).

6.1 Nội suy đa thức

6.1.1 Đa thức nội suy

Về hình học, ta tìm đường cong (đa thức) $P_n(x)$ thay cho hàm *f*(x) để tính gần đúng giá trị của hàm số *f*(x).



- Nội suy đa thức: Xác định đa thức *y = P(x)* thoả điều kiện nội suy

$$P(x_k) = y_k,\ k = 0 \ldots n \Rightarrow y(\alpha) \approx P(\alpha)$$

6.1 Nội suy đa thức

6.1.1 Đa thức nội suy

Phân biệt nội suy và ngoại suy

- Bảng chứa (n+1) cặp dữ liệu

$$\{ (x_k, y_k) \},\ k = 0 \rightarrow n$$

- Chúng ta có 1 điểm x = α $\notin \{ x_k \}$, x ∈ [x_0, x_n] và chúng ta cần biết giá trị y => phải **nội suy** từ các điểm đã biết.

- Chúng ta có 1 điểm x = α ∉ [x_0, x_n] và chúng ta cần biết giá trị y => **ngoại suy** từ các điểm đã biết.

Mốc nội suy	x_0	x_1	…	$x = \alpha \notin \{ x_k \}$	…	x_{n-1}	x_n
Giá trị nội suy	y_0	y_1	…	$y = ?$	…	y_{n-1}	y_n

x_k : mốc nội suy, y_k : giá trị (hàm) nội suy

6.1 Nội suy đa thức

6.1.2 Đa thức nội suy Lagrange

Cách tiếp cận của Lagrange để đề xuất xây dựng một đa thức bậc *n*. Với một hàm *f*(x) nếu α là nghiệm thì *f*(α) = 0 và *f*(x) chia hết cho (x - α). Chúng ta có thể viết *f*(x) = (x - α)*g*(x). Dựa trên tính chất này với VD sau: $f(x) = x^2 - 2x$ ta có *f*(0) = 0, *f*(2) = 0 và *f*(3) = 5 ta có thể viết:

f(x) = c(x-0)(x-2) thay x = 3 ta có c(3-0)(3-2) = 5 => c = 5/(3-0)(3-2)

=> $$f(x) = \frac{5(x-0)(x-2)}{(3-0)(3-2)}$$

6.1 Nội suy đa thức

6.1.2 Đa thức nội suy Lagrange

Lagrange đề xuất xây dựng một đa thức bậc *n* có dạng

$$L_n(x) = p_n^{(0)}(x)\,y_0 + p_n^{(1)}(x)\,y_1 + p_n^{(2)}(x)\,y_2 + \ldots + p_n^{(n)}(x)\,y_n \qquad (6.3)$$

Trong đó $P^{(k)}$ là các **đa thức phụ** có bậc *n* và thỏa

$$p_n^{(k)}(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{khi} \quad j = k \\ 0 & \text{khi} \quad j \neq k \end{cases} \qquad (6.4)$$

6.1 Nội suy đa thức

6.1.2 Đa thức nội suy Lagrange

Triệt tiêu tại x_k

Không có x_k

Do các đa thức phụ có bậc *n* và có *n* nghiệm x_0, x_1, …$\mathbf{x_{k-1}}$, $\mathbf{x_{k+1}}$, x_n, nên có thể viết dưới dạng sau:

$$p_n^{(k)}(x) = C(x-x_0)(x-x_1)\ldots\boxed{(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})}\ldots(x-x_n) \qquad (6.5)$$

Theo đ/n: $p_n^{(k)}(x_k) = 1 \Rightarrow$

$$p_n^{(k)}(x_k) = C(x_k-x_0)(x_k-x_1)\ldots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\ldots(x_k-x_n) = 1 \qquad (6.6)$$

$$\Rightarrow C = \frac{1}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\ldots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\ldots(x_k-x_n)} \qquad (6.7)$$

Không có $x - x_k$

$$\boxed{p_n^{(k)}(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\ldots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\ldots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\ldots(x_k-x_n)}} \qquad (6.8)$$

Không có $x_k - x_k$

6.1 Nội suy đa thức

6.1.2 Đa thức nội suy Lagrange

Đa thức nội suy Lagrange có dạng $L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} p_n^{(k)}(x)\, y_k$ (6.9)

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\ldots(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)}\, y_i \qquad (6.10)$$

6.1 Nội suy đa thức

Ví dụ 6.1.2

Cho hàm $f(x) = 2^x$ với các giá trị của hàm tại 3 mốc

x	-1	0	1
y	0.5	1	2

Tìm đa thức nội suy của hàm trên. Tính giá trị tại $x_1 = -0.5$ và $x_2 = 0.7$

Chú ý:

Thông thường thì chúng ta không biết hàm $f(x)$ mà thông qua thực nghiệm ta biết giá trị của hàm tại một số điểm.

6.1 Nội suy đa thức

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} p_n^{(k)}(x)\, y_k$$

Ví dụ 6.1.2

x	-1	0	1
y	0.5	1	2

Theo CT (5.7) ta có:

$$L(x) = 0.5p_2^{(0)} + 1p_2^{(1)} + 2p_2^{(2)}$$

Theo CT (5.6) ta có:

$$p_2^{(0)}(x) = \frac{x(x-1)}{2}$$

$$p_2^{(1)}(x) = -(x+1)(x-1)$$

$$p_2^{(2)}(x) = \frac{(x+1)x}{2}$$

$$L(x) = 0.5\frac{x(x-1)}{2} + -(x+1)(x-1) + 2\frac{x(x+1)}{2}$$

$$L(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}x + 1$$

$$= 0.25x^2 + 0.75x + 1$$

$$L(-0.5) = 0.6875$$

$$L(0.7) = 1.6475$$

6.1 Nội suy đa thức

Ví dụ 6.1.3

Cho hàm $f(x) = 2^x$ với các giá trị của hàm tại 4 mốc

x	-1	0	1	2
y	0.5	1	2	4

Tìm đa thức nội suy của hàm trên. Tính giá trị tại $x_1 = -0.5$ và $x_2 = 0.7$

Theo CT (6.7) ta có:

$$L(x) = 0.5p_3^{(0)} + 1p_3^{(1)} + 2p_3^{(2)} + 4p_3^{(3)}$$

6.1 Nội suy đa thức

Ví dụ 6.1.3

x	-1	0	1	2
y	0.5	1	2	4

Theo CT (6.6) ta có:

$$p_3^{(0)}(x)=\frac{x(x-1)(x-2)}{(-1-0)(-1-1)(-1-2)}=\frac{x^3-3x^2+2x}{-6}$$

$$p_3^{(1)}(x)=\frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{1(-1)(-2)}=\frac{x^3-2x^2-x+2}{2}$$

$$p_3^{(2)}(x)=\frac{(x+1)x(x-2)}{(1+1)1(1-2)}=\frac{x^3-x^2+2x}{-2}$$

$$p_3^{(3)}(x)=\frac{(x+1)x(x-1)}{(2+1)2(2-1)}=\frac{x^3-x}{6}$$

6.1 Nội suy đa thức

Ví dụ 6.1.3

Theo CT (5.8) ta có:

$$L(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{-12} + \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{2} - (x^3 - x^2 + 2x) + \frac{2(x^3 - x)}{3}$$

6.1 Nội suy đa thức

Ví dụ 6.1.4

Cho bảng giá trị tại 3 mốc

x	2	2.5	4
y	0.5	0.4	0.25

Tìm đa thức nội suy $L_2(x)$

$$p_2^0(x) = \frac{(x-2.5)(x-4)}{(2-2.5)(2-4)} \quad p_2^1(x) = \frac{(x-2)(x-4)}{(2.5-2)(2.5-4)} \quad p_2^2(x) = \frac{(x-2)(x-2.5)}{(4-2)(4-2.5)}$$

Đa thức nội suy: $L_2(x) = 0.5p^0(x) + 0.4p^1(x) + 0.25p^2(x)$

6.1 Nội suy đa thức

6.1.3 Sai số nội suy Lagrange

$$\left|f(x)-L(x)\right| \le \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\left|(x-x_0)\dots(x-x_n)\right| = \Delta \qquad (6.11)$$

Trong đó c phụ thuộc x và ∈ [a, b].

Vì CT (6.11) đúng với mọi điểm thuộc [a, b], kể cả các điểm nội suy nên sai số sẽ được tính theo CT (6.12)

$$\boxed{\left|f(x)-L(x)\right| \le \frac{\max\limits_{[a,b]}\left|f^{(n+1)}(x)\right|}{(n+1)!}\left|(x-x_0)\dots(x-x_n)\right| = \Delta} \qquad (6.12)$$

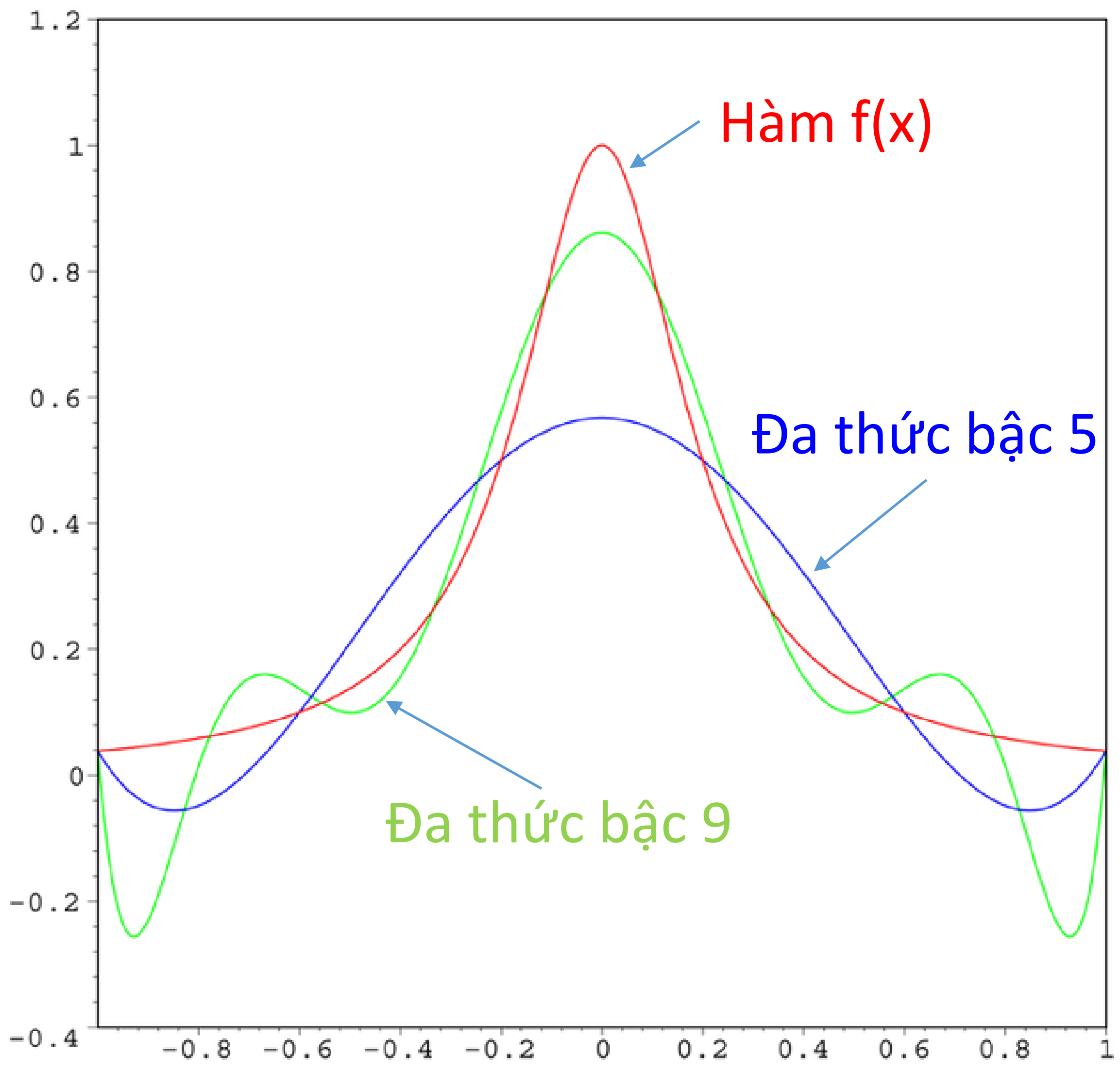
6.1 Nội suy đa thức

6.1.3 Sai số nội suy Lagrange

Nhận xét về sai số:

- Số mốc nội suy càng lớn thì sai số càng nhỏ, tuy nhiên khối lượng tính toán sẽ lớn.

- Sai số phụ thuộc vào đạo hàm $f^{(n+1)}$ nhưng thực tế hàm f có thể chưa biết.



6.1 Nội suy đa thức

6.1.3 Sai số nội suy Lagrange

Ví dụ 5.1.5

Cho bảng giá trị của hàm số y = sin(x)

x	0	π/4	π/2
y	0	0.707	1

Tính giá trị gần đúng sin(π/3) và đánh giá sai số của giá trị gần đúng nhận được.

$$L\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0\,p_2^{(0)} + 0.707\,p_2^{(1)} + 1\,p_2^{(2)}$$

$$L\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\left(\frac{\pi}{3}-0\right)\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}\right)}{\left(\frac{\pi}{4}-0\right)\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\right)}0.707 + \frac{\left(\frac{\pi}{3}-0\right)\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)}{\left(\frac{\pi}{2}-0\right)\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)} = 0.851$$

6.1 Nội suy đa thức

6.1.3 Sai số nội suy Lagrange

Ví dụ 6.1.5

$$\left|f(x)-L(x)\right| \le \frac{\max\limits_{[a,b]}\left|f^{(n+1)}(x)\right|}{(n+1)!}\left|(x-x_0)\ldots(x-x_n)\right| = \Delta$$

$$f(x)=\sin(x); \mathrm{f}^{(1)}(\mathrm{x})=\cos(x);\ f^{(2)}(x)=-\sin(x);\ f^{(3)}=-\cos(x)$$

$$\Rightarrow \max(|-\cos(0)|,|-\cos(\frac{\pi}{4})|,|-\cos(\frac{\pi}{2})|)=1$$

$$\Delta=\frac{1}{3!}.\frac{\pi}{3}.\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right).\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{3!}.\frac{\pi}{3}.\frac{\pi}{12}.\frac{\pi}{6}=0.024$$

6.1 Nội suy đa thức

6.1.4 Khái niệm về tỷ số sai phân

- Tỷ sai phân cấp một

$$f\left[x_k, x_{k+1}\right] = \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{x_{k+1} - x_k} \tag{6.13}$$

- Tỷ sai phân cấp hai

$$f\left[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}\right] = \frac{f[x_{k+1}, x_{k+2}] - f[x_k, x_{k+1}]}{x_{k+2} - x_k} \tag{6.14}$$

- Tỷ sai phân cấp ba

$$f\left[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, x_{k+3}\right] = \frac{f[x_{k+1}, x_{k+2}, x_{k+3}] - f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}]}{x_{k+3} - x_k} \tag{6.15}$$

6.1 Nội suy đa thức

6.1.4 Khái niệm về tỷ số sai phân

- Bằng cách quy nạp ta có tỷ sai phân cấp *p*

$$f\left[x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+p}\right] = \frac{f\left[x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_{k+p}\right] - f\left[x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+p-1}\right]}{x_{k+p} - x_k} \qquad (6.16)$$

Đặc điểm:

$$f\left[x_k, x_{k+1}\right] = f\left[x_{k+1}, x_k\right]$$

- Tỷ sai phân cấp *n* của đa thức bậc *n* là hằng số
- Tỷ sai phân cấp lớn hơn *n* của đa thức bậc *n* bằng 0

6.1 Nội suy đa thức

6.1.4 Khái niệm về tỷ số sai phân

Ví dụ 6.1.6

x	-1	0	1
y	0.5	1	2

x_k	$f(x_k)$	$f[x_k, x_{k+1}]$	$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}]$
-1	0.5		
		0.5	
0	1		0.25
		1	
1	2		

6.1 Nội suy đa thức

6.1.4 Khái niệm về tỷ số sai phân

Ví dụ 6.1.6

x	-1	0	1
y	0.5	1	2

$$f[x_k, x_{k+1}] = \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{x_{k+1} - x_k}$$

x_k	$f(x_k)$	$f[x_k, x_{k+1}]$	$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}]$
-1	0.5		
		0.5	
0	1		0.25
		1	
1	2		

x_0 y_0 x_1 y_1 x_2 y_2

(1-0.5)/(1 - -1)

$$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}] = \frac{f[x_{k+1}, x_{k+2}] - f[x_k, x_{k+1}]}{x_{k+2} - x_k}$$

6.1 Nội suy đa thức

6.1.4 Khái niệm về tỷ số sai phân

Ví dụ 6.1.7

x	0	2	3	5
y	1	3	2	5

x_k	$f(x_k)$	$f[x_k, x_{k+1}]$	$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}]$	$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, x_{k+3}]$
0	1			
		1		
2	3		-2/3	
		-1		3/10
3	2		5/6	
		3/2		
5	5			

6.1 Nội suy đa thức

6.1.5 Đa thức nội suy Newton: TH các nút nội suy không cách đều

- Định nghĩa tỷ sai phân cấp một của hàm $f(x)$

$$f[x, x_0] = \frac{f(x) - y_0}{x - x_0}$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = y_0 + f[x, x_0](x - x_0) \qquad (6.17)$$

- Định nghĩa tỷ sai phân cấp hai của hàm $f(x)$

$$f[x, x_0, x_1] = \frac{f[x, x_0] - f[x_0, x_1]}{x - x_1}$$

$$f[x, x_0] = f[x_0, x_1] + f[x, x_0, x_1](x - x_1)$$

$$f(x) = y_0 + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x, x_0, x_1](x - x_0)(x - x_1) \qquad (6.18)$$

6.1 Nội suy đa thức

6.1.5 Đa thức nội suy Newton: TH các nút nội suy không cách đều

- Tiếp tục quá trình trên đến bước n ta có:

$$f(x) = \boxed{y_0 + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \ldots + f[x_0, x_1, \ldots, x_n](x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})} + \boxed{f[x, x_0, x_1, \ldots, x_n](x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)} \quad (6.19)$$

Đặt $N_n(x)$

$$\Rightarrow f(x) = N_n(x) + R_n(x) \quad (6.20)$$

Đặt $R_n(x)$

Chú ý: **$R_n(x)$ được xem là sai số.**

6.1 Nội suy đa thức

6.1.5 Đa thức nội suy Newton: TH các nút nội suy không cách đều

Chúng ta có 2 quá trình nội suy. Nội suy Newton tiến và lùi.

- Nội suy Newton tiến sẽ xuất phát từ nút x_0 của hàm số $f(x)$ và $N_n(x)$ có dạng:

$$
\begin{aligned}
N_n^{(t)}(x) = {} & y_0 + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \dots \\
& + f[x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1})
\end{aligned}
\qquad (6.21)
$$

6.1 Nội suy đa thức

6.1.5 Đa thức nội suy Newton: TH các nút nội suy không cách đều

- Nội suy Newton lùi sẽ xuất phát từ nút x_n của hàm số $f(x)$ và $N_n(x)$ có dạng:

$$N_n^{(l)}(x) = y_n + f\left[x_{n-1}, x_n\right](x - x_n) + f\left[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n\right](x - x_{n-1})(x - x_n) + \ldots \\ + f\left[x_0, x_1, \ldots, x_n\right](x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n) \qquad (6.22)$$

6.1 Nội suy đa thức

6.1.5 Đa thức nội suy Newton: TH các nút nội suy không cách đều

Sai số

Sai số của công thức nội suy Newton: tương tự Lagrange

$$\boxed{\left|f(x)-L(x)\right| \le \frac{\max\limits_{[a,b]}\left|f^{(n+1)}(x)\right|}{(n+1)!}\left|(x-x_0)\ldots(x-x_n)\right| = \Delta} \qquad (6.23)$$

6.1 Nội suy đa thức

$$N_n^{(t)}(x) = y_0 + f[x_0,x_1](x-x_0) + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1) + \dots + f[x_0,x_1,\dots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})$$

6.1.5 Đa thức nội suy Newton: TH các nút nội suy không cách đều

Ví dụ 6.1.6

TH tiến

x	-1	0	1
y	0.5	1	2

$x = 0.8,\ y \approx ?$

x_k	$f(x_k)$	$f[x_k, x_{k+1}]$	$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}]$
-1	0.5		
		0.5	
0	1		0.25
		1	
1	2		

$N(x) = 0.5 + 0.5\,(0.8 + 1) + 0.25\,(0.8 + 1)\,(0.8 - 0) = 1.76$

6.1 Nội suy đa thức

$$N_n^{(l)}(x) = y_n + f[x_{n-1}, x_n](x - x_n) + f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n](x - x_{n-1})(x - x_n) + \dots$$
$$+ f[x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n)$$

6.1.5 Đa thức nội suy Newton: TH các nút nội suy không cách đều

Ví dụ 6.1.6

TH lùi

x	-1	0	1
y	0.5	1	2

$x = 0.8, y \approx ?$

x_k	$f(x_k)$	$f[x_k, x_{k+1}]$	$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}]$
-1	0.5		
		0.5	
0	1		0.25
		1	
1	2		

$N(x) = 2 + 1\,(0.8 - 1) + 0.25\,(0.8 - 0)\,(0.8 - 1) \quad = 1.76$

Tính sai phân như trường hợp tiến

6.1 Nội suy đa thức

6.1.6 Đa thức nội suy Newton: TH các nút nội suy cách đều

Giả sử các nút cách đều: $h = x_{i+1} - x_i$; $x_i = x_0 + ih$, $i = 0, 1, \ldots, n$.

TH tiến

Sai phân hữu hạn cấp 1 của hàm tại điểm x_k

$$\Delta y_k = y_{k+1} - y_k \tag{5.24}$$

Sai phân hữu hạn cấp 2 của hàm tại điểm x_k

$$\Delta^2 y_k = \Delta(\Delta y_k) = y_{k+2} - 2y_{k+1} + y_k \tag{5.25}$$

Sai phân hữu hạn cấp p của hàm tại điểm x_k

$$\Delta^p y_k = \Delta\,(\Delta^{p-1}\, y_k) \tag{5.26}$$

6.1 Nội suy đa thức

6.1.6 Đa thức nội suy Newton: TH các nút nội suy cách đều

Khi đó ta có mối quan hệ giữa tỷ sai phân và sai phân hữu hạn:

$$f\left[x_0, x_1\right] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{\Delta y_0}{h} \tag{6.27}$$

$$f\left[x_0, x_1, x_2\right] = \frac{f[x_0, x_1] - f[x_1, x_2]}{x_2 - x_0} = \frac{\Delta^2 y_0}{2h^2} \tag{6.28}$$

....

$$f\left[x_0, x_1, \ldots, x_n\right] = \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n} \tag{6.29}$$

6.1 Nội suy đa thức

6.1.6 Đa thức nội suy Newton: TH các nút nội suy cách đều

$$N_n^{(t)}(x) = y_0 + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \ldots$$
$$+ f[x_0, x_1, \ldots, x_n](x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})$$

$$\boxed{N_n^{(t)}(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!}q + \frac{\Delta^2 y_0}{2!}q(q-1) + \ldots + \frac{\Delta^n y_0}{n!}q(q-1)\ldots(q-n+1)} \quad (6.30)$$

Trong đó:

$$q = (x - x_0)/h \quad (6.31)$$

6.1 Nội suy đa thức

6.1.6 Đa thức nội suy Newton: TH các nút nội suy cách đều

TH lùi

Sai phân hữu hạn cấp 1 của hàm tại điểm x_k

$$\nabla y_k = y_k - y_{k-1} \qquad (6.32)$$

Sai phân hữu hạn cấp 2 của hàm tại điểm x_k

$$\nabla^2 y_k = \nabla(\nabla y_k) = y_k - 2y_{k-1} + y_{k-2} \qquad (6.33)$$

Sai phân hữu hạn cấp p của hàm tại điểm x_k

$$\nabla^p y_k = \nabla(\nabla^{p-1} y_k) \qquad (6.34)$$

6.1 Nội suy đa thức

5.1.6 Đa thức nội suy Newton: TH các nút nội suy cách đều

$$N_n^{(l)}(x) = y_n + f\left[x_{n-1}, x_n\right](x - x_n) + f\left[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n\right](x - x_{n-1})(x - x_n) + \ldots$$
$$+ f\left[x_0, x_1, \ldots, x_n\right](x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)$$

$$\boxed{N_n^{(l)}(x) = y_n + \frac{\nabla y_{n-1}}{1!}p + \frac{\nabla^2 y_{n-2}}{2!}p(p+1) + \ldots + \frac{\nabla^n y_0}{n!}p(p+1)\ldots(p+n-1)} \quad (6.35)$$

Trong đó:

$$p = (x - x_n)/h \qquad (6.36)$$

6.1 Nội suy đa thức

6.1.6 Đa thức nội suy Newton: Cách lập bảng

Bảng $\{(x_k, y_k)\}$, $k = 0 \rightarrow n$, mốc nội suy cách đều: x_0, $x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_1 + h$ … $x_n = x_{n-1} + h$. Lập bảng sai phân :

x	y	Δy_k	$\Delta^2 y_k$	$\Delta^3 y_k$
x_0	y_0			
		Δy_0		
x_1	y_1		$\Delta^2 y_0$	
		Δy_1		$\Delta^3 y_0$
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1$	
		Δy_2		
x_3	y_3			

6.1 Nội suy đa thức

6.1.6 Đa thức nội suy Newton: TH các nút nội suy cách đều

Ví dụ 6.1.7 Xây dựng đa thức nội suy Newton và xấp xỉ giá trị tại x^*

x	–1	0	1	2
y	4	2	0	1

$x^* = 1.75$

x_k	$f(x_k)$	Δy_k	$\Delta^2 y_k$	$\Delta^3 y_k$
–1	4			
		–2		
0	2		0	
		–2		3
1	0		3	
		1		
2	1			

$$q = \frac{x^* - x_0}{h} = 2.75$$

$$p = \frac{x^* - x_n}{h} = -0.25$$

6.1 Nội suy đa thức

6.1.6 Đa thức nội suy Newton: TH các nút nội suy cách đều

Ví dụ 6.1.7

$$N_3^{(t)}(1.75) = y_0 + \Delta y_0 q + \frac{\Delta^2 y_0}{2!} q(q-1) + \frac{\Delta^3 y_0}{3!} q(q-1)(q-2)$$

$$N_3^{(t)}(1.75) = 4 + (-2)2.75 + \frac{0}{2!} 2.75(2.75-1) + \frac{3}{3!} 2.75(2.75-1)(2.75-2)$$

$$N_3^{(l)}(1.75) = y_3 + \Delta y_2 p + \frac{\Delta^2 y_1}{2!} p(p+1) + \frac{\Delta^3 y_0}{3!} p(p+1)(p+2)$$

$$N_3^{(l)}(1.75) = 1 + 1(-0.25) + \frac{3}{2!}(-0.25)(-0.25+1) + \frac{3}{3!}(-0.25)(-0.25+1)(-0.25+2)$$

N(1.75) = 0.3046875

Bài tập

x	340	350	360	370
y	2,531	2,544	2,556	2,568

$x^* = 362$

x	0	1	2	3
y	1	5	12	25

$x^* = 0.5$

x	0	0.1	0.2	0.3
y	1.12	1.52	2.12	2.25

$x^* = 0.02$

x	10	11	12	13
y	8.15	8.34	8.12	8.25

$x^* = 10.25$

6.2 Khớp đường cong bằng nội suy spline

6.2.1 Nội suy spline

Khi số mốc lớn, nội suy bằng Lagrange có sự tính toán phức tạp. Việc giảm bậc đa thức bằng cách nội suy từng đoạn sẽ giải quyết được yêu cầu đơn giản hóa tính toán và đảm bảo sai số xấp xỉ.

Thay đa thức nội suy bậc n bằng đa thức nội suy bậc thấp (bậc $m = 1, 2, 3 \ldots$ và $m < n$) trên từng đoạn $[x_k, x_{k+1}]$, $k = 0 \ldots n - 1$. Sau đó ghép (dán) các đa thức này với nhau để nhận được hàm thay thế. Ghép nhưng tính khả vi phải được bảo đảm. Những hàm thay thế như vậy gọi là Spline bậc m (đường nối trơn). Spline thông dụng nhất là bậc 3.

6.2 Khớp đường cong bằng nội suy spline

6.2.2 Nội suy spline bậc 3

Định nghĩa:

Cho hàm số y = *f*(x) dưới dạng bảng. Một Spline bậc ba *g*(x) nội suy hàm *f*(x) trên [a,b] là hàm thỏa mãn các điều kiện sau:

a) g(x) có đạo hàm đến cấp 2 liên tục trên [a,b].

b) Trên mỗi đoạn con $[x_k, x_{k+1}]$*, hàm* $g(x) \equiv g_k(x)$ *là đa thức bậc 3.*

c) $g(x_k) = y_k$ *với mọi* $k = 0, 1, 2, \ldots$

d) Thỏa mãn một trong hai điều kiện biên sau đây:

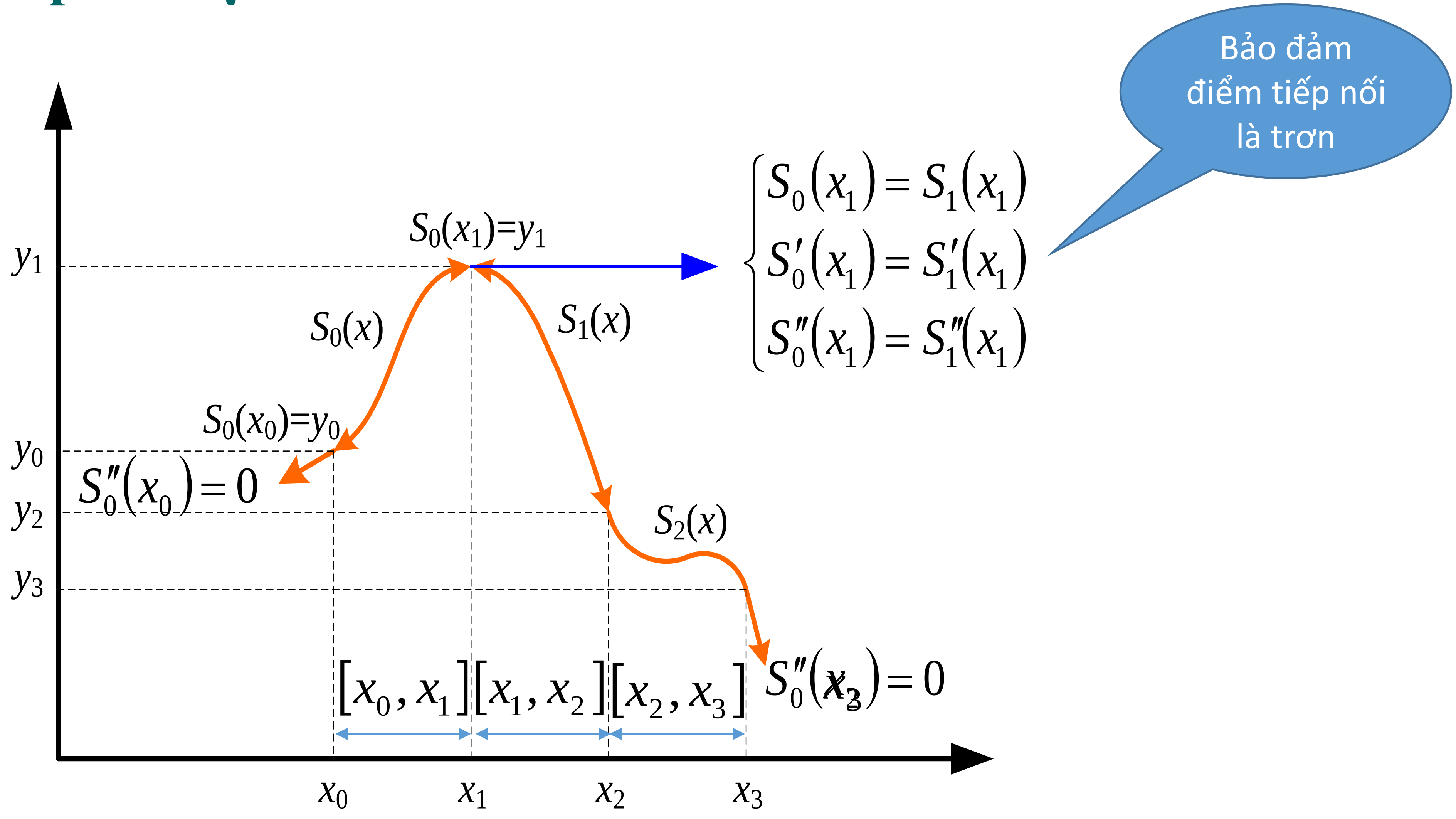
i) $g''(x_0) = g''(x_n) = 0$ *(điều kiện tự nhiên)*

ii) $g''(x_0) = f''(x_0)$; $g''(x_n) = f''(x_n)$ *(điều kiện ràng buộc)*

6.2 Khớp đường cong bằng nội suy spline

6.2.2 Nội suy spline bậc 3

Định nghĩa:



6.2 Khớp đường cong bằng nội suy spline

6.2.2 Nội suy spline bậc 3

1/ Hàm dạng bậc 3 trên từng đoạn $[x_k, x_{k+1}]$, $k = 0 \to n-1$

$$S = \begin{cases} S_0 = a_0 + b_0(x-x_0) + c_0(x-x_0)^2 + d_0(x-x_0)^3, x \in [x_0, x_1] \\ S_1 = a_1 + b_1(x-x_1) + c_1(x-x_1)^2 + d_1(x-x_1)^3, x \in [x_1, x_2] \\ \ldots\ldots \\ S_{n-1} = a_{n-1} + b_{n-1}(x-x_{n-1}) + c_{n-1}(x-x_{n-1})^2 + \cdots, x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases} \quad (6.37)$$

2/ Điều kiện nội suy: $S(x_k) = y_k$, $k = 0, 1, \ldots, n$ (6.38)

3/ Điều kiện ghép trơn:

$$\begin{cases} S_k(x_{k+1}) = S_{k+1}(x_{k+1}) \\ S'_k(x_{k+1}) = S'_{k+1}(x_{k+1}) \\ S''_k(x_{k+1}) = S''_{k+1}(x_{k+1}) \end{cases} \quad k = 0, 1, \ldots, n-2 \quad (6.39)$$

4/ Điều kiện biên tự nhiên: $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$ (6.40)

6.2 Khớp đường cong bằng nội suy spline

6.2.3 Xây dựng spline bậc 3

Trên đoạn $[x_k, x_{k+1}]$, $k = 0,1,\ldots,n-1$, đặt $h_k = x_{k+1} - x_k$

$$\boxed{S_k(x) = a_k + b_k(x - x_k) + c_k(x - x_k)^2 + d_k(x - x_k)^3} \qquad (6.41)$$

Điều kiện nội suy: $S(x_k) = y_k$, $k = 0, 1,\ldots,n$

$$\Rightarrow \boxed{a_k = S(x_k) = S_k(x_k) = y_k} \quad \text{vì } (x_k - x_k) = 0 \qquad (6.42)$$

Điều kiện liên tục $S_k(x_{k+1}) = S_{k+1}(x_{k+1})$ $k = 0, 1,\ldots,n-2$

$$a_k + b_k h_k + c_k h_k^2 + d_k h_k^3 = S(x_{k+1}) = S_k(x_{k+1}) = y_{k+1} \qquad (6.43)$$

$$\boxed{b_k = \frac{y_{k+1} - y_k}{h_k} - c_k h_k - d_k h_k^2, \quad k = 0,1,\ldots,n-1} \qquad (6.44)$$

6.2 Khớp đường cong bằng nội suy spline

6.2.3 Xây dựng spline bậc 3

Điều kiện liên tục của đạo hàm bậc nhất và hai (điều kiện ghép trơn)

$$\begin{cases} S'_k(x_{k+1}) = S'_{k+1}(x_{k+1}) \\ S''_k(x_{k+1}) = S''_{k+1}(x_{k+1}) \end{cases} \quad k = 0,1,\ldots,n-2$$

$$S_k(x) = a_k + b_k(x - x_k) + c_k(x - x_k)^2 + d_k(x - x_k)^3 \tag{6.45}$$

$$S'_k(x) = b_k + 2c_k(x - x_k) + 3d_k(x - x_k)^2 \tag{6.46}$$

$$S''_k(x) = 2c_k + 6d_k(x - x_k) \tag{6.47}$$

$$S'_k(x_{k+1}) = S'_{k+1}(x_{k+1}) \Longrightarrow \boxed{b_k + 2c_k h_k + 3d_k h_k^2 = b_{k+1}} \tag{6.48}$$

$$S''_k(x_{k+1}) = S''_{k+1}(x_{k+1}) \Longrightarrow \boxed{c_k + 3d_k h_k = c_{k+1}} \tag{6.49}$$

6.2 Khớp đường cong bằng nội suy spline

6.2.3 Xây dựng spline bậc 3

Từ CT (5.48) và (5.49) ta có:

$$c_{k-1} + 3d_{k-1}h_{k-1} = c_k \qquad k = 0,1,\dots,n-2 \qquad (6.50)$$

$$\boxed{d_{k-1} = \frac{c_k - c_{k-1}}{3h_{k-1}}} \qquad (6.51)$$

$$b_{k-1} + 2c_{k-1}h_{k-1} + 3d_{k-1}h_{k-1}^2 = b_k \qquad k = 0,1,\dots,n-2 \qquad (6.52)$$

CT (5.43) có dạng:

$$b_k = \frac{y_{k+1} - y_k}{h_k} - c_k h_k - d_k h_k^2, \quad k = 0,1,\dots,n-1$$

$$b_{k-1} = \frac{y_k - y_{k-1}}{h_{k-1}} - c_{k-1}h_{k-1} - d_{k-1}h_{k-1}^2, \quad k = 1,\dots,n \qquad (6.53)$$

6.2 Khớp đường cong bằng nội suy spline

6.2.3 Xây dựng spline bậc 3

Thế CT(6.44), (6.53), (6.51) vào CT (6.52) ta có:

$$\frac{y_k - y_{k-1}}{h_{k-1}} - c_{k-1}h_{k-1} - \frac{c_k - c_{k-1}}{3h_{k-1}}h_{k-1}^2 + 2c_{k-1}h_{k-1} + \frac{c_k - c_{k-1}}{h_{k-1}}h_{k-1}^2 =$$

$$= \frac{y_{k+1} - y_k}{h_k} - c_k h_k - \frac{c_{k+1} - c_k}{3h_k}h_k^2,$$

$$\boxed{\begin{array}{l} h_{k-1}c_{k-1} + 2\left(h_{k-1} + h_k\right)c_k + h_k c_{k+1} = 3\dfrac{y_{k+1} - y_k}{h_k} - 3\dfrac{y_k - y_{k-1}}{h_{k-1}}, \\ k = 1, 2\ldots, n-1 \end{array}} \qquad (6.54)$$

6.2 Khớp đường cong bằng nội suy spline

6.2.3 Xây dựng spline bậc 3

Tóm lại:

Đặt $\boxed{\boldsymbol{h_k = x_{k+1} - x_k}}$

$g_k(x)$ là đa thức bậc 3 nên có thể viết dưới dạng :

$$g_k(x) = a_k + b_k(x - x_k) + c_k(x - x_k)^2 + d_k(x - x_k)^3$$

Các hệ số a_k, b_k, d_k được xác định theo các công thức :

$$\boxed{a_k = y_k} \qquad (*)$$

$$\boxed{b_k = \frac{y_{k+1} - y_k}{h_k} - \frac{(c_{k+1} + 2c_k)h_k}{3}} \qquad (**)$$

6.2 Khớp đường cong bằng nội suy spline

6.2.3 Xây dựng spline bậc 3

$$\boxed{h_{k-1}c_{k-1} + 2\left(h_{k-1} + h_k\right)c_k + h_k c_{k+1} = 3\frac{y_{k+1} - y_k}{h_k} - 3\frac{y_k - y_{k-1}}{h_{k-1}}} \qquad (***)$$

$$\boxed{d_k = \frac{c_{k+1} - c_k}{3h_k}} \qquad (****)$$

Phương trình (***) được dùng để tính c_k, tuy nhiên nó còn thiếu. Để giải được ta cần bổ sung 1 số điều kiện.

6.2 Khớp đường cong bằng nội suy spline

6.2.3 Xây dựng spline bậc 3

❖ **Định nghĩa:**

- Spline tự nhiên là spline với điều kiện

$$g''(a) = g''(b) = 0$$

- Spline ràng buộc là spline với điều kiện

$$g'(a) = \alpha,\ g'(b) = \beta$$

6.2 Khớp đường cong bằng nội suy spline

6.2.4 Spline bậc 3 tự nhiên

❖ Thuật toán spline bậc 3 tự nhiên

Điều kiện $g''(a) = g''(b) = 0$ suy ra $c_0 = c_n = 0$

Bước 1.

Tính $h_k = x_{k+1} - x_k$, $k = 0, \ldots, n-1$.

$a_k = y_k$, $k = 0, \ldots, n$.

Bước 2.

Giải hệ $Ac = b$ tìm $c = (c_0, c_1, \ldots, c_n)^t$

6.2 Khớp đường cong bằng nội suy spline

6.2.4 Spline bậc 3 tự nhiên

Ma trận A sẽ là ma trận $n \times n$ có dạng như sau

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ h_0 & 2(h_0+h_1) & h_1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 3\dfrac{y_2-y_1}{h_1} - 3\dfrac{y_1-y_0}{h_0} \\ \cdots \\ 3\dfrac{y_n-y_{n-1}}{h_{n-1}} - 3\dfrac{y_{n-1}-y_{n-2}}{h_{n-2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ h_0 & 2(h_0+h_1) & h_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 3\dfrac{y_2-y_1}{h_1} - 3\dfrac{y_1-y_0}{h_0} \\ 0 \end{pmatrix}$$

6.2 Khớp đường cong bằng nội suy spline

6.2.4 Spline bậc 3 tự nhiên

Bước 3. Tính các hệ số b_k, d_k:

$$b_k = \frac{(y_{k+1} - y_k)}{h_k} - \frac{(c_{k+1} + 2c_k)h_k}{3}, k = 0,1,\ldots,n-1$$

$$d_k = \frac{(c_{k+1} - c_k)}{3h_k}$$

Bước 4. Xây dựng các đa thức:

$$S_k(x) = a_k + b_k(x - x_k) + c_k(x - x_k)^2 + d_k(x - x_k)^3$$

6.2 Khớp đường cong bằng nội suy spline

Ví dụ 6.2.1:

Xây dựng spline tự nhiên nội suy hàm theo bảng số

x	0	2	5
y	1	1	4

Tính $x^* = 3$

Giải

$n = 2$

$$\begin{cases} S_0(x) = a_0 + b_0(x-0) + c_0(x-0)^2 + d_0(x-0)^3 \\ S_1(x) = a_1 + b_1(x-2) + c_1(x-2)^2 + d_1(x-2)^3 \end{cases}$$

Bước 1:

$\mathbf{h_k = x_{k+1} - x_k}$ $\Rightarrow$ $h_0 = 2,\ h_1 = 3.\ a_0 = 1,\ a_1 = 1,\ a_2 = 4$

6.2 Khớp đường cong bằng nội suy spline

Ví dụ 6.2.1:

Bước 2:

Giải hệ $Ac = b$ với $c = (c_0, c_1, c_2)^t$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ h_0 & 2(h_0 + h_1) & h_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 10 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{3(y_2 - y_1)}{h_1} - \dfrac{3(y_1 - y_0)}{h_0} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

6.2 Khớp đường cong bằng nội suy spline

Ví dụ 6.2.1:

Bước 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 10 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \ c_o = c_2 = 0,\ c_1 = 3/10$$

Bước 3: Tính các hệ số b_k, d_k:

$$b_0 = \frac{(y_1 - y_0)}{h_0} - \frac{(c_1 + 2c_0)h_0}{3} = -\frac{1}{5}$$

$$b_1 = \frac{(y_2 - y_1)}{h_1} - \frac{(c_2 + 2c_1)h_1}{3} = \frac{2}{5}$$

$$d_0 = \frac{(c_1 - c_0)}{3h_0} = \frac{1}{20}, \quad d_1 = \frac{(c_2 - c_1)}{3h_1} = -\frac{1}{30}$$

6.2 Khớp đường cong bằng nội suy spline

Ví dụ 6.2.1:

Kết luận : spline tự nhiên

$$g(x) = \begin{cases} g_0(x) = 1 - \dfrac{1}{5}x + \dfrac{1}{20}x^3 & 0 \le x \le 2 \\ g_1(x) = 1 + \dfrac{2}{5}(x-2) + \dfrac{3}{10}(x-2)^2 - \dfrac{1}{30}(x-2)^3 & 2 \le x \le 5 \end{cases}$$

Tính $x^* = 3$

$g_1(3)=1 + 2/5+3/10-1/30 = (30 + 12 + 9 -1)/30 = 5/3$

6.2 Khớp đường cong bằng nội suy spline

Ví dụ 6.2.2:

Xây dựng spline tự nhiên nội suy hàm theo bảng số

x	0	1	2	3
y	1	2	4	8

Giải:

Bậc của đa thức $n = 3$

Bước 1:

$$h_0 = h_1 = h_2 = 1.\ a_0 = 1,\ a_1 = 2,\ a_2 = 4,\ a_3 = 8$$

6.2 Khớp đường cong bằng nội suy spline

Ví dụ 6.2.2:

Bước 2:

Giải hệ $Ac = b$ với $c = (c_0, c_1, c_2, c_3)^t$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ h_0 & 2(h_0 + h_1) & h_1 & 0 \\ 0 & h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6.2 Khớp đường cong bằng nội suy spline

Ví dụ 6.2.2:

Bước 2:

$$b = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{3(y_2 - y_1)}{h_1} - \dfrac{3(y_1 - y_0)}{h_0} \\ \dfrac{3(y_3 - y_2)}{h_2} - \dfrac{3(y_2 - y_1)}{h_1} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} c_0 = c_3 = 0 \\ 4c_1 + c_2 = 3 \\ c_1 + 4c_2 = 6 \end{cases}$$

$c_0 = c_3 = 0$,
$c_1 = 2/5$, $c_2 = 7/5$

6.2 Khớp đường cong bằng nội suy spline

Ví dụ 6.2.2:

Bước 3: Tính các hệ số b_k, d_k:

$$b_0 = \frac{(y_1 - y_0)}{h_0} - \frac{(c_1 + 2c_0)h_0}{3} = \frac{13}{15}, \quad b_1 = \frac{(y_2 - y_1)}{h_1} - \frac{(c_2 + 2c_1)h_1}{3} = \frac{19}{15}$$

$$b_2 = \frac{(y_3 - y_2)}{h_2} - \frac{(c_3 + 2c_2)h_2}{3} = \frac{46}{15}$$

$$d_0 = \frac{(c_1 - c_0)}{3h_0} = \frac{2}{15}, \quad d_1 = \frac{(c_2 - c_1)}{3h_1} = \frac{1}{3}, \quad d_2 = \frac{(c_3 - c_2)}{3h_2} = -\frac{7}{15}$$

6.2 Khớp đường cong bằng nội suy spline

Ví dụ 6.2.2:

Kết luận : spline tự nhiên

$$g(x)=\begin{cases} g_0(x)=1+\dfrac{13}{15}x+\dfrac{2}{15}x^3 & 0\le x\le 1 \\ g_1(x)=2+\dfrac{19}{15}(x-1)+\dfrac{2}{5}(x-1)^2+\dfrac{1}{3}(x-1)^3 & 1\le x\le 2 \\ g_2(x)=4+\dfrac{46}{15}(x-2)+\dfrac{7}{5}(x-2)^2-\dfrac{7}{15}(x-2)^3 & 2\le x\le 3 \end{cases}$$

6.2 Khớp đường cong bằng nội suy spline

6.2.5 Spline bậc 3 ràng buộc

- Điều kiện xác định một spline bậc 3 ràng buộc

$$S'(a) = \alpha,\ S'(b) = \beta$$

- Điều kiện này xác định hai phương trình

$$\begin{cases} 2h_0c_0 + h_0c_1 = 3\dfrac{y_1 - y_0}{h_0} - 3\alpha & (5.54) \\ h_{n-1}c_{n-1} + 2h_{n-1}c_n = 3\beta - 3\dfrac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}} & (5.55) \end{cases}$$

6.2 Khớp đường cong bằng nội suy spline

6.2.5 Spline bậc 3 ràng buộc

Giải thuật xác định spline ràng buộc :

Bước 1:

Tính $h_k = x_{k+1} - x_k$, $k = 0, \ldots, n-1$.

$a_k = y_k$, $k = 0, \ldots, n$.

Bước 2:

Giải hệ $Ac = b$ tìm $c = (c_0, c_1, \ldots, c_n)^t$

6.2 Khớp đường cong bằng nội suy spline

6.2.5 Spline bậc 3 ràng buộc

Giải thuật xác định spline ràng buộc :

Giải hệ $Ac = b$ với $c = (c_0, c_1, c_2, c_3)^t$

$$A = \begin{pmatrix} 2h_0 & h_0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ h_0 & 2(h_0+h_1) & h_1 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & h_{n-1} & 2h_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 3\dfrac{y_1-y_0}{h_0} - 3\alpha \\ 3\dfrac{y_2-y_1}{h_1} - 3\dfrac{y_1-y_0}{h_0} \\ \dots \\ 3\dfrac{y_n-y_{n-1}}{h_{n-1}} - 3\dfrac{y_{n-1}-y_{n-2}}{h_{n-2}} \\ 3\beta - 3\dfrac{y_n-y_{n-1}}{h_{n-1}} \end{pmatrix}$$

6.2 Khớp đường cong bằng nội suy spline

6.2.5 Spline bậc 3 ràng buộc

Bước 3:

Tính các hệ số b_k và d_k theo công thức dưới đây

$$\begin{cases} b_k = \dfrac{y_{k+1} - y_k}{h_k} - \dfrac{h_k}{3}\left(c_{k+1} + 2c_k\right) \\ d_k = \dfrac{c_{k+1} - c_k}{3h_k} \end{cases}$$

6.2 Khớp đường cong bằng nội suy spline

6.2.5 Spline bậc 3 ràng buộc

Ví dụ 6.2.3:

Xây dựng spline ràng buộc nội suy hàm theo bảng số

x	0	1	2
y	1	2	1

với điều kiện $g'(0) = g'(2) = 0$.

Giải:

Bước 1: $h_0 = h_1 = 1$. $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = 1$.

6.2 Khớp đường cong bằng nội suy spline

6.2.5 Spline bậc 3 ràng buộc

Bước 2:

$$A=\begin{pmatrix} 2h_0 & h_0 & 0 \\ h_0 & 2(h_0+h_1) & h_1 \\ 0 & h_1 & 2h_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$b=\begin{pmatrix} 3\dfrac{y_1-y_0}{h_0}-3\alpha \\ \dfrac{3(y_2-y_1)}{h_1}-\dfrac{3(y_1-y_0)}{h_0} \\ 3\beta-3\dfrac{y_2-y_1}{h_1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$c_0=3, c_1=-3, c_2=3$$

6.2 Khớp đường cong bằng nội suy spline

6.2.5 Spline bậc 3 ràng buộc

Bước 3: Tính các hệ số b_k, d_k:

$$b_0 = \frac{(y_1 - y_0)}{h_0} - \frac{(c_1 + 2c_0)h_0}{3} = 0$$

$$b_1 = \frac{(y_2 - y_1)}{h_1} - \frac{(c_2 + 2c_1)h_1}{3} = 0$$

$$d_0 = \frac{(c_1 - c_0)}{3h_0} = -2, \quad d_1 = \frac{(c_2 - c_1)}{3h_1} = 2$$

6.2 Khớp đường cong bằng nội suy spline

6.2.5 Spline bậc 3 ràng buộc

Kết luận: spline ràng buộc

$$g(x) = \begin{cases} g_0(x) = 1 + 3x^2 - 2x^3 & 0 \le x \le 1 \\ g_1(x) = 2 - 3(x-1)^2 + 2(x-1)^3 & 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

Bài tập phần nội suy spline

Bài 1. Xây dựng spline tự nhiên nội suy hàm theo bảng số

x	1	2	3	4
y	1	2	2	1

Bài 2. Xây dựng spline ràng buộc nội suy hàm theo bảng số

x	1	2	3	4
y	1	2	2	1

với điều kiện g'(1)=g'(4) = 1.

6.3 Phương pháp bình phương cực tiểu

Trong thực tế, các giá trị y_k được xác định thông qua thực nghiệm hay đo đạc nên **có thể thiếu chính xác**. Khi đó việc xây dựng một đa thức nội suy đi qua tất cả các điểm $M_k(x_k, y_k)$ cũng không còn chính xác.

Giải quyết: tìm một hàm f(x) đơn giản thể hiện tốt nhất dáng điệu của tập hợp điểm, ***không nhất thiết đi qua các điểm đó***.

Đây chính là tìm hàm $f(x)$ xấp xỉ bảng $\{(x_k, y_k)\}$ theo phương pháp bình phương cực tiểu:

$$g(f) = \sum_{k=1}^{n} \left[f(x_k) - y_k \right]^2 \to \min \qquad (6.56)$$

6.3 Phương pháp bình phương cực tiểu

Hàm *f* tổng quát rất đa dạng. Để đơn giản, ta tìm hàm *f* theo dạng:

$$a)\quad y = a + bx$$

$$b)\quad y = a + bx + cx^2$$

$$c)\quad y = a\cos x + b\sin x$$

6.3 Phương pháp bình phương cực tiểu

Trường hợp tuyến tính $f(x) = a + bx$

$$g(f) = \sum_{k=1}^{n} \left[f(x_k) - y_k \right]^2 \to \min$$

$$g(a,b) = \sum_{k=1}^{n} (a + bx_k - y_k)^2 \to \min$$

Điểm dừng => $\dfrac{\partial g}{\partial a} = 0, \quad \dfrac{\partial g}{\partial b} = 0$

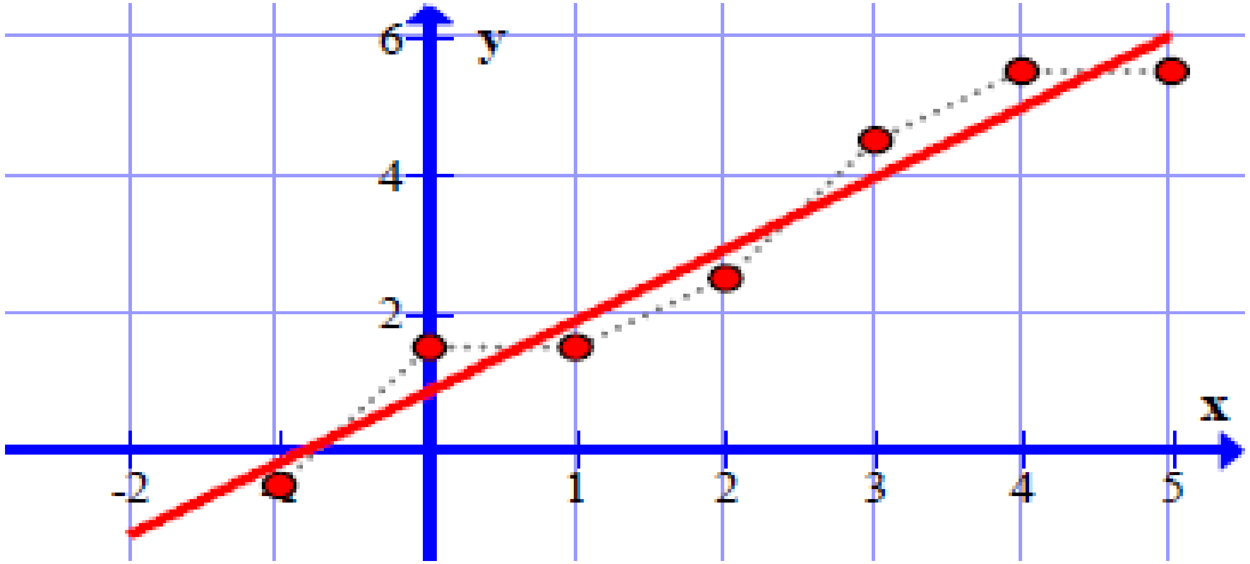
$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} 2(a + bx_k - y_k) = 0 \\ \sum_{k=1}^{n} 2(a + bx_k - y_k) x_k = 0 \end{cases}$$

Rút gọn, ta có =>

$$\begin{cases} na + b\sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{k=1}^{n} y_k \\ a\sum_{k=1}^{n} x_k + b\sum_{k=1}^{n} x_k^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \end{cases} \qquad (6.57)$$

6.3 Phương pháp bình phương cực tiểu

Trường hợp tuyến tính $f(x) = a + bx$



6.3 Phương pháp bình phương cực tiểu

Trường hợp tuyến tính $f(x) = a + bx$

Ví dụ 6.3.1 Tìm hàm $f(x) = a + bx$ xấp xỉ bảng số

x	1	1	2	2	2	3	3	4	5	6
y	1	2	2	3	4	4	5	5	6	7

theo phương pháp BPCT

Giải

Theo CT (5.57)

$$\begin{cases} na + b\sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{k=1}^{n} y_k \\ a\sum_{k=1}^{n} x_k + b\sum_{k=1}^{n} x_k^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10a + 29b = 39 \\ 29a + 109b = 140 \end{cases}$$

Nghiệm $a = 0.7671$, $b = 1.0803$

Vậy $f(x) = 0.7671 + 1.0803x$

6.3 Phương pháp bình phương cực tiểu

Trường hợp tuyến tính $f(x) = a + bx + cx^2$

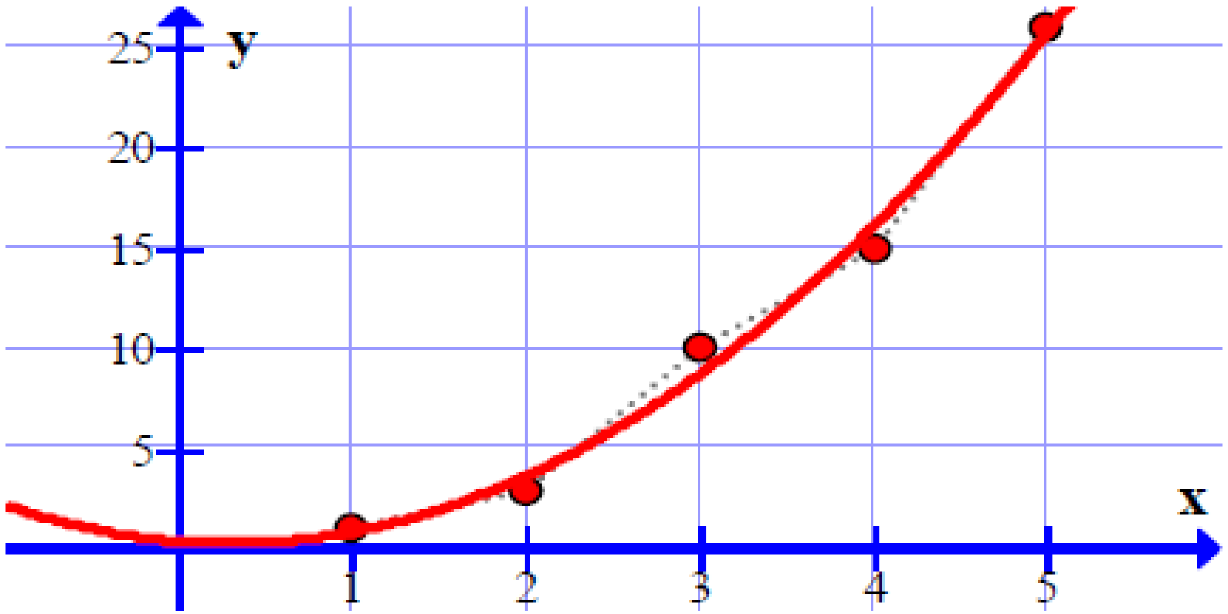
$$g(a,b,c) = \sum_{k=1}^{n}\left(a + bx_k + cx_k^2 - y_k\right)^2 \to \min$$

Điểm dừng $$\frac{\partial g}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial b} = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial c} = 0$$

$$\begin{cases} na + b\sum_{k=1}^{n} x_k + c\sum_{k=1}^{n} x_k^2 = \sum_{k=1}^{n} y_k \\ a\sum_{k=1}^{n} x_k + b\sum_{k=1}^{n} x_k^2 + c\sum_{k=1}^{n} x_k^3 = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \\ a\sum_{k=1}^{n} x_k^2 + b\sum_{k=1}^{n} x_k^3 + c\sum_{k=1}^{n} x_k^4 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 y_k \end{cases} \qquad (5.58)$$

6.3 Phương pháp bình phương cực tiểu

Trường hợp tuyến tính $f(x) = a + bx + cx^2$



6.3 Phương pháp bình phương cực tiểu

Trường hợp tuyến tính $f(x) = a + bx + cx^2$

Ví dụ 6.3.2 Tìm hàm f(x) = a + bx+cx^2 xấp xỉ bảng số

x	1	1	2	3	3	4	5
y	4.12	4.18	6.23	8.34	8.38	12.13	18.32

theo phương pháp BPCT.

6.3 Phương pháp bình phương cực tiểu

Trường hợp tuyến tính $f(x) = a + bx + cx^2$

Giải

$$\begin{cases} na + b\sum_{k=1}^{n} x_k + c\sum_{k=1}^{n} x_k^2 = \sum_{k=1}^{n} y_k \\ a\sum_{k=1}^{n} x_k + b\sum_{k=1}^{n} x_k^2 + c\sum_{k=1}^{n} x_k^3 = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \\ a\sum_{k=1}^{n} x_k^2 + b\sum_{k=1}^{n} x_k^3 + c\sum_{k=1}^{n} x_k^4 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 y_k \end{cases}$$

Theo CT (5.58) ta có: $\begin{cases} 7a + 19b + 65c = 61.70 \\ 19a + 65b + 253c = 211.04 \\ 65a + 253b + 1061c = 835.78 \end{cases}$ $\Rightarrow$

Nghiệm
a = 4.3,
b = -0.71,
c = 0.69

Vậy $f(x) = 4.3 - 0.71x + 0.69x^2$

6.3 Phương pháp bình phương cực tiểu

Trường hợp tuyến tính $f(x) = a\cos x + b\sin x$

$$g(a,b) = \sum_{k=1}^{n} \left(a\cos x_k + b\sin x_k - y_k\right)^2 \to \min$$

Điểm dừng $\dfrac{\partial g}{\partial a} = 0,\quad \dfrac{\partial g}{\partial b} = 0$

$$\begin{cases} a\sum_{k=1}^{n} \cos^2 x_k + b\sum_{k=1}^{n} \cos x_k \sin x_k = \sum_{k=1}^{n} y_k \cos x_k \\ a\sum_{k=1}^{n} \cos x_k \sin x_k + b\sum_{k=1}^{n} \sin^2 x_k = \sum_{k=1}^{n} y_k \sin x_k \end{cases} \qquad (5.59)$$

6.3 Phương pháp bình phương cực tiểu

Trường hợp tuyến tính $f(x) = a\cos x + b\sin x$

Ví dụ 6.3.3 Tìm hàm f(x) = acosx + bsinx xấp xỉ bảng số

x	10	20	30	40	50
y	1.45	1.12	0.83	1.26	1.14

theo phương pháp BPCT.

Giải

Theo CT (5.59) ta có:

$$\begin{cases} 2.2703A - 0.0735B = -0.3719 \\ -0.0735A + 2.7297B = 0.0533 \end{cases}$$

Nghiệm a = -0.1633, b=0.0151

=> f(x) = -0.1633cosx+0.0151sinx

Bài tập: Phương pháp bình phương cực tiểu

Bài 1. Tìm công thức thực nghiệm dạng $f(x) = a\cos x + b\sin x$ theo bảng số:

x	0	0.5	1
y	1	1.5	1.5

Bài 2. Tìm công thức thực nghiệm dạng $f(x) = a\cos x + b\sin x$ theo bảng số:

x	0	1	2
y	1.5	3.5	1.9

Bài tập: Phương pháp bình phương cực tiểu

Bài 3. Tìm công thức thực nghiệm dạng $f(x) = a + bx$ theo bảng số:

x	2	4	6	8	10	12
y	7.32	8.24	9.20	10.19	11.01	12.05

Bài 4. Tìm công thức thực nghiệm dạng $f(x) = a + bx + cx^2$ theo bảng số:

x	0.78	1.56	2.34	3.12	2.81
y	2.50	1.20	1.12	2.25	4.28