Chapitre 1

Intégration

1.1 Méthode de Newton-côtes

Cette méthode généralise la méthode de **Trapèzes** et la méthode de **Simpson**.La fonction f est approchée par un polynôme de degré n. L'intégrale est évaluée selon l'expression

$$\int_a^b f(x)dx \approx a_0 f(x_0) + a_1 f(x_1) + \cdots + a_n f(x_n)$$

Pour déterminer les coefficients a_j ,il suffit d'écrire la relation précédente est exacte lorsque f est un polynôme de degré $\leq n$ .En prenant successivement $f(x) = x, \quad k = 0, \cdots, n$ on obtient le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + \cdots + a_n = b - a \\ a_0 x_0 + a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = \frac{b^2 - a^2}{2} \\ \cdots \qquad \cdots \\ a_0 x_0^n + a_1 x_1^n + \cdots + a_n x_n^n = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1} \end{cases}$$

Le déterminant de ce système est un déterminant de Vandermonde qui vaut

$$(x_0 - x_1)(x_0 - x_1) \cdots (x_n - x_0)$$

. l'espace de ces points sont régulièrement espacés on obtient les formules de Newton-côtes . Pour $n = 1$ on a la méthode des **Trapèzes**.

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx \approx \frac{h}{2}[f(x_0) + f(x_1)]$$

Pour $n = 2$ on a la méthode de **Simpson**

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \frac{h}{6}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]$$

<u>Exercice :</u> Donnez la formule obtenue pour
$n = 3$, $n = 4$, $n = 6$.

1.2 Méthode de Gauss

les méthode de Gauss utilisent une subdivision particulière où les points x_j sont les racines de polynômes orthogonaux ,qui ne sont régulièrement espacés , contrairement au méthode précédentes. Les fonctions à intégrer est approchée par une interpolation de Lagrange sur les points x_j. Les méthodes de Gauss sont le plus répandues et les plus précises .Car l'intégrale exacte pour tout polynôme de degré $\leq 2n + 1$ (au lieu de n ou $n + 1$ pour les méthodes composés).
Soit ψ_n une famille de polynôme orthogonaux pour une fonction de poids $\omega(x)$ sur $[u, v]$.On cherche à exprimer $\int_u^v f(x)\omega(x)dx$.
Pour Lagrange on a :

$$f(x) \approx \sum_{i=0}^{n} l_i(x)f(x_i)$$

Avec $l_i(x) = \prod_{j=0 j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$
On a

$$\int_u^v \psi_m(x)\psi_n(x)\omega(x)dx = 0 \quad \text{si } n \neq m$$

On obtient après calculs

$$\int_u^v f(x)\omega(x)dx \approx \int_u^v \sum_{i=0}^{n} l_i(x)f(x_i)\omega(x)dx$$

c-à-d

$$\int_u^v f(x)\omega(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} \omega_i f(x_i)$$

Avec

$$\omega_i = \int_u^v l_i(x)\omega(x)dx$$

1.2.1 Intégration de Gauss-Legendre

On a $\omega(x) = 1 \quad \text{sur } [-1, 1]$

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} \omega_i f_i(x)$$

Où

$$\omega_i = \int_{-1}^{1} \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} dx$$

Avec x_i les racines du polynôme $P_{n+1}(x)$.
Exemple :
Pour $n = 1$, la relation de récurrence donne $P_2(x) = \frac{3x^2-1}{2}$.
On a deux racines $x_0 = \frac{-1}{\sqrt{3}}$ et $x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ω_is' en déduit :

$$\omega_0 = \int_{-1}^{1} \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} dx = \int_{-1}^{1} \frac{-x + \frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{2}{\sqrt{3}}} dx = 1$$

De même $\omega_1 = 1$.
L'intégrale se réduit à :

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx f\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

le changement de variables $y = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}x$,conduit à une approximation de l'intégrale

$$\int_{a}^{b} f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}\left[f\left(\frac{b+a}{2} - \frac{b-a}{2\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2\sqrt{3}}\right)\right]$$

Exercice 0 : Calculer

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \quad \text{pour } n = 2$$

1.2.2 Intégrale de Gauss-Laguerre :

$w(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{x}} \quad \text{sur } [0, \infty[$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{x}} dx \approx \sum_{i=0}^{n} \omega_i f(x_i)$$

Exercice
$n = 1$:

$P_2(x) = x^2 - 4x + 2$

$x_0 = 2 - \sqrt{2}$; $x_1 = 2 + \sqrt{2}$

$\omega_0 = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$; $\omega_0 = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{x}} dx \approx \frac{2+\sqrt{2}}{4} f(2-\sqrt{2}) + \frac{2-\sqrt{2}}{4} f(2+\sqrt{2})$$

1.2.3 Intégrale de Gauss-Tchebychev

$\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ sur $[-1, 1]$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \approx \sum_{i=0}^{n} \omega_i f(x_i)$$

Exercice : $n = 1$ $T_2(x) = 2x^2 - 1$
$x_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $x_1 = \frac{-1}{\sqrt{2}}$
$\omega_0 = \omega_1 = \frac{\pi}{2}$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \approx \frac{\pi}{2}\left[f\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]$$

1.2.4 Intégrale de Gauss-Hermite

$\omega(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{x}^2}$ sur $]-\infty, \infty[$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{x}^2} dx \approx \sum_{i=0}^{n} \omega_i f(x_i)$$

Exemple : $n = 1$, $H_2(x) = 4x^2 - 2$
$x_0 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $x_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$
$\omega_0 = \omega_1 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{x}^2} dx \approx \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left[f\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]$$

1.3 Polynômes orthogonaux

si ψ_n est une base de polynômes orthogonaux pour la fonction de poids $\omega(x)$ sur $[u, v]$,on a

$$\int_u^v \psi_n(x)\psi_m(x)\omega(x)dx \quad \text{si } n \neq m$$

Suivant le poids $\omega(x)$, on a différente types de polynôme orthogonaux .

1.3.1 Polynômes de Legendre

On appelle polynôme de Legendre de degré n ,le polynôme défini par la relation de récurrence

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x)$$

Initialisé par $P_0(x) = 1$; $P_1(x) = x$

Exercice : Donner l'expression de $P_2(x)$, $P_3(x)$, $P_4(x)$

Remarque 1. *1) Les polynômes de Legendre sont solution de l'équation différentielle*

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0.$$

2) Les polynômes de Legendre satisfont la relation de récurrence

$$(1-x^2)P_n'(x) = -nxP_n(x) + nP_{n-1}(x)$$

3) Les polynômes de Legendre sont des polynômes orthogonaux relativement à la fonction de poids $\omega(x) = 1$ sur l'intervalle $[-1, 1]$.

$$\int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x)dx = \frac{2}{2n+1}\delta_{nm}$$

En particulier $P_n(1) = 1$ et

$$\int_{-1}^1 P_n(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \frac{2^{\frac{3}{2}}}{2n+1}$$

1.3.2 Polynômes de Laguerre

On appelle Polynômes de Laguerre de l'ordre n,le polynôme défini par la relation de récurrence

$$(n+1)L_{n+1}(x) = (2n+1-x)L_n(x) - nL_{n-1}(x)$$

et les conditions d'initialisation $L_0(x) = 1$, $L_1(x) = 1 - x$

Exercice : Donner $L_2(x)$, $L_3(x)$, $L_4(x)$.

Remarque 2. *1) Les Polynômes de Laguerre sont solution de l'edo :*

$$xy'' - (1-x)y' + xy = 0.$$

2) Les Polynômes de Laguerre satisfont à la relation

$$xL_n'(x) = nL_n(x) - nL_{n-1}(x)$$

3) Les Polynômes de Laguerre sont des polynômes orthogonaux relativement à la fonction de poids $\omega(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{x}}$ définie sur $]0, \infty[$

$$\int_0^\infty L_n(x)L_m(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{x}}dx = \frac{\Gamma(n+1)}{n!}\delta_{nm}$$

1.3.3 Polynômes de Tchebychev

Les Polynômes de Tchebychev d'ordre n sont définies par la relation de récurrence

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

Avec $T_0(x) = 1$ et $T_1(x) = x$

Exercice : Donner $T_2(x)$, $T_3(x)$ et $T_4(x)$.
Le polynôme $T_n(x)$ peut être défini par la relation

$$T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$$

ou bien par

$$T_n(x) = \frac{1}{2}\left((x+\sqrt{1+x^2})^n + (x-\sqrt{1+x^2})^n\right)$$

Les Polynômes de Tchebychev sont solution de l'edo

$$(1-x^2)y'' - xy' + x^2y = 0$$

Ils satisfont la relation de récurrence

$$(1-x^2)T_n'(x) = -nxT_n(x) + nT_{n-1}(x)$$

Les polynômes de Tchebychev sont des polynômes orthogonaux relativement à la fonction de poids définie sur $[-1, 1]$ par : $\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

$$\int_{-1}^1 T_n(x)T_m(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}\delta_{nm} \quad n \neq 0$$

$$\int_{-1}^1 T_0^2(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi$$

1.3.4 Polynômes d'Hermite :

Les Polynômes d'Hermite d'ordre n sont définies par

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)$$

Avec $H_0(x) = 1$ et $H_1(x) = 2x$.

Exercice : Donner $H_2(x)$, $H_3(x)$, $H_1(x)$
Les Polynômes d'Hermite sont solution de l'edo

$$y'' - 2xy' + 2xy = 0$$

Ils satisfont la relation de récurrence

$$H_n'(x) = 2xH_{n-1}(x)$$

Les Polynômes d'Hermite sont des polynômes orthogonaux relativement à la fonction de poids $\omega(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{x}^2}$sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x)H_m(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{x}^2}dx = \sqrt{\pi}2^n n!\delta_{nm}$$