MT09-Analyse numérique élémentaire

Chapitre 2 : Méthodes directes de résolution des systèmes linéaires

Équipe de Mathématiques Appliquées

UTC

Juin 2007

Chapitre II

Résolution des systèmes linéaires

II.1 Motivations

II.1.1 Equation de la chaleur

Exercices :
Exercice II.1

Avant de commencer voyons un exemple simple qui montre que l'on peut être amené à résoudre des systèmes linéaires de grande taille.Il s'agit de la résolution de l'équation de la chaleur stationnaire en dimension 1 :

$$\left\{\begin{array}{rcl} -\frac{d^2u}{dx^2}(x) & = & f(x)\ ,\quad x\in]0,1[,\\ u(0) & = & 0,\\ u(1) & = & 0. \end{array}\right.$$

On peut imaginer $u(x)$ comme la distribution de température d'une barre de longueur 1 (dont toutes les constantes physiques ont été normalisées), chauffée de l'intérieur par un flux de chaleur $f(x)$. Les extrémités de la barre sont maintenues à une température nulle. Dans certaines situations particulières il est possible d'obtenir la solution exacte ; c'est le cas lorsque l'on connaît une double primitive de f. Dans le cas général on peut chercher une approximation de $u(x)$ en certains points (x_k), avec $k = 0 \ldots N$. Pour simplifier, on choisit des points x_k équidistants, on a donc $h = \frac{1}{N}$, et $x_k = kh$.
Aux points x_k, l'équation se récrit :

$$\left\{\begin{array}{rcl} -\frac{d^2u}{dx^2}(x_k) & = & f(x_k)\ ,\quad k=1,\ldots,N-1,\\ u(x_0) & = & 0,\\ u(x_N) & = & 0. \end{array}\right. \qquad \text{(II.1.1)}$$

On remarque par cette équation que la valeur de u est connue sur les bords de l'intervalle $[0,1]$. Les dérivées apparaissant dans l'équation sont approchées par des formules n'utilisant que la

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

valeur de u sur le réseau de points (x_k). On peut approcher la dérivée seconde de u à l'aide de la formule classique :

$$\frac{d^2u}{dx^2}(x_k) = \frac{u(x_{k-1}) - 2u(x_k) + u(x_{k+1})}{h^2} + \mathcal{O}(h^2) \qquad \text{(II.1.2)}$$

Si l'on se donne le droit de négliger le reste $\mathcal{O}(h^2)$ (on peut penser que ceci est raisonnable si le nombre N de subdivisions est assez grand), on peut obtenir une approximation $v_k \approx u(x_k)$ en écrivant les équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\frac{v_{k-1}-2v_k+v_{k+1}}{h^2} & = & f(x_k) \ , \quad k = 1, \ldots, N-1 \\ v_0 & = & 0, \\ v_N & = & 0, \end{array} \right.$$

qui peuvent se mettre sous la forme matricielle suivante :

$$\frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & & & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{N-2} \\ v_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_{N-2}) \\ f(x_{N-1}) \end{pmatrix}$$

et $v_0 = v_N = 0$.

Voilà donc un exemple de problème physique dont la résolution approchée conduit à la résolution d'un système linéaire (ici la matrice du système a une forme assez particulière : c'est une matrice *tridiagonale*). Nous allons maintenant voir quelles sont les différentes méthodes "raisonnables" de résolution des systèmes linéaires, raisonnables dans le sens où ces méthodes peuvent être facilement implantées sur ordinateur.

II.2 L'élimination de Gauss

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

II.2.1 Résolution d'un système triangulaire

Exercices :
Exercice II.2
Exercice II.3

Dans tout ce qui suit on considérera une matrice $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ qu'on supposera *inversible*. On cherche à résoudre le système linéaire

$$Ax = b, \tag{II.2.1}$$

où $b \in \mathbb{R}^n$ est donné. Un cas facile à traiter est le cas où A est une matrice triangulaire inférieure (pour fixer les idées) : on a alors

$$a_{ij} = 0, \text{ pour } j > i.$$

De plus, comme A est inversible on a nécessairement $a_{ii} \neq 0 \; \forall\, i$. La méthode de résolution est immédiate :

$$x_1 = \frac{b_1}{a_{11}},$$

puis

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \Rightarrow x_2 = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1).$$

On peut donc écrire la formule générale :

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j\right), \text{ pour } i = 2,\ 3,\ \ldots,\ n.$$

On obtient donc les valeurs des inconnues dans l'ordre naturel.

Dans le cas où la matrice A est triangulaire supérieure, le calcul des inconnues est donné par

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_n & = & \dfrac{b_n}{a_{nn}} \\ x_i & = & \dfrac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \displaystyle\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j\right), \text{ pour } i = n-1,\ n-2,\ \ldots,\ 1. \end{array}\right.$$

On notera que l'on obtient dans ce dernier cas les valeurs des inconnues dans l'ordre des indices décroissants.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

II.2.2 Principe de la méthode de Gauss et première étape

Exercices :
Exercice II.4

Le principe de la méthode d'élimination de Gauss consiste alors à mettre le système linéaire $Ax = b$ sous la forme

$$\widehat{A}x = \widehat{b} \tag{II.2.2}$$

où la matrice $\widehat{A}$ est triangulaire supérieure, la résolution de ce nouveau système étant assez simple comme on vient de le voir précédemment.

Attention ! La matrice $\widehat{A}$ n'est pas semblable à A. Autrement dit, il ne faut pas croire que les matrices A et $\widehat{A}$ ont les mêmes valeurs propres. C'est dommage, puisque les valeurs propres de $\widehat{A}$ sont ses termes diagonaux. À ce sujet, il est à noter qu'il n'est pas possible de calculer en un nombre fini d'étapes les valeurs propres d'un matrice de rang supérieur à 5.

Le système (II.2.2) est simplement équivalent au système $Ax = b$ d'où nous sommes partis et la méthode consiste à éliminer successivement des inconnues entre les équations.

Éliminons dans un premier temps la première inconnue, à savoir x_1 : on part de

$$A^{(1)} = A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad b^{(1)} = b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Principe de la méthode de Gauss et première étape

On peut alors éliminer l'inconnue x_1 entre les deux premières équations en retranchant de la deuxième ligne de A la première pré-multipliée par le coefficient $\frac{a_{21}}{a_{11}}$, à condition que a_{11} soit non nul, ce que l'on supposera pour le moment . Ceci conduit donc à remplacer

$$a_{2j}^{(1)} = a_{2j} \quad \longrightarrow \quad a_{2j}^{(2)} = a_{2j} - \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{1j} \quad \text{pour } j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$$

et parallèlement

$$b_2^{(1)} = b_2 \quad \longrightarrow \quad b_2^{(2)} = b_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} b_1 .$$

La matrice et le vecteur second membre du système prennent les formes suivantes :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \ldots & a_{2j}^{(2)} & \ldots & a_{2n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nj} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2^{(2)} \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

où on notera que le coefficient $a_{21}^{(2)}$ est nul (on a fait ce qu'il fallait pour cela), ce qui signifie que l'inconnue x_1 ne figure plus dans la deuxième équation du système.

On peut recommencer l'opération sur la troisième ligne en retranchant de celle-ci la première pré-multipliée par le coefficient $\frac{a_{31}}{a_{11}}$, et ainsi de suite. Pour la ligne i cela donne les formules

$$\left\{ \begin{array}{lcl} a_{ij}^{(1)} = a_{ij} & \longrightarrow & a_{ij}^{(2)} = a_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{1j} \quad \text{pour } j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n \\ b_i^{(1)} = b_i & \longrightarrow & b_i^{(2)} = b_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}} b_1 . \end{array} \right.$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Principe de la méthode de Gauss et première étape

Lorsqu'on a fait l'élimination jusqu'à la dernière ligne on obtient un système linéaire sous la forme $A^{(2)}x = b^{(2)}$ avec

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \dots & a_{2j}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{i2}^{(2)} & \dots & a_{ij}^{(2)} & \dots & a_{in}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & \dots & a_{nj}^{(2)} & \dots & a_{nn}^{(2)} \end{pmatrix}, \quad b^{(2)} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2^{(2)} \\ \vdots \\ b_i^{(2)} \\ \vdots \\ b_n^{(2)} \end{pmatrix}$$

On dit qu'on vient de réaliser la *première étape* de l'élimination de Gauss, ce qui a consisté à faire apparaître des 0 sur la première colonne en dessous de la diagonale.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

II.2.3 Deuxième étape

Exercices :
Exercice II.5

La deuxième étape consiste à éliminer la deuxième inconnue x_2 des équations 3, 4, $\ldots$, n. Pour cela on commence par la troisième ligne, en supposant maintenant que $a_{22}^{(2)}$ est non nul. Ce qui conduit aux formules :

$$\left\{\begin{array}{lll} a_{3j}^{(2)} & \longrightarrow & a_{3j}^{(3)} = a_{3j}^{(2)} - \frac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} a_{2j}^{(2)} \quad \text{pour } j = 2,\ 3,\ \ldots,\ n \\ b_3^{(2)} & \longrightarrow & b_3^{(3)} = b_3^{(2)} - \frac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} b_2^{(2)}. \end{array}\right.$$

La formule pour la ligne i ($i = 3, \ldots, n$) s'écrit alors

$$\left\{\begin{array}{lll} a_{ij}^{(2)} & \longrightarrow & a_{ij}^{(3)} = a_{ij}^{(2)} - \frac{a_{i2}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} a_{2j}^{(2)} \quad \text{pour } j = 2,\ 3,\ \ldots,\ n \\ b_i^{(2)} & \longrightarrow & b_i^{(3)} = b_i^{(2)} - \frac{a_{i2}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} b_2^{(2)}. \end{array}\right.$$

Ce calcul étant fait jusqu'à la ligne n, on obtient un système sous la forme
$A^{(3)}x = b^{(3)}$ avec

$$A^{(3)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \ldots & a_{2j}^{(2)} & \ldots & a_{2n}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \ldots & a_{3j}^{(3)} & \ldots & a_{3n}^{(3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(3)} & \ldots & a_{nj}^{(3)} & \ldots & a_{nn}^{(3)} \end{pmatrix}, \quad b^{(3)} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2^{(2)} \\ b_3^{(3)} \\ \vdots \\ b_n^{(3)} \end{pmatrix}$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

II.2.4 Étape générale

Exercices :
Exercice II.6

On peut alors définir l'algorithme général en supposant qu'on a effectué $k-1$ étapes de l'élimination de Gauss, et on a un système qui s'écrit $A^{(k)}x = b^{(k)}$, avec $A^{(k)}$ et $b^{(k)}$ donnés par

$$A^{(k)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \dots & a_{2k}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \dots & a_{3k}^{(3)} & \dots & a_{3n}^{(3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{kk}^{(k)} & \dots & a_{kn}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nk}^{(k)} & \dots & a_{nn}^{(k)} \end{pmatrix}, \quad b^{(k)} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2^{(2)} \\ b_3^{(3)} \\ \vdots \\ b_k^{(k)} \\ \vdots \\ b_n^{(k)} \end{pmatrix}$$

L'étape k consiste à faire l'élimination de la variable x_k dans les équations $k+1, k+2, \dots, n$. Ceci conduit aux formules suivantes, définies pour $i = k+1,\ k+2,\ \dots,\ n$,

$$\begin{cases} a_{ij}^{(k)} & \longrightarrow \quad a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} a_{kj}^{(k)} \quad \text{pour } j = k,\ k+1,\ \dots,\ n \\ b_i^{(k)} & \longrightarrow \quad b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} b_k^{(k)}. \end{cases}$$

– On voit que la ligne i de la matrice $A^{(k)}$ et du vecteur $b^{(k)}$ n'est plus modifiée par l'algorithme dès que $i \leq k$.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Étape générale

- À l'étape k on pratique l'élimination sur une matrice carrée dont la taille est $n-k+1$.
- Les modifications effectuées sur la matrice A au cours des étapes ne changent pas la valeur du déterminant puisqu'une ligne est toujours remplacée par elle même plus une combinaison de la ligne "pivot". On a donc

$$\det A = \det A^{(k)}\,, \quad \textbf{pour} \quad k = 1, \ldots, n.$$

- L'algorithme se termine à l'étape $k = n$. La matrice $A^{(n)}$ ainsi obtenue est la matrice triangulaire supérieure $\widehat{A}$ cherchée et $b^{(n)}$ est le vecteur $\widehat{b}$ du système $\widehat{A}x = \widehat{b}$, qui est bien équivalent au système $Ax = b$.

II.2.5 Algorithme d'élimination de Gauss

Exercices :
Exercice II.7
Exercice II.8

En partant de $A^{(1)} = A$ et $b^{(1)} = b$ on construit par récurrence, pour $k = 1, 2, \ldots, n$, des matrices $A^{(k)}$ et des vecteurs $b^{(k)}$ tels que le système $Ax = b$ soit équivalent à

$$A^{(k)}x = b^{(k)},$$

de plus la matrice $A^{(n)}$ est triangulaire supérieure.

Définition II.2.1. *On appelle* ***pivots*** *les nombres* $a_{kk}^{(k)}$.

Comme nous l'avons déjà noté, l'étape k de l'élimination ne modifie que les lignes et les colonnes $k+1$ à n. Cela veut dire que de façon pratique, on n'a pas besoin de conserver les différentes versions de $A^{(k)}$ et $b^{(k)}$. On travaille donc avec la matrice A et le vecteur b originaux, dans lesquels on écrase au fur et à mesure les anciens termes.

Attention !

– On ne peut pas a priori savoir si les pivots seront non nuls, en effet l'étape k de l'algorithme modifie les valeurs de termes diagonaux des lignes $k+1, k+2, \ldots, n$.
– L'algorithme peut s'arrêter si à une étape quelconque k on a $a_{kk}^{(k)} = 0$. Cette situation peut malheureusement se produire même si la matrice est régulière, comme le montre l'exemple suivant :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{II.2.3}$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

où $a_{11}^{(1)} = 0$! En examinant ce petit exemple, on voit qu'en permutant les deux lignes de A le système est triangulaire et l'élimination de Gauss est toute faite ! On peut donc espérer qu'en *permutant* éventuellement les lignes et/ou les colonnes on puisse toujours trouver un pivot non nul.

Algorithme d'élimination de GAUSS

pour $k = 1$ jusqu'à $n - 1$ **faire**
  si $|a_{kk}| < \varepsilon$ **alors**
    Arrêter l'algorithme et donner un message d'erreur
  sinon
    pour $i = k + 1$ jusqu'à n **faire**
      $c \leftarrow a_{ik}/a_{kk}$
      $b_i \leftarrow b_i - cb_k$
      $a_{ik} \leftarrow 0$
      pour $j = k + 1$ jusqu'à n **faire**
        $a_{ij} \leftarrow a_{ij} - ca_{kj}$
      fin pour
    fin pour
  fin si
fin pour
si $|a_{nn}| < \varepsilon$ **alors**
  Arrêter l'algorithme et donner un message d'erreur
fin si

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

II.2.6 Écriture matricielle de l'élimination de Gauss

Exercices :
Exercice II.9

L'élimination de Gauss consiste à construire une suite de matrice $A^{(1)}, A^{(2)}, ..., A^{(n)}$. La matrice du système que l'on résout est la matrice triangulaire $A^{(n)}$. L'indice i étant donné, on va exprimer la ième ligne de A à partir des lignes de la matrice $A^{(n)}$. Pour une notation lisible, nous noterons la ième ligne d'une matrice C : $\underline{C}_i$.

On peut tout d'abord remarquer que, à partir de la matrice $A^{(i)}$, la ième ligne n'est plus modifiée, c'est-à-dire :

$$\underline{A}_i^{(i)} = \underline{A}_i^{(i+1)} = ... = \underline{A}_i^{(n)} \tag{II.2.4}$$

Explicitons successivement la ième ligne des matrices $A^{(1)}, A^{(2)}, ...$

$\underline{A}_i^{(1)} = \underline{A}_i$

$\underline{A}_i^{(2)} = \underline{A}_i^{(1)} - m_{i1}\underline{A}_1^{(1)}$, avec $m_{i1} = \dfrac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}$

$\underline{A}_i^{(3)} = \underline{A}_i^{(2)} - m_{i2}\underline{A}_2^{(2)}$, avec $m_{i2} = \dfrac{a_{i2}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}$

....

$\underline{A}_i^{(i)} = \underline{A}_i^{(i-1)} - m_{i,i-1}\underline{A}_{i-1}^{(i-1)}$, avec $m_{ii-1} = \dfrac{a_{i,i-1}^{(i-1)}}{a_{i-1,i-1}^{(i-1)}}$

En ajoutant les égalités précédentes, on obtient :

$$\underline{A}_i = m_{i1}\ \underline{A}_1^{(1)} + m_{i2}\ \underline{A}_2^{(2)} + ... + m_{i,i-1}\ \underline{A}_{i-1}^{(i-1)} + \underline{A}_i^{(i)}$$

En utilisant l'équation II.2.4, on a :

$$\underline{A}_i = m_{i1}\ \underline{A}_1^{(n)} + m_{i2}\ \underline{A}_2^{(n)} + ... + m_{i,i-1}\ \underline{A}_{i-1}^{(n)} + \underline{A}_i^{(n)}.$$

Si l'on pose $m_{ii} = 1,\ m_{ij} = 0$ pour $j > i$, on obtient :

$$\underline{A}_i = m_{i1}\underline{A}_1^{(n)} + \ldots + m_{i,i-1}\underline{A}_{i-1}^{(n)} + m_{ii}\underline{A}_i^{(n)} + m_{i,i+1}\underline{A}_{i+1}^{(n)} + \ldots + m_{in}\underline{A}_n^{(n)}.$$

En utilisant les propriétés du produit matriciel, cela s'écrit :

$$\underline{A}_i = (m_{i1}\ m_{i2}\ ...\ m_{in})A^{(n)},\ \text{donc } A = MA^{(n)}$$

où M est la matrice définie par :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ m_{n1} & m_{n2} & \ldots & \ldots & m_{nn-1} & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice M est triangulaire inférieure avec des 1 sur la diagonale, cette matrice est souvent notée L, la matrice $A^{(n)}$ est triangulaire supérieure, elle est souvent notée U, on vient d'écrire une factorisation de A sous la forme $A = LU$.

On pourrait montrer de manière similaire que $A = L^{(k-1)}A^{(k)}$, avec

$$L^{(k-1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & ... & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 & \ldots & \ldots & ... & 0 \\ ... & ... & 1 & 0 & \ldots & ... & 0 \\ m_{k1} & \ldots & m_{kk-1} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ m_{k+11} & \ldots & m_{k+1k-1} & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ m_{n1} & ... & m_{k+1k-1} & 0 & ... & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Écriture matricielle de l'élimination de Gauss

II.2.7 Unicité de la factorisation LU

Exercices :
Exercice II.10

Cours :
Eliminationde Gauss / factorisation $A = LU$

Dans le paragraphe référencé, nous avons montré qu'une matrice A pouvait se factoriser en un produit d'une matrice triangulaire inférieure L et d'une matrice triangulaire supérieure U à condition que l'on puisse appliquer l'élimination de Gauss à la matrice A, ce qui est possible si les pivots sont non nuls. Nous avons alors le théorème suivant :

Théorème II.2.2. *Si au cours de l'élimination de Gauss les pivots sont non nuls, alors il existe une matrice triangulaire inférieure L et une matrice triangulaire supérieure U, telles que l'on ait*

$$A = LU. \tag{II.2.5}$$

De plus si on impose à L d'avoir ses éléments diagonaux égaux à 1 alors la factorisation est unique.

Démonstration - Il reste à démontrer l'unicité. Soit donc une autre factorisation :

$$A = \widetilde{L}\widetilde{U},$$

$\widetilde{L}$ ayant ses éléments diagonaux égaux à 1. On a donc

$$LU = \widetilde{L}\widetilde{U},$$

et comme les matrices L et U sont inversibles, on peut écrire

$$\widetilde{L}^{-1}L = \widetilde{U}U^{-1}$$

or $\widetilde{L}^{-1}L$ est une matrice triangulaire inférieure qui a ses éléments diagonaux égaux à 1, et $\widetilde{U}U^{-1}$ est une matrice triangulaire supérieure. Ces deux matrices ne peuvent être égales que si, d'une part, elles sont diagonales et que, d'autre part, il y a égalité des éléments diagonaux (égaux à 1 pour $\widetilde{L}^{-1}L$), d'où

$$\widetilde{L}^{-1}L = \widetilde{U}U^{-1} = I,$$

et donc $L = \widetilde{L}$ et $U = \widetilde{U}$.

Dans cette démonstration on a utilisé des résultats sur les matrices triangulaires qui ont été démontrés en exercice dans le chapitre de révision d'algèbre linéaire. En particulier, le produit de deux matrices triangulaires inférieures (resp. supérieures) est triangulaire inférieure (resp. supérieure) et l'inverse d'une matrice triangulaire inférieure (resp. supérieure) est triangulaire inférieure (resp. supérieure) avec ses éléments diagonaux qui sont les inverses des éléments diagonaux de la matrice originale.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

II.3 Calcul direct de la factorisation $A = LU$

II.3.1 Motivations de la factorisation LU

Exercices :
Exercice II.11

Cours :
Eliminationde Gauss / factorisation $A = LU$

– *Résolution des systèmes linéaires*
Dans certaines situations on a besoin de résoudre plusieurs fois le système linéaire $Ax = b$ avec la même matrice A mais pour plusieurs seconds membres différents. Il semble alors inutile de recommencer les opérations d'élimination sur A qui est inchangée et l'on n'effectue celles-ci que sur le second membre b. Ces opérations étant *linéaires* on doit pouvoir les mettre sous forme matricielle.
Reprenons le système

$$Ax = b. \tag{II.3.1}$$

Si l'on dispose d'une factorisation $A = LU$, telle que celle obtenue dans le paragraphe référencé, mais que nous allons calculer directement dans les paragraphes suivants, alors on peut récrire $Ax = b$ sous la forme

$$LUx = b. \tag{II.3.2}$$

La solution de ce système s'obtient en résolvant successivement les deux systèmes

$$\left\{ \begin{array}{rcl} Ly & = & b, \\ Ux & = & y, \end{array} \right.$$

ce qui correspond à la résolution de deux systèmes triangulaires.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

– *Calcul du déterminant*

Comme nous l'avons déjà souligné la matrice U n'est pas semblable à A, cependant on a

$$\det(A) = \det(LU) = \det(L)\det(U) = \det(U) = \prod_{k=1}^{n} a_{kk}^{(k)},$$

ce qui fournit une méthode économique (par rapport au développement suivant une ligne ou une colonne) de calcul du déterminant de A. A titre d'exemple dans le cas $n = 10$ il faut de l'ordre de 10^3 opérations en utilisant le méthode de Gauss et de l'ordre de 10^7 opérations par un calcul direct. Dans ce cas on n'a pas besoin d'expliciter L puisque son déterminant vaut a priori 1.

II.3.2 Principe du calcul direct de la factorisation LU

Exercices :
Exercice II.12

Rappelons la présentation classique de l'algorithme de Doolittle. On oublie l'algorithme d'élimination de Gauss, pour chercher directement une décomposition de A de la forme $A = LU$, où L est triangulaire inférieure et U triangulaire supérieure. Pour assurer l'unicité de la décomposition, nous demandons que la diagonale de L soit unitaire ($l_{ii} = 1$, $i = 1, \ldots, n$).

Traitons un exemple, soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 5 & -3 \\ -2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$,

on cherche $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \times & 1 & 0 \\ \times & \times & 1 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & \times \end{pmatrix}$ telles que $A = LU$.

- On identifie la première ligne de A et la première ligne de LU, cela permet d'obtenir la première ligne de U :

$$LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \times & 1 & 0 \\ \times & \times & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} & -\mathbf{2} \\ 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & \times \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} & -\mathbf{2} \\ 4 & 5 & -3 \\ -2 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

- On identifie la première colonne de A avec la première colonne de LU, cela permet d'obtenir la première colonne de L :

$$LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{2} & 1 & 0 \\ -\mathbf{1} & \times & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & \times \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ \mathbf{4} & 5 & -3 \\ -\mathbf{2} & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

- On identifie la deuxième ligne de A avec la deuxième ligne de LU, cela permet d'obtenir la deuxième ligne de U :

$$LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & \times & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & \times \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & \mathbf{5} & -\mathbf{3} \\ -2 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

- On identifie la deuxième colonne de A avec la deuxième colonne de LU, cela permet d'obtenir la deuxième colonne de L :

$$LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & \mathbf{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & \times \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 5 & -3 \\ -2 & \mathbf{5} & 3 \end{pmatrix}.$$

- On identifie la troisième ligne de A avec la troisième ligne de LU, cela permet d'obtenir la troisième ligne de U :

$$LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -\mathbf{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 5 & -3 \\ -2 & 5 & \mathbf{3} \end{pmatrix}.$$

Une autre méthode consiste à calculer toujours explicitement une décomposition LU de la matrice A, mais cette fois-ci c'est la diagonale de U qui est formée de 1 mais non plus celle de L. Cette méthode, vue en exercice, conduit à l'algorithme de Crout.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

II.3.3 Algorithme de Doolittle

Exercices :
Exercice II.13

En écrivant $A = LU$ et en se souvenant que les matrice L et U sont triangulaires et que les termes diagonaux de L valent 1, on obtient

$$\underline{A}_i = \underline{L}_i U = \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} \underline{U}_k + \underline{U}_i. \Longleftrightarrow \underline{U}_i = \underline{A}_i - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} \underline{U}_k.$$

Nous voyons que pour calculer les éléments de la ième ligne de U, $\underline{U}_i$, il nous faut connaître préalablement les éléments des lignes 1 à $i-1$ de U ainsi que les éléments des colonnes 1 à $i-1$ de L. On peut remarquer de plus que, pratiquement, on ne calculera que les termes u_{ij} pour j compris entre i et n, puisque les autres termes de la ligne sont connus car nuls.

De manière similaire on a :

$$A_i = LU_i = \sum_{k=1}^{i-1} u_{ki} L_k + u_{ii} L_i. \Longleftrightarrow L_i = \frac{1}{u_{ii}} \left(A_i - \sum_{k=1}^{i-1} u_{ki} L_k \right).$$

Nous voyons que, pour calculer les éléments de la ième colonne de L, L_i, il nous faut connaître préalablement les éléments des lignes 1 à i de U ainsi que les éléments des colonnes 1 à $i-1$ de L. On peut remarquer de plus que, pratiquement, on ne calculera que les termes l_{ji} pour j compris entre $i+1$ et n, puisque on sait déjà que $l_{ii} = 1$ et que les autres termes de la colonne sont nuls.

Nous allons donc calculer :

– la première ligne de U, puis la première colonne de L,

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

– la deuxième ligne de U, puis la deuxième colonne de L,...

et ainsi de suite. Cet algorithme est décrit ci-dessous, si besoin est, il faut compléter les matrices L et U, pour U en mettant des zéros pour la partie triangulaire inférieure, pour L en mettant des zéros pour la partie triangulaire supérieure et des uns sur la diagonale.

Algorithme de DOOLITTLE

pour $i = 1$ jusqu'à $n - 1$ **faire**
    pour $j = i$ jusqu'à n **faire**
        $u_{ij} \leftarrow a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj}$
    fin pour
    pour $j = i + 1$ jusqu'à n **faire**
        $l_{ji} \leftarrow \frac{1}{u_{ii}} \left(a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk} u_{ki} \right)$
    fin pour
fin pour
$u_{nn} \leftarrow a_{nn} - \sum_{k=1}^{n-1} l_{nk} u_{kn}$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

II.4 Factorisation LU avec recherche de pivots

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

II.4.1 Faisabilité de la factorisation $A = LU$

Exercices :
Exercice II.14

Tout ce que nous avons fait jusqu'ici suppose qu'à aucun moment on ne rencontre de pivot nul. Nous allons voir ici qu'il existe une condition simple pour garantir la non-nullité de ces pivots. Voici tout d'abord une définition qui va nous servir par la suite :

Définition II.4.1. *On appelle sous-matrice principale d'ordre k de la matrice A et on note $[A]_k$ la matrice*

$$[A]_k = (a_{ij})_{1 \leq i \leq k,\ 1 \leq j \leq k} \,.$$

On a le théorème suivant :

Théorème II.4.2. *Les trois propositions suivantes sont équivalentes :*

- *Proposition 1 :*

$$\textit{Tous les pivots } a_{kk}^{(k)} \textit{ sont définis et } a_{kk}^{(k)} \neq 0,\ k = 1, ..., n.$$

- *Proposition 2 :*

$$A \textit{ admet une factorisation } A = LU \textit{ avec } U \textit{ inversible .}$$

- *Proposition 3 :*

$$[A]_1,\ [A]_2,\ \ldots, [A]_n \textit{ inversibles.}$$

Démonstration

II.4.2 Pivot nul. Permutation de lignes

On suppose toujours que la matrice A est inversible, mais cette fois la condition énoncée dans le thérorème II.4.2 n'est plus vérifiée, supposons que l'on a :

$a_{11}^{(1)} \neq 0, a_{22}^{(2)} \neq 0, ..., a_{k-1k-1}^{(k-1)} \neq 0, a_{kk}^{(k)} = 0.$

On a donc pu construire la matrice $A^{(k)}$ comme précédemment :

$$A^{(k)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & \times & \ldots & \times & \ldots & \times \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \ldots & \times & \ldots & \times \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & a_{kk}^{(k)} & \ldots & a_{kn}^{(k)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & a_{nk}^{(k)} & \ldots & a_{nn}^{(k)} \end{pmatrix}$$

Par contre puisque $a_{kk}^{(k)} = 0$, il n'est pas possible de calculer $A^{(k+1)}$ comme précédemment. Existe-t-il un coefficient $a_{ik}^{(k)}, i = k+1, ...n$ non nul ? Si c'est le cas, comme l'ordre des équations composant un système d'équations linéaires ne joue aucun rôle, nous pouvons permuter la $k^{\text{ème}}$ ligne avec l'une des lignes suivantes, il faut bien sûr permuter les seconds membres en parallèle. On obtiendra un nouveau coefficient $a_{kk}^{(k)}$ non nul et on pourra poursuivre.

Existe-t-il un coefficient $a_{ik}^{(k)}, i > k$ non nul ? La réponse est oui, montrons-le.

Si l'on pose

$$S_k = \begin{pmatrix} a_{k,k}^{(k)} & \ldots & a_{k,n}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,k}^{(k)} & \ldots & a_{nn}^{(k)} \end{pmatrix},$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

on montre aisément que

$$\det A^{(k)} = a_{11}^{(1)} a_{22}^{(2)} \ldots a_{k-1k-1}^{(k-1)} \det S_k.$$

Or $\det A^{(k)} = \det A \neq 0$, donc $\det S_k \neq 0$, donc la première colonne de S_k n'est pas nulle, donc il existe un coefficient $a_{ik}^{(k)}, i > k$ non nul. Il est donc possible de continuer l'élimination de Gauss à condition d'échanger l'ordre des équations.

Proposition II.4.1. *À toute étape k de la méthode d'élimination de Gauss il existe au moins un élément non nul dans la colonne k et situé sur la ligne i avec $i \geq k$.*

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

II.4.3 Choix du pivot. Pivot maximal

Exemples :
Exemple II.1

Exercices :
Exercice II.15

En théorie, ce n'est que lorsqu'un pivot est nul que l'on est obligé de permuter les équations donc les lignes de A. Pratiquement, il y a des cas où le pivot n'est pas nul, mais où l'échange des lignes est souhaitable à cause des erreurs numériques, voir l'exemple référencé. On peut démontrer que l'on a intérêt, au moment de l'élimination de chacune des inconnues x_k, à rechercher puis choisir, le coefficient $a_{ik}^{(k)}$ le plus grand en module pour $k \leq i \leq n$, puis l'ayant trouvé de permuter les lignes correspondantes. En outre, l'expérience numérique confirme ce résultat mathématique.

En pratique donc, on fera toujours (même si $a_{kk}^{(k)}$ est non nul) des échanges de lignes de façon à avoir le pivot le plus grand en valeur absolue : à l'étape k de l'élimination de Gauss, on recherchera dans la colonne k, pour les indices de ligne i variant de k à n, l'élément $a_{lk}^{(k)}$ tel que

$$\forall i \in \{k, k+1, \ldots, n\},\ |a_{ik}^{(k)}| \leq |a_{lk}^{(k)}|$$

et on échangera les lignes l et k. Une étape de l'algorithme d'élimination de Gauss avec permutation de lignes peut donc se représenter par

$$A^{(k+1)} = M^{(k)} P^{(k)} A^k,$$

où $P^{(k)}$ est la matrice de permutation permettant de permuter les lignes l et k où $l \geq k$. Comme on peut le montrer dans l'exercice référencé, cette matrice a tous ses éléments nuls sauf

$$\left\{ \begin{array}{lcl} p_{ii} & = & 1, \quad i \neq k,\ i \neq l \\ p_{kl} & = & 1, \\ p_{lk} & = & 1. \end{array} \right.$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Cette matrice étant une matrice de permutation symétrique elle possède la propriété

$$P^{(k)} = {P^{(k)}}^T = {P^{(k)}}^{-1}.$$

II.4.4 La factorisation $PA = LU$

Exemples :
Exemple II.2

Vous pouvez commencer par étudier l'exemple référencé. Dans le cas général :

- – On commence par une recherche de pivot maximal dans la première colonne de A, si ce pivot se trouve en ligne numéro ℓ, on échange les lignes 1 et ℓ de A, c'est-à-dire si $P^{(1)}$ est la matrice de permutation qui échange la ligne 1 et la ligne ℓ, on calcule

  $$\hat{A}^{(1)} = P^{(1)}A.$$

  – On effectue la première étape de la méthode de Gauss sur la matrice $\hat{A}^{(1)}$, c'est-à-dire on détermine $L^{(1)}$ et $A^{(2)}$ telles que

  $$P^{(1)}A = L^{(1)}A^{(2)}.$$

- – On effectue une recherche de pivot maximal dans la deuxième colonne de $A^{(2)}$, si ce pivot se trouve en ligne numéro ℓ, on échange les lignes 2 et ℓ de $A^{(2)}$, c'est-à-dire on calcule $P^{(2)}A^{(2)}$ où $P^{(2)}$ est la matrice de permutation qui échange les lignes 2 et ℓ.
  On peut alors remarquer que $P^{(2)}P^{(1)}A = P^{(2)}L^{(1)}P^{(2)}P^{(2)}A^{(2)}$, en appliquant la proposition II.4.2 $P^{(2)}L^{(1)}P^{(2)} = \hat{L}^{(1)}$, on peut poser $\hat{A}^{(2)} = P^{(2)}A^{(2)}$, on a donc

  $$P^{(2)}P^{(1)}A = \hat{L}^{(1)}\hat{A}^{(2)}.$$

  – On effectue la deuxième étape de la méthode de Gauss sur la matrice $\hat{A}^{(2)}$, c'est-à-dire on détermine $L^{(2)}$ et $A^{(3)}$ telles que

  $$P^{(2)}P^{(1)}A = L^{(2)}A^{(3)}.$$

- De façon générale lorsque l'on a obtenu

$$P^{(k-1)}...P^{(1)}A = L^{(k-1)}A^{(k)},$$

  – on pivote sur la colonne k de $A^{(k)}$, on obtient

$$P^{(k)}P^{(k-1)}...P^{(1)}A = \hat{L}^{(k-1)}\hat{A}^{(k)}$$

  – on effectue la kième étape de la méthode de Gauss, on obtient

$$P^{(k)}P^{(k-1)}..P^{(1)}A = L^{(k)}A^{(k+1)}.$$

- On obtient après $n-1$ étapes :

$$P^{(n-1)}P^{(n-2)}...P^{(1)}A = L^{(n-1)}A^{(n)},$$

  si l'on pose $P = P^{(n-1)}P^{(n-2)}...P^{(1)}$, $L = L^{(n-1)}$, $U = A^{(n)}$, on a obtenu la factorisation recherchée $PA = LU$.

Théorème II.4.3. *Soit A une matrice inversible. Alors il existe une matrice triangulaire inférieure L, une matrice triangulaire supérieure U, et une matrice de permutation P telles que*

$$PA = LU. \tag{II.4.1}$$

Nous avons utilisé la proposition suivante :

Proposition II.4.2. *Soit $L^{(k-1)}$ une matrice triangulaire inférieure à diagonale unité vérifiant de plus*

$$[L^{(k-1)}]_{ij} = 0, \; i > j > k-1,$$

et soit $P^{(k)}$ la matrice de permutation de l'étape k de l'algorithme de Gauss avec recherche de pivot, permutant les lignes k et l où $l \geq k$. Alors on a

$$P^{(k)} L^{(k-1)} P^{(k)} = \hat{L}^{(k-1)},$$

où $\hat{L}^{(k-1)}$ est une matrice triangulaire inférieure obtenue à partir de $L^{(k-1)}$ en permutant les termes des lignes k et l dans les colonnes 1 à $k-1$.

Démonstration

Remarquons que, dans la pratique, il est inutile de stocker toutes les matrices $P^{(k)}$, il suffit à chaque échange de mettre à jour un vecteur p, reprenez l'exemple.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

II.4.5 Algorithme de la factorisation $PA = LU$

Comme dans le cas de la factorisation $A = LU$, il n'y a pas besoin de conserver les matrices successives $A^{(k)}$ et $L^{(k)}$. En ce qui concerne les permutations, on en garde l'historique en mettant à jour un vecteur p valant initialement

$$p = [1,\ 2, \ldots,\ n]^T,$$

sur lequel on effectuera les permutations successives représentées par les matrices $P^{(k)}$, $k = 1, \ldots, n-1$.

En ce qui concerne la recherche de l'élément pivot, on recherchera le pivot le plus grand en valeur absolue pour les raisons déjà évoquées précédemment.

Algorithme de factorisation $PA = LU$

$L \leftarrow I$
$p \leftarrow [1, 2, \ldots, n]^T$
pour $k = 1$ jusqu'à $n - 1$ **faire**
  Trouver l tel que $|a_{lk}| \geq |a_{ik}|,\ i = k \ldots n$
  si $|a_{lk}| < \varepsilon$ **alors**
    Arrêter l'algorithme et donner un message d'erreur
  sinon
    Appliquer la permutation (k, l) au vecteur p, aux lignes de A et aux lignes de L dans les colonnes 1 à $k - 1$
    pour $i = k + 1$ jusqu'à n **faire**
      $l_{ik} \leftarrow a_{ik}/a_{kk}$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

pour $j = k$ jusqu'à n **faire**
$a_{ij} \leftarrow a_{ij} - l_{ik} a_{kj}$
fin pour
fin pour
fin si
fin pour
si $|a_{nn}| < \varepsilon$ **alors**
Arrêter l'algorithme et donner un message d'erreur
fin si

Le dernier test est important car la valeur de a_{nn}, qui n'est pas un pivot, n'est pas testée dans la boucle principale. Le message d'erreur à afficher dans les deux cas pourrait être du type «la matrice est singulière à la précision machine».

II.4.6 Application à la résolution d'un système linéaire

Comment utilise-t-on cette factorisation pour résoudre un système linéaire ? C'est aussi simple que pour la factorisation LU “classique”. On a $Ax = b$ que l'on multiplie à gauche par la matrice de permutation P. On a donc

$$PAx = Pb,$$

soit $LUx = Pb$. La solution de ce système s'obtient en résolvant successivement les deux systèmes

$$\begin{cases} Ly &= Pb, \\ Ux &= y, \end{cases}$$

ce qui correspond toujours à la résolution de deux systèmes triangulaires. La seule différence est qu'ici on doit permuter les composantes du vecteur b avant résolution.

De façon pratique, on n'explicite jamais la matrice de permutation P mais on dispose (voir algorithme précédent) du vecteur p défini par

$$p = P \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}.$$

Le vecteur $c = Pb$ est donc le vecteur

$$c = \begin{pmatrix} b_{p_1} \\ b_{p_2} \\ \vdots \\ b_{p_n} \end{pmatrix}.$$

Pour le calcul du déterminant de A, on a

$$\text{dét } PA = \text{dét } P \text{ dét } A = \Pi_{k=1}^{n} u_{kk},$$

avec dét $P = (-1)^q$ où q est le nombre de permutations différentes de l'identité qui ont été effectuées sur A.

II.4.7 La méthode du pivot total

Dans certaines situations la permutation des lignes est insuffisante. En effet il est possible que dans une colonne on ne puisse pas trouver d'élément suffisamment grand en valeur absolue (par rapport à un seuil que l'on se fixe). Ceci conduit à rechercher à chaque étape k de la méthode de Gauss, l'élément de la sous-matrice

$$\begin{pmatrix} a_{k,k} & \dots & a_{k,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,k} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

dont la valeur absolue est maximum. Ceci nécessite alors une permutation des lignes *et* des colonnes. Cela correspond à échanger des équations du système, ainsi que des inconnues. En termes de factorisation de type $A = LU$, cette approche permet d'obtenir L et U respectivement triangulaire inférieure et triangulaire supérieure, telles que

$$LU = PAQ,$$

où P et Q sont des matrices de permutation. Cette méthode est rarement utilisée, car la recherche du pivot peut très vite devenir coûteuse (quand la matrice est grande) par rapport au gain de précision éventuellement obtenu.

Ce problème du choix de pivot maximal : ***pivot partiel*** (recherché uniquement sur la $k^{\text{ème}}$ colonne : $k \leq i \leq n$) ou ***pivot total*** (recherché sur toute la sous-matrice : $k \leq i, j \leq n$) est un exemple typique de situation classique en analyse numérique. Plus précisément, on sait obtenir mathématiquement des majorations d'erreur pour la méthode de pivot total bien meilleures que pour la méthode de pivot partiel. On sait exhiber des matrices pour lesquelles la majoration d'erreur relative au pivot partiel est atteinte. Pourtant, l'expérience numérique montre que dans toutes les situations pratiques, la méthode du pivot partiel suffit.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

II.5 Traitement des matrices symétriques

II.5.1 La factorisation LDL^T

Exercices :
Exercice II.16

Lorsqu'une matrice A est symétrique, alors la factorisation $A = LU$, lorsque celle-ci est possible, peut prendre une forme particulière tenant compte de cette symétrie :

Proposition II.5.1. *Si A est symétrique avec toutes ses sous-matrices principales régulières, alors elle admet une unique factorisation sous la forme*

$$A = LDL^T,$$

où L est une matrice triangulaire inférieure à diagonale unité et D une matrice diagonale régulière.

Démonstration - D'après l'hypothèse, A vérifie les conditions pour avoir une unique factorisation LU, avec L triangulaire inférieure à diagonale unité. Par ailleurs si on note D la matrice diagonale dont la diagonale est égale à celle de U on peut écrire

$$A = LDV,$$

avec $V = D^{-1}U$ qui est une matrice triangulaire supérieure à diagonale unité (car U est une matrice régulière et donc ses éléments diagonaux sont non nuls). Comme A est symétrique, on a

$$A = LDV = V^T DL^T = A^T.$$

Or, on a démontré l'unicité de la factorisation LU (dans le cas où L est à diagonale unité), d'où $L = V$, puisque V^T est une matrice triangulaire inférieure à diagonale unité et que DL^T est

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

une matrice triangulaire supérieure. L'unicité de la factorisation LDL^T découle de l'unicité de la factorisation LU.

Le résultat précédent est uniquement un résultat d'existence : en pratique on calcule les matrices L et D en procédant différemment. L'algorithme consiste à calculer les termes de D et L colonne par colonne (ou ligne par ligne) en identifiant les termes de A dans l'égalité

$$A = LDL^T.$$

Nous allons maintenant voir une méthode de factorisation adaptée aux matrices symétriques définies positives, qui est directement issue de la factorisation LDL^T pour les matrices symétriques.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

II.5.2 La factorisation de Cholesky : existence

Dans tout ce paragraphe A désigne une matrice symétrique définie positive. Nous aurons besoin du lemme suivant pour pouvoir faire la démonstration du théorème principal concernant l'existence et l'unicité de la factorisation :

Lemme II.5.1. *Une matrice A symétrique définie positive a toutes ses sous-matrices principales $[A]_k$ régulières.*

Démonstration - Soit k fixé et $\tilde{z} \in \mathbb{R}^k$ un vecteur quelconque non nul. On définit

$$z = (\tilde{z}^T,\ 0,\ \dots, 0)^T = (z_1,\ z_2,\ \dots, z_k,\ 0,\ \dots,\ 0)^T.$$

Comme A est définie positive

$$0 < z^T A z = \tilde{z}^T [A]_k \tilde{z},$$

ce qui montre que $[A]_k$ est définie positive donc inversible.

Théorème II.5.2. *Si A est une matrice symétrique définie positive elle admet une unique factorisation sous la forme*

$$A = BB^T,$$

où B est une matrice triangulaire inférieure dont tous les éléments diagonaux sont positifs.

Démonstration - Tout d'abord, comme A est définie positive toutes ses sous-matrices principales sont régulières (voir le Lemme II.5.1 précédent) et il résulte de la proposition II.5.1 qu'elle admet une factorisation sous la forme

$$A = LDL^T. \tag{II.5.1}$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

La matrice D a tous ses éléments diagonaux positifs.

En effet, pour i fixé ($1 \leq i \leq n$), soit z tel que $L^T z = e^i$. Alors on a

$$0 < z^T A z = (L^T z)^T D L^T z = (e^i)^T D e^i = d_{ii},$$

puisque A est définie positive. En introduisant alors la matrice diagonale Λ telle que

$$\lambda_{ii} = \sqrt{d_{ii}},$$

on peut récrire (II.5.1) sous la forme

$$A = L\Lambda\Lambda L^T = (L\Lambda)(L\Lambda)^T = BB^T,$$

obtenue en posant

$$B = L\Lambda.$$

Démontrons l'unicité. Soit donc une autre factorisation

$$A = \widetilde{B}\widetilde{B}^T,$$

où $\widetilde{B}$ est une matrice triangulaire à éléments diagonaux positifs. On peut donc écrire

$$BB^T = \widetilde{B}\widetilde{B}^T \Rightarrow B^{-1}BB^T[\widetilde{B}^T]^{-1} = B^{-1}\widetilde{B}\widetilde{B}^T[\widetilde{B}^T]^{-1} \Rightarrow B^T[\widetilde{B}^T]^{-1} = B^{-1}\widetilde{B}$$

or, dans cette dernière égalité les matrices sont, à gauche, triangulaires supérieures et, à droite, triangulaires inférieures, ceci n'est possible que si elles sont diagonales et donc

$$B^T[\widetilde{B}^T]^{-1} = B^{-1}\widetilde{B} = D,$$

ce qui implique que

$$\forall\, i = 1, 2, ..., n \quad \frac{b_{ii}}{\tilde{b}_{ii}} = \frac{\tilde{b}_{ii}}{b_{ii}} = d_{ii} \Rightarrow (b_{ii})^2 = (\tilde{b}_{ii})^2,$$

soit finalement $b_{ii} = \tilde{b}_{ii}$, puisque ces nombres sont positifs, et donc

$$d_{ii} = 1.$$

D est donc la matrice identité, donc $B = \widetilde{B}$ d'où l'unicité.

Comme dans le cas de la factorisation LDL^T le résultat précédent est uniquement un résultat d'existence et en pratique on calcule la matrice B colonne par colonne (ou ligne par ligne) en identifiant les termes de A dans l'égalité

$$A = BB^T.$$

II.5.3 Algorithme de Cholesky

Exercices :
Exercice II.17

Cours :
Factorisation de Cholesky / existence

Il s'agit d'une adaptation de la factorisation LU, à un système dont la matrice A est symétrique définie positive. L'algorithme se décompose en trois étapes :

- calcul de la décomposition de la matrice du système,
- résolution du premier système triangulaire,
- résolution du deuxième système triangulaire.

Plus précisément, on cherche une décomposition de la matrice A du système, de la forme $A = B\,B^T$ (voir le paragraphe référencé), où B est une matrice triangulaire inférieure dont les termes diagonaux sont positifs (B^T désigne sa transposée). On obtient cette décomposition par identification :

$$a_{11} = \underline{B}_1(B^T)_1 = b_{11}^2.$$

Puisque b_{11} doit être positif, on a

$$b_{11} = \sqrt{a_{11}}.$$

$$A_1 = B(B^T)_1 = b_{11}B_1 \Longleftrightarrow B_1 = \frac{1}{b_{11}}A_1,$$

ce qui permet de déterminer la première colonne de B.

De façon similaire on définit la deuxième colonne de B.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

$$a_{22} = \underline{B}_2 (B^T)_2 = b_{21}^2 + b_{22}^2.$$

Puisque b_{22} doit être positif, on a

$$b_{22} = \sqrt{a_{22} - b_{21}^2}.$$

$$A_2 = B(B^T)_2 = b_{21} B_1 + b_{22} B_2 \Longleftrightarrow B_2 = \frac{1}{b_{22}} \left(A_2 - b_{21} B_1\right),$$

ce qui termine de déterminer la deuxième colonne de B.

De façon générale, lorsque l'on a déterminé les $j-1$ premières colonnes de B, on écrit :

$$a_{jj} = \underline{B}_j (B^T)_j = \sum_{k=1}^{j} b_{jk}^2 \Longleftrightarrow b_{jj}^2 = a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} b_{jk}^2.$$

Puisque b_{jj} doit être positif, on a

$$b_{jj} = \sqrt{a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} b_{jk}^2}.$$

$$A_j = B(B^T)_j = \sum_{k=1}^{j} b_{jk} B_k \Longleftrightarrow B_j = \frac{1}{b_{jj}} \left(A_j - \sum_{k=1}^{j-1} b_{jk} B_k\right),$$

ce qui termine de déterminer la jème colonne de B. On déterminera successivement les colonnes 1, 2,...,$n-1$, puis on terminera par le calcul de

$$b_{nn} = \sqrt{a_{nn} - \sum_{k=1}^{n-1} b_{nk}^2}.$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Comme dans la factorisation de Doolittle, dans chaque colonne j on ne calcule que les termes b_{ij} pour i supérieur ou égal à j, puisque les autres termes de cette colonne sont connus car nuls.

On a donc l'algorithme :

1: **pour** $j = 1$ jusqu'à $n-1$ **faire**

2: $\quad b_{jj} \leftarrow \sqrt{a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} b_{jk}^2}$;

3: $\quad$ **pour** $i = j+1$ jusqu'à n **faire**

4: $\quad\quad b_{ij} \leftarrow \frac{1}{b_{jj}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} b_{ik} b_{jk} \right)$;

5: $\quad$ **fin pour**

6: **fin pour**

7: $b_{nn} \leftarrow \sqrt{a_{nn} - \sum_{k=1}^{n-1} b_{nk}^2}$;

Si la matrice est définie positive, les nombres dont on prend la racine carrée sont positifs, les nombres par lesquels on divise sont non nuls (puisque l'on a montré que la décomposition existait). Cependant, il est prudent d'inclure dans l'algorithme des tests qui s'assurent que ces propriétés sont vérifiées.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

II.6 Normes matricielles

II.6.1 Normes vectorielles

Exercices :
Exercice II.18

Pour pouvoir écrire que deux vecteurs sont proches ou que deux matrices sont proches, il faut pouvoir mesurer la "distance" entre ces deux objets. Ceci se fait généralement en utilisant une norme qu'elle soit vectorielle ou matricielle. Les normes matricielles sont aussi un outil indispensable pour le calcul du conditionnement d'une matrice, indicateur de la "bonne résolution" d'un système linéaire.

Définition II.6.1. *Soit E un espace vectoriel sur K ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On appelle norme sur E une application de E dans $\mathbb{R}_+$ notée*

$$x \mapsto \|x\|$$

possédant les propriétés suivantes : quel que soit $x \in E$, $y \in E$, $\lambda \in K$:

1. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$ *(la norme est positivement homogène)*
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *(inégalité triangulaire)*

La notation $|\lambda|$ représente la valeur absolue ou le module de λ suivant que λ est réel ou complexe.

– $E = \mathbb{R}^n$ $\quad \|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|,$

– $E = \mathbb{R}^n$ $\quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ (norme euclidienne),

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

- $E = \mathbb{R}^n$ $\qquad \|x\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,n} |x_i|$
- $E = \mathbb{C}^n$ $\qquad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$ avec $|x_i|^2 = x_i \bar{x}_i$.

Pour montrer l'inégalité triangulaire de la norme euclidienne, on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz (démontrée en exercice) :

$$|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}.$$

II.6.2 Définition de la norme matricielle

Exercices :
Exercice II.19
Exercice II.20
Exercice II.21

Définition II.6.2. *On appelle* **norme matricielle** *une application qui à une matrice quelconque, associe un nombre réel positif. On note*

$$A \mapsto \|A\|$$

qui possède les propriétés suivantes :
- $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$,
- $\|\lambda A\| = |\lambda| \, \|A\|$, $\forall A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$,
- $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$, $\forall A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$, $\forall B \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$,
- $\|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|$ $\forall A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$, $\forall B \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$.

Les normes matricielles vérifient donc, en plus des propriétés des normes vectorielles, une relation sur le produit des matrices.

Définition II.6.3. *Soit* $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$. *Etant donnée une norme (vectorielle) sur* $\mathbb{C}^n$, *et une norme (vectorielle) sur* $\mathbb{C}^m$ *on appelle* **norme matricielle surbordonnée**, *une norme matricielle définie par*

$$\|A\| = \max_{x \in \mathbb{C}^n, x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Quelque remarques :

1. Les normes matricielles subordonnées dépendent de la norme vectorielle associée.
2. La matrice A n'est pas forcément *carrée*, la norme vectorielle étant celle de $\mathbb{C}^n$ pour $\|x\|$ et celle de $\mathbb{C}^m$ pour $\|Ax\|$.
3. La notation "max" laisse supposer qu'il existe effectivement un vecteur $\tilde{x} \neq 0$ pour lequel la maximum est atteint (ce qui implique que pour $\tilde{x}$ on a : $\|A\tilde{x}\| = \|A\| \, \|\tilde{x}\|$), ce qui est vrai mais nullement évident !
4. La définition suppose que l'on prend le maximum pour les vecteurs $x \in \mathbb{C}^n$, en fait pour les normes subordonnées aux normes vectorielles que l'on a déjà citées, c'est-à-dire $\|.\|_1, \|.\|_2, \|.\|_\infty$, il suffit de prendre le maximum pour les vecteurs de $\mathbb{R}^n$.
5. Dans cette définition, on affirme que la norme matricielle subordonnée ainsi définie est bien une norme matricielle. Nous allons le vérifier pour deux des propriétés vous laissant les deux autres à démontrer en exercice.
   – Il est évident que $A = 0$ implique que $\|A\| = 0$. Inversement :
   $$\|A\| = 0 \;\Rightarrow\; \|Ax\| = 0 \, \forall x \in \mathbb{R}^n \;\Rightarrow\; Ax = 0 \, \forall x \in \mathbb{R}^n \;\Rightarrow\; A = 0,$$
   car A est alors la matrice de l'application nulle.
   – La définition de $\|A\|$ donne de manière évidente (exercice)
   $$\|Ax\| \leq \|A| \, \||x\| \, \forall x \in \mathbb{R}^n.$$
   $$\|ABx\| \leq \|A\| \, \|Bx\| \leq \|A\| \, \|B\| \, \|x\| \, \forall x \in \mathbb{R}^n$$
   d'où, en divisant par $\|x\|$ et en prenant le max, la quatrième propriété.

Quelques exemples de normes matricielles :

1. On peut montrer que la norme matricielle subordonnée à la norme vectorielle notée $\|.\|_1$ vaut
$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|.$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

2. la norme matricielle subordonnée à la norme vectorielle notée $\|.\|_\infty$ vaut

$$\|A\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

3. Il existe des normes matricielles qui ne sont pas subordonnées à une norme vectorielle, c'est le cas de la norme de Frobenius :

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2} = \sqrt{\mathrm{trace}(A^T A)}.$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

II.6.3 Etude de la norme matricielle subordonnée à la norme euclidienne

Le calcul de la norme matricielle subordonnée à la norme euclidienne repose sur le théorème suivant :

Théorème II.6.1. *Si* $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ *est symétrique alors*

$$\max_{1 \leq k \leq n} \lambda_k = \max_{x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0} \frac{x^T A x}{x^T x}, \tag{II.6.1}$$

où $(\lambda_k)_{1 \leq k \leq n}$ *sont les valeurs propres (réelles) de* A.

Démonstration - Comme A est symétrique elle admet une base de vecteurs propres orthonormés $(Y_i)_{1 \leq i \leq n}$ associés aux valeurs propres réelles que l'on ordonne :

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n,$$

donc tout vecteur x peut s'écrire

$$x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i Y_i \text{ avec } \|x\|_2^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i Y_i^T\right)\left(\sum_{j=1}^{n} \xi_j Y_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2.$$

On a

$$x^T A x = \left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i Y_i^T\right)\left(\sum_{j=1}^{n} \xi_j \lambda_j Y_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \xi_i^2,$$

d'où l'on tire immédiatement la majoration suivante :

$$x^T A x \leq \lambda_1 \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

soit

$$x^T A x \leq \lambda_1 \|x\|_2^2.$$

D'où

$$\frac{x^T A x}{x^T x} \leq \lambda_1$$

et comme cette inégalité est vraie quelque soit $x \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\max_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{x^T A x}{x^T x} \leq \lambda_1.$$

Pour obtenir l'égalité il suffit de remarquer que

$$(Y_1)^T A Y_1 = \lambda_1 \|Y_1\|_2^2 = \lambda_1$$

ce qui montre que le maximum est bien atteint.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

II.6.4 Rayon spectral

Exercices :
Exercice II.22
Exercice II.23
Exercice II.24

Définition II.6.4. *Soit $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{C})$, on appelle rayon spectral de A et on note $\rho(A)$ le nombre réel*

$$\rho(A) = \max_{1 \le i \le n} |\lambda_i|,$$

où $(\lambda_i)_{1 \le i \le n}$ sont les valeurs propres (complexes) de A.

En effet si λ_k est la plus grande valeur propre (en module) de A, si on pose $r = |\lambda_k|$, alors toutes les valeurs propres sont dans le disque (du plan complexe) de rayon r, cette quantité s'appelle le rayon spectral (l'ensemble des valeurs propres d'une matrice s'appelle aussi le spectre de la matrice).

Théorème II.6.2.

- *Soit $A \in \mathcal{M}_{nm}(\mathbb{R})$, alors*
$$\|A\|_2^2 = \rho(AA^T) = \rho(A^TA).$$
- *Si la matrice C est symétrique, alors*
$$\|C\|_2 = \rho(C). \tag{II.6.2}$$
- *Soit $A \in \mathcal{M}_{nm}(\mathbb{R})$, alors*
$$\|A\|_2^2 = \|AA^T\|_2 = \|A^TA\|_2.$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Démonstration -

–
$$\|Ax\|_2^2 = (Ax)^T(Ax) = x^T A^T Ax = x^T(A^T A)x = x^T Bx$$

où l'on a noté matrice $B = A^T A$.
B est symétrique semi-définie positive, donc ses valeurs propres $\mu_i, i = 1, ..., n$ sont réelles positives ou nulles (voir le chapitre précédent), donc $|\mu_i| = \mu_i$.
On peut appliquer le théorème II.6.1 :

$$\|A\|_2^2 = \max_{x\in\mathbf{R}^m, x\neq 0} \frac{x^T(A^T A)x}{x^T x} = \max_{x\in\mathbf{R}^m, x\neq 0} \frac{x^T Bx}{x^T x} = \max_{1\leq i\leq n} \mu_i = \max_{1\leq i\leq n} |\mu_i| = \rho(B) = \rho(A^T A).$$

De plus puisque toutes les valeurs propres non nulles de $(A^T A)$ sont des valeurs propres de (AA^T) (voir exercice II.22) et réciproquement, on a aussi

$$\rho(A^T A) = \rho(AA^T),$$

– Pour la démonstration, voir l'exercice II.23 .
– Les matrices AA^T et $A^T A$ sont symétriques, il suffit d' appliquer les deux points précédents.

Rayon spectral

II.7 Conditionnement d'un système linéaire

II.7.1 Introduction au conditionnement d'une matrice

Exercices :
Exercice II.25
Exercice II.26

Lorsque l'on a résolu numériquement un système linéaire il est possible que la solution trouvée soit très différente de la solution exacte. En effet dans certains cas une petite modification du second membre ou de la matrice du système entraîne une grande modification de la solution. Par exemple la résolution de $Ax = b$ avec le choix de A et b suivant

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix} \text{ donne pour solution } x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Le choix d'un nouveau second membre $b + \delta b$

$$b + \delta b = \begin{pmatrix} 32.1 \\ 22.9 \\ 33.1 \\ 30.9 \end{pmatrix} \text{ donne pour solution } x + \delta x = \begin{pmatrix} 9.2 \\ -12.6 \\ 4.5 \\ 1.1 \end{pmatrix}.$$

Une faible erreur relative sur la norme de b induit une erreur relative sur la norme de x beaucoup plus importante, par exemple si on prend la norme $\| \; \|_\infty$ on a :

$$\frac{\|\delta b\|}{\|b\|} = 3.\ 10^{-3}, \quad \frac{\|\delta x\|}{\|x\|} = 13.6\,.$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Une telle situation est due au fait que la matrice A a un *conditionnement* grand (on dit également que A *est mal conditionnée*), au sens de la définition suivante :

Définition II.7.1. *On appelle* **conditionnement** *de A relatif à une norme subordonnée le nombre*

$$\chi(A) = \|A\| \, \|A^{-1}\|.$$

Il résulte de la définition d'une norme subordonnée que

$$1 = \|I\| = \|AA^{-1}\| \leq \|A\| \, \|A^{-1}\|.$$

Donc on a toujours $\chi(A) \geq 1$.

Dans l'exemple précédent on a

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 25 & -41 & 10 & -6 \\ -41 & 68 & -17 & 10 \\ 10 & -17 & 5 & -3 \\ -6 & 10 & -3 & 2 \end{pmatrix},$$

et $\chi_\infty(A) = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty$=4488.

Proposition II.7.2. *Si la matrice A est symétrique et si l'on prend la norme subordonnée à la norme euclidienne, on a*

$$\chi_2(A) = \frac{\max_{1\leq i\leq n} |\lambda_i|}{\min_{1\leq i\leq n} |\lambda_i|}.$$

La démonstration est donnée en exercice et provient directement de l'égalité

$$\|A\|_2 = \rho(A)$$

pour les matrices symétriques. Le résultat montre donc que si le spectre d'une matrice, c'est-à-dire l'ensemble des valeurs propres, est très étalée la matrice est mal conditionnée. Par contre si ce spectre (en module) est bien regroupé, la matrice sera bien conditionnée.

II.7.2 Lien entre le conditionnement et les erreurs

Cours :
Conditionnement - exemple et définition

On va démontrer maintenant des inégalités liant le conditionnement de A et les erreurs relatives sur b et x :

Théorème II.7.1. *On suppose que l'on a* $Ax = b$ *et*

$$A(x + \delta x) = b + \delta b, \text{ (on perturbe le second membre).}$$

Alors

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \chi(A) \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}. \tag{II.7.1}$$

On suppose que l'on a $Ax = b$ *et*

$$(A + \delta A)(x + \delta x) = b, \text{ (on perturbe la matrice).}$$

Alors

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x + \delta x\|} \leq \chi(A) \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}. \tag{II.7.2}$$

Démonstration - On a

$$\begin{array}{llllll} Ax = b & \Longrightarrow & \|b\| \leq \|A\| \, \|x\| & \Longrightarrow & \frac{1}{\|x\|} \leq \|A\| \frac{1}{\|b\|} \\ A(x + \delta x) = b + \delta b & \Longrightarrow & A\delta x = \delta b & \Longrightarrow & \|\delta x\| \leq \|A^{-1}\| \, \|\delta b\|, \end{array}$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

d'où le résultat

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \|A\| \, \|A^{-1}\| \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}.$$

De même :

$$\begin{aligned}(A+\delta A)(x+\delta x) = b \quad &\Longrightarrow \quad A\delta x = -\delta A(x+\delta x)\\ &\Longrightarrow \quad \delta x = -A^{-1}\delta A(x+\delta x)\\ &\Longrightarrow \quad \|\delta x\| \leq \|A^{-1}\| \, \|\delta A\| \, \|x+\delta x\|,\end{aligned}$$

d'où le résultat

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x+\delta x\|} \leq \|A\| \, \|A^{-1}\| \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}.$$

Il découle immédiatement de ce théorème que si le conditionnement de A est faible (très proche de 1), si la variation relative de b ou de A est faible alors la variation de x sera faible elle aussi.

Remarquons que les inégalités démontrées dans le théorème précédent sont optimales en ce sens que la matrice A étant donnée, il existe b et δb tels qu'il y ait égalité dans la relation (II.7.1). On peut remarquer, à ce sujet, que l'exemple du paragraphe référencé est révélateur puisque avec un conditionnement de 4488 et une erreur relative sur b de 3×10^{-3} la borne supérieure de l'erreur relative sur x est de l'ordre de 13.6 ce qui est précisément ce que l'on a trouvé ! De même il existe δA et b tels qu'il y ait égalité dans la relation (II.7.2).

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exemples du chapitre II

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exemple II.1 Influence des arrondis

Prenons le système linéaire $Ax = b$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 10^{-4} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Supposons que l'on travaille sur une machine où les nombres sont représentés avec une mantisse de 4 chiffres significatifs. Cela signifie que chaque nombre est représenté sous la forme

$$\pm\, 0.d_1 d_2 d_3 d_4\ 10^e,$$

où d_i représente un nombre entier positif et e l'exposant (le nombre de chiffres significatifs pour l'exposant n'intervient pas dans notre exemple). Lorsque l'on effectue la première (et dernière ici) étape de l'élimination de Gauss, on obtient le système équivalent

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 10^{-4} & 1 \\ 0 & 1-10^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2-10^4 \end{pmatrix}.$$

On a l'addition suivante à effectuer :

$$1 - 10^4 = 0.1\ 10^1 - 0.1\ 10^5 = 0.00001\ 10^5 - 0.1\ 10^5,$$

mais, comme on ne dispose que de 4 chiffres significatifs, le nombre $0.00001\ 10^5$ est représenté en machine par $0.0000\ 10^5$, soit 0. On a donc $1 - 10^4$ "=" -10^4. Comme le raisonnement est le même pour $2 - 10^4$, on a donc, en machine, le système suivant :

$$\begin{pmatrix} 10^{-4} & 1 \\ 0 & -10^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -10^4 \end{pmatrix}.$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Lorsque l'on effectue la remontée de ce système, on obtient $x_2 = 1$, et la première équation donne $10^{-4}x_1 = 0$. On a donc $x = [\,0,\ 1\,]^T$. Voyons maintenant ce qu'il se passe si on échange les lignes 1 et 2 dans la matrice A et le vecteur b. On obtient donc le système équivalent

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 10^{-4} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

L'élimination de Gauss donne, en respectant les problèmes d'arrondi dûs à la mantisse de 4 chiffres, le système équivalent

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

qui donne $x = [\,1,\ 1\,]^T$. Si l'on regarde la solution *théorique*, du système, on constate que l'on obtient

$$x_1 = \frac{10000}{9999} \approx 1,\ x_2 = \frac{9998}{9999} \approx 1.$$

Donc la première méthode sans échange de ligne donne une solution complètement erronée, alors que la deuxième méthode donne une approximation tout à fait raisonnable.

retour au cours

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exemple II.2 Exemple de factorisation $PA = LU$

On considère la matrice de départ (on omet les numéros des étapes pour L)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a initialement $L = I$ et $p = \{1, 2, 3\}$.

- $k = 1$: on effectue la permutation $(1, 2)$ pour avoir un pivot non nul et on effectue l'élimination, ce qui donne

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad p = \{2, 1, 3\}.$$

- $k = 2$: on effectue la permutation $(2, 3)$ pour avoir un pivot maximum. Attention : avant de remplir la $2^{\text{ème}}$ colonne de L on permute ses coefficients des lignes $(2, 3)$ dans la colonne 1, ce qui donne

$$A^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}, \quad p = \{2, 3, 1\}.$$

Si on effectue LU on a bien

$$LU = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_2 \\ A_3 \\ A_1 \end{pmatrix}.$$

retour au cours

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Documents du chapitre II

Document II.1 Démonstration du théorème II.4.2

Remarquons tout d'abord que l'équivalence entre les deux premières propositions est évidente puisque la factorisation est possible lorsque les pivots sont non nuls et que d'autre part les pivots $a_{kk}^{(k)}$ sont les termes diagonaux de U.

Montrons que la proposition 3 implique la proposition 1.

$a_{11}^{(1)} = a_{11}$ est toujours défini, de plus $[A]_1$ inversible, donc

$$\det[A]_1 = a_{11} = a_{11}^{(1)} \neq 0.$$

Supposons maintenant que les pivots $a_{ii}^{(i)}$ ont été définis pour $i = 1, ..., k-1$ et qu'ils sont non nuls : $a_{ii}^{(i)} \neq 0$ pour $i = 1, ..., k-1$. Il est donc possible de définir $a_{kk}^{(k)}$, montrons que $a_{kk}^{(k)} \neq 0$.

Nous avons remarqué que le déterminant de A n'est pas modifié par chaque étape de l'élimination de Gauss et, plus précisément, les déterminants des sous-matrices principales puisque l'on ne fait aucune permutation de lignes ou de colonnes. On a donc

$$\det([A]_k) = \det([A^{(k)}]_k).$$

Or la sous matrice principale $[A^{(k)}]_k$ est triangulaire supérieure donc

$$\det([A]_k) = \det([A^{(k)}]_k) = \left(\prod_{i=1}^{k-1} a_{ii}^{(i)}\right) a_{kk}^{(k)},$$

et, puisque $[A]_k$ est inversible, son déterminant est non nul, on en déduit que $a_{kk}^{(k)} \neq 0$. On a donc montré par récurrence que la proposition 3 impliquait la proposition 1.

On peut montrer que la proposition 2 implique la proposition 3 :

$A = LU \Rightarrow [A]_k = [L]_k[U]_k$: démontrez ce résultat. Donc $\det[A]_k = 1 \times \det[U]_k$. Or U est triangulaire supérieure inversible, donc les termes diagonaux de U sont non nuls, donc $[U]_k$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

est elle aussi une matrice triangulaire supérieure inversible, donc $\det[A]_k \neq 0$, donc les sous matrices principales $[A]_k$ sont inversibles.

Retour au théorème II.4.2 ▲

Sommaire
Concepts
Exemples
Exercices
Documents

Document II.2 Démonstration de la proposition II.4.3

On peut écrire $L^{(k-1)}$ sous la forme

$$L^{(k-1)} = I + \sum_{p=1}^{k-1} z^{(p)}(e^p)^T,$$

où $z_i^{(p)} = 0$ pour $i <= p$. On a ensuite

$$\begin{aligned} P^{(k)}L^{(k-1)}P^{(k)} &= I + \sum_{p=1}^{k-1} P^{(k)}z^{(p)}(e^p)^T P^{(k)}, \\ &= I + \sum_{p=1}^{k-1} P^{(k)}z^{(p)}(e^p)^T, \end{aligned}$$

car $P^{(k)}P^{(k)} = I$ et $(e^p)^T P^{(k)} = (e^p)^T$ puisque $p < k \leq l$ (les coefficients permutés de e^p sont nuls).

Retour à la proposition II.4.3 ▲

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercices du chapitre II

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice II.1

On définit la matrice A, à n lignes et n colonnes par

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

On veut résoudre $Ax = 0$.

1. Montrer en résolvant les $n-1$ premières équations que $x_i = ix_1,\ i = 1, ..., n$.
2. Résoudre la dernière équation et en déduire que $x = 0$.
3. En déduire que A est inversible.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice II.2

Soit A une matrice triangulaire inférieure. Écrire l'algorithme permettant de résoudre le système linéaire $Ax = b$ (b vecteur donné) en n'oubliant pas de vérifier au départ que ce système a une solution.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice II.3

Soit A une matrice triangulaire supérieure, montrer que le calcul du vecteur inconnu est donné par :

$$\begin{cases} x_n & = & \frac{b_n}{a_{nn}} \\ x_i & = & \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j\right), \text{ pour } i = n-1,\ n-2,\ \ldots,\ 1. \end{cases}$$

Écrire alors l'algorithme correspondant.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice II.4

Soit le système $Ax = b$. On considère la première étape de l'élimination de Gauss. Montrer que la ième équation (pour $i \geq 2$) est modifiée de la manière suivante :

$$\begin{cases} a_{ij}^{(1)} = a_{ij} & \longrightarrow & a_{ij}^{(2)} = a_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{1j} \quad \text{pour } j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n \\ b_i^{(1)} = b_i & \longrightarrow & b_i^{(2)} = b_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}} b_1. \end{cases}$$

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice II.5

Soit le système $Ax = b$. On considère la deuxième étape de l'élimination de Gauss. Montrer que la ième équation (pour $i \geq 3$) est modifiée de la manière suivante :

$$\begin{cases} a_{ij}^{(2)} & \longrightarrow \quad a_{ij}^{(3)} = a_{ij}^{(2)} - \frac{a_{i2}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} a_{2j}^{(2)} \quad \text{pour } j = 2,\ 3,\ \ldots,\ n \\ b_i^{(2)} & \longrightarrow \quad b_i^{(3)} = b_i^{(2)} - \frac{a_{i2}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} b_2^{(2)}. \end{cases}$$

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice II.6

Soit le système $Ax = b$. On considère la kième étape de l'élimination de Gauss. Montrer que la ième équation (pour $i \geq k+1$) est modifiée de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{lll} a_{ij}^{(k)} & \longrightarrow & a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} a_{kj}^{(k)} \quad \text{pour } j = k,\ k+1,\ \ldots,\ n \\ b_i^{(k)} & \longrightarrow & b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} b_k^{(k)}. \end{array} \right.$$

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice II.7

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et le vecteur $b = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$, appliquez l'algorithme de Gauss "à la main" pour calculer la solution de $Ax = b$.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice II.8

Calculer le nombre d'opérations effectuées pour réaliser l'élimination de Gauss en fonction de n en séparant multiplications/divisions et additions/ soustractions. Pour cela on pourra utiliser les deux formules

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} k &= \frac{n(n+1)}{2}, \\ \sum_{k=1}^{n} k^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \end{aligned}$$

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice II.9

Soient L une matrice triangulaire inférieure et U une matrice triangulaire supérieure et on pose $A = LU$. Montrer que, pour la colonne j de A, on a

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{i} l_{ik} u_{kj}, \quad \text{pour } i \leq j,$$

et

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{j} l_{ik} u_{kj}, \quad \text{pour } i > j.$$

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice II.10

Soit A une matrice inversible qui admet une factorisation $A = LU$ où L est triangulaire inférieure, U est triangulaire supérieure et la diagonale de U ne comporte que des 1, alors cette factorisation est unique.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice II.11

Résoudre le système $Ax = b$ dont la factorisation LU de A est donnée :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -\mathbf{1} \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice II.12

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 5 & -3 \\ -2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$, en vous inspirant de ce qui a été fait pour l'algorithme de Doolittle dans le paragraphe "Factorisation $A = LU$ / calcul direct ", effectuez la factorisation de Crout de la matrice A, c'est-à-dire déterminez L et U telles que $A = LU$ avec les termes diagonaux de U égaux à 1 (ceux de L sont quelconques).

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice II.13

Dans le calcul direct de la factorisation LU, on suppose maintenant que c'est la matrice U dont tous les éléments de la diagonale sont égaux à 1 et non pas la matrice L. Calculer les éléments des matrices U et L à partir d'éléments de A et d'éléments de U et L de colonnes ou de lignes précédentes. Comment modifier l'algorithme de Doolittle pour le calcul des éléments l_{ij} et u_{ij} des matrices L et U. Cet algorithme s'appelle l'algorithme de Crout.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice II.14

Montrez que si la factorisation $A = LU$ existe (L triangulaire inférieure avec une diagonale unitaire et U triangulaire supérieure inversible), alors les sous-matrices principales de A sont inversibles.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice II.15

Soit σ une permutation de $\{1, 2, ..., n\}$ et soit g l'application linéaire telle que $g(\vec{e}_j) = \vec{e}_{\sigma(j)}$ où $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Montrer que la matrice P de l'application g est telle que

$$p_{ij} = \delta_{i,\sigma(j)}$$

et que $P^{-1} = P^T$.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice II.16

1. Soit A une matrice symétrique admettant une factorisation LDL^T. Montrer que pour $i \geq j$ on a
$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{j} d_k l_{ik} l_{jk},$$
où on a noté d_k le $k^{\text{ème}}$ élément de la diagonale de D.
2. Déduire de la question précédente que les coefficients de L et ceux de D peuvent être obtenus par les formules (on considère que les sommes ne sont pas effectuées quand $j = 1$)
$$d_j = a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} d_k l_{jk}^2,$$
et pour $i > j$
$$l_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} d_k l_{ik} l_{jk}}{d_j}.$$
Indication : ne pas oublier que $l_{jj} = 1$ par définition.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice II.17

Soit A une matrice symétrique définie positive. On considère sa factorisation de Cholesky $A = BB^T$. Montrer que tous les éléments de la diagonale de B sont non nuls.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice II.18

En calculant le discriminant du trinôme en θ suivant

$$q(\theta) = \sum_{i=1}^{n} (x_i + \theta y_i)^2$$

montrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}.$$

retour au cours

Solution

Exercice II.19

Montrer, en utilisant les propriétés de la norme vectorielle, que si on définit $\|A\|$ par

$$\|A\| = \max_{x \in \mathbb{C}^n, x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

on a :

$$\|\lambda A\| = |\lambda| \|A\|,$$

$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|.$$

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice II.20

Montrer que, par définition de la norme matricielle subordonnée, on a

$$\|Ax\| \leq \|A\| \, \|x\| \; \forall x \in \mathbb{C}^n.$$

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice II.21

Montrer que, pour toute norme subordonnée, $\|I\| = 1$. Que vaut $\|I\|_F$ (norme de Frobenius) ?

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice II.22

Soit $A \in \mathcal{M}_{nm}, B \in \mathcal{M}_{mn}$, soit λ une valeur propre non nulle de BA correspondant à un vecteur propre Y, montrer que AY est un vecteur propre (non nul) de AB correspondant à la valeur propre λ. En déduire que

$$\rho(BA) = \rho(AB).$$

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice II.23

Soit A une matrice symétrique donc diagonalisable, A peut donc s'écrire $A = PDP^{-1}$,avec D diagonale.

- Quelles sont les valeurs propres de A ? Quelles sont les valeurs propres de A^2 ?
- En déduire que
$$\rho(A^2) = \rho(A)^2.$$
- Déduire de la question précédente que
$$\|A\|_2 = \rho(A).$$
- Soit la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
quel est son rayon spectral ? Ce rayon peut-il être considéré comme une norme matricielle lorsque la matrice n'est pas symétrique ?

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice II.24

Montrer que pour toute norme matricielle subordonnée on a

$$\rho(A) \leq \|A\|.$$

retour au cours

Solution

Exercice II.25

Soit une matrice diagonale D. Calculer le conditionnement de D à l'aide de la norme matricielle subordonnée à la norme euclidienne. Dans quel cas ce conditionnement est-il égal à 1 ?

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice II.26

Soit A une matrice symétrique inversible dont les valeurs propres sont $\lambda_1, ..., \lambda_n$, on suppose que :

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \ldots \geq |\lambda_n| > 0$$

– Montrer que les valeurs propres de A^{-1} sont $\frac{1}{\lambda_1}, ..., \frac{1}{\lambda_n}$ et que les valeurs propres vérifient :

$$\frac{1}{|\lambda_n|} \geq \frac{1}{|\lambda_{n-1}|} \geq \ldots \geq \frac{1}{|\lambda_1|}.$$

– En déduire $\chi(A)$ lorsque l'on choisit la norme subordonnée à la norme euclidienne.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Annexe A
Exercices

A.1 Exercices de TD du chapitre 2

Exercice A.1.1

Soit la matrice A et le vecteur b suivants :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \\ 1 & 16 & 81 & 256 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ 44 \\ 190 \end{pmatrix}.$$

1. Résoudre par la méthode d'élimination de *Gauss* le système linéaire $Ax = b$.
2. Donner la factorisation LU de A et calculer son déterminant (on peut résoudre cette question conjointement avec la première).

Aide 1

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.2

On veut résoudre le système $Ax = y$ où $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ est *tridiagonale* et $y \in \mathbb{R}^n$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} b_1 & c_1 & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & a_n & b_n \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix}}_{y}$$

1. (a) Montrer, par récurrence sur i, que l'on peut se ramener au système suivant :

$$\begin{cases} x_i &= e_i\, x_{i+1} + f_i \quad \text{pour } i = 1, .., n-1 \\ x_n &= f_n, \end{cases}$$

   où l'on déterminera les e_i, $i = 1, .., n-1$ et les f_i, $i = 1, ..., n$. On suppose que toutes les divisions nécessaires pour déterminer ces coefficients sont possibles.

   (b) La méthode précédente, qui permet de résoudre un système dont la matrice est tridiagonale, s'appelle méthode de Richtmayer. Ecrire l'algorithme de cette méthode.

2. On va maintenant montrer que l'algorithme très simple que l'on vient de voir, correspond en fait à la factorisation $A = LU$ par l'algorithme de Crout, dans le cas particulier d'une matrice A tridiagonale.

   L'algorithme de Crout consiste à déterminer par identification une factorisation $A = LU$ avec L matrice triangulaire inférieure, U matrice triangulaire supérieure dont les termes diagonaux valent 1. On suppose que les matrices L et U existent.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.2

(a) En utilisant le produit matriciel, montrer que la première colonne de L est égale à :

$$L_1 = \begin{pmatrix} l_1 \\ a_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{avec } l_1 = b_1,$$

puis que la première ligne de U est égale à

$$\underline{U}_1 = \begin{pmatrix} 1 & e'_1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{avec } e'_1 = \frac{c_1}{l_1}.$$

(b) En utilisant le produit matriciel, montrer que la deuxième colonne de L est égale à :

$$L_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ l_2 \\ a_3 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{avec } l_2 = b_2 - a_2 e'_1,$$

et que la deuxième ligne de U est égale à

$$\underline{U}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & e'_2 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{avec } e'_2 = \frac{c_2}{l_2} = \frac{c_2}{b_2 - a_2 e'_1}.$$

(c) Montrer par récurrence que pour $2 \leq j \leq n-1$, on a

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.2

$$L_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ l_j \\ a_{j+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{U}_j = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & e'_j & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \text{ avec } l_j = b_j - a_j e'_{j-1}, \quad e'_j = \frac{c_j}{l_j}$$

Montrer que l'on a enfin

$$L_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ l_n \end{pmatrix}, \text{ avec } l_n = b_n - a_n e'_{n-1}.$$

En recollant les morceaux, constater que les matrices L et U sont bi-diagonales.

(d) Utiliser ce qui précède pour montrer que $e'_i = -e_i, \quad i = 1, ..., n-1$.

(e) On résout $Lz = y$, montrer que $z = f$.

(f) En déduire que la résolution de $Ax = y$ par la méthode de Crout est équivalente à la méthode de Richtmayer précédemment décrite.

Remarque : les conditions pour lesquelles la méthode de Richtmayer est applicable (divisions possibles) sont donc les mêmes que les conditions pour lesquelles la factorisation $A = LU$ existe.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.2

Question 1a	Aide 1		
Question 1b	Aide 1		
Question 2a	Aide 1		
Question 2b	Aide 1	Aide 2	
Question 2c	Aide 1	Aide 2	
Question 2d	Aide 1		
Question 2e	Aide 1	Aide 2	Aide 3
Question 2f	Aide 1		

Exercice A.1.3

Soit $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ une matrice possédant la propriété suivante :

$$\sum_{j=1, j \neq i}^{n} |a_{ij}| < |a_{ii}|, \ \ \forall\, i, \ 1 \leq i \leq n.$$

On dit alors que A est à diagonale strictement dominante.

1. Donner un exemple de matrice à diagonale strictement dominante.
2. Soit x une solution de $Ax = 0$ et un entier k tel que

   $$|x_k| \geq |x_i|, \ \ \forall\, i, \ 1 \leq i \leq n.$$

   En utilisant l'équation correspondant à la ligne k de $Ax = 0$, montrer que $x_k = 0$. Que peut on en déduire sur l'inversibilité de A ?
3. En déduire que la factorisation LU de A est réalisable sans permutation de lignes ou de colonnes.

Question 2 Aide 1 Aide 2 Aide 3 Aide 4 Aide 5
Question 3 Aide 1 Aide 2

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.4

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 & -2 \\ 4 & 7 & -6 & -5 \\ -4 & -6 & 3 & 5 \\ -2 & -5 & 5 & 3 \end{pmatrix}$, on montre que $A = LU$ avec

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} U = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Que vaut le déterminant de A ? Est-il possible de savoir (sans calculs supplémentaires) si la matrice A est symétrique définie positive ?
2. Pourquoi la matrice A admet-elle une décomposition LDL^T ? Préciser la matrice D.
3. La matrice A est-elle définie positive ? Pourquoi ?

Question 1 Aide 1
Question 2 Aide 1 Aide 2 Aide 3 Aide 4
Question 3 Aide 1 Aide 2 Aide 3 Aide 4 Aide 5

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.5

La méthode de *Cholesky* s'utilise pour la résolution des systèmes linéaires dont la matrice est symétrique, définie positive.

1. Soit la matrice $A \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ symétrique et définie positive. Montrer qu'il existe une matrice unique $C \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ triangulaire inférieure avec $c_{11} > 0$ et $c_{22} > 0$ telle que $A = CC^T$.

2. Soit la matrice $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ symétrique et définie positive. D'après le cours, il existe une matrice unique $C \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ triangu laire inférieure avec $c_{ii} > 0$ telle que $A = CC^T$.
   (a) Montrer alors que les coefficients c_{ij} de C sont donnés par

$$\left\{\begin{array}{lcl} c_{11} & = & \sqrt{a_{11}}, \\ c_{i1} & = & \dfrac{a_{i1}}{c_{11}},\ i > 1, \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{lcl} c_{jj} & = & \sqrt{a_{jj} - \displaystyle\sum_{k=1}^{j-1} c_{jk}^2}\ ,\ j > 1, \\ c_{ij} & = & \dfrac{1}{c_{jj}}\left(a_{ij} - \displaystyle\sum_{k=1}^{j-1} c_{ik}c_{jk}\right),\ 1 < j < i. \end{array}\right.$$

   (b) Donner l'algorithme permettant de calculer C à partir de A.

3. Donner le déterminant de A en fonction des coefficients de C.

Question 1 Aide 1 Aide 2
Question 2a Aide 1 Aide 2 Aide 3 Aide 4 Aide 5
Question 2b Aide 1

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.6

1. Déterminer $\|Ax\|_\infty$ à l'aide des termes de la matrice A et du vecteur x.
2. Montrer que
$$\|Ax\|_\infty \leq \|x\|_\infty \max_{1\leq i\leq n}\left(\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\right).$$
En déduire un majorant de $\|A\|_\infty$.
3. Soit ℓ tel que
$$\max_{1\leq i\leq n}\left(\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\right)=\sum_{j=1}^{n}|a_{\ell j}|.$$
On définit le vecteur $\hat{x}$ de la façon suivante $\hat{x}_j = 1$ si $a_{\ell j}\geq 0$, $\hat{x}_j = -1$ sinon. Que vaut $\|\hat{x}\|_\infty$, $(A\hat{x})_\ell$? En déduire que $\|A\hat{x}\|_\infty \geq \sum_{j=1}^{n}|a_{\ell j}|$.
4. Déduire de tout ce qui précède que
$$\|A\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n}\left(\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\right).$$
5. On rappelle que
$$\|A\|_1 = \max_{1\leq j\leq n}\left(\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|\right),$$
calculer $\|A\|_1$ et $\|A\|_\infty$ pour la matrice $A=\begin{pmatrix}0 & -0.2 & 0.5\\ 0.3 & 0 & -0.6\\ 0.7 & 0.1 & 0\end{pmatrix}$.

Exercice A.1.6

Question 1	Aide 1		
Question 2	Aide 1	Aide 2	
Question 3	Aide 1	Aide 2	
Question 4	Aide 1	Aide 2	Aide 3
Question 5	Aide 1		

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.7

1. Soit A une matrice de taille $n \times p$ et A' une matrice de taille $p \times n$, montrer que si λ est valeur propre non nulle de AA' associée au vecteur propre y, alors $A'y$ est vecteur propre de $A'A$ associé à la valeur propre λ.
   En déduire que $\rho(A'A) = \rho(AA')$.
2. Soit B une matrice de taille $n \times n$ inversible, on suppose que les n valeurs propres (complexes) sont ordonnées :
   $$|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \ldots \leq |\lambda_n|.$$
   Montrer que $|\lambda_1| > 0$, que vaut $\rho(B)$? Quelles sont les valeurs propres de B^{-1} ? Que vaut $\rho(B^{-1})$?
3. Soit E une matrice de taille $n \times n$ inversible.
   (a) Montrer que $\rho((E^T E)^{-1}) = \rho((E^{-1})^T E^{-1})$.
   (b) Montrer que toutes les valeurs propres de $E^T E$ sont réelles et strictement positives, on ordonne ces valeurs propres $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n$.
   (c) Exprimer $\rho(E^T E)$ et $\rho((E^T E)^{-1})$ à l'aide des λ_i.
   (d) On note $\chi_2(E)$ le conditionnement de E associé à la norme $\|.\|_2$, donner l'expression de $\chi_2(E)$ à l'aide des λ_i.
   (e) Si C est symétrique inversible, que vaut $\chi_2(C)$?
   Calculer $\chi_2(C)$ dans le cas $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$
   (f) Comparer $\chi_2(E)$ et $\chi_2(E^T E)$.

Solution

Sommaire
Concepts
Exemples
Exercices
Documents

Index des concepts

Le gras indique un grain où le concept est défini ; l'italique indique un renvoi à un exercice ou un exemple, le gras italique à un document, et le romain à un grain où le concept est mentionné.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Solution de l'exercice II.1

1. On démontre ce résultat par récurrence, c'est trivialement vérifié pour $i = 1$. Supposons que $x_i = ix_1$ pour $i \leq k$, on écrit alors la kième équation, on obtient :

$$-(k-1)x_1 + 2kx_1 - x_{k+1} = 0 \Leftrightarrow x_{k+1} = (k+1)x_1.$$

   Ce qui démontre le résultat.

2. En écrivant la dernière équation, on obtient

$$-(n-1)x_1 + 2nx_1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$$

   En utilisant la question précédente on a donc $x = 0$.

3. On a vu dans le chapitre 1 qu'une condition nécessaire et suffisante pour que A soit inversible est que son noyau soit réduit à 0, c'est ce que l'on vient de montrer.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l’exercice II.2

pour $i = 1$ jusqu’à n **faire**
    si $|a_{ii}| < \varepsilon$ **alors**
        Arrêter l’algorithme et donner un message d’erreur
    fin si
fin pour
$x_1 \leftarrow \dfrac{b_1}{a_{11}}$
pour $i = 2$ jusqu’à n **faire**
    $x_i \leftarrow \dfrac{b_i - \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik} x_k}{a_{ii}}$
fin pour

Retour à l’exercice ▲

Solution de l'exercice II.3

Le système linéaire s'écrit

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1,n-1}x_{n-1} + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{22}x_2 + \ldots + a_{2,n-1}x_{n-1} + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \ldots & = & \ldots \\ a_{n-1,n-1}x_{n-1} + a_{n-1,n}x_n & = & b_{n-1} \\ a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}\right.$$

On commence donc par calculer l'inconnue x_n, puis l'inconnue $x_{n-1} = (b_{n-1} - a_{n-1,n}x_n)/a_{n-1,n-1}$ et on remonte ainsi jusqu'à x_1. Ainsi, lorsque l'on arrive à la ième équation, on a déjà calculé x_k pour $k = i+1, \ldots, n$. Or cette équation s'écrit

$$a_{ii}x_i + a_{i,i+1}x_{i+1} + \ldots + a_{i,n-1}x_{n-1} + a_{in}x_n = b_i$$

ce qui permet de tirer x_i par la formule donnée dans l'énoncé. L'algorithme ne diffère de celui de l'exercice précédent que par les indices. À vous de l'écrire ...

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice II.4

On élimine le premier élément de la ième ligne L_i en effectuant une combinaison $L_i - \alpha L_1$, ce qui donne

$$a_{i1} - \alpha a_{11} = 0$$

soit

$$\alpha = \frac{a_{i1}}{a_{11}}.$$

On a alors

$$L_i^{(2)} = L_i - \alpha L_1$$

soit

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij} - \alpha a_{1j}\,, \quad \text{pour } j = 1, \ldots, n, \; i = 2, .., n\,.$$

La même combinaison est effectuée sur les composantes du second membre, soit

$$b_i^{(2)} = b_i - \alpha b_1, \; i = 2, .., n\,.$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice II.5

On élimine le deuxième élément de la ième ligne $L_i^{(2)}$ en effectuant une combinaison $L_i^{(2)} - \alpha L_2^{(2)}$, ce qui donne

$$a_{i2}^{(2)} - \alpha a_{22}^{(2)} = 0$$

soit

$$\alpha = \frac{a_{i2}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}.$$

On a alors

$$L_i^{(3)} = L_i^{(2)} - \alpha L_2^{(2)}$$

soit

$$a_{ij}^{(3)} = a_{ij}^{(2)} - \alpha a_{2j}^{(2)}\,, \quad \textbf{pour } j = 2, \ldots, n,\ i = 3, \ldots, n\,.$$

La même combinaison est effectuée sur les composantes du second membre, soit

$$b_i^{(3)} = b_i^{(2)} - \alpha b_2^{(2)},\ i = 3, \ldots, n\,.$$

Retour à l'exercice ▲

On élimine le kième élément de la kème ligne $L_k^{(k)}$ en effectuant une combinaison $L_i^{(k)} - \alpha L_k^{(k)}$, ce qui donne

$$a_{ik}^{(k)} - \alpha a_{kk}^{(k)} = 0$$

soit

$$\alpha = \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}.$$

On a alors

$$L_i^{(k+1)} = L_i^{(k)} - \alpha L_k^{(k)}$$

soit

$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - \alpha a_{kj}^{(k)}\ , \quad \textbf{pour } j = k, \ldots, n,\ i = k+1, \ldots, n\,.$$

La même combinaison est effectuée sur les composantes du second membre, soit

$$b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - \alpha b_k^{(k)},\ i = k+1, \ldots, n\,.$$

Pour $j = k$ le coefficient α a été déterminé pour que $a_{ik}^{(k+1)} = 0$, donc dans la pratique on affecte directement 0 à ce coefficient sans effectuer le calcul. Les calculs sont donc faits pour i et j variant de $k+1$ à n.

Retour à l'exercice ▲

L'algorithme procède de la manière suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

La résolution de ce système triangulaire donne :

$$x_3 = 1,\ x_2 = 1,\ x_1 = 1.$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice II.8

La démarche est de compter le nombre d'opérations à partir de la boucle la plus intérieure. Nous allons évaluer le nombre de multiplications/divisions, vous laissant le soin dévaluer le nombre d'additions algébriques. On a ainsi :

- pour $j = k+1 \ \rightarrow \ n$, $a_{ij} \leftarrow a_{ij} - ca_{kj}$: on effectue $n-k$ multiplications,
- calcul de b_i ET c : on effectue 1 multiplication et 1 division
- On effectue les opérations précédentes pour $i = k+1 \ \rightarrow \ n$: on effctue donc $(n-k)(n-k+2)$ multiplications/divisions
- On effectue ce qui précède pour $k = 1 \ \rightarrow \ n-1$: on effectue donc $\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)(n-k+2)$ multiplications/divisions

soit

$$\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)(n-k+2) = \sum_{p=1}^{n-1} p(p+2) = \sum_{p=1}^{n-1} p^2 + 2\sum_{p=1}^{n-1} p = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + 2\frac{(n-1)n}{2} \simeq \frac{1}{3}n^3.$$

Dans le résultat, on n'a gardé que les termes de plus haut degré.

Retour à l'exercice ▲

L'élément du produit des matrices L et U est donné par :

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} l_{ik} u_{kj}.$$

Or $l_{ik} = 0$ pour $i < k$ et $u_{kj} = 0$ pour $j < k$. Le produit des éléments sera donc nul lorsque k sera supérieur au plus petit des deux entiers i et j, d'où le résultat.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice II.10

On suppose qu'il y a deux décompositons possibles :

$$A = LU = \widehat{L}\widehat{U}.$$

Puisque A est inversible, L, U, $\widehat{L}$, $\widehat{U}$ sont inversibles. On a alors

$$(\widehat{L})^{-1}L = \widehat{U}U^{-1}.$$

Le produit de deux matrices triangulaires inférieures (resp. supérieures) est une matrice triangulaire inférieure (resp. supérieure). Il en résulte que l'égalité précédente donne un matrice diagonale (car triangulaire inférieure et supérieure). D'autre part, la diagonale de $\widehat{U}U^{-1}$ ne comportant que des 1, la matrice produit est nécessairement la matrice identité. Ainsi

$$(\widehat{L})^{-1}L = \widehat{U}U^{-1} = I,$$

soit

$$L = \widehat{L}\,,\ U = \widehat{U}.$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice II.11

La résolution de $Ly = b$ donne

$$y = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

puis celle de $Ux = y$ donne

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Retour à l'exercice ▲

On cherche $L = \begin{pmatrix} \times & 0 & 0 \\ \times & \times & 0 \\ \times & \times & \times \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} 1 & \times & \times \\ 0 & 1 & \times \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ telles que $A = LU$.

– On identifie la première colonne de A et la première colonne de LU, cela permet d'obtenir la première colonne de L :

$$LU = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & \times & 0 \\ -2 & \times & \times \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \times & \times \\ 0 & 1 & \times \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 5 & -3 \\ -2 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

– On identifie la première ligne de A avec la première ligne de LU, cela permet d'obtenir la première ligne de U :

$$LU = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & \times & 0 \\ -2 & \times & \times \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1 \\ 0 & 1 & \times \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 5 & -3 \\ -2 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

– On identifie la deuxième colonne de A avec la deuxième colonne de LU, cela permet d'obtenir la deuxième colonne de L :

$$LU = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ -2 & 6 & \times \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1 \\ 0 & 1 & \times \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 5 & -3 \\ -2 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

– On identifie la deuxième ligne de A avec la deuxième ligne de LU, cela permet d'obtenir la deuxième ligne de U :

$$LU = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ -2 & 6 & \times \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1 \\ 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 5 & -3 \\ -2 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

– On identifie la troisième colonne de A avec la troisième colonne de LU, cela permet d'obtenir la troisième colonne de L :

$$LU = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ -2 & 6 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1 \\ 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 5 & -3 \\ -2 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Retour à l'exercice ▲

Le raisonnement s'obtient en échangeant des lignes et les colonnes dans le raisonnement de l'algorithme de Doolittle et les matrices L et U. Ainsi, cela commence par :

En écrivant $A = LU$ et en se souvenant que les matrices L et U sont triangulaires, on obtient

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}u_{kj} + l_{ij} \;\; \textbf{pour } i = j, j+1, ..., n.$$

Ce qui est équivalent à

$$l_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}u_{kj} \;\; \textbf{pour } i = j, j+1, ..., n.$$

Nous voyons que pour calculer les éléments l_{ij} de la jème colonne de L, il nous faut connaître préalablement les éléments des colonnes 1 à $j-1$ de L ainsi que les éléments des lignes 1 à $j-1$ de U.

etc. . . . À vous de continuer.

Retour à l'exercice ▲

On découpe les matrices A, L et U :

$$\begin{pmatrix} [A]_k & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [L]_k & 0 \\ \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [U]_k & \dots \\ 0 & \dots \end{pmatrix}.$$

En effectuant le produit par blocs, on obtient alors

$$[A]_k = [L]_k [U]_k.$$

Les deux matrices triangulaires $[L]_k$ et $[U]_k$ sont inversibles car les éléments des diagonales des matrices L et U sont non nuls, donc la matrice $[A]_k$ est inversible.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice II.15

On rappelle que l'élément p_{ij} correspond à la ième composante de $g(\vec{e}_j)$. On a donc

$$p_{ij} = \left(\vec{e}_{\sigma(j)}\right)_i = \delta_{i,\sigma(j)}.$$

Pour montrer que $P^{-1} = P^T$, il suffit de calculer le produit PP^T :

$$\left(PP^T\right)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} p_{ik}p_{jk} = \sum_{k=1}^{n} \delta_{i,\sigma(k)}\delta_{j,\sigma(k)}.$$

Le produit $\delta_{i,\sigma(k)}\delta_{j,\sigma(k)}$ est nul sauf si

$$i = j = \sigma(k)$$

et dans ce cas le produit vaut 1, ce qui montre le résultat.

Retour à l'exercice ▲

1. Le produit de matrices donne
$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (LD)_{ik} l_{jk},$$
soit, puisque la matrice D est diagonale
$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} l_{ik} d_k l_{jk}.$$
Or, puisque la matrice L est triangulaire inférieure, le produit $l_{ik} l_{jk}$ est nul pour $k > \inf(i, j)$, soit $k > j$, ce qui donne le résultat.
2. En détaillant la somme de la première question, on obtient ($l_{jj} = 1$) :
$$a_{jj} = \sum_{k=1}^{j-1} d_k l_{jk}^2 + d_j l_{jj}^2 = \sum_{k=1}^{j-1} d_k l_{jk}^2 + d_j,$$
soit
$$d_j = a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} d_k l_{jk}^2.$$
Et pour $i > j$
$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{j-1} d_k l_{ik} l_{jk} + d_j l_{ij} l_{jj} = \sum_{k=1}^{j-1} d_k l_{ik} l_{jk} + d_j l_{ij},$$
soit
$$l_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} d_k l_{ik} l_{jk}}{d_j}.$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice II.17

Un raisonnement simple est basé sur le calcul de déterminant. En effet, puisque la matrice B est triangulaire, son déterminant est le produit des éléments de sa diagonale.

$$\text{dét } A = \text{dét } (BB^T) = \text{dét } B \text{ dét } (B^T) = \prod_{i=1}^{n} (b_{ii})^2.$$

La matrice A est inversible puisque elle est définie positive (voir les rappels du chapitre 1). Le déterminant de A est donc non nul, d'où l'on déduit que les éléments b_{ii} sont non nuls.

Retour à l'exercice ▲

Il suffit de considérer $q(\theta)$ comme un trinôme en θ qui est toujours positif ou nul, c'est-à-dire qui n'a pas de racines réelles distinctes. Dans ce cas le trinôme

$$q(\theta) = \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)\theta^2 + \left(2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)\theta + \sum_{i=1}^{n} x_i^2,$$

a un discriminant négatif ou nul

$$\left(2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 - 4\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) \leq 0,$$

soit

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right).$$

Le résultat s'obtient en prenant la racine carrée de cette inégalité, puisque la fonction racine carrée est croissante de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice II.19

Les propriétés de la norme vectorielle donnent :

$$\|\lambda Ax\| = |\lambda|\|Ax\|.$$

On a donc

$$\|\lambda A\| = \max_{x\in\mathbb{C}^n, x\neq 0} |\lambda|\frac{\|Ax\|}{\|x\|} = |\lambda|\|A\|.$$

De même

$$\|Ax + Bx\| \leq \|Ax\| + \|Bx\|,$$

ce qui donne pour tout $x \neq 0$

$$\frac{\|(A+B)x\|}{\|x\|} \leq \frac{\|Ax\|}{\|x\|} + \frac{\|Bx\|}{\|x\|},$$

soit

$$\frac{\|(A+B)x\|}{\|x\|} \leq \max_{x\in\mathbb{C}^n, x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} + \max_{x\in\mathbb{C}^n, x\neq 0} \frac{\|Bx\|}{\|x\|}.$$

Cette dernière inégalité étant vraie pour tout $x \neq 0$, est donc encore vraie pour le max, soit

$$\max_{x\in\mathbb{C}^n, x\neq 0} \frac{\|(A+B)x\|}{\|x\|} \leq \max_{x\in\mathbb{C}^n, x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} + \max_{x\in\mathbb{C}^n, x\neq 0} \frac{\|Bx\|}{\|x\|}.$$

Retour à l'exercice ▲

Rappelons la définition de la norme subordonnée

$$\|A\| = \max_{x \in \mathbb{C}^n, x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

Ceci implique que pour tout$x \neq 0$, on a

$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \|A\|$$

soit

$$\|Ax\| \leq \|A\| \, \|x\|.$$

Cette inégalité étant trivialement vérifiée pour $x = 0$, elle est donc vraie pour tout $x \in \mathbb{C}^n$.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice II.21

Par définition de la norme subordonnée, on a

$$\|I\| = \max_{x \in \mathbb{C}^n, x \neq 0} \frac{\|Ix\|}{\|x\|} = \max_{x \in \mathbb{C}^n, x \neq 0} \frac{\|x\|}{\|x\|} = 1.$$

Par définition de la norme de Frobenius, on a

$$\|I\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |I_{ij}|^2} = \sqrt{n}.$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice II.22

Par définition de la valeur propre, on a

$$BAY = \lambda Y.$$

Multiplions à gauche par A, il vient

$$ABAY = \lambda AY.$$

Ceci correspond à la définition d'une valeur propre de AB à condition que le vecteur propre associé soit non nul. Supposons que $AY = 0$, alors en multipliant par B à gauche, on obtiendrait

$$BAY = 0, (= \lambda Y),$$

ce qui est impossible puisque λ est non nul et Y non nul (vecteur propre).

On vient de montrer que toute valeur propre non nulle de BA est une valeur propre de AB. Le raisonnement est évidemment valable en échangeant les rôles de A et de B. Les deux matrices BA et AB ont donc les mêmes valeurs propres non nulles et donc le même rayon spectral.

Retour à l'exercice ▲

- Puisque la matrice A est symétrique, elle est diagonalisable (voir les rappels du chapitre 1). Elle s'écrit, donc

$$A = PDP^{-1},$$

où D est une matrice diagonale. Les éléments de la diagonale de D sont les valeurs propres de A. On a donc

$$A^2 = PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^2P^{-1},$$

ce qui montre que les valeurs propres de A^2 sont les éléments de la diagonale de D^2, c'est à dire les valeurs propres de A au carré.
- Si l'on range les valeurs propres de A de la manière suivante :

$$|\lambda_n| \leq |\lambda_{n-1}| \leq \ldots \leq |\lambda_1|,$$

on a

$$|\lambda_n|^2 \leq |\lambda_{n-1}|^2 \leq \ldots \leq |\lambda_1|^2.$$

Il en résulte que

$$\rho(A^2) = |\lambda_1|^2 = \rho(A)^2.$$

- Dans le cours il est démontré (rechercher le résultat si vous l'avez oublié) que

$$\|A\|_2^2 = \rho(AA^T).$$

La matrice étant symétrique ($A = A^T$) et en appliquant la question précédente, on a

$$\|A\|_2^2 = \rho(A^2) = \rho(A)^2,$$

soit (les deux quantités étant positives)

$$\|A\|_2 = \rho(A).$$

- Les valeurs propres de A sont évidemment nulles, ce qui donne un rayon spectral nul. Si ce rayon spectral était une norme matricielle, on devrait avoir une matrice nulle par la première propriété d'une norme matricielle. La matrice A n'est évidemment pas la matrice nulle, le rayon spectral n'est donc pas une norme matricielle pour les matrices non symétriques.

Retour à l'exercice ▲

Considérons une valeur propre λ de A :

$$AY = \lambda Y.$$

On a déjà montré (exercice II.20) que

$$\|AY\| \leq \|A\| \, \|Y\|,$$

ce qui donne

$$\|\lambda Y\| \leq \|A\| \, \|Y\|$$

donc

$$|\lambda| \, \|Y\| \leq \|A\| \, \|Y\|$$

or ($\|Y\| \neq 0$ puisque Y est un vecteur non nul), donc après simplification

$$|\lambda| \leq \|A\|.$$

Cette inégalité étant valable pour toute valeur propre, elle est évidemment valable pour la plus grande en module, soit

$$\rho(A) \leq \|A\|.$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice II.25

Une matrice diagonale étant une matrice symétrique, sa norme matricielle subordonnée à la norme euclidienne est égale à son rayon spectral. Il en est de même de l'inverse de D. D'autre part, les valeurs propres d'une matrice diagonale sont ses éléments diagonaux. Si l'on appelle d_i les éléments diagonaux de D, on a

$$\|D\| = \max_{1 \le i \le n} |d_i| \,, \quad \|D^{-1}\| = \frac{1}{\min\limits_{1 \le i \le n} |d_i|}.$$

Le conditionnement de D est donc donné par

$$\chi(D) = \|D\| \, \|D^{-1}\| = \max_{1 \le i \le n} |d_i| \times \frac{1}{\min\limits_{1 \le i \le n} |d_i|}.$$

Ce conditionnement est égal à 1 si et seulement si

$$\max_{1 \le i \le n} |d_i| = \min_{1 \le i \le n} |d_i|$$

ce qui est équivalent à tous les éléments diagonaux de D sont égaux, c'est-à-dire $D = \alpha I$.

Retour à l'exercice ▲

- Puisque la matrice A est symétrique, elle est diagonalisable (voir les rappels du chapitre 1). Elle s'écrit, donc

$$A = PDP^{-1},$$

  où D est une matrice diagonale dont les éléments de la diagonale sont les valeurs propres de A. On a donc

$$A^{-1} = (PDP^{-1})^{-1} = PD^{-1}P^{-1},$$

  ce qui montre que les valeurs propres de A^{-1} sont les éléments de la diagonale de D^{-1}, c'est à dire l'inverse des valeurs propres de A. Puisque les valeurs propres de A sont rangées de la manière suivante :

$$0 < |\lambda_n| \leq \ldots \leq |\lambda_2| \leq |\lambda_1|,$$

  les valeurs propres de A^{-1} sont données par :

$$\frac{1}{|\lambda_1|} \leq \frac{1}{|\lambda_2|} \leq \ldots \leq \frac{1}{|\lambda_n|}.$$

- Par définition, on a

$$\chi(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 = \rho(A)\rho(A^{-1}) = \frac{|\lambda_1|}{|\lambda_n|}.$$

Retour à l'exercice ▲

On obtient

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & 6 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 6 & 12 \\ 0 & 0 & 6 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & 24 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 1a, Exercice A.1.2

On obtient

$$e_1 = -\frac{c_1}{b_1},\ f_1 = \frac{y_1}{b_1}$$

$$e_i = -\frac{c_i}{a_i e_{i-1} + b_i},\quad f_i = \frac{y_i - a_i f_{i-1}}{a_i e_{i-1} + b_i} \quad \textbf{pour } i = 2, ..., n-1$$

$$f_n = \frac{y_n - a_n f_{n-1}}{a_n e_{n-1} + b_n}.$$

Retour à l'exercice ▲

On doit déterminer dans l'ordre $e_1, f_1, e_2, f_2, ..., e_{n-1}, f_{n-1}, f_n, x_n, x_{n-1}, ..., x_1$.

Retour à l'exercice ▲

On a

$$A_1 = LU_1 = L_1, \;\; \text{d'où } L_1 = A_1 = \begin{pmatrix} l_1 \\ a_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \;\; \text{avec } l_1 = b_1.$$

$$\underline{A}_1 = \underline{L}_1 U = l_1 \underline{U}_1, \;\; \text{d'où } \underline{U}_1 = \frac{1}{l_1}\underline{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & e'_1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \;\; \text{avec } e'_1 = \frac{c_1}{l_1}.$$

Retour à l'exercice ▲

On identifie cette fois la deuxième colonne de A, puis la deuxième ligne de A.

Retour à l'exercice ▲

On a

$$A_2 = LU_2 = L\begin{pmatrix} e'_1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} = e'_1 L_1 + L_2 \ \text{ d'où } L_2 = A_2 - e'_1 L_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ l_2 \\ a_3 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \ \text{ avec } l_2 = b_2 - e'_1 a_2.$$

$$\underline{A}_2 = \underline{L}_2 U = \begin{pmatrix} a_2 & l_2 & 0 & \ldots \end{pmatrix} U = a_2 \underline{U}_1 + l_2 \underline{U}_2,$$

d'où

$$\underline{U}_2 = \frac{1}{l_2}\left(\underline{A}_2 - a_2 \underline{U}_1\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & e'_2 & 0 & \ldots \end{pmatrix} \ \text{ avec } e'_2 = \frac{c_2}{l_2}.$$

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 2c, Exercice A.1.2

On suppose que les formules ont été démontrées pour $2, 3, ..., j-1$, on va les démontrer pour j, pour cela on identifie la colonne j et la ligne j de A.

Retour à l'exercice ▲

On a

$$A_j = LU_j = L \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ e'_{j-1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} = e'_{j-1} L_{j-1} + L_j \ \text{ d'où } L_j = A_j - e'_{j-1} L_{j-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ l_j \\ a_{j+1} \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \text{ avec } l_j = b_j - e'_{j-1} a_j.$$

$$\underline{A}_j = \underline{L}_j U = \begin{pmatrix} 0 & \dots & a_j & l_j & 0 & \dots \end{pmatrix} U = a_j \underline{U}_{j-1} + l_j \underline{U}_j,$$

d'où

$$\underline{U}_j = \frac{1}{l_j}\left(\underline{A}_j - a_j \underline{U}_{j-1}\right) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 1 & e'_j & 0 & \dots \end{pmatrix} \text{ avec } e'_j = \frac{c_j}{l_j} = \frac{c_j}{b_j - e'_{j-1} a_j}.$$

En construisant la matrice U à partir des lignes que l'on vient de déterminer et la matrice L à partir des colonnes que l'on vient de déterminer, on obtient :

$$U = \begin{pmatrix} 1 & -e_1 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 1 & -e_2 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -e_{n-1} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} l_1 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ a_2 & l_2 & 0 \dots \dots & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & a_{n-1} & l_{n-1} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_n & l_n \end{pmatrix}$$

Retour à l'exercice ▲

C'est vrai pour $i = 1$, il suffit de regarder les 2 expressions, supposons que ce soit vrai pour $1, 2, ..., j-1$, on a donc

$$e'_j = \frac{c_j}{b_j - e'_{j-1}a_j} = \frac{c_j}{b_j + e_{j-1}a_j} = -e_j$$

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 2e, Exercice A.1.2

Résolvez le système, trouvez l'expression des z_i, et comparez avec les f_i

Retour à l'exercice ▲

La première équation est

$$l_1 z_1 = y_1 \Leftrightarrow z_1 = \frac{y_1}{b_1} = f_1.$$

On suppose que $f_{i-1} = z_{i-1}$, montrez que $f_i = z_i$.

Retour à l'exercice ▲

Si $z_{i-1} = f_{i-1}$, pour montrer que $z_i = f_i$, on écrit l'équation i

$$a_i z_{i-1} + l_i z_i = y_i \Leftrightarrow z_i = \frac{y_i - a_i z_{i-1}}{l_i} = \frac{y_i - a_i f_{i-1}}{b_i + e_{i-1} a_i} = f_i$$

Et c'est tout !

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 2f, Exercice A.1.2

$$Ax = y \Leftrightarrow LUx = y \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} Lz = y \\ Ux = z \end{array} \right.$$

Puisque $z = f$ on résout donc $Ux = f$, ce qui équivaut à

$$\begin{pmatrix} 1 & -e_1 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 1 & -e_2 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -e_{n-1} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = e_1 x_2 + f_1 \\ \vdots \\ x_i = e_i x_{i+1} + f_i \\ \vdots \\ x_n = f_n \end{array} \right.$$

On retrouve bien la méthode de Richtmayer. Les conditions pour lesquelles cette méthode est applicable sont donc les conditions pour lesquelles la factorisation de Crout est faisable, et conduit à des matrices L et U inversibles. Cette condition est : toutes les sous-matrices principales de A sont inversibles.

Retour à l'exercice ▲

On a :

$$a_{kk}x_k = -a_{k1}x_1 - \ldots - a_{kk-1}x_{k-1} - a_{kk+1}x_{k+1} - \ldots - a_{kn}x_n.$$

Utiliser l'inégalité triangulaire.

Retour à l'exercice ▲

$$\begin{aligned} |a_{kk}||x_k| &\leq |a_{k1}||x_1| + ... + |a_{kk-1}||x_{k-1}| + |a_{kk+1}||x_{k+1}|... + |a_{kn}||x_n| \\ &\leq (|a_{k1}| + ... + |a_{kk-1}| + |a_{kk+1}|... + |a_{kn}|)|x_k|. \end{aligned}$$

Qu'obtient-on si $x_k \neq 0$?

Retour à l'exercice ▲

Si $x_k \neq 0$, on pourrait simplifier ce qui donnerait :

$$|a_{kk}| \leq (|a_{k1}| + ... + |a_{kk-1}| + |a_{kk+1}| ... + |a_{kn}|).$$

Ce qui est impossible car A est à diagonale strictement dominante.

Donc $x_k = 0$.

En déduire que A est inversible.

Retour à l'exercice ▲

Si $x_k = 0$ alors $\forall i \quad x_i = 0$ et donc $x = 0$. Donc

$$\mathbf{Ker}\ (A) = \{0\}.$$

Revoir le chapitre 1.

Retour à l'exercice ▲

Si A est carrée :

$$\textbf{Ker}\,(A) = \{0\} \Longleftrightarrow A \textbf{ est inversible} .$$

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 3, Exercice A.1.3

Revoir le paragraphe "Factorisation $A = LU$ / faisabilité ".

Retour à l'exercice ▲

Montrer que les sous-matrices principales sont à diagonale strictement dominante, donc inversibles.

Retour à l'exercice ▲

Le produit des valeurs propres est positif.

Les termes diagonaux de A sont positifs.

Les conditions nécessaires pour que la matrice A soit définie positive sont satisfaites.

A priori on ne peut pas dire si A est définie positive ou non.

Retour à l'exercice ▲

Voir le paragraphe "Factorisation LDL^T ".

Retour à l'exercice ▲

Revoir également le paragraphe "Factorisation $A = LU$ / faisabilité ".

Retour à l'exercice ▲

Aide 3, Question 2, Exercice A.1.4

Pour obtenir D, on écrit $U = DU'$, avec U' matrice triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale. Que vaut U' ?

Retour à l'exercice ▲

Aide 4, Question 2, Exercice A.1.4

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}. \; U' = L^T.$$

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 3, Exercice A.1.4

Revoir la définition de matrice symétrique définie positive dans le chapitre 1.

Retour à l'exercice ▲

$$x^T Ax = x^T LDL^T x = y^T Dy \text{ avec } y = L^T x$$

Or $d_{22} = -1$, on peut choisir y judicieusement.

Retour à l'exercice ▲

On peut choisir

$$\hat{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{y}^T D \hat{y} = -1.$$

Retour à l'exercice ▲

Existe-t-il $\hat{x}$ tel que $\hat{y} = L^T\hat{x}$?

Retour à l'exercice ▲

Puisque L^T est inversible,

$$\exists\, \hat{x},\, \hat{y} = L^T \hat{x}$$

et on a

$$\hat{x}^T A \hat{x} = \hat{y}^T D \hat{y} = -1.$$

Ce qui permet de conclure que la matrice A n'est pas définie positive puisque l'on n'a pas

$$\forall x, \quad x^T A x \geq 0.$$

Retour à l'exercice ▲

Faire les calculs et montrer que l'on ne débouche pas sur une impossibilité : montrer que les termes dont on doit prendre la racine carrée sont positifs, montrer que les termes par lesquels on doit diviser sont non nuls.

Retour à l'exercice ▲

Les propriétés de A qui peuvent nous servir sont

$$a_{11} > 0, a_{22} > 0.$$

Les deux valeurs propres de A sont strictements positives donc $\det A > 0$.

Faites les calculs pour obtenir C, et montrez que tout se passe bien.

Retour à l'exercice ▲

ICI on admet que C existe, donc que tous les calculs se passent bien.

Retour à l'exercice ▲

Utiliser les propriétés du produit matriciel.

Que vaut a_{11} ? En déduire c_{11} (qui doit être positif).

Que vaut A_1 ? En déduire C_1.

Faites de même pour les colonnes suivantes.

Retour à l'exercice ▲

Aide 3, Question 2a, Exercice A.1.5

$$c_{11} = \sqrt{a_{11}}.$$

$$C_1 = \frac{1}{c_{11}} A_1.$$

Retour à l'exercice ▲

On suppose que l'on a déterminé les $j-1$ premières colonnes.
Que vaut a_{jj} ?
Constater que dans l'expression de a_{jj} tous les termes sont connus sauf c_{jj}.
En déduire c_{jj} (qui doit être positif).
Que vaut A_j ?
Là encore, constater que seule la colonne C_j est inconnue.
En déduire C_j.

Retour à l'exercice ▲

$$c_{jj} = \sqrt{a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} c_{jk}^2}.$$

$$C_j = \frac{1}{c_{jj}} \left(A_j - \sum_{k=1}^{j-1} c_{jk} C_k \right).$$

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 2b, Exercice A.1.5

Voir le paragraphe "Factorisation de Cholesky / mise en oeuvre ".

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 1, Exercice A.1.6

$$||Ax||_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |(Ax)_i| = \max_{1\leq i\leq n} \left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j\right|$$

Retour à l'exercice ▲

Utiliser l'inégalité triangulaire.

N'oubliez pas que

$$\forall j \quad |x_j| \leq \|x\|_\infty .$$

Retour à l'exercice ▲

On obtient

$$\left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j\right| \leq \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\ |x_j| \leq \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\, ||x||_\infty = ||x||_\infty \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

Donc :

$$||Ax||_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j\right| \leq ||x||_\infty \left(\max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\right)$$

Donc

$$\forall x \neq 0 \quad \frac{||Ax||_\infty}{||x||_\infty} \leq \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

On obtient le résultat :

$$||A||_\infty = \max_{x\neq 0} \frac{||Ax||_\infty}{||x||_\infty} \leq \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \qquad \text{(A.1.1)}$$

Retour à l'exercice ▲

$$||\widehat{x}||_\infty = 1.$$

D'après la définition de $\hat{x}$, on a

$$(A\widehat{x})_l = a_{l1}\widehat{x}_1 + a_{l2}\widehat{x}_2 + ... + a_{ln}\widehat{x}_n = |a_{l1}| + |a_{l2}| + ... + |a_{ln}| = \sum_{j=1}^{n} |a_{lj}|$$

Car

$$\text{si} \begin{cases} a_{li} \geq 0, & \widehat{x}_i a_{li} = a_{li} = |a_{li}| \\ a_{li} < 0, & \widehat{x}_i a_{li} = -a_{li} = |a_{li}| \end{cases} \text{ pour } 1 \leq i \leq n$$

On en déduit un minorant de $\|A\hat{x}\|_\infty$.

Retour à l'exercice ▲

En utilisant la définition de la norme infinie d'un vecteur, on obtient :

$$\|A\hat{x}\|_\infty \geq |(A\widehat{x})_l| = (A\widehat{x})_l = \sum_{j=1}^{n} |a_{lj}|.$$

Retour à l'exercice ▲

Dans la question 2), on a montré

$$||A||_\infty \leq \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{lj}|.$$

Montrer que la question 3) permet d'écrire l'autre inégalité.

Retour à l'exercice ▲

En utilisant la question **3**

$$\frac{||A\widehat{x}||_\infty}{||\widehat{x}||_\infty} \geq \sum_{j=1}^{n} |a_{lj}| = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

Reprenez la définition de $||A||_\infty$.

Retour à l'exercice ▲

D'après la définition :

$$||A||_\infty \geq \frac{||A\widehat{x}||_\infty}{||\widehat{x}||_\infty} \geq \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

On retrouve l''autre'' inégalité.
D'où l'égalité :

$$||A||_\infty \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 5, Exercice A.1.6

$$
\begin{aligned}
||A||_1 &= \max(1; 0.3; 1.1) = 1.1 \\
||A||_\infty &= \max(0.7; 0.9; 0.8) = 0.9
\end{aligned}
$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.7

1. Soit y vecteur propre de AA' associé à la valeur propre $\lambda \neq 0$,

$$y \text{ vecteur propre de } AA' \Leftrightarrow \begin{cases} AA'y = \lambda y \\ y \neq 0 \end{cases}$$

   On a donc $A'AA'y = \lambda A'y$, pour montrer que $A'y$ est vecteur propre de $A'A$, il reste à prouver que $A'y \neq 0$.
   Cela se démontre par l'absurde

$$A'y = 0 \Rightarrow AA'y = 0 \Rightarrow \lambda y = 0,$$

   or $\lambda \neq 0, y \neq 0$ donc $\lambda y \neq 0$, ce qui prouve que $A'y \neq 0$.
   Toutes les valeurs propres non nulles de AA' sont donc valeurs propres (non nulles) de $A'A$, on montrerait de même que les valeurs propres non nulles de $A'A$ sont valeurs propres de AA'.
   On va montrer que $\rho(A'A) = \rho(AA')$.
   Ce résultat peut se démontrer par l'absurde si on suppose que $\rho(A'A) > \rho(AA')$, alors $\rho(A'A) > 0$, donc il existe λ valeur propre de $A'A$ vérifiant $|\lambda| = \rho(A'A) > 0$, donc λ est valeur propre de AA', donc $\rho(AA') \geq |\lambda| = \rho(A'A)$, ce qui conduit à une contradiction. On montrerait de même que $\rho(AA') > \rho(A'A)$ conduit à une contradiction, donc $\rho(A'A) = \rho(AA')$.

2. B est inversible donc ses valeurs propres sont non nulles, donc $|\lambda_1| > 0$.
   Par définition du rayon spectral $\rho(B) = |\lambda_n|$.

$$By_i = \lambda_i y_i \Leftrightarrow B^{-1}y_i = \frac{1}{\lambda_i} y_i$$

   Les valeurs propres de B^{-1} sont donc $\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, ..., \frac{1}{\lambda_n}$, les vecteurs propres correspondants sont les mêmes que ceux de B.
   Si on ordonne les valeurs propres de B^{-1}, on obtient $\frac{1}{|\lambda_1|} \geq \frac{1}{|\lambda_2|} \geq ... \geq \frac{1}{|\lambda_n|}$, donc

$$\rho(B^{-1}) = \frac{1}{|\lambda_1|}.$$

3. (a) On rappelle que si E et E' sont des matrices carrées inversibles, on a $(E^T)^{-1} = (E^{-1})^T$, $(EE')^{-1} = E'^{-1}E^{-1}$, en utilisant ces résultats et la question 1., on obtient

$$\rho\left((E^{-1})^T E^{-1}\right) = \rho\left(E^{-1}(E^{-1})^T\right) = \rho\left(E^{-1}(E^T)^{-1}\right) = \rho\left((E^T E)^{-1}\right).$$

(b) $E^T E$ est symétrique définie positive (car E est inversible), donc toutes les valeurs propres de $E^T E$ sont strictement positives.

(c) On utilise 2.

$$\rho\left(E^T E\right) = \lambda_n, \quad \rho\left((E^T E)^{-1}\right) = \frac{1}{\lambda_1}$$

(d)

$$\chi_2(E) = \|E\|_2 \|E^{-1}\|_2 = \sqrt{\rho(E^T E)}\sqrt{\rho((E^{-1})^T E^{-1})} = \frac{\sqrt{\lambda_n}}{\sqrt{\lambda_1}}$$

(e) Si C est symétrique $\|C\|_2 = \rho(C), \quad \|C^{-1}\|_2 = \rho(C^{-1})$.
Si on note μ_i les valeurs propres ordonnées de C : $0 < |\mu_1| \leq |\mu_2| \leq ... \leq |\mu_n|$, alors

$$\chi_2(C) = \|C\|_2 \|C^{-1}\|_2 = \rho(C)\rho(C^{-1}) = \frac{|\mu_n|}{|\mu_1|}$$

On calcule $\det(sI - C) = (s+5)(s+2)(s-4)$, on a donc dans l'ordre $\mu_1 = -2, \mu_2 = 4, \mu_3 = -5$, donc $\chi_2(C) = \frac{5}{2}$.

(f) $E^T E$ est une matrice symétrique (définie positive), ses valeurs propes sont $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n$, donc en utilisant la question (d)

$$\chi_2(E^T E) = \frac{\lambda_n}{\lambda_1} = (\chi_2(E))^2.$$

On sait que le conditionnement d'une matrice est toujours superieur à un, donc la matrice $E^T E$ a un conditionnement supérieur à la matrice E. On utilisera cette propriété dans le chapitre sur les moindres carrés en préférant résoudre un système dont la matrice est E, plutot qu'un système dont la matrice est $E^T E$.

Retour à l'exercice ▲