MT09-A05
Correction du TD n°4 :
Méthodes itératives de résolution de systèmes linéaires et non-linéaires

Exercice n°1 Pour préparer le **TP4**

1)
$A = D - E - F$ comme dans le cours,
- D est une matrice diagonale contenant la diagonale de A,
- E est une matrice triangulaire inférieure (triangle inférieur de -A),
- F est une matrice triangluaire supérieure de (triangle supérieur de -A)

• On calcule $\hat{x}_i^{(k+1)}$ par la méthode de Gauss-Seidel :

$$a_{ii}\,\hat{x}_i^{(k+1)} = (b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\,x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}\,x_j^{(k)}) \quad \text{pour } i = 1, ..n$$

Soit sous forme matricielle :

$$D\,\hat{x}^{(k+1)} = (b + E\,x^{(k+1)} + Fx^{(k)}) \tag{1}$$

• On calcule $x_i^{(k+1)}$ par la formule de relaxation :

$$x_i^{(k+1)} = \omega\,\hat{x}_i^{(k+1)} + (1-\omega)\,x_i^{(k)} \quad \text{pour } i = 1, ..n$$

Soit sous forme matricielle :

$$x^{(k+1)} = \omega\,\hat{x}^{(k+1)} + (1-\omega)\,x^{(k)} \iff Dx^{(k+1)} = \omega\,D\hat{x}^{(k+1)} + (1-\omega)D\,x^{(k)} \tag{2}$$

Nous injectons (**??**) dans (2) :

$$\begin{aligned} Dx^{(k+1)} &= \omega\left(b + E\,x^{(k+1)} + Fx^{(k)}\right) + (1-\omega)D\,x^{(k)} \\ \iff (D-\omega E)\,x^{(k+1)} &= (\omega\,F + (1-\omega)\,D)\,x^{(k)} + \omega\,b \\ \iff \underbrace{\left(\frac{1}{\omega}D - E\right)}_{=\text{M triang inf}}\; x^{(k+1)} &= \underbrace{\left(F + \frac{1-\omega}{\omega}\,D\right)}_{=\text{N triang sup}} x^{(k)} + b \end{aligned}$$

On a bien sûr $M - N = A$.

2)Algorithme de Gauss-Seidel :

A, b , x_0, N, ϵ donnés

$n =$ nombre de lignes de la matrice A
pour $i = 1$ jusqu'à n faire
  si $|a_{ii}| < \epsilon$ alors
    arrêter l'algorithme et écrire un message d'erreur
  fin si
fin pour
pour $k = 1$ jusqu'à N faire
  pour $i = 1$ jusqu'à n faire
    $x_1(i) \longleftarrow \frac{1}{a_{ii}}(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\, x_1(j) - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}\, x_0(j));$
    $\mathbf{x_1(i) \longleftarrow \omega\, x_1(i) + (1 - \omega)\, x_0(i)};\longrightarrow$ variante sur la méthode de relaxation
  fin pour
  si $\frac{||x_1 - x_0||}{||x_1||} \leq \epsilon$
    arrêter et écrire que x_1 est la solution et retourner
  sinon
    $x_0 = x_1;$
  fin si
fin pour
arrêt avec un message indiquant la non-convergence

Remarque 1. *Au niveau pratique, on ne stocke que 2 vecteurs (x_0 et x_1) c'est-à-dire $x^{(k)}$ et $x^{(k+1)}$, nécessaires pour calculer l'erreur relative.*
On recouvre l'ancien vecteur par le nouveau petit à petit.

Exercice n°2

1)• Méthode de JACOBI :

$$\begin{aligned} D\,x^{(k+1)} &= (E+F)\,x^{(k)} + b \\ \Longleftrightarrow x^{(k+1)} &= \underbrace{D^{-1}(E+F)}_{=J}\,x^{(k)} + D^{-1}\,b \end{aligned}$$

Définition 1 (Rayon Spectral de J). $\rho(J) = \max\limits_{1\leq i\leq n} |\lambda_i|$ *avec* λ_i *valeurs propres de J.*

$$J = D^{-1}(E+F) \quad = \quad I\,(E+F) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi, det } (J-\lambda I) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & -2 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 2 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -\lambda & 1 \end{vmatrix} \\ &= -\lambda(\lambda^2-2) - (-2\,\lambda+4) + 2\,(2-2\,\lambda) = -\lambda^3 + 2\,\lambda + 2\lambda - 4 + 4 - 4\,\lambda = -\lambda^3 \end{aligned}$$

$p_J(\lambda) =$ det $(J-\lambda I) = -\lambda^3 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \rho(J) = 0 < 1 \longrightarrow$ La méthode de Jacobi **converge.**

• Méthode de GAUSS-SEIDEL :
$$\begin{aligned} (D-E)\,x^{(k+1)} &= F\,x^{(k)} + b \\ \Longleftrightarrow x^{(k+1)} &= \underbrace{(D-E)^{-1}F}_{=R}\,x^{(k)} + (D-E)^{-1}\,b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (D-E) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow (D-E)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ R = (D-E)^{-1}F &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 8 & -6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc, det } (R-\lambda I) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & -2 \\ 0 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 8 & -6-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 8 & -6-\lambda \end{vmatrix} \\ &= -\lambda\,((2-\lambda)(-6-\lambda)+8) = -\lambda\,(\lambda^2+4\lambda-4) \end{aligned}$$

$$
\begin{array}{rcl}
p_R(\lambda) & = & \det\,(R-\lambda I) \;\; = -\lambda\,(\lambda^2+4\lambda-4) = 0 \\
 & & \qquad\qquad \swarrow \qquad \searrow \\
 & & \lambda = 0 \qquad (\lambda^2+4\lambda-4)=0 \\
 & & \qquad\qquad \Delta = 4^2+4*4 = 32 > 0 \text{ (2 racines réelles)} \\
 & & \qquad\qquad \lambda_1 = \dfrac{-4-\sqrt{32}}{2} = -2-\sqrt{8},\; \lambda_2 = \dfrac{-4+\sqrt{32}}{2} = -2+\sqrt{8}
\end{array}
$$

Il y a donc 3 valeurs propres : 0, $-2-\sqrt{8}, -2+\sqrt{8}$.

$$\rho(R) = 2+\sqrt{8} > 1 \longrightarrow \text{ La méthode de Gauss-Seidel } \textbf{diverge}.$$

Plus simplement, pour l'équation du second degré, on aurait pu constater que le produit des valeurs propres valait -4, donc cette équation admettait au moins une racine supérieure à 1 en valeur absolue, donc $\rho(R) > 1$, ce qui permettait de conclure.

2)

$$J = D^{-1}(E+F) \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$
\begin{array}{rcl}
\text{Ainsi, } \det\,(J-\lambda I) & = & \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 2 \\ 2 & -\lambda & -3 \\ 0 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & -3 \\ -2 & -\lambda \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -\lambda \end{vmatrix} \\
 & = & -\lambda(\lambda^2-6) - 2\,(-\lambda+4) = -\lambda^3 + 6\,\lambda + 2\,\lambda - 8 = -\lambda^3 + 8\,\lambda - 8
\end{array}
$$

$p_J(\lambda) = -\lambda^3 + 8\,\lambda - 8 = 0 \iff$ 2 est racine donc $\rho(J) \geq 2 > 1 \longrightarrow$ La méthode de Jacobi **diverge.**

$$R = (D-E)^{-1}F \quad \text{et} \quad (D-E) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow (D-E)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = (D-E)^{-1}F \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\det\,(R-\lambda I) \;=\; -\lambda\,((2-\lambda)(-2-\lambda)+4) = -\lambda^3$$

$$p_R(\lambda) = 0 \iff \rho(R) = 0 < 1 \longrightarrow \text{ La méthode de Gauss-Seidel } \textbf{converge}.$$