MT09-Analyse numérique élémentaire

Chapitre 1 : Révisions d'algèbre linéaire

Équipe de Mathématiques Appliquées

UTC

Avril 2006

Chapitre I

Algèbre linéaire - révisions

I.1 Espace vectoriel

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

I.1.1 Généralités

Exercices :
Exercice I.1
Exercice I.2
Exercice I.3

Documents :
Document I.1

La définition précise d'un espace vectoriel est donné dans le document référencé. Puisque les principales applications que vous rencontrerez ne feront appel qu'à $\mathbb{R}^n$ (ou $\mathbb{C}^n$) et P_n (les polynômes de degré inférieur ou égal à n), nous allons illustrer la définition dans ces deux cas particuliers.

- Commençons par étudier l'espace $\mathbb{R}^3$ des vecteurs $\vec{x}$ que vous pouvez identifier à $\overrightarrow{OM}$ dans un repère orthonormé (voir figure I.1.1). Vous connaissez la somme des vecteurs et vous vérifierez en exercice qu'elle est associative, commutative, qu'il existe un é lément neutre ($\vec{0}$) et que tout vecteur ($\vec{x}$) admet un symétrique ($-\vec{x}$). C'est la loi de composition interne de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.
  Vous savez multiplier un vecteur par un nombre réel λ (homothétie de rapport λ), c'est la deuxième loi de l'espace vectoriel dont il est facile de montrer qu'elle possède les bonnes propriétés.
- L'ensemble P_n (polynômes de degré inférieur ou égal à n à coefficients réels) est muni aussi d'une addition associative, commutative, ayant un élément neutre (le polynôme nul) et telle que tout polynôme p a un symétrique $-p$. Vous savez aussi multiplier un polynôme par un nombre réel λ (il suffit de multiplier tous ses coefficients par λ) et ce produit possède aussi les bonnes propriétés pour faire de P_n un espace vectoriel.

Dans les deux exemples précédents la deuxième loi est constituée du produit d'un élément de l'ensemble par un nombre réel. On dit donc que les deux ensembles $\mathbb{R}^3$ et P_n sont des espaces

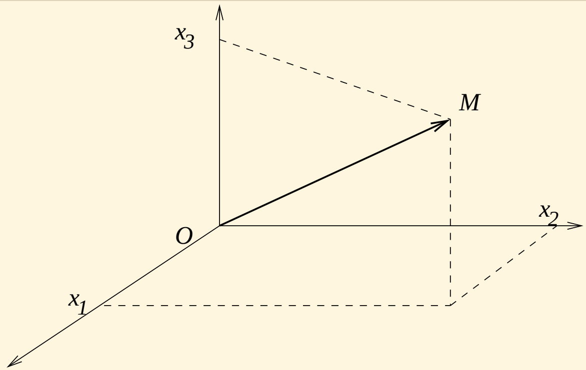

FIG. I.1.1: Espace

vectoriels sur $\mathbb{R}$.

Remarque - Considérons maintenant l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes. La loi de composition interne est l'addition des nombres complexes. Pour la deuxième loi, il y a deux choix possibles. Si l'on considère le produit d'un nombre complexe par un nombre réel on obtient alors un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, mais, si l'on considère le produit d'un nombre complexe par un nombre complexe, on obtient alors un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

I.1.2 Sous-espace vectoriel

Exercices :
Exercice I.4
Exercice I.5
Exercice I.6

Cours :
Espace vectoriel - Généralités

Soit E un espace vectoriel sur K (où K représente $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), on peut alors définir un sous-espace vectoriel de E.

Définition I.1.1. *On appelle sous espace vectoriel F de E un sous ensemble non vide de E qui reste stable pour les opérations sur E (que l'on notera s.e.v. en abrégé), c'est-à-dire*

- $\forall \vec{x} \in F, \forall \vec{y} \in F, \vec{x} + \vec{y} \in F,$
- $\forall \lambda \in K, \forall \vec{x} \in F, \lambda \vec{x} \in F.$

Cette définition est parfois donnée sous la forme synthétique suivante

$$\forall \vec{x} \in F, \forall \vec{y} \in F,\ \forall \lambda \in K, \forall \mu \in K,\ \lambda \vec{x} + \mu \vec{y} \in F.$$

Par exemple, dans $\mathbb{R}^2$, les droites de vecteur directeur $\vec{x}$ sont des sous-espaces vectoriels ($F = \{\lambda \vec{x},\ \lambda \in \mathbb{R}\}$).

Dans $\mathbb{R}^3$, les plans engendrés par deux vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ non proportionnels sont des sous-espaces vectoriels ($F = \{\lambda \vec{x} + \mu \vec{y},\ \lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}\}$).

L'espace des polynômes P_k est un sous-espace vectoriel de P_n si $k \leq n$.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

I.1.3 Famille libre, famille génératrice

Exercices :
Exercice I.7
Exercice I.8

Définition I.1.2. *On dit que la famille $\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_p\}$ de vecteurs d'un espace vectoriel E est liée s'il existe $\lambda_1, ..., \lambda_p \in K$ non tous nuls tels que*

$$\lambda_1\vec{x}_1 + \lambda_2\vec{x}_2 + ... + \lambda_p\vec{x}_p = \vec{0}.$$

Dans le cas où la famille possède plus de deux vecteurs, cette définition équivaut à dire qu'il existe un des vecteurs de la famille qui est combinaison linéaire des autres.

Définition I.1.3. *Une famille qui n'est pas liée est appelée famille libre , dans ce cas on a*

$$\{\lambda_1\vec{x}_1 + \lambda_2\vec{x}_2 + ... + \lambda_p\vec{x}_p = \vec{0}\} \Longleftrightarrow \{\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_p = 0\}.$$

Ainsi la famille de vecteurs de $\mathbb{R}^2$ $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\} = \{(1,0),(0,1),(1,2)\}$ est liée puisque $\vec{x}_3 = \vec{x}_1 + 2\vec{x}_2$. Par contre la famille $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\} = \{(1,0),(0,1)\}$ est libre (le démontrer).

Définition I.1.4. *On dit que la famille $\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_p\}$ de vecteurs d'un espace vectoriel E est génératrice si tout vecteur $\vec{x}$ de E est combinaison linéaire de $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, …, $\vec{x}_p$, c'est-à-dire s'il existe $\lambda_1, ..., \lambda_p \in K$ tels que*

$$\vec{x} = \lambda_1\vec{x}_1 + \lambda_2\vec{x}_2 + ... + \lambda_p\vec{x}_p.$$

On dit alors que E est engendré par la famille $\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_p\}$ et on note

$$E = \mathit{vect} < \vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_p > .$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

I.1.4 Base d'un espace vectoriel

Exercices :
Exercice I.9
Exercice I.10
Exercice I.11

Cours :
Famille libre, famille génératrice

Nous considérons un espace vectoriel E qui admet une famille génératrice avec un nombre fini d'éléments. Par exemple $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$ et $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ est une famille génératrice de P_n. Certains espaces vectoriels, par exemple les fonctions continues réelles, n'ont pas de famille génératrice avec un nombre fini d'éléments, mais ce n'est pas l'objet de ce cours.

Définition I.1.5. *Une base $B = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ d'un espace vectoriel E est une famille libre et génératrice.*

Un vecteur $\vec{x}$ de E est une combinaison linéaire d'éléments de B puisque B est une famille génératrice et on peut montrer que cette décomposition est unique (voir exercice I.10).

Définition I.1.6. *Un espace vectoriel de dimension finie E est un espace vectoriel qui admet une base ayant un nombre fini d'éléments : ce nombre est appelé la dimension de E.*

Remarquons que, pour un espace vectoriel donné de dimension finie, on peut montrer que toutes les bases ont le même nombre d'éléments, ce qui justifie la définition de la dimension d'un espace vectoriel.

Par exemple, on définit le vecteur $\vec{e}_i$ de $\mathbb{R}^n$ dont toutes les composantes sont nulles sauf la ième composante qui vaut 1, alors la famille $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ est une base de $\mathbb{R}^n$, ce qui signifie que $\mathbb{R}^n$ est un espace vectoriel de dimension n. De même la famille $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ est une base de P_n, donc la dimension de l'espace vectoriel P_n est égale à $n+1$.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Un résultat intéressant (non démontré), car il simplifie les démonstrations est le suivant :

Proposition I.1.1. *Soit E un espace vectoriel de dimension n, alors*
- toute famille libre de n vecteurs est une base,
- toute famille génératrice de n vecteurs est une base.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

I.2 Applications linéaires

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

I.2.1 Définition de l'application linéaire

Exercices :
Exercice I.12
Exercice I.13

On considère deux espaces vectoriels E et F définis tous les deux soit sur $K = \mathbb{R}$, soit sur $K = \mathbb{C}$. On définit alors l'application linéaire :

Définition I.2.1. *On appelle application linéaire $u : E \to F$, une application possédant les propriétés suivantes :*

$$u(\vec{x} + \vec{y}) = u(\vec{x}) + u(\vec{y}) \ , \qquad \forall \vec{x} \in E, \forall \vec{y} \in E \ ,$$

$$u(\lambda \vec{x}) = \lambda u(\vec{x}) \ , \qquad \forall \vec{x} \in E, \forall \lambda \in K \ .$$

L'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à x associe e^x n'est pas linéaire, par contre celle qui à x associe $3x$ est linéaire.

Notons que l'image par u du vecteur nul de E est le vecteur nul de F (il suffit de prendre $\lambda = 0$ dans la définition).

Définition I.2.2. *On appelle noyau de u le sous espace vectoriel de E noté Ker u tel que :*

$$\vec{x} \in \textit{Ker}\ u \iff u(\vec{x}) = \vec{0}.$$

On appelle image de u le sous espace vectoriel de F noté Im u formé des éléments $u(\vec{x})$, quand $\vec{x}$ parcourt l'espace E, soit

$$\vec{y} \in \textit{Im}\ u \iff \exists \vec{x} \in E \ , \ \vec{y} = u(\vec{x}).$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Par exemple, si u est l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans R définie par $u(\vec{x}) = x_1 + 3x_2 + 5x_3$ où $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, alors Ker u est le plan $x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0$ et Im u est $\mathbb{R}$.

Il existe une relation entre les dimensions de ces sous-espaces vectoriels qui est donnée par la proposition (non démontrée) suivante :

Proposition I.2.1. *Soit $u : E \to F$ une application linéaire, alors*

$$\mathit{dim}\ E = \mathit{dim}\ (\mathit{Ker}\ u) + \mathit{dim}\ (\mathit{Im}\ u).$$

Définition de l'application linéaire

I.2.2 Composition et réciproque des applications linéaires

Exercices :
Exercice I.14

Documents :
Document I.2

On considère trois espaces vectoriels E, F et G définis sur le même corps K ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Définition I.2.3. *Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications linéaires, la composée $(g \circ f)$ de f et g est une application linéaire définie par*

$$\begin{array}{rll} g \circ f : & E & \to G \\ & \vec{x} & \mapsto g[f(\vec{x})]. \end{array}$$

La composée est, en effet une application linéaire puisque

$$(g \circ f)(\vec{x} + \vec{y}) = g[f(\vec{x} + \vec{y})] = g[f(\vec{x}) + f(\vec{y})] = g[f(\vec{x})] + g[f(\vec{y})] = (g \circ f)(\vec{x}) + (g \circ f)(\vec{y}),$$

$$(g \circ f)(\lambda\vec{x}) = g[f(\lambda\vec{x})] = g[\lambda f(\vec{x})] = \lambda g[f(\vec{x})]] = \lambda(g \circ f)(\vec{x}).$$

Rappelons que l'inverse d'une application (non nécessairement linéaire) se définit par composition :

Définition I.2.4. *Soit f une application de E dans F, elle est inversible s'il existe une application de F dans E notée f^{-1} telle que*

$$f^{-1} \circ f = i_E \text{ et } f \circ f^{-1} = i_F, \qquad (i_E \text{ est l'identité de } E \text{ dans } E).$$

L'application f^{-1} est appelée application réciproque (ou inverse) de f.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Rappelons aussi qu'une application est inversible si et seulement si elle est injective et surjective, c'est-à-dire bijective (voir le document référencé pour les définitions) et alors f^{-1} est aussi bijective. Dans le cas des applications linéaires, on a une caractérisation de l'injectivité par le noyau (la démonstration est donnée dans le document référencé) :

Proposition I.2.2. *L'application linéaire u est injective si et seulement si*

$$\textit{Ker}\ u = \{\vec{0}\}.$$

Pour les applications linéaires u bijectives, on démontre que l'application réciproque u^{-1} est aussi linéaire.

I.3 Matrices

I.3.1 Définition des matrices

Exercices :
Exercice I.15
Exercice I.16

Cours :
Application linéaire, noyau, image

On considère deux espaces vectoriels E et F définis sur le même corps K ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et tels que $\dim E = n$ et $\dim F = m$.

Définition I.3.1. *Soit $u : E \to F$ une application linéaire, on appelle matrice associée à u dans les bases $\mathcal{E} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n\}$ et $\mathcal{F} = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2, ..., \vec{f}_m\}$ le tableau A de scalaires (c'est-à-dire d'éléments de K) à m lignes et n colonnes construit de la façon suivante : la jème colonne de A est constituée par les composantes dans la base de F du vecteur $u(\vec{e}_j)$. Autrement dit si on note a_{ij} l'élément du tableau A situé à la ième ligne et la jème colonne, on a*

$$u(\vec{e}_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \vec{f}_i \,,\ 1 \leq j \leq n\,.$$

La matrice A est donc représentée par

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3j} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

On dit que la matrice A est de format (m,n), ou de type (m,n) si elle a m lignes et n colonnes et on appellera $\mathcal{M}_{mn}$ l'ensemble de telles matrices. (On pourra préciser le corps K si c'est nécessaire.)

- Si $m = n$ la matrice est dite carrée.
- Si $m = 1$, la matrice est une matrice ligne ou encore un vecteur ligne.
- Si $n = 1$, la matrice est une matrice colonne ou encore un vecteur colonne.
- Si $m = n$ et $a_{ij} = 0$ pour $i \neq j$, la matrice est diagonale.
- Si $m = n$, si $a_{ij} = 0$ pour $i \neq j$ et si $a_{ii} = 1$, la matrice est la matrice identité.
- Si $m = n$ et $a_{ij} = 0$ pour $i < j$, la matrice est triangulaire inférieure.
- Si $m = n$ et $a_{ij} = 0$ pour $i > j$, la matrice est triangulaire supérieure.

Par exemple, dans le plan E on peut écrire la matrice d'une rotation d'angle θ en prenant un repère orthonormé (on aura $F = E$, $\mathcal{F} = \mathcal{E} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$). On a alors :

$$u(\vec{e}_1) = \cos\theta \vec{e}_1 + \sin\theta \vec{e}_2, \; u(\vec{e}_2) = -\sin\theta \vec{e}_1 + \cos\theta \vec{e}_2,$$

ce qui donne la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Enfin, on notera dans la suite A_j, $1 \leq j \leq n$, la jème colonne de A et $\underline{A}_i$, $1 \leq i \leq m$, la ième ligne de A.

I.3.2 Somme et produit de matrices

Exercices :
Exercice I.17
Exercice I.18
Exercice I.19
Exercice I.20

Cours :
Matrices - définition

Une matrice se présente donc comme un tableau de nombres (de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), mais on ne peut raisonnablement rien démontrer sur les matrices sans faire référence aux applications linéaires qu'elles peuvent représenter. Nous ferons un usage constant de cette référence en considérant que toute matrice à m lignes et n colonnes peut être considérée comme la matrice de l'application linéaire $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$(ou $u : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$) définie par

$$u(\vec{e}_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \vec{f}_i, \ \ 1 \leq j \leq n$$

où $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ et $\{\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_m\}$ sont respectivement les bases de E et F.

On peut ainsi définir la somme de deux matrices et le produit d'une matrice par un scalaire.

Définition I.3.2. *Soient deux matrices A et B de même format (m, n), on définit $A + B$, somme de A et B comme étant le matrice C, également de format (m, n), dont le coefficient c_{ij} est donné par*

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \,, \ 1 \leq i \leq m \ \ 1 \leq j \leq n \,,$$

(C est la matrice de l'application linéaire somme des applications linéaires représentées par A et B). De même le produit du scalaire λ par la matrice A est la matrice, notée λA obtenue en multipliant chaque coefficient de A par λ.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Soient trois espaces vectoriels E, F et G tels que $\dim E = n$, $\dim F = m$ et $\dim G = q$.

Définition I.3.3. *Soient $u : F \to G$ et $v : E \to F$, on pose $w = u \circ v$ on a donc $w : E \to G$. Soit A la matrice de u dans les bases $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ et B la matrice de v dans les bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$. Alors, par définition, la matrice de w dans les bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{G}$ est égale au produit de A par B noté AB.*

$$\begin{array}{ccccc} & v & & u & \\ E & \longrightarrow & F & \longrightarrow & G \\ \mathcal{E} & B & \mathcal{F} & A & \mathcal{G} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} & w = u \circ v & \\ E & \longrightarrow & G \\ \mathcal{E} & C = AB & \mathcal{G} \end{array}$$

On peut démontrer le résultat suivant :

Proposition I.3.1. *Le produit $C = AB$ des deux matrices est donné par la formule suivante :*

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj}, \;\; i = 1, ..., q \;, j = 1, ..., n.$$

Proposition I.3.2. *Soit u une application linéaire de E dans F , on note $\vec{y} = u(\vec{x})$, soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux bases respectives de E et F, soient x_1, x_2, ..., x_n (resp y_1, y_2, ..., y_p) les composantes de $\vec{x}$ (resp $\vec{y}$) dans la base $\mathcal{E}$ (resp $\mathcal{F}$) on note*

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ et } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}.$$

Si A est la matrice associée à u dans les bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$, on a alors : $Y = AX$.

La démonstration est proposée en exercice.

I.3.3 Inverse et transposée d'une matrice

Exercices :
Exercice I.21
Exercice I.22
Exercice I.23

Cours :
Matrices - somme et produit

Soit u une application linéaire et bijective de E dans E, alors elle est inversible et la matrice A qui lui correspond est carrée. La matrice qui corespond à u^{-1} est notée A^{-1} et vérifie

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I,$$

d'où la définition.

Définition I.3.4. *Soit A une matrice carrée, la matrice inverse de A notée A^{-1}, si elle existe, est définie par*

$$A\,A^{-1} = A^{-1}\,A = I.$$

L'inverse d'une matrice, s'il existe est unique (voir exercice I.22). D'autre part, puisque

$$A\,B\,B^{-1}\,A^{-1} = B^{-1}\,A^{-1}\,A\,B = I$$

on en déduit que

$$(A\,B)^{-1} = B^{-1}\,A^{-1}.$$

Définition I.3.5. *Soit $A \in \mathcal{M}_{mn}$, on appelle* **transposée** *de A la matrice notée A^T appartenant à $\mathcal{M}_{nm}$ obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de A, on a donc*

$$(A^T)_{ij} = a_{ji},\ i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, m.$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

On peut démontrer très facilement les propriétés suivantes :

$$\left(A^T\right)^T = A,\ (A+B)^T = A^T + B^T,\ (\lambda A)^T = \lambda A^T.$$

Si X et Y sont deux vecteurs colonnes alors $X^T Y = Y^T X$ est un scalaire de K ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et plus précisément on a : $X^T Y = Y^T X = \sum_{i=1}^{m} x_i y_i$.

Lorsque le produit AB existe, alors on a $(AB)^T = B^T A^T$. Cela se démontre aisément en comparant les éléments des deux matrices.

I.3.4 Définition d'un changement de base

Exercices :
Exercice I.24
Exercice I.25

Définition I.3.6. *Soit* $\mathcal{E} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ *et* $\mathcal{E}' = \{\vec{e'}_1, \vec{e'}_2, \ldots, \vec{e'}_n\}$ *deux bases de* E*, on appelle* **matrice de passage** *de la base* $\mathcal{E}$ *à la base* $\mathcal{E}'$ *la matrice* P *définie par :*

$$P = \begin{array}{c} \\ \end{array}\begin{array}{cccccc} \vec{e'}_1 & \vec{e'}_2 & \ldots & \vec{e'}_j & \ldots & \vec{e'}_n \end{array}$$

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \ldots & p_{1j} & \ldots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \ldots & p_{2j} & \ldots & p_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p_{i1} & p_{i2} & \ldots & p_{ij} & \ldots & p_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p_{n1} & p_{n2} & \ldots & p_{nj} & \ldots & p_{nn} \end{pmatrix} \begin{array}{c} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \ldots \\ \vec{e}_i \\ \ldots \\ \vec{e}_n \end{array}$$

qui est donc obtenue en mettant en colonnes les composantes, dans "l'ancienne base" $\mathcal{E}$ *des vecteurs de la "nouvelle base"* $\mathcal{E}'$*.*

La matrice P est inversible et son inverse P^{-1} est la matrice de passage de $\mathcal{E}'$ à $\mathcal{E}$. Les résultats suivants (voir le chapitre 2 de MT23) permettent de calculer les composantes d'un vecteur (resp. la matrice d'une application linéaire u) dans la nouvelle base à partir des composantes (resp. la matrice de u) dans l'ancienne base.

Proposition I.3.3. - Transformation des composantes par changement de base - *Soit* $\vec{x} \in E$ *et soit* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *et* $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$ *les composantes de* $\vec{x}$ *dans les bases* $\mathcal{E}$ *et* $\mathcal{E}'$*, alors*

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

on a

$$X = PX' \text{ ou encore } X' = P^{-1}X, \text{ avec } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ et } X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}.$$

Théorème I.3.1. - Transformation des matrices par changement de base - *Soit* $u \in \mathcal{L}(E; E)$*,* A *et* A' *les matrices représentant* u *dans les bases* $\mathcal{E}$ *et* $\mathcal{E}'$*, alors si* P *est la matrice de passage de* $\mathcal{E}$ *à* $\mathcal{E}'$*, on a la relation*

$$A' = P^{-1}AP.$$

(A *et* A' *sont dites semblables.)*

I.3.5 Rang d'une application linéaire, d'une matrice

Exercices : Exercice I.26
Cours : Application linéaire, noyau, image

Définition I.3.7. *Soit u une application linéaire de E dans F, on appelle* **rang** *de u et on note rang (u) la dimension de Im u (image de u).*

Puisque Im u est un sous-espace vectoriel de F, on a rang $(u) \leq \dim F$ avec égalité si u est surjective. D'autre part, on a vu que

$$\dim E = \dim(\text{Ker } u) + \dim(\text{Im } u)$$

donc on a aussi rang $(u) \leq \dim E$.

Définition I.3.8. *Soit $A \in \mathcal{M}_{mn}$, on appellera Im A, le sous espace vectoriel constitué des vecteurs colonnes qui s'écrivent $Y = AX$.*

Im A est le sous-espace vectoriel engendré par les colonnes de A, notées $A_1, A_2, \ldots, A_n$, puisque

$$Y \in \text{Im } A \Longleftrightarrow Y = AX \Longleftrightarrow Y = \sum_{i=1}^{n} x_i A_i .$$

On peut aussi définir le noyau Ker A d'une matrice A de la façon suivante :

Définition I.3.9. *On appelle noyau d'une matrice A le sous espace vectoriel noté Ker A, défini par :*

$$\textit{Ker } A = \{X \in \mathcal{M}_{n1}, AX = 0\}.$$

On a le résultat suivant (déjà énoncé dans le paragraphe référencé pour les applications linéaires) :

Sommaire
Concepts
Exemples
Exercices
Documents

Théorème I.3.2. *Soit $A \in \mathcal{M}_{mn}$, alors dim $[$Ker $A] +$ dim $[$Im $A] = n$.*

Définition I.3.10. *Soit $A \in \mathcal{M}_{mn}$, on appelle rang de A et on note rang (A), la dimension du sous-espace vectoriel Im A.*

Les résultats suivants sont démontrés dans le chapitre 2 de MT23 :

– Soit $u \in \mathcal{L}(E;F)$ et A une matrice représentant u (dans des bases arbitraires de E et F) alors rang $(u) =$ rang (A).
– A et A^T ont le même rang.

Calcul pratique du rang d'une matrice Il résulte de la définition et des résultats précédents que le calcul pratique du rang d'une matrice se ramène au calcul du nombre de colonnes linéairement indépendantes ou du nombre de lignes linéairement indépendantes suivant que l'un se calcule plus facilement que l'autre.
On peut aussi déduire le rang d'une matrice à partir du rang de l'application linéaire u associée si celui-ci est connu.
On verra dans le paragraphe sur les déterminants une autre façon de calculer le rang d'un matrice.

I.4 Déterminants

I.4.1 Définition du déterminant par récurrence

Exercices :
Exercice I.27
Exercice I.28

Comme vous allez le comprendre dès la définition, la notion de déterminant ne peut être introduite que pour les matrices carrées.

Définition I.4.1. *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}$, on définit par récurrence une application :*

$$\begin{array}{cccc} \textit{dét} : & \mathcal{M}_{n,n} & \longrightarrow & K \\ & A & \longrightarrow & \textit{dét}\ A \end{array}$$

de la manière suivante :

- *si $n = 1$, $A = (a)$, on pose dét $A = a$,*
- *si $n > 1$, notons $A_{|i,j|}$ la matrice obtenue à partir de A en supprimant la i^e ligne et la j^e colonne, on pose alors*

$$\textit{dét}\ A = a_{11}\textit{dét}\ A_{|1,1|} + \ldots + (-1)^{k+1}a_{1k}\textit{dét}\ A_{|1,k|} + \ldots + (-1)^{n+1}a_{1n}\textit{dét}\ A_{|1,n|}. \quad \text{(I.4.1)}$$

Le scalaire dét A est dit **déterminant** *de A et on le note habituellement*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Ainsi, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ et

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},$$

ce qui donne

$$\text{dét}\, A = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{31}a_{23} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Proposition I.4.1. *La définition permet d'obtenir immédiatement les propriétés suivantes :*

1. *Le déterminant d'une matrice triangulaire inférieure est égal au produit des termes diagonaux.*
2. *Le déterminant d'une matrice diagonale est égal au produit des termes diagonaux. En particulier le déterminant de la matrice identité est égal à* 1.
3. *Si* $\overline{A}$ *est la matrice dont les termes sont les conjugués de ceux de* A *alors*

$$\text{dét}\, \overline{A} = \overline{\text{dét}\, A}.$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

I.4.2 Le déterminant et les colonnes

Exercices :
Exercice I.29
Exercice I.30
Exercice I.31

Une illustration du théorème suivant a été donnée dans l'exercice I.27 (pour la démonstration voir le chapitre 3 de MT23).

Théorème I.4.1. *Le déterminant est une fonction linéaire de chaque colonne, donc une* **application multi-linéaire** *de l'ensemble des colonnes, c'est à dire*

$$\textit{dét}\ (A_1, \ldots, A_{k-1}, \lambda A_k, A_{k+1}, \ldots, A_n) = \lambda\ \textit{dét}\ (A_1, \ldots, A_{k-1}, A_k, A_{k+1}, \ldots, A_n) \tag{I.4.2}$$

$$\begin{aligned} \textit{dét}\ (A_1, \ldots, A_{k-1}, B + C, A_{k+1}, \ldots, A_n) = {} & \textit{dét}\ (A_1, \ldots, A_{k-1}, B, A_{k+1}, \ldots, A_n) \\ & + \textit{dét}\ (A_1, \ldots, A_{k-1}, C, A_{k+1}, \ldots, A_n). \end{aligned} \tag{I.4.3}$$

($\lambda \in K$, B et C sont des vecteurs colonnes).

En conséquence, si $A \in \mathcal{M}_{n,n}$, on a

$$\text{dét}\ (\lambda A) = \text{dét}\ (\lambda A_1, \ldots, \lambda A_n) = \lambda^n \text{dét}\ A$$

puisque "on sort un λ par colonne" et

$$\text{dét}\ (A_1, \ldots, A_{k-1}, 0, A_{k+1}, \ldots, A_n) = 0$$

puisque une colonne nulle peut être considérée comme le produit du réel 0 par une colonne quelconque. Le résultat important suivant a aussi été démontré dans le chapitre 3 de MT23 :

Théorème I.4.2. *Soit* $A \in \mathcal{M}_{n,n}$.

1. *Si deux colonnes sont égales, le déterminant est nul.*
2. *Si on échange entre elles deux colonnes de la matrice, le déterminant change de signe.*
3. *Le déterminant d'une matrice ne change pas si à une colonne on ajoute une combinaison linéaire des autres colonnes.*

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

I.4.3 Propriétés essentielles du déterminant

Exercices :
Exercice I.32
Exercice I.33
Exercice I.34

Cours :
Déterminant et colonnes

Les résultats de ce paragraphe sont à la base de la théorie des systèmes linéaires et ne seront pas démontrés.

Théorème I.4.3. *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}$, alors dét $A =$ dét A^T.*

Ce résultat permet d'étendre de manière évidente aux lignes les propriétés du déterminant liées aux colonnes de la matrice. En particulier

1. le déterminant est une fonction multilinéaire de chacune des lignes,
2. si une matrice a deux lignes égales, le déterminant est nul,
3. si l'on échange deux lignes de A, le déterminant change de signe,
4. le déterminant d'une matrice ne change pas si à une ligne, on ajoute une combinaison linéaire des autres lignes.

Les propriétés précédentes permettent de calculer pratiquement le déterminant par récurrence à partir de n'importe quelle ligne ou n'importe quelle colonne :

Théorème I.4.4. *On a les formules suivantes :*
(i) Développement suivant la i^e ligne

$$\text{dét } A = a_{i1}\mathit{cof}(a_{i1}) + a_{i2}\mathit{cof}(a_{i2}) + \ldots + a_{in}\mathit{cof}(a_{in}). \tag{I.4.4}$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

(ii) Développement suivant la j^e colonne

$$\textit{dét}\ A = a_{1j}\textit{cof}(a_{1j}) + a_{2j}\textit{cof}(a_{2j}) + \ldots + a_{nj}\textit{cof}(a_{nj}). \tag{I.4.5}$$

où

$$\textit{cof}(a_{ij}) = (-1)^{i+j}\textit{dét}\ A_{|i,j|}$$

s'appelle le **cofacteur** *de l'élément a_{ij}.*

Le théorème suivant est l'un des plus utilisés de l'algèbre linéaire :

Théorème I.4.5.

$$A \textit{ est inversible } \iff \textit{dét}\ A \neq 0.$$

Le déterminant d'un produit est donné par le théorème suivant

Théorème I.4.6. *Soient $A, B \in \mathcal{M}_{n,n}$ alors dét $(A\,B) =$ dét A dét B.*

De ce théorème on peut déduire que si une matrice est inversible, alors

$$\text{dét}\ (A\,A^{-1}) = \text{dét}\ A\ \text{dét}\ A^{-1} = \text{dét}\ I = 1.$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

I.4.4 Propriétés liées au rang

Exercices :
Exercice I.35

Cours :
Rang

La notion de rang est essentielle dans la résolution des problèmes de lissage (dits aussi problèmes de moindres carrés) que nous traiterons par la suite.

Définition I.4.2. *Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}$, on appelle* **matrice extraite** *de A une matrice obtenue en sélectionnant des lignes et des colonnes de A. On peut donc se définir une matrice extraite par deux ensembles d'indices*

$$I = \{i_1, i_2, \ldots, i_p\} \subset \{1, 2, \ldots, m\}, J = \{j_1, j_2, \ldots, j_q\} \subset \{1, 2, \ldots, n\},$$

les éléments de la matrice extraite $\hat{A} \in \mathcal{M}_{p,q}$ sont alors $\hat{a}_{kl} = a_{i_k, j_l}$.

Par exemple si $I = \{1, 3\}, J = \{2, 3, 5\}$
$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 5 & 6 & 8 \\ 3 & 4 & 8 & -1 & 6 \\ 7 & 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, alors $\hat{A} = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 8 \\ 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

Notation. En relation avec cette notion de matrice extraite on peut définir une matrice par "blocs", par exemple

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

où $A_{ij} \in \mathcal{M}_{m_i, n_j}$, on a donc $A \in \mathcal{M}_{m,n}$ avec $m = m_1 + m_2$ et $n = n_1 + n_2$.

Théorème I.4.7. *Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}$ alors le rang de A est le plus grand entier r tel qu'il existe une matrice carrée inversible $\hat{A} \in \mathcal{M}_{r,r}$ extraite de A.*

Ce théorème sert parfois à déterminer le rang d'une matrice mais plutôt, si on connaît le rang r de A, on sait qu'il est possible d'extraire de A une matrice $r \times r$ inversible. Ce théorème sert aussi à démontrer la proposition qui avait déjà été énoncée dans le paragraphe référencé.

Proposition I.4.2. *On a rang* $(A) =$ *rang* (A^T).

Démonstration.– Si $\hat{A}$ est une matrice carrée inversible extraite de A alors $\hat{A}^T$ est une matrice carrée inversible extraite de A^T et donc le résultat est une conséquence du théorème précédent.

On peut alors caractériser l'inversibilité d'une matrice par son rang.

Proposition I.4.3. *Soit* $A \in \mathcal{M}_{n,n}$,

$$A \textit{ est inversible} \iff \textit{dét } A \neq 0 \iff \textit{Ker } A = \{0\} \iff \textit{rang } A = n\,.$$

I.5 Systèmes linéaires

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

I.5.1 Systèmes linéaires à matrice carrée

Exercices :
Exercice I.36

Dans la résolution des systèmes linéaires on a l'habitude de noter x et non pas X le vecteur des inconnues dont les composantes sont $(x_1, \ldots, x_n)$ et b le second membre dont les composantes sont $(b_1, \ldots, b_n)$. De la définition de l'image de A, on déduit que, si $A \in \mathcal{M}_{nn}$, le système $Ax = b$ admet une solution si et seulement si $b \in \text{Im } A$. Mais ce résultat théorique est difficilement vérifiable ! Le théorème suivant, par contre, est essentiel.

Théorème I.5.1. *Soit $A \in \mathcal{M}_{nn}$, le système $Ax = b$ admet une solution unique si et seulement si dét$A \neq 0$*

Démonstration.– Si dét $A \neq 0$, A est inversible et on constate alors que $x = A^{-1}b$ est l'unique solution de $Ax = b$.
Réciproquement, si dét $A = 0$, A n'est pas inversible et Ker A n'est pas réduit à 0. Donc il existe un x^* non nul vérifiant $Ax^* = 0$ et le système $Ax = b$ ne peut admettre une solution unique puisque, si x est solution, $x + x^*$ est une autre solution.

Le théorème suivant donne la solution "théorique" d'un système à matrice carrée, encore dit **système de Cramer** et la démonstration de ce système est donnée dans le chapitre 3 du cours de MT23.

Théorème I.5.2. *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}$ et soit le système $Ax = b$. Alors pour tout $j = 1, 2, \ldots, n$, on a la* **formule de Cramer** *:*

$$\text{dét } (A_1, A_2, \ldots, A_{i-1}, b, A_{i+1}, \ldots, A_n) = x_i \, \text{dét } A. \tag{I.5.1}$$

Ceci permet aussi de calculer l'inverse d'une matrice A, puisque chaque colonne X_i de A^{-1} est solution de $AX_i = I_i$ où I_i est la ième colonne de I.

Théorème I.5.3. *L'inverse de A est donnée par*

$$A^{-1} = \frac{1}{\textit{dét } A} \left(co(A)\right)^T , \tag{I.5.2}$$

où

$$co(A)_{ij} = \, cof(a_{ij}) = (-1)^{i+j} \, \textit{dét } A_{|i,j|}.$$

(La matrice co(A) s'appelle co-matrice de A.)

Comme pour les systèmes linéaires, les formules de Cramer ne sont pas utilisées pour calculer numériquement l'inverse, on leur préfère des méthodes plus économiques par exemple des méthodes numériques. En revanche les formules de Cramer sont utilisées pour le calcul formel.

I.5.2 Systèmes linéaires de dimension quelconque

Exercices :
Exercice I.37
Exercice I.38

Cours :
Rang

On veut résoudre un système linéaire de n équations à p inconnues ($A \in \mathcal{M}_{n,p}$) :

$$Ax = b \;\; x \in \mathbb{R}^p \;\; b \in \mathbb{R}^n \,.$$

– $b = 0$ - On dit que le système est homogène. On est donc amené à chercher les vecteurs x tels que $Ax = 0$ ce qui correspond au noyau de A. Ce système a donc au moins toujours la solution nulle. La résolution pratique utilise la méthode d'élimination de Gauss pour résoudre $Ax = 0$.

  On va traiter maintenant en détail l'exemple suivant :

$$\left\{\begin{array}{llll} x_1 & +x_2 & +x_3 & =0 \\ x_1 & +2x_2 & -x_3 & =0 \\ x_1 & & +3x_3 & =0 \\ 2x_1 & +x_2 & +4x_3 & =0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{llll} x_1 & +x_2 & +x_3 & =0 \\ & +x_2 & -2x_3 & =0 \\ & -x_2 & +2x_3 & =0 \\ & -x_2 & +2x_3 & =0 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{llll} x_1 & +x_2 & +x_3 & =0 \\ & +x_2 & -2x_3 & =0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} x_2 & =2x_3 \\ x_1 & =-3x_3 \end{array}\right. \Longleftrightarrow x = x_3 \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

  On a donc obtenu l'ensemble des vecteurs de Ker A, qui sont solutions de $Ax = 0$. On voit que la dimension de Ker A est 1, donc on obtient le rang de A à savoir $(3 - 1)$. En fait c'est de cette façon que très souvent on détermine le rang de A.

– $b \neq 0$ - On dit que le système est inhomogène. Cette fois il n'y a plus de solution évidente et il est possible qu'il n'existe aucune solution. La méthode consiste à utiliser la méthode

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

d'élimination de Gauss pour résoudre $Ax = b$ et à voir s'il n'existe pas d'équations incompatibles (c'est-à-dire avec le même premier membre mais des seconds membres différents).

Regardons sur un exemple :

$$\left\{\begin{array}{llll} x_1 & +x_2 & +x_3 & = 1 \\ x_1 & +2x_2 & -x_3 & = -1 \\ x_1 & & +3x_3 & = 3 \\ 2x_1 & +x_2 & +4x_3 & = 4 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{llll} x_1 & +x_2 & +x_3 & = 1 \\ & +x_2 & -2x_3 & = -2 \\ & -x_2 & +2x_3 & = 2 \\ & -x_2 & +2x_3 & = 2 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{llll} x_1 & +x_2 & +x_3 & = 1 \\ & +x_2 & -2x_3 & = -2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ll} x_2 & = 2x_3 - 2 \\ x_1 & = -3x_3 + 3 \end{array}\right.$$

$$\iff x = \begin{pmatrix} -3x_3 + 3 \\ 2x_3 - 2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On trouve donc les solutions du système $Ax = b$ en sommant les solutions du système homogène et une solution particulière du système non homogène. Par contre le système suivant n'a pas de solution (voir l'exercice I.38) :

$$\left\{\begin{array}{llll} x_1 & +x_2 & +x_3 & = 1 \\ x_1 & +2x_2 & -x_3 & = -1 \\ x_1 & & +3x_3 & = 3 \\ 2x_1 & +x_2 & +4x_3 & = 2 \end{array}\right.$$

Systèmes linéaires de dimension quelconque

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

I.6 Valeurs propres

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

I.6.1 Valeurs propres

Exercices :
Exercice I.39
Exercice I.40

Définition I.6.1. *On dit que $\lambda \in K$ est une* **valeur propre** *de $A \in \mathcal{M}_{n,n}$ s'il existe un vecteur $Y \in \mathcal{M}_{n,1}$, $Y \neq 0$ tel que*

$$AY = \lambda Y. \tag{I.6.1}$$

Dans ce cas on dit que Y est un **vecteur propre** *associé à la valeur propre λ et que (λ, Y) est un couple propre de A.*

Définition I.6.2. *On appelle* **polynôme caractéristique** *de A le polynôme*

$$\Pi_A(s) = \textit{dét}\ (sI - A).$$

Proposition I.6.1. *Une condition nécessaire et suffisante pour que λ soit valeur propre de A est qu'elle soit racine du polynôme caractéristique, c'est à dire :*

$$\textit{dét}\ (\lambda I - A) = 0. \tag{I.6.2}$$

Démonstration.– Si l'on écrit la définition, on a :

$$\lambda \text{ est valeur propre de} A \iff \exists Y \neq 0 \mid (\lambda I - A)Y = 0$$
$$\iff (\lambda I - A) \text{ n'est pas inversible} \iff \text{dét}\ (\lambda I - A) = 0.$$

Pratiquement, les valeurs propres d'une matrice A sont les racines du polynôme dét $(A - sI)$ (qui a évidemment les mêmes racines que le polynôme caracatéristique). La recherche des vecteurs propres se fait en résolvant alors le système $AY_i = \lambda_i Y_i$.

On a les propriétés suivantes :

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

- Les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont ses termes diagonaux.
- A non inversible $\Longleftrightarrow 0$ est valeur propre de A.
- A et A^T ont les mêmes valeurs propres mais pas les mêmes vecteurs propres.

Proposition I.6.2. *Une matrice $A \in \mathcal{M}_{nn}$ admet n valeurs propres complexes comptées avec leur ordre de multiplicité.*

Si on appelle $\lambda_1, ..., \lambda_n$ ces valeurs propres (distinctes ou confondues), on a

$$\textit{trace}\ (A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i,\ \textit{dét}\ A = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

I.6.2 Valeurs propres et matrices semblables

Exercices :
Exercice I.41

Définition I.6.3. *Deux matrices $A \in \mathcal{M}_{n,n}$ et $B \in \mathcal{M}_{n,n}$ sont dites semblables, s'il existe une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_{n,n}$ telle que $B = P^{-1}AP$.*

Il est évident que deux matrices semblables ont le même déterminant. Par contre, la réciproque est fausse c'est-à-dire que deux matrices qui ont le même déterminant ne sont pas toujours semblables.

Proposition I.6.3. *Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique et en particulier les mêmes valeurs propres.*

Démonstration - Si A et B sont des matrices semblables, alors

$$sI - B = sI - P^{-1}AP = sP^{-1}P - P^{-1}AP = P^{-1}(sI - A)P$$

et donc

$$\text{dét}\,(sI - B) = \text{dét}\,(P^{-1}(sI - A)P) = \text{dét}\,P^{-1}\text{dét}\,(sI - A)\text{dét}\,(P) = \text{dét}\,(sI - A),$$

c'est-à-dire $\Pi_A = \Pi_B$.

Attention ! Si A et B sont semblables, elles ont bien les mêmes valeurs propres mais pas les mêmes vecteurs propres, cependant nous allons exhiber une relation entre les deux. En effet si (λ, Y) est un couple propre de A, on a

$$AY = \lambda Y \implies PBP^{-1}Y = \lambda Y \implies BP^{-1}Y = \lambda P^{-1}Y$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

donc $Z = P^{-1}Y$ est un vecteur propre de B associé à la valeur propre λ (ce qui, au passage, constitue une autre démonstration de la proposition précédente).

Remarquons que la méthode d'élimination de Gauss transforme un système $Ax = b$ en un système équivalent $Ux = c$ qui a la même solution et dont la matrice U est triangulaire supérieure. Malheureusement les matrices A et U ne sont pas semblables et l'élimination de Gauss ne permet pas de calculer les valeurs propres de A.

I.6.3 Diagonalisation des matrices

Exercices :
Exercice I.42

On a souvent l'habitude de ne considérer que des matrices à coefficients réels. Mais elles ne sont que des cas particuliers des matrices à coefficients complexes. Ce paragraphe a pour but de savoir dans quel cas on peut trouver une matrice diagonale D semblable à une matrice donnée A. Les éléments de la diagonale de D seront alors les valeurs propres de A qui sont intéressantes à connaître, en particulier dans de nombreuses applications de la physique, même si elles sont complexes.

Définition I.6.4. *On dit que la matrice $A \in \mathcal{M}_{n,n}$ est diagonalisable dans $\mathbb{R}$ (resp. dans $\mathbb{C}$) si elle est semblable à une matrice $D \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ (resp. $D \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$) diagonale.*

Puisque A et D sont semblables, il existe une matrice P telle que

$$D = P^{-1}AP \iff AP = PD,$$

ce qui est équivalent à $AY_i = \lambda_i Y_i$ (où $Y_1, \ldots, Y_n$ sont les colonnes de P et $\lambda_1, ..., \lambda_n$ sont les termes diagonaux de D). Donc la diagonale de D est constituée des valeurs propres de A et les colonnes de P sont les vecteurs propres correspondants.

Les résultats suivants, utiles mais délicats à démontrer, se trouvent dans le chapitre 5 de MT23 :

Théorème I.6.1. *Soit $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ une matrice symétrique, alors*

1. *A a toutes ses valeurs propres réelles,*

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

2. *il existe une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres de A (on utilise le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$),*
3. *A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$. Plus précisément, il existe une matrice P orthogonale telle que $D = P^T AP$ soit une matrice diagonale.*

On rappelle que :

– le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$ est celui qui à deux vecteurs x et y fait correspondre le réel $x^T y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$. A ce produit scalaire on associe la norme euclidienne définie par : $(||x|| = \sqrt{x^T x} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2})$.
– Deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul.
– Une base orthonormée de vecteur est telle que les vecteurs sont orthogonaux deux à deux et que la norme de chacun d'eux est égale à 1.
– Une matrice $Q \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ est orthogonale si et seulement si $Q^T Q = I$.
– Si Q est orthogonale, alors ses colonnes Q_i sont des vecteurs orthonormés de $\mathbb{R}^n$ (la notion de matrice orthogonale sera reprise dans le chapitre sur les moindres carrés).

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

I.6.4 Valeurs propres et matrices définies positives

Exercices :
Exercice I.43
Exercice I.44

Cours :
Diagonalisation des matrices

Définition I.6.5. *On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n\,n}(\mathbb{R})$ symétrique est semi-définie positive si*

$$x^T Ax \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

On dit qu'elle est définie positive si de plus

$$x^T Ax = 0 \;\Rightarrow\; x = 0.$$

Si $B \in \mathcal{M}_{m\,n}(\mathbb{R})$, alors les matrices $BB^T \in \mathcal{M}_{mm}(\mathbb{R})$ et $B^T B \in \mathcal{M}_{n\,n}(\mathbb{R})$ sont symétriques.

Proposition I.6.4. *Soit $B \in \mathcal{M}_{m\,n}(\mathbb{R})$, alors*
- *$B^T B$ est semi-définie positive,*
- *supposons $n \leq m$ et B de rang n, alors $B^T B$ est définie positive.*

La démonstration est laissée en exercice.

Proposition I.6.5. *Soit $A \in \mathcal{M}_{n\,n}(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. Alors A est définie positive (resp. semi-définie positive) si et seulement si ses valeurs propres sont strictement positives (resp. positives ou nulles).*

Démonstration - La démonstration se fait en deux parties :
- Supposons que A soit définie positive (resp. semi-définie positive) et soit (λ, Y) un couple propre de A, c'est-à-dire
$$AY = \lambda Y \;\Rightarrow\; Y^T AY = \lambda Y^T Y.$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Puisque Y est un vecteur propre, ce n'est pas un vecteur nul et donc on a $Y^T AY > 0$ (resp. $Y^T AY \geq 0$) et $Y^T Y > 0$, ce qui donne $\lambda > 0$ (resp. $\lambda \geq 0$).

– Réciproque : Supposons que les valeurs propres de A soient strictement positives (resp. positives ou nulles). Puisque A est symétrique, il existe une base orthonormée de vecteurs propres (voir le paragraphe référencé) que l'on note $\{Y_1, \ldots, Y_n\}$. Considérons un vecteur x quelconque de $\mathbb{R}^n$, alors

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i Y_i \;\Rightarrow\; x^T Ax = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i Y_i^T\right) A \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j Y_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \lambda_i.$$

Et donc, $x^T Ax \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et, si les valeurs propres sont strictement positives,

$$x^T Ax = 0 \;\Rightarrow\; \alpha_i^2 = 0 \;\Rightarrow\; x = 0.$$

Remarquons qu'une matrice symétrique définie positive n'a pas de valeur propre nulle, elle est donc inversible.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Documents du chapitre I

Document I.1 Définition de l'espace vectoriel

Définition I.6.6. *Un espace vectoriel sur K ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) est un ensemble E (dont on appelle vecteurs les éléments) possédant les deux lois suivantes :*

- *l'addition de vecteurs (loi interne qui donne à E une structure de groupe commutatif),c'est à dire que, pour tout x, y, z de E, :*
  - *associativité : $(x+y)+z = x+(y+z)$,*
  - *existence d'un élément neutre $e \in E$: $x+e = e+x = x$*
  - *tout élément $x \in E$ a un symétrique $x' \in E$: $x+x' = x'+x = e$,*
  - *commutativité : $x+y = y+x$.*
- *le produit d'un vecteur par un élément de K (loi externe dont le résultat est une vecteur de E) qui possède les propriétés suivantes :*
  $\forall \lambda, \mu \in K, \forall x, y \in E$:
  - $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$
  - $(\lambda+\mu)x = \lambda x + \mu x$
  - $\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y$
  - $1x = x$ *(1 élément unité de K).*

retour au cours

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Document I.2 Injectivité, surjectivité

Par définition une application $f : E \to F$ est surjective si $\mathrm{Im}\, f = F$. Elle est injective si

$$\forall x \in E, \forall y \in E\ f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y,$$

ce qui veut dire que deux éléments distincts ont des images distinctes.

Pour les applications linéaires, on a la caractérisation suivante de l'injectivité :

Proposition I.6.6.

Une application linéaire u est injective si et seulement si ker $u = \{\vec{0}\}$.

Démonstration - - Supposons que u est injective et soit $\vec{x} \in \ker u$, alors on a

$$u(\vec{x}) = \vec{0} \text{ et } u(\vec{0}) = \vec{0}$$

d'où $\vec{x} = \vec{0}$ par injectivité et $\ker u = \{\vec{0}\}$.

- Réciproquement, soient $\vec{x}$ et $\vec{x}'$ deux vecteurs tels que $u(\vec{x}) = u(\vec{x}')$, alors, par linéarité, on a $u(\vec{x} - \vec{x}') = \vec{0}$ et comme $\ker u = \{\vec{0}\}$, $\vec{x} - \vec{x}' = \vec{0}$, d'où u est injective.

retour au cours

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercices du chapitre I

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice I.1

Montrer que la somme de vecteurs et le produit d'un vecteur par un nombre réel donnent à $\mathbb{R}^3$ une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice I.2

Montrer que la somme de polynômes et le produit d'un polynôme par un nombre réel donnent à P_n (polynômes de degré inférieur ou égal à n à coefficients réels) une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice I.3

Montrer que l'ensemble des polynômes de degré exactement égal à n n'est pas un espace vectoriel.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice I.4

- Montrer que si $\vec{x}$ est un vecteur de $\mathbb{R}^2$, alors $F = \{\lambda\vec{x},\ \lambda \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.
- Montrer que si $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$, alors $F = \{\lambda\vec{x} + \mu\vec{y},\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
- Montrer que l'espace des polynômes P_k est un sous-espace vectoriel de P_n si $k \leq n$.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice I.5

Montrer que si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E alors $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E alors que $F \cup G$ ne l'est pas (en général).

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice I.6

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E et soit

$$H = \{\vec{x} = \vec{y} + \vec{z},\ \vec{y} \in F,\ \vec{z} \in G\}.$$

On note alors $H = F + G$ et on appelle H la somme de F et G.

– Représenter graphiquement un élément de H lorsque $E = \mathbb{R}^3$, F est un plan vectoriel et G une droite vectorielle (non contenue dans le plan).
– Montrer que H est un sous-espace vectoriel de E.
– Que vaut H dans le cas particulier de la première question ? Que vaut $F \cup G$ dans ce même cas ?
– Montrer que si $F \cap G = \{\vec{0}\}$, $\vec{y}$ et $\vec{z}$ sont uniques pour un $\vec{x}$ donné. On dit alors que $F + G$ est une somme directe et on note $F \oplus G$.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice I.7

- Donner une famille liée de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ (donner les vecteurs par leurs composantes).
- Montrer que la famille $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ donnés par leurs composantes est libre. Montrer qu'elle est aussi génératrice.
- En vous inspirant de la question précédente, donner une famille libre et génératrice de $\mathbb{R}^n$.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice I.8

La famille $S = \{(1,1,-1),\ (1,1,1),\ (\sqrt{2},\sqrt{2},3)\}$ est-elle liée ?

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice I.9

Montrer que la famille $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ de polynômes de P_n est une base de P_n.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice I.10

Soit $B = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ une base de l'espace vectoriel E et soit $\vec{x} \in E$. En raisonnant par l'absurde, montrer que la décomposition de $\vec{x}$ sur B est unique, c'est-à-dire qu'il existe λ_1, λ_2,... ,λ_n uniques tels que

$$\vec{x} = \lambda_1\vec{e}_1 + \ldots + \lambda_n\vec{e}_n.$$

retour au cours

Solution

Exercice I.11

À partir des vecteurs $\vec{x} = (1, 1, -1)$ et $\vec{y} = (1, 1, 1)$ de $\mathbb{R}^3$, trouver une vecteur $\vec{z}$ tel que la famille $\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$ soit une base de $\mathbb{R}^3$.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice I.12

Vérifier rapidement que les applications suivantes sont linéaires. Calculer leur noyau et leur image.

1. $u_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, définie par

$$u_1(x) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n$$

   où a_1, a_2, ... , a_n sont des réels donnés.

2. $u_2 : P_k \to P_{k-1}$, définie par

$$u_2(p) = p',$$

   où p' est la dérivée du polynôme p.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice I.13

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $E = F + G$ et $F \cap G = \{\vec{0}\}$ (voir l'exercice I.6). On a montré que si $\vec{x} \in E$, alors il existe deux vecteurs uniques $\vec{y} \in F$ et $\vec{z} \in G$ tels que $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Soit l'application

$$u : E \rightarrow F, \text{ telle que } u(\vec{x}) = \vec{y}.$$

1. Montrer que u est une application linéaire.
2. Calculer le noyau et l'image de u.
3. Donner leur dimension et vérifier le résultat

$$\dim E = \dim \operatorname{Ker}(u) + \dim \operatorname{Im}(u).$$

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice I.14

On note u la rotation d'un angle θ dans $\mathbb{R}^2$, utiliser les propriétés géométriques pour traiter l'exercice :

1. Montrer que l'application u est linéaire.
2. Quel est son noyau, quelle est son image ?
3. Montrer qu'elle est bijective.
4. Donner l'application inverse et en déduire qu'elle est linéaire et bijective.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice I.15

Montrer que la matrice de l'application $i_E : E \to E$ est la matrice identité I lorsque l'on munit E de la même base.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice I.16

On suppose que $E = F = P_2$, on munit P_2 de la base canonique $\{1, x, x^2\}$ et on définit u telle que $u(p) = p'$. Déterminer alors la matrice de u.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice I.17

Calculer le produit AB (et BA lorsque cela est possible) dans les cas suivants :

1. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice I.18

Montrer, en utilisant le produit de matrices, que la composée de deux rotations planes d'angles θ_1 et θ_2 est une rotation plane d'angle $\theta_1 + \theta_2$.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice I.19

Montrer la proposition I.3.2. Pour cela on calculera la décomposition de $u(\vec{x})$ dans la base de F et on la comparera à la décomposition de $\vec{y}$ dans la même base.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice I.20

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$, u est l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ dont la matrice est A lorsque l'on munit $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ de leur base canonique. Calculer $u(\vec{x})$ pour $\vec{x} = (1, -1, 2)$.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice I.21

On a montré, dans l'exercice I.14 que la rotation plane d'angle θ est bijective. Donner la matrice inverse de la matrice de cette rotation.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice I.22

Montrer que la matrice inverse d'une matrice, si elle existe, est unique.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice I.23

Soient X et Y deux vecteurs colonnes, les produits X^TY et XY^T Existent-ils ? et, si oui,sont-ils égaux ?

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice I.24

Soit E un espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{E} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$. On définit les vecteurs $\vec{e'}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$, $\vec{e'}_2 = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2$ d'une nouvelle base $\mathcal{E}' = \{\vec{e'}_1, \vec{e'}_2\}$. Donner P, matrice de passage de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}'$.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice I.25

On reprend les données de l'exercice I.24 . On définit $u \in \mathcal{L}(E;E)$ par $u(\vec{e}_1) = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2, u(\vec{e}_2) = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2$

- Quelle est la matrice A de u dans la base $\mathcal{E}$?
- Exprimer $u(\vec{e'}_1)$, $u(\vec{e'}_2)$ en fonction de $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$.
- En déduire $u(\vec{e'}_1)$,$u(\vec{e'}_2)$ en fonction de $\vec{e'}_1$ et $\vec{e'}_2$.
- En déduire A'.
- Calculer $P^{-1}AP$.

retour au cours

Solution

Exercice I.26

Déterminer le rang des matrices A suivantes :

– A est la matrice de la rotation dans le plan.

– $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

– $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 6 & -2 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice I.27

Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3a & c \\ 3b & d \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4 & 2 & 3\lambda \\ 0 & 1 & 2\lambda \\ 4 & 1 & 2\lambda \end{vmatrix}.$$

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice I.28

Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \lambda\cos\theta & -\sin\theta \\ \lambda\sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice I.29

1. Considérons une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,n}$ triangulaire inférieure ($a_{ij} = 0$ pour $i < j$), en utilisant la définition du déterminant montrer que dét $A = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$.
2. En déduire que :
   - pour les matrices diagonales ($a_{ij} = 0$ pour $i \neq j$) on a aussi dét$A = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$,
   - la matrice identité a pour déterminant dét $I = 1$.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice I.30

Montrer par un exemple que, en général, dét $(A+B) \neq$ dét (A) + dét (B).

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice I.31

Calculer $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice I.32

Montrer que le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure est égal au produit de ses termes diagonaux.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice I.33

Montrer que deux matrices semblables ont même déterminant.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice I.34

Calculer à nouveau le déterminant de la matrice de l'exercice I.31 , en développant par rapport à une ligne ou une colonne de votre choix.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice I.35

Quel est le rang de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 6 & -2 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} ?$$

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice I.36

Calculer l'inverse de $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ en utilisant les co-facteurs.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice I.37

Résoudre le système linéaire $Ax = 0$ où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

En déduire le rang de la matrice A.

Un système $Ax = 0$, dont la matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}$ est telle que $n > p$, a-t-il toujours une solution ? si oui est-elle unique ?

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice I.38

Résoudre le système linéaire

$$\left\{\begin{array}{llll} x_1 & +x_2 & +x_3 & = 1 \\ x_1 & +2x_2 & -x_3 & = -1 \\ x_1 & & +3x_3 & = 3 \\ 2x_1 & +x_2 & +4x_3 & = 2 \end{array}\right.$$

Ce système a-t-il une solution ?

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice I.39

Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice I.40

Montrer que :

– Les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont ses termes diagonaux.

– A non inversible $\Longleftrightarrow 0$ est valeur propre de A.

– A et A^T ont les mêmes valeurs propres mais pas les mêmes vecteurs propres.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice I.41

Montrer que deux matrices semblables ont le même déterminant et que la réciproque est fausse.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice I.42

Montrer que si $A = PDP^{-1}$ où la matrice D est diagonale, alors les colonnes de P sont vecteurs propres de A, les valeurs propres étant les éléments de la diagonale de D.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice I.43

Soit $B \in \mathcal{M}_{m\,n}(\mathbb{R})$, montrer que $B^T B$ est symétrique et semi-définie positive.

retour au cours

Solution

Exercice I.44

Soit $B \in \mathcal{M}_{m\,n}(\mathbb{R})$, avec $n \leq m$ et rang $B = n$, montrer que $B^T B$ est symétrique et définie positive.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Annexe A
Exercices

A.1 Exercices de TD du chapitre 1

Exercice A.1.1 TD1-Exercice1

Donner un exemple de sous-espace vectoriels F et G tels que

$$F \cup G \neq F + G.$$

Exercice A.1.2 TD1-Exercice2

Montrer les propriétés suivantes :

1. Si deux vecteurs d'une famille $S = \{\vec{x_1}, \vec{x_2}, \ldots, \vec{x_p}\}$ sont égaux (par ex. $\vec{x_1} = \vec{x_2}$), alors la famille S est liée.
2. Si l'un quelconque des vecteur de S est nul, alors S est liée.
3. Toute sur-famille d'une famille liée est liée.
4. Toute sous-famille d'une famille libre est libre.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.3 TD1-Exercice3

1. Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs $\vec{f_1}$, $\vec{f_2}$ et $\vec{f_3}$ définis par

$$\vec{f_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{f_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{f_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

   Montrer que $\mathbb{R}^3 = \text{vect} < \vec{f_1}, \vec{f_2} > \oplus \text{vect} < \vec{f_3} >$. (Pour les définitions de la somme directe, voir l'exercice I.6 .)

2. Soient les vecteurs

$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v_2} = \begin{pmatrix} m \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

   Déterminer les valeurs de m pour que $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}\}$ soit libre. Compléter cette famille pour obtenir une base de $\mathbb{R}^3$.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.4 TD1-Exercice4

Soit E l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 3. On définit les polynômes p_0, p_1, p_2 et p_3 par

$$p_0(x) = 1, \quad p_1(x) = x, \quad p_2(x) = x(x-1), \quad p_3(x) = x(x-1)(x-2)\,, \quad \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

1. Montrer qu'ils forment une base de E.
2. Quelles sont, en fonction de a, b, c et d les coordonnées dans cette base d'un polynôme p de E qui s'écrit $p = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Exercice A.1.5 TD1-Exercice5

On considère les 3 vecteurs de $\mathbb{R}^4$ suivants

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

et le sous-ensemble de $\mathbb{R}^4$

$$P = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \;\; ; \quad x + y + z + t = 0\right\}.$$

1. Est-ce que $\vec{c} \in$ vect $< \vec{a}, \vec{b} >$?
2. Montrer que P est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$. Quelle est sa dimension ?
3. Montrer que $\mathbb{R}^4 = P +$ vect $< \vec{a}, \vec{b} >$ mais que $P \cup$ vect $< \vec{a}, \vec{b} > \neq \mathbb{R}^4$.
4. P et vect $< \vec{a}, \vec{b} >$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?
5. La famille $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ est-elle libre ? génératrice de $\mathbb{R}^4$?

Exercice A.1.6 TD1-Exercice6

Soit $\mathcal{P}_n$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n. On considère l'application *dérivation*

$$\begin{array}{rcl} \Delta \ : \ \mathcal{P}_n & \longrightarrow & \mathcal{P}_n \\ p & \longmapsto & p' \end{array}$$

1. Montrer que Δ est une application linéaire.
2. Déterminer Ker Δ et Im Δ (on donnera une base).
3. Quel est le rang de Δ ?
4. Ecrire la matrice de Δ relativement à la base canonique de $\mathcal{P}_n$.
5. L'application est-elle injective ? surjective ? bijective ?
6. Si la réponse est négative à l'une au moins des interrogations de la question précédente, quelles modifications pourrait-on apporter pour modifier cette réponse (si c'est possible) ?

Exercice A.1.7 TD1-Exercice7

Pour tout $m \in \mathbb{R}$ on considère l'application

$$\begin{array}{rccc} f_m : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x-y+z \\ mx-2y+mz \\ x+y \\ -mx+my-mz \end{pmatrix} \end{array}$$

1. Montrer que f_m est linéaire.
2. Déterminer la matrice de f_m (dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^4$).
3. (a) Déterminer une base de Ker f_m
   (b) Pour quelles valeurs de m l'application f_m est-elle injective ?
   (c) f_m est-elle bijective ?
4. Déterminer une base de Im f_m.

Exercice A.1.8 TD1-Exercice8

Soit $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ une base de $\mathbb{R}^3$ et $e_1^{'} = e_1 + e_2 - e_3,\ e_2^{'} = e_1 - e_2 + e_3,\ e_3^{'} = -e_1 + e_2 + e_3$. Montrer que $\mathcal{B}^{'} = \{e_1^{'}, e_2^{'}, e_3^{'}\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui dans la base $\mathcal{B}$ est representé par la matrice

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a-b & a+c & c-b \\ b-a & c-a & b+c \\ a+b & a-c & b-c \end{pmatrix}.$$

Calculer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}^{'}$.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.9 TD1-Exercice9

On se place dans $\mathbb{R}^3$. On rappelle que le produit scalaire de $\vec{x}$ par $\vec{y}$ est donné par :

$$\text{si } \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \text{ alors } \vec{x}.\vec{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3.$$

On note $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ la base canonique et $\rho(\vec{\omega}, \theta)$ la rotation d'angle θ autour du vecteur $\vec{\omega} = (0, 1, 1)$.

1. On pose $\vec{e'}_1 = \vec{e}_1$,$\vec{e'}_2 = \vec{\omega}$, déterminer $\vec{e'}_3$ tel que la base $(\vec{e'}_1, \vec{e'}_2, \vec{e'}_3)$ soit orthogonale directe.
2. Écrivez la matrice R' de la rotation $\rho(\vec{\omega}, \theta)$ dans la base $(\vec{e'}_1, \vec{e'}_2, \vec{e'}_3)$.
3. Donnez la matrice de passage de la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ à la base $(\vec{e'}_1, \vec{e'}_2, \vec{e'}_3)$.
4. Écrivez la matrice R de la rotation $\rho(\vec{\omega}, \theta)$ dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.10 TD1-Exercice10

1. Soit A une matrice appartenant à $\mathcal{M}_{n,m}$, $y \in \mathbb{R}^n$ et $z \in \mathbb{R}^m$.
   - Quel est la taille de la matrice Az ? $y^\top A$?
   - Que valent leurs coefficients ?
2. Soit A une matrice appartenant à $\mathcal{M}_{n,m}$. Soit $\{e_1,\ e_2,\ \dots,\ e_m\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^m$ et $\{f_1,\ f_2,\ \dots,\ f_n\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
   - Que valent Ae_i $(1 \leq i \leq m)$?
   - Que valent $(f_j)^\top A$, $(1 \leq j \leq n)$?
3. Soit y et $z \in \mathbb{R}^n$. Quelle est la taille de la matrice $y^\top z$?
4. Soit $y \in \mathbb{R}^n$ et $z \in \mathbb{R}^m$. Quelle est la taille de la matrice $yz^\top$?
5. Soit A une matrice appartenant à $\mathcal{M}_{n,m}$ et B une matrice appartenant à $\mathcal{M}_{m,p}$ on note $B_1,\ \dots,\ B_p$ les colonnes de B. Sous quelle forme peut-on écrire le produit AB ?
6. Soit A une matrice appartenant à $\mathcal{M}_{n,m}$ et B une matrice appartenant à $\mathcal{M}_{m,p}$ on note $\underline{A}_1,\ \dots \underline{A}_n$, les lignes de A. Sous quelle forme peut-on écrire le produit AB ?
7. Soit Λ une matrice diagonale appartenant à $\mathcal{M}_{n,n}$, soit A une matrice appartenant à $\mathcal{M}_{n,m}$ et soit B une matrice appartenant à $\mathcal{M}_{m,n}$. Quelles sont les termes des matrices ΛA et $B\Lambda$?
8. Soit A une matrice appartenant à $\mathcal{M}_{n,n}$ régulière (inversible). Montrer que l'inversion de A se ramène à la résolution de n systèmes linéaires de la forme $Ax = b$.
9. Soit $y \in \mathbb{R}^n$ et soit P la matrice appartenant à $\mathcal{M}_{n,n}$ suivante :

$$P = I - \frac{yy^\top}{y^\top y}.$$

   - Calculer P^2 et P^T.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

– On prend $n = 3$. Quelle est l'application associée à P quand on munit $\mathbb{R}^3$ de la base canonique et que l'on prend $y = e_3$?

10. Soit $y \in \mathbb{R}^n$ et soit P la matrice appartenant à $\mathcal{M}_{n,n}$ suivante :

$$P = I - 2\frac{yy^\top}{y^\top y}.$$

– Calculer P^2 et P^T.
– On prend $n = 3$. Quelle est l'application associée à P quand on munit $\mathbb{R}^3$ de la base canonique et que l'on prend $y = e_3$?

Exercice A.1.10
TD1-Exercice10

Question 1	Aide 1	Aide 2					
Question 2	Aide 1	Aide 2					
Question 3	Aide 1						
Question 4	Aide 1						
Question 5	Aide 1						
Question 6	Aide 1						
Question 7	Aide 1						
Question 8	Aide 1	Aide 2	Aide 3				
Question 9	Aide 1	Aide 2	Aide 3	Aide 4	Aide 5	Aide 6	Aide 7
Question 10	Aide 1	Aide 2	Aide 3				

Exercice A.1.11 TD1-Exercice11

1. Montrer que le produit de deux matrices carrées triangulaires inférieures (resp. triangulaires supérieures) est une matrice triangulaire inférieure (resp. triangulaire supérieure).
2. Donner l'expression du déterminant d'une matrice triangulaire.
3. (a) Soit $L \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ une matrice régulière, triangulaire inférieure, et soit $b \in \mathbb{R}^n$ tel que $b_i = 0$ pour $i < k$. Montrer que la solution x de l'équation $Lx = b$ est telle que

$$\begin{cases} x_i & = & 0 & \text{pour } i < k, \\ x_k & = & \dfrac{b_k}{l_{kk}}. \end{cases}$$

   (b) En déduire que l'inverse de L est triangulaire inférieure et que ses éléments diagonaux sont les inverses des éléments diagonaux de L.

Question 1 Aide 1 Aide 2 Aide 3 Aide 4 Aide 5
Question 2 Aide 1
Question 3a Aide 1
Question 3b Aide 1 Aide 2

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.12 TD1-Exercice12

1. Soit A et B deux matrices décomposées en blocs de la manière suivante :

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \text{ où } A_{ij} \in \mathcal{M}_{n_i,p_j}(\mathbb{R}),\ i = 1,2,\ j = 1,2$$

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \end{pmatrix} \text{ où } B_{ij} \in \mathcal{M}_{m_i,q_j}(\mathbb{R}),\ i = 1,2,\ j = 1,2,3$$

   (a) A quelles conditions sur les tailles des blocs, est-il possible d'effectuer le produit par blocs de A par B ? Expliciter alors ce produit. Est-il possible d'effectuer le produit par blocs de B par A ?

   (b) A quelle condition est-il possible d'effectuer le produit par blocs de A par elle même ?

2. Soit A une matrice carrée régulière définie par blocs :

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & A_{pp} \end{pmatrix} \text{ où } A_{ii} \in \mathcal{M}_{n_i,n_i}(\mathbb{R}),\ i = 1,\dots,p$$

   Calculer l'inverse et le déterminant de A . Pour le déterminant, on pourra utiliser la factorisation par blocs suivante :

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Application : Calculer l'inverse et le déterminant de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Question 1a Aide 1
Question 1b Aide 1
Question 2 Aide 1
Aide 1

Exercice A.1.13 TD1-Exercice13

On appelle *matrice bande* une matrice A telle que $a_{ij} = 0$ pour $j > i + L$ ou $j < i - L$. L est appelé la demi-largeur de bande de la matrice A.

Montrer que le produit de 2 matrices bande est encore une matrice bande dont la demi-largeur de bande est égale à la somme des deux demi-largeurs de bande.

Aide 1 Aide 2 Aide 3 Aide 4

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.14 TD1-Exercice14

Soient $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$.

1. *B est dite **semi-définie positive** si $x^\top Bx \geq 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$.*
   Montrer que $A^\top A$ et $AA^\top$ sont symétriques et semi-définies positives.
2. *B est dite **définie positive** si $x^\top Bx > 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$.*
   (a) Montrer qu'une matrice définie positive est inversible.
   (b) On suppose $n = p$. A quelle condition $A^\top A$ et $AA^\top$ sont-elles définies positives ?
   (c) On suppose $n < p$, les matrices $A^\top A$ et $AA^\top$ peuvent-elles être définies positives ? Si oui à quelle condition ?

Question 1 Aide 1 Aide 2 Aide 3
Question 2a Aide 1 Aide 2 Aide 3
Question 2b Aide 1 Aide 2 Aide 3 Aide 4
Question 2c Aide 1 Aide 2 Aide 3 Aide 4 Aide 5

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Index des concepts

Le gras indique un grain où le concept est défini ; l'italique indique un renvoi à un exercice ou un exemple, le gras italique à un document, et le romain à un grain où le concept est mentionné.

S

V

Solution de l'exercice I.1

Prendre la définition précise du document I.1 et vérifier tous ses éléments en utilisant les propriétés connues des nombres réels.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice I.2

Prendre la définition précise du document I.1 et vérifier toutes ses éléments en utilisant les propriétés connues des nombres réels.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice I.3

Cet ensemble n'a pas d'élément nul pour l'addition puisque le polynôme nul n'est pas de degré n.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice I.4

Il est facile de montrer que la somme de deux éléments de F est un élément de F et que le produit d'un nombre réel par un élément de F est un élément de F. Ainsi, pour le deuxième exemple, on a :

$$(\lambda_1\vec{x} + \mu_1\vec{y}) + (\lambda_2\vec{x} + \mu_2\vec{y}) = (\lambda_1 + \lambda_2)\vec{x} + (\mu_1 + \mu_2)\vec{y},$$

$$\alpha(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}) = \alpha\lambda\vec{x} + \alpha\mu\vec{y}.$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice I.5

Pour $F \cap G$, il suffit de se rappeler la définition de $F \cap G = \{x \in E, x \in F$ et $x \in G\}$ et d'utiliser le fait que F et G sont des sous-espaces vectoriels.

Pour $F \cup G$, il faut exhiber un contre-exemple. Par exemple, si $F = \{\lambda(0,1),\ \lambda \in \mathbb{R}\}$ et $G = \{\lambda(1,0),\ \lambda \in \mathbb{R}\}$, $F \cup G = \{x \in E, x \in F$ ou $x \in G\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel car la somme de deux vecteurs de $F \cup G$ tels que $(0,1)$ et $(1,0)$ n'est pas dans $F \cup G$.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice I.6

Ces questions ne posent pas de difficulté. En ce qui concerne la troisième question, $H = \mathbb{R}^3$ et $F \cup G$ n'est que la réunion des vecteurs de la droite et des vecteurs du plan. Pour l'unicité de la décomposition de la dernière question (comme pour toute démonstration d'unicité), on part de deux décompositions et on démontre qu'elles sont égales.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice I.7

Pour donner une famille liée, on peut prendre deux vecteurs dont l'un est un scalaire fois le premier, mais il y a une infinité d'exemples simples possibles...

Pour montrer que la famille $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ est libre et génératrice, il suffit d'appliquer les définitions, ce qui correspond au cas particulier $n = 3$ de la dernière question.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice I.8

$$\alpha(1,1,-1)+\beta(1,1,1)+\gamma(\sqrt{2},\sqrt{2},3)=0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{llll}\alpha & +\beta & +\sqrt{2}\gamma & =0\\ -\alpha & +\beta & +3\gamma & =0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{llll}\alpha & +\beta & +\sqrt{2}\gamma & =0\\ & +2\beta & +(3+\sqrt{2})\gamma & =0\end{array}\right.$$

Il existe des coefficients non tous nuls, par exemple $\gamma=1, \beta=(-\sqrt{2}-3)/2, \alpha=(-\sqrt{2}+3)/2$, donc la famille est liée.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice I.9

On montre que la famille $\{x^0, x, x^2, \ldots, x^n\}$ est libre et génératrice, en utilisant en particulier la définition d'un polynôme et plus particulièrement celle du polynôme nul.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice I.10

On considère deux décompositions et on utilise le fait que la famille B est libre.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice I.11

On choisit un vecteur dont les deux premières composantes sont différentes par exemple $\vec{z} = (1, 0, 0)$, puis on vérifie que les trois vecteurs de la famille ainsi obtenue sont linéairement indépendants. Cela suffit alors puisque l'on connaît la dimension de $\mathbb{R}^3$, qui est égale à trois.

Retour à l'exercice ▲

1. **Ker** $u_1 = \{x \in \mathbb{R}^n,\ a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = 0\}$, **Im** $u_1 = \mathbb{R}$.
2. **Ker** $u_2 = P_1$, **l'ensemble des polynômes constants, et Im** $u_2 = P_{k-1}$.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice I.13

Vérifier les propriétés de l'application linéaire, puis montrer que $\operatorname{Ker} u = G$ et $\operatorname{Im} u = F$, ce qui donne le résultat de la dernière question.

Retour à l'exercice ▲

Aidez-vous d'une figure et tout est évident.

$u(\vec{V}+\vec{V}')=u(\vec{V})+u(\vec{V}'),\ u(\lambda\vec{V})=\lambda u(\vec{V}),$ **Ker** $u=\{\vec{0}\},$ **Im** $u=\mathbb{R}^2.$

L'application inverse d'une rotation d'angle θ est un rotation d'angle $-\theta$, c'est donc une application linéaire bijective, puisque vous venez de le démontrer pour la rotation d'angle θ.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice I.15

Soit $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ la base de E. Par définition d'une matrice associée à une application linéaire, la jème colonne de la matrice associée à i_E est constituée des composantes de $i_E(\vec{e}_j) = \vec{e}_j$ dans la base $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$. Les éléments de cette jème colonne sont donc tous nuls sauf le jème élément qui vaut 1. Cette matrice est donc bien la matrice identité.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice I.16

$u(1) = 0$, $u(x) = 1$ et $u(x^2) = 2x$. La matrice est donc

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Retour à l'exercice ▲

1. $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
2. $AB = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ et le produit BA est impossible car le nombre de colonnes de B est différent du nombre de lignes de A.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice I.18

Vous effectuez le produit et vous utilisez les formules trigonométriques bien connues :

$$\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos(\theta_1)\cos(\theta_2) - \sin(\theta_1)\sin(\theta_2),$$

$$\sin(\theta_1 + \theta_2) = \sin(\theta_1)\cos(\theta_2) + \cos(\theta_1)\sin(\theta_2).$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice I.19

$$u(\vec{x}) = u(\sum x_j \vec{e}_j) = \sum x_j u(\vec{e}_j) = \sum_j x_j (\sum_i a_{ij} \vec{f}_i) = \sum_i (\sum_j a_{ij} x_j) \vec{f}_i = \sum_i y_i \vec{f}_i,$$

et l'unicité de la décomposition d'un vecteur sur une base donne

$$y_i = \sum_j a_{ij} x_j$$

soit $Y = AX$.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice I.20

En appliquant la proposition I.3.2, les composantes de $u(\vec{x})$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ sont données par le produit

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 11 \end{pmatrix}$$

soit $u(\vec{x}) = (9, 11)$.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice I.21

On a montré aussi dans cet exercice que son inverse est la rotation d'angle $-\theta$. La matrice inverse est la matrice associée à l'application linéaire inverse, soit

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Retour à l'exercice ▲

Pour montrer l'unicité, on suppose que la matrice possède deux inverses B et C, qui vérifient donc

$$AC = CA = I\,,\ AB = BA = I.$$

Calculons alors le produit BAC de deux manières différentes

$$BAC = B(AC) = BI = B,\ \ BAC = (BA)C = IC = C,$$

ce qui donne $B = C$.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice I.23

Pour que ces produits existent, il faut évidemment que X et Y aient le même nombre n de composantes. Dans ce cas X^TY est une matrice à une ligne et une colonne, c'est donc un scalaire, plus précisément vous reconnaissez le produit scalaire de deux vecteurs dont les composantes seraient données par les éléments de X et Y. Par contre XY^T est une matrice à n lignes et n colonnes. Les deux matrices X^TY et XY^T étant de type différent, elles ne peuvent pas être égales !

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice I.24

Par définition de la matrice de passage (voir le paragraphe Matrice de passage), on a

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Retour à l'exercice ▲

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.
- $$u(\vec{e'}_1) = u(\vec{e}_1 + \vec{e}_2) = u(\vec{e}_1) + u(\vec{e}_2) = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 = 3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2.$$
  De même
  $$u(\vec{e'}_2) = 7\vec{e}_2.$$
- Vous calculez $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ en fonction de $\vec{e'}_1$ et $\vec{e'}_2$, ce qui donne
  $$\vec{e}_1 = \frac{1}{3}\left(\vec{e'}_1 + \vec{e'}_2\right)\ ,\ \vec{e}_2 = \frac{1}{3}\left(2\vec{e'}_1 - \vec{e'}_2\right).$$
  Il suffit alors de remplacer dans le calcul de $u(\vec{e'}_1)$ et $u(\vec{e'}_2)$ de la question précédente.
- Les composantes de $u(\vec{e'}_1)$ et $u(\vec{e'}_2)$ sur $\vec{e'}_1$ et $\vec{e'}_2$ obtenues dans la question précédente vous donnent les colonnes de A'.
- Inversez la matrice P calculée dans l'exercice I.24 , vous pouvez alors calculer $P^{-1}AP$, ce qui doit vous redonner la matrice A'.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice I.26

- le rang de la matrice de la rotation dans le plan est 2 puisque cette matrice est inversible et de dimension 2.
- Le rang de A est 2, puisque les deux premières colonnes sont linéairement indépendantes et que la troisième colonne est identique à la deuxième.
- Le rang de A est 2 puisque les deux premières colonnes sont linéairement indépendantes et que les colonnes 3 et 4 sont des combinaisons linéaires des deux premières colonnes (lesquelles ?).

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice I.27

Ce sont ds calculs évidents que vous pouvez vérifier avec scilab lorsque les matrices sont numériques. Pour le dernier déterminant, vous pouvez "sortir" λ (pourquoi ?).

Retour à l'exercice ▲

Les résultats sont : 1, λ, 1.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice I.29

On itère la définition du déterminant sur des matrices dont la dimension diminue jusqu'à ce que l'on arrive sur un scalaire. Il est à noter qu'une matrice diagonale est un cas particulier des matrices triangulaires.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice I.30

On peut prendre par exemple $A = I$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice I.31

La réponse est -6. et s'obtient en développant par rapport une ligne qui a plusieurs 0.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice I.32

Le déterminant d'une matrice étant égal au déterminant de sa transposée, on peut appliquer les résultats de l'exercice I.29 .

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice I.33

Si deux matrices A et B sont semblables, alors il existe une matrice inversible P telle que

$$B = P^{-1}AP.$$

Il suffit alors de calculer les déterminants des deux membres et d'utiliser les règles sur le produit et sur l'inverse des déterminants.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice I.34

La réponse est toujours $-6\,!$ et s'obtient en développant par rapport une ligne (ou une colonne) qui a plusieurs 0.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice I.35

Le rang de la matrice est au moins égal à 2 car $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$. Pour montrer que le rang de A est égal à 3, il faut trouver un déterminant à 3 lignes et 3 colonnes non nul. Or les 4 déterminants de ce type sont nuls (les calculer). Le rang est donc définitivement 2.

Retour à l'exercice ▲

Le déterminant de A est égal à -13. Alors l'inverse de A est donné par

$$A^{-1} = -\frac{1}{13}B^T,$$

où

$$B = \begin{pmatrix} -7 & 11 & -5 \\ 4 & -10 & 1 \\ -1 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

Retour à l'exercice ▲

$$x \in \text{Ker } A \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{llll} x_1 & +x_2 & +x_3 & = 0 \\ x_1 & +2x_2 & -x_3 & = 0 \\ x_1 & & +3x_3 & = 0 \\ 2x_1 & +x_2 & +4x_3 & = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{llll} x_1 & +x_2 & +x_3 & = 0 \\ & x_2 & -2x_3 & = 0 \\ & -x_2 & +2x_3 & = 0 \\ & -x_2 & +2x_3 & = 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{llll} x_1 & +x_2 & +x_3 & = 0 \\ & x_2 & -2x_3 & = 0 \\ & & 0 & = 0 \\ & & 0 & = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} x_1 & = -3x_3 \\ x_2 & = 2x_3 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow x = x_3 \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La dimension du noyau de A est donc égal à 1 (une base de ce noyau est $\left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$). Or

$$3 = \text{rang } A + \text{dim } (\text{ker } A),$$

ce qui donne rang $A = 2$.

Nous venons de démontrer par l'exemple précédent, que la solution d'un système $Ax = 0$, dont la matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}$ est telle que $n > p$, peut avoir une solution non unique. Il est clair que ce système qui a plus d'équations que d'inconnues n'a pas toujours une solution (il est facile de construire des contre-exemples à 3 équations et 2 inconnues).

Retour à l'exercice ▲

On transforme ce système en un système équivalent

$$\left\{\begin{array}{llll} x_1 & +x_2 & +x_3 & = 1 \\ & x_2 & -2x_3 & = -2 \\ & -x_2 & +2x_3 & = 2 \\ & -x_2 & +2x_3 & = 0 \end{array}\right.$$

qui n'a évidemment aucune solution.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice I.39

$sI - A = \begin{pmatrix} s-5 & -2 \\ -2 & s-2 \end{pmatrix}$ donc

$\pi_A(s) = \textbf{dét}\,(sI - A) = (s-5)(s-2) - 4 = s^2 - 7s + 6 = (s-1)(s-6).$

On obtient donc 2 valeurs propres réelles $\lambda = 1$ et $\lambda = 6$, on détermine les vecteurs propres associés :

- $\lambda = 1$,

$$(A - \lambda I)Y = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 4y_1 + 2y_2 = 0 \\ 2y_1 + y_2 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow y_2 = -2y_1 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} Y = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \\ \alpha \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

- $\lambda = 6$,

$$(A - \lambda I)Y = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -y_1 + 2y_2 = 0 \\ 2y_1 - 4y_2 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow y_1 = 2y_2 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} Y = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \alpha \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice I.40

– Si une matrice est triangulaire, son déterminant est le produit de ses éléments diagonaux, donc

$$\text{dét}\,(sI - A) = (s - a_{11})(s - a_{22})...(s - a_{nn}).$$

– A non inversible $\Longleftrightarrow$ dét $A = 0 \Longleftrightarrow 0$ est valeur propre de A.
– Si $B \in \mathcal{M}_{n,n}$, alors dét $B =$ dét B^T et donc $det(sI - A) =$ dét $(sI - A)^T =$ dét $(sI - A^T)$. Il est facile d'exhiber un contre-exemple pour les vecteurs propres.

Retour à l'exercice ▲

Si deux matrices A et B sont semblables, il existe une matrice P telle que $B = P^{-1}AP$, ce qui donne

$$\text{dét } B = \text{dét } P^{-1}AP = \text{dét } P{-1}\text{dét } A\text{dét } P = (\text{dét } P)^{-1}\text{dét } A\text{dét } P = \text{dét } A.$$

Si l'on se place dans $\mathcal{M}_{2,2}$, la matrice identité et la matrice triangulaire $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ont le même déterminant mais ne sont pas semblables. Pour le vérifier, montrer qu'il est impossible de trouver une matrice inversible P telle que $PI = AP$.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice I.42

$$A = PDP^{-1} \Leftrightarrow AP = PD \Leftrightarrow AP_i = PD_i = d_{ii}P_i.$$

Ce que l'on vient d'écrire découle uniquement des propriétés du produit matriciel, pour lequel on a bien sûr utilisé le fait que D est diagonale.

On obtient donc que P_i (ième colonne de P) est vecteur propre de A associé à la valeur propre d_{ii}.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice I.43

$(B^TB) = B^TB$, ce qui prouve que B est symétrique.
$x^TB^TBx = (Bx)^TBx = ||Bx|| \geq 0$, ce qui montre que B^TB est semi-définie positive.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice I.44

D'après l'exercice précédent, $B^T B$ est symétrique et semi-définie positive.

$$x^T B^T Bx = 0 \;\Rightarrow\; ||Bx|| = 0 \;\Rightarrow\; Bx = 0,$$

et puisque B est de rang n, son noyau est réduit au vecteur nul et donc $x = 0$. La matrice $B^T B$ est donc définie positive.

Retour à l'exercice ▲

Az est un vecteur colonne appartenant à $\mathcal{M}_{n1}$,

$y^\top A$ est un vecteur ligne appartenant à $\mathcal{M}_{1m}$.

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 1, Exercice A.1.10

$$Az = z_1 A_1 + z_2 A_2 + ... + z_m A_m = \begin{pmatrix} \underline{A}_1 z \\ \underline{A}_2 z \\ ... \\ \underline{A}_n z \end{pmatrix}.$$

$$y^\top A = y_1 \underline{A}_1 + y_2 \underline{A}_2 + ... + y_n \underline{A}_n = (y^\top A_1 y^\top A_2 ... y^\top A_m).$$

Retour à l'exercice ▲

En utilisant ce qui précède
$$Ae_i = A_i.$$

Retour à l'exercice ▲

En utilisant ce qui précède

$$(f_j)^\top A = \underline{A}_j$$

Retour à l'exercice ▲

$y^\top z$ est un scalaire, plus précisément

$$y^\top z = \sum_{i=1}^{n} y_i z_i = z^\top y.$$

Retour à l'exercice ▲

$yz^\top$ est une matrice appartenant à $\mathcal{M}_{nm}$, plus précisément

$$yz^\top = \begin{pmatrix} z_1 y & z_2 y & \dots & z_m y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 z^\top \\ y_2 z^\top \\ \dots \\ y_n z^\top \end{pmatrix}.$$

Attention la matrice $yz^\top$ n'est pas égale à la matrice $zy^\top$, ces deux matrices n'ont même pas la même taille si n et m sont différents.

Retour à l'exercice ▲

La ième colonne de AB est égale à A multipliée par la ième colonne de B, c'est à dire $(AB)_i = AB_i$.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 6, Exercice A.1.10

La ième ligne de AB est égale à la ième ligne de A multipliée par B, c'est à dire $\underline{AB}_i = \underline{A}_i B$.

Retour à l'exercice ▲

Si l'on note $d_1, d_2, ..., d_n$ les termes diagonaux de Λ, on aura :

$$\Lambda A = \begin{pmatrix} d_1 \underline{A}_1 \\ d_2 \underline{A}_2 \\ ... \\ d_n \underline{A}_n \end{pmatrix}$$

$$B\Lambda = \begin{pmatrix} d_1 B_1 & d_2 B_2 & ... & d_n B_n \end{pmatrix}$$

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 8, Exercice A.1.10

Chercher l'inverse de A revient à chercher une matrice B telle que $AB = I$

Retour à l'exercice ▲

On peut déterminer la matrice inconnue B, vérifiant $AB = I$, colonne par colonne.

Retour à l'exercice ▲

Aide 3, Question 8, Exercice A.1.10

$$AB = I \Leftrightarrow AB_j = I_j \text{ pour } j = 1, ..., n,$$

donc pour déterminer la colonne B_j on doit résoudre un système dont la matrice est A et le second membre est I_j.

Retour à l'exercice ▲

$P^2 = PP$,

pensez à la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition,

souvenez-vous que $\dfrac{1}{y^\top y}$ est un scalaire.

Que vaut la transposée d'une somme, d'un produit ?

Retour à l'exercice ▲

Notons $\alpha = \dfrac{1}{y^\top y}$

$$P^2 = \left(I - \alpha y y^\top\right)\left(I - \alpha y y^\top\right) = I - 2\alpha y y^\top + \alpha^2 (y y^\top y y^\top)$$

On peut utiliser l'associativité du produit matriciel pour calculer $yy^\top yy^\top$.

Pour calculer $P^\top$, noubliez pas que $(yy^\top)^\top = yy^\top$.

Retour à l'exercice ▲

$$yy^\top yy^\top = y(y^\top y)y^\top = \frac{1}{\alpha}yy^\top$$

Donc

$$P^2 = I - 2\alpha yy^\top + \alpha yy^\top = I - \alpha yy^\top = P.$$

D'autre part on obtient $P^T = P$.

Retour à l'exercice ▲

Aide 4, Question 9, Exercice A.1.10

Calculez l'image des vecteurs e_1, e_2, e_3, c'est à dire Pe_1, Pe_2, Pe_3

Retour à l'exercice ▲

On a $Pe_1 = e_1 - \alpha e_3 {e_3}^\top e_1, Pe_3 = e_3 - \alpha e_3 {e_3}^\top e_3$

On peut encore utiliser l'associativité du produit matriciel.

Retour à l'exercice ▲

On a $e_3{}^\top e_1 = 0, e_3{}^\top e_3 = 1$, donc $Pe_1 = e_1, Pe_3 = 0$

On obtiendrait $Pe_2 = e_2$.

Quelle est l'application correspondante ?

Retour à l'exercice ▲

Aide 7, Question 9, Exercice A.1.10

P est donc la matrice de la projection sur le plan engendré par e_1, e_2 parallèlement au vecteur e_3 : c'est la projection orthogonale.

Retour à l'exercice ▲

Après un calcul similaire au calcul précédent, on trouve $P^2 = I, P^T = P$

Retour à l'exercice ▲

On obtient $Pe_1 = e_1, Pe_2 = e_2, Pe_3 = -e_3$. Quelle est l'application ?

Retour à l'exercice ▲

Il s'agit de la symétrie par rapport au plan engendré par e_1 et e_2.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 1, Exercice A.1.11

Si A et B sont triangulaires inférieures, on a $a_{ij} = b_{ij} = 0$ pour $j > i$, montrer que cette propriété est valable encore pour la matrice $C = AB$. Explicitez les termes de C.

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 1, Exercice A.1.11

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

Montrez si $i < j$ tous les termes de cette somme sont nuls

Retour à l'exercice ▲

On suppose que $i < j$,

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{i} a_{ik} b_{kj} + \sum_{k=i+1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

Les termes b_{kj} de la première somme sont nuls car $k \leq i < j$,

les termes a_{ik} de la deuxième somme sont nuls car $i < k$,

donc $c_{ij} = 0$.

Pour une matrice triangulaire supérieure, on pourrait faire un raisonnement similaire, mais on peut également utiliser directement le résultat précédent, voyez-vous comment ?

Retour à l'exercice ▲

La transposée d'une matrice triangulaire inférieure est une matrice triangulaire supérieure.

Retour à l'exercice ▲

Aide 5, Question 1, Exercice A.1.11

On suppose que A et B sont triangulaires supérieures, donc A^T et B^T sont triangulaires inférieures.

Si on pose $C = AB$, alors $C^T = B^T A^T$ est une matrice triangulaire inférieure, donc C est une matrice triangulaire supérieure.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 2, Exercice A.1.11

Le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit de ses termes diagonaux. Pour démontrer ce résultat, il suffit de développer le déterminant par rapport à la première ligne pour une matrice triangulaire inférieure et par rapport à la première colonne pour une matrice triangulaire supérieure.

Retour à l'exercice ▲

La matrice L est régulière ce qui signifie inversible, donc les termes diagonaux de L sont non nuls.

On peut montrer que $x_i = 0$ pour $i = 1, 2, ..., k-1$ par récurrence.

On a $l_{11}x_1 = b_1 = 0$ donc $x_1 = 0$.

Si $x_1 = x_2 = ... = x_j = 0$, alors pour obtenir x_{j+1}, on doit résoudre $l_{j+1j+1}x_{j+1} = b_{j+1} = 0$ donc $x_{j+1} = 0$.

Pour obtenir x_k, on doit résoudre $l_{kk}x_k = b_k$ donc $x_k = \frac{b_k}{l_{kk}}$.

Retour à l'exercice ▲

On rappelle que chercher la matrice $N = L^{-1}$ revient à déterminer les colonnes de N en résolvant $LN_k = I_k$.

Retour à l'exercice ▲

I_k est un vecteur dont toutes les composantes sont nulles pour $i < k$, la kème composante vaut 1, en utilisant la question précédente, les composantes de N_k sont donc nulles pour $i < k$ et la kème vaut $\frac{1}{l_{kk}}$.

La matrice N est donc triangulaire inférieure et ses termes diagonaux valent $\frac{1}{l_{kk}}$.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 1a, Exercice A.1.12

Pour pouvoir effectuer le produit par blocs (avec les blocs proposés), il faut que $p_1 = m_1, p_2 = m_2$, on a alors :

$$AB = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} & A_{11}B_{13} + A_{12}B_{23} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} & A_{21}B_{13} + A_{22}B_{23} \end{pmatrix}$$

Il n'est pas possible d'effectuer le produit par blocs de B par A avec les blocs tels qu'ils sont définis ici, par contre si $q_1 + q_2 + q_3 = n_1 + n_2$, à condition de faire un découpage cohérent, il est possible de faire un produit par blocs.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 1b, Exercice A.1.12

Avec le découpage proposé, il faut que $n_1 = p_1, n_2 = p_2$.

Retour à l'exercice ▲

Le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ est égal à dét B, pour démontrer ce résultat, il suffit par exemple de développer par rapport à la première ligne.

Le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$ est égal à dét A, pour démontrer ce résultat, il suffit par exemple de développer par rapport à la dernière ligne.

Donc le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ est égal au produit dét Adét B.

Ce résultat se généralise à un nombre de blocs quelconques, par exemple pour trois :

$\begin{vmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{vmatrix}$ dét $C =$ dét Adét Bdét C.

On montrerait par récurence pour un nombre de blocs quelconques.

Une conséquence immédiate est :

La matrice A est inversible si et seulement si les matrices A_{ii} sont inversibles.

Dans le cas où les matrices A_{ii} sont inversibles, on montre facilement (il suffit de faire le produit) que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_{22}^{-1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & A_{pp}^{-1} \end{pmatrix}$$

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Exercice A.1.12

Si on note $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, on a $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$

On a dét A = dét $B = 1$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

donc dét $M = 1$, $M^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Exercice A.1.13

Faites un raisonnement similaire à celui écrit pour le produit des matrices triangulaires inférieures.

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Exercice A.1.13

Si A a L_1 pour largeur de bande, on a $a_{ij} = 0$ pour $i - j > L_1$ ou $i - j < -L_1$,
si B a L_2 pour largeur de bande, on a $b_{ij} = 0$ pour $i - j > L_2$ ou $i - j < -L_2$,
si on définit $C = AB$,
montrons qu'alors $c_{ij} = 0$ pour $i - j > L_1 + L_2$ ou $i - j < -L_1 - L_2$.
Explicitez c_{ij}.

Retour à l'exercice ▲

Aide 3, Exercice A.1.13

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

On suppose $i - j > L_1 + L_2$, montrez qu'alors tous les termes de la somme sont nuls.

Retour à l'exercice ▲

Aide 4, Exercice A.1.13

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{i-L_1-1} a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=i-L_1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

On suppose $i - j > L_1 + L_2$.
Les termes a_{ik} de la première somme sont nuls car $k - i < -L_1$,
les termes b_{kj} de la deuxième somme sont nuls car on a $i - j > L_1 + L_2$, donc

$$k \geq i - L_1 > j + L_1 + L_2 - L_1 = j + L_2 \Rightarrow k - j > L_2,$$

donc $c_{ij} = 0$ pour $i - j > L_1 + L_2$.
On montrerait de même que $c_{ij} = 0$ pour $i - j < -L_1 - L_2$

Retour à l'exercice ▲

Pour montrer la symétrie pensez à la transposée.

Pour définie-positive utilisez la définition et pensez au produit scalaire.

Retour à l'exercice ▲

$(AA^T)^T = AA^T, (A^TA)^T = A^TA$ donc les matrices sont symétriques.

$x^TAA^Tx = (A^Tx)^TA^Tx = y^Ty$ si on pose $y = A^Tx$.

Donc on peut conclure ?

Retour à l'exercice ▲

$y = A^T x$ appartient à $\mathcal{M}_{p1}$, on reconnait le produit scalaire usuel

$$x^T A A^T x = y^T y = \sum_{i=1}^{p} y_i^2 \geq 0,$$

ce qui termine de démontrer le fait que AA^T est semi définie positive.

Faites un raisonnement similaire avec $A^T A$.

Retour à l'exercice ▲

On peut montrer par exemple que Ker $B = \{0\}$, ce qui est équivalent puisque B est carrée à B inversible.

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 2a, Exercice A.1.14

$$x \in \mathbf{Ker}\ B \Leftrightarrow Bx = 0 \Rightarrow x^T Bx = 0.$$

Peut-on conclure ?

Retour à l'exercice ▲

On sait que si $x \neq 0$ alors $x^T Bx > 0$, donc

$$x^T Bx = 0 \Rightarrow x = 0.$$

On a donc

$$x \in \textbf{Ker } B \Rightarrow x^T Bx = 0 \Rightarrow x = 0,$$

donc Ker $B = \{0\}$, donc B est inversible.

Retour à l'exercice ▲

On a déjà montré que ces matrices sont semi-définies positives.

Par exemple pour AA^T on sait que $\forall x, x^T AA^T x \geq 0$, il reste donc à montrer que

$$x^T AA^T x = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Retour à l'exercice ▲

On peut à nouveau poser $y = A^T x$, on a donc

$$x^T A A^T x = 0 \Leftrightarrow y^T y = 0 \Leftrightarrow y = 0.$$

Savez-vous conclure ?

Retour à l'exercice ▲

On devrait donc avoir $y = 0 \Leftrightarrow x = 0$, or $y = A^T x$.
Quelle est la condition à imposer sur A ?

Retour à l'exercice ▲

On doit avoir Ker $A^T = \{0\}$, or puisque A^T est carrée, ceci est équivalent à A^T inversible encore équivalent à A inversible.

On montrerait de façon similaire que la matrice $A^T A$ est définie positive si et seulement si A est inversible.

Remarque : lorsque A est carrée les matrices $A^T A$ et AA^T ont la même taille.

Retour à l'exercice ▲

Etudions $AA^\top$, on pose $y = A^\top x$, on a encore

$$x^T AA^\top x = 0 \Leftrightarrow y^T y = 0 \Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow x \in \textbf{Ker } A^\top.$$

Peut-on avoir Ker $A^\top = \{0\}$? Si oui à quelle condition ?

Retour à l'exercice ▲

Rappelez-vous la relation entre la dimension du noyau et le rang d'une matrice.

Retour à l'exercice ▲

$$\textbf{dim Ker } A^\top + RangA^\top = n$$

Donc

$$\textbf{Ker } A^\top = \{0\} \Leftrightarrow \textbf{dim Ker } A^\top = 0 \Leftrightarrow RangA^\top = n \Leftrightarrow RangA = n$$

La matrice $AA^\top$ est donc définie positive si et seulement si $RangA = n$, c'est à dire la matrice A est de rang maximal.

Etudiez maintenant la matrice $A^\top A$

Retour à l'exercice ▲

On pose $z = Ax$, on a encore

$$x^T A^\top Ax = 0 \Leftrightarrow z^T z = 0 \Leftrightarrow z = 0 \Leftrightarrow x \in \mathbf{Ker}\ A.$$

Retour à l'exercice ▲

On sait que dim Ker $A + RangA = p$, donc il n'est pas possible que Ker $A = 0$, car alors on aurait $RangA = p$, ce qui est impossible puisque $n < p$.

Donc il existe des vecteurs x non nuls appartenant à Ker A,

puisque l'on a $x^T A^\top Ax = 0 \Leftrightarrow x \in$ Ker A., il existe des vecteurs x non nuls tels que $x^T A^\top Ax = 0$, donc la matrice $A^\top A$ ne peut pas être définie positive.

Si on avait la condition $p < n$, c'est $AA^\top$ qui ne pourrait pas être définie positive, alors que $A^\top A$ le serait à condition que $RangA = p$, c'est à dire A de rang maximal.

Remarque : lorsque A n'est pas carrée, les matrices $AA^\top$ et $A^\top A$ sont carrées, mais elles n'ont pas la même taille.

Retour à l'exercice ▲