

BÀI TẬP PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

1) Giải phương trình: $2xy'y'' = y'^2 - 1$

HD giải: Đặt $y' = p$: $2xpp' = p^2 - 1$

Với $x(p^2 - 1) \neq 0$ ta có: $\frac{2pdp}{p^2 - 1} = \frac{dx}{x} \Leftrightarrow p^2 - 1 = C_1 \Leftrightarrow p = \pm\sqrt{C_1x + 1}$

$$p = \frac{dy}{dx} = \sqrt{C_1 + 1} \Rightarrow y = \frac{2}{3C_1}(C_1x + 1)^{\frac{3}{2}} + C_2$$

2) Giải phương trình: $\sqrt{y} \cdot y'' = y'$

HD giải: Đặt $y' = p \Rightarrow y'' = p \frac{dp}{dy}$ (hàm theo y). Phương trình trở thành: $\sqrt{y}p \frac{dp}{dy} = p$

Với $p \neq 0$ ta được phương trình: $dp = \frac{dy}{\sqrt{y}} \Rightarrow p = 2\sqrt{y} + C_1 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = 2\sqrt{y} + C_1 \Rightarrow$
 $dx = \frac{dy}{2\sqrt{y} + C_1}$

Từ đó nghiệm tổng quát: $x = \sqrt{y} - \frac{C_1}{2} \ln |2\sqrt{y} + C_1| + C_2$

Ngoài ra $y = c$: hằng cũng là nghiệm.

3) Giải phương trình: $a(xy' + 2y) = xyy'$

HD giải: $a(xy' + 2y) = xyy' \Rightarrow x(a - y)y' = -2ay$

Nếu $y \neq 0$, ta có phương trình tương đương với $\frac{a - y}{y} dy = -\frac{2a}{x} dx \Leftrightarrow x^{2a} y^a e^{-y} = C$

Ngoài ra $y = 0$ cũng là nghiệm.

4) Giải phương trình: $y'' = y'e^y$

HD giải: Đặt $y' = p \Rightarrow y'' = p \frac{dp}{dy}$ thay vào phương trình: $p \frac{dp}{dy} = pe^y$

Với $p \neq 0$: $\frac{dp}{dy} = e^y \Leftrightarrow p = e^y + C_1 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = e^y + C_1 \Leftrightarrow \frac{dy}{e^y + C_1} = dx$

Với $C_1 \neq 0$ ta có: $\int \frac{dy}{e^y + C_1} = \frac{1}{C_1} \int \frac{e^y + C_1 - e^y}{e^y + 1} dy = \frac{1}{C_1} (y - \int \frac{e^y dy}{e^y + C_1}) = \frac{y}{C_1} -$
 $\frac{1}{C_1} \ln(e^y + C_1)$

như vậy: $\int \frac{dx}{e^y + C_1} = \begin{cases} -e^{-y} & \text{nếu } C_1 = 0 \\ \frac{1}{C_1} (y - \ln |e^y + C_1|) & \text{nếu } C_1 \neq 0. \end{cases}$

Ngoài ra $y = C$: hằng là một nghiệm

5) Giải phương trình: $xy' = y(1 + \ln y - \ln x)$ với $y(1) = e$

HD giải: *Đưa phương trình về:* $y' = \frac{y}{x}(1 + \ln \frac{y}{x})$, *đặt* $y = zx$ *được:* $xz' = z \ln z$

• $z \ln z \neq 0 \Rightarrow \frac{dz}{z \ln z} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln z = Cx$ *hay* $\ln \frac{y}{x} = Cx \Leftrightarrow y = xe^{Cx}$
 $y(1) = e \rightarrow C = 1$. *Vậy* $y = xe^x$

6) Giải phương trình: $y''(1+y) = y'^2 + y'$

HD giải: *Đặt* $y' = z(y) \Rightarrow z' = z \frac{dz}{dy}$ *thay vào phương trình:* $\frac{dz}{z+1} = \frac{dy}{y+1}$

$\Rightarrow z+1 = C_1(y+1) \Rightarrow z = C_1y + C_1 - 1 \Leftrightarrow \frac{dy}{C_1y + C_1 - 1} = dx$ (*)

• $C_1 = 0 \Rightarrow (*)$ *cho* $y = C - x$

• $C_1 \neq 0 \Rightarrow (*)$ *cho* $\frac{1}{C_1} \ln |C_1y + C_1 - 1| = x + C_2$

Ngoài ra $y = C$ *là nghiệm.*

Tóm lại nghiệm tổng quát: $y = C, y = C - x; \frac{1}{C_1} \ln |C_1y + C_1 - 1| = x + C_2$

7) Giải phương trình: $y' = y^2 - \frac{2}{x^2}$

HD giải: *Biến đổi (3) về dạng:* $x^2y' = (xy)^2 - 2$ (*)

Đặt $z = xy \Rightarrow z' = y + xy'$ *thay vào (*) suy ra:*

$$xz' = z^2 + z - 2 \Leftrightarrow \frac{dz}{z^2 + z - 2} = \frac{dx}{x} \Leftrightarrow \sqrt[3]{\frac{z-1}{z+x}} = Cx$$

Vậy TPTQ: $\frac{xy-1}{xy+2} = Cx^3$.

8) Giải phương trình: $yy'' + y'^2 = 1$

HD giải: *Đặt* $y' = z(y) \Rightarrow y'' = z \cdot \frac{dz}{dy}$

Biến đổi phương trình về: $\frac{z}{1-z^2} dz = \frac{dy}{y} \Leftrightarrow z^2 = 1 + \frac{C_1}{y^2}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{1 + \frac{C_1}{y^2}} \Leftrightarrow \pm \int \frac{dy}{\sqrt{1 + \frac{C_1}{y^2}}} = dx \Rightarrow y^2 + C_1 = (x + C_2)^2$

Nghiệm tổng quát: $y^2 + C_1 = (x + C_2)^2$

9) Giải phương trình: $2x(1+x)y' - (3x+4)y + 2x\sqrt{1+x} = 0$

HD giải: $y' - \frac{3x+4}{2x(x+1)} \cdot y = -\frac{1}{\sqrt{x+1}}; x \neq 0, x \neq -1$

Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất:

$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{3x+4}{2x(x+1)} dx = \int (\frac{2}{x} - \frac{1}{2(x+1)}) dx \Leftrightarrow y = \frac{Cx^2}{\sqrt{x+1}}$

Biến thiên hằng số: $C' = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow C = -\frac{1}{x} + \varepsilon$.

Vậy nghiệm tổng quát: $y = \frac{x^2}{\sqrt{x+1}} \left(\frac{1}{x} + \varepsilon \right)$

10) Giải phương trình: $y'' = e^{2y}$ thoả $\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$

HD giải: Đặt $z = y' \rightarrow y'' = z \cdot \frac{dz}{dy}$ phương trình trở thành $z \cdot \frac{dz}{dy} = e^{2y} \Leftrightarrow \frac{z^2}{2} = \frac{e^{2y}}{2} + \varepsilon$
 $y'(0) = y(0) = 0 \Rightarrow \varepsilon = -\frac{1}{2}$. Vậy $z^2 = e^{2y} - 1$. Từ đó:

$$z = \frac{dy}{dx} = \sqrt{e^{2y} - 1} \Rightarrow \int \frac{dy}{\sqrt{e^{2y} - 1}} = x + \varepsilon. \text{ đổi biến } t = \sqrt{e^{2y} - 1}$$

$$\operatorname{arctg} \sqrt{e^{2y} - 1} = x + \varepsilon$$

$y(0) = 0 \Rightarrow \varepsilon = 0$. Vậy nghiệm riêng thoả điều kiện đề bài: $y = \frac{1}{2} \ln(tg^2 x + 1)$.

11) Tìm nghiệm riêng của phương trình: $xy' + 2y = xyy'$ thoả mãn điều kiện đầu $y(-1) = 1$.

HD giải: Viết phương trình lại: $x(1-y)y' = -2y$; do $y(-1) = 1$ nên $y \neq 0$. Đưa về phương trình tách biến: $\frac{1-y}{y} dy = -2 \frac{dx}{x}$

tích phân tổng quát: $x^2 y e^{-y} = C$. Thay điều kiện vào ta được $C = \frac{1}{e}$. Vậy tích phân riêng cần tìm là: $x^2 y e^{1-y} = 1$.

12) Bằng cách đặt $y = ux$, hãy giải phương trình: $xdy - ydx - \sqrt{x^2 - y^2} dx = 0$. ($x > 0$)

HD giải: Đặt $y = ux$; $du = udx + xdu$ thay vào phương trình và giản ước x : $xdu - \sqrt{1-u^2} dx = 0$. Rõ ràng $u = \pm 1$ là nghiệm. khi $u \neq \pm 1$ đưa phương trình về tách biến: $\frac{du}{1-u^2} = \frac{dx}{x}$. TPTQ: $\arcsin u - \ln x = C$ (do $x > 0$).

Vậy NTQ của phương trình: $y = \pm x$; $\arcsin \frac{y}{x} = \ln x + C$.

13) Tìm nghiệm riêng của phương trình: $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$ thoả mãn điều kiện đầu $y(1) = 0$.

HD giải:

$$xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y \iff y' = \sqrt{1 - \frac{y^2}{x^2}} + \frac{y}{x}$$

đặt $u = \frac{y}{x}$ hay $y = ux$ suy ra $y' = xu' + u$

phương trình thành: $xu' = \sqrt{1-u^2} \iff \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{dx}{x}$

$$\iff \arcsin u = \ln Cx$$

thoả mãn điều kiện đầu $y(1) = 0$ khi $C = 1$. Vậy nghiệm $y = \pm x$.

14) Tìm nghiệm riêng của phương trình: $y' \sin x = y \ln y$
thoả mãn điều kiện đầu $y(\frac{\pi}{2}) = e$.

HD giải:

$$y' \sin x = y \ln y \iff \frac{dy}{y \ln y} = \frac{dx}{\sin x}$$

$$\iff \ln y = C \tan \frac{x}{2} \iff y = e^{C \tan \frac{x}{2}}$$

thoả mãn điều kiện đầu $y(\frac{\pi}{2}) = e$ khi $C = 1$. Vậy $y = e^{\tan \frac{x}{2}}$.

15) Tìm nghiệm riêng của phương trình: $(x + y + 1)dx + (2x + 2y - 1)dy = 0$
thoả mãn điều kiện đầu $y(0) = 1$.

HD giải: Đặt $x + y = z \implies dy = dz - dx$

phương trình thành: $(2 - z)dx + (2z - 1)dz = 0$; giải ra $x - 2z - 3 \ln |z - 2| = C$. Vậy

$x + 2y + 3 \ln |x + y - 2| = C$
thoả mãn điều kiện đầu $y(0) = 1$ khi $C = 2$.

16) Bằng cách đặt $y = \frac{1}{z}$ rồi đặt $z = ux$, hãy giải
phương trình: $(x^2 y^2 - 1)dy + 2xy^3 dx = 0$

HD giải: Đặt $y = \frac{1}{z}$ được: $(z^2 - x^2)dz + 2zx dx = 0$; rồi đặt $z = ux$, được
 $(u^2 - 1)(u dx + x du) + 2u dx = 0$

$$\iff \frac{dx}{x} + \frac{u^2 - 1}{u^3 + u} du = 0$$

$$\iff \ln |x| + \ln \frac{u^2 + 1}{|u|} = \ln C \iff \frac{x(u^2 + 1)}{u} = C$$

thay $u = \frac{1}{xy}$ được nghiệm $1 + x^2 y^2 = Cy$.

17) Tìm nghiệm tổng quát của phương trình sau: $y' - xy = x + x^3$

HD giải:

Đây là phương trình tuyến tính cấp 1 và có nghiệm tổng quát là

$$y = Ce^{\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{x^2}{2} + 1$$

18) Tìm nghiệm tổng quát của các phương trình sau: $y' - y = y^2$.

HD giải: Đây là phương trình tách biến và có nghiệm tổng quát là

$$\ln \left| \frac{y}{y+1} \right| = x + C.$$

19) Tìm nghiệm của các phương trình sau: $y' + \frac{y}{x} = e^x$

HD giải:

Đây là phương trình tuyến tính cấp 1 và có nghiệm tổng quát là $y = \frac{C}{x} + e^x - \frac{e^x}{x}$.

20) Tìm nghiệm của các phương trình sau: $y' - y = y^3$.

HD giải: Đây là phương trình tách biến và có nghiệm tổng quát là

$$C + x = \ln |y| - \arctg y.$$

21) Giải phương trình: $y' = \frac{y}{x} + \sin \frac{y}{x}$, với $y(1) = \frac{\pi}{2}$

HD giải: $y = zx \Rightarrow y' = z'x + z$, phương trình trở thành:

$$z'x = \sin x \Leftrightarrow \frac{dz}{\sin z} = \frac{dx}{x} \Leftrightarrow \ln \left| \tg \frac{z}{2} \right| = \ln |x| + \ln C \Leftrightarrow \tg \frac{z}{2} = Cx$$

Vậy nghiệm tổng quát: $\tg \frac{y}{2x} = Cx$; $y(1) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow C = 1$.

Vậy: $\tg \frac{y}{2x} = x$.

22) Giải phương trình: $(x - y \cos \frac{y}{x})dx + x \cos \frac{y}{x}dy = 0$

HD giải: Đặt $\frac{y}{x} = z \Rightarrow y' = z'x + z$ phương trình được đưa về dạng:

$$x \cos z \cdot z' + 1 = 0 \Leftrightarrow \int \cos z dz = -\frac{dx}{x} + C \Leftrightarrow \sin z = -\ln |x| + C$$

Vậy TPTQ: $\sin \frac{y}{x} = -\ln |x| + C$

23) Giải phương trình: $(y'^2 - 1)x^2y^2 + y'(x^4 - y^4) = 0$

HD giải: Là phương trình đẳng cấp nhưng giải khá phức tạp.

Xem phương trình bậc hai đối với y' : $\Delta = (x^4 + y^4)^2 \Rightarrow y'_1 = \frac{y^2}{x^2}; y'_2 = -\frac{x^2}{y^2}$.

Từ đó có hai họ nghiệm tổng quát: $y = \frac{x}{C_1x + 1}; x^3 + y^3 = C_2$

24) Giải phương trình: $y^2 + x^2y' = xy y'$

HD giải: Viết phương trình lại $y' = \frac{\frac{y^2}{x^2}}{\frac{y}{x} - 1}$ đây là phương trình thuần nhất, giải ra được nghiệm tổng quát: $y^2 = Cxe^{\frac{y}{x}}$

25) Tìm nghiệm riêng của phương trình: $(x + y - 2)dx + (x - y + 4)dy = 0$ thoả mãn điều kiện đầu $y(1) = 0$.

HD giải: Đặt $\begin{cases} x = u - 1 \\ y = v + 3. \end{cases}$ thay vào phương trình được:

$(u + v)du + (u - v)dv = 0$, đây là phương trình thuần nhất có tích phân tổng quát là: $u^2 + 2uv - v^2 = C$.

Vậy tích phân tổng quát của phương trình ban đầu là: $x^2 + 2xy - y^2 - 4x + 8y = C$

26) Giải phương trình $(x + y - 2)dx + (x - y + 4)dy = 0$.

HD giải: Đặt $\begin{cases} x = X - 1 \\ y = Y + 3 \end{cases}$, phương trình thành:

$$(X + Y)dX + (X - Y)dY = 0$$

đặt $Y = uX$ đưa phương trình về $\frac{dX}{X} + \frac{1 - u}{1 + 2u - u^2}du = 0$.

Giải ra $X^2(1 + 2u - u^2) = C$ hay $x^2 + 2xy - y^2 - 4x + 8y = C$.

27) Tìm tích phân tổng quát của phương trình sau: b) $y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$.

HD giải: Đây là phương trình đẳng cấp, ta đặt $z = \frac{y}{x}$. Khi đó phương trình trên trở thành $xz' = \frac{z(1 + z^2)}{1 - z^2}$. Hay $(\frac{1}{z} - \frac{2z}{1 + z^2})dz = \frac{dx}{x}$. Suy ra nghiệm của phương trình này là $\frac{z}{1 + z^2} = Cx, C \neq 0$.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x^2 + y^2 = C_1y, C_1 \neq 0$.

28) Tìm nghiệm tổng quát của các phương trình sau: $y' = \frac{2x + y - 1}{4x + 2y + 5}$.

HD giải: Đặt $u = 2x + y$ phương trình đưa về dạng

$$\frac{du}{dx} = \frac{5u + 9}{2u + 5}.$$

Giải phương trình này ta được nghiệm $10u + 7 \ln |5u + 9| = 25x + C$.
 Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $10y + 7 \ln |10x + 5y = 9| - 5x = C$.

29) Tìm tích phân tổng quát của các phương trình sau:
 $(x - y + 4)dy + (y + x - 2)dx = 0$

HD giải: Đây là phương trình đưa về dạng đẳng cấp được bằng cách đặt $x = u + 1$, $y = v - 3$, ta được $\frac{dv}{du} = \frac{u+v}{-u+v}$. Giải phương trình ta có nghiệm của phương trình là $v^2 - 2uv - u^2 = C$.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $y^2 - x^2 - 2xy - 8y + 4x = C_1$.

30) a) Tìm miền mà trong đó nghiệm của bài toán Cauchy của phương trình sau đây tồn tại và duy nhất $y' = \sqrt{x - y}$.
 b) Tìm tích phân tổng quát của các phương trình sau: $(x^2 - y^2)dy - 2xydx = 0$.

HD giải:

a) Bài toán Cauchy có duy nhất nghiệm trong miền $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x - y \geq \delta\}$ với $\delta > 0$ tùy ý.

b) Đưa phương trình về dạng $\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{x^2 - y^2}$. Đây là phương trình đẳng cấp, ta đặt $z = \frac{y}{x}$. Khi đó phương trình trên trở thành

$$xz' = \frac{z(1 + z^2)}{1 - z^2}.$$

$$\text{Hay } \left(\frac{1}{z} - \frac{2z}{1 + z^2}\right)dz = \frac{dx}{x}.$$

Suy ra nghiệm của phương trình này là $\frac{z}{1 + z^2} = Cx$, $C \neq 0$.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x^2 + y^2 = C_1 y$, $C_1 \neq 0$.

31) a) Chứng minh rằng hệ các vector $\{e^{2x}, xe^{2x}, x^2\}$ là hệ độc lập tuyến tính.
 b) Tìm tích phân tổng quát của phương trình sau: $(x - y)dy - (x + y)dx = 0$;

HD giải:

a) Dùng định nghĩa kiểm tra hệ độc lập tuyến tính.

b) Đưa phương trình về dạng $y' = \frac{x+y}{x-y}$. Đây là phương trình đẳng cấp, ta đặt $z = \frac{y}{x}$. Khi đó phương trình trên trở thành

$$xz' = \frac{1 + z^2}{1 - z}.$$

Giải phương trình này ta được

$$\sqrt{x^2 + y^2} = C e^{\arctg \frac{y}{x}}.$$

32) a) Chứng minh rằng hệ các vector $\{\cos^2 2x, \sin^2 2x, 2\}$ là hệ phụ thuộc tuyến tính. Tính định thức Wronski của chúng.
 b) Tìm tích phân tổng quát của phương trình sau: $(x - 2y + 1)dy - (x + y)dx = 0$.

HD giải:

a) Hệ này phụ thuộc tuyến tính vì $2\cos^2 2x + 2\sin^2 2x - 2 = 0$.

b) Phương trình này có thể đưa về dạng đẳng cấp, ta được

$$y' = \frac{x+y}{x-2y+1}.$$

Đặt $u = x - \frac{1}{3}$, $v = y + \frac{1}{3}$, khi đó phương trình trên trở thành

$$v' = \frac{u+v}{u-2v}.$$

Giải phương trình này ta được $\sqrt{u^2 + 2v^2} = Ce^{\frac{1}{\sqrt{2}}\arctg(\sqrt{2}\frac{u}{v})}$.

Hay $\sqrt{(3x-1)^2 + 2(3y+1)^2} = C_1 e^{\frac{1}{\sqrt{2}}\arctg(\sqrt{2}\frac{3x-1}{3y+1})}$.

33) Giải phương trình: $y^2 + x^2 y' = xyy'$

HD giải: Phương trình thuần nhất: đặt $y = zx \rightarrow y' = z'x + z$

$$\begin{aligned} \text{Phương trình trở thành } \frac{z-1}{z} dz &= \frac{dx}{x} \rightarrow z - \ln|z| = \ln|x| + C \\ \frac{y}{x} - \ln\left|\frac{y}{x}\right| &= \ln|x| + C \end{aligned}$$

34) Giải phương trình $y^2 + x^2 y' = xyy'$.

HD giải: Viết phương trình lại $y' = \frac{\frac{y^2}{x^2}}{\frac{y}{x} - 1}$ đây là phương trình thuần nhất, giải ra được nghiệm tổng quát: $y^2 = Cxe^{\frac{y}{x}}$

35) Giải phương trình: $y'' \cos y + (y')^2 \sin y = y'$

HD giải: $y = C$: hằng là một nghiệm.

$y \neq C$ (hằng). Đặt $y' = p \Rightarrow y'' = p \frac{dp}{dy}$ (hàm theo y)

thay vào (2): $\frac{dp}{dy} \cos y + p \sin y = 1$: phương trình tuyến tính.

Phương trình thuần nhất có nghiệm tổng quát: $p = C \cos y$.

biến thiên hằng số được $C = tgy + C_1$.

từ đó $p = \frac{dy}{dx} = \sin y + C_1 \cos y \Leftrightarrow \frac{dy}{\sin y + C_1 \cos y} = dx$

$$\text{tích phân đi đến: } \frac{1}{\sqrt{C_1^2 + 1}} \ln \left| \frac{tg \frac{y}{2} + \sqrt{1 + \frac{1}{C_1^2}} - \frac{1}{C_1}}{-tg \frac{y}{2} + \sqrt{1 + \frac{1}{C_1^2}} + \frac{1}{C_1}} \right| = x + C_2$$

36) Giải phương trình: $y' + \frac{1}{2x - y^2} = 0$

HD giải: Coi $x = x(y)$ là hàm của y ta có: $y' = \frac{1}{x'}$ thay vào phương trình:

$$\frac{1}{x'} + \frac{1}{2x - y^2} = 0 \Leftrightarrow x' + 2x = y^2 : \text{phương trình tuyến tính.}$$

Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất: $x = Ce^{-2y}$

Biến thiên hằng số: $C'(y) = y^2 e^{2y} \Rightarrow C(y) = \frac{1}{2} y^2 e^{2y} - \frac{1}{2} y e^{2y} + \frac{1}{4} e^{2y} + C$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình: $x = Ce^{-2y} + \frac{1}{2} y^2 - \frac{1}{2} y + \frac{1}{4}$

37) Giải phương trình: $xy'' = y' + x^2$

HD giải: Đặt $y' = p$, (1) trở thành: $xp' - p = x^2$ tuyến tính

Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất: $p = Cx$

Biến thiên hằng số $\rightarrow C(x) = x + C_1$

Suy ra: $\frac{dy}{dx} = x(x + C_1) \rightarrow y = \frac{x^3}{3} + C_1 \cdot \frac{x^2}{2} + C_2$

38) Giải phương trình: $y'^2 + yy'' = yy'$

HD giải: Đặt $p = y' (p \neq 0)$, phương trình tương đương với: $p^2 + yp \frac{dp}{dy} = yp$

$\Leftrightarrow p + y \frac{dp}{dy} = y$, xét $y \neq 0$ đưa phương trình về: $\frac{dp}{dy} + \frac{p}{y} = 1$ (tuyến tính)

NTQ của phương trình thuần nhất: $p = \frac{C}{y}$, biến thiên hằng số

$$\Rightarrow C(y) = \frac{y^2}{2} + C_1$$

Như vậy: $p = \frac{y^2 + 2C_1}{2y} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y^2 + 2C_1}{2y} \Rightarrow \frac{2ydy}{y^2 + 2C_1} = dx$

$\Rightarrow y^2 = A_1 e^x + A_2$.

Chú ý: Vế trái $(yy')' = yy' \Leftrightarrow yy' = C_1 e^x \Leftrightarrow ydy = C_1 e^x dx \Leftrightarrow y^2 = 2C_1 e^x + C_2$

39) Giải phương trình: $ye^y = y'(y^3 + 2xe^y)$ với $y(0) = -1$

HD giải: $y'_x = \frac{1}{x'y}$ biến đổi phương trình về: $x' - \frac{2}{y}x = y^2 e^{-y}$

Nghiệm tổng quát: $x = y^2(C - e^{-y})$

$y(0) = -1 \Rightarrow C = e$.

Vậy $x = y^2(e - e^{-y})$

40) Giải phương trình: $xy'' = y' + x$

HD giải: Đặt $y' = p$; phương trình trở thành: $p' - \frac{1}{x}p = 1$

Nghiệm tổng quát: $p = Cx$ biến thiên hằng số: $C = \ln|x| + C_1$

$$\Rightarrow p = \frac{dy}{dx} = (\ln|x| + C_1)x \Rightarrow y = \int (\ln|x| + C_1)x dx + C_2$$

$$= C_1 x^2 + \frac{x^2}{2} \ln|x| - \frac{x^2}{4} + C_2$$

41) Giải phương trình: $y' + xy = x^3$

HD giải: Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất $y = Ce^{-\frac{x^2}{2}}$
 biến thiên hằng số: $C(x) = (x^2 - 2)e^{-\frac{x^2}{2}} + \varepsilon$
 Vậy nghiệm tổng quát: $y = \varepsilon e^{-\frac{x^2}{2}} + x^2 - 2$.

42) Giải phương trình: $(x^2 - y)dx + xdy = 0$

HD giải: Phương trình viết lại: $xy' - y = -x^2$, phương trình thuần nhất: $xy' - y = 0$
 có nghiệm tổng quát: $y = Cx$ biến thiên hằng số suy ra $C = -x + \varepsilon$
 Vậy nghiệm tổng quát: $y = -x^2 + \varepsilon x$

43) Giải phương trình: $y' - \frac{2}{x}y = \frac{3}{x^2}$ với $y(1) = 1$

HD giải: Phương trình tuyến tính: $y = Cx^2$; $C' = \frac{3}{x^4} \Rightarrow C = -\frac{1}{x^3} + \varepsilon$
 $y = \varepsilon x^2 - \frac{1}{x}$; $y(1) = 1 \Rightarrow \varepsilon = 2$
 Vậy nghiệm tổng quát: $y = 2x^2 - \frac{1}{x}$

44) Giải phương trình: $(x + 1)(y' + y^2) = -y$

HD giải: Xét $y \neq 0$, biến đổi phương trình về dạng $y' + \frac{1}{x+1} \cdot y = -y^2$
 Đặt $\frac{1}{y} = z \Rightarrow y' = -\frac{z'}{z^2} = -y^2 z'$ đưa phương trình về $z' - \frac{1}{x+1} \cdot z = 1$.
 Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất: $z = C_1(x+1)$ biến thiên hằng số
 $C_1 = \ln|x+1| + \varepsilon$.
 Vậy nghiệm: $z = (x+1)(\ln|x+1| + \varepsilon)$
 ngoài ra $y = 0$ cũng là nghiệm.
 Vậy nghiệm tổng quát: $y = \frac{1}{(x+1)(\ln|x+1| + \varepsilon)}$ và $y = 0$ nghiệm kì dị.

45) Giải phương trình: $2xy' + y = \frac{1}{1-x}$

HD giải: Đưa phương trình về dạng $y' + \frac{1}{2x}y = \frac{1}{2x(1-x)}$ phương trình tuyến tính cấp 1

Nghiệm tổng quát: $y = \frac{C}{\sqrt{x}}$, biến thiên hằng số:

$$C'(x) = \frac{\sqrt{x}}{2x(1-x)} \Rightarrow C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} \right| + \varepsilon$$

Vậy nghiệm tổng quát: $y = \frac{1}{\sqrt{x}} \left(\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} \right| + \varepsilon \right)$

46) Giải phương trình: $xy' - y = x^2 \sin x$

HD giải: $y' - \frac{y}{x} = x \sin x$, phương trình tuyến tính. NTQ: $y = Cx$ biến thiên hằng số:

Nghiệm tổng quát: $y = (C - \cos x)x$

47) Giải phương trình: $y' \cos^2 x + y = \tan x$ thoả $y(0) = 0$

HD giải: Phương trình tuyến tính \rightarrow NTQ $y = Ce^{-\tan x}$; $\bar{y} = \tan x - 1$ (một nghiệm riêng)

\Rightarrow NTQ: $y = Ce^{-\tan x} + \tan x - 1$

$y(0) = 0 \Rightarrow C = 1$. Vậy nghiệm riêng cần tìm: $y = \tan x - 1 + e^{-\tan x}$.

48) Giải phương trình: $y' \sqrt{1-x^2} + y = \arcsin x$ thoả $y(0) = 0$

HD giải: Nghiệm tổng quát của phương trình tuyến tính thuần nhất: $y = Ce^{-\arcsin x}$
 Để thấy nghiệm riêng: $\bar{y} = \arcsin x - 1$

\Rightarrow NTQ: $y = Ce^{-\arcsin x} + \arcsin x - 1$

$y(0) = 0 \Rightarrow C = 1 \Rightarrow$ nghiệm riêng cần tìm: $y = e^{-\arcsin x} + \arcsin x - 1$

49) Tìm nghiệm riêng của phương trình: $y' = \frac{1}{2x - y^2}$
 thoả mãn điều kiện đầu $y(1) = 0$.

HD giải: Xem x là ẩn hàm, thay $y' = \frac{1}{x'}$, phương trình thành

$$\frac{1}{x'} = \frac{1}{2x - y^2} \iff x' - 2x = -y^2$$

Đây là phương trình tuyến tính cấp một, nghiệm tổng quát của phương trình tuyến tính thuần nhất tương ứng là $x = Ce^{-2y}$. Biến thiên hằng số được NTQ:

$$x = Ce^{-2y} + \frac{y^2}{2} - \frac{y}{2} + \frac{1}{4}$$

thoả mãn điều kiện đầu $y(1) = 0$ khi $C = \frac{3}{4}$.

Vậy nghiệm thoả mãn điều kiện đầu: $x = \frac{3}{4}e^{-2y} + \frac{y^2}{2} - \frac{y}{2} + \frac{1}{4}$.

50) Giải phương trình sau đây, biết rằng sau khi đặt $y = \frac{z}{x^2}$, ta nhận được một phương trình vi phân cấp hai có một nghiệm riêng $y^* = \frac{1}{2}e^x$:

$$x^2y'' + 4xy' + (x^2 + 2)y = e^x.$$

HD giải: Đặt $y = \frac{z}{x^2} \Rightarrow y' = \frac{z'x - 2z}{x^3}; y'' = \frac{z''x^2 - 4z'x + 6z}{x^4}$. Phương trình thành: $z'' + z = e^x$, có một nghiệm riêng là $y^* = \frac{e^x}{2}$, NTQ của phương trình thuần nhất: $z = C_1 \cos x + C_2 \sin x$. Vậy NTQ của phương trình ban đầu là:

$$y = C_1 \frac{\cos x}{x^2} + C_2 \frac{\sin x}{x^2} + \frac{e^x}{2x^2}$$

51) Tìm nghiệm riêng của phương trình: $ye^y = y'(y^3 + 2xe^y)$
thỏa mãn điều kiện đầu $y(0) = -1$.

HD giải: Xem x là ẩn hàm, thay $y' = \frac{1}{x'}$, phương trình thành $x' - \frac{2}{y}x = y^2e^{-y}$. NTQ của phương trình tuyến tính thuần nhất tương ứng là $x = \frac{C}{y}$; biến thiên hằng số được $C(y) = -e^{-y} + C$. Như vậy NTQ là $x = \frac{C}{y} - \frac{1}{ye^y}$. Thay điều kiện đầu xác định được $C = \frac{1}{e}$. Từ đó KL.

52) Tìm nghiệm của phương trình $y' - y = \cos x - \sin x$.
thỏa điều kiện y bị chặn khi $x \rightarrow \infty$

HD giải: Giải phương trình tuyến tính ra $y = Ce^x + \sin x$
thỏa điều kiện y bị chặn khi $x \rightarrow \infty$ khi $C = 0$

53) Tìm nghiệm riêng của phương trình: $y' + \sin y + x \cos y + x = 0$
thỏa mãn điều kiện đầu $y(0) = \frac{\pi}{2}$.

HD giải:

$$y' + \sin y + x \cos y + x = 0 \iff y' + 2 \sin \frac{y}{2} \cos \frac{y}{2} + x \cdot 2 \cos^2 \frac{y}{2} = 0$$

$$\iff \frac{y'}{2 \cos^2 \frac{y}{2}} + \tan \frac{y}{2} + x = 0$$

đặt $z = \tan \frac{y}{2} \Rightarrow z' = \frac{y'}{2 \cos^2 \frac{y}{2}}$, phương trình thành phương trình tuyến tính

$z' + z = -x$. Giải ra: $z = 1 - x + Ce^{-x}$
thỏa mãn điều kiện đầu $y(0) = \frac{\pi}{2}$ khi $C = 0$. Vậy nghiệm riêng $y = 2 \arctan(1 - x)$.

54) Tìm nghiệm tổng quát của các phương trình sau: $y' - x \tan y = \frac{x}{\cos y}$

HD giải: Đặt $z = \sin y$, khi đó phương trình đã cho trở thành $z' - xz = x$. Đây là phương trình tuyến tính cấp 1 và có nghiệm tổng quát là $z = Ce^{\frac{x^2}{2}} - 1$.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $\sin y = z = Ce^{\frac{x^2}{2}} - 1$

55) Tìm nghiệm tổng quát của các phương trình sau: $y' - xy = x$

HD giải:

Đây là phương trình tuyến tính cấp 1 và có nghiệm tổng quát là $y = Ce^{\frac{1}{2}x^2} - 1$.

56) Tìm nghiệm tổng quát của các phương trình sau: $y' + \frac{y}{x} = x\sqrt{y}$.

HD giải: Đây là phương trình Bernoulli và có nghiệm tổng quát là

$$\sqrt{y} = \frac{C}{\sqrt{x}} + \frac{1}{5}x^2.$$

57) Tìm nghiệm của các phương trình sau: $y' - \frac{y}{x} = x^3$

HD giải:

Đây là phương trình tuyến tính cấp 1 và có nghiệm tổng quát là

$$y = Cx + \frac{1}{3}x^4.$$

58) Tìm nghiệm của các phương trình sau: $y' - y = y^2$.

HD giải:

Đây là phương trình Bernoulli và có nghiệm tổng quát là

$$y^2 = \frac{1}{Ce^{-2x} - 1}.$$

59) Tìm nghiệm của các phương trình sau: $y' + \frac{y}{x} = \sin x$

HD giải:

Đây là phương trình tuyến tính cấp 1 và có nghiệm tổng quát là

$$y = \frac{C}{x} + \frac{\sin x}{x} - \cos x.$$

60) Tìm nghiệm của các phương trình sau: $y' - y = x\sqrt{y}$.

HD giải:

Đây là phương trình Bernoulli và có nghiệm tổng quát là

$$\sqrt{y} = Ce^{\frac{1}{2}x} - x - 2.$$

61) Tìm nghiệm tổng quát của các phương trình sau: $y' + 2xy = xe^{-x^2}$

HD giải:

Đây là phương trình vi phân tuyến tính cấp 1.

Nghiệm tổng quát là $y = (C + \frac{x^2}{2})e^{-x^2}$.

62) Tìm nghiệm tổng quát của các phương trình sau: $y' - 4\frac{y}{x} = x\sqrt{y}$.

HD giải: Đây là phương trình Bernoulli và có nghiệm là

$$\sqrt{y} = \frac{1}{2}\ln x + Cx^2.$$

63) a) Tìm miền mà trong đó nghiệm của bài toán Cauchy của phương trình sau đây tồn tại và duy nhất $y' = y + 3x$.

b) Tìm nghiệm của bài toán Cauchy sau đây $\begin{cases} y'' - \frac{1}{x}y' = x \\ y(x=1) = 1 \text{ và } y'(x=1) = 2. \end{cases}$

HD giải:

a) Đây là phương trình tuyến tính cấp 1 thỏa định lý điều kiện tồn tại duy nhất nghiệm trên \mathbb{R}^2 .

b) Giải phương trình $y'' - \frac{y'}{x} = x$, ta được nghiệm tổng quát

$$y = C_1 + C_2x + \frac{x^2}{2}.$$

Vậy nghiệm của bài toán Cauchy là

$$y = -\frac{1}{2} + x + \frac{x^2}{2}.$$

64) Tìm nghiệm của phương trình sau: $y' + y \operatorname{tg} x = \cos x$

HD giải:

Đây là phương trình vi phân tuyến tính cấp 1.

Nghiệm tổng quát là:

$$y = (C + x) \cos x.$$

65) Tìm nghiệm của phương trình sau: $y' + \frac{y}{x} = x(\frac{e^x}{e^x + 1})y^2$.

HD giải:

Đây là phương trình vi phân Bernoulli và có nghiệm tổng quát của phương trình là

$$y = \frac{1}{Cx - x \ln(e^x + 1)}.$$

66) Giải phương trình: $(x+1)y'' + x(y')^2 = y'$

HD giải: Đặt $y' = p$, phương trình trở thành phương trình Bernoulli (với $x \neq -1$)

$$p' - \frac{1}{x+1}p = -\frac{x}{x+1}p^2 \quad (*)$$

Đặt $z = p^{-1} \neq 0$, đưa (*) về phương trình tuyến tính cấp một:

$$z' + \frac{1}{1+x}z = \frac{x}{x+1}$$

Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất: $z = \frac{C}{x+1}$

Biến thiên hằng số cuối cùng được: $z = \frac{x^2 + C_1}{2(x+1)} \Rightarrow y' = \frac{1}{z} = \frac{2(x+1)}{x^2 + C_1}$

Suy ra nghiệm tổng quát của phương trình:

$$\begin{cases} \ln|x^2 + C_1| + \frac{2}{\sqrt{C_1}} \arctg \frac{x}{\sqrt{C_1}} + C_2 & \text{nếu } C_1 > 0 \\ \ln|x^2 + C_1| + \frac{1}{\sqrt{-C_1}} \ln \left| \frac{x - \sqrt{-C_1}}{x + \sqrt{-C_1}} \right| + C_2 & \text{nếu } C_1 < 0 \end{cases}$$

Chú ý $y = C$ là NKD

67) Giải phương trình: $x^2y' = y(x+y)$

HD giải: $x^2y' = y(x+y) \Leftrightarrow y' - \frac{1}{y} = \frac{1}{x^2}y^2$: phương trình Bernoulli

Đặt $z = y^{-1}$ ($y \neq 0$): $-z' - \frac{1}{x}z = \frac{1}{x^2}$.

NTQ của phương trình thuần nhất: $z = Cx$

biến thiên hằng số C : $C(x) = \varepsilon - \frac{1}{2x^2}$. Vậy $z = x(\varepsilon - \frac{1}{2x^2})$

Vậy nghiệm tổng quát là: $y = \frac{2x}{\varepsilon x^2 - 1}$

68) Giải phương trình: $yy'' - (y')^2 = y^3$

$$\text{thoả } \begin{cases} y(0) = -\frac{1}{2} \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

HD giải: Đặt $y' = p(y)$; $y'' = p.p'_y$ thay vào phương trình

$$py \frac{dp}{dy} - p^2 = y^3,$$

đặt tiếp: $p(y) = y.z(y)$ đưa phương trình về

$$\frac{dz}{dy} = \frac{1}{z} \Rightarrow z^2 = 2(y + C_1) \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = y\sqrt{|2y + C|}$$

Do điều kiện $y(0) = -\frac{1}{2}$; $y'(0) = 0 \Rightarrow C = 1$. Từ đó suy ra:

$$\frac{dy}{dx} = y\sqrt{|2y + 1|} \Rightarrow \ln \left| \frac{\sqrt{|2y + 1|} - 1}{\sqrt{|2y + 1|} + 1} \right| = x + C_2.$$

do $y(0) = -\frac{1}{2} \Rightarrow C_2 = 0$.

Vậy nghiệm riêng cần tìm thoả : $\ln \left| \frac{\sqrt{|2y + 1|} - 1}{\sqrt{|2y + 1|} + 1} \right| = x$.

69) Giải phương trình: $ydx + 2xdy = \frac{2y\sqrt{x}}{\cos^2 y} dy$ thoả điều kiện $y(0) = \pi$

HD giải: Đưa phương trình về dạng $x' + \frac{2}{y}x = \frac{2}{\cos^2 y} . x^{\frac{1}{2}}$ (Bernoulli) (*)

Đặt $z = x^{\frac{1}{2}}$ ta có $z' = x' + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}x'$ thay vào (*)

$$z' + \frac{1}{y}z = \frac{1}{\cos^2 y}$$

Nghiệm tổng quát: $z = \frac{c}{y}$ biến thiên hằng số:

$$C' = \frac{y}{\cos^2 y} \Rightarrow C(y) = y \operatorname{tg} y + \ln |\cos y| + \varepsilon$$

Vậy $Z = \operatorname{tg} y + \frac{1}{y} \ln |\cos y| + \frac{\varepsilon}{y}$

Và TPTQ của phương trình: $\operatorname{tg} y + \frac{1}{y} \ln |\cos y| + \frac{\varepsilon}{y} = \sqrt{x}$

$y(0) = \pi \Rightarrow \varepsilon = 0$ vậy TPR : $\operatorname{tg} y + \frac{1}{y} \ln |\cos y| = \sqrt{x}$

70) Giải phương trình: $xydy = (y^2 + x)dx$

HD giải: Do $y = 0$ không phải là nghiệm, chia hai vế cho xy biến đổi phương trình về dạng: $y' - \frac{1}{x}y = y^{-1}$ Bernoulli; Đặt $z = y^2$ đưa phương trình về dạng:

$$z' - \frac{2}{x}z = 2 \rightarrow z = -2x + Cx^2$$

Vậy TPTQ: $y^2 = -2x + Cx^2$

71) Giải phương trình: $(y + \sqrt{xy})dx = xdy$

HD giải: Đưa phương trình về dạng $y' - \frac{1}{x}y = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot y^{\frac{1}{2}}$; $x \neq 0$

Đặt $z = y^{\frac{1}{2}}$: $z' - \frac{1}{2x}z = \frac{1}{\sqrt{x}}$ phương trình tuyến tính giải ra $z = \sqrt{x}(\ln x + C)$

Vậy nghiệm tổng quát: $y = x(\ln x + C)^2$

72) Giải phương trình: $xy' - 2x^2\sqrt{y} = 4y$

HD giải: Phương trình Bernoulli, đặt $z = y^{1-\alpha} = \sqrt{y} \Rightarrow z' = \frac{1}{2\sqrt{y}}$

phương trình trở thành: $z' - \frac{4}{x}z = 2x \rightarrow NTQ \ z = Cx^4 - x^2$

Vậy nghiệm tổng quát: $y = (Cx^2 - 1)^2x^4$.

73) Giải phương trình: $2x^2y' = y^2(2xy' - y)$

HD giải: Xem x là hàm theo biến y : $x'y^3 - 2xy^2 = -2x^2$ Bernoulli

Đặt $z = \frac{1}{x}$, phương trình trở thành: $z' + \frac{2z}{y} = \frac{2}{y^3} \rightarrow TPTQ: y^2 = x \ln Cy^2$, nghiệm kỳ dị $y = 0$.

74) Tìm nghiệm riêng của phương trình: $x^2y' = y(x + y)$
thoả mãn điều kiện đầu $y(-2) = -4$.

HD giải: Do $y(-2) = -4$ nên $y \neq 0$. Đưa phương trình về phương trình Bernoulli: $y' - 1y = \frac{y^2}{x^2}$. Tiếp tục đặt $z = y^{-1}$ đưa phương trình về PT tuyến tính $z' + \frac{1}{x}z = -\frac{1}{x^2}$. NTQ của phương trình thuần nhất tương ứng: $z = Cx$, biến thiên hằng số được $C(x) = Cx - \frac{1}{2x}$. Như vậy nghiệm của phương trình ban đầu là: $y = \frac{2x}{Cx^2 - 1}$. Điều kiện đầu cho $C = \frac{1}{2}$. Vậy nghiệm riêng cần tìm là $y = \frac{4x}{x^2 - 1}$

75) Giải phương trình: $y' - xy = -xy^3$

HD giải: Phương trình: $y' - xy = -xy^3$ là phương trình Bernoulli, giải ra được $y^2(1 + Ce^{-x}) = 1$

76) Giải phương trình: $xy' + y = y^2 \ln x$.

HD giải: Phương trình $xy' + y = y^2 \ln x$ là phương trình Bernoulli, giải ra được $y = \frac{1}{1 + Cx + \ln x}$.

77) Tìm nghiệm tổng quát của các phương trình sau: $y' - 4\frac{y}{x} = x\sqrt{y}$

HD giải: Đây là phương trình Bernoulli, bằng cách đặt $z = \sqrt{y}$ ta đưa phương trình về dạng $z' - \frac{2}{x}z = \frac{x}{2}$ và có nghiệm tổng quát là

$$z = x^2\left(\frac{1}{2} \ln |x| + C\right).$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là

$$y = x^4\left(\frac{1}{2} \ln |x| + C\right)^2.$$

78) Tìm nghiệm tổng quát của các phương trình sau: $y' + \frac{y}{x} = y^2 x \operatorname{tg} x$.

HD giải: Đây là phương trình Bernoulli và có nghiệm tổng quát là

$$y = \frac{1}{Cx + x \ln |\cos x|}.$$

79) Giải phương trình: $y^2 dx + (2xy + 3)dy = 0$

HD giải: $P(x, y) = y^2$, $Q(x, y) = 2xy + 3$; $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 2y$
 (1) $\Leftrightarrow d(xy^2 + 3y) = 0$. Vậy $xy^2 + 3y = C$

80) Giải phương trình: $e^x(2 + 2x - y^2)dx - ye^x dy = 0$

HD giải: $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = -2ye^x$ suy ra phương trình tương đương với: $d(e^x(2x - y^2)) = 0$.
 Vậy $e^x(2x - y^2) = C$.

81) Giải phương trình: $(y^2 + 1)^{\frac{3}{2}}dx + (y^2 + 3xy\sqrt{1 + y^2})dy = 0$

HD giải: $p = (y^2 + 1)^{\frac{3}{2}}$; $Q = y^2 + 3xy\sqrt{1 + y^2} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 3y\sqrt{1 + y^2}$ (*)
 Suy ra nghiệm tổng quát của (*) là:

$$\int_0^x P(x, 0)dx + \int_0^y Q(x, y)dy = C$$

$$\Leftrightarrow \frac{y^3}{3} + x(1 + y^2)^{\frac{3}{2}} = C$$

82) Giải phương trình: $(y \cos^2 x - \sin x)dy = y \cos x(y \sin x + 1)dx$

HD giải: $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = y \sin 2x + \cos x$

NTQ:

$$\int_{x_0=0}^x P(x, y_0)dx + \int_{y_0=0}^y Q(x, y)dy = C \Leftrightarrow y \sin x - \frac{y^2}{2} \cos^2 x = C$$

83) Giải phương trình: $(2x + 3x^2y)dx = (3y^2 - x^3)dy$

HD giải: Phương trình vi phân toàn phần: $x^2 + x^3y - y^3 = C$

84) Giải phương trình: $(\frac{x}{\sin y} + 2)dx - \frac{(x^2 + 1) \cos y}{2 \sin^2 y} dy = 0$

HD giải: $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{x \cos y}{\sin^2 y}$

TPTQ:

$$\int_0^x P(x, \frac{\pi}{2})dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^y Q(x, y)dy = C \Leftrightarrow \frac{x^2}{2} + 2x - \frac{(x^2 + 1)}{2}(\frac{1}{\sin y} - 1) = C$$

85) Giải phương trình: $(y + e^x \sin y)dx + (x + e^x \cos y)dy = 0$

HD giải: Phương trình vi phân toàn phần, nghiệm tổng quát: $xy + e^x \sin y = C$.

86) Giải phương trình: $(x + \sin y)dx + (x \cos y + \sin y)dy = 0$

HD giải: Phương trình vi phân toàn phần: NTQ $x^2 + 2(x \sin y - \cos y) = C$.

87) Giải phương trình: $3x^2(1 + \ln y)dx = (2y - \frac{x^3}{y})dy$

HD giải: Phương trình vi phân toàn phần: Nghiệm tổng quát: $x^3(1 + \ln y) - y^2 = C$

88) Tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân: $3x^2(1 + \ln y)dx = (2y - \frac{x^3}{y})dy$

HD giải: Đây là phương trình vi phân toàn phần có tích phân tổng quát là:

$$x^3(1 + \ln y) - y^2 = C$$

89) Hãy tìm nghiệm tổng quát của phương trình: $(x + \sin y)dx + (x \cos y + \sin y)dy = 0$

HD giải: PTVPTP có tích phân tổng quát: $x^2 + 2(x \sin y - \cos y) = C$

90) Hãy tìm nghiệm tổng quát của phương trình:

$$\left(\frac{1}{x} - \frac{y^2}{(x-y)^2}\right)dx + \left(\frac{x^2}{(x-y)^2} - \frac{1}{y}\right)dy = 0$$

HD giải: PTVPTP có tích phân tổng quát: $\ln \frac{x}{y} + \frac{xy}{x-y} = C$

91) Tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân:

$$(\sin xy + xy \cos xy)dx + x^2 \cos xy dy = 0$$

HD giải: Phương trình vi phân toàn phần có nghiệm tổng quát là $x \sin(xy) = C$.

92) Hãy tìm thừa số tích phân của phương trình: $(x + y^2)dx - 2xydy = 0$
suy ra nghiệm tổng quát của phương trình.

HD giải: Thừa số tích phân của phương trình là $\mu(x) = \frac{1}{x^2}$. Nhân hai vế của phương trình cho thừa số tích phân rồi giải ra $x = Ce^{\frac{y^2}{x}}$.

93) Giải phương trình: $2xy \ln y dx + (x^2 + y^2 \sqrt{y^2 + 1})dy = 0$

HD giải: Đây là phương trình vi phân toàn phần, thừa số tích phân: $\mu(y) = \frac{1}{y}$ nhân thừa số tích phân vào hai vế của phương trình rồi giải ra được: $x^2 \ln y + \frac{1}{3}(y^2 + 1)^{\frac{3}{2}} = 0$

94) Tìm nghiệm của phương trình $(x^3 + xy^2)dx + (x^2y + y^3)dy = 0$.
thỏa điều kiện $y(0) = 1$.

HD giải: Đây là phương trình vi phân toàn phần NTQ là:

$$x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = C$$

thỏa điều kiện $y(0) = 1$ khi $C = 1$.

95) Tìm tích phân tổng quát của các phương trình sau: a) $-2xydy + (y^2 + x^2)dx = 0$

HD giải: Ta tìm được thừa số tích phân $\mu(x) = \frac{1}{x^2}$. Đưa phương trình đã cho về dạng vi phân toàn phần. Khi đó nghiệm tổng quát là $x^2 - y^2 = Cx$.

- 96)** a) Chứng minh rằng hệ các vectơ $\{e^{2x}, e^{-x}, \cos x\}$ là hệ độc lập tuyến tính.
 Tính định thức Wronski của chúng.
 b) Tìm tích phân tổng quát của các phương trình sau:

$$\sqrt{x^2 - y} dy - 2x(1 + \sqrt{x^2 - y}) dx = 0.$$

HD giải:

- a) Dùng định nghĩa kiểm tra hệ độc lập tuyến tính.
 Định thức Wronski $W[y_1, y_2, y_3](x) = 3e^x(3 \cos x - \sin x)$.
 b) Đây là phương trình vi phân toàn phần. Tích phân tổng quát của phương trình là

$$x^2 + \frac{2}{3}(x^2 - y)^{\frac{3}{2}} = C$$

- 97)** Tìm tích phân tổng quát của các phương trình sau: $(\frac{x^2}{y} - y^2) dy - 2x dx = 0.$

HD giải: Ta tìm được thừa số tích phân $\mu(x) = \frac{1}{y}$. Đưa phương trình đã cho về dạng vi phân toàn phần. Khi đó nghiệm tổng quát là $2x^2 + y^3 = Cy$.

- 98)** a) Chứng minh rằng hệ các vectơ $\{e^x, e^{2x}, x^2\}$ là hệ độc lập tuyến tính.
 b) Tìm tích phân tổng quát của phương trình sau: $(x - y) dy + (x + y) dx = 0.$

HD giải:

- a) Kiểm tra hệ phương trình là độc lập tuyến tính.
 b) Đây là phương trình vi phân toàn phần nên ta có $d(xy - \frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2}) = 0$.
 Vậy tích phân tổng quát là $x^2 - y^2 + 2xy = C$.

- 99)** a) Chứng minh rằng hệ các vectơ $\{1, x, e^x\}$ là hệ độc lập tuyến tính.
 b) Tìm tích phân tổng quát của phương trình sau: $(x^2 - y) dx + x dy = 0$

HD giải:

- a) Dùng định nghĩa kiểm tra hệ độc lập tuyến tính.
 b) Tìm thừa số tích phân, ta được $\mu(x) = \frac{1}{x^2}$. Phương trình đã cho đưa được về dạng phương trình vi phân toàn phần

$$(1 - \frac{y}{x^2}) dx + \frac{1}{x} dy = 0.$$

Giải phương trình này ta được $y = Cx - x^2$.

- 100)** a) Chứng minh rằng hệ các vectơ $\{e^{2x}, e^x, x\}$ là hệ độc lập tuyến tính.
 b) Tìm tích phân tổng quát của phương trình sau: $(x - y) dx - (x + y) dy = 0.$

HD giải:

a) Kiểm tra hệ phương trình là độc lập tuyến tính.

b) Đây là phương trình vi phân toàn phần. Suy ra tích phân tổng quát có dạng:

$$x^2 + y^2 - 2xy = C.$$

BÀI TẬP PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN (tiếp theo)

101) Giải phương trình: $y'' + y' = x + e^{-x}$

HD giải: Phương trình đặc trưng $\lambda^2 + \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 0; \lambda_2 = -1$

Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất: $y = C_1 + C_2 e^{-x}$

Tìm nghiệm riêng dưới dạng $\bar{y} = y_1 + y_2$, trong đó y_1, y_2 là các nghiệm tương ứng của các phương trình: $y'' + y' = x$ và $y'' + y' = e^{-x}$

• Vì $\lambda_1 = 0$ là nghiệm của phương trình đặc trưng nên $y_1 = x(Ax + B)$

Bằng phương pháp hệ số bất định được: $y_1 = \frac{1}{2}x^2 - x$

• $\lambda_2 = -1$ là nghiệm của phương trình đặc trưng nên: $y_2 = Axe^{-x}$

Thay vào và dùng hệ số bất định suy ra: $y_2 = -xe^{-x}$

Cuối cùng NTQ: $y = C_1 + C_2 e^{-x} + \frac{1}{2}x^2 - x - xe^{-x}$

102) Giải phương trình: $2y'' + 5y' = 29x \sin x$

HD giải: Phương trình đặc trưng: $2\lambda^2 + 5\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = -\frac{5}{2}$

Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất $y = C_1 + C_2 e^{-\frac{5x}{2}}$

Vì $\pm i$ không phải là nghiệm của phương trình đặc trưng nên tìm nghiệm riêng dạng:

$\bar{y} = (Ax + B) \sin x + (Cx + D) \cos x$

Thay vào phương trình được: $A = -2; B = \frac{185}{29}; C = -5; D = -\frac{16}{29}$

103) Giải phương trình: $y'' - 2y' + 5y = x \sin 3x$

HD giải: Phương trình đặc trưng: $\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 1 - 2i; \lambda_2 = 1 + 2i$

NTQ của phương trình thuần nhất: $y = e^x(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$

Do $\pm 3i$ không phải là nghiệm của phương trình đặc trưng nên nghiệm riêng của (2) được tìm dưới dạng: $\bar{y} = (Ax + B) \cos 3x + (Cx + D) \sin 3x$

Thay vào (2) ta được: $A = \frac{3}{26}; B = \frac{57}{26}; C = -\frac{1}{13}; D = \frac{41}{13}$

104) Giải phương trình: $y'' - 2y' - 3y = xe^{4x} + x^2$

HD giải: Phương trình đặc trưng: $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = -1; \lambda_2 = 3$.

NTQ của phương trình thuần nhất: $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}$

Tìm nghiệm riêng dạng $\bar{y} = y_1 + y_2$ với y_1 là nghiệm của $y'' - 2y' - 3y = xe^{4x}$

$$y_1 = e^{4x}(Ax + B) = e^{4x}\left(\frac{x}{5} - \frac{6}{25}\right)$$

còn y_2 là nghiệm riêng của $y'' - 2y' - 3y = x^2$ có dạng:

$$y_2 = A_1 x^2 + B_1 x + C_1 = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{9}x - \frac{14}{27}.$$

Vậy nghiệm tổng quát: $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} + \frac{e^{4x}}{5}\left(x - \frac{6}{5}\right) - \frac{1}{3}\left(x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{14}{9}\right)$

105) Giải phương trình: $x^2 y'' - 2y = x^3 \cos x$
 biết một nghiệm của phương trình thuần nhất là $y_1 = x^2$

HD giải: Chia 2 vế cho x^2 ($x \neq 0$): $y'' - \frac{2}{x^2}y = x \cos x$.

Tìm nghiệm riêng thứ hai của phương trình thuần nhất dạng:

$$p(x) = 0; \quad q(x) = -\frac{2}{x^2}.$$

$$y_2 = y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x)dx} dx = x^2 \int \frac{dx}{x^4} = -\frac{1}{3x}$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là: $y = C_1 x^2 - C_2 \cdot \frac{1}{3x}$
 Coi C_1, C_2 là hàm của x , áp dụng phương pháp hằng số biến thiên:

$$\begin{cases} C_1' x^2 + C_2' \left(-\frac{1}{3x}\right) = 0 \\ C_1' 2x + C_2' \left(\frac{1}{3x^2}\right) = x \cos x \end{cases}$$

$$\text{Giải ra: } \begin{cases} C_1' = \frac{\cos x}{3} \Rightarrow C_1 = \frac{\sin x}{3} + K_1 \\ C_2' = x^3 \cos x \Rightarrow C_2 = x^3 \sin x + 3x^2 \cos x - 6x \sin x + 6 \cos x + K_2 \end{cases}$$

$$\text{Vậy NTQ: } y = \frac{x^2 \sin x}{3} - \frac{1}{3x} (x^3 \sin x + 3x^2 \cos x - 6x \sin x + 6 \cos x) + K_1 x^2 - \frac{K_2}{3x}.$$

106) Giải phương trình: $y'' + \frac{2}{x}y' + y = \frac{\cot gx}{x}$
 biết một nghiệm của phương trình thuần nhất là $y_1 = \frac{\sin x}{x}$

HD giải: $p(x) = \frac{x}{2}, \quad q(x) = 1, \quad f(x) = \frac{\cot gx}{x}$. Tìm nghiệm riêng thứ hai:

$$y_2 = y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x)dx} dx = \frac{\sin x}{x} \int \frac{x^2}{\sin^2 x} e^{-\int \frac{x}{2} dx} dx = \frac{\sin x}{x} \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\frac{\cos x}{x}$$

$$\text{NTQ của phương trình thuần nhất: } y = C_1 \frac{\sin x}{x} - C_2 \frac{\cos x}{x}$$

$$\text{Biến thiên hằng số: } \begin{cases} C_1' \frac{\sin x}{x} + C_2' \left(\frac{\cos x}{x}\right) = 0 \\ C_1' \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} + C_2' \frac{x \sin x + \cos x}{x^2} = \frac{\cot gx}{x} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow C_1' &= \frac{\cos^2 x}{\sin x} \Rightarrow C_1(x) = \int \frac{\cos^2 x}{\sin x} dx + K_1 = \int \frac{1 - \sin^2 x}{\sin x} dx + K_1 \\ &= \int \frac{dx}{\sin x} - \int \sin x dx + K_1 = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + \cos x + K_1 \end{aligned}$$

$$C_2' = \cos x \rightarrow C_2 = \sin x + K_2$$

Vậy nghiệm tổng quát: $y = \dots$

107) Giải phương trình: $y'' - 2y' + y = 1 + \frac{e^x}{x}$

HD giải: Phương trình đặc trưng: $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$

NTQ của phương trình thuần nhất: $y = e^x(C_1x + C_2)$

Dùng phương pháp biến thiên hằng số tìm nghiệm riêng dạng:

$$\bar{y} = \alpha_1(x).xe^x + \alpha_2(x).e^x.$$

$$\begin{cases} \alpha_1'(x).xe^x + \alpha_2'(x).e^x = 0 \\ \alpha_1'(x)(e^x + xe^x) + \alpha_2'(x).e^x = 1 + \frac{e^x}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1' = e^{-x} + \frac{1}{x} \\ \alpha_2' = -(xe^x + 1) \end{cases}$$

Vậy

$$\begin{cases} \alpha_1 = -e^{-x} + \ln|x| \\ \alpha_2 = xe^{-x} + e^{-x} - x \end{cases}$$

Như vậy nghiệm riêng: $\bar{y} = (\ln|x| - e^{-x})xe^x + (xe^{-x} + e^{-x} - x)e^x$

Và nghiệm tổng quát: $y = e^x(C_1x + C_2) + xe^x \ln|x| - xe^x + 1$

108) Giải phương trình: $y'' + y' = xe^{-x}$

HD giải: Phương trình đặc trưng: $\lambda^2 + \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 0; \lambda_2 = -1$

Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất: $\bar{y} = C_1 + C_2e^{-x}$

Tìm nghiệm riêng dạng: $y = xe^{-x}(Ax + B)$

Kết quả: $y = C_1 + C_2e^{-x} - (\frac{x^2}{2} + x)e^{-x}$

109) Giải phương trình: $y'' - 4y' + 5y = e^{2x} + \cos x$

HD giải: Phương trình đặc trưng: $\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 2 - i; \lambda_2 = 2 + i$

Nghiệm tổng quát: $y = e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$

Tìm nghiệm riêng dạng: $\bar{y} = y_1 + y_2$ với $y_1 = Ae^{2x}; y_2 = A \cos x + B \sin x \Rightarrow y_1 = e^{2x}; y_2 = \frac{1}{8} \cos x - \frac{1}{8} \sin x$

Nghiệm tổng quát: $y = e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + e^{2x} + \frac{1}{8}(\cos x - \sin x)$

110) Giải phương trình: $y'' + 4y' + 4y = 1 + e^{-2x} \ln x$

HD giải: Phương trình đặc trưng: $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -2$

NTQ: $y = e^{-2x}(C_1x + C_2)$

Tìm nghiệm riêng dạng: $\bar{y} = \alpha_1(x).xe^{-2x} + \alpha_2e^{-2x}$.

$$\begin{cases} \alpha_1'(x).xe^{-2x} + \alpha_2'e^{-2x} = 0 \\ \alpha_1'(e^{-2x} - 2xe^{-2x}) + \alpha_2'(-2e^{-2x}) = 1 + e^{-2x} \ln x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_1' = e^{-2x} + \ln x \rightarrow \alpha_1 = \frac{1}{2}e^{-2x} + x \ln|x| - x \\ \alpha_2' = -x(e^{-2x} + \ln x) \rightarrow \alpha_2 = \frac{1}{4}e^{2x} + \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{x^2}{2} \ln x \end{cases}$$

\Rightarrow nghiệm riêng \Rightarrow nghiệm tổng quát:

$$y = e^{-2x}(C_1x + C_2) + e^{-2x}(\frac{1}{4}e^{2x} - \frac{3x^2}{4} + \frac{x^2}{2} \ln x)$$

111) Giải phương trình: $y'' + y' = e^{-x}(\sin x - \cos x)$

HD giải: Đặt $y = e^{-x}z$ thay vào phương trình được: $z'' - z' = \sin x - \cos x$.

Phương trình đặc trưng: $\lambda^2 - \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0, \lambda = 1$

Nghiệm tổng quát: $z = C_1 + C_2 e^x$.

Tìm nghiệm riêng dạng: $z = A \cos x + B \sin x \Rightarrow A = 1, B = 0$.

Vậy nghiệm tổng quát là: $y = e^{-x}(C_1 + C_2 e^x + \cos x)$

112) Giải phương trình: $y'' - 4y' + 8y = e^{2x} + \sin 2x$

HD giải: Phương trình đặc trưng: $\lambda^2 - 4\lambda + 8 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 2 - 2i; \lambda_2 = 2 + 2i$

Nghiệm của phương trình thuần nhất: $y = e^{2x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$

Nghiệm riêng dạng $\bar{y} = y_1 + y_2$ với y_1 là nghiệm riêng của $y'' - 4y' + 8y = e^{2x}$

dạng $y_1 = Ae^{2x} \rightarrow A = \frac{1}{4}$; y_2 là nghiệm riêng của $y'' - 4y' + 8y = \sin 2x$

dạng $y_2 = A \cos 2x + B \sin 2x \rightarrow A = \frac{1}{10}, B = \frac{1}{20}$.

Vậy nghiệm tổng quát:

$$y = e^{2x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + \frac{1}{4}e^{2x} - \frac{1}{20}(2 \cos 2x + \sin 2x)$$

113) Giải phương trình: $y'' + y = \frac{1}{\sin x}$

HD giải: Phương trình đặc trưng: $\lambda^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm i$

NTQ: $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$

Tìm nghiệm riêng dạng: $\bar{y} = \alpha_1(x) \cos x + \alpha_2(x) \sin x$

Bằng cách biến thiên hằng số

$$\begin{cases} \alpha_1' \cos x + \alpha_2' \sin x = 0 \\ \alpha_1'(-\sin x) + \alpha_2' \cos x = \frac{1}{\sin x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1' = -\frac{1}{\cos x} \\ \alpha_2' = \frac{1}{\sin x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -x \\ \alpha_2 = \ln \sin x \end{cases}$$

Vậy nghiệm tổng quát: $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - x \cos x + \sin x \ln \sin x$

114) Giải phương trình: $y'' - 3y' + 2y = 2x^2 - 5 + 2e^x \cos \frac{x}{2}$

HD giải: $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 1; \lambda_2 = 2$

NTQ: $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$

Tìm nghiệm riêng dạng: $\bar{y} = \alpha_1(x)e^x + \alpha_2(x)e^{2x}$ bằng cách biến thiên hằng số:

$$\begin{cases} \alpha_1' e^x + \alpha_2' e^{2x} = 0 \\ \alpha_1' e^x + \alpha_2' (2e^{2x}) = 2x^2 - 5 + 2e^x \cos \frac{x}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1' = -e^{-x}(2x^2 - 5) - 2 \cos \frac{x}{2} \\ \alpha_2' = e^{-2x}(2x^2 - 5) + 2e^{-x} \cos \frac{x}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = e^{-x}(2x^2 - 4x - 1) - 4 \sin \frac{x}{2} \\ \alpha_2 = -\frac{1}{2}[e^{-2x}(2x^2 - 5) + 2(xe^{-2x} + \frac{1}{2}e^{-2x})] + \frac{8}{3}(-e^{-2x} \cos \frac{x}{2} + \frac{1}{2}e^{-x} \sin \frac{x}{2}) \end{cases}$$

Từ đó có nghiệm tổng quát của phương trình.

115) Giải phương trình: $y'' - 4y = (2 - 4x)e^{2x}$

HD giải: Nghiệm tổng quát: $y = C_1e^{-2x} + C_2e^{2x}$

Nghiệm riêng dạng: $y = xe^{2x}(Ax + B)$; $A = -\frac{2}{3}$, $B = \frac{2}{3}$

→ Nghiệm tổng quát: $y = C_1e^{-2x} + C_2e^{2x} + \frac{2}{3}xe^{2x}(1 - x)$

116) Giải phương trình: $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x} + \cos x$

HD giải: Nghiệm tổng quát: $y = e^x(C_1x + C_2)$

nghiệm riêng dạng: $y^* = \alpha_1xe^x + \alpha_2e^x$ biến thiên hằng số:

$$\begin{cases} \alpha'_1 = \frac{1}{x}e^{-x} \cos x \\ \alpha'_2 = -(1 + xe^{-x} \cos x) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \ln|x| + \frac{1}{2}e^{-x}(\sin x - \cos x) \\ \alpha_2 = -x - \frac{1}{2}(xe^{-x}(\sin x - \cos x) + e^{-x} \sin x) \end{cases}$$

⇒ Nghiệm tổng quát

117) Giải phương trình: $y'' - 2y' + 2y = x(e^x + 1)$

HD giải: Phương trình đặc trưng: $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 1 - i$ $\lambda_2 = 1 + i$

Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng:

$$y = e^x(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$$

Nghiệm riêng dạng $\bar{y} = y_1 + y_2$ với y_1 là nghiệm riêng của $y'' - 2y' + 2y = xe^x$

có dạng $y_1 = e^x(Ax + B) \rightarrow A = 1$, $B = 0$; Và y_2 là nghiệm riêng của $y'' - 2y' + 2y = x$

$$y_2 = Ax + B \rightarrow A = B = \frac{1}{2}.$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình:

$$y = e^x(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + xe^x + \frac{1}{2}(x + 1)$$

118) Giải phương trình: $y'' + 2y' + y = \sin x + \frac{e^{-x}}{x}$

HD giải: Phương trình đặc trưng $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1$ (bội 2)

Nghiệm tổng quát: $y = e^{-x}(C_1x + C_2)$.

Tìm nghiệm riêng dạng: $\bar{y} = \alpha_1(x)xe^{-x} + \alpha_2(x)xe^{-x}$

Biến thiên hằng số:

$$\begin{cases} \alpha'_1 = e^x \sin x + \frac{1}{x} \\ \alpha'_2 = -xe^x \sin x - \frac{x}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + \ln|x| \\ \alpha_2 = -[\frac{xe^x}{2}(\sin x - \cos x) + \frac{e^x}{2} \cos x] - \frac{x^2}{4} \end{cases}$$

Suy ra nghiệm tổng quát: $y = e^{-x}(C_1x + C_2) + xe^{-x} \ln|x| - \frac{\cos x}{2} - \frac{x^2e^{-x}}{4}$.

119) Giải phương trình: $y'' + y = \frac{1}{\sin x}$

HD giải: Phương trình đặc trưng $\lambda^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm i$

Nghiệm tổng quát: $y = A_1 \cos x + A_2 \sin x$.

Biến thiên hằng số: $\begin{cases} A'_1 = -1 \\ A'_2 = \cot x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 = -x \\ A_2 = \ln |\sin x|. \end{cases}$

Vậy nghiệm tổng quát: $y = (C_1 - x) \cos x + (C_2 + \ln |\sin x|) \sin x$.

120) Giải phương trình: $y'' + y = xe^x + 2e^{-x}$

HD giải: Phương trình đặc trưng $\lambda^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm i$

Nghiệm tổng quát: $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$.

Tìm nghiệm riêng dạng:

$$\bar{y} = (Ax + B)e^x + Ce^{-x} \rightarrow \begin{cases} 2A = 1 \\ A + B = 0 \\ 2C = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ B = -\frac{1}{2} \\ C = 1 \end{cases}$$

Vậy nghiệm tổng quát: $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{2}(x - 1)e^x + e^{-x}$

121) Giải phương trình: $y'' - y' - 2y = \cos x - 3 \sin x$

HD giải: Phương trình đặc trưng $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = -2; \lambda_2 = 1$

Nghiệm tổng quát: $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x$

Tìm nghiệm riêng dạng:

$$\bar{y} = A \cos x + B \sin x \rightarrow \begin{cases} B - 3A = 1 \\ -A - 3B = -3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 1 \end{cases}$$

Vậy nghiệm tổng quát: $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x + \sin x$

122) Giải phương trình: $y'' - 2y' = 2 \cos^2 x$

HD giải: Phương trình đặc trưng $\lambda^2 - 2\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 0; \lambda_2 = 2$

Nghiệm tổng quát: $y = C_1 + C_2 e^{2x}$.

Tìm nghiệm riêng dạng:

$$\bar{y} = Ax + B \cos 2x + C \sin 2x$$

$$\text{Thay vào được: } \begin{cases} -2A = 1 \\ -4(B + C) = 1 \\ 4(B - C) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = -\frac{1}{2} \\ B = -\frac{1}{8} \\ C = -\frac{1}{8} \end{cases}$$

Vậy nghiệm tổng quát: $y = C_1 + C_2 e^{2x} - \frac{x}{2} - \frac{1}{8}(\cos 2x + \sin 2x)$

123) Giải phương trình: $y'' + y = \sin x + \cos 2x$

HD giải: Phương trình đặc trưng $\lambda^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm i$

Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất: $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$.

Tìm nghiệm riêng dạng:

$$\bar{y} = x(A \cos x + B \sin x) + C \cos 2x + D \sin 2x$$

Thay vào phương trình và đồng nhất được: $A = -\frac{1}{2}$; $B = 0$; $C = -\frac{1}{3}$; $D = 0$

Vậy nghiệm tổng quát: $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{1}{2}x \cos x - \frac{1}{3} \cos 2x$.

124) Tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân: $y'' - 2y' = 2 \cos^2 x$

HD giải:

Phương trình đặc trưng $\lambda^2 - 2\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 0; \lambda_2 = 2$. Nghiệm tổng quát của phương trình tuyến tính thuần nhất tương ứng: $y = C_1 + C_2 e^{2x}$. Tìm nghiệm riêng dạng:

$$y^* = Ax + B \cos 2x + C \sin 2x$$

Được $A = -\frac{1}{2}$; $B = -\frac{1}{8}$; $C = -\frac{1}{8}$. Vậy NTQ:

$$y = C_1 + C_2 e^{2x} - \frac{x}{2} - \frac{1}{8}(\cos 2x + \sin 2x)$$

125) Tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân:

$$(x + e^{\frac{x}{y}})dx + e^{\frac{x}{y}}(1 - \frac{x}{y})dy = 0.$$

HD giải: Phương trình vi phân toàn phần có tích phân tổng quát; $\frac{x^2}{2} + ye^{\frac{x}{y}} = C$.

126) Giải phương trình: $y'' - 6y' + 9y = 25e^x \sin x$.

HD giải: NTQ của phương trình tuyến tính thuần nhất tương ứng $y = (C_1 + C_2 x)e^{3x}$.
Tìm nghiệm riêng dạng: $y^* = e^x(A \cos x + B \sin x)$; được $A = 4$; $B = 3$. Vậy NTQ:

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{3x} + e^x(3 \cos x + 4 \sin x)$$

127) Hãy tìm nghiệm tổng quát của phương trình: $y'' - 2y' + 2y = x(e^x + 1)$

HD giải: Phương trình đặc trưng $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 1 \pm i$. Nghiệm tổng quát của phương trình tuyến tính thuần nhất tương ứng: $y = e^x(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$. Tìm nghiệm riêng dạng: $y^* = y_1 + y_2$; với y_1 là nghiệm riêng của $y'' - 2y' + 2y = xe^x$, có dạng $y_1 = e^x(Ax + B) \Rightarrow A = 1$; $B = 0$ và y_2 là nghiệm riêng của $y'' - 2y' + 2y = x$, có dạng $y_2 = A'x + B' \Rightarrow A' = B' = \frac{1}{2}$. vậy nghiệm tổng quát:

$$y = e^x(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + xe^x + \frac{1}{2}(x + 1)$$

128) Tìm nghiệm tổng quát của phương trình: $x^2 y'' - 2y = x^3 \cos x$ biết một nghiệm riêng của phương trình thuần nhất là $y_1 = x^2$.

HD giải: Tìm NR dạng $y_2 = uy_1 = ux^2$ được $y_2 = -\frac{1}{3x}$. Như vậy NTQ: $y = C_1 x^2 + \frac{C_2}{x}$. Biến thiên hằng số được $C'_1 = -\frac{1}{3} \cos x$; $C'_2 = x^3 \cos x \dots$

129) Giải phương trình vi phân sau đây nếu biết một nghiệm riêng của nó có dạng đa thức: $(x^2 + 1)y'' - 2y = 0$

HD giải: Dễ thấy $y_1 = x^2 + 1$ là một nghiệm riêng của phương trình, nghiệm riêng thứ hai độc lập tuyến tính với y_1 là:

$$y_2 = y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int 0 \cdot dx} dx = (x^2 + 1) \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1}{2}(x^2 + 1) \left(\frac{x}{x^2 + 1} + \arctan x \right)$$

$$\text{Vậy NTQ: } y = C_1(x^2 + 1) + C_2(x^2 + 1) \left(\frac{x}{x^2 + 1} + \arctan x \right)$$

130) Tìm nghiệm tổng quát của phương trình: $y'' + y = \sin x + \cos 2x$.

HD giải: Phương trình đặc trưng $\lambda^2 + 1 = 0 \iff \lambda_1 = \pm i$. Nghiệm tổng quát của phương trình tuyến tính thuần nhất tương ứng: $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$. Tìm nghiệm riêng dạng: $y^* = y_1 + y_2$; với y_1 là nghiệm riêng của $y'' + y = \sin x$, được $y_1 = -\frac{1}{2}x \cos x$ và y_2 là nghiệm riêng của $y'' + y = \cos 2x$, được $y_2 = -\frac{1}{3} \cos 2x$. Vậy nghiệm tổng quát:

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{1}{2}x \cos x - \frac{1}{3} \cos 2x$$

131) Tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân: $y'' + 10y' + 25y = 4e^{-5x}$

HD giải: Phương trình đặc trưng $r^2 + 10r + 25 = 0$ giải ra $r_1 = r_2 = -5$
 NTQ của phương trình thuần nhất: $y = (C_1 + C_2 x)e^{-5x}$ và NR của phương trình không thuần nhất: $y^* = 2x^2 e^{-5x}$. Vậy
 NTQ: $y = (C_1 + C_2 x)e^{-5x} + 2x^2 e^{-5x}$

132) Biết rằng phương trình $xy'' + 2y' + xy = 0$ có nghiệm riêng dạng $y = \frac{\sin x}{x}$.
 Hãy tìm nghiệm tổng quát của phương trình.

HD giải: Nghiệm riêng độc lập tuyến tính với $y = \frac{\sin x}{x}$ là $y = \frac{\cos x}{x}$. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là

$$y = C_1 \cdot \frac{\sin x}{x} + C_2 \cdot \frac{\cos x}{x}$$

133) Tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân: $y'' + y' = 4x^2e^x$

HD giải: Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng: $y = C_1 + C_2e^{-x}$
 Tìm nghiệm riêng dạng: $y^* = (A_1x^2 + A_2x + A_3)e^{-x}$, giải ra $A_1 = 2; A_2 = -6; A_3 = 7$.

134) Tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân: $y'' + 3y' + 2y = x \sin x$

HD giải: Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng: $y = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x}$. Nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất được tìm dưới dạng: $y = (A_1x + A_2) \cos x + (B_1x + B_2) \sin x$ và tìm được $A_1 = -\frac{3}{10}; A_2 = \frac{17}{50}; B_1 = \frac{1}{10}; B_2 = \frac{3}{25}$.

135) Giải phương trình tuyến tính cấp 2 với hệ số hằng $y'' - 2y' + 2y = xe^x$

HD giải: Đây là phương trình tuyến tính cấp 2 không thuần nhất với hệ số hằng. Nghiệm tổng quát là:

$$y = e^x(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + \frac{1}{2}(x+1) + e^x$$

136) Giải phương trình tuyến tính cấp 2 với hệ số hằng $y'' + y = \cos 2x$.

HD giải: Đây là phương trình tuyến tính cấp 2 không thuần nhất với hệ số hằng. Nghiệm tổng quát là:

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \cos 2x.$$

137) Tìm nghiệm tổng quát của phương trình: $(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$ khi biết một nghiệm riêng $y_1 = x$.

HD giải: Chuyển về dạng $y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$. Với $p_1(x) = -\frac{2x}{1-x^2}$ nên nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$\begin{aligned} y &= x \left\{ \int C_1 \frac{e^{\int \frac{2x}{1-x^2} dx}}{x^2} dx + C_2 \right\} &= x \left\{ C_1 \int \frac{dx}{x^2(1-x^2)} + C_2 \right\} \\ &= x \left\{ \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \right) + C_2 \right\} &= C_2x + C_1 \left(\frac{x}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} - 1 \right). \end{aligned}$$

138) Giải phương trình tuyến tính cấp 2 với hệ số hằng $y'' - 3y' + 2y = 2 + e^x$

HD giải: Đây là phương trình tuyến tính cấp 2 không thuần nhất với hệ số hằng. Nghiệm tổng quát là:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} - 2xe^x.$$

139) Giải phương trình tuyến tính cấp 2 với hệ số hằng $y'' - y' = \sin^2 x$.

HD giải: Đây là phương trình tuyến tính cấp 2 không thuần nhất với hệ số hằng.
 Nghiệm tổng quát là:

$$y = C_1 + C_2 e^x + \frac{1}{2} \cos x - \frac{1}{2} \ln x.$$

140) Giải phương trình tuyến tính cấp 2 với hệ số hằng $y'' - 2y' + 10y = xe^x$

HD giải: Đây là phương trình tuyến tính cấp 2 không thuần nhất với hệ số hằng.
 Nghiệm tổng quát là:

$$y = C_1 e^x \cos 3x + C_2 e^x \sin 3x - \frac{1}{9} x e^x.$$

141) Giải phương trình tuyến tính cấp 2 với hệ số hằng $y'' + y = \cos 2x + \sin x$.

HD giải: Đây là phương trình tuyến tính cấp 2 không thuần nhất với hệ số hằng.
 Nghiệm tổng quát là:

$$y = C_1 e^x \cos x + C_2 e^x \sin x - \frac{1}{3} \cos 2x - \frac{1}{2} x \cos x.$$

142) Giải phương trình tuyến tính cấp 2 với hệ số hằng
 $y'' - 2y' + y = xe^x$

HD giải: Đây là phương trình tuyến tính cấp 2 không thuần nhất với hệ số hằng.
 Nghiệm tổng quát là:

$$y = C_1 e^x + C_2 x e^x + \frac{x^3}{6} e^x.$$

143) Giải phương trình tuyến tính cấp 2 với hệ số hằng
 $y'' + y = \cos 2x$.

HD giải: Đây là phương trình tuyến tính cấp 2 không thuần nhất với hệ số hằng.
 Nghiệm tổng quát là:

$$y = C_1 + C_2 e^{-x} + \frac{1}{10} \sin 2x - \frac{1}{5} \cos 2x.$$

144) Tìm nghiệm tổng quát của phương trình $y'' + \frac{3}{x} y' + \frac{1}{x^2} y = 0$,
 khi biết một nghiệm riêng có dạng $y_1 = \frac{1}{x}$.

HD giải: Phương trình đã cho tương đương với phương trình $x^2 y'' + 3xy' + y = 0$. Đây là phương trình Euler nên ta có thể đưa về phương trình tuyến tính với hệ số hằng bằng cách đặt $x = e^t$. Khi đó phương trình đã cho trở thành $y_t'' + 2y_t' + y = 0$. Phương trình này có nghiệm là $y = C_1 e^{-t} + C_2 t e^{-t}$. Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $y = \frac{C_1}{x} + C_2 \frac{\ln|x|}{x}$.

145) Giải phương trình tuyến tính cấp 2 với hệ số hằng
a) $y'' - 3y' + 2y = 2e^{2x}$

HD giải: Đây là phương trình tuyến tính cấp 2 không thuần nhất với hệ số hằng. Nghiệm tổng quát là:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + 2e^{2x}.$$

146) Giải phương trình tuyến tính cấp 2 với hệ số hằng
a) $y'' + y = \frac{1}{\cos^2 x}$

HD giải: Nghiệm của phương trình thuần nhất $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$. Dùng phương pháp biến thiên hằng số ta được $C_1'(x) = -\frac{\sin x}{\cos^2 x}$ và $C_2'(x) = \frac{1}{\cos x}$.
Vậy nghiệm của phương trình là

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - 1 + \frac{\sin x}{2} \ln \left| \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right|.$$

147) Giải phương trình tuyến tính cấp 2 với hệ số hằng
 $y'' - 2y' + 2y = x + e^x$

HD giải: Đây là phương trình tuyến tính cấp 2 không thuần nhất với hệ số hằng. Nghiệm tổng quát là:

$$y = e^x (C_1 \cos x + C_2 \sin x) + \frac{1}{2}(x + 1) + e^x.$$

148) Giải phương trình tuyến tính cấp 2 với hệ số hằng
 $y'' + y = \cos^2 x$.

HD giải: Đây là phương trình tuyến tính cấp 2 không thuần nhất với hệ số hằng. Nghiệm tổng quát là: $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \cos 2x$.

149) Tìm nghiệm tổng quát của phương trình $xy'' + y' - \frac{1}{x}y = 0$,
khi biết một nghiệm riêng có dạng $y_1 = \frac{a}{x}$.

HD giải: $y_1 = \frac{1}{x}$ là một nghiệm của phương trình. Ta tìm nghiệm riêng $y_2 = u(x)\frac{1}{x}$. Thay vào phương trình ta tìm được $y_2 = x$. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là

$$y = \frac{C_1}{x} + C_2x.$$

150) Giải phương trình tuyến tính cấp 2 với hệ số hằng
a) $y'' - 3y' + 2y = 2e^x$

HD giải:

Đây là phương trình tuyến tính cấp 2 không thuần nhất với hệ số hằng. Nghiệm tổng quát là:

$$y = C_1e^x + C_2e^{2x} - 2xe^x.$$

151) Giải phương trình tuyến tính cấp 2 với hệ số hằng
 $y'' - y = \sin x$.

HD giải:

Đây là phương trình tuyến tính cấp 2 không thuần nhất với hệ số hằng. Nghiệm tổng quát là:

$$y = C_1 + C_2e^x + \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x.$$

152) Tìm nghiệm tổng quát của phương trình $x^2y'' - 2xy' - 4y = 0$,
khi biết một nghiệm riêng có dạng $y_1 = \frac{1}{x}$.

HD giải: $y_1 = \frac{1}{x}$ là một nghiệm của phương trình. Ta tìm nghiệm riêng $y_2 = u(x)\frac{1}{x}$. Thay vào phương trình ta tìm được $y_2 = x^4$. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là

$$y = \frac{C_1}{x} + C_2x^4.$$

153) Giải phương trình tuyến tính cấp 2 với hệ số hằng $y'' + y = x + 2e^x$

HD giải:

Đây là phương trình tuyến tính cấp 2 không thuần nhất với hệ số hằng. Nghiệm tổng quát là:

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x + e^x.$$

154) Giải phương trình tuyến tính cấp 2 với hệ số hằng $y'' - y' + y = x$.

HD giải:

Đây là phương trình tuyến tính cấp 2 không thuần nhất với hệ số hằng. Nghiệm tổng quát là:

$$y = e^{\frac{x}{2}} \left(C_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + C_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right) + 1 + x.$$

155) Giải phương trình tuyến tính cấp 2 với hệ số hằng $y'' - 2y' + y = x + e^x$

HD giải: Đây là phương trình tuyến tính cấp 2 không thuần nhất với hệ số hằng. Nghiệm tổng quát là:

$$y = C_1 e^x + C_2 x e^x + 2 + \frac{1}{2} x^2 e^x.$$

156) Giải phương trình tuyến tính cấp 2 với hệ số hằng $y'' + y = \sin^2 x$.

HD giải: Đây là phương trình tuyến tính cấp 2 không thuần nhất với hệ số hằng. Nghiệm tổng quát là:

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cos 2x.$$

157) Giải phương trình tuyến tính cấp 2 sau: $xy'' - y' - \frac{1}{x}y = 0$.

HD giải: Đây là phương trình Euler nên ta có thể đưa về phương trình tuyến tính với hệ số hằng bằng cách đặt $x = e^t$. Khi đó phương trình đã cho trở thành $y_t'' - 2y_t' - y = 0$.

Phương trình này có nghiệm là

$$y = C_1 e^{(1+\sqrt{2})t} + C_2 e^{(1-\sqrt{2})t}.$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là

$$y = C_1 x^{1+\sqrt{2}} + C_2 x^{1-\sqrt{2}}.$$

158) Giải phương trình tuyến tính cấp 2 với hệ số hằng sau: $y'' - 3y' + 2y = 2 \cos x$

HD giải: Đây là phương trình tuyến tính cấp 2 không thuần nhất với hệ số hằng. Nghiệm tổng quát là:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{1}{5} \cos x - \frac{3}{5} \sin x.$$

159) Giải phương trình tuyến tính cấp 2 với hệ số hằng sau: $y'' - y = \sin x + e^x$.

HD giải: Đây là phương trình tuyến tính cấp 2 không thuần nhất với hệ số hằng.
 Nghiệm tổng quát là:

$$y = C_1 + C_2 e^x + x e^x + \frac{1}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x.$$

160) Dùng phép đổi hàm $y = \frac{z}{x^2}$ để giải phương trình vi phân:

$$x^2 y'' + 4xy' + (x^2 + 2)y = e^x$$

HD giải: $y = \frac{z}{x^2} \Rightarrow y' = \frac{z'x - 2z}{x^3}; y'' = \frac{z''x^2 - 4z'x + 6z}{x^4}$

Phương trình trở thành: $z'' + z = e^x$ có một nghiệm riêng $\bar{y} = \frac{e^x}{2}$

Phương trình thuần nhất có phương trình đặc trưng $\lambda^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm i$

Vậy nghiệm tổng quát: $z = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{e^x}{2}$

Vậy $y = C_1 \frac{\cos x}{x^2} + C_2 \frac{\sin x}{x^2} + \frac{e^x}{2x^2}$

161) Giải phương trình $y'' \cos x + y' \sin x - y \cos^3 x = 0$ bằng phép biến đổi $t = \sin x$

HD giải: $t = \sin x : y'_x = y'_t \cdot t'_x = y'_t \cos x$

$y''_{xx} = y''_{tt} \cos^2 x - y'_t \sin x$

Thay vào phương trình: $y''_{tt} - y = 0 \rightarrow y = C_1 e^t + C_2 e^{-t} = C_1 e^{\sin x} + C_2 e^{-\sin x}$

162) Tìm nghiệm riêng của phương trình $(x + e^{\frac{x}{y}})dx + e^{\frac{x}{y}}(1 - \frac{x}{y}) = 0$
 thoả điều kiện $y(0) = 2$

HD giải: $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{x}{y^2} e^{\frac{x}{y}}, y \neq 0 \quad TPTQ: \frac{x^2}{2} + y e^{\frac{x}{y}} = C$

$y(0) = 2 \Rightarrow C = 2.$

163) Giải phương trình vi phân $y'' + y' \tan x - y \cos^2 x = 0$ bằng phép biến đổi $t = \sin x$

HD giải: Tương tự bài 2

164) Cho biểu thức: $h(x) \left(\left(\frac{1}{x+y} - \ln(x+y) \right) dx + \frac{1}{x+y} dy \right).$

Hãy tìm hàm số $h(x)$ sao cho biểu thức trên trở thành vi phân toàn phần của một hàm $F(x, y)$ và tìm hàm số đó.

HD giải: Đặt $P = h(x) \left(\frac{1}{x+y} \ln(x+y) \right)$

$Q = h(x) \cdot \frac{1}{x+y}$

(Điều kiện $x+y \neq 0$) để $Pdx + Qdy$ là vi phân toàn phần:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \Leftrightarrow \frac{-h(x)(x+y+1)}{(x+y)^2} = \frac{h'(x)(x+y) - h(x)}{(x+y)^2}$$

$$\Leftrightarrow h'(x+y) + h(x+y) = 0 \Leftrightarrow h' + h = 0 \Leftrightarrow h(x) = e^{-x}$$

Và $F(x, y) = e^{-x} \ln(x+y)$

165) Giải phương trình vi phân : $xy'' + 2(1-x)y' + (x-2)y = e^{-x}$
bằng phép đổi ẩn hàm $z = yx$

HD giải: $z = yx \Leftrightarrow y = \frac{z}{x}; y' = \frac{z'x - z}{x^2} = \dots; y'' = \dots$ tương tự bài 1

166) Cho $P(x, y) = e^x \sin y + 2m^2x \cos y; Q(x, y) = e^x \cos y + mx^2 \sin y$.
Tìm m để $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ là vi phân toàn phần của hàm số
 $F(x, y)$ nào đó và tìm hàm ấy.

HD giải: $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \Leftrightarrow 2x \sin y(m^2 + m) = 0$ Chọn $m = 0$ hoặc $m = -1$.

167) Giải phương trình $x^2y'' + 2xy' + \frac{y}{x^2} = 0$ bằng phép biến đổi $x = \frac{1}{t}$

HD giải:

168) Tìm hàm $\mu(x^2 + y^2)$ sao cho $\mu(x^2 + y^2)((x-y)dx + (x+y)dy)$
là vi phân toàn phần của một hàm $F(x, y)$ nào đó. Tìm hàm $F(x, y)$
nếu biết $\mu(1, 1) = 0; \mu(\sqrt{2}, \sqrt{2}) = \ln 2$

HD giải: $P(x, y) = h(x^2 + y^2)(x-y); Q(x, y) = h(x^2 + y^2)(x+y)$
Để $h(x-y)dx + h(x+y)dy$ là vi phân toàn phần ta phải có: $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$
Đặt $t = x^2 + y^2 \Rightarrow h'_t \cdot 2y(x-y) - h = h'_t \cdot 2y(x+y) + h$
 $\Leftrightarrow -h'_t(x^2 + y^2) = h \Leftrightarrow h'_t t = h \Rightarrow h = \frac{C_1}{t} \Rightarrow h = \frac{C_1}{x^2 + y^2}$
 $\Rightarrow F(x, y) = C_1 \int_1^x \frac{x-0}{x^2+0^2} dx + C_1 \int_0^y \frac{x+y}{x^2+y^2} dy = C_1 \arctg \frac{y}{x} + \frac{C_1}{2} \ln(x^2 + y^2) + C_2$
 $F(1, 1) = 0; F(\sqrt{2}, \sqrt{2}) = \ln 2$ Cho: $C_1 = 2; C_2 = -(\frac{\pi}{2} + \ln 2)$

169) Giải phương trình $x^2y'' + xy' + y = x$ bằng phép đổi biến $x = e^t$

HD giải: $x = e^t$ ta có: $y'_x = y'_t \cdot \frac{1}{x}; y''_{xx} = (y''_{tt} - y'_t) \frac{1}{x^2}$
Thay vào phương trình: $y''_{tt} + y = e^t$
Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất: $y = C_1 \cos t + C_2 \sin t$
Tìm nghiệm riêng dạng: $\bar{y} + Ae^t; A = \frac{1}{2}$
Vậy nghiệm tổng quát: $y = C_1 \cos(\ln x) + C_2 \sin(\ln x) + \frac{x}{2}$

170) Giải phương trình vi phân: $xy'' - (x+1)y' - 2(x-1)y + x^2 = 0$ biết rằng phương trình thuần nhất tương ứng có một nghiệm riêng $y_1 = e^{\alpha x}$ với α là hằng số cần xác định.

HD giải: Thay nghiệm $y_1 = e^{\alpha x}$ vào phương trình rồi đồng nhất được $\alpha = 2$

Đưa phương trình về dạng: $y'' - \frac{x+1}{x}y' - \frac{2(x-1)}{x}y = -x; x \neq 0$

$$p(x) = -\frac{x+1}{x}; q(x) = -\frac{2(x-1)}{x}; f(x) = -x$$

$$\text{Tìm nghiệm riêng: } y_2 = e^{2x} \int e^{-4x} e^{\int \frac{x+1}{x} dx} dx = -\frac{1}{9}(3x+1)e^{-x}.$$

Suy ra nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất:

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 (3x+1)e^{-x}$$

Biến thiên hằng số:

$$\begin{cases} C_1' = -\frac{1}{9}(3x+1)e^{-2x} \\ C_2' = \frac{1}{9}e^x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{1}{36}(6x+5)e^{-2x} \\ C_2 = \frac{1}{9}e^x \end{cases}$$

\Rightarrow NTQ.

171) Giải phương trình vi phân $x^2 y'' - 4xy' + 6y = 0$ bằng phép đổi biến $x = e^t$.

HD giải: $x = e^t$, ta có: $y'_x = y'_t \cdot \frac{1}{x}$, $y''_{xx} = (y''_{tt} - y'_t) \frac{1}{x^2}$

Phương trình trở thành: $y''_{tt} - 5y'_t + 6y = 0 \Rightarrow$ NTQ: $y = C_1 x^2 + C_2 x^3$

172) Giải phương trình vi phân: $y'' - (2e^x + 1)y' + e^{2x}y = e^{3x}$ bằng phép đổi biến $t = e^x$.

HD giải: Đổi biến $t = e^x \Rightarrow y'_x = y'_t \cdot e^x$, $y''_{xx} = y''_{tt} \cdot e^{2x} + y'_t \cdot e^x$

Thay vào phương trình: $y''_{tt} - 2y'_t + y = t^3$

Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất: $y = e^t(C_1 t + C_2)$

Tìm nghiệm riêng dạng $y = At^3 + Bt^2 + Ct + D \rightarrow y = t^3 + 6t^2 + 18t + 24$ Kết quả $y = e^{e^x}(C_1 e^x + C_2) + e^{3x} + 6e^{2x} + 18e^x + 24$.

173) Giải phương trình vi phân: $(x-1)y'' - xy' + y = (x-1)e^{2x}$ biết một nghiệm riêng của phương trình thuần nhất tương ứng có dạng $y = e^{\alpha x}$ (α cần xác định).

HD giải: Đưa phương trình về: $y'' - \frac{x}{x-1}y' + \frac{1}{x-1}y = (x-1)e^{2x}$

$$\text{Với } p(x) = \frac{x}{x-1}; q(x) = \frac{1}{x-1}; f(x) = (x-1)e^{2x}$$

Thay $y_1 = e^{\alpha x}$ vào phương trình thuần nhất tương ứng rồi đồng nhất suy ra $\alpha = 1$

$$\text{Tìm nghiệm riêng } y_2 = e^x \int e^{-2x} e^{\int \frac{x}{x-1} dx} dx = -x$$

$$\Rightarrow NTQ: y = C_1 e^x + C_2(-x)$$

Biến thiên hằng số:

$$\begin{cases} C_1' = x e^x \\ C_2' = e^{2x} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C_1 = x e^x - e^x + K_1 \\ C_2 = \frac{1}{2} e^{2x} + K_2 \end{cases}$$

Vậy nghiệm tổng quát: $y = (\frac{x}{2} - 1)e^{2x} + K_1 e^x - K_2 x$

174) Giải phương trình vi phân: $x^2(x+1)y'' = 2y$ biết một nghiệm $y_1 = 1 + \frac{1}{x}$.

HD giải: Đưa phương trình về: $y'' - \frac{2}{x^2(x+1)} \cdot y = 0; p(x) = 0; f(x) = 0$.

Tìm NR dạng

$$\begin{aligned} y_2 &= (1 + \frac{1}{x}) \int \frac{x^2}{(x+1)^2} \cdot e^{-\int 0 dx} dx = (1 + \frac{1}{x})(x - 2 \ln|x+1| - \frac{1}{1+x}) \\ &= x + 1 - \frac{x+1}{x} \ln(x+1)^2 - \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Vậy nghiệm tổng quát: $y = C_1(1 + \frac{1}{x}) + C_2(x - \frac{1}{x} - 1 + \frac{x+1}{x} \ln(x+1)^2 + 1)$.

175) Giải phương trình vi phân $(x^2 + 1)y'' - 2y = 0$ nếu biết một nghiệm của nó có dạng đa thức.

HD giải: Dễ thấy $y_1 = x^2 + 1$ là một nghiệm riêng của (1).

$$\begin{aligned} \text{Nghiệm thứ hai: } y_2 &= y_1 \int \frac{1}{y_1^2} \cdot e^{-\int p(x) dx} dx = (x^2 + 1) \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{1}{2}(x^2 + 1)(\frac{x}{x^2 + 1} + \arctg x) \end{aligned}$$

Vậy nghiệm tổng quát: $y = C_1(x^2 + 1) + C_2(x^2 + 1)(\frac{x}{x^2 + 1} + \arctg x)$.

176) Giải phương trình vi phân $xy'' + 2y' - xy = e^x$ bằng phép đổi hàm $z = xy$.

HD giải: Đặt $z = xy \Rightarrow z' = y + xy'; z'' = 2y' + xy''$. Thay vào phương trình:

$$z'' - z = e^x \rightarrow NTQ \quad z = C_1 + C_2 e^x$$

Nghiệm riêng dạng: $y = A x e^x \rightarrow A = \frac{1}{2}$

Vậy: $y = \frac{z}{x} = \frac{1}{x}(C_1 + C_2 e^x + \frac{1}{2} x e^x)$

177) Chứng tỏ rằng hàm: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!}$ là nghiệm của phương trình $x f'(x) - (x+1)f(x) = 0$.

HD giải: Dùng tính chất D'Alembert để chứng tỏ chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!}$ hội tụ với mọi x

Như vậy hàm $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!}$ xác định với mọi x .

Hơn nữa: $f(x) = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = xe^x$

$\Rightarrow xf'(x) - (x+1)f(x) = x(x+1)e^x - (x+1)xe^x = 0, \forall x$ điều phải chứng minh.

178) Giải phương trình $x(x^2 + 6)y'' - 4(x^2 + 3)y' + 6xy = 0$ biết rằng nó có nghiệm dạng đa thức.

HD giải: Ta tìm nghiệm riêng dưới dạng $y_1 = Ax^2 + Bx + C \Rightarrow y_1 = x^2 + 2$

nghiệm riêng thứ hai: $y_2 = y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int \frac{4(x^2+3)}{x(x+6)} dx} dx$

$$= (x^2 + 2) \int \frac{x^2(x^2 + 6)}{(x^2 + 2)^2} dx = (x^2 + 2) \left(x + \frac{2x}{(x^2 + 2)} + 2\sqrt{2} \arctg \frac{x}{\sqrt{2}} \right)$$

Vậy NTQ: $y = C_1(x^2 + 2) + C_2[x^3 + 4x + 2\sqrt{2}(x^2 + 2)\arctg \frac{x}{\sqrt{2}}]$

179) Giải phương trình $(2x+1)y'' + (2x-1)y' - 2y = x^2 + x$ biết rằng nó có hai nghiệm riêng $y_1 = \frac{x^2 + 4x - 1}{2}; y_2 = \frac{x^2 + 1}{2}$.

HD giải: Từ hai nghiệm riêng y_1, y_2 của phương trình ta suy ra nghiệm riêng của phương trình thuần nhất là $\bar{y}_1 = y_1 - y_2 = 2x - 1$

Suy ra nghiệm thứ hai:

$$\begin{aligned} \bar{y}_2 &= \bar{y}_1 \int \frac{1}{\bar{y}_1^2} e^{-\int p(x) dx} dx = (2x-1) \int \frac{1}{(2x-1)^2} e^{-\int \frac{2x-1}{2x+1} dx} dx \\ &= 2(x-1) \int \frac{(2x+1)e^{-x}}{(2x-1)^2} dx = \frac{1}{2}(2x-1) \left[-\frac{(2x+1)e^{-x}}{(2x-1)^2} + \int \frac{e^{-x}(1-2x)}{2x-1} dx \right] \\ &= -e^{-x} \end{aligned}$$

Suy ra NTQ: $\bar{y} = C_1(2x-1) + C_2e^{-x}$

Và nghiệm tổng quát của phương trình ban đầu: $y = C_1(2x-1) + C_2e^{-x} + \frac{x^2+1}{2}$

180) Xác định hằng số α sao cho $y = e^{\alpha x^2}$ là một nghiệm riêng của phương trình vi phân: $y'' + 4xy' + (4x^2 + 2)y = 0$. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình ấy.

HD giải: Ta tìm nghiệm riêng dưới dạng $y = e^{\alpha x^2}$ thay vào được $\alpha = -1$ và nghiệm riêng $y_1 = e^{-x^2}$

Nghiệm thứ hai: $y_2 = y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int P(x) dx} dx = e^{-x^2} \int e^{2x^2} e^{-\int 4x dx} dx = xe^{-x^2}$.

Vậy NTQ: $y = C_1e^{-x^2} + C_2xe^{-x^2}$.

181) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - y \\ \frac{dy}{dt} = 4x - y \end{cases}$$

HD giải: Phương trình đặc trưng $\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 4 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$ (bội 2)

Tìm nghiệm dạng $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (at+b)e^t \\ (ct+d)e^t \end{pmatrix}$ thay vào hệ rồi đồng nhất được:
$$\begin{cases} a = 3a - c \\ a + b = 3b - d \\ c = 4a - c \\ c + d = 4b - d \end{cases}$$

Cho $a = C_1, b = C_2 \Rightarrow c = 2C_1, d = 2C_2 - C_1$

Vậy nghiệm tổng quát:
$$\begin{cases} x = (C_1t + C_2)e^t \\ y = (2C_1t + 2C_2 - C_1)e^t. \end{cases}$$

182) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y \\ \frac{dy}{dt} = 4y - x \end{cases}$$

HD giải: Tương tự bài 1), phương trình đặc trưng có nghiệm $\lambda = 3$ (bội 2)

Tìm nghiệm dạng $\begin{pmatrix} (at+b)e^{3t} \\ (ct+d)e^{3t} \end{pmatrix} \Rightarrow a = C_1, c = C_1, b = C_2, d = C_1 + C_2$

Vậy NTQ:
$$\begin{cases} x = (C_1t + C_2)e^{3t} \\ y = (2C_1t + C_1 + C_2)e^{3t}. \end{cases}$$

183) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 2y - z \\ \frac{dy}{dt} = y - x + z \\ \frac{dz}{dt} = x - z \end{cases}$$

HD giải: Phương trình đặc trưng $\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & -1 \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda^2 - \lambda - 2) = 0$

$\Leftrightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 2$

Với các $\lambda_i; i = 1, 2, 3$ giải hệ:
$$\begin{pmatrix} 1-\lambda_i & -2 & -1 \\ -1 & 1-\lambda_i & 1 \\ 1 & 0 & -1-\lambda_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{1i} \\ P_{2i} \\ P_{3i} \end{pmatrix} = 0$$

Để tìm nghiệm riêng tương ứng. Từ đó suy ra hệ nghiệm cơ bản:

$x_1 = 1, y_1 = 0, z_1 = 1; x_2 = 0, y_2 = e^{-t}, z_2 = -2e^{-t}; x_3 = 3e^{2t},$
 $y_3 = -2e^{-2t}, z_3 = e^{2t}.$

Vậy hệ nghiệm tổng quát:
$$\begin{cases} x = C_1 + 3C_3e^{2t} \\ y = C_2e^{-t} - 2C_3e^{2t} \\ z = C_1 - 2C_2e^{-t} + C_3e^{2t} \end{cases}$$

184) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} - 5x - 3y = 0 \\ \frac{dy}{dt} + 3x + y = 0 \end{cases}$$

HD giải: Phương trình đặc trưng $\begin{vmatrix} 5-\lambda & 3 \\ -3 & -\lambda-1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2$ (bội 2)

$$\Rightarrow \text{nghiệm có dạng } \begin{pmatrix} at+b \\ ct+d \end{pmatrix} e^{2t} \text{ thay vào hệ} \Rightarrow \begin{cases} a-3b=3d \\ a+c=0 \\ c+3b=-3d \end{cases}$$

$$\text{Cho } a=C_1, b=C_2 \Rightarrow c=-C_1, d=\frac{C_1}{3}-C_2$$

$$\text{Vậy nghiệm tổng quát: } \begin{cases} x=(C_1t+C_2)e^{2t} \\ y=(-C_1t+\frac{C_1}{3}-C_2)e^{2t}. \end{cases}$$

$$\mathbf{185)} \text{ Giải hệ phương trình: } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - 3y \\ \frac{dy}{dt} = x - 2y + 2\sin t \end{cases}$$

HD giải: Phương trình đặc trưng có hai nghiệm $\lambda_{1,2} = \pm 1$

$$+ \lambda_1 = -1 \text{ giải hệ: } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{11} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} \Rightarrow \gamma_{11} = \gamma_{12} = 1.$$

$$+ \lambda_2 = 1 \text{ giải hệ: } \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{21} \\ \gamma_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \gamma_{21} = 3; \gamma_{22} = 1.$$

Hệ nghiệm cơ bản của hệ thuần nhất tương ứng là:

$$\begin{cases} x_1 = e^{-t} \\ y_1 = e^{-t} \end{cases}; \quad \begin{cases} x_2 = 3e^t \\ y_2 = e^t \end{cases}$$

$$\text{Vậy NTQ của hệ thuần nhất: } \begin{cases} x(t) = C_1e^{-t} + 3C_2e^t \\ y(t) = C_1e^{-t} + C_2e^t \end{cases}$$

Biến thiên hằng số:

$$\begin{cases} C_1'e^{-t} + 3C_2'e^t = 0 \\ C_1'e^{-t} + C_2'e^t = 2\sin t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1' = 3e^t \sin t \\ C_2' = e^{-t} \sin t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1(t) = \frac{3}{2}e^t(\sin t - \cos t) \\ C_2(t) = -\frac{1}{2}e^{-t}(\sin t + \cos t) \end{cases}$$

$$\text{Vậy NTQ: } \begin{cases} x(t) = C_1e^{-t} + 3C_2e^t - 3\cos t \\ y(t) = C_1e^{-t} + C_2e^t + \sin t - 2\cos t \end{cases}$$

$$\mathbf{186)} \text{ Giải hệ phương trình: } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - y + z \\ \frac{dy}{dt} = x + 2y - z \\ \frac{dz}{dt} = x - y + 2z \end{cases}$$

HD giải: Phương trình đặc trưng: $(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0$ có 3 nghiệm $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = 2$; $\lambda_3 = 3$.

$$\text{ứng với } \lambda_i \text{ giải hệ: } \begin{pmatrix} 2-\lambda_i & -1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda_i & -1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{1i} \\ P_{2i} \\ P_{3i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Được } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \text{ Suy ra hệ nghiệm cơ bản } \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \\ e^t \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} e^{3t} \\ 0 \\ e^{3t} \end{pmatrix}$$

$$\text{Vậy NTQ: } \begin{cases} x = C_2 e^{2t} + C_3 e^{3t} \\ y = C_1 e^t + C_2 e^{2t} \\ z = C_1 e^t + C_2 e^{2t} + C_3 e^{3t}. \end{cases}$$

$$\mathbf{187)} \text{ Giải hệ phương trình: } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y - 5 \cos t \\ \frac{dy}{dt} = 2x + y \end{cases}$$

HD giải: Dùng phương pháp khử: Lấy đạo hàm theo t phương trình thứ hai: $y'' = 2x' + y'$

Để ý phương trình đầu, đưa về: $y'' = 2(y - 5 \cos t) + y' \Leftrightarrow y'' - y' - 2y = -10 \cos t$.

Đây là phương trình tuyến tính cấp hai, giải ra được nghiệm tổng quát:

$$y = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-t} + 3 \cos t + \sin t$$

Thay vào phương trình đầu: $x = \frac{1}{2} C_1 e^{2t} - C_2 e^{-t} - \cos t - 2 \sin t$

$$\text{Vậy NTQ: } \begin{cases} x = A_1 e^{2t} + A_2 e^{-t} - \cos t - 2 \sin t \\ y = 2A_1 e^{2t} - A_2 e^{-t} + 3 \cos t + \sin t. \end{cases}$$

$$\mathbf{188)} \text{ Giải hệ phương trình: } \begin{cases} y' = 3y + 2z + 4e^{5x} \\ z' = y + 2z \end{cases}$$

HD giải: Nghiệm phương trình đặc trưng $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = 4$; NTQ: $\begin{cases} y = C_1 e^x + 2C_2 e^{4x} \\ z = -C_1 e^x + C_2 e^{4x} \end{cases}$

$$\text{Biến thiên hằng số: } \begin{cases} C_1' = \frac{4}{3} e^{4x} \\ C_2' = \frac{4}{3} e^x \end{cases} \rightarrow \text{NTQ } \begin{cases} y = C_1 e^x + 2C_2 e^{4x} + 3e^{5x} \\ z = -C_1 e^x + C_2 e^{4x} + e^{5x} \end{cases}$$

$$\mathbf{189)} \text{ Giải hệ phương trình: } \begin{cases} y' = 2y - z + 2e^x \\ z' = 3y - 2z + 4e^x \end{cases}$$

HD giải: Nghiệm tổng quát của hệ thuần nhất: $\begin{cases} y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} \\ z = C_1 e^x + 3C_2 e^{-x} \end{cases}$

Nghiệm riêng của hệ không thuần nhất: $\begin{cases} y^* = x e^x \\ z^* = (x + 1) e^x. \end{cases}$

$$\text{Vậy nghiệm tổng quát: } \begin{cases} y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + x e^x \\ z = C_1 e^x + 3C_2 e^{-x} + (x + 1) e^x. \end{cases}$$

$$\mathbf{190)} \text{ Giải hệ phương trình: } \begin{cases} y' = 2y - 4z + 4e^{-2x} \\ z' = 2y - 2z \end{cases}$$

HD giải: Nghiệm tổng quát:
$$\begin{cases} y = C_1(\cos 2x - \sin 2x) + C_2(\cos 2x + \sin 2x) \\ z = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + e^{-2x}. \end{cases}$$

191) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = y + z \\ \frac{dz}{dx} = z - 4y. \end{cases}$$

HD giải: Phương trình đặc trưng $\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$. Khi đó $\lambda_1 = 1 + 2i$, $\lambda_2 = 1 - 2i$. Hệ thuần nhất có nghiệm

$$y = e^x(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x), \quad z = 2e^x(C_2 \cos 2x - C_1 \sin 2x).$$

192) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = y + z + e^x \\ \frac{dz}{dx} = z - 4y. \end{cases}$$

HD giải: Phương trình đặc trưng $\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$. Khi đó $\lambda_1 = 1 + 2i$, $\lambda_2 = 1 - 2i$. Hệ thuần nhất có nghiệm

$$y = e^x(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x), \quad z = 2e^x(C_2 \cos 2x - C_1 \sin 2x).$$

Và nghiệm của hệ không thuần nhất

$$y = e^x(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x), \quad z = 2e^x(C_2 \cos 2x - C_1 \sin 2x) - e^x.$$

193) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = 2y - z \\ \frac{dz}{dx} = 2z + 4y + e^{2x}. \end{cases}$$

HD giải: Phương trình đặc trưng $\lambda^2 - 4\lambda + 8 = 0$. Khi đó $\lambda_1 = 2 + 2i$, $\lambda_2 = 2 - 2i$. Hệ thuần nhất có nghiệm

$$y = e^{2x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x), \quad z = -2e^{2x}(C_2 \cos 2x - C_1 \sin 2x).$$

Và nghiệm của hệ không thuần nhất

$$y = e^{2x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) - \frac{1}{4}e^{2x}, \quad z = -2e^{2x}(C_2 \cos 2x - C_1 \sin 2x).$$

194) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = 2y + z + e^x \\ \frac{dz}{dx} = z - 4y. \end{cases}$$

HD giải:

Phương trình đặc trưng $\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$. Khi đó $\lambda_1 = 1 + 2i$,

$\lambda_2 = 1 - 2i$. Hệ thuần nhất có nghiệm

$$y = e^x(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x), \quad z = 2e^x(C_2 \cos 2x - C_1 \sin 2x).$$

Và nghiệm của hệ không thuần nhất

$$y = e^x(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x), \quad z = 2e^x(C_2 \cos 2x - C_1 \sin 2x) - e^x.$$

195) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 2y \\ \frac{dy}{dt} = x - 5 \sin t. \end{cases}$$

HD giải: Nghiệm tổng quát của hệ phương trình thuần nhất:

$$\begin{cases} x = C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{2t} \\ y = -C_1 e^t + C_2 e^{2t}. \end{cases}$$

Biến thiên hằng số để được nghiệm:

$$\begin{cases} x = C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{2t} + \frac{8}{3} \sin t + \frac{4}{3} \cos t \\ y = -C_1 e^t + C_2 e^{2t} + 2 \cos t - \sin t. \end{cases}$$

196) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 2y + e^t \\ \frac{dy}{dt} = x + 4y + e^{2t}. \end{cases}$$

HD giải: Nghiệm của phương trình đặc trưng: $r_1 = 2; r_2 = 3$; từ đó được NTQ của hệ phương trình thuần nhất là:
$$\begin{cases} x = 2C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t} \\ y = -C_1 e^{2t} - C_2 e^{3t}. \end{cases}$$

Biến thiên hằng số để được nghiệm tổng quát của hệ không thuần nhất:

$$\begin{cases} x = 2C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t} - \frac{3}{2} e^t + 2t e^{2t} \\ y = -C_1 e^{2t} - C_2 e^{3t} + \frac{1}{2} e^t - (t+1) e^{2t}. \end{cases}$$

197) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y \\ \frac{dy}{dt} = 4y - z. \end{cases}$$

HD giải: Nghiệm của phương trình đặc trưng: $r_1 = r_2 = 3$. Vậy NTQ có dạng:
$$\begin{cases} x = (\lambda_1 + \mu_1 t) e^{3t} \\ y = (\lambda_2 + \mu_2 t) e^{3t}. \end{cases} \quad \text{với } \lambda_2 = \lambda_1 + \mu_1; \mu_2 = \mu_1$$

Tức là:
$$\begin{cases} x = (C_1 + C_2 t) e^{3t} \\ y = (C_1 + C_2 + C_2 t) e^{3t}. \end{cases}$$

198) Tìm nghiệm của hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + 8y \\ \frac{dy}{dt} = -x - 3y \end{cases}$$
 thỏa mãn các điều kiện: $x(0) = 6; y(0) = -2$

HD giải: Từ phương trình thứ hai: $x = -\frac{dy}{dt} - 3y$, lấy đạo hàm theo t hai vế, rồi thay vào phương trình thứ nhất của hệ được: $\frac{d^2y}{dt^2} - y = 0$, giải ra: $y = C_1e^t - C_2e^{-t}$, suy ra $x = -4C_1e^t - 2C_2e^{-t}$ thỏa mãn các điều kiện $x(0) = 6; y(0) = -2$, suy ra $C_1 = C_2 = -1$. Vậy nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x = 4e^t + 2e^{-t} \\ y = -e^t - e^{-t} \end{cases}$$

199) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - y + z \\ \frac{dy}{dt} = -x + 5y - z \\ \frac{dz}{dt} = x - y + 3z. \end{cases}$$

HD giải: Phương trình đặc trưng: $\lambda^3 - 11\lambda^2 + 36\lambda - 36 = 0$, giải ra $\lambda_1 = 2; \lambda_2 = 3; \lambda_3 = 6$. Từ đó được ba hệ nghiệm cơ bản:

$$\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{3t} \\ e^{6t} \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 \\ e^{3t} \\ -2e^{6t} \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} -e^{2t} \\ e^{3t} \\ e^{6t} \end{pmatrix}.$$

Vậy nghiệm tổng quát:

$$\begin{cases} x = C_1e^{2t} + C_2e^{3t} + C_3e^{6t} \\ y = C_2e^{3t} - 2C_3e^{6t} \\ z = -C_1e^{2t} + C_2e^{2t} + C_3e^{6t}. \end{cases}$$

200) Tìm nghiệm tổng quát của hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = y + z \\ \frac{dz}{dx} = z - 4y. \end{cases}$$

HD giải: Phương trình đặc trưng: $(\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0$, giải ra $\lambda_1 = 1; \lambda_2 = 2$. Từ đó được ba hệ nghiệm cơ bản:

$$\begin{pmatrix} e^x \\ -e^x \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 2e^{2x} \\ -3e^{2x} \end{pmatrix}.$$

Vậy nghiệm tổng quát:

$$\begin{cases} y = C_1e^x + 2C_2e^{3x} \\ z = -C_1e^x - 3C_2e^{2x}. \end{cases}$$

201) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - 3y \\ \frac{dy}{dt} = x - 2y + 2 \sin t. \end{cases}$$

HD giải: Phương trình đặc trưng có các nghiệm $\lambda_1 = -1; \lambda_2 = 1$. Từ đó được hệ nghiệm cơ bản: $\begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 3e^t \\ e^t \end{pmatrix}$.

Vậy nghiệm tổng quát:
$$\begin{cases} x = C_1 e^{-t} + 3C_2 e^t \\ y = C_1 e^{-t} + C_2 e^t. \end{cases}$$

Biến thiên hằng số:
$$\begin{cases} C_1' e^{-t} + 3C_2' e^t = 0 \\ C_1' e^{-t} + C_2' e^t = 2 \sin t. \end{cases} \iff \begin{cases} C_1' = 3e^t \sin t \\ C_2' = e^{-t} \sin t. \end{cases}$$

Giải ra:
$$\begin{cases} C_1(t) = \frac{3}{2} e^t (\sin t - \cos t) \\ C_2(t) = -\frac{1}{2} e^{-t} (\sin t + \cos t). \end{cases}$$

Vậy nghiệm tổng quát của hệ:
$$\begin{cases} x(t) = C_1 e^{-t} + 3C_2 e^t - 3 \cos t \\ y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^t + \sin t - 2 \cos t. \end{cases}$$