ENSAE

Deuxième année

Introduction aux processus

Ecrit. Deux heures. Documents autorisés

Nicolas Chopin

Justifiez toutes vos réponses.

Solution:
Total sur 21 points. Ne pas mettre de demi-point.

1 Temps d'arrêt

Soient τ et ν deux temps d'arrêt par rapport à une filtration $(\mathcal{F}_n)$, et soient $\mathcal{F}_\tau$ et $\mathcal{F}_\nu$ les tribus associées à τ et ν (comme définies en cours).

1. Montrer que $\tau + \nu$ est un temps d'arrêt.

   Solution:
   Un temps d'arrêt τ est tel que $\{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n$ (pour tout n). Or

   $$\{\tau + \nu = n\} = \cup_{s=0}^{n} \{\tau = s\} \cap \{\nu = t - s\}$$

   qui est une union d'éléments de $\mathcal{F}_n$ (puisque $\{\tau = s\} \in \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$, et même chose pour le second ensemble.) **[1 point]**

2. Montrer que si $\tau \leq \nu$ p.s., $\mathcal{F}_\tau \subset \mathcal{F}_\nu$.

   Solution:
   Pour $A \in \mathcal{F}_\tau$, $A \cap \{\tau = t\} \in \mathcal{F}_t$ pour tout t, et donc

   $$A \cap \{\nu = t\} = \cup_{s=0}^{t} A \cap \{\tau = s\} \cap \{\nu = t\}$$

   est $\in \mathcal{F}_t$ en tant qu'union d'éléments de $\mathcal{F}_t$; en effet $A \cap \{\tau = s\} \in \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ (définition de $\mathcal{F}_\tau$) et $\{\nu = t\} \in \mathcal{F}_t$ par définition des temps d'arrêt. **[1 point]**

2 Le damier

Soit un damier de 9 cases, et un pion se déplaçant d'une case à chaque temps, avec une probabilité uniforme d'atteindre les k cases voisines (donc dans un des quatre coins, $k = 2$, dans la case du centre, $k = 4$, et pour les autres cases, $k = 3$).

1. Montrer que la chaîne de Markov correspondante est irréductible et récurrente positive.

Solution:

On peut clairement passer d'une case à une autre en deux coups maximum donc la chaîne est irréductible. **[1 point]** Cours: une chaîne irréductible sur un espace fini est récurrente positive. **[1 point]**

2. Déterminer la loi invariante. (Indication: utiliser les symétries du problème pour simplifier le calcul.)

Solution:

Soit π_c la probabilité d'être dans un coin, π_b d'être dans une des quatres cases de la "croix" (les cases du bord qui ne sont pas des coins), et π_m la probabilité de la case du milieu. (Par symétrie, les probabilités sont identiques pour les 4 coins, etc.)

L'équation $\pi P = \pi$ donne ici:

$$\begin{aligned}
\pi_c &= \frac{2}{3}\pi_b \\
\pi_b &= \pi_c + \frac{1}{4}\pi_m \\
\pi_m &= \frac{4}{3}\pi_b
\end{aligned}$$

et par ailleurs: $\pi_m + 4\pi_b + 4\pi_c = 1$. On trouve au final: $\pi_b = 1/8$, $\pi_c = 1/12$, $\pi_m = 1/6$. **[2 points: 1 point pour le calcul, 1 point pour la prise en compte des symétries]**

3. Même question que la question 1 pour un damier de taille $k \times k$ pour un entier arbitraire $k \geq 2$.

Solution:

D'une case, on peut atteindre une autre en maximum $(2k - 1)$ coups. La chaîne est bien irréductible, et donc encore une fois récurrente positive. **[1 point]**

3 Une martingale dans $[0,1]$

Soit $\alpha \in [0,1]$ et soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires telle que $X_0 = \alpha$ et

$$\mathbb{P}\left(X_{n+1} = \frac{X_n}{2} \middle| \mathcal{F}_n \right) = 1 - X_n$$

et

$$\mathbb{P}\left(X_{n+1} = \frac{1+X_n}{2} \middle| \mathcal{F}_n \right) = X_n$$

où $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la filtration canonique: $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \ldots, X_n)$.

1. Vérifier que $X_n \in [0,1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   Solution:

   Par récurence: $X_0 = \alpha \in [0,1]$, et au temps n, conditionnellement à $\mathcal{F}_n$, X_n prend deux valeurs, toutes les deux dans $[0,1]$. **[1 point]**

2. Démontrer que (X_n) est une $(\mathcal{F}_n)$-martingale.

   Solution:

   $$\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \frac{X_n(1-X_n)}{2} + \frac{X_n(1+X_n)}{2} = X_n$$

   C'est bien une martingale **[1 point]**, intégrable car bornée dans $[0,1]$. **[1 point]**

3. Démontrer que (X_n) converge dans $\mathcal{L}^2$, et p.s. On notera Z la limite des X_n.

   Solution:

   $\mathcal{L}^2$: la martingale (X_n) est bornée, donc bornée dans L^2, donc elle converge (théorème du cours, **[1 point]**). ps: Théorème du cours, une sur-martingale positive converge p.s. (et une martingale est bien une sur-martingale). **[1 point]**

4. Montrer que

   $$\mathbb{E}\left[(X_{n+1} - X_n)^2\right] = \frac{1}{4}\mathbb{E}\left[X_n(1-X_n)\right].$$

   Solution:

   $$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[(X_{n+1} - X_n)^2 \middle| \mathcal{F}_n\right] &= (1-X_n)\frac{X_n^2}{4} + X_n\frac{(1-X_n)^2}{4} \\ &= \frac{X_n(1-X_n)}{4} \end{aligned}$$

   puis on applique la formule de la double espérance. **[1 point]**

5. En déduire la valeur de $\mathbb{E}[Z(1-Z)]$.

Solution:

Puisque X_n converge p.s. vers Z et est bornée, $\mathbb{E}[X_n(1-X_n)] \to \mathbb{E}[Z(1-Z)]$ (théorème de convergence dominée, **1 point**). Puisque (X_n) converge dans $\mathcal{L}_2$, $\mathbb{E}[(X_{n+1}-X_n)^2] \to 0$ (suite de Cauchy), et donc au final $\mathbb{E}[Z(1-Z)] = 0$. **[1 point]**.

6. Déduire de tout ce qui précède la loi de Z.

Solution:

On vient de montrer que $Z(1-Z) = 0$ p.s., donc $Z = 0$ ou $Z = 1$ p.s., et puisque $\mathbb{P}(Z = 1) = \mathbb{E}(Z) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n) = \alpha$ (martingale), Z est une variable de Bernoulli de proba α. **[1 point]**

7. Soit $\tau = \inf\{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : X_n > X_{n-1}\}$, avec la convention habituelle $\inf \emptyset = +\infty$. Vérifier que τ est un temps d'arrêt.

Solution:

L'événement $\{\tau \leq n\}$ est bien fonction mesurable de $(X_0, \ldots, X_n)$ (si j'observe le processus jusqu'au temps n, je peux bien déterminer si $X_k > X_{k-1}$ pour $1 \leq k \leq n$), donc c'est bien un temps d'arrêt. **[1 point]**

8. En utilisant un théorème d'arrêt, démontrer la relation

$$\mathbb{E}(2^{-\tau}) = 1 - \frac{1}{2\alpha}\mathbb{P}(\tau < \infty)$$

et en déduire, en particulier, que si $\alpha < 1/2$ alors $\mathbb{P}(\tau = \infty) > 0$. (Commencez par supposer que l'on peut bien appliquer un théorème d'arrêt. S'il vous reste du temps, essayez de justifier cette application.)

Solution:

On a (définition du cours): $X_\tau = \sum_{t=0}^{\infty} X_t \mathbb{1}\{\tau = t\}$; en particulier $X_\tau = 0$ conditionnellement à $\tau = \infty$. De plus, par définition de τ, on voit que:

$$\begin{aligned} X_\tau &= \frac{1 + \alpha 2^{1-\tau}}{2} \mathbb{1}\{\tau < \infty\} \\ &= \frac{1}{2}\mathbb{1}\{\tau < \infty\} + \alpha 2^{-\tau} \end{aligned}$$

(car τ est le premier temps où $X_n \neq X_{n-1}/2$). On prend l'espérance et on utilise le fait que $\mathbb{E}(X_\tau) = E(X_0) = \alpha$ (théorème d'arrêt vu en cours: la martingale est bornée) pour obtenir l'égalité souhaitée. Si $\mathbb{P}(\tau < \infty) = 1$, l'égalité implique que $\mathbb{E}(2^{-\tau}) = 1 - 1/2\alpha < 0$, si $\alpha < 1/2$, ce qui est absurde. Donc $\mathbb{P}(\tau < \infty) < 1$ si $\alpha < 1/2$. **[2 points]**.

Justification du théorème d'arrêt: on a vu deux théorèmes d'arrêt: un ou le temps d'arrêt est borné (pas le cas ici), et un autre où la martingale est régulière, soit $X_n = E[Z|\mathcal{F}_n]$ pour une certaine variable intégrable Z. Ici, c'est bien le cas, car, conditionnellement à $\mathcal{F}_n$, le processus $(X_{n+t})_{t\geq 0}$ se comporte comme le processus de départ, la valeur initiale exceptée (on remplace α par X_n). En particulier, ce processus converge vers $Z \sim B(X_n)$. Donc $E[Z|\mathcal{F}_n] = X_n$, et on a bien une martingale régulière. Autre justification possible: une martingale est régulière ssi elle converge dans $\mathcal{L}_1$, ce qui est le cas ici (théorème de convergence dominée). **[2 points]**.