TD1 : DIFFÉRENTS TYPES DE CONVERGENCE

Le but de cette séance est de manipuler les différents types de convergence d'une suite de variables aléatoires réelles. Rappelons, en particular, que les relations suivantes entre les diffÃl'rents type de convergence sont vraies :

$$
\begin{tikzcd}
\boxed{\xi_n \xrightarrow{p.s.} \xi} \arrow[dr, Rightarrow] & & \\
& \boxed{\xi_n \xrightarrow{P} \xi} \arrow[r, Rightarrow] & \boxed{\xi_n \xrightarrow{\mathscr{L}} \xi} \\
\boxed{\xi_n \xrightarrow{L_2} \xi} \arrow[ur, Rightarrow] & &
\end{tikzcd}
$$

Les exercices ci-dessous ont pour objectif de montrer que

$$
\begin{tikzcd}
\boxed{\xi_n \xrightarrow{p.s.} \xi} & & \\
& \boxed{\xi_n \xrightarrow{P} \xi} \arrow[ul, Rightarrow, "\times" marking] \arrow[dl, Rightarrow, "\times" marking] & \boxed{\xi_n \xrightarrow{\mathscr{L}} \xi} \arrow[l, Rightarrow, "\times" marking] \\
\boxed{\xi_n \xrightarrow{L_2} \xi} \arrow[uu, Rightarrow, "\times" marking] & &
\end{tikzcd}
$$

Exercice 1. Montrer que si $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$ et $\xi_n \xrightarrow{P} \eta$, alors les variables ξ et η sont presque sûrement égales, c'est-à-dire

$$\mathbf{P}(\xi = \eta) \triangleq \mathbf{P}\big(\{\omega : \xi(\omega) = \eta(\omega)\}\big) = 1.$$

Dans les trois exercices suivants, on suppose que

$$(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P}) = ([0,1], \mathscr{B}_{[0,1]}, \lambda),$$

où λ est la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$.

Exercice 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$\xi_n(\omega) = (-1)^n \mathbb{1}_{[0,1/2]}(\omega) + (-1)^{n+1} \mathbb{1}_{(1/2,1]}(\omega).$$

1. La suite $\{\xi_n\}$, converge-t-elle en loi ?
2. La suite $\{\xi_n\}$, converge-t-elle en probabilité ?

3. La suite $\{\xi_n\}$, converge-t-elle presque sûrement ?

Exercice 3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\xi_n(\omega) = n\mathbb{1}_{[0,1]}(n\omega)$.

1. La suite $\{\xi_n\}$, converge-t-elle en probabilité ?
2. La suite $\{\xi_n\}$, converge-t-elle presque sûrement ?
3. La suite $\{\xi_n\}$, converge-t-elle au sens L_2 ?

Exercice 4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit k_n l'unique nombre entier vérifiant $2^k \leq n < 2^{k+1}$. On définit la suite $\{\xi_n\}$ par

$$\xi_n(\omega) = \mathbb{1}_{[n,n+1]}(2^{k_n+1}\omega).$$

1. Tracer les graphiques de ξ_3 et ξ_6.
2. Montrer que la suite $\{\xi_n\}$ converge en probabilité vers zéro.
3. Montrer que la suite $\{\xi_n\}$ ne converge pas presque sûrement.