ENSAE **Introduction aux processus**
2ème année **Pierre Alquier**

TD n° 1 : Espérance conditionnelle, rappels de probabilités

Remarque pour les chargés de TD : j'ai fait des révisions en cours sur les propriétés de l'espérance conditionnelle, mais pas sur son calcul pratique ni sur le calcul de lois conditionnelles. Les exercices 1 et 2 doivent surtout être l'occasion de faire des petits rappels là-dessus. Je n'ai pas non plus fait de rappel sur les différentes notions de convergence, l'exercice 5 sert surtout pour ça. Ce sont donc les exercices à traiter en priorité.

Exercice 1. Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, avec $\mathbb{E}(X^2) < \infty$, et soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de $\mathcal{F}$. On pose $Y = \mathbb{E}(X|\mathcal{A})$.

1) Démontrer que $0 \leq \mathbb{E}(Y^2) \leq \mathbb{E}(X^2)$.
D'une part $Y^2 \geq 0$ donc $\mathbb{E}(Y^2) \geq 0$.
D'autre part
$$\mathbb{E}(Y^2) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{A})^2) \leq \mathbb{E}(\mathbb{E}(X^2|\mathcal{A})) = \mathbb{E}(X^2).$$

2) Démontrer que $\mathbb{E}(Y^2) = \mathbb{E}(X^2) \Rightarrow X = Y$ p.s.
On calcule
$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(X-Y)^2] &= \mathbb{E}(X^2) + \mathbb{E}(Y^2) - 2\mathbb{E}(XY) \\
&= 2\mathbb{E}(Y^2) - 2\mathbb{E}(XY) \text{ par hypothèse} \\
&= 2\mathbb{E}(Y^2) - 2\mathbb{E}(\mathbb{E}(XY|\mathcal{A})) \\
&= 2\mathbb{E}(Y^2) - 2\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{A})Y) \text{ car } Y \ \mathcal{A}\text{-mesurable} \\
&= 2\mathbb{E}(Y^2) - 2\mathbb{E}(Y^2) \text{ par définition de } Y \\
&= 0
\end{aligned}$$
donc $X = Y$ p.s.

3) Ce résultat reste-t'il vrai si $\mathbb{E}(X^2) = \infty$?
Non, voici un contre-exemple possible. Soient $\Omega = \{1, 2, 3\}$, avec la σ-algèbre $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$ et $\mathbb{P}$ uniforme : $\mathbb{P}(\{1\}) = \mathbb{P}(\{2\}) = \mathbb{P}(\{3\}) = 1/3$. On pose
$$X = 0 \times \mathbf{1}_{\{1\}} + 1 \times \mathbf{1}_{\{2\}} + 2 \times \mathbf{1}_{\{3\}}.$$
On a bien $\mathbb{E}(X^2) = \infty$. On pose
$$\mathcal{A} = \{\emptyset, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}\}$$
qui est bien une σ-algèbre. Bien noter que $\mathcal{A} = \sigma(Z)$ où $Z = \mathbf{1}_{\{X<\infty\}}$. On a
$$\mathbb{E}(X|Z = 0) = \mathbb{E}(X|X < \infty) = 0 \times (1/2) + 1 \times (1/2) = 1/2$$
et
$$\mathbb{E}(X|Z = 1) = \mathbb{E}(X|X = \infty) = \infty.$$
Donc :
$$Y = \mathbb{E}(X|\mathcal{A}) = \mathbb{E}(X|Z) = (1/2)\mathbf{1}_{\{1,2\}} + \infty\mathbf{1}_{\{3\}}.$$
Donc on a bien $\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}(Y^2) = \infty$ mais pas $X = Y$ p.s...

Exercice 2. On considère un vecteur $X = (X_1, X_2)$ de densité (par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$) :

$$f_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{3}{2}\,\frac{1}{\sqrt{x_1}} & 0 \le x_2 \le x_1 \le 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1) Calculer la densité marginale de X_1, de X_2. Calculer $\mathbb{E}(X_1)$.
Calculs :

$$f_{X_2}(x_2) = \int_0^1 f_{X_1,X_2}(x_1, x_2)\mathrm{d}x_1 = \cdots = 3 - 3\sqrt{x_2} \textit{ pour } 0 \le x_2 \le 1,$$

$$f_{X_1}(x_1) = \cdots = \frac{3}{2}\sqrt{x_1} \textit{ pour } 0 \le x_1 \le 1.$$

Du coup,

$$\mathbb{E}(X_1) = \int_0^1 x_1 f_{X_1}(x_1)\mathrm{d}x_1 = \cdots = \frac{3}{5}.$$

2) Déterminer une densité conditionnelle de $X_2|X_1 = x_1$, et en déduire la valeur de $\mathbb{E}(X_2|X_1 = x_1)$ et de $\mathbb{E}(X_2|X_1)$.
On a :

$$f_{X_2|X_1=x_1}(x_2) = \frac{f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)}{f_{X_1}(x_1)} = \frac{1}{x_1}\mathbf{1}_{0\le x_2\le x_1}.$$

Autrement dit, $X_2|X_1 = x_1$ suit la loi uniforme sur $[0, x_1]$. On déduit immédiatement que

$$\mathbb{E}(X_2|X_1 = x_1) = \frac{x_1}{2} \textit{ et } \mathbb{E}(X_2|X_1) = \frac{X_1}{2}.$$

3) Est-ce que X_1 et X_2 sont indépendantes ?
Si elles l'étaient, $\mathbb{E}(X_2|X_1)$ serait constante, donc non.

Exercice 3. Soit T une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre 1 et X une variable aléatoire qui, conditionnellement à T, suit une loi gaussienne d'espérance 0 et de variance $1/T$. Autrement dit, $T \sim \mathcal{E}(1)$ et $X|T \sim \mathcal{N}(0, 1/T)$.

1) Déterminer la densité de X.
Tout d'abord, avec un λ général :

$$f_{(X,T)}(x,t) = f_{X|T=t}(x)f_T(t) = \sqrt{\frac{t}{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{tx^2}{2}}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda t}\mathbf{1}_{t\ge 0} = \frac{\lambda}{\sqrt{2\pi}}t^{\frac{3}{2}-1}\mathrm{e}^{-t\left(\lambda+\frac{x^2}{2}\right)}\mathbf{1}_{t\ge 0}$$

donc

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \frac{\lambda}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty t^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-t\left(\lambda+\frac{x^2}{2}\right)}\mathrm{d}t \\ &= \frac{\lambda}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty u^{\frac{1}{2}}\left(\lambda+\frac{x^2}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-u}\frac{\mathrm{d}u}{\lambda+\frac{x^2}{2}} \\ &= \frac{\lambda}{\sqrt{2\pi}(\lambda+\frac{x^2}{2})^{\frac{3}{2}}}\int_0^\infty u^{\frac{3}{2}-1}\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u \\ &= \frac{\lambda}{\sqrt{2\pi}(\lambda+\frac{x^2}{2})^{\frac{3}{2}}}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\lambda}{\sqrt{2\pi}(\lambda+\frac{x^2}{2})^{\frac{3}{2}}}\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{\lambda}{\sqrt{2\pi}(\lambda+\frac{x^2}{2})^{\frac{3}{2}}}\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{\lambda}{(2\lambda+x^2)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

Pour $\lambda = 1$, on reconnaît(?) la loi de Student à 2 degrés de liberté.

2) Quelle est la loi de T conditionnellement à X ?

En regardant $f_{(X,T)}(x,t)$ on reconnaît immédiatement $T|X \sim \mathrm{Gamma}(\frac{3}{2}, \lambda + \frac{X^2}{2})$.

3) Calculer $\mathbb{E}(T|X)$.

L'espérance de $\mathrm{Gamma}(a,b)$ est a/b donc

$$\mathbb{E}(T|X) = \frac{3}{2\lambda + X^2}.$$

Exercice 4. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0,1]$. Calculer $\mathbb{E}[Y|X \vee Y]$ et $\mathbb{E}[Y|X \wedge Y]$.

On peut démontrer que la statistique d'ordre $(U,V) = (X \wedge Y, X \vee Y)$ admet comme densité par rapport à la mesure de Lebesgue

$$f_{(U,V)}(u,v) = 2\mathbf{1}_{0 \leq u \leq v \leq 1}.$$

Or, $X + Y = U + V$ donc

$$\mathbb{E}(X+Y|U) = \mathbb{E}(U+V|U) = U + \mathbb{E}(V|U).$$

Les variables X et Y ayant des rôles symétriques, on a directement : $\mathbb{E}(X|U) = \mathbb{E}(Y|U)$ et donc

$$\mathbb{E}(Y|U) = \frac{U}{2} + \frac{\mathbb{E}(V|U)}{2}.$$

Finalement, on calcule la densité de $V|U = u$ par rapport à Lebesgue, c'est

$$f_{V|U=u}(v) = \frac{1}{1-u}\mathbf{1}_{u \leq v \leq 1}$$

donc l'espérance est $(1+u)/2$ et finalement,

$$\mathbb{E}(Y|U) = \frac{U}{2} + \frac{1+U}{4},$$

ie

$$\mathbb{E}(Y|X \wedge Y) = \frac{1 + 3(X \wedge Y)}{4}.$$

De façon similaire, $\mathbb{E}(Y|X \vee Y) = \frac{3(X \vee Y)}{4}$.

Exercice 5. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées, de loi exponentielle de paramètre α et N une variable aléatoire, indépendante de la suite $(X_n)_{n \geq 1}$, de loi géométrique de paramètre p. On pose, pour $n \geq 1$,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

Calculer $\mathbb{E}(S_N|N)$ et $\mathbb{E}(N|S_N)$.

D'abord, la loi de $S_N|N = n$ est la loi de S_n, donc c'est une loi $\mathrm{Gamma}(n,\alpha)$ (si ils ont oublié pourquoi, le redémontrer viteuf avec la fonction caractéristique). On en déduit immédiatement

$$\mathbb{E}(S_N|N) = \frac{N}{\alpha}.$$

On en déduit également la loi jointe du couple (N, S_N) qui a une densité par rapport à $\mu \otimes \lambda$, μ étant la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$ et λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, donné par

$$f_{(N,S_N)}(n,s) = f_N(n) f_{S_N|N=n}(s) = (1-p)^{n-1} p \mathbf{1}_{\{n\geq 1\}} \frac{\alpha^n}{\Gamma(n)} s^{n-1} \mathrm{e}^{-\alpha s} \mathbf{1}_{\{s>0\}}.$$

On en déduit que

$$f_{N|S_N=s}(n) \propto \frac{[(1-p)\alpha s]^{n-1}}{(n-1)!} \mathbf{1}_{\{n-1\geq 0\}}$$

et donc que $(N-1)|S_N = s$ suit une loi de Poisson $\mathcal{P}((1-p)\alpha s)$. Donc :

$$\mathbb{E}(N|S_N) = 1 + (1-p)\alpha s.$$

Exercice 6. Quelques révisions sur les différentes notions de convergences de variables aléatoires :

1) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a.réelles avec $|X_n| \leq c$ p.s.
   i) Montrer que si (X_n) converge en probabilité alors elle converge aussi dans L^p pour tout $p \geq 1$.
   (Note pour les chargés de TD : ceci est surtout l'occasion pour vous de rappeler les définitions de tous ces types de convergence, que la moitié des étudiants a oublié.
   Soit $\varepsilon > 0$ quelconque. On a, pour $1 \leq p < \infty$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(|X_n - X|^p\right) &= \mathbb{E}\left(|X_n - X|^p \mathbf{1}_{\{|X_n - X|\leq\varepsilon\}} + |X_n - X|^p \mathbf{1}_{\{|X_n - X|>\varepsilon\}}\right) \\ &\leq \varepsilon^p + 2^p c^p \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} \varepsilon^p.\end{aligned}$$

   Comme ε peut être pris arbitrairement petit on a $\mathbb{E}\left(|X_n - X|^p\right) \to 0$. Preuve similaire pour $p = \infty$.
   ii) Proposer un contre-exemple qui montre que si l'hypothèse de bornitude n'est pas satisfaite, le résultat précédent ne tient plus.
   Par exemple $X = 0$ et $X_n = n\mathbf{1}_{A_n}$ où $\mathbb{P}(A_n) = 1/\sqrt{n}$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$: $\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \leq \mathbb{P}(A_n) = 1/\sqrt{n} \to 0$. En revanche, pour $1 \leq p < \infty$:

$$\mathbb{E}\left(|X_n - X|^p\right) = \frac{n^p}{\sqrt{n}} = n^{p-\frac{1}{2}} \to \infty.$$

   Pour $p = \infty$ on a $\|X - X_n\|_p = n \to \infty$.
2) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.réelles i.i.d. avec $\mathbb{E}(X_1) = 0$ et $0 < \mathbb{E}(X_1^2) = \sigma^2 < \infty$. On pose

$$Y_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

   i) (Facile). Rappeler pourquoi (Y_n) converge en loi et donner la loi limite.
   Par le théorème central limite : $Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$.
   ii) (Plus difficile, facultatif). Démontrer que (Y_n) ne converge pas en probabilité.
   Supposons que $Y_n \xrightarrow{p.} Y$. Alors, $Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Y$ et donc $Y \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ d'après i). D'autre part, posons, pour $k < n$:

$$Y_n^k = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=k}^{n} X_i.$$

On voit facilement que, pour k fixé,

$$Y - Y_n^k = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{k} X_i \xrightarrow[n\to\infty]{p.} 0.$$

Donc

$$Y_n^k \xrightarrow[n\to\infty]{p.} Y.$$

Or, pour tout k, chaque $n > k$, $Y_n^k \in \sigma(X_k, X_{k+1}, \dots)$ donc $Y \in \sigma(X_k, X_{k+1}, \dots)$. Autrement dit,

$$Y \in \mathcal{F}_\infty = \bigcap_{k>0} \sigma(X_k, X_{k+1}, \dots).$$

Or, d'après la loi du 0/1 de Kolmogorov, pour tout $A \in \mathcal{F}_\infty$, on a $\mathbb{P}(A) \in \{0,1\}$. C'est en contradiction avec le fait que $Y \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$: prendre par exemple $A = \{Y \geq 0\}$, on devrait avoir $\mathbb{P}(Y \geq 0) = 1/2 \in \{0,1\}$. Donc il était absurde de supposer $Y_n \xrightarrow{p.} Y$.

— (Plus difficile, facultatif). Soit (X_n) une suite de variables aléatoires réelles de densités respectives f_n et X une v.a.r. de densité f.

i) Montrer que si $f_n \to f$ presque partout alors $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ (convergence en loi). Indication : montrer en fait $f_n \to f$ p.p $\Rightarrow f_n \xrightarrow{L_1} f \Rightarrow X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

Noter que

$$\int |f - f_n| = \int (f - f_n)_+ + \int (f - f_n)_-.$$

Donc il suffit de montrer que $\int (f - f_n)_+$ et $\int (f - f_n)_-$ tendent vers 0. Or on remarque que :

$$0 \leq (f - f_n)_+ = \max(f - f_n, 0) \leq \max(f, 0) = f.$$

Donc la suite de fonctions positives $\int (f - f_n)_+$ est dominée par f, et par hypothèse, $f \to f_n$ p.p donc $(f - f_n)+ \to 0$ p.p. Par le théorème de convergence dominée,

$$\int (f - f_n)_+ \to 0.$$

Ensuite, on peut remarquer que :

$$0 = 1 - 1 = \int f_n - \int f = \int (f - f_n) = \int (f - f_n)_+ - \int (f - f_n)_-.$$

Donc

$$\int (f - f_n)_- = \int (f - f_n)_+ \to 0.$$

Donc on a bien $f_n \xrightarrow{L_1} f$. Pour en déduire la convergence en loi, noter par exemple que, pour tout φ continue bornée,

$$\begin{aligned}
|\mathbb{E}[\varphi(X_n) - \varphi(X)]| &= \left| \int_0^\infty \varphi(x) f_n(x) \mathrm{d}x - \int_0^\infty \varphi(x) f(x) \mathrm{d}x \right| \\
&\leq \int_0^\infty \varphi(x) |f_n(x) - f(x)| \mathrm{d}x \leq \|\varphi\|_\infty \int_0^\infty |f_n(x) - f(x)| \mathrm{d}x \to 0.
\end{aligned}$$

Donc $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

ii) Montrer que la réciproque est fausse. Indication : poser $f_n(x) = [1-\varphi(nx)]\mathbf{1}_{[0,1]}(x)$ pour φ bien choisie.

Considérer $\varphi = \sin$. *On vérifie aisément que*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\mathrm{e}^{itX_n}) &= \int_0^1 (1-\sin(nx))\mathrm{e}^{itx}\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \mathrm{e}^{itx}\mathrm{d}x + \left[\mathrm{e}^{itx}\frac{\cos(nx)}{n}\right] - \int_0^1 it\mathrm{e}^{itx}\frac{\cos(nx)}{n}\mathrm{d}x \to \int_0^1 \mathrm{e}^{itx}\mathrm{d}x = \mathbb{E}(\mathrm{e}^{itX}).\end{aligned}$$

et donc, par le théorème de Lévi, $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$. *En revanche, on voit aussi que* $\sin(nx)$ *ne converge pas vers* 0 *p.p. et donc* f_n *ne converge pas vers* f *p.p.*

ENSAE **Introduction aux processus**
2ème année **Pierre Alquier**

TD N° 2 : Martingales et temps d'arrêts

Exercices 1 et 2 : sur les temps d'arrêt. Exercices suivants : sur le début du chapitre sur les martingales (définitions et propriétés élémentaires, théorème d'arrêt, décomposition de Doob et jusqu'aux inégalités maximales ; pas besoin d'avoir vu les résultats de convergence).

Exercice 1. Soit $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une filtration sur un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{F})$. On rappelle que pour tout temps d'arrêt τ, la σ-algèbre $\mathcal{F}_\tau$ est définie par

$$A \in \mathcal{F}_\tau \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} : A \cap \{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n.$$

Soient τ_1 et τ_2 deux temps d'arrêt. Compléter la preuve des propriétés énoncées en cours :

1) $\tau_1 + \tau_2$, $\tau_1 \wedge \tau_2$ et $\tau_1 \wedge \tau_2$ sont aussi des temps d'arrêt,
On a :

$$\{\tau_1 + \tau_2 = n\} = \bigcup_{i=0}^{n} (\{\tau_1 = i\} \cap \{\tau_2 = n - i\}) \in \mathcal{F}_n,$$

$$\{\tau_1 \wedge \tau_2 \leq n\} = \{\tau_1 \leq n\} \cup \{\tau_2 \leq n\} \in \mathcal{F}_n,$$

$$\{\tau_1 \vee \tau_2 \leq n\} = \{\tau_1 \leq n\} \cap \{\tau_2 \leq n\} \in \mathcal{F}_n.$$

2) $\tau_1 \leq \tau_2 \Rightarrow \mathcal{F}_{\tau_1} \subset \mathcal{F}_{\tau_2}$,
Soit $A \in \mathcal{F}_{\tau_1}$, alors : $\forall n, A \cap \{\tau_1 \leq n\} \in \mathcal{F}_n$. Du coup,

$$A \cap \{\tau_2 \leq n\} = (A \cap \{\tau_1 \leq n\}) \cap \{\tau_2 \leq n\} \in \mathcal{F}_n.$$

Donc, $A \in \mathcal{F}_{\tau_2}$.

3) $\mathcal{F}_{\tau_1\wedge\tau_2} = \mathcal{F}_{\tau_1} \cap \mathcal{F}_{\tau_2}$,
Le sens $\mathcal{F}_{\tau_1\wedge\tau_2} \subset \mathcal{F}_{\tau_1} \cap \mathcal{F}_{\tau_2}$ est direct d'après le 2). On montre : $\mathcal{F}_{\tau_1} \cap \mathcal{F}_{\tau_2} \subset \mathcal{F}_{\tau_1\wedge\tau_2}$. Pour ceci, on fixe $A \in \mathcal{F}_{\tau_1} \cap \mathcal{F}_{\tau_2}$. Du coup, $A \cap \{\tau_1 \leq n\}$ et $A \cap \{\tau_2 \leq n\}$ sont tous les deux dans $\mathcal{F}_n$, et donc :

$$A \cap \{\tau_1 \wedge \tau_2 \leq n\} = (A \cap \{\tau_1 \leq n\}) \cup (A \cap \{\tau_2 \leq n\}) \in \mathcal{F}_n$$

ce qui montre bien que $A \in \mathcal{F}_{\tau_1\wedge\tau_2}$.

4) $\{\tau_1 < \tau_2\}, \{\tau_1 = \tau_2\} \in \mathcal{F}_{\tau_1\wedge\tau_2}$.
On a :

$$\{\tau_1 = \tau_2\} \cap \{\tau_1 \wedge \tau_2 \leq n\} \bigcup_{k=0}^{n} (\{\tau_1 = k\} \cap \{\tau_2 = k\}) \in \mathcal{F}_n$$

ce qui montre bien que $\{\tau_1 = \tau_2\} \in \mathcal{F}_{\tau_1\wedge\tau_2}$. De la même façon,

$$\{\tau_1 < \tau_2\}\{\tau_1 \wedge \tau_2 \leq n\} = \bigcup_{k=0}^{n-1} \bigcup_{\ell=k+1}^{n} (\{\tau_1 = k\} \cap \{\tau_2 = \ell\}) \in \mathcal{F}_n$$

donc $\{\tau_1 < \tau_2\} \in \mathcal{F}_{\tau_1\wedge\tau_2}$.

5) Que peut-on dire sur $\mathcal{F}_{\tau_1 \vee \tau_2}$ et $\mathcal{F}_{\tau_1} \cup \mathcal{F}_{\tau_2}$?
En utilisant le point 2), on a : $\mathcal{F}_{\tau_1}, \mathcal{F}_{\tau_2} \subset \mathcal{F}_{\tau_1 \vee \tau_2}$ *et donc* $\mathcal{F}_{\tau_1} \cup \mathcal{F}_{\tau_2} \subset \mathcal{F}_{\tau_1 \vee \tau_2}$. *En revanche, l'inclusion réciproque est fausse en général (pas la peine de leur démontrer, juste leur dire).*

Exercice 2. On a vu en cours la version suivante de l'identité de Wald :

Théorème 1. Soit $(X_i)_{i \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, intégrables ou positives, de même espérance. Soit N un temps d'arrêt pour la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{N}^*}$ définie par $\mathcal{F}_t = \sigma(X_1, \ldots, X_t)$. On suppose que $\mathbb{E}(N) < \infty$. Alors

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right) = \mathbb{E}(N)\mathbb{E}(X_1).$$

Voici une autre version de l'identité de Wald :

Théorème 2. Soit $(X_i)_{i \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, intégrables ou positives, de même espérance. Soit N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendante des (X_i). On suppose que $\mathbb{E}(N) < \infty$. Alors

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right) = \mathbb{E}(N)\mathbb{E}(X_1).$$

1) Expliquer en quoi les hypothèses du Théorème 1 et du Théorème 2 ne sont pas compatibles, i.e, N ne peut pas être simultanément indépendante des (X_i) et un temps d'arrêt pour $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{N}^*}$ avec $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$.
Si N est un temps d'arrêt pour $(\mathcal{F}_n)$ alors pour t fixé, $\{N \leq t\}$ est un événement $\sigma(X_1, \ldots, X_t)$-mesurable. Or, si N est indépendant des (X_n), $\{N \leq t\}$ est indépendant de $\sigma(X_1, X_2, \ldots)$ et donc en particulier de $\sigma(X_1, \ldots, X_t)$.
Remarque : si on veut être complètement rigoureux, il existe un cas où N peut être à la fois indépendant de $\sigma(X_1, \ldots, X_t)$ et pourtant mesurable par rapport à $\sigma(X_1, \ldots, X_t)$, c'est le cas où $\sigma(X_1, \ldots, X_t) = \{\emptyset, \Omega\}$ la σ-algèbre triviale. Mais ceci n'est possible que si tous les X_i sont en fait des constantes, un cas qui n'est pas très intéressant en pratique...

2) Démontrer le Théorème 2 (on pourra s'inspirer de la preuve du Théorème 1 vue en cours pour démarrer).
Dans le cas positif, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right) &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{\infty} X_i \mathbf{1}_{\{N \geq i\}}\right) \\
&\textit{on utilise Fubini, tout est positif} \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}\left(X_i \mathbf{1}_{\{N \geq i\}}\right) \\
&\textit{par indépendance :} \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}\left(X_i\right) \mathbb{E}\left(\mathbf{1}_{\{N \geq i\}}\right) \\
&= \mathbb{E}\left(X_1\right) \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}\left(\mathbf{1}_{\{N \geq i\}}\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathbb{E}\left(X_1\right) \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{N \geq i\}}\right) \\
&= \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}\left(N\right).
\end{aligned}
$$

Exercice 3. Soit $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une filtration sur un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{F})$.

1) Supposons que (X_n) est une sur-martingale pour $(\mathcal{F}_n)$ et que $\mathbb{E}(X_n)$ est une suite constante. Prouver que (X_n) est en fait une martingale.
   La définition de sur-martingale :
   $$\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) \leq X_n \Rightarrow Y := \mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) - X_n \leq 0.$$
   De plus :
   $$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}[\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n)] - \mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X_{n+1}) - \mathbb{E}(X_n) = 0$$
   par hypothèse. Donc Y est une variable aléatoire négative telle que $\mathbb{E}(Y) = 0$, donc $Y = 0$ p.s. et donc (X_n) est une martingale.
2) Supposons que (M_n) est un processus $(\mathcal{F}_n)$-adapté, avec M_n intégrable pour tout n. Montrer que
   $$(M_n) \text{ martingale} \Leftrightarrow \forall \tau \text{ temps d'arrêt borné, } \mathbb{E}(M_\tau) = \mathbb{E}(M_0).$$
   Ne pas démontrer le sens $\Rightarrow$ qui fait partie du cours sous le nom de "premier théorème d'arrêt". Pour le sens $\Leftarrow$, on veut démontrer que, pour tout n, pour tout $A \in \mathcal{F}_n$,
   $$\mathbb{E}(M_{n+1}\mathbf{1}_A) = \mathbb{E}(M_n\mathbf{1}_A).$$
   Pour ceci, on introduit deux temps d'arrêts : $\tau_1 = n + 1$ et $\tau_2 = n\mathbf{1}_A + (n + 1)\mathbf{1}_{A^c}$ (bien vérifier que τ_2 est un temps d'arrêt, c'est direct). L'égalité
   $$\mathbb{E}(M_{\tau_1}) = \mathbb{E}(M_{\tau_2})$$
   se réécrit :
   $$\mathbb{E}(M_{n+1}) = \mathbb{E}(M_n\mathbf{1}_A + M_{n+1}\mathbf{1}_{A^c}),$$
   il suffit de réarranger les termes pour conclure :
   $$\mathbb{E}[M_{n+1}(1 - \mathbf{1}_{A^c})] = \mathbb{E}(M_n\mathbf{1}_A),$$
   $$\mathbb{E}(M_{n+1}\mathbf{1}_A) = \mathbb{E}(M_n\mathbf{1}_A).$$

Exercice 4. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, positives, d'espérance égale à 1. On pose $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \dots, X_n)$ pour tout n.

1) On pose, pour tout n, $M_n = \prod_{i=0}^n X_i$. Démontrer que (M_n) est une martingale pour $(\mathcal{F}_n)$.
   Vérifier l'intégrabilité (c'est immédiat). Pour la relation sur l'espérance conditionnelle :
   $$
   \begin{aligned}
   \mathbb{E}(M_{n+1}|\mathcal{F}_n) &= \mathbb{E}(X_{n+1}X_n \dots X_0|X_n, \dots, X_0) \\
   &= \mathbb{E}(X_{n+1}|X_n, \dots, X_0)X_n \dots X_0 \\
   &= \mathbb{E}(X_{n+1})X_n \dots X_0 \\
   &= X_n \dots X_0 \\
   &= M_n.
   \end{aligned}
   $$

2) On pose, pour tout n, $Y_n = \prod_{i=0}^n \sqrt{X_i}$. Démontrer que (Y_n) est une sur-martingale.

C'est similaire sauf qu'il faut utiliser Jensen à un moment :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y_{n+1}|\mathcal{F}_n) &= \mathbb{E}(\sqrt{X_{n+1}X_n \dots X_0}|X_n, \dots, X_0) \\
&= \mathbb{E}(\sqrt{X_{n+1}}|X_n, \dots, X_0)\sqrt{X_n \dots X_0} \\
&= \mathbb{E}(\sqrt{X_{n+1}})\sqrt{X_n \dots X_0} \\
&\leq \sqrt{\mathbb{E}(X_{n+1})}\sqrt{X_n \dots X_0} \\
&= Y_n.
\end{aligned}$$

Exercice 5. Transformation de martingale. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n), \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré, $X := (X_n)_{n\geq 0}$ une $(\mathcal{F}_n)$-sous-martingale, $C := (C_n)_{n\geq 0}$ un processus $(\mathcal{F}_n)$-prévisible. On définit la transformation de martingale de $(X_n)_{n\geq 0}$ par $(C_n)_{n\geq 0}$ par le processus $C \cdot X := (C \cdot X)_{n\geq 0}$ tel que

$$(C \cdot X)_0 = 0 \text{ et } \forall n \geq 1,\ (C \cdot X)_n = \sum_{k=1}^n C_k(X_k - X_{k-1}).$$

1) Montrer que si
   (a) C est positif : $\forall n$, $C_n \geq 0$,
   (b) C est majoré : $\exists K > 0, \forall n$, $|C_n| \leq K$ p.s.

   alors $(C \cdot X)_{n\geq 0}$ est une $(\mathcal{F}_n)$-sous-martingale.

   Ca n'est pas trop compliqué, alors si possible essayer d'expliquer une application : si X_n est le cours d'une action à la date n, C_n est le nombres d'actions que je possède à la date n. Modélisation réaliste : à la date n, X_{n+1} est inconnu, mais C_{n+1} est connu (processus prévisible) ce qui représente le fait qu'à la date n, je sais combien je vais vendre/acheter d'actions entre la date n et la date $n+1$. Du coup, $C_k(X_k - X_{k-1})$ représente l'évolution de la valeur de mon lot (portefeuille) d'actions entre la date $k-1$ et k et donc $(C \cdot X)_n$ l'évolution de la valeur de mon portefeuille depuis la date 0.

   Solution de la question : vérifions que $(C \cdot X)_n$ est intégrable :

$$|(C \cdot X)_n| \leq \sum_{k=1}^n C_k|X_k - X_{k-1}| \leq 2K \sum_{k=0}^n |X_k|$$

   et les $|X_k|$ sont intégrables donc c'est intégrable. Ensuite :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(C \cdot X)_{n+1}|\mathcal{F}_n] &= \mathbb{E}[\sum_{k=1}^{n+1} C_k(X_k - X_{k-1})|\mathcal{F}_n] \\
&= \sum_{k=1}^n C_k(X_k - X_{k-1}) + \mathbb{E}[C_{n+1}(X_{n+1} - X_n)|\mathcal{F}_n] \\
&= \sum_{k=1}^n C_k(X_k - X_{k-1}) + C_{n+1}(\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] - X_n) \text{ \textit{car C prévisible}} \\
&\geq \sum_{k=1}^n C_k(X_k - X_{k-1}) + C_{n+1}(X_n - X_n) \text{ \textit{(car X sous-mart.) et} } C \geq 0 \\
&= \sum_{k=1}^n C_k(X_k - X_{k-1}) = (C \cdot X)_n
\end{aligned}$$

   donc $(C \cdot X)$ est bien une sous-martingale.

2) Montrer que si C est majoré et X est une $(\mathcal{F}_n)$-martingale alors $C \cdot X$ est une $(\mathcal{F}_n)$-martingale.

La preuve que $C \cdot X$ est intégrable est exactement la même, la preuve que $C \cdot X$ vérifie la condition de martingale est exactement la même en remplaçant l'inégalité par une égalité.

3) Soit τ un $(\mathcal{F}_n)$-temps d'arrêt et X une $(\mathcal{F}_n)$-martingale telle que $X_0 = 0$, écrire la martingale arrêtée X^τ comme une transformation de martingale (on rappelle que $X_n^\tau := X_{\tau \wedge n}$).

Poser $C_n = 1$ si $n \leq \tau$ puis $C_n = 0$ sinon. On vérifie bien que (C_n) est prévisible :

$$\{C_n = 1\} = \{n \leq \tau\} = \{\tau \leq n-1\}^c \in \mathcal{F}_{n-1}.$$

Exercice 6. Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées et intégrables définies sur un même espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On pose pour $n \geq 1$, $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. On note $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ et pour $n \geq 1$, $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$.

1) Supposons que X_1 est centrée et de carré intégrable, montrer que le processus $V := (V_n)_{n \geq 0}$ défini par

$$\forall n \geq 0,\ V_n = S_n^2 - n\mathbb{E}[X_1^2]$$

est une $(\mathcal{F}_n)$-martingale. En déduire la valeur de la variation quadratique $\langle S \rangle_n$.

D'abord, V_n est bien intégrable par hypothèse. Ensuite, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(V_{n+1}|\mathcal{F}_n) &= \mathbb{E}\left(S_{n+1}^2|\mathcal{F}_n\right) - (n+1)\mathbb{E}[X_1^2] \\
&= S_n^2 + 2S_n\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) + \mathbb{E}\left(X_{n+1}^2|\mathcal{F}_n\right) - (n+1)\mathbb{E}[X_1^2] \\
&= S_n^2 + \mathbb{E}\left(X_1^2\right) - (n+1)\mathbb{E}[X_1^2] \\
&= S_n^2 - n\mathbb{E}[X_1^2] = V_n.
\end{aligned}$$

On en déduit que $S_n^2 = V_n + n\mathbb{E}[X_1^2]$ où (V_n) est une martingale et $n\mathbb{E}[X_1^2]$ est prévisible (il est même déterministe), donc on a la décompositioon de Doob de S_n^2 et donc

$$\langle S \rangle_n = n\mathbb{E}[X_1^2].$$

2) Supposons que, pour tout réel λ, $\mathbb{E}[e^{\lambda X_1}] < \infty$ et posons, pour tout réel λ, $\phi(\lambda) = \ln \mathbb{E}[e =^{\lambda X_1}]$, montrer que le processus $(Z_n^\lambda)_{n \geq 0}$ défini par

$$\forall n \geq 0,\ Z_n^\lambda = e^{\lambda S_n - n\phi(\lambda)}$$

est une martingale.

Là encore, les hypothèses assurent l'intégrabilité, et on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(Z_{n+1}^\lambda|\mathcal{F}_n\right) &= \mathbb{E}\left(e^{\lambda S_{n+1}}|\mathcal{F}_n\right) e^{-(n+1)\phi(\lambda)} \\
&= \mathbb{E}\left(e^{\lambda X_{n+1}}\right) e^{\lambda S_n - (n+1)\phi(\lambda)} \\
&= e^{\phi(\lambda)} e^{\lambda S_n - (n+1)\phi(\lambda)} \\
&= Z_n^\lambda.
\end{aligned}$$

ENSAE **Introduction aux processus**
2ème année **Pierre Alquier**

TD N° 3 : Martingales et applications statistiques

Les premiers exercices (1-4) sont des problèmes portant sur l'ensemble du chapitre sur les martingales. Les exercices suivants sont des exercices sur le début du chapitre sur les chaînes de Markov. Attention, l'**Exercice 5** énonce un résultat très utile, il sera considéré comme faisant partie du cours.

Exercice 1. Martingales et faillite de société d'assurance (examen 2014-2015). On note Y_n l'actif d'une société d'assurance lors de sa n-ième année d'existence. On suppose que chaque année elle reçoit sous forme de primes un revenu constant noté P. Compte tenu des sinistres qui se réaliseront, et donc des remboursements qu'elle aura à faire, cette société devra verser l'année n une somme C_n à l'ensemble de ses assurés. On aura donc :

$$Y_{n+1} = Y_n + P - C_n.$$

On suppose qu'au moment de la constitution d'une telle société, l'autorité des contrôles des assurances lui impose d'avoir un capital initial Y_0. On suppose que les C_n sont des variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées, de loi commune $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ (normale d'espérance μ et de variance σ^2). Enfin, on note $(\mathcal{F}_n)$ la filtration : $\mathcal{F}_n = \sigma(C_0, \dots, C_{n-1})$. On s'intéresse à la probabilité que cette société fasse faillite au cours de son existence, c'est-à-dire qu'il existe n tel que $Y_n < 0$.

1) Commenter les hypothèses précédentes. Justifier en particulier le choix des (C_n). Quelle hypothèse faites-vous naturellement sur les valeurs relatives de P et μ ?

   Si il y a N assurés ($N \gg 1$), et si $r_{i,n}$ est le remboursement versé à l'assuré i à la date n, d'espérance R et de variance S^2, éventuellement nul si l'assuré i n'a pas subi de sinistre, alors

$$C_n = \sum_{i=1}^{n} r_{i,n} \simeq \mathcal{N}(NR, NS^2)$$

   par le TCL. Donc, en posant $\mu = NR$ et $\sigma^2 = NS^2$...

   Noter que si $\mu > P$, l'espérance de l'actif de la société d'assurance tend vers $-\infty$ donc il est plus naturel de prendre $P > \mu$.

2) Montrer que

$$\mathbb{E}\left\{\exp\left[t(P - C_n)\right]\right\} = \exp\left[t(P - \mu) + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right].$$

   Si $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, $\mathbb{E}[\exp(tX)] = \exp(t^2/2)$ (c'est un résultat supposé connu mais on peut le redémontrer en TD, ça ne leur fera pas de mal). Or $P - C_n \sim \mathcal{N}(P - \mu, \sigma^2)$ d'où

$$\mathbb{E}\left\{\exp\left[t(P - C_n)\right]\right\} = \exp\left[t(P - \mu) + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right].$$

3) Soit $M_n = \exp(t_0 Y_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe une valeur t_0 telle que (M_n) soit une martingale pour $(\mathcal{F}_n)$, la filtration engendrée par les C_n.

   Vérifier l'intégrabilité. Ensuite :

$$\mathbb{E}(M_{n+1}|\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}[\exp(t(Y_n + P - C_n))|C_0, \dots, C_{n-1}]$$

$$
\begin{aligned}
&= \exp(tY_n)\mathbb{E}[\exp(t(P - C_n))|C_0, \dots, C_{n-1}] \\
&= M_n \exp\left[t(P-\mu) + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right]
\end{aligned}
$$

donc (M_n) *est une martingale si et seulement si*

$$
t(P-\mu) + \frac{\sigma^2 t^2}{2} = 0.
$$

Il y a deux solutions à cette équation du second degré en t *:* $t = 0$ *(cas pas très intéressant car alors* $M_n = 1$ *constante...) ou* $t = 2(\mu - P)/\sigma^2$*. Posons donc* $t_0 = 2(\mu - P)/\sigma^2$*.*

4) On définit $Z_n = \min[\exp(t_0 Y_n), 1]$. Montrer que (Z_n) est une sur-martingale pour $(\mathcal{F}_n)$.
(M_n) *définie par* $M_n = \exp(t_0 Y_n)$ *est une martingale. Donc* (Z_n) *définie par* $Z_n = f(M_n)$ *avec* $f(x) = x \wedge 1$ *est une sur-martingale car* f *est concave.*

5) Soit

$$
T = \inf\{n \in \mathbb{N} : Y_n < 0\}
$$

avec la convention $\inf \emptyset = +\infty$. Montrer que T est un temps d'arrêt pour $(\mathcal{F}_n)$.
On a

$$
\{T = k\} = \underbrace{\{Y_k < 0\}}_{\in \mathcal{F}_k} \cap \underbrace{\{Y_{k-1} \geq 0\}}_{\in \mathcal{F}_{k-1} \subset \mathcal{F}_k} \cap \dots \cap \underbrace{\{Y_0 \geq 0\}}_{\in \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_k} \in \mathcal{F}_k
$$

donc T *est bien un temps d'arrêt.*

6) En suivant la preuve d'un théorème du cours, montrer que si S est un temps d'arrêt borné et (X_k) une sur-martingale associés à une même filtration, alors

$$
\mathbb{E}(X_0) \geq \mathbb{E}(X_S).
$$

On vérifie d'abord que $X_k^S := X_{S \wedge k}$ *définit une sur-martingale :*

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_{t+1}^S|\mathcal{F}_t) &= \mathbb{E}(X_{(t+1)\wedge S}|\mathcal{F}_t) \\
&= \mathbb{E}(X_S \mathbf{1}_{\{S \leq t\}} + X_{t+1}\mathbf{1}_{\{S \leq t\}^c}|\mathcal{F}_t) \\
&= \mathbb{E}\left(\sum_{k=0}^{t} X_k \mathbf{1}_{\{S=k\}} + X_{t+1}\mathbf{1}_{\{S \leq t\}^c} \middle| \mathcal{F}_t\right) \\
&= \sum_{k=0}^{t} X_k \mathbf{1}_{\{S=k\}} + \mathbf{1}_{\{S \leq t\}^c}\mathbb{E}(X_{t+1}|\mathcal{F}_t) \\
&\leq X_S \mathbf{1}_{\{S \leq t\}} + \mathbf{1}_{\{S \leq t\}^c} X_t \text{ (sur-martingale...)} \\
&= X_{t \wedge S} = X_t^S.
\end{aligned}
$$

Donc pour tout T_0 *déterministe,* $\mathbb{E}(X_{T_0}^S) \leq \mathbb{E}(X_0^\tau)$ *(définition d'une sur-martingale). Supposons que* $S \leq T_0$ *p.s, il est immédiat que* $X_{T_0}^S = X_S$ *et d'autre part* $X_0^S = X_0$*. On récapitule :*

$$
\mathbb{E}(X_S) = \mathbb{E}(X_{T_0}^S) \leq \mathbb{E}(X_0^S) = \mathbb{E}(X_0)
$$

ce qui conclut.

7) Démontrer complètement (sans invoquer un résultat du cours) que

$$
\mathbb{E}(Z_0) \geq \mathbb{P}(T \leq m)
$$

(on pourra ceci dit s'inspirer de la démonstration d'un théorème du cours en introduisant $S = \min(T, m)$).

Solution :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T \leq m) &= \mathbb{P}(Z_{m\wedge T} \geq 1) \\ &\leq \mathbb{E}(Z_{m\wedge T}) \text{ (Markov)} \\ &\leq \mathbb{E}(Z_0) \text{ (sur-martingale).}\end{aligned}$$

8) En déduire que la probabilité que la société fasse faillite est majorée par

$$\exp\left[\frac{-2(P-\mu)Y_0}{\sigma^2}\right].$$

D'une part $\mathbb{P}(T \leq m) \to \mathbb{P}(T < \infty)$ la probabilité de faillite en un temps fini ($m \to \infty$). D'autre part :

$$\mathbb{P}(T \leq m) \leq \mathbb{E}(Z_0) = \mathbb{E}[\min(1, \exp(t_0 Y_0))] = \exp[-2(P-\mu)Y_0/\sigma^2].$$

9) Discuter l'intérêt et les limites d'un tel modèle pour l'autorité de contrôle.
L'autorité de contrôle peut évaluer la probabilité de faillite. Elle peut du coup fixer un minimum légal sur Y_0 de façon à rendre cette probabilité négligeable. Cependant, le modèle repose sur des hypothèses trop restrictives, en pratique, il faudrait l'améliorer.

Exercice 2. Filtrage. Nous notons $\mathcal{L}(Y|X)$ la loi conditionnelle de Y sachant X.

1) Soient $\mu, a, b \in \mathbb{R}$, $U, W \in \mathbb{R}_+^*$ et X et Y deux variables aléatoires telles que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(X) &= \mathcal{N}(\mu, U) \\ \mathcal{L}(Y|X) &= \mathcal{N}(a + bX, W).\end{aligned}$$

Montrer que

$$\mathcal{L}(X|Y) = \mathcal{N}(\hat{X}, V)$$

où $V \in \mathbb{R}_+^*$ et la variable aléatoire $\hat{X}$ sont donnés par :

$$\begin{aligned}\frac{1}{V} &= \frac{1}{U} + \frac{b^2}{W} \\ \frac{\hat{X}}{V} &= \frac{\mu}{U} + \frac{b(Y-a)}{W}.\end{aligned}$$

On calcule

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_X(x) f_{Y|X}(y|x)}{f_Y(y)}$$

et on obtient

$$\begin{aligned}\log f_{X|Y}(x|y) &= c_1(y) - \frac{(x-\mu)^2}{2U} - \frac{(y-a-bx)^2}{2W} \\ &= c_2 - \frac{(x-\hat{x})^2}{2V}\end{aligned}$$

avec les relations de l'énoncé.

2) En déduire que $\mathbb{E}[(X-\hat{X})^2] = V$.
Comme $\mathcal{L}(X|Y) = \mathcal{N}(\hat{X}, V)$,

$$E\left[(X-\hat{X})^2|Y\right] = V \quad p.s.$$

donc

$$E\left[(X-\hat{X})^2\right] = V.$$

3) Soient $X, \eta_1, \eta_2, \ldots$ des variables aléatoires indépendantes telles que

$$\mathcal{L}(X) = \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$
$$\mathcal{L}(\eta_k) = \mathcal{N}(0, 1).$$

Soit (c_n) une suite d'éléments de $\mathbb{R}_+^*$, soit

$$Y_k = X + c_k \eta_k$$

et $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, \ldots, Y_n)$ et $M_n = \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_n]$. Montrer que (M_n) est une martingale bornée dans L^2 et en déduire les propriétés de convergence de (M_n) vers une variable aléatoire M_∞.
La suite (M_n) est bornée dans L^2 (inégalité de Jensen), les M_n sont donc intégrables et il s'agit d'une martingale (espérances conditionnelles itérées). D'après les théorèmes du cours (M_n) converge p.s. et dans L^2 vers la variable aléatoire M_∞.

4) Montrer que

$$\mathcal{L}(X|Y_1, \ldots, Y_n) = \mathcal{N}(\hat{X}_n, V_n)$$

où

$$\frac{1}{V_n} = \frac{1}{V_{n-1}} + \frac{1}{c_n^2}$$
$$\frac{\hat{X}_n}{V_n} = \frac{\hat{X}_{n-1}}{V_{n-1}} + \frac{Y_n}{c_n^2}$$

et $\hat{X}_0 = 0$ et $V_0 = \sigma^2$.
Supposons la propriétée vérifiée au rang $n-1$:

$$\mathcal{L}(X|Y_1, \ldots, Y_{n-1}) = \mathcal{N}(\hat{X}_{n-1}, V_{n-1})$$

nous avons également comme $Y_n = X + c_n\eta_n$,

$$\mathcal{L}(Y_n|Y_1, \ldots, Y_{n-1}, X) = \mathcal{N}(X, c_n^2).$$

Nous appliquons alors les résultats du a) avec

$$\mu = \hat{X}_{n-1},\ U = V_{n-1},\ a = 0,\ b = 1,\ W = c_n^2$$

et obtenons

$$\mathcal{L}(X|Y_1, \ldots, Y_{n-1}, Y_n) = \mathcal{N}(\hat{X}_n, V_n)$$

avec

$$\frac{1}{V_n} = \frac{1}{V_{n-1}} + \frac{1}{c_n^2}$$
$$\frac{\hat{X}_n}{V_n} = \frac{\hat{X}_{n-1}}{V_{n-1}} + \frac{Y_n}{c_n^2}.$$

5) Identifier M_n et $\mathbb{E}[(X - M_n)^2]$.
En prenant l'espérance de la loi conditionnelle ci-dessus nous obtenons

$$M_n = \hat{X}_n$$
$$E\left[(X - M_n)^2|\mathcal{F}_n\right] = V_n,$$

en prenant l'espérance des deux membres de la dernière identité nous obtenons

$$E\left[(X - M_n)^2\right] = V_n.$$

6) Donner une condition nécessaire et suffisante sur la suite (c_k) pour que $M_\infty = X$.
La récurrence donne

$$V_n = \left\{\sigma^{-2} + \sum_{k=1}^{n} c_k^{-2}\right\}^{-1}$$

donc $M_\infty = X$ *p.s. ssi* $\sum_{k=0}^{\infty} c_k^{-2} = \infty$

Exercice 3. Test du rapport de vraisemblance. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de densité f par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Supposons que $f \in \{p, q\}$ où nous supposons que $p \neq q$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ q(x) > 0$. Le rapport de vraisemblance correspond à la variable aléatoire

$$Y_n = \frac{p(X_1)p(X_2)\ldots p(X_n)}{q(X_1)q(X_2)\ldots q(X_n)}.$$

Le test du rapport de vraisemblance de $H_0 :\ f = q$ contre $H_1 :\ f = p$ correspond à la règle de décision où H_0 est rejetée si $Y_n \geq a$ pour un certain $a > 0$. Dans les questions suivantes la probabilité est celle donnée par H_0.

1) Montrer que (Y_n) est une $(\mathcal{F}_n)$-martingale où $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$.
On a

$$\mathbb{E}[|Y_n|] = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{p(x_1)p(x_2)\ldots p(x_n)}{q(x_1)q(x_2)\ldots q(x_n)} q(x_1)q(x_2)\ldots q(x_n)dx_1\ldots dx_n = 1,$$
$$\mathbb{E}[Y_{n+1}|\mathcal{F}_n] = Y_n\mathbb{E}\left[\frac{p(X_{n+1})}{q(X_{n+1})}\right] = Y_n \int_{\mathbb{R}} \frac{p(x)}{q(x)} q(x)dx = Y_n.$$

2) Montrer que (Y_n) converge presque sûrement vers une variable aléatoire Y_∞.
Comme (Y_n) *est une martingale bornée dans* L^1 *on peut appliquer le résultat du cours.*

3) Montrer que $Y_\infty = 0$ p.s. Conclure en la convergence du test du rapport de vraisemblance.
On définit

$$\alpha = \mathbb{E}(\sqrt{p(X_1)/q(Y_1)}).$$

Or, par Cauchy-Schwarz,

$$\alpha = \mathbb{E}(1\sqrt{p(X_1)/q(Y_1)}) < \mathbb{E}(1^2)\mathbb{E}(p(X_1)/q(Y_1)) = 1,$$

où l'inégalité est stricte parce que p et q ne sont pas proportionnelles. On a évidemment :

$$\mathbb{E}(\sqrt{Y_n}) = \alpha^n \to 0$$

et (Fatou) :

$$\mathbb{E}(\sqrt{Y_0}) = \mathbb{E}(\liminf \sqrt{Y_n}) \leq \liminf \mathbb{E}(\sqrt{Y_n}) = 0$$

d'où $Y_n = 0$ *ps.*

4) La martingale (Y_n) converge-t'elle dans L^1 ?
Non, sinon (Y_n) serait une martingale régulière et on aurait $Y_n = \mathbb{E}[Y_\infty|\mathcal{F}_n] = 0$.

5) Donner une majoration de $\mathbb{P}(\exists n \geq 1 : \; Y_n \geq a)$.
L'inégalité maximale donne la majoration $1/a$.

Exercice 4. Soit une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Soit une martingale réelle (M_n) avec $|M_n| \leq K$. On pose

$$X_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}(M_k - M_{k-1}).$$

Montrer que $(X_n)_{n\geq 1}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ martingale qui converge p.s. et dans L^2.
On vérifie que c'est une martingale : d'abord $|X_n| \leq c\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ bornée donc intégrable, ensuite on remarque que X_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable car $X_n = g(M_0, \ldots, M_n)$ qui sont tous $\mathcal{F}_n$-mesurables, enfin

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) &= \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}(M_k - M_{k-1})|\mathcal{F}_n\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\frac{1}{n+1}(M_{n+1} - M_n) + X_n|\mathcal{F}_n\right) \\
&= X_n.
\end{aligned}$$

Pour la convergence dans L^2, on peut le faire à la main : on vérifie que (X_n) est de Cauchy dans L^2 (et donc qu'elle converge) :

$$\mathbb{E}\left[(X_{n+m} - X_n)^2\right] = \mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=n+1}^{n+m} \frac{M_{k+1} - M_k}{k}\right)^2\right].$$

Quand on développe le carré, les termes croisés s'annulent. En effet : Soit $k < \ell$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left(\frac{M_{\ell+1} - M_\ell}{\ell}\right)\left(\frac{M_{k+1} - M_k}{k}\right)\right] &= \frac{1}{k\ell}\mathbb{E}\left\{\mathbb{E}\left[(M_{\ell+1} - M_\ell)(M_{k+1} - M_k)|\mathcal{F}_\ell\right]\right\} \\
&= \frac{1}{k\ell}\mathbb{E}\left\{(M_{k+1} - M_k)\mathbb{E}\left[(M_{\ell+1} - M_\ell)\mathcal{F}_\ell\right]|\right\} \\
&= \frac{1}{k\ell}\mathbb{E}\left\{(M_{k+1} - M_k) \times 0\right\} = 0.
\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[(X_{n+m} - X_n)^2\right] &= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=n+1}^{n+m} \frac{M_{k+1} - M_k}{k}\right)^2\right] \\
&= \sum_{k=n+1}^{n+m} \frac{1}{k^2}\mathbb{E}\left[(M_{k+1} - M_k)^2\right] \\
&\leq 4c^2 \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.
\end{aligned}$$

On peut aussi utiliser le résultat du cours : (X_n) est bornée dans L^2 (la preuve est exactement la même : $\mathbb{E}\left(X_n^2\right) \leq 4c^2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq \frac{2c\pi^2}{3}$). Donc elle converge p.s. et dans L^2.

Exercice 5. Soient $(U_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. i.i.d. de loi μ à valeurs dans un espace mesurable $(F,\mathcal{F})$, X_0 une v.a. à valeurs dans un espace $(E,\mathcal{E})$ indépendante de la suite (U_n), et f une application mesurable de $(E\times F,\mathcal{E}\otimes\mathcal{F})$ dans $(E,\mathcal{E})$. On définit par récurrence la suite de v.a. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\forall n\geq 1,\ X_n = f(X_{n-1},U_n).$$

1) Montrer que, pour tout $n\geq 1$, X_n est $\sigma(X_0,U_0,U_1,\ldots,U_n)$-mesurable.
Pour l'écrire proprement, faire une récurrence : il est évident que X_0 est $\sigma(X_0,U_0)$-mesurable. Si X_n est $\sigma(X_0,U_0,U_1,\ldots,U_n)$-mesurable, alors $X_{n+1}=f(X_n,U_{n+1})$ est $\sigma(X_0,U_0,U_1,\ldots,U_n,U_{n+1})$-mesurable.

2) Démontrer le lemme : soient deux variables aléatoires (Y,T), T est $\mathcal{B}$-mesurable et Y indépendant de $\mathcal{B}$, alors pour tout $h\geq 0$ mesurable,

$$\mathbb{E}[h(Y,T)|\mathcal{B}] = H(T) \text{ où } H(t):=\mathbb{E}(h(Y,t)).$$

On introduit Z v.a. $\mathcal{B}$-mesurable et positive, il faut mq :

$$\mathbb{E}(ZH(T)) = \mathbb{E}(Zh(Y,T)).$$

On introduit la loi jointe de (Z,T), $\mu_{(Z,T)}$, et la loi de Y, μ_Y. On a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Zh(Y,T)) &= \int\int zh(x,t)\mathrm{d}\mu_Y(x)\mathrm{d}\mu_{(Z,T)}(z,t)\\ &= \int z\left[\int h(x,t)\mathrm{d}\mu_Y(x)\right]\mathrm{d}\mu_{(Z,T)}(z,t)\\ &= \int zH(t)\mathrm{d}\mu_{(Z,T)}(z,t)\\ &= \mathbb{E}(ZH(T)).\end{aligned}$$

3) En déduire que pour toute fonction ϕ mesurable positive sur $(E,\mathcal{E})$ on a

$$\mathbb{E}[\phi(X_n)|X_0,\ldots,X_{n-1}] = \int \phi[f(X_{n-1},u)]\mathrm{d}\mu(u).$$

D'abord, on remarque que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\phi(X_n)|X_0,U_0,U_1,\ldots,U_{n-1}] &= \mathbb{E}[\phi(f(X_{n-1},U_n))|X_0,U_0,U_1,\ldots,U_{n-1}]\\ &= \int \phi[f(X_{n-1},u)]\mathrm{d}\mu(u)\end{aligned}$$

par une application du lemme précédent avec $\mathcal{B}=\sigma(X_0,U_0,U_1,\ldots,U_{n-1})$, $Y=U$, $T=X_{n-1}$. Ensuite, d'après la première partie,

$$\mathbb{E}[\phi(X_n)|X_0,\ldots,X_{n-1}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[\phi(X_n)|X_0,U_0,U_1,\ldots,U_{n-1}]|X_0,\ldots,X_{n-1}]$$

et on conclut.

4) Conclure que (X_n) est une chaîne de Markov.
La définition de c.d.M. donnée en cours correspond au cas où on remplace Φ par toutes les indicatrices $\mathbf{1}_A$, $A\in\mathcal{E}$.

Exercice 6. Soient $(\varepsilon_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et indentiquement distribuées à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Démontrer que (X_n) définie par $X_n = \prod_{i=1}^{n} \varepsilon_i$ est une chaîne de Markov.

C'est simplement pour montrer l'intérêt de l'exercice précédent : on a

$$X_n = X_{n-1}\varepsilon_n$$

et donc en vertu du résultat de l'exercice précédent, comme $f(u,v) = uv$ est mesurable, (X_n) est bien une chaîne de Markov.

ENSAE **Introduction aux processus**
2ème année **Pierre Alquier**

TD n° 4 : Chaînes de Markov

Exercices et problèmes portant sur tout le chapitre sur les chaînes de Markov.

Exercice 1. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ la réalisation d'un dé à 6 faces non biaisé au n-ième tirage (on supposera les tirages indépendants). On note Y_n le maximum parmi les n premières réalisations :

$$Y_n = \max_{1\leq i\leq n} X_i$$

et Z_n le nombre de 6 parmi les n premières réalisations :

$$Z_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{\{6\}}(X_i).$$

1) Montrer que (Y_n) et (Z_n) sont des chaînes de Markov, dont on précisera la matrice de transition.
Utilisation de l'exercice du TD précédent : $Y_n = \max(Y_{n-1}, X_n)$ *et* $Z_n = Z_{n-1} + \mathbf{1}_{\{6\}}(X_n)$.
2) Représenter graphiquement ces chaînes et déterminer les classes d'états, et les états qui sont récurrents/transients.
Pour (Y_n)*, un état par classe, tous transients sauf* $\{6\}$*. Pour* (Z_n)*, un état par classe et tous transients.*
3) Montrer qu'il existe une unique mesure invariance pour (Y_n), que l'on précisera.
On peut écrire la matrice de transition P*, le système* $\pi P = \pi$ *et on obtient que* $\pi = (0, 0, 0, 0, 0, 1)$ *ie la masse de Dirac sur* 6*,* δ_6*.*

Exercice 2. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov homogène de matrice de transition P.

1) Dans chacun des cas ci-dessous, on demande de déterminer si il y a des états absorbants, quelles sont les classes de communication de la chaîne, et d'étudier la périodicité et la récurrence (ou la transience) des états.

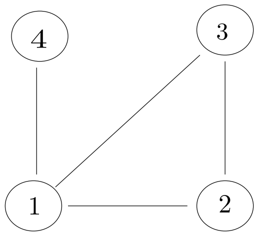
a) $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ **b)** $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ **c)** $P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **d)** $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

e) $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$

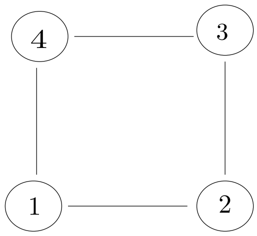
2) Pour chaque matrice P, étudier l'existence et l'unicité d'éventuelle(s) probabilité(s) invariante(s).
Par convention, je numérote à partir de 1*.*
Pour a), une seule classe $\{1, 2\}$ *récurrente apériodique et unique loi invariante uniforme.*
Pour b), trois classes : $\{1\}$ *et* $\{2\}$ *réc. apériodique,* $\{3\}$ *transiente apériodique et une infinité de lois invariantes :* $(\alpha, 1-\alpha, 0)$*,* $\alpha \in [0, 1]$*.*
Pour c), une seule classe $\{1, 2, 3\}$ *récurrente de période* 2*, unique loi invariante* $(1/2, 1/4, 1/4)$*.*

Pour d), deux classes $\{1\}$ et $\{2,3,4\}$ récurrentes apériodiques et une infinité de lois invariantes : $(1-\beta, \beta/3, \beta/3, \beta/3)$, $\beta \in [0,1]$.
Enfin, pour e), une seule classe $\{1,2,3\}$ récurrente apériodique et une unique loi invariante $(1/5, 2/5, 2/5)$.

Exercice 3. Marche aléatoire sur un graphe fini. Un graphe fini $\mathcal{G}$ est un ensemble fini V muni d'un ensemble d'arrêtes E : $\mathcal{G} = (V, E)$. La convention est que deux points de V, v et v', sont reliés si et seulement si la paire $\{v, v'\} \in E$. Par exemple, étant donné $V = \{1,2,3,4\}$ et $E = \{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\}\}$, le graphe G est comme suit :



alors que si $E = \{\{1,2\},\{2,3\},\{3,4\},\{4,1\}\}$, le graphe G est :



(noter qu'ici les graphes sont non-orientés, $\{1,4\} = \{4,1\}$; il est possible de définir des graphes orientés en remplaçant les paires de points par des couples mais ça ne sert à rien dans cet exercice).

Pour chaque $x \in V$ on note $V(x)$ l'ensemble des points connectés à x (les "voisins" de x, x non compris) et $d(x) = \mathrm{card}[V(x)]$ (le "degré" de x).

La marche aléatoire sur le graphe fini $\mathcal{G}$ est une chaîne de Markov (X_t) dont l'espace d'états est V est dont la matrice de transition P est donnée par

$$P(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2d(x)} \text{ si } y \in V(x), \\ 1 - \sum_{y \in V(x)} p(x,y) \text{ si } x = y, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

1) Ecrire la matrice de transition pour les deux graphes donnés en exemple.
Pour le premier :

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

et pour l'autre :

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 0 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 0 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

2) En général, est-ce que (X_t) est irréductible ? Apériodique ?

Comme $P(i,i) > 0$ pour tout $i \in V$, tous les états sont apériodiques. C'est d'ailleurs pour ça que j'ai introduit cette version de la marche aléatoire sur le graphe, la convenion est plutôt de prendre $P(i,i) = 0$ d'habitude, ce qui peut induire des classes périodiques. On voit directement que (X_t) n'est pas irréductible en général, en fait, une CNS immédiaet pour l'irréductibilité de (X_t) est que le graphe G soit connexe.

3) On définit une loi π par $\pi(x) = d(x)/(2M)$ où $M = \mathrm{card}(E)$. Montrer que π est une mesure invariante pour P.

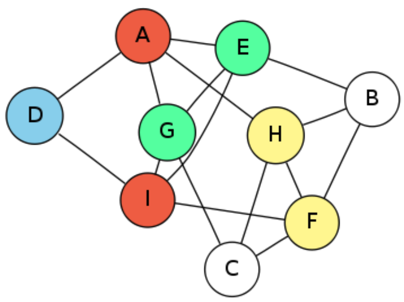
On montre que π vérifie $\pi P = \pi$, ie, pour tout j,

$$\sum_{i=1}^{N} \pi(i)p(i,j) = \pi(j).$$

Pour tout j on peut décomposer $\{1,\dots,N\} = \{j\} \cup V(j) \cup \{i \notin V(j), i \neq j\}$, et donc

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N} \pi(i)p(i,j) &= \pi(j)p(j,j) + \sum_{i\in V(j)} \pi(i)p(i,j) + \sum_{i\notin V(j), i\neq j} \pi(i)p(i,j) \\
&= \frac{d(j)}{2M}\left[1 - \sum_{\ell\in V(j)} \frac{1}{2d(j)}\right] + \sum_{i\in V(j)} \frac{d(i)}{2M}\frac{1}{2d(i)} + 0 \\
&= \frac{d(j)}{2M}\left[1 - \frac{\mathrm{card}(V(j))}{2d(j)}\right] + \frac{\mathrm{card}(V(j))}{4M} \\
&= \frac{d(j)}{2M} - \frac{\mathrm{card}(V(j))}{4M} + \frac{\mathrm{card}(V(j))}{4M} \\
&= \frac{d(j)}{2M} = \pi(j).
\end{aligned}$$

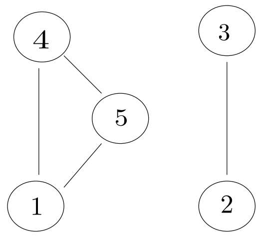
4) Voici un graphe trouvé au hasard en tapant “graphe fini” sur Google Images. Déterminer la probabilité de long terme que la marche aléatoire sur ce graphe soit dans l'état D ? Dans l'état C ?



Chaîne irréductible, apériodique donc $\mathbb{P}(X_n = x) \to \nu(x)$, pour tout état x, quand $n \to \infty$, où ν est l'unique loi invariante. Or, à la question 3), on a trouvé une loi invariante π, donc, nécessairement, $\pi = \nu$. Reste à calculer

$$\pi(D) = \frac{d(D)}{2M} = \frac{2}{2\times 16} = \frac{1}{16} \text{ et } \pi(C) = \frac{3}{32}.$$

5) On considère le graphe :



(a) Déterminer E pour ce graphe.

On a $E = \{\{1,5\}, \{1,4\}, \{4,5\}, \{2,3\}\}$.

(b) Déterminer *toutes* les probabilités invariantes pour ce graphe.

La matrice de transition est

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

on peut résoudre $\pi P = \pi$ *et on obtient un ensemble de solutions* $(\frac{\alpha}{3}, \frac{1-\alpha}{2}, \frac{1-\alpha}{2}, \frac{\alpha}{3}, \frac{\alpha}{3})$ *pour* $0 \leq \alpha \leq 1$. *En particulier, pour* $\alpha = \frac{1}{2}$ *on obtient la loi trouvée en 3). Cependant, comme la chaîne n'est pas irréductible, on n'a pas nécessairement l'unicité de cette loi (et de fait, on a trouvé une infinité de lois invariantes).*

(c) A l'aide d'exemple, montrer que la loi de X_n dépend de la loi de X_0 même lorsque $n \to \infty$.

Direct :

$$\mathbb{P}(X_t \in \{1,4,5\} | X_0 = 2) = 0 \text{ et } \mathbb{P}(X_t \in \{1,4,5\} | X_0 = 1) = 1.$$

Donc, la loi de X_t *ne sera jamais la même suivant que la loi initiale (loi de* X_0*) est* δ_2 *où* δ_1.

(d) Déterminer la loi asymptotique de X_n comme fonction de la loi initiale μ.

D'abord, toute loi asymptotique est loi invariante donc il existe α, $\lim_t p_t = (\frac{\alpha}{3}, \frac{1-\alpha}{2}, \frac{1-\alpha}{2}, \frac{\alpha}{3}, \frac{\alpha}{3})$, *noter que* $\lim_t \mathbb{P}(X_t \in \{1,4,5\}) = \frac{\alpha}{3} + \frac{\alpha}{3} + \frac{\alpha}{3} = \alpha$ *et donc* $\lim_t \mathbb{P}(X_t \in \{2,3\}) = 1 - \alpha$. *Comme en plus* $\mathbb{P}(X_0 \in \{1,4,5\}) = \mu(1) + \mu(4) + \mu(5)$, *si la chaîne part de la classe* $\{1,4,5\}$, *elle ne la quitte jamais et donc pour tout* t, $\mathbb{P}(X_t \in \{1,4,5\}) = \mu(1) + \mu(4) + \mu(5)$ *et donc* $\lim_t \mathbb{P}(X_t \in \{1,4,5\}) = \mu(1) + \mu(4) + \mu(5)$. *On a établi que* $\alpha = \mu(1) + \mu(4) + \mu(5)$ *et* $1 - \alpha = \mu(2) + \mu(3)$.

Exercice 4. Gestion de stocks. Batman possède N costumes. Chaque matin à 8 :00, il prend un costume dans sa penderie (si il y en a un), va sauver tout un tas de gens et revient chez lui à 17 :00. A ce moment là, le costume est toujours très sale et il le met dans le panier de linge sale. En revanche, si le matin, il n'y a plus de costume dans la penderie, il ne peut pas travailler et reste chez lui à regarder la télé et manger des pizzas trop caloriques.

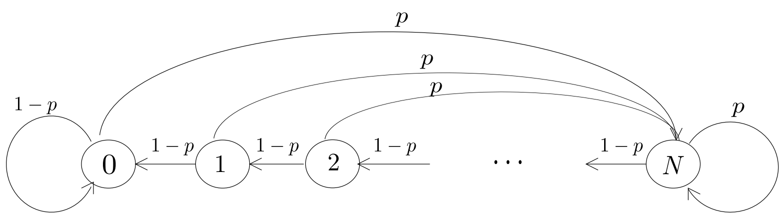
Chaque soir à 21 :00, Alfred décide ou non de faire une lessive avec une probabilité fixe $p \in]0,1[$: il prend tous les costumes du panier, les lave et les remet en place dans la penderie de Batman avant 23 :00 (la décision d'Alfred ne dépend ni de l'état de remplissage du panier, ni de sa décision des jours précédents mais seulement de son humeur que l'on peut considérer comme aléatoire).

On note Y_n le nombre de costumes dans la penderie lors du jour n, avant que Batman ne regarde dans sa penderie (pour fixer les idées, disons à 7 :00).

1) Modéliser (Y_n) comme une chaîne de Markov, donner son espace d'états, sa matrice de transition et une représentation graphique.
Espace d'état $\{0, \dots, N\}$ *et matrice de transition* P *donnée par*

$$P = \begin{pmatrix} 1-p & 0 & 0 & \dots & 0 & p \\ 1-p & 0 & 0 & \dots & 0 & p \\ 0 & 1-p & 0 & \dots & 0 & p \\ 0 & 0 & 1-p & \dots & 0 & p \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1-p & p \end{pmatrix}$$

correspondant au graphe



2) Démontrer qu'il n'y a qu'une seule probabilité invariante π et la déterminer.
Chaîne irréductible et apériodique donc proba. inv. unique π.
Elle satisfait $\pi P = \pi$, *ie*

$$\begin{cases} (1-p)\pi_0 + (1-p)\pi_1 = \pi_0 \\ (1-p)\pi_2 = \pi_1 \\ \vdots \\ (1-p)\pi_N = \pi_{N-1} \\ p\pi_1 + \dots + p\pi_N = \pi_N \end{cases}$$

Comme $\pi_1 + \dots + \pi_N = 1$ *la dernière équation devient* $\pi_N = p$ *et par récurrence* $\pi_{N-1} = p(1-p)$, $\pi_{N-2} = p(1-p)^2$, ..., $\pi_1 = p(1-p)^{N-1}$. *La première équation du système conduit à*

$$(1-p)\pi_0 + (1-p)\pi_1 = \pi_0 \Rightarrow \pi_0 = \frac{1-p}{p}\pi_1 \Rightarrow \pi_0 = (1-p)^N.$$

3) Quelle est la probabilité limite p_{repos} que Batman ne puisse pas travailler (i.e., la limite de $\mathbb{P}(Y_n = 0)$ quand $n \to \infty$) ?
On a

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\textit{Batman ne travaille pas le jour } n) &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(Y_n = 0) \\ &= \pi_0 = (1-p)^N. \end{aligned}$$

4) Quelle est la durée moyenne entre deux jours de repos ?
Le temps de retour en 0 *est en moyenne* $1/\pi_0 = 1/(1-p)^N$, *par la propriété de Markov forte, c'est aussi le temps moyen entre deux passages en* 0.

5) Soucieux de la sécurité de ses concitoyens, Batman veut que la probabilité p_{repos} reste au dessous d'un seuil α. Il n'a aucun contrôle sur Alfred (la probabilité p) mais il peut toujours acheter plus de costumes (donc il choisit N). Déterminer le nombre minimal de costumes N tel que $p_{\text{repos}} \leq \alpha$. Application numérique : $(\alpha, p) = (0.05, 0.1)$ et $(\alpha, p) = (0.05, 0.7)$.

Batman veut $\pi_0 \leq \alpha$ *et on a déjà établi que* $\pi_0 = (1-q)^N$. *Donc Batman veut* $(1-p)^N \leq \alpha$, *donc* $N \log(1-p) \leq \log(\alpha)$ *et donc (attention,* $\log(1-p) < 0$*)* $N \geq \frac{\log(\alpha)}{\log(1-p)}$. *Application numérique : 1er cas :* $N \geq \frac{\log(\alpha)}{\log(1-q)} = \frac{\log(0.05)}{\log(1-0.1)} \simeq 28.4$ *donc* $N = 29$ *suffit ; 2ème cas :* $N \geq \frac{\log(\alpha)}{\log(1-q)} = \frac{\log(0.05)}{\log(1-0.7)} \simeq 2.48$ *donc* $N = 3$ *suffit.*

Exercice 5. Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$ i.i.d. de loi μ. Pour tout n entier on pose $X_n = \{U_0, \ldots, U_n\}$. (Les X_n sont des v.a. à valeurs dans l'ensemble E (dénombrable) des parties finies de $\mathbb{N}$, évidemment muni de la tribu $\mathcal{P}(E)$.)

1) Montrer que (X_n) est une chaîne de Markov et donner son noyau de transition P.

   Le fait que c'est une c.d.M. est tout à fait similaire à l'exercice 2 du TD 3 : il suffit d'écrire que $X_n = X_{n-1} \cup \{U_n\}$. *Pour la probabilité de transition, on a :* $P(x, x \cup \{u\}) = \mu(u)$ *pour tout* $u \notin x$, $P(x,x) = \mu(x) = \sum_{u\in x} \mu(u)$ *et enfin* $P(x,x') = 0$ *dans tous les autres cas.*

2) *On suppose dorénavant que* μ *est la probabilité uniforme sur* $\{1, \ldots, N\}$. On pose $Y_n = \mathrm{card}(X_n)$. Montrer que (Y_n) est une chaîne de Markov et donner sa matrice de transition Q.

   A la main : calculer les lois $\mathcal{L}(Y_{n+1}|X_n)$ *et vérifier qu'elles ne dépendent que de* $Y_n = \mathrm{card}(X_n)$. *On obtient* $Q(k,k) = k/N$, $Q(k,k+1) = 1 - k/N$ *et tous les autres* $q(k,j)$ *sont nuls...*

3) Montrer que la suite (Y_n) converge p.s. vers N.

   Il y a des centaines de façons de procéder, par exemple on peut utiliser le lemme de Borel-Cantelli : on définit les évènements $A_k = \{U_{kN} = 1, U_{kN+1} = 2, \ldots, U_{kN+(N-1)} = N\}$ *pour* $k \in \mathbb{N}$. *Si un des* A_k *est vrai, alors pour tout* $n \geq (k+1)N$, $X_n = \{1, \ldots, N\}$ *et donc* $Y_n = N$ *et donc* $Y_n \to N$ *p.s. Or,*

$$\mathbb{P}(A_k) = \mu(1) \ldots \mu(N) = \frac{1}{N^N} \text{ donc } \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_k) = +\infty$$

   et les A_k *sont indépendants. Donc, d'après la seconde partie de Borel-Cantelli, avec proba. 1 une infinité de* A_k *se réalisent, donc au moins un se réalise, donc* $Y_n \to N$.

4) Pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}$ on définit :

$$\tau_i := \inf\{n \in \mathbb{N} : Y_n = i\}.$$

   Montrer que les τ_i sont des temps d'arrêt p.s. finis, puis, à l'aide de la propriété de Markov forte, que les v.a. $\tau_{i+1} - \tau_i$ $(1 \leq i \leq N-1)$ sont indépendantes et de lois géométriques :

$$\mathbb{P}(\tau_{i+1} - \tau_i = k) = \left(1 - \frac{i}{N}\right)\left(\frac{i}{N}\right)^{k-1} \text{ pour } k \geq 1.$$

   On applique Markov fort avec une loi de départ μ *sur* Y_0 *:*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_\mu(\mathbf{1}_{\tau_{i+1}-\tau_i=k}|\mathcal{F}_{\tau_i}) &= \mathbb{E}_{Y_{\tau_i}}(\mathbf{1}_{\tau_{i+1}=k}) \\ &= \mathbb{E}_{Y_0=i}(\mathbf{1}_{\tau_{i+1}=k})\end{aligned}$$

   ne dépend pas de $\tau_i, \ldots, \tau_1$ *donc les* τ_i *sont indépendants. De plus, on a par exemple*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\tau_{i+1} - \tau_i = k) &= \mathbb{P}_{X_0=\{1,\ldots,i\}}(U_1, \ldots, U_{k-1} \leq i, U_k > i) \\ &= \left(1 - \frac{i}{N}\right)\left(\frac{i}{N}\right)^{k-1}.\end{aligned}$$

5) On fait maintenant tendre N vers l'infini. Montrer que $\mathbb{E}(\tau_N)$ est équivalent à $N\log(N)$ et que $\mathrm{Var}(\tau_N)$ est équivalent à cN^2 où c est une constante strictement positive.
On a donc :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\tau_N) &= \mathbb{E}((\tau_N - \tau_{N-1}) + \cdots + (\tau_2 - \tau_1) + (\tau_1 - 0)) \\ &= \frac{N}{1} + \frac{N}{2} + \cdots + \frac{N}{N-1} + 1 \\ &= N\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} \\ &\sim N\log(N).\end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(\tau_N) &= \mathrm{Var}((\tau_N - \tau_{N-1}) + \cdots + (\tau_2 - \tau_1) + (\tau_1 - 0)) \\ &= \mathrm{Var}(\tau_N - \tau_{N-1}) + \cdots + \mathrm{Var}(\tau_2 - \tau_1) + \mathrm{Var}(\tau_1 - 0) \ \textit{(indep.)} \\ &= \frac{\frac{N-1}{N}}{\left(\frac{1}{N}\right)^2} + \frac{\frac{N-2}{N}}{\left(\frac{2}{N}\right)^2} + \cdots + \frac{\frac{1}{N}}{\left(\frac{N-1}{N}\right)^2} + 0 \\ &= N\sum_{k=1}^{N} \frac{N-k}{k^2} \\ &= N^2\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^2} - N\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} \\ &\sim N^2\frac{\pi^2}{6} - N\log(N) \sim N^2\frac{\pi^2}{6}.\end{aligned}$$

6) En déduire que $\tau_N/(N\log N)$ converge en probabilité vers 1 quand N tend vers l'infini.
Soit $\varepsilon > 0$, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\left|\frac{\tau_N}{N\log N} - 1\right| > \varepsilon\right) &= \mathbb{P}\left(|\tau_N - N\log N| > \varepsilon N\log N\right) \\ &\leq \frac{\mathbb{E}\left[(\tau_N - N\log N)^2\right]}{\varepsilon^2 N^2\log(N)^2} \ \textit{(ineg. de Markov)} \\ &= \frac{\mathrm{Var}\left(\tau_N - N\log N\right) + (N\log N - \mathbb{E}(\tau_N))^2}{\varepsilon^2 N^2\log(N)^2} \\ &\sim \frac{N^2\frac{\pi^2}{6} + o[(N\log N)^2]}{\varepsilon^2 N^2\log(N)^2} \ \textit{d'après 6)} \\ &\sim \frac{\pi^2}{6\varepsilon^2\log(N)^2} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0.\end{aligned}$$

Remarque : c'est un résultat assez connu et utile, si on tire de façon indépendante, uniforme et avec remise dans une urne à N boules, le temps avant que chaque boule ait été tirée au moins une fois est équivalent à $N\log N$ lorsque N est grand.

7) On définit maintenant $Z_n = \max(X_n)$. Montrer que (Z_n) est encore une chaîne de Markov et donner sa matrice de transition R.
La preuve suit le même schéma que pour (Y_n), la matrice de transition :

$$R(i,j) = \begin{cases} 0 \ \textit{si } j < i, \\ \frac{i}{N} \ \textit{si } j = i, \frac{1}{N} \ \textit{si } j > i. \end{cases}$$

8) Montrer que la suite (Z_n) converge p.s. vers N.
On peut faire le calcul simple suivant :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z_n < N) &= \mathbb{P}(U_1, \dots, U_n < N) \\ &= \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n\end{aligned}$$

donc $\mathbb{P}(|Z_n - N| \geq 0) = \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n$ *donc* $\sum_n \mathbb{P}(|Z_n - N| \geq 0) < \infty$ *donc* Z_n *cv. vers* N *p.s.*

9) Quelle est ici la loi de $\tau_N = \inf\{n : Z_n = N\}$?
C'est évidemment une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{N}$.

10) Montrer que lorsque N tend vers l'infini, τ_N/N converge en loi vers une loi exponentielle de paramètre 1.
On passe par la fonction de répartition (ou plutôt, la fonction de survie) :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\tau_N/N > t\right) &= \mathbb{P}\left(\tau_N > Nt\right) \\ &= \sum_{i=\lceil Nt \rceil}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{N}\right)^i \frac{1}{N} \\ &= \frac{\left(1 - \frac{1}{N}\right)^{\lceil Nt \rceil} \frac{1}{N}}{1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)} \\ &= \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{\lceil Nt \rceil} \xrightarrow[N \to \infty]{} \mathrm{e}^{-t}.\end{aligned}$$

Exercice 6. Ruine du joueur. On considère un jeu répété entre deux joueurs. Chaque joueur possède une richesse initiale de N euros. A chaque tour de jeu, le perdant donne 1 euro au gagnant. La partie s'arrête lorsqu'un des joueurs n'a plus d'euros en réserve, et alors l'autre joueur garde les $2N$ euros. On suppose que la probabilité que le joueur 1 gagne un tour de jeu est $p \in]0, 1[$, et la probabilité que le joueur 2 la gagne est $1 - p$. Par exemple, si le jeu est un pile ou face avec une pièce équilibrée, $p = 1/2$, mais pour des jeux d'adresse, si 1 est plus adroit que 2, $p > 1/2$. On modélise ce jeu par une chaîne de Markov $(X_n)_{n \geq 0}$ où $X_n \in \{0, 1, \dots, 2N\}$ est la richesse du joueur 1 après n tours de jeux, et la loi initiale est donnée par $X_0 = N$. (On rappelle la notation du cours, $\mathbb{P}_j$ est la loi de la chaîne si $X_0 = j$).

1) Ecrire la matrice de transition P de $(X_n)_{n \geq 0}$.
$P(0, 0) = P(2N, 2N) = 1$, *et pour* $0 < i < 2N$, $P(i, i + 1) = p$ *et* $P(i, i - 1) = 1 - p$.

2) Est-ce que (X_n) est irréductible ?
Non, 3 classes :$\{0\}$, $\{2N\}$ *et* $\{1, 2, \dots, 2N - 1\}$.

3) On note $\rho_j = \mathbb{P}_j(1 \text{ gagne la partie}) = \mathbb{P}_j(\exists n \geq 0 : X_n = 2N)$. Démontrer que pour tout $0 < j < 2N$

$$\rho_j = (1 - p)\rho_{j-1} + p\rho_{j+1}.$$

Tout d'abord on note trivialement que $\rho_0 = 0$ *et* $\rho_{2N} = 1$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_j(\exists n \geq 0 : X_n = 2N) &= \mathbb{P}_j(\exists n \geq 0 : X_n = 2N | X_1 = j+1)\mathbb{P}_j(X_1 = j+1) \\
&\quad + \mathbb{P}_j(\exists n \geq 0 : X_n = 2N | X_1 = j-1)\mathbb{P}_j(X_1 = j-1) \\
&= \mathbb{P}_j(\exists n \geq 1 : X_n = 2N | X_1 = j+1)p \\
&\quad + \mathbb{P}_j(\exists n \geq 1 : X_n = 2N | X_1 = j-1)(1-p) \\
&= \mathbb{P}_{j+1}(\exists n \geq 0 : X_n = 2N)p \\
&\quad + \mathbb{P}_{j_1}(\exists n \geq 0 : X_n = 2N)(1-p) \ \textit{(Markov)} \\
&= p\rho_{j+1} + (1-p)\rho_{j-1}.
\end{aligned}$$

4) En déduire une forme explicite pour les ρ_j, et en particulier pour ρ_0, la probabilité que le joueur 1 gagne la partie.
On résoud la récurrence à deux pas

$$p\rho_{j+1} - \rho_j + (1-p)\rho_{j-1} = 0.$$

Pour l'équation $px^2 - x + (1-p) = 0$ *on a* $\Delta = 1 - 4p(1-p) = (1-2p)^2$ *et donc*

(a) *si* $p = 1/2$, $x = 1$ *est solution unique, et donc*

$$\rho_j = \alpha + \beta j.$$

On identifie α *et* β *par* $\rho_0 = 0$, *soit* $\alpha = 0$, *et* $\rho_{2N} = 1$, *soit* $\beta = 1/(2N)$, *et au final*

$$\rho_j = \frac{j}{2N}.$$

En particulier, on a évidemment $\rho_N = 1/2$ *(situation parfaitement symétrique).*

(b) *si* $i \neq 1/2$ *alors on a deux racines* $x_1 = 1$ *et* $x_2 = (1-p)/p$ *et alors*

$$\rho_j = \alpha x_1^j + \beta x_2^j = \alpha + \beta \left(\frac{1-p}{p}\right)^j.$$

Les calculs en 0 *et* $2N$ *donnent*

$$\rho_j = \frac{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^j}{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^{2N}}.$$

EXERCICE 7. Le modèle d'Ehrenfest est un modèle simplifié de diffusion de particules à travers une paroi poreuse, proposé par Tatiana et Paul Ehrenfest en 1907. Ce modèle a été aussi repris et étendu en économie et en sociologie pour modéliser des phénomènes de diffusion de technologies.

On suppose que N particules sont réparties dans une urne à deux compartiments A et B séparés par une paroi poreuse. Le système évolue de la manière suivante. A chaque instant n, une particule au hasard passe dans le compartiment voisin, c'est à dire, si il y avait i particules dans A à l'instant n, il y a une particule de moins dans le compartiment A avec la probabilité i/N ou une de plus avec la probabilité $\frac{N-i}{N}$, à l'instant $n+1$. On note X_n le nombre de particules dans A à chaque instant partant de l'état initial $X_0 = x_0$.

1) Montrer que (X_n) est une chaîne de Markov, décrire l'espace d'état E. Déterminer sa matrice de transition P.

Le processu (X_n) prend ses valeurs dans $E = \{0, 1, ..., N\}$. Le processus est par définition décrit de la façon suivante

$$
\begin{aligned}
&P(X_{n+1} = i-1 | X_n = i) = \frac{i}{N}, \ \ i = 1, ..., N \\
&P(X_{n+1} = i+1 | X_n = i) = \frac{N-i}{N}, \ i = 0, ..., N-1 \\
&P(X_{n+1} = j | X_n = i) = 0 \textit{ si } |j-i| > 1 \textit{ ou si } j = i \ , \ (i,j) \in E^2.
\end{aligned}
$$

Ces quantités définissent une matrice de transition de la forme

$$
\begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
\frac{1}{N} & 0 & \frac{N-1}{N} & \ddots & & \vdots \\
0 & \frac{2}{N} & 0 & \frac{N-2}{N} & \ddots & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & 0 & \ddots & 0 \\
\vdots & & \ddots & \frac{N-1}{N} & 0 & \frac{1}{N} \\
0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix}
$$

et (X_n)est donc, par définition, une chaîne de Markov.

2) Pour $N = 2$, représenter le graphe de cette chaîne de Markov. Y-a-t-il des éléments absorbants ? Est elle irréductible ? Récurrente positive ? Périodique ? Existe t-il une mesure invariante ? Si oui, l'expliciter. La chaîne est-elle ergodique ? (On dit qu'eun chaîne est ergodique si elle vérifie les hypothèses du théorème ergodique, ie : irréductive récurrente positive).

Dans le cas $N = 2$, la matrice devient

$$
\begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 \\
1/2 & 0 & 1/2 \\
0 & 1 & 0
\end{pmatrix}
$$

Aucun élément n'est absorbant. Tous les états communiquent en un nombre fini d'étapes. La chaîne est donc irréductible. Donc elle est récurrente positive d'après les théorèmes généraux sur les chaines pour E fini. Elle est périodique car si on pose C1={0,2} et C2={1} on a clairement P(C1,C2)=P(C2,C1)=1. Donc elle ne peut pas être ergodique. Néanmoins comme la chaîne est récurrente positive elle admet une unique probabilité invariante π caractérisée par $\pi = \pi P$, $\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2)$. Le système devient

$$\pi_0 = (1/2)\pi_1, \ \pi_2 = (1/2)\pi_1, \ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1$$

soit

$$\pi_0 = 1/4, \ \pi_1 = 1/2, \ \pi_2 = 1/4.$$

Les mesures invariantes sont obtenus en multipliant cette proba par n'importe quelle constante (non nulle).

3) Répondre très rapidement aux mêmes questions pour $N = 3$.

Même genre de travail, rien de méchant. La matrice de transition s'écrit

$$
\begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 \\
1/3 & 0 & 2/3 & 0 \\
0 & 2/3 & 0 & 1/3 \\
0 & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix}
$$

Cette chaîne a exactement les mêmes propriétés que la précédente (elle est aussi périodique en prenant $C_1 = \{0,2\},\ C_2 = \{1,3\}$). Il suffit de calculer la probabilité invariante solution de

$$\pi_0 = 1/3\pi_1,\ \pi_1 = \pi_0 + 2/3\pi_2,\ \pi_2 = 2/3\pi_1 + \pi_3,$$
$$\pi_3 = 1/3\pi_2,\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$$

d'où $\pi_1 = \pi_2$ *et* $\frac{1}{3}\pi_1 + 2\pi_1 + \frac{1}{3}\pi_1 = 1$. *On en déduit*

$$\pi = (\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{8}).$$

4) De manière générale, caractériser la mesure invariante pour N quelconque. Comment s'interprète-t-elle ?
De manière générale, la chaine est irréductible donc récurrente positive et donc admet une probabilité invariante. Les résultats pour $N = 2$ et $N = 3$ peuvent nous faire soupconner que pour un N général

$$\pi_i = \frac{\binom{N}{i}}{2^N},\ i = 0, ..., N$$

il suffit alors dans ce cas de vérifier que π_i est bien invariante, ce qui est aisé.
Sinon, on remarque que pour $i = 1, ..., N-1$ on a

$$\pi_i = \pi_{i-1}(1 - \frac{i-1}{N}) + \pi_{i+1}(\frac{i+1}{N})$$

et aux bords

$$\pi_0 = \pi_1\frac{1}{N},\ \pi_N = \pi_{N-1}\frac{N-1}{N}$$

On en déduit que π_i satisfait l'équation de récurrence

$$\pi_{i+1} = \pi_i\frac{N}{i+1} - \pi_{i-1}(\frac{N-i-1}{i+1})$$

d'où à partir de $\pi_0 = \pi_1\frac{1}{N},\ \pi_2 = \pi_1\frac{N}{2} - \pi_0\frac{N}{2} = \pi_0\frac{N(N-1)}{2}$ *et par récurrence*

$$\pi_i = \pi_0\binom{N}{i}$$

Puis comme $\sum_{i=1}^{N}\pi_i = 1$

$$\pi_0\sum_{i=0}^{N}\binom{N}{i} = \pi_0 2^N = 1$$

d'où le résultat attendu. La distribution stationnaire est donc une loi binomiale $B(N, 1/2)$ qui décrit la manière dont on peut repartir N atomes dans 2 boites.

5) Montrer que ce processus markovien est reversible (i.e. il existe une fonction $h > 0$ telle que $h(i)P(i,j) = h(j)P(j,i)$ pour tout (i,j) dans E^2).
D'après le cours, si le processus markovien est réversible alors la fonction h est proportionnelle à la probabilité invariante. Il suffit donc de vérifier que, la probabilité invariante est une "bonne" fonction h i.e.$\pi(i)P(i,j) = \pi(j)P(j,i)$, pour tout (i,j) dans E^2, ce qui est immédiat ici. Si on ne connaissait pas ce résultat on pouvait simplement définir $h(i)$ par recurrence à partir de la relation $h(i)P(i,i+1) = h(i+1)P(i+1,i)$ i.e. $h(i+1) = h(i)\ (N-i)/(i+1)$, $h(0)$ donné, ce qui suffit pour prouver l'existence de la fonction h. Ceci permettait par la même occasion de retrouver l'expression $h(i) = h(0)\binom{N}{i}$ et donc de réprondre à la question précédente si on n'avait réussi avant...

6) Calculer $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$.
D'après le théorème ergodique pour des chaînes récurrentes positives,

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1} \sum_{i=1}^{n} X_n = \mathbb{E}_\pi X.$$

On a donc

$$\mathbb{E}_\pi X = \sum_{k=0}^{N} i\pi_i = 2^{-N} \sum_{0}^{N} i \binom{N}{i}.$$

Par un calcul classique $\sum_0^N i\binom{N}{i} = [\sum_0^N i\binom{N}{i} x^{i-1}]_{x=1} = \frac{d}{dx}(1+x)^N|_{x=1} = N\ 2^{N-1}$ *d'où*

$$\mathbb{E}_\pi X = \frac{N}{2}$$

ce qui en soit n'est pas étonnant... En effet, on peut aussi remarquer plus simplement que, si on note Y_n *le nombre de particules dans* B *à chaque instant alors* Y_n *est une chaîne de markov de même matrice de transition et de même mesure stationnaire et donc* $\mathbb{E}_\pi X = \mathbb{E}_\pi Y$ *et* $\mathbb{E}_\pi X + \mathbb{E}_\pi Y = N$ *donc* $\mathbb{E}_\pi X = \mathbb{E}_\pi Y = \frac{N}{2}$

7) Sachant que l'on est parti d'un état initial ou il y avait K atomes dans A et autant dans B ($N = 2K$), quel est le temps moyen $t_{0,N}$ pour revenir dans cet état ? Donner la limite de $N^{-1/2} t_{0,N}$ quand le nombre de particules N tend vers l'infini.
Par définition de la mesure stationnaire, on a simplement

$$t_{0,N} = t_{0,2K} = 1/\pi_K.$$

Par Stirling on a $2^{-2K}\binom{2K}{K} = \frac{(2K)!}{2^{2K}K!^2} \rightsquigarrow \frac{\sqrt{2\pi 2K}\left(\frac{2K}{e}\right)^{2K}}{2^{2K}(2\pi K)\left(\frac{K}{e}\right)^{2K}} = \frac{1}{\sqrt{\pi K}}$. *On en déduit que*

$$N^{-1/2} t_{0,N} \underset{N\to\infty}{\to} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Exercice 8. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov sur E au plus dénombrable, caractérisée par sa loi initiale δ_{x_0} (i.e. $X_0 = x_0$ fixé) et sa matrice de transition P.

1) Montrer que $\mathbb{E}[f(X_N)] = P^N f(x_0)$.
Vu en cours.

2) On pose $u(N, x) = f(x)$ et, pour n décroissant de N vers 0,

$$u(n, x) = \sum_{y\in E} P(x, y) u(n+1, y) = Pu(n+1, \cdot)(x).$$

Montrer que $\{u(n, X_n),\ n \geq 0\}$ est une martingale pour la filtration naturelle associée à $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
On a

$$\begin{aligned} u(n, X_n) &= Pu(n+1,\cdot)(X_n) \\ &= E[u(n+1,\cdot)(X_{n+1})|X_n] \\ &= E[u(n+1,\cdot)(X_{n+1})|\mathcal{F}_n] \ \textit{(pté. de Markov).} \\ &= E[u(n+1, X_{n+1})|\mathcal{F}_n]. \end{aligned}$$

Comme f *est bornée les variables aléatoires sont toutes intégrables.*

3) En déduire que $u(0, x_0) = \mathbb{E}[u(n, X_n)] = \mathbb{E}[f(X_N)]$.

C'est une mart. donc son esp. est constante : $u(0, x_0) = \mathbb{E}[u(n, X_n)] = \mathbb{E}[u(N, X_N)] = E[f(X_N)]$.

4) Proposer un algorithme récursif simple pour calculer $\mathbb{E}[f(S_N)]$ pour (S_n) une marche aléatoire symétrique partant de 0.

Rappeler ce que veut dire marche aléatoire symétrique partant de 0. L'algorithme est donné par la partie 2), il suffit d'expliciter la formule pour $u(n, x)$ *dans ce cas.*

ENSAE **Introduction aux processus**
2ème année **Pierre Alquier**

TD N° 5 : Processus de Markov à temps continu

Exercice 1. Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus de Poisson d'intensité λ et soit $T_1 = \inf\{t \geq 0 : X_t = 1\}$. Soit $s \geq 0$ une date fixée. Déterminer la loi de $T_1|(X_s = 1)$.

On a, pour $0 \leq t \leq s$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_1 < t|X_s = 1) &= \frac{\mathbb{P}(S_1 < t, X_s = 1)}{\mathbb{P}(X_s = 1)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(X_s - X_t = 0, X_t - X_0 = 1)}{\mathbb{P}(X_s - X_0 = 1)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(X_s - X_t = 0)\mathbb{P}(X_t - X_0 = 1)}{\mathbb{P}(X_s - X_0 = 1)} \\ &= \frac{\exp[-\lambda(t-s)]\lambda t \exp(-\lambda t)}{\lambda s \exp(-\lambda s)} \\ &= \frac{t}{s}\end{aligned}$$

et donc $T_1|(X_s = 1) \sim \mathcal{U}[0, s]$ (loi uniforme).

Exercice 2. Une compagnie d'assurance modélise suppose que les accidents de la circulation surviennent suivant un processus de Poisson d'intensité λ, inconnue en pratique. Etant donné l'historique $(N_t)_{t\in[0,T]}$, elle propose d'estimer λ par $\hat{\lambda}_T = N_T/T$. Etudier la convergence de cet estimateur.

Comme on sait que $N_T \sim \mathcal{P}(\lambda T)$, et donc $\mathbb{E}(N_T) = \lambda T$, on peut proposer l'estimateur par la méthode des moments

$$\hat{\lambda}_T = \frac{N_T}{T}.$$

Comme $\mathrm{Var}(\hat{\lambda}_T) = \lambda/T^2$ on en déduit que $\hat{\lambda}_T$ converge dans L^2 vers λ, et donc en probabilité.

Exercice 3. Soit $(N_t)_{t\in[0,T]}$ un processus de Markov (homogène), à trajectoires càdlàg, vérifiant les trois propriétés suivantes :

- (α) accroissements indépendants : $t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq t_4 \Rightarrow N_{t_4} - N_{t_3}$ indep. de $N_{t_2} - N_{t_1}$;
- (β) $\mathbb{P}(N_{t+h} - N_t = 1) = \lambda h + o(h)$ lorsque h est au voisinage de 0 ;
- (γ) $\mathbb{P}(N_{t+h} - N_t > 1) = o(h)$.

On note $p_k(t) = \mathbb{P}(N_t = k)$.

1) Montrer que $p_0'(t) = -\lambda p_0(t)$ et en déduire la valeur de $p_0(t)$.

On a

$$\begin{aligned}p_0(t+h) &= \mathbb{P}(N_{t+h} = 0) \\ &= \mathbb{P}(N_{t+h} = 0|N_t = 0)\mathbb{P}(N_t = 0) \\ &= (1 - \lambda h + o(h))p_0(t)\end{aligned}$$

et donc

$$\frac{p_0(t+h) - p_0(t)}{h} = \lambda p_0(t) + o(1)$$

et donc, en faisant tentre h vers 0, $p_0'(t) = \lambda p_0(t)$. Donc, $p_0(t) = C\exp(-\lambda t)$ pour une constante $C > 0$. Comme $p_0(0) = 1$, on en déduit que $C = 1$ et $p_0(t) = \exp(-\lambda t)$.

2) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ on a :

$$p'_{k+1}(t) = \lambda p_k(t) - \lambda p_{k+1}(t).$$

C'est le même genre de calculs :

$$\begin{aligned}
p_k(t+h) &= \mathbb{P}(N_{t+h} = k) \\
&= \mathbb{P}(N_{t+h} = k | N_t = k)\mathbb{P}(N_t = k) + \mathbb{P}(N_{t+h} = k | N_t = k-1)\mathbb{P}(N_t = k-1) \\
&\quad + \sum_{\ell=0}^{k-2} \mathbb{P}(N_{t+h} = k | N_t = \ell)\mathbb{P}(N_t = \ell) \\
&= p_k(t)(1 - \lambda h + o(h)) + p_{k-1}(t)(\lambda h + o(h)) + \sum_{\ell=0}^{k-2} p_\ell(t) o(h) \\
&= p_k(t)(1 - \lambda h) + p_{k-1}(t)(\lambda h) + o(h).
\end{aligned}$$

Donc,

$$\frac{p_k(t+h) - p_k(t)}{h} = \lambda p_k(t) + \lambda p_{k-1}(t) + o(1)$$

et donc,

$$p'_k(t) = -\lambda p_k(t) + \lambda p_{k-1}(t).$$

3) Par récurrence, en déduire la valeur de $p_k(t)$ et conclure que (N_t) est un processus de Poisson d'intensité λ.
Le processus (N_t) est un processus de renouvellement, pour montrer qu'il est de Poisson d'intensité λ, il suffit de mq. $p_k(t) = \mathbb{P}(N_t = k) = \mathrm{e}^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}$. Or, on a mq $p_0(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}$, ok. On procède ensuite par récurrence : si $p_k(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}$ alors

$$p'_{k+1}(t) = -\lambda p_{k+1}(t) + \lambda p_k(t) = -\lambda p_{k+1}(t) + \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}.$$

C'est une équa. diff. linéaire du premier ordre, donc, pour la condition $p_{k+1}(t) = 0$, on aura une seule solution. On peut vérifier que $\mathrm{e}^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{k+1}}{(k+1)!}$ est justement solution, ce qui conclut.

Exercice 4. Soit un processus de Markov à temps continu, $(X_t)_{t\geq 0}$, à valeurs dans $\{1, 2, 3\}$, de générateur infinitésimal

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

On suppose que $X_0 = 1$ et on pose $T = \min\{t \geq 0 : X_t \neq 1\}$.

1) Donner la loi de T et $\mathbb{E}(T)$.
Vu en cours : $T \sim \mathcal{E}(\alpha(1)) = \mathcal{E}(3)$ et en particulier $\mathbb{E}(T) = 1/3$.

2) Donner la loi de X_T.
Vu en cours : $\mathbb{P}(X_T = 2) = \alpha(1,2)/\alpha(1) = 1/3$ et $\mathbb{P}(X_T = 3) = \alpha(1,3)/\alpha(1) = 2/3$.

3) Déterminer la ou les probabilités invariantes pour (X_t).
Résoudre le système $\pi A = 0$, donc :

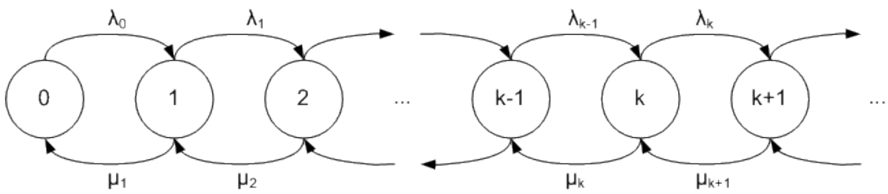
$$(\pi(1)\ \pi(2)\ \pi(3))\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} -3\pi(1) + \pi(3) = 0 \\ \pi(1) - \pi(2) + \pi(3) = 0 \\ 2\pi(1) + \pi(2) - 2\pi(3) = 0 \end{cases}$$

Par ex. les deux premières équations donnent $\pi(3) = 3\pi(1)$ et $\pi(2) = 4\pi(1)$ et donc, en utilisant le fait que $\pi(1) + \pi(2) + \pi(3) = 1$,

$$\pi = \left(\frac{1}{8}\ \frac{4}{8}\ \frac{3}{8}\right).$$

Exercice 5. File d'attente. On revient au processus de naissance et de mort vu en cours :



Dans ce qui suit, on considère différentes formes pour λ_i et μ_i et on demande de calculer

$$q = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \dots \mu_n}$$

et d'en déduire si le processus admet une loi invariante, ou non, et si oui de donner cette loi.

1) $\lambda_i = \lambda$ et $\mu_i = \mu$, $\lambda, \mu > 0$.
On a

$$q = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n$$

et donc, si $\lambda \geq \mu$, $q = \infty$ et pas de loi invariante, mais si $\lambda < \mu$ alors

$$q = \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{\mu}}$$

et alors une unique loi invariante

$$\pi(n) = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n.$$

2) $\lambda_i = \frac{1}{i+1}$ et $\mu_i = 1$.
On a

$$q = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

et donc $q = \mathrm{e}$ et unique loi invariante

$$\pi(n) = \frac{1}{\mathrm{e}}\frac{1}{n!}$$

(en fait, une loi de Poisson de paramètre 1).

Exercice 6. Pont brownien, et existence du mouvement brownien. Soit deux suites $(\xi_n)_{n\geq 1}$ et $(\eta_n)_{n\geq 1}$ de variables normales centrées réduites indépendantes, définies sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On définit, pour tout entier $n \geq 1$, pour tout $t \in [0,1]$,

$$B_t^{(n)} := \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos(2\pi kt) - 1}{k\pi\sqrt{2}} \xi_k + \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(2\pi kt)}{k\pi\sqrt{2}} \eta_k.$$

1) Soit $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ une suite réelle bornée. Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\alpha_n}{n} \xi_n$ converge dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.
On note B tq $|\alpha_n| < B$. On vérifie que la suite est de Cauchy dans L^2. Soit $n < m$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{k}\xi_k - \sum_{k=1}^{m} \frac{\alpha_k}{k}\xi_k\right)^2\right] &= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=n+1}^{m} \frac{\alpha_k}{k}\xi_k\right)^2\right] \\ &= \sum_{k=n+1}^{m} \frac{\alpha_k^2}{k^2} \\ &\leq B \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.\end{aligned}$$

Donc la suite est de Cauchy dans L^2 donc elle cv. dans L^2.

2) En déduire que, pour tout $t \in [0,1]$ fixé, $B_t^{(n)}$ converge dans L^2 vers une variable que l'on notera B_t.
Il suffit d'appliquer 1) à chacun des deux termes de la somme et de borner les cos *et les* sin *par* 1.

3) On admettra qu'en développant la fonction $t \mapsto t(1-t)$ en série de Fourier sur $[0,1]$ on obtient la relation

$$\sum_{k\geq 1} \frac{\cos(2\pi kt)}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} - \pi^2 t(1-t)$$

(on pourra aussi s'amuser à le démontrer, mais ça n'est pas franchement un exercice de "processus"). En déduire que :

$$\mathrm{Cov}(B_t, B_s) = s \wedge t - st.$$

Un processus gaussien centré sur $[0,1]$ ayant pour fonction de covariance $s \wedge t - st$ sera appelé *pont brownien.* Pourquoi ?
L'appellation pont brownien vient du fait que $\mathrm{Var}(B_0) = \mathrm{Var}(B_1) = 0$ *donc le* $B_0 = B_1 = 0$

p.s. Montrons maitnenant la relation demandée. On fixe $0 \leq s \leq t \leq 1$*, on a*

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(B_s, B_t) &= \mathbb{E}(B_s B_t) \\
&= \lim_{N\to\infty} \mathbb{E}(B_s^N B_t^N) \text{ (car cv.) } L^2 \\
&= \frac{1}{2\pi^2} \lim_{N\to\infty} \mathbb{E}\Bigg[\left(\sum_{k=1}^{N} \frac{\cos(2\pi k s) - 1}{k}\xi_k + \sum_{k=1}^{N} \frac{\sin(2\pi k s)}{k}\eta_k\right) \\
&\qquad \left(\sum_{k=1}^{N} \frac{\cos(2\pi k t) - 1}{k}\xi_k + \sum_{k=1}^{N} \frac{\sin(2\pi k t)}{k}\eta_k\right)\Bigg] \\
&= \frac{1}{2\pi^2} \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \left[\frac{[\cos(2\pi k s) - 1][\cos(2\pi k t) - 1]}{k^2} + \frac{\sin(2\pi k s)\sin(2\pi k t)}{k^2}\right] \\
&= \frac{1}{2\pi^2} \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \frac{\cos[2\pi k(t-s)] - \cos(2\pi k s) - \cos(2k\pi t) + 1}{k^2} \\
&= \frac{1}{2\pi^2} \Bigg\{\frac{\pi^2}{6} - \pi(t-s)[1-(t-s)] - \left[\frac{\pi^2}{6} - \pi s(1-s)\right] \\
&\qquad - \left[\frac{\pi^2}{6} - \pi t(1-t)\right] + \frac{\pi^2}{6}\Bigg\} \text{ d'après la relation de l'énoncé} \\
&= s - st.
\end{aligned}$$

Donc, pour (s,t) *en position générale,* $\mathrm{Cov}(B_s, B_t) = s \wedge t - st$.

4) Montrer que si $(B_t)_{t\in[0,1]}$ est un pont brownien, $(B_{1-t})_{t\in[0,1]}$ en est un aussi.
Si $(B_t)_{t\in[0,1]}$ *est un pont brownien,* $(B_{1-t})_{t\in[0,1]}$ *est évidemment un processus gaussien centré, il suffit de vérifier qu'il a la bonne fonction de covariance :*

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(B_{1-s}, B_{1-t}) &= (1-s) \wedge (1-t) - (1-s)(1-t) \text{ d'après 3)} \\
&= 1 - s \vee t - (1 - s - t - st) \\
&= t + s - s \vee t - st \\
&= s \wedge t - st
\end{aligned}$$

donc $(B_{1-t})_{t\in[0,1]}$ *est un pont brownien.*

5) On définit le processus $(W_s)_{s\in\mathbb{R}_+}$ par

$$W_s = (1+s)B_{\frac{s}{1+s}}.$$

Démontrer que (W_s) est un mouvement brownien.
Là encore, c'est évidememnt un processus gaussien centré, reste à voir si la fonction de covariance est la bonne :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(W_s, W_t) &= (1+s)(1+t)\mathrm{Cov}\left(B_{\frac{s}{1+s}}, B_{\frac{t}{1+t}}\right) \\
&= (1+s)(1+t)\left(\frac{s}{1+s} \wedge \frac{t}{1+t}\right) \\
&= s \wedge t
\end{aligned}$$

donc (W_s) *est un mouvement brownien.*

6) A l'inverse, soit (W_s) un mouvement brownien. Démontrer que $U_t = W_t - tW_1$ et $V_t = (1-t)W_{t/(1-t)}$ pour $t \in [0,1]$ sont des ponts browniens.

   La preuve est toujours la même. C'est évidemment gaussien centré, il suffit de calculer les fonctions de covariance...

Remarque : on peut en fait démontrer que la convergence des fonctions $(B_t^{(n)})$ vers (B_t) est uniforme p.s., ce qui permet d'établir que $(B_t)_{t\in[0,1]}$ et $(W_s)_{s\in\mathbb{R}_+}$ construites dans les questions 1)-6) sont p.s. continues, mais c'est un peu plus difficile.