

Macroéconomie 1 (2/7)

Le modèle de croissance à taux d'épargne endogène (Cass-Koopmans-Ramsey)

Olivier Loisel

ENSAE

Septembre – Décembre 2025

Cass, Koopmans, Ramsey

- “**Modèle de Cass-Koopmans-Ramsey**” ≡ modèle issu des contributions de Ramsey (1928), Cass (1965) et Koopmans (1965).
 - **Franck P. Ramsey** : mathématicien, logicien et économiste anglais, né à Cambridge en 1903, mort à Londres en 1930.
 - **David Cass** : économiste américain, né en 1937 à Honolulu, mort en 2008 à Philadelphie, professeur à l’Université de Pennsylvanie à partir de 1974.
 - **Tjalling C. Koopmans** : économiste néerlandais et américain, né en 1910 à 's-Graveland, mort en 1985 à New Haven, professeur à l’Université de Yale à partir de 1955, co-lauréat (avec Leonid V. Kantorovich) du prix de la Banque de Suède en sciences économiques en mémoire d’Alfred Nobel en 1975 “*for their contributions to the theory of optimum allocation of resources*”.

Motivation

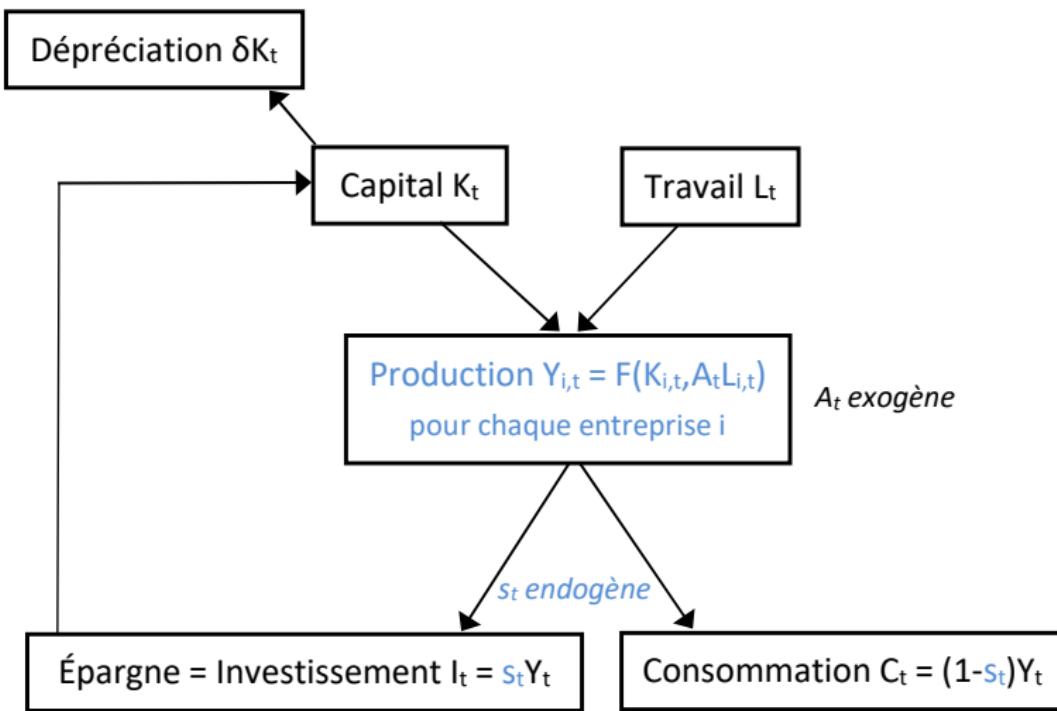
- Le modèle de Cass-Koopmans-Ramsey endogénéise le taux d'épargne du modèle de Solow-Swan.
 - Cette endogénéisation permet une analyse positive et normative plus fine, en particulier de l'effet de politiques économiques.
 - Les principales prédictions du modèle de Solow-Swan concernant
 - les déterminants de la croissance de long terme,
 - la convergence conditionnelle,
 - la possibilité d'inefficience dynamique,sont-elles affectées par ce changement ?
 - Non, non, et oui.

Aperçu général du modèle I *

- Les **entreprises** louent du capital et emploient du travail pour produire des biens.
 - Les **ménages** détiennent le capital et fournissent le travail.
 - Les biens produits par les entreprises sont utilisés pour la consommation des ménages et l'investissement en nouveau capital.
 - Le **taux d'épargne** est **endogène**, choisi optimalement par les **ménages**.
 - Le capital évolue dans le temps en fonction de l'investissement et de la dépréciation du capital.

(Dans les pages dont le titre est suivi d'un astérisque en bleu : changements par rapport au chapitre 1.)

Aperçu général du modèle II *



Bien, agents privés, marchés

- **Un seul type de bien**, utilisé pour
 - la consommation,
 - l'investissement.
 - **Deux sortes d'agents privés** :
 - des ménages,
 - des entreprises.
 - **Quatre marchés** :
 - marché des biens,
 - marché du travail,
 - marché du capital,
 - marché des prêts.

Origine de l'offre et de la demande sur chaque marché

- **Marché des biens :**

- *offre* des entreprises,
- *demande* des ménages.

- **Marché du travail :**

- *offre* des ménages,
- *demande* des entreprises.

- **Marché du capital :**

- *offre* des ménages,
- *demande* des entreprises.

- **Marché des prêts :**

- *offre* des ménages,
- *demande* des ménages.

Marchés en concurrence pure et parfaite

- Ces quatre marchés sont supposés être en **concurrence pure et parfaite**, c'est-à-dire qu'ils satisfont les cinq conditions suivantes :
 - ① atomicité du marché,
 - ② homogénéité des produits,
 - ③ transparence du marché,
 - ④ libre entrée et libre sortie,
 - ⑤ libre circulation des facteurs de production.
- La condition d'atomicité dit que l'offre ou la demande de chaque agent est négligeable par rapport à l'offre ou la demande totale, et implique qu'aucun agent ne peut, isolément, influencer le prix.
- Dans le chapitre 5, nous considérerons des marchés qui ne sont pas en concurrence pure et parfaite parce qu'ils ne satisfont pas la condition d'atomicité du marché.

Variables exogènes *

- **Ni flux ni stocks :**

- temps continu, indiqué par t ,
- prix des biens \equiv numéraire = 1,
- (grand) nombre d'entreprises I ,
- taux d'épargne s , avec $0 < s < 1$.

- **Flux :**

- offre de travail = 1 par tête.

- **Stocks :**

- capital agrégé initial $K_0 > 0$,
- population $L_t = L_0 e^{nt}$, où $L_0 > 0$ et $n \geq 0$,
- paramètre de productivité $A_t = A_0 e^{gt}$, où $A_0 > 0$ et $g \geq 0$.

Variables endogènes *

- **Prix :**

- coût réel d'usage du capital z_t ,
- salaire réel w_t ,
- taux d'intérêt réel r_t .

- **Quantités – flux :**

- production $Y_{i,t}$ de l'entreprise i ,
- demande de travail $N_{i,t}$ de l'entreprise i ,
- production agrégée $Y_t \equiv \sum_{i=1}^I Y_{i,t}$,
- demande de travail agrégée $N_t \equiv \sum_{i=1}^I N_{i,t}$,
- consommation agrégée C_t .

- **Quantités – stocks :**

- capital $K_{i,t}$ de l'entreprise i (sauf en $t = 0$),
- capital agrégé $K_t \equiv \sum_{i=1}^I K_{i,t}$ (sauf en $t = 0$),
- montant réel agrégé des actifs B_t .

Equilibres partiel et général

- **Équilibre partiel** ≡ situation où l'offre est égale à la demande sur un seul marché.
- **Équilibre général** ≡ situation où l'offre est égale à la demande sur tous les marchés.

Conditions d'équilibre général

- Chaque agent privé résout son problème d'optimisation : du fait que tous les marchés sont en concurrence pure et parfaite,
 - à chaque date $t \geq 0$, chaque entreprise i choisit $(Y_{i,t}, K_{i,t}, N_{i,t})$, en fonction des prix (w_t, z_t) qu'elle considère comme donnés, de façon à maximiser son profit *instantané* sous contraintes,
 - à la date 0, le ménage représentatif choisit $(\frac{C_t}{L_t}, \frac{B_t}{L_t})_{t \geq 0}$, en fonction des prix $(w_t, z_t, r_t)_{t \geq 0}$ qu'il considère comme donnés, de façon à maximiser son utilité *intertemporelle* (en anticipation parfaite) sous contraintes.
- Les prix sont tels que chaque marché est équilibré à chaque date $t \geq 0$:
 - w_t équilibre le marché du travail : $N_t = L_t$,
 - z_t équilibre le marché du capital,
 - r_t équilibre le marché des prêts.

Plan du chapitre

- ① Introduction
- ② Conditions d'équilibre
- ③ Détermination de l'équilibre
- ④ Optimalité de l'équilibre
- ⑤ Extensions environnementales
- ⑥ Conclusion
- ⑦ Annexe

Conditions d'équilibre

- ① Introduction
- ② Conditions d'équilibre
 - Comportement des entreprises
 - Comportement des ménages
 - Equilibre des marchés
- ③ Détermination de l'équilibre
- ④ Optimalité de l'équilibre
- ⑤ Extensions environnementales
- ⑥ Conclusion
- ⑦ Annexe

Problème d'optimisation des entreprises

- Production de chaque entreprise i : $Y_{i,t} = F(K_{i,t}, A_t N_{i,t})$, où la fonction de production F satisfait les mêmes propriétés qu'au chapitre 1.
- Chaque entreprise loue à chaque date le stock de capital qu'elle souhaite utiliser, et il n'y a pas de coût d'ajustement du capital (en particulier l'investissement est réversible).
- Donc, à chaque date t , l'entreprise i choisit $K_{i,t}$ et $N_{i,t}$ de façon à maximiser son profit **instantané**

$$F(K_{i,t}, A_t N_{i,t}) - z_t K_{i,t} - w_t N_{i,t}$$

en considérant z_t et w_t comme donnés.

Conditions du premier ordre

- En notant F_j la dérivée partielle de F par rapport à son $j^{\text{ième}}$ argument pour $j \in \{1, 2\}$, on obtient les conditions du premier ordre

$$\begin{aligned} F_1(K_{i,t}, A_t N_{i,t}) &= z_t \quad (\text{productivité marginale du capital} = \text{coût d'usage}), \\ A_t F_2(K_{i,t}, A_t N_{i,t}) &= w_t \quad (\text{productivité marginale du travail} = \text{salaire}). \end{aligned}$$

- En utilisant ces conditions et le théorème d'Euler appliqué à la fonction F homogène de degré un, on obtient que le profit instantané est nul quels que soient $K_{i,t}$ et $N_{i,t}$:

$$\begin{aligned} F(K_{i,t}, A_t N_{i,t}) - K_{i,t} F_1(K_{i,t}, A_t N_{i,t}) - A_t N_{i,t} F_2(K_{i,t}, A_t N_{i,t}) &= 0 \\ \implies F(K_{i,t}, A_t N_{i,t}) - z_t K_{i,t} - w_t N_{i,t} &= 0. \end{aligned}$$

- Leonhard P. Euler** : mathématicien et physicien suisse, né en 1707 à Bâle, mort en 1783 à Saint-Pétersbourg.

Utilité intertemporelle des ménages

- **Ménage représentatif à durée de vie infinie** ou bien lignée dynastique dont les générations sont liées par héritage et altruisme (cette hypothèse sera relâchée au chapitre 7).
 - A la date 0, son **utilité intertemporelle** est

$$U_0 \equiv \int_0^{+\infty} e^{-\rho t} \frac{L_t}{L_0} u(c_t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-(\rho - n)t} u(c_t) dt$$

où

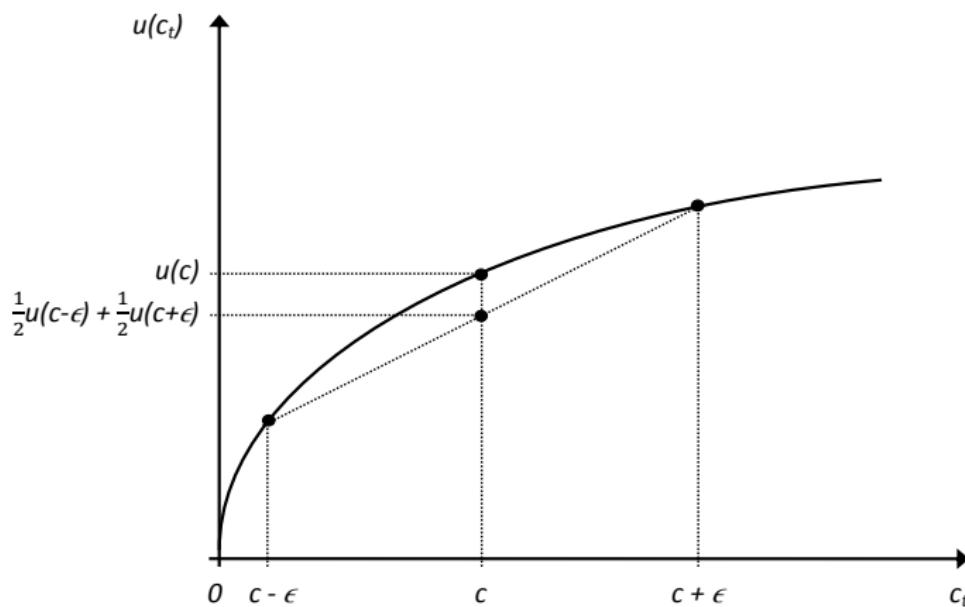
- ρ est le taux de préférence pour le présent ($\rho > 0$)
 - $c_t \equiv \frac{C_t}{L_t}$ est la consommation par tête,
 - u est la fonction d'utilité instantanée.

en normalisant le (grand) nombre constant de ménages à L_0 (sans perte de généralité).

Propriétés de la fonction d'utilité instantanée

- ① $u : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ (u peut prendre des valeurs négatives car elle est de nature ordinale, pas cardinale),
- ② u est strictement **croissante** : $\forall x \in \mathbb{R}^+, u'(x) > 0$,
- ③ u est strictement **concave** (ce qui implique une préférence pour lisser la consommation dans le temps) : $\forall x \in \mathbb{R}^+, u''(x) < 0$,
- ④ u satisfait les **conditions d'Inada** (1963) : $\lim_{x \rightarrow 0} u'(x) = +\infty$ et
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} u'(x) = 0.$$

Stricte concavité de u et lissage de la consommation



Cas 1 : $c_t = c$. Cas 2 : $\text{Proba}[c_t = c - \epsilon] = \text{Proba}[c_t = c + \epsilon] = \frac{1}{2}$ avec $0 < \epsilon < c$.

On a $u(c) > \frac{1}{2}u(c - \epsilon) + \frac{1}{2}u(c + \epsilon)$.

Actifs des ménages

- Chaque ménage peut détenir deux types d'actifs :
 - prêts aux autres ménages (nuls à l'équilibre),
 - titres de propriété sur le capital.
- A l'équilibre, les ménages doivent être indifférents entre ces deux types d'actifs, donc

$$\begin{aligned} r_t &\equiv \text{taux d'intérêt réel sur les prêts aux ménages} \\ &= \text{taux de rendement réel des titres de propriété} \end{aligned}$$

(si c'était une inégalité stricte, tous les ménages souhaiteraient prêter et aucun ne souhaiterait emprunter, ou vice-versa).

- $B_t \equiv$ montant total des actifs en unités de bien.
- $b_t \equiv \frac{B_t}{L_t}$ montant par personne des actifs en unités de bien.

Rappels sur la valeur actualisée d'un flux ou stock futur

- On considère un flux ou un stock de biens, noté x_t pour toute date t , et deux dates t_1 et t_2 telles que $t_1 < t_2$.
- On appelle **valeur actualisée** à la date t_1 de x_{t_2} la valeur que x_t devrait prendre à la date t_1 si x_t était placé sur le marché des prêts entre les dates t_1 et t_2 et prenait la valeur x_{t_2} à la date t_2 .
- Dans le cas où x_{t_2} est un revenu, c'est donc la valeur qu'on peut emprunter et consommer en t_1 en remboursant son emprunt en t_2 avec ce revenu.
- Si x_t était placé sur le marché des prêts, alors son taux de croissance instantané à la date t serait le taux d'intérêt réel, noté r_t :

$$\frac{\dot{x}_t}{x_t} \equiv \lim_{dt \rightarrow 0^+} \frac{x_{t+dt} - x_t}{x_t dt} = r_t.$$

- En intégrant entre t_1 et t_2 , on obtient $x_{t_2} = x_{t_1} e^{\int_{t_1}^{t_2} r_t dt}$.
- La valeur actualisée à la date t_1 de x_{t_2} est donc $x_{t_2} e^{-\int_{t_1}^{t_2} r_t dt}$.

Contrainte budgétaire des ménages I

- Le ménage représentatif ayant accès au marché des prêts, il peut en quelque sorte “transférer intertemporellement” ses revenus salariaux et choisir ainsi une trajectoire de consommation sujette uniquement à une **contrainte budgétaire intertemporelle** du type

valeur actualisée à la date 0 des consommations futures \leq richesse à la date 0 + valeur actualisée à la date 0 des revenus salariaux futurs.

- En termes agrégés, elle s'écrit

$$\underbrace{\int_0^{+\infty} C_t e^{-\int_0^t r_\tau d\tau} dt}_{\text{ce qui devrait être épargné en 0 pour financer les consom. futures}} \leq \underbrace{B_0}_{\text{richesse en 0}} + \underbrace{\int_0^{+\infty} W_t e^{-\int_0^t r_\tau d\tau} dt}_{\text{ce qui pourrait être emprunté en 0 et remboursé avec les revenus salariaux futurs}} .$$

- Elle se réécrit, en grandeurs par tête,

$$\int_0^{+\infty} c_t e^{-\int_0^t (r_\tau - n) d\tau} dt \leq b_0 + \int_0^{+\infty} w_t e^{-\int_0^t (r_\tau - n) d\tau} dt.$$

Contrainte budgétaire des ménages II

- La **contrainte budgétaire instantanée** du ménage représentatif est, en termes agrégés,

$$\dot{B_t} = \underbrace{r_t B_t}_{\text{variation d'actifs}} + \underbrace{w_t L_t}_{\text{revenu salarial}} - \underbrace{C_t}_{\text{dépenses de consommation}}.$$

- Elle se réécrit, en grandeurs par tête,

$$\dot{b}_t = (r_t - n) b_t + w_t - c_t.$$

- En réarrangeant les termes et en multipliant par $e^{-\int_0^t (r_\tau - n) d\tau}$, on obtient

$$\left[\dot{b}_t - (r_t - n) b_t \right] e^{-\int_0^t (r_\tau - n) d\tau} = (w_t - c_t) e^{-\int_0^t (r_\tau - n) d\tau}.$$

- Puis, en intégrant entre 0 et T ,

$$b_T e^{-\int_0^T (r_\tau - n) d\tau} - b_0 = \int_0^T (w_t - c_t) e^{-\int_0^t (r_\tau - n) d\tau} dt.$$

Contrainte budgétaire des ménages III

- En passant à la limite $T \rightarrow +\infty$ et en réarrangeant les termes, on obtient

$$\int_0^{+\infty} c_t e^{-\int_0^t (r_\tau - n) d\tau} dt = b_0 + \int_0^{+\infty} w_t e^{-\int_0^t (r_\tau - n) d\tau} dt - \lim_{T \rightarrow +\infty} \left[b_T e^{-\int_0^T (r_\tau - n) d\tau} \right].$$

- On obtient ainsi la **contrainte budgétaire intertemporelle**

$$\int_0^{+\infty} c_t e^{-\int_0^t (r_\tau - n) d\tau} dt \leq b_0 + \int_0^{+\infty} w_t e^{-\int_0^t (r_\tau - n) d\tau} dt$$

si et seulement si $\lim_{T \rightarrow +\infty} \left[b_T e^{-\int_0^T (r_\tau - n) d\tau} \right] \geq 0$

ou, de manière équivalente, si et seulement si $\lim_{T \rightarrow +\infty} \left(B_T e^{-\int_0^T r_\tau d\tau} \right) \geq 0$.

Contrainte de solvabilité des ménages

- La condition

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \left(B_T e^{- \int_0^T r_\tau d\tau} \right) \geq 0$$

est la **contrainte de solvabilité** des ménages.

- Elle impose que la valeur actualisée à la date 0 du montant total d'actifs à long terme doit être positive ou nulle.
- Elle implique qu'à long terme, la dette totale ($-B_T$ lorsque $B_T < 0$) ne peut pas croître à un taux plus élevé que le taux d'intérêt (r_T) ou égal à celui-ci.
- Elle élimine la possibilité de montage financier où chaque emprunt serait remboursé au moyen d'un nouvel emprunt ("jeu de Ponzi").
- **Carlo P. G. G. T. Ponzi** : escroc italo-américain, né en 1882 à Lugo, mort en 1949 à Rio de Janeiro.

Problème d'optimisation des ménages

- Pour $(r_t, w_t)_{t \geq 0}$ et b_0 donnés,

$$\max_{(c_t)_{t \geq 0}, (b_t)_{t > 0}} \int_0^{+\infty} e^{-(\rho-n)t} u(c_t) dt$$

sous les contraintes

- ➊ $\forall t \geq 0, c_t \geq 0$ (contrainte de positivité de la consommation),
 - ➋ $\forall t \geq 0, b_t = (r_t - n)b_t + w_t - c_t$ (contrainte budgétaire instantanée),
 - ➌ $\lim_{t \rightarrow +\infty} \left[b_t e^{-\int_0^t (r_\tau - n) d\tau} \right] \geq 0$ (contrainte de solvabilité).
- Problème difficile car **intertemporel**.
 - Parabole de Robinson Crusoé et des grains de blé.

Problème général d'optimisation dynamique

- Ce problème est un cas particulier (parmi d'autres que nous rencontrerons au fil du cours) du problème général suivant : pour $k_0 > 0$ donné,

$$\max_{(c_{i,t})_{i \in \{1, \dots, m\}, t \geq 0}, (k_t)_{t \geq 0}} \left\{ \int_0^{+\infty} U \left[(c_{i,t})_{i \in \{1, \dots, m\}}, k_t, t \right] dt \right\}$$

sous les contraintes

- ➊ $\forall i \in \{1, \dots, m\}, \forall t \geq 0, c_{i,t} \geq 0,$
- ➋ $\forall t \geq 0, \dot{k}_t = G \left[(c_{i,t})_{i \in \{1, \dots, m\}}, k_t, t \right],$
- ➌ $\lim_{T \rightarrow +\infty} \left\{ k_T e^{- \int_0^T \frac{\partial G}{\partial k_t} dt} \right\} \geq 0$ (cas des ménages) ou
- ➍ $\forall t > 0, k_t \geq 0$ (cas du "planificateur"),

où $m \in \mathbb{N}^*$, et où les fonctions U et G satisfont certaines propriétés.

Théorie du contrôle optimal I

- La théorie du contrôle optimal permet de décomposer ce problème intertemporel (général) en des problèmes **instantanés**.
- On définit le **hamiltonien** associé à ce problème par

$$H[(c_{i,t})_{i \in \{1, \dots, m\}}, k_t, \lambda_t, t] \equiv U[(c_{i,t})_{i \in \{1, \dots, m\}}, k_t, t] + \lambda_t G[(c_{i,t})_{i \in \{1, \dots, m\}}, k_t, t]$$

- **William R. Hamilton** : mathématicien, physicien et astronome irlandais, né en 1805 à Dublin, mort en 1865 à Dublin.
- On appelle
 - k_t la variable d'état (typiquement un stock),
 - $(c_{i,t})_{i \in \{1, \dots, m\}}$ les variables de contrôle (typiquement des flux),
 - λ_t la co-variable d'état.

Théorie du contrôle optimal II

- $\left[(c_{i,t})_{i \in \{1, \dots, m\}, t \geq 0}, (k_t)_{t > 0} \right]$ est une solution du problème d'optimisation dynamique si et seulement s'il existe $(\lambda_t)_{t \geq 0}$ tel que
 - ① les contraintes du problème d'optimisation dynamique sont satisfaites,
 - ② $\forall t \geq 0, \lambda_t \geq 0$ (condition de positivité de la co-variable d'état),
 - ③ $\forall j \in \{1, \dots, m\}, \forall t \geq 0, \frac{\partial H}{\partial c_{j,t}} = 0$ (conditions du premier ordre sur les variables de contrôle),
 - ④ $\forall t \geq 0, \frac{\partial H}{\partial k_t} = -\dot{\lambda}_t$ (condition d'évolution de la co-variable d'état),
 - ⑤ $\lim_{t \rightarrow +\infty} k_t \lambda_t = 0$ (condition de transversalité).

Application de la théorie du contrôle optimal I

- On applique maintenant la théorie du contrôle optimal au problème d'optimisation des ménages.
- On définit le **hamiltonien** associé au problème d'optimisation des ménages par

$$H(c_t, b_t, \lambda_t, t) \equiv e^{-(\rho-n)t} u(c_t) + \lambda_t [(r_t - n) b_t + w_t - c_t],$$

où λ_t représente l'utilité à la date 0 d'une unité d'épargne à la date t , de sorte que $H(c_t, b_t, \lambda_t, t)$ représente l'utilité à la date 0 de la consommation et de l'épargne à la date t .

- On appelle
 - b_t la variable d'état,
 - c_t la variable de contrôle,
 - λ_t la co-variable d'état.

Application de la théorie du contrôle optimal II

- $[(c_t)_{t \geq 0}, (b_t)_{t > 0}]$ est une solution du problème d'optimisation du ménage si et seulement s'il existe $(\lambda_t)_{t \geq 0}$ tel que
 - ① $\forall t \geq 0, \frac{\partial H}{\partial c_t} = 0$ (condition du 1^{er} ordre sur la variable de contrôle),
 - ② $\forall t \geq 0, \frac{\partial H}{\partial b_t} = -\dot{\lambda}_t$ (condition d'évolution de la co-variable d'état),
 - ③ $\forall t \geq 0, \dot{b}_t = (r_t - n)b_t + w_t - c_t$ (contrainte budgétaire instantanée),
 - ④ $\lim_{t \rightarrow +\infty} b_t \lambda_t = 0$ (condition de transversalité),
 - ⑤ $\lim_{t \rightarrow +\infty} \left[b_t e^{-\int_0^t (r_\tau - n) d\tau} \right] \geq 0$ (contrainte de solvabilité),
 - ⑥ $\forall t \geq 0, c_t \geq 0$ et $\lambda_t \geq 0$ (contraintes de positivité).
- Une interprétation succincte de ces conditions d'optimalité est proposée en annexe du chapitre (pour une interprétation plus détaillée, se reporter à l'annexe du chapitre 1 d'Aghion et Howitt, 1998).

Existence et unicité de la solution

- On montre en trois étapes qu'il existe une unique solution :
 - ① utiliser les deux premières conditions pour obtenir $(c_t)_{t>0}$ et $(\lambda_t)_{t\geq 0}$ en fonction de c_0 ,
 - ② utiliser les deux conditions suivantes pour obtenir $(b_t)_{t>0}$ et c_0 ,
 - ③ montrer que les deux dernières conditions sont satisfaites par les trajectoires $(b_t)_{t>0}$, $(c_t)_{t\geq 0}$ et $(\lambda_t)_{t\geq 0}$ ainsi obtenues.

Equation d'Euler I

- La première condition implique $\lambda_t = e^{-(\rho-n)t} u'(c_t)$.
- En utilisant la deuxième condition, on obtient alors

$$\frac{\dot{u'(c_t)}}{u'(c_t)} = \rho - r_t$$

puis l'**équation d'Euler** (ou “règle de Ramsey d'épargne optimale”, ou “règle de Keynes-Ramsey”) :

$$\frac{\dot{c}_t}{c_t} = \left[\frac{-u''(c_t)c_t}{u'(c_t)} \right]^{-1} (r_t - \rho).$$

- **John M. Keynes** : économiste anglais, né en 1883 à Cambridge, mort en 1946 à Firle.

Equation d'Euler II

- Il y a croissance de la consommation par tête ($\frac{c_t}{\dot{c}_t} > 0$) si et seulement si le taux d'intérêt est supérieur au taux de préférence pour le présent ($r_t > \rho$).
- Cette croissance est d'autant plus importante que l'**élasticité de substitution intertemporelle** $\sigma(c_t)$ est élevée, où

$$\sigma(c_t) \equiv \left[\frac{-u''(c_t)c_t}{u'(c_t)} \right]^{-1} > 0.$$

- L'inverse de $\sigma(c_t)$ est égal à l'opposé de l'élasticité de l'utilité marginale $u'(c_t)$ par rapport à c_t :

$$\frac{1}{\sigma(c_t)} = \frac{-u''(c_t)c_t}{u'(c_t)} = -\frac{\frac{du'(c_t)}{dc_t}}{\frac{u'(c_t)}{c_t}},$$

qui mesure la courbure de u au point c_t et est aussi appelé "**coefficient d'aversion relative pour le risque**" (pour la raison mentionnée à la page 19).

Equation d'Euler III

- A ρ et $\sigma(c_t)$ donnés, plus le taux d'intérêt r_t est élevé, plus le ménage investit, et donc plus le taux de croissance de c_t est élevé.
- A r_t et $\sigma(c_t)$ donnés, plus le taux de préférence pour le présent ρ est élevé, moins le ménage investit, et donc plus le taux de croissance de c_t est faible.
- A ρ et r_t donnés, plus l'élasticité de substitution intertemporelle $\sigma(c_t)$ est élevée, moins le ménage souhaite lisser c_t dans le temps, et donc plus le taux de croissance de c_t est élevé.

Condition de transversalité

- En intégrant l'équation différentielle $\dot{\lambda}_t = -(r_t - n)\lambda_t$ (issue de la deuxième condition), on obtient

$$\lambda_t = \lambda_0 e^{-\int_0^t (r_\tau - n) d\tau}$$

où $\lambda_0 = u'(c_0) > 0$ car c_0 est fini ($c_0 \leq \frac{Y_0}{L_0} < +\infty$).

- La condition de transversalité $\lim_{t \rightarrow +\infty} b_t \lambda_t = 0$ se réécrit donc

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left[b_t e^{-\int_0^t (r_\tau - n) d\tau} \right] = 0$$

(valeur actualisée à la date 0 du montant total d'actifs à long terme = 0).

Condition de transversalité et contrainte de solvabilité

- La condition de transversalité implique la contrainte de solvabilité :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left[b_t e^{- \int_0^t (r_\tau - n) d\tau} \right] = 0 \implies \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[b_t e^{- \int_0^t (r_\tau - n) d\tau} \right] \geq 0.$$

- La *contrainte de solvabilité empêche* les ménages d'avoir une dette totale ($-B_t > 0$) croissant éternellement à un taux supérieur ou égal à r_t .
- La *condition de transversalité indique* qu'il n'est pas optimal pour les ménages d'avoir un montant total d'actifs ($B_t > 0$) croissant éternellement à un taux supérieur ou égal à r_t .

Condition de transversalité et contrainte budgétaire intert.

- De manière équivalente, la condition de transversalité implique que **la contrainte budgétaire intertemporelle est saturée** :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left[b_t e^{- \int_0^t (r_\tau - n) d\tau} \right] = 0 \implies$$

$$\int_0^{+\infty} c_t e^{- \int_0^t (r_\tau - n) d\tau} dt = b_0 + \int_0^{+\infty} w_t e^{- \int_0^t (r_\tau - n) d\tau} dt.$$

- La *contrainte budgétaire intertemporelle empêche* les ménages d'avoir une valeur actualisée à la date 0 de leurs consommations futures *strictement supérieure* à la somme de leur richesse à la date 0 et de la valeur actualisée à la date 0 de leurs revenus salariaux futurs.
- La *condition de transversalité indique* qu'il n'est pas optimal pour les ménages d'avoir une valeur actualisée à la date 0 de leurs consommations futures *strictement inférieure* à cette somme.

Cas d'une élasticité de substit. intertemporelle constante

- Forme fonctionnelle :
$$\begin{cases} u(c_t) = \frac{c_t^{1-\theta}-1}{1-\theta} \text{ pour } \theta \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0, 1\}, \\ u(c_t) = \ln(c_t) \text{ pour } \theta = 1. \end{cases}$$
- L'élasticité de substitution intertemporelle est alors constante : $\sigma(c_t) = \frac{1}{\theta}$ (on parle de cas CRRA pour "**Constant Relative Risk Aversion**").

- L'équation d'Euler s'écrit alors $\frac{\dot{c}_t}{c_t} = \frac{r_t - \rho}{\theta}$ et s'intègre pour donner

$$c_t = c_0 e^{\int_0^t \left(\frac{r_\tau - \rho}{\theta} \right) d\tau}.$$

- En remplaçant c_t par cette expression dans la contrainte budgétaire intertemporelle saturée, on obtient alors

$$c_0 = \frac{b_0 + \int_0^{+\infty} w_t e^{-\int_0^t (r_\tau - n) d\tau} dt}{\int_0^{+\infty} e^{\int_0^t \left[\left(\frac{r_\tau - \rho}{\theta} \right) - (r_\tau - n) \right] d\tau} dt}.$$

Cas de préférences exponentielles

- Forme fonctionnelle :

$$u(c_t) = -\alpha e^{-\frac{1}{\alpha}c_t},$$

où $\alpha > 0$.

- La partie 2 des TDs étudie ce cas de préférences **exponentielles**.
- L'équation d'Euler s'écrit alors $\frac{\dot{c}_t}{c_t} = \frac{\alpha}{c_t}(r_t - \rho)$, et la partie 2 des TDs montre qu'on ne peut alors pas avoir un taux de croissance de la consommation par tête strictement positif et constant à long terme.

Coût d'usage du capital et taux d'intérêt réel

- On suppose que le capital se déprécie au taux δ , comme au chapitre 1.
- A la date t , un ménage peut en particulier
 - louer entre t et $t + dt$ une unité de bien comme capital aux entreprises,
 - prêter entre t et $t + dt$ cette unité de bien aux autres ménages.
- A la date $t + dt$, la première option lui rapporte $z_t dt - \delta dt$ unités de bien, la seconde $r_t dt$ unités de bien.
- A l'équilibre, le ménage doit être indifférent entre ces deux options, donc

$$r_t = z_t - \delta$$

(si $r_t > z_t - \delta$, alors tous les ménages souhaiteraient prêter et aucun ne souhaiterait emprunter ; si $r_t < z_t - \delta$, alors tous les ménages souhaiteraient emprunter et aucun ne souhaiterait prêter ; dans ces deux cas, le marché des prêts ne serait pas à l'équilibre).

Equilibre des autres marchés

- À l'équilibre, le ménage représentatif ne fait ni prêt ni emprunt, donc tous ses actifs sont des titres de propriété sur le capital :

$$B_t = K_t.$$

- Sur le marché du travail, la demande est égale à l'offre :

$$N_t = L_t.$$

- La condition d'équilibre du marché des biens

$$\underbrace{Y_t}_{\text{production}} = \underbrace{C_t}_{\text{consommation}} + \underbrace{I_t}_{\text{investissement}}$$

peut se réécrire, en utilisant $K_t = I_t - \delta K_t$,

$$\underbrace{\dot{K}_t}_{\text{variation du stock de capital}} = \underbrace{Y_t - C_t}_{\text{épargne}} - \underbrace{\delta K_t}_{\text{dépréciation}}.$$

Détermination de l'équilibre

- ① Introduction
- ② Conditions d'équilibre
- ③ Détermination de l'équilibre
 - Conditions d'équilibre sur κ_t et γ_t
 - Etat régulier
 - Convergence vers l'état régulier
- ④ Optimalité de l'équilibre
- ⑤ Extensions environnementales
- ⑥ Conclusion
- ⑦ Annexe

Conditions d'équilibre sur κ_t et γ_t |

- En notant $f(x) \equiv F(x, 1)$ pour tout $x > 0$ et en dérivant $F(K_{i,t}, A_t N_{i,t}) = A_t N_{i,t} f(\frac{K_{i,t}}{A_t N_{i,t}})$ par rapport à $K_{i,t}$, on obtient

$$F_1(K_{i,t}, A_t N_{i,t}) = f' \left(\frac{K_{i,t}}{A_t N_{i,t}} \right).$$

- On en déduit, en utilisant la condition du premier ordre $F_1(K_{i,t}, A_t N_{i,t}) = z_t$, que $\frac{K_{i,t}}{N_{i,t}}$ ne dépend pas de i et vaut donc $\frac{K_t}{N_t}$.
- Par conséquent,

$$\begin{aligned} Y_t &\equiv \sum_{i=1}^I Y_{i,t} = \sum_{i=1}^I F(K_{i,t}, A_t N_{i,t}) = \sum_{i=1}^I N_{i,t} F \left(\frac{K_{i,t}}{N_{i,t}}, A_t \right) \\ &= \sum_{i=1}^I N_{i,t} F \left(\frac{K_t}{N_t}, A_t \right) = N_t F \left(\frac{K_t}{N_t}, A_t \right) = F(K_t, A_t N_t). \end{aligned}$$

Conditions d'équilibre sur κ_t et γ_t II

- En dérivant $F(K_{i,t}, A_t N_{i,t}) = A_t N_{i,t} f\left(\frac{K_{i,t}}{A_t N_{i,t}}\right)$ par rapport à $K_{i,t}$ et $N_{i,t}$, on obtient

$$F_1(K_{i,t}, A_t N_{i,t}) = f' \left(\frac{K_{i,t}}{A_t N_{i,t}} \right),$$

$$A_t F_2(K_{i,t}, A_t N_{i,t}) = A_t \left[f \left(\frac{K_{i,t}}{A_t N_{i,t}} \right) - \frac{K_{i,t}}{A_t N_{i,t}} f' \left(\frac{K_{i,t}}{A_t N_{i,t}} \right) \right].$$

- En utilisant $\frac{K_{i,t}}{N_{i,t}} = \frac{K_t}{N_t}$, $N_t = L_t$, $\kappa_t \equiv \frac{K_t}{A_t L_t}$ et $r_t = z_t - \delta$, on peut alors réécrire les conditions du premier ordre du problème d'optimisation des entreprises comme

- $r_t = f'(\kappa_t) - \delta$ ("taux d'intérêt réel = productivité marginale du capital – taux de dépréciation du capital"),
- $w_t = A_t [f(\kappa_t) - \kappa_t f'(\kappa_t)]$.

Conditions d'équilibre sur κ_t et γ_t III

- Ces dernières conditions permettent de réécrire la contrainte budgétaire instantanée des ménages comme

$$\dot{b}_t = [f'(\kappa_t) - \delta - n] b_t + A_t [f(\kappa_t) - \kappa_t f'(\kappa_t)] - c_t.$$

- En utilisant $B_t = K_t$, on obtient $b_t = A_t \kappa_t$ et donc

$$\dot{\kappa}_t = f(\kappa_t) - \gamma_t - (n + g + \delta) \kappa_t$$

où $\gamma_t \equiv \frac{c_t}{A_t} = \frac{C_t}{A_t L_t}$ est la consommation par unité de travail efficace.

- Cette équation différentielle s'interprète comme “variation du stock de capital = épargne – dilution – dépréciation” (par unité de travail efficace) et n'est autre que l'équilibre sur le marché des biens.

Conditions d'équilibre sur κ_t et γ_t IV

- Le résultat selon lequel la condition d'équilibre sur le marché des biens peut être obtenue à partir des autres conditions d'équilibre est une conséquence de la loi de Walras.
- Loi de Walras** : sur l'ensemble des marchés, la somme des demandes nettes pondérées par les prix est égale à zéro.
- Corollaire de la loi de Walras** : dans une économie à N marchés, si $N - 1$ marchés sont en équilibre, alors le $N^{\text{ième}}$ marché est également en équilibre.
- La loi de Walras implique donc qu'une condition d'équilibre de marché est redondante — par exemple ici la condition d'équilibre sur le marché des biens.
- Léon Walras** : économiste français, né à Evreux en 1834, mort à Clarens en 1910.

Conditions d'équilibre sur κ_t et γ_t ✓

- En utilisant $b_t = \kappa_t A_0 e^{gt}$, $A_0 > 0$ et $r_t = f'(\kappa_t) - \delta$, on peut réécrire la condition de transversalité comme

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left\{ \kappa_t e^{-\int_0^t [f'(\kappa_\tau) - (n+g+\delta)] d\tau} \right\} = 0.$$

- On considère dorénavant une élasticité de substitution intertemporelle constante, égale à $\frac{1}{\theta}$.
- En utilisant $r_t = f'(\kappa_t) - \delta$ et $\gamma_t \equiv \frac{c_t}{A_t}$, on peut alors réécrire l'équation d'Euler comme

$$\dot{\frac{\gamma_t}{\gamma_t}} = \frac{1}{\theta} [f'(\kappa_t) - \delta - \rho - \theta g].$$

Conditions d'équilibre sur κ_t et γ_t VI *

- $(\kappa_t)_{t \geq 0}$ et $(\gamma_t)_{t \geq 0}$ sont donc déterminés par deux équations différentielles, une condition initiale et une condition terminale :

$$\dot{\kappa}_t = f(\kappa_t) - \gamma_t - (n + g + \delta) \kappa_t,$$

$$\frac{\dot{\gamma}_t}{\gamma_t} = \frac{1}{\theta} [f'(\kappa_t) - \delta - \rho - \theta g],$$

$$\kappa_0 = \frac{K_0}{A_0 L_0},$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left\{ \kappa_t e^{-\int_0^t [f'(\kappa_\tau) - (n+g+\delta)] d\tau} \right\} = 0.$$

- Les autres variables endogènes sont déterminées résiduellement, à partir de $(\kappa_t)_{t \geq 0}$ et $(\gamma_t)_{t \geq 0}$, par les autres conditions d'équilibre.
- On retrouve les conditions d'équilibre du modèle de Solow-Swan lorsque les deuxième et quatrième conditions sont remplacées par $\gamma_t = (1 - s)f(\kappa_t)$.

Etat régulier I

- **Etat régulier** \equiv situation dans laquelle κ_0 est tel que, à l'équilibre, toutes les quantités sont non nulles et croissent à taux constants.
- L'équation différentielle en $\dot{\gamma}_t$ implique que κ_t est constant à l'état régulier.
- L'équation différentielle en $\dot{\kappa}_t$ implique alors que γ_t est constant à l'état régulier.
- Donc, à l'état régulier,
 - κ_t et γ_t sont constants,
 - $k_t \equiv \frac{K_t}{L_t} = A_t \kappa_t$ et $c_t \equiv \frac{C_t}{L_t} = A_t \gamma_t$ croissent au taux g ,
 - $y_t \equiv \frac{Y_t}{L_t} = A_t f(\kappa_t)$ croît au taux g ,
 - le taux d'épargne $\frac{Y_t - C_t}{Y_t} = 1 - \frac{\gamma_t}{f(\kappa_t)}$ est constant,

comme dans le modèle de Solow-Swan.

Etat régulier II

- En remplaçant $\dot{\kappa}_t$ par 0 dans l'équation différentielle en $\dot{\kappa}_t$, on obtient

$$\gamma_t = f(\kappa_t) - (n + g + \delta) \kappa_t,$$

qui correspond à une **courbe en cloche** dans le plan (κ_t, γ_t) .

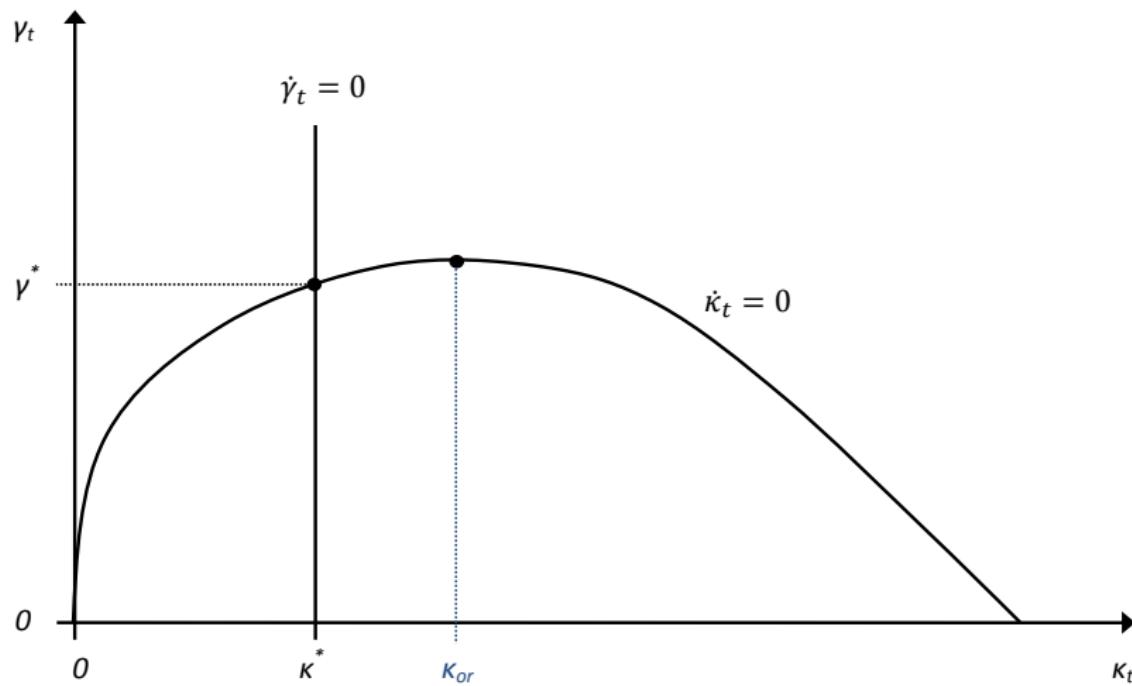
- En remplaçant $\dot{\gamma}_t$ par 0 dans l'équation différentielle en $\dot{\gamma}_t$, on obtient

$$f'(\kappa_t) = \delta + \rho + \theta g,$$

qui correspond à une **droite verticale** dans le plan (κ_t, γ_t) .

- Le **point d'intersection** de cette courbe et cette droite correspond à la valeur de (κ_t, γ_t) à l'état régulier, notée (κ^*, γ^*) .

Etat régulier III



Etat régulier IV

- La valeur κ_{or} de κ_t maximisant la courbe en cloche est définie par

$$f'(\kappa_{or}) = n + g + \delta$$

(**règle d'or d'accumulation du capital** du modèle de Solow-Swan).

- Les conditions $\kappa^* > 0$ et

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left\{ \kappa^* e^{- \int_0^t [f'(\kappa^*) - (n+g+\delta)] d\tau} \right\} = 0$$

impliquent $f'(\kappa^*) > n + g + \delta = f'(\kappa_{or})$ et donc $\kappa^* < \kappa_{or}$, comme apparent sur le graphique précédent.

- Par ailleurs, $f'(\kappa^*) > f'(\kappa_{or})$ se réécrit $\rho - n > (1 - \theta) g$, qui est la condition nécessaire et suffisante pour que l'utilité intertemporelle des ménages prenne une valeur finie à l'état régulier.

Etat régulier V

- On n'a pas $\kappa^* > \kappa_{or}$, donc **pas d'inefficiency dynamique** (due à une sur-accumulation du capital), du fait du comportement optimisateur des ménages.
- On a $\kappa^* < \kappa_{or}$ et non $\kappa^* = \kappa_{or}$ car les ménages sont **impatients** ($\rho > n + (1 - \theta)g$).
- Du fait de cette impatience des ménages, lorsque $\kappa_t > \kappa^*$, une baisse de l'épargne augmente la composante de court terme de l'utilité intertemporelle davantage qu'elle réduit sa composante de long terme.
- L'équation $f'(\kappa^*) = \delta + \rho + \theta g$ est appelée "**règle d'or modifiée**".

Etat régulier VI

- En dérivant $f'(\kappa^*) = \delta + \rho + \theta g$ et $\gamma^* = f(\kappa^*) - (n + g + \delta) \kappa^*$ par rapport à ρ , θ , g , δ ou n , et en utilisant $f'(\kappa^*) > n + g + \delta$, on obtient que
 - κ^* est strictement décroissant en ρ , θ , g , δ , et constant en n ,
 - γ^* est strictement décroissant en ρ , θ , g , δ , n .
- Ces décroissances sont illustrées par le graphique précédent :
 - une hausse de n déplace la courbe en cloche vers le bas,
 - une hausse de ρ ou θ déplace la droite verticale vers la gauche,
 - une hausse de g ou δ fait les deux à la fois.
- Interprétation de l'effet d'une hausse de θ sur κ^* :

$\theta \uparrow \Rightarrow$ élasticité de substitution intertemporelle $\downarrow \Rightarrow r_t \uparrow$
pour faire accepter $\frac{c_t}{\dot{c}_t} = g$ aux ménages $\Rightarrow f'(\kappa_t) \uparrow \Rightarrow \kappa_t \downarrow$.

Etat régulier VII

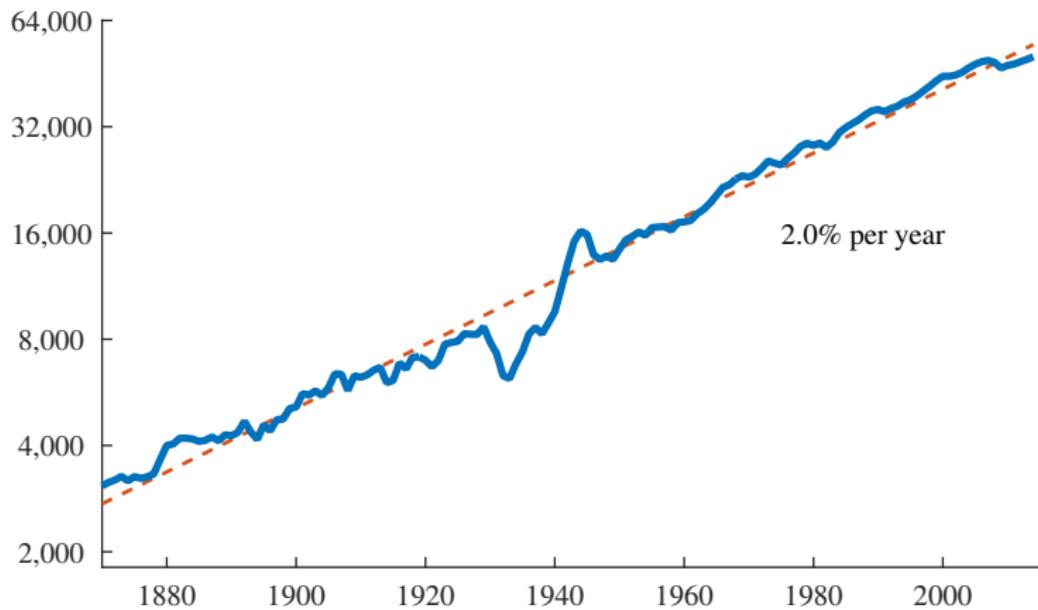
- A l'état régulier, le modèle de Cass-Koopmans-Ramsey rend donc compte des cinq premiers “**faits stylisés**” (i.e. régularités empiriques) identifiés par **Kaldor (1961)** :

- ① la production par tête croît : $\frac{\dot{y}_t}{y_t} = g \geq 0$,
- ② le stock de capital par tête croît : $\frac{\dot{k}_t}{k_t} = g \geq 0$,
- ③ le taux de rendement du capital est constant : $r_t = f'(\kappa^*) - \delta$,
- ④ le ratio capital / production est constant : $\frac{K_t}{Y_t} = \frac{\kappa^*}{f(\kappa^*)}$,
- ⑤ les parts de rémunération du travail et du capital dans la production sont constantes : $\frac{w_t L_t}{Y_t} = \frac{f(\kappa^*) - \kappa^* f'(\kappa^*)}{f(\kappa^*)}$ et $\frac{z_t K_t}{Y_t} = \frac{\kappa^* f'(\kappa^*)}{f(\kappa^*)}$

(la somme des parts de rémunération des facteurs dans la production vaut un car en concurrence pure et parfaite, tous les bénéfices des entreprises servent à rémunérer les facteurs de production, comme vu à la page 16).

Fait stylisé de Kaldor n°1

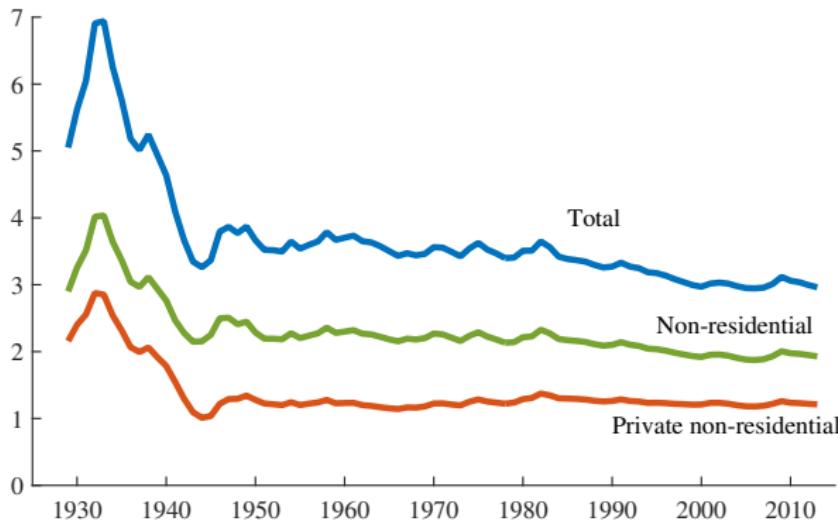
PIB par tête aux États-Unis, 1870-2014
(échelle logarithmique, dollars de 2009)



Source : Jones (2015). "2.0% per year" : 2% par an.

Fait stylisé de Kaldor n°4

Ratio capital physique sur PIB aux États-Unis, 1929-2014
(selon la mesure du capital physique retenue)

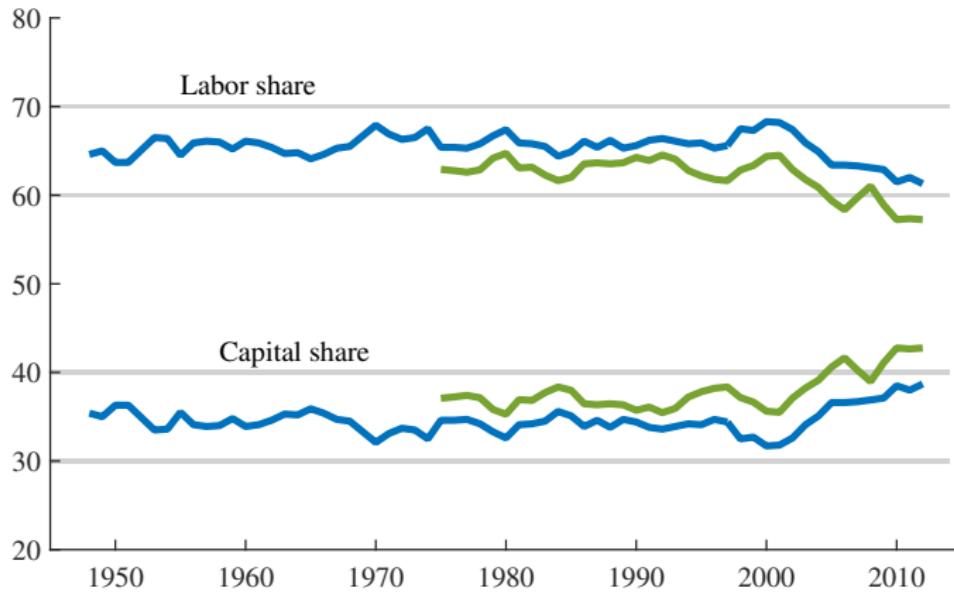


Source : Jones (2015). "Total" : total. "Non-residential" : non-résidentiel. "Private" : privé.

Remarque : les faits stylisés de Kaldor n°1 et n°4 impliquent le fait stylisé de Kaldor n°2.

Fait stylisé de Kaldor n°5

Parts de rémunération du travail et du capital dans la production aux États-Unis
(en bleu/vert : avec/sans travailleurs indépendants, 1948-2014/1975-2014, en %)



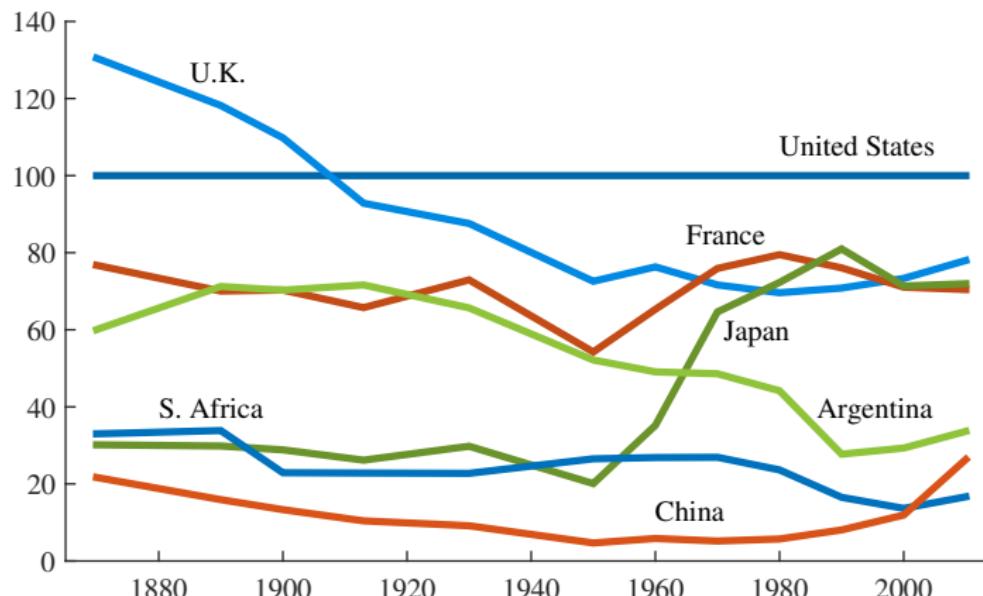
Source : Jones (2015). "Labor share" : part du travail. "Capital share" : part du capital.

Etat régulier VIII

- A l'état régulier, le modèle de Solow-Swan rend compte des 1^{er}, 2^{ème} et 4^{ème} faits stylisés de Kaldor (1961), mais pas des 3^{ème} et 5^{ème} (car il ne considère pas les prix w_t , z_t et r_t).
- A l'état régulier, ni le modèle de Solow-Swan ni celui de Cass-Koopmans-Ramsey ne rendent aisément compte du 6^{ème} fait stylisé de Kaldor (1961) :
 - ⑥ le taux de croissance de la production par tête varie entre les pays, car ils impliquent que le taux de croissance $\frac{y_t}{y_t}$ est égal au taux de progrès technique g qui ne varie sans doute pas de manière permanente entre les pays (du fait de la possibilité de diffusion des connaissances entre les pays).

Fait stylisé de Kaldor n°6 I

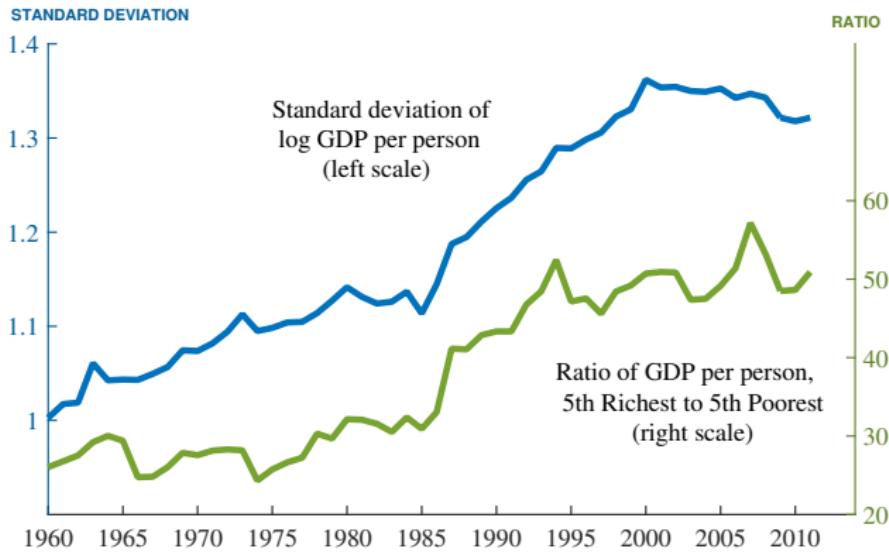
PIB par tête dans différents pays, 1870-2014 (États-Unis = 100)



Source : Jones (2015). Noms de pays en anglais.

Fait stylisé de Kaldor n°6 II

Dispersion du PIB par tête entre cent pays, 1960-2011



Source : Jones (2015).

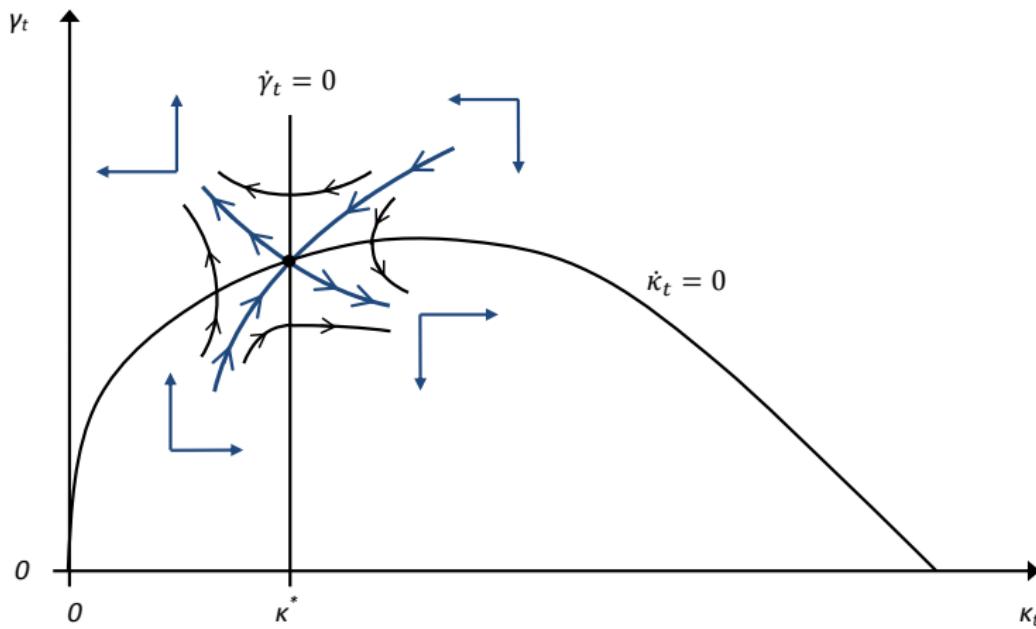
En bleu : écart-type du logarithme du PIB par tête (échelle de gauche). En vert : ratio du PIB par tête entre le 5^{ième} pays le plus riche et le 5^{ième} pays le plus pauvre (échelle de droite).

Convergence vers l'état régulier I

- L'équation différentielle en $\dot{\kappa}_t$ implique que
 - **au-dessous** de la courbe en cloche, κ_t **croît** dans le temps,
 - **au-dessus** de la courbe en cloche, κ_t **décroît** dans le temps.
- L'équation différentielle en $\dot{\gamma}_t$ implique que
 - **à gauche** de la droite verticale, γ_t **croît** dans le temps,
 - **à droite** de la droite verticale, γ_t **décroît** dans le temps.
- Le système d'équations différentielles admet donc un bras stable et un bras instable dans le plan (κ_t, γ_t) .

Convergence vers l'état régulier II

Diagramme des phases : forme des trajectoires satisfaisant les deux équations diff. (mais pas forcément les conditions initiale et terminale)



Convergence vers l'état régulier III

- Au voisinage de l'état régulier, le bras stable (resp. instable) correspond au vecteur propre associé à la valeur propre négative (resp. positive) de la matrice M du système d'équations différentielles log-linéarisé

$$\begin{bmatrix} \ln\left(\frac{\kappa_t}{\kappa^*}\right) \\ \ln\left(\frac{\gamma_t}{\gamma^*}\right) \end{bmatrix} = M_{(2 \times 2)} \begin{bmatrix} \ln\left(\frac{\kappa_t}{\kappa^*}\right) \\ \ln\left(\frac{\gamma_t}{\gamma^*}\right) \end{bmatrix}.$$

- Le bras stable est l'unique sentier, appelé "**sentier-selle**", le long duquel (κ_t, γ_t) peut converger vers (κ^*, γ^*) .

Convergence vers l'état régulier IV

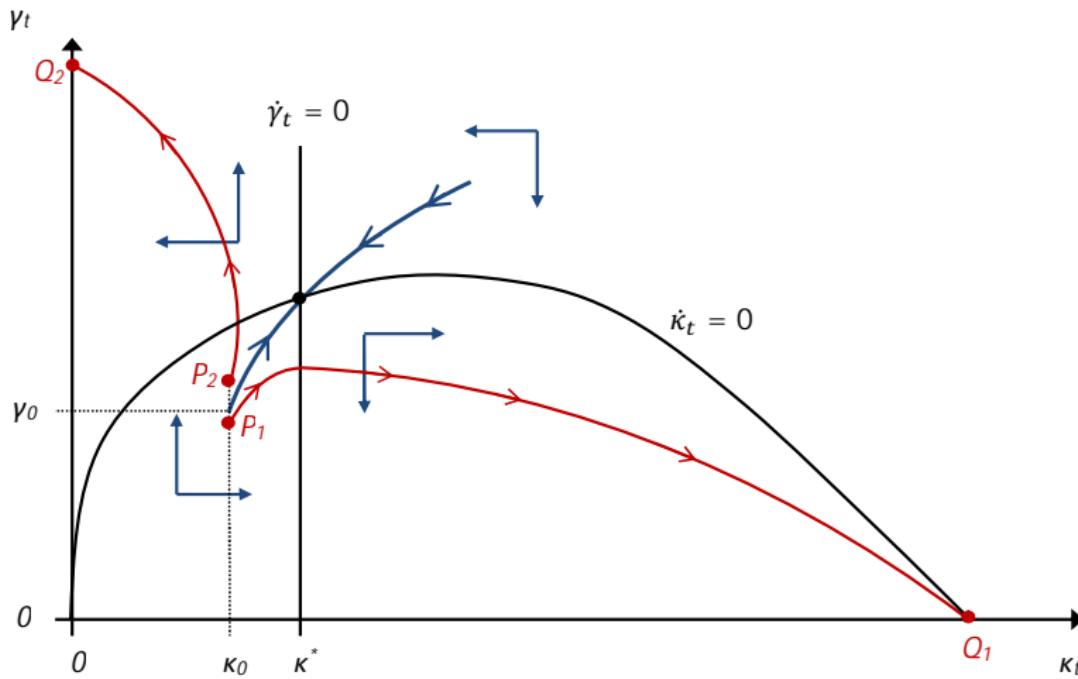
- $\kappa_0 \in (0, \kappa^*)$ étant donné, trois cas sont envisageables pour γ_0 :
 - ① γ_0 est tel que (κ_0, γ_0) est **sur** le sentier-selle :
 - (κ_t, γ_t) converge vers (κ^*, γ^*) ;
 - les quatre conditions d'équilibre sont satisfaites.
 - ② γ_0 est tel que (κ_0, γ_0) est **au-dessous** du sentier-selle (point P_1) :
 - (κ_t, γ_t) croise la droite verticale puis converge vers le point Q_1 (en effet, dans le quadrant en bas à droite, (κ_t, γ_t) ne peut pas croiser la courbe en cloche car la pente serait alors verticale, ni l'axe des abscisses car la consommation ne peut pas être strictement négative) ;
 - au voisinage de Q_1 , $\kappa_t > \kappa_{or}$, donc $f'(\kappa_t) < f'(\kappa_{or}) = n + g + \delta$, donc la condition de transversalité n'est pas satisfaite :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left\{ \kappa_t e^{- \int_0^t [f'(\kappa_\tau) - (n+g+\delta)] d\tau} \right\} > 0$$

(les ménages, qui asymptotiquement épargnent tout et ne consomment plus rien, pourraient augmenter leur utilité en épargnant moins).

Convergence vers l'état régulier V

Diagramme des phases : trajectoires pour un $\kappa_0 \in (0, \kappa^*)$ donné



Convergence vers l'état régulier VI

- ❸ γ_0 est tel que (κ_0, γ_0) est **au-dessus** du sentier-selle (point P_2) :
- (κ_t, γ_t) croise la courbe en cloche puis atteint le point Q_2 en un temps fini car $\ddot{\kappa}_t < 0$ dans le quadrant en haut à gauche ;
 - preuve que $\ddot{\kappa}_t < 0$ dans ce quadrant : dériver $\dot{\kappa}_t = f(\kappa_t) - \gamma_t - (n + g + \delta) \kappa_t$ et obtenir $\ddot{\kappa}_t = [f'(\kappa_t) - (n + g + \delta)] \dot{\kappa}_t - \dot{\gamma}_t$ avec, dans ce quadrant, $\dot{\kappa}_t < 0$, $\dot{\gamma}_t > 0$ et $f'(\kappa_t) > f'(\kappa_{or}) = n + g + \delta$;
 - à la date où le point Q_2 est atteint, γ_t devient instantanément nul (car $Y_t = 0$), donc l'équation différentielle en $\dot{\gamma}_t$ n'est pas satisfaite (car $\dot{\gamma}_t$ n'existe pas à cette date) : les ménages consomment de plus en plus en désépargnant de plus en plus jusqu'au moment où ils ne peuvent plus rien consommer, ce qui n'est pas optimal.
- Donc **l'unique trajectoire d'équilibre** (c'est-à-dire l'unique trajectoire satisfaisant les quatre conditions d'équilibre) **est le sentier-selle**.
- Le raisonnement est similaire, et la conclusion identique, lorsque $\kappa_0 > \kappa^*$.

Convergence vers l'état régulier VII

- Le modèle prédit donc une **convergence conditionnelle** des $\ln(y_t)$ entre les pays, comme le modèle de Solow-Swan.
- Il s'agit ici de la convergence à long terme des $\ln(y_t)$ entre les pays ayant des y_0 différents mais les mêmes paramètres
 - de technologie $A_0, g, f(\cdot)$,
 - d'évolution du capital et du travail n, δ ,
 - de préférence ρ, θ .
- On admet que, pour $\kappa_0 < \kappa^*$,
 - le taux d'épargne peut croître ou décroître dans le temps,
 - le taux de croissance décroît toujours dans le temps,donc une économie croît d'autant plus vite qu'elle est plus éloignée de son sentier d'état régulier, comme dans le modèle de Solow-Swan.
- La partie 2 des TDs étudie la vitesse de convergence au voisinage de l'état régulier, et la trajectoire de l'économie suite à une baisse permanente de ρ .

Optimalité de l'équilibre

- ① Introduction
- ② Conditions d'équilibre
- ③ Détermination de l'équilibre
- ④ Optimalité de l'équilibre
- ⑤ Extensions environnementales
- ⑥ Conclusion
- ⑦ Annexe

Optimalité sociale de l'équilibre concurrentiel I

- **Équilibre de marché (ou décentralisé)** ≡ équilibre obtenu lorsque
 - les agents sont en interaction sur des marchés,
 - chaque agent résout son propre problème d'optimisation,
 - les marchés sont à l'équilibre.
- **Équilibre concurrentiel** ≡ équilibre de marché lorsque tous les marchés sont en concurrence pure et parfaite (comme c'est le cas dans le modèle de Cass-Koopmans-Ramsey).
- Donc un équilibre concurrentiel est un équilibre obtenu lorsque
 - les agents sont en interaction sur des marchés en conc. pure et parfaite,
 - chaque agent résout son propre problème d'optimisation, choisissant les quantités et considérant les prix comme donnés,
 - les prix sont tels que les marchés sont à l'équilibre.

Optimalité sociale de l'équilibre concurrentiel II

- **Modèle à agent représentatif** \equiv modèle dans lequel seul un type d'agent, appelé agent représentatif, a une fonction d'utilité (comme le modèle de Cass-Koopmans-Ramsey, dans lequel seuls les ménages ont une fonction d'utilité).
- Dans les modèles à agent représentatif, l'équilibre de marché est dit **socialement optimal** si et seulement s'il coïncide avec l'allocation choisie par le **planificateur omniscient, omnipotent et bienveillant** (noté \mathcal{POOB}), aussi appelée "équilibre centralisé".

Optimalité sociale de l'équilibre concurrentiel III

- Le \mathcal{POOB} , qui est un personnage fictif, choisit toutes les quantités, sous les contraintes
 - de positivité,
 - de technologie,
 - de ressources,de façon à maximiser l'utilité de l'agent représentatif.
- Puisque l'équilibre de marché satisfait ces trois contraintes, la valeur prise par la fonction d'utilité de l'agent représentatif avec le \mathcal{POOB} est nécessairement supérieure ou égale à la valeur qu'elle prend à l'équilibre de marché.

Optimalité sociale de l'équilibre concurrentiel IV

- Problème d'optimisation du \mathcal{POOB} : pour $\kappa_0 > 0$ donné,

$$\max_{(c_t)_{t \geq 0}, (\kappa_t)_{t > 0}} \int_0^{+\infty} e^{-(\rho - n)t} u(c_t) dt$$

sous les contraintes

- ➊ $\forall t \geq 0, c_t \geq 0$ (contrainte de positivité de la consommation),
 - ➋ $\forall t > 0, \kappa_t \geq 0$ (contrainte de positivité du capital),
 - ➌ $\forall t \geq 0, \dot{\kappa}_t = f(\kappa_t) - \frac{c_t}{A_0 e^{gt}} - (n + g + \delta)\kappa_t$ (contrainte de technologie et de ressources).
- On résout ce problème d'optimisation dynamique en appliquant la théorie du contrôle optimal, comme précédemment dans ce chapitre.

Optimalité sociale de l'équilibre concurrentiel V

- **Hamiltonien** associé au problème d'optimisation du \mathcal{POOB} :

$$H^P(c_t, \kappa_t, \lambda_t^P, t) \equiv e^{-(\rho-n)t} u(c_t) + \lambda_t^P \left[f(\kappa_t) - \frac{c_t}{A_0 e^{gt}} - (n+g+\delta)\kappa_t \right]$$

où λ_t^P représente la valeur, mesurée en unités d'utilité à la date 0, d'une augmentation d'une unité de bien des ressources à la date t .

- On obtient alors les conditions d'optimalité suivantes :

- $\dot{\lambda}_t^P = A_0 e^{(n+g-\rho)t} u'(c_t)$ (cond. du 1^{er} ordre sur la var. de contrôle),
- $\dot{\lambda}_t^P = [n+g+\delta - f'(\kappa_t)] \lambda_t^P$ (cond. d'évol. de la co-variable d'état),
- $\dot{\kappa}_t = f(\kappa_t) - \frac{c_t}{A_0 e^{gt}} - (n+g+\delta)\kappa_t$ (contrainte de ressources),
- $\lim_{t \rightarrow +\infty} \kappa_t \lambda_t^P = 0$ (condition de transversalité).

Optimalité sociale de l'équilibre concurrentiel VI

- On en déduit, par des calculs similaires aux précédents,
 - $\dot{\kappa}_t = f(\kappa_t) - \gamma_t - (n + g + \delta) \kappa_t$ (équation différentielle en $\dot{\kappa}_t$),
 - $\dot{\gamma}_t = \frac{1}{\theta} [f'(\kappa_t) - \delta - \rho - \theta g]$ (équation différentielle en $\dot{\gamma}_t$),
 - $\lim_{t \rightarrow +\infty} \left\{ \kappa_t e^{-\int_0^t [f'(\kappa_\tau) - (n+g+\delta)] d\tau} \right\} = 0$ (condition de transversalité).
- Ces trois conditions et la condition $\kappa_0 = \frac{K_0}{A_0 L_0}$ sont identiques aux quatre conditions d'équilibre concurrentiel sur $(\kappa_t)_{t \geq 0}$ et $(\gamma_t)_{t \geq 0}$: **l'équilibre concurrentiel est donc socialement optimal.**
- Par conséquent, il n'y a aucun rôle à jouer pour une politique économique dans ce modèle : la politique économique optimale est le **laisser-faire**.

Optimalité sociale de l'équilibre concurrentiel VII

- L'optimalité sociale de l'équilibre concurrentiel dans ce modèle est une conséquence du **premier théorème du bien-être**.
- Selon ce théorème, si
 - ① il n'y a pas d'externalité,
 - ② les marchés sont en concurrence pure et parfaite,
 - ③ les marchés sont "complets" (\equiv avec offre et demande non nulles),
 - ④ le nombre de types d'agent est fini,alors **l'équilibre concurrentiel est un optimum de Pareto**.
- **Optimum de Pareto** \equiv situation dans laquelle on ne peut pas augmenter le bien-être d'un agent sans diminuer celui d'un autre agent ("deshabiller Pierre pour habiller Paul").
- **Vilfredo Pareto** : sociologue et économiste italien, né en 1848 à Paris, mort en 1923 à Céligny.

Optimalité sociale de l'équilibre concurrentiel VIII

- Ce théorème formalise le concept de “main invisible” de Smith (1776), selon lequel des actions guidées uniquement par l'intérêt personnel de chacun peuvent contribuer à la richesse et au bien-être de tous :

“But the annual revenue of every society is always precisely equal to the exchangeable value of the whole annual produce of its industry, or rather is precisely the same thing with that exchangeable value. As every individual, therefore, endeavours as much as he can both to employ his capital in the support of domestic industry, and so to direct that industry that its produce may be of the greatest value; every individual necessarily labours to render the annual revenue of the society as great as he can. He generally, indeed, neither intends to promote the public interest, nor knows how much he is promoting it.

Optimalité sociale de l'équilibre concurrentiel IX

By preferring the support of domestic to that of foreign industry, he intends only his own security; and by directing that industry in such a manner as its produce may be of the greatest value, he intends only his own gain, and he is in this, as in many other cases, led by an invisible hand to promote an end which was no part of his intention. Nor is it always the worse for the society that it was no part of it. By pursuing his own interest he frequently promotes that of the society more effectually than when he really intends to promote it. I have never known much good done by those who affected to trade for the public good. It is an affectation, indeed, not very common among merchants, and very few words need be employed in dissuading them from it."

- **Adam Smith** : philosophe et économiste écossais, né en 1723 à Kirkcaldy, mort en 1790 à Londres.

Optimalité sociale de l'équilibre concurrentiel X

- Dans les modèles à agent représentatif, comme le modèle de Cass-Koopmans-Ramsey,
 - il existe un unique optimum de Pareto symétrique (i.e. tel que la fonction d'utilité prend la même valeur pour tous les agents),
 - cet optimum de Pareto correspond à l'allocation qui maximise le bien-être de l'agent représentatif (i.e. l'allocation choisie par le \mathcal{POOB}).
- Les quatre conditions d'application du théorème sont remplies dans le modèle de Cass-Koopmans-Ramsey (présent chapitre), mais pas dans
 - le modèle DICE (chapitre 3, ~~condition 1~~),
 - le modèle avec apprentissage par la pratique (chapitre 4, ~~condition 1~~),
 - le modèle avec variété des biens (chapitre 5, ~~condition 2~~),
 - le modèle à générations imbriquées (chapitre 7, ~~conditions 1 et 4~~).

Extensions environnementales

- ① Introduction
- ② Conditions d'équilibre
- ③ Détermination de l'équilibre
- ④ Optimalité de l'équilibre
- ⑤ Extensions environnementales
 - Ressources naturelles non renouvelables
 - Changement climatique
- ⑥ Conclusion
- ⑦ Annexe

Prise en compte des ress. naturelles non renouvelables I

- Le modèle de CKR, dans lequel les seuls facteurs de production sont le capital et le travail, ne permet pas d'étudier les conséquences de l'exploitation des **ressources naturelles non renouvelables** (pétrole, gaz naturel, charbon, minerais...).
- Pour la plupart des ressources naturelles non renouvelables, les réserves mondiales connues et exploitables au prix courant correspondent à quelques dizaines d'années d'exploitation.
- La partie 3 des TDs introduit les ressources naturelles non renouvelables dans le modèle de CKR, comme troisième facteur de production, et en étudie les implications de nature positive et celles de nature normative.

Prise en compte des ress. naturelles non renouvelables II

- La partie 3 des TDs montre notamment que
 - à l'équilibre concurrentiel, le taux de croissance du prix des ressources naturelles non renouvelables est égal au taux d'intérêt (**“règle de Hotelling”**, d'après Hotelling, 1931),
 - le planificateur choisit une trajectoire de consommation par tête qui décroît vers zéro au cours du temps, ce qui lèse les générations futures,
 - pour mettre en œuvre l'allocation choisie par un planificateur devant respecter l'équité intergénérationnelle (choisir une consommation par tête constante dans le temps), il faut ré-investir la rente tirée de l'exploitation des ressources non renouvelables dans du capital physique (**“règle de Hartwick”**, d'après Hartwick, 1977).

Croissance et changement climatique

- Le modèle de CKR ne prend pas en compte les conséquences de l'activité économique pour le climat ni, vice-versa, les conséquences du changement climatique pour l'économie.
- Nordhaus (1992, 1994) a élargi le modèle de CKR pour prendre ces conséquences en compte, donnant naissance au **modèle DICE** (\equiv modèle Dynamique Intégré Climat-Économie), qui est un modèle de l'économie mondiale et du climat mondial.
- Le modèle DICE n'a pas les mêmes implications, ni de nature positive ni de nature normative, que le modèle de CKR.
- Le chapitre 3 présente le modèle DICE et étudie ses implications de nature normative.

Conclusion

- ① Introduction
- ② Conditions d'équilibre
- ③ Détermination de l'équilibre
- ④ Optimalité de l'équilibre
- ⑤ Extensions environnementales
- ⑥ Conclusion
- ⑦ Annexe

Principales prédictions du modèle

- Comme dans le modèle de Solow-Swan, à long terme,
 - la croissance est uniquement due au progrès technique,
 - l'effet de l'accumulation du capital sur la croissance disparaît à cause de la décroissance de la productivité marginale du capital,
 - il y a convergence conditionnelle des niveaux de production par tête (en logarithme) entre les pays.
- A long terme, les cinq premiers faits stylisés de Kaldor (1961) sont obtenus.
- L'équilibre concurrentiel est socialement optimal ; en particulier, il ne peut pas y avoir d'inefficience dynamique due à une sur-accumulation du capital.

Une limite du modèle

- **Le taux de progrès technique g est exogène.** S'il était endogène,

- y aurait-il des politiques économiques capables de l'influencer ?
- quel rôle devraient-elles jouer ?

↪ Les chapitres 4 et 5 (“théories de la croissance endogène”) endogénisent le taux de progrès technique.

Annexe

- ① Introduction
- ② Conditions d'équilibre
- ③ Détermination de l'équilibre
- ④ Optimalité de l'équilibre
- ⑤ Extensions environnementales
- ⑥ Conclusion
- ⑦ Annexe

Interprétation des conditions d'optimalité (ménages) I

- Pour mémoire, le hamiltonien associé au problème d'optim. des ménages est

$$H(c_t, b_t, \lambda_t, t) \equiv e^{-(\rho-n)t} u(c_t) + \lambda_t [(r_t - n) b_t + w_t - c_t]$$

et les conditions d'optimalité correspondantes sont :

- ① $\forall t \geq 0, \frac{\partial H}{\partial c_t} = 0$ (condition du 1^{er} ordre sur la variable de contrôle),
- ② $\forall t \geq 0, \frac{\partial H}{\partial b_t} = -\dot{\lambda}_t$ (condition d'évolution de la co-variable d'état),
- ③ $\forall t \geq 0, \dot{b}_t = (r_t - n)b_t + w_t - c_t$ (contrainte budgétaire instantanée),
- ④ $\lim_{t \rightarrow +\infty} b_t \lambda_t = 0$ (condition de transversalité),
- ⑤ $\lim_{t \rightarrow +\infty} \left[b_t e^{-\int_0^t (r_\tau - n) d\tau} \right] \geq 0$ (contrainte de solvabilité),
- ⑥ $\forall t \geq 0, c_t \geq 0$ et $\lambda_t \geq 0$ (contraintes de positivité).

Interprétation des conditions d'optimalité (ménages) II

- Les conditions 3, 5 et "6a" sont les contraintes du problème d'optimisation.
- La condition "6b" indique que λ_t , qui mesure l'utilité à la date 0 d'une unité d'épargne à la date t , ne peut pas être strictement négatif.
- La condition 4 implique que $\lim_{t \rightarrow +\infty} b_t \lambda_t$, qui mesure l'utilité à la date 0 du stock d'épargne à la date $t \rightarrow +\infty$, ne peut pas être strictement positif à l'optimum (sinon le ménage pourrait augmenter son utilité intertemporelle en épargnant moins et en consommant davantage à long terme).
- La condition 1 se réécrit

$$\lambda_t = e^{-(\rho - n)t} u'(c_t)$$

et s'interprète de la façon suivante : à l'optimum, l'utilité à la date 0 d'une unité d'épargne à la date t doit être égale à l'utilité à la date 0 d'une unité de consommation à la date t , sinon le ménage pourrait augmenter son utilité intertemporelle en choisissant un autre partage entre consom. et épargne.

Interprétation des conditions d'optimalité (ménages) III

- La condition 2 se réécrit $\dot{\lambda}_t = - (r_t - n) \lambda_t$.
- Supposons que le ménage dévie marginalement de l'optimum comme suit :
 - à la date t , il consom. une unité de moins et épargne une unité de plus,
 - après la date t , il conserve cette unité supplémentaire d'épargne et consomme les revenus financiers qu'elle génère.
- En termes d'utilité à la date 0, cette déviation marginale
 - coûte $e^{-(\rho-n)t} u'(c_t) = \lambda_t$,
 - fait gagner $\int_t^{+\infty} e^{-(\rho-n)\tau} u'(c_\tau) (r_\tau - n) d\tau = \int_t^{+\infty} \lambda_\tau (r_\tau - n) d\tau$,où les égalités sont obtenues en utilisant la condition 1.
- Puisqu'il s'agit d'une déviation marginale de l'optimum, ce coût et ce gain doivent être égaux l'un à l'autre : $\lambda_t = \int_t^{+\infty} \lambda_\tau (r_\tau - n) d\tau$.
- En dérivant par rapport à t , on obtient la condition 2 : $\dot{\lambda}_t = - (r_t - n) \lambda_t$.