
TD N° 5 : Processus à temps continu

EXERCICE 1. Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ un processus de Poisson d'intensité λ et soit $T_1 = \inf\{t \geq 0 : X_t = 1\}$. Soit $s \geq 0$ une date fixée. Déterminer la loi de $T_1 | (X_s = 1)$.

EXERCICE 2. Une compagnie d'assurance modélise suppose que les accidents de la circulation surviennent suivant un processus de Poisson d'intensité λ , inconnue en pratique. Etant donné l'historique $(N_t)_{t \in [0, T]}$, elle propose d'estimer λ par $\hat{\lambda}_T = N_T/T$. Etudier la convergence de cet estimateur.

EXERCICE 3. Soit $(N_t)_{t \in [0, T]}$ un processus de Markov (homogène), à trajectoires càdlàg, vérifiant les trois propriétés suivantes :

- (α) accroissements indépendants : $t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq t_4 \Rightarrow N_{t_4} - N_{t_3}$ indep. de $N_{t_2} - N_{t_1}$;
- (β) $\mathbb{P}(N_{t+h} - N_t = 1) = \lambda h + o(h)$ lorsque h est au voisinage de 0 ;
- (γ) $\mathbb{P}(N_{t+h} - N_t > 1) = o(h)$.

On note $p_k(t) = \mathbb{P}(N_t = k)$.

- 1) Montrer que $p'_0(t) = -\lambda p_0(t)$ et en déduire la valeur de $p_0(t)$.
- 2) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ on a :

$$p'_{k+1}(t) = \lambda p_k(t) - \lambda p_{k+1}(t).$$

- 3) Par récurrence, en déduire la valeur de $p_k(t)$ et conclure que (N_t) est un processus de Poisson d'intensité λ .

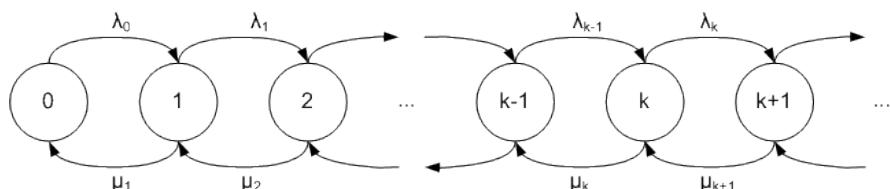
EXERCICE 4. Soit un processus de Markov à temps continu, $(X_t)_{t \geq 0}$, à valeurs dans $\{1, 2, 3\}$, de générateur infinitésimal

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

On suppose que $X_0 = 1$ et on pose $T = \min\{t \geq 0 : X_t \neq 1\}$.

- 1) Donner la loi de T et $\mathbb{E}(T)$.
- 2) Donner la loi de X_T .
- 3) Déterminer la ou les probabilités invariantes pour (X_t) .

EXERCICE 5. On revient au processus de naissance et de mort vu en cours :



Dans ce qui suit, on considère différentes formes pour λ_i et μ_i et on demande de calculer

$$q = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \dots \mu_n}$$

et d'en déduire si le processus admet une loi invariante, ou non, et si oui de donner cette loi.

- 1) $\lambda_i = \lambda$ et $\mu_i = \mu$, $\lambda, \mu > 0$.
- 2) $\lambda_i = \frac{1}{i+1}$ et $\mu_i = 1$.

EXERCICE 6. Pont brownien, et existence du mouvement brownien. Soit deux suites $(\xi_n)_{n \geq 1}$ et $(\eta_n)_{n \geq 1}$ de variables normales centrées réduites indépendantes, définies sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On définit, pour tout entier $n \geq 1$, pour tout $t \in [0, 1]$,

$$B_t^{(n)} := \sum_{k=1}^n \frac{\cos(2\pi kt) - 1}{k\pi\sqrt{2}} \xi_k + \sum_{k=1}^n \frac{\sin(2\pi kt)}{k\pi\sqrt{2}} \eta_k.$$

- 1) Soit $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ une suite réelle bornée. Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\alpha_n}{n} \xi_n$ converge dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.
- 2) En déduire que, pour tout $t \in [0, 1]$ fixé, $B_t^{(n)}$ converge dans L^2 vers une variable que l'on notera B_t .
- 3) On admettra qu'en développant la fonction $t \mapsto t(1-t)$ en série de Fourier sur $[0, 1]$ on obtient la relation

$$\sum_{k \geq 1} \frac{\cos(2\pi kt)}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} - \pi^2 t(1-t)$$

(on pourra aussi s'amuser à le démontrer, mais ça n'est pas franchement un exercice de “processus”). En déduire que :

$$\text{Cov}(B_t, B_s) = s \wedge t - st.$$

Un processus gaussien centré sur $[0, 1]$ ayant pour fonction de covariance $s \wedge t - st$ sera appelé *pont brownien*. Pourquoi ?

- 4) Montrer que si $(B_t)_{t \in [0, 1]}$ est un pont brownien, $(B_{1-t})_{t \in [0, 1]}$ en est un aussi.
- 5) On définit le processus $(W_s)_{s \in \mathbb{R}_+}$ par

$$W_s = (1+s)B_{\frac{s}{1+s}}.$$

Démontrer que (W_s) est un mouvement brownien.

- 6) A l'inverse, soit (W_s) un mouvement brownien. Démontrer que $U_t = W_t - tW_1$ et $V_t = (1-t)W_{t/(1-t)}$ pour $t \in [0, 1]$ sont des ponts browniens.

Remarque : on peut en fait démontrer que la convergence des fonctions $(B_t^{(n)})$ vers (B_t) est uniforme p.s., ce qui permet d'établir que $(B_t)_{t \in [0, 1]}$ et $(W_s)_{s \in \mathbb{R}_+}$ construites dans les questions 1)-5) sont p.s. continues, mais c'est un peu plus difficile.