TD Autosélection - Corrigé

Microéconomie, deuxième année, ENSAE

1 Régulation d'un monopole (Baron-Myerson 1982)

On s'intéresse au problème d'un régulateur qui maximise le bien-être des consommateurs sous contrainte de ses coûts, face à un monopole. Soit $C(q, \theta) = \theta q$ la fonction de coût du monopole qui produit le bien en quantité q.

Soit θ le type du monopole. $\theta = \theta_L$, avec probabilité β, et $\theta = \theta_H > \theta_L$ avec probabilité $1 - \beta$.

Le régulateur délègue la production du bien au monopole : le monopole reçoit du régulateur un transfert monétaire t, si bien que le profit du monopole est $(t - \theta q)$. Le monopole accepte de produire seulement si le régulateur lui assure un profit non négatif. Le surplus des consommateurs pour q unités est égal à $S(q)$ avec $S' > 0$, $S'' < 0$ et $S(0) = 0$.

Question 0: Qui est le principal ? L'agent ?

Le principal est la partie non informée, ici le régulateur. L'agent est la partie informée, ici le monopole.

Question 1: Supposons que le régulateur puisse observer le type θ du monopole. Le régulateur propose un contrat (q_L, t_L) au monopole de type θ_L, et un contrat (q_H, t_H) au monopole de type θ_H. Le monopole a le choix entre accepter le contrat qui lui est proposé ou refuser le contrat et ne rien produire. Quelles sont les quantités q_L^* et q_H^* qui maximisent le bien-être des consommateurs ? Quels sont les transferts t_L^* et t_H^* qui assurent la participation du monopole ?

Le régulateur maximise le bien-être du consommateur. Le programme du régulateur qui fait face à un monopole de type θ_i avec $i \in \{L, H\}$ est donc

$$\max_{q_i, t_i} S(q_i) - t_i$$

$$s.c \quad t_i - \theta_i q_i \geq 0$$

On voit de façon immédiate que le régulateur a intérêt à saturer la contrainte de participation de chaque type: $t_i = \theta_i q_i$. En remplaçant t_i par $\theta_i q_i$ dans l'objectif, et en utilisant la condition du premier ordre (l'objectif étant bien concave) on trouve qu'à l'optimum $S'(q_i^*) = \theta_i$. On en déduit $t_L^* = \theta_L q_L^*$ et $t_H^* = \theta_H q_H^*$

Question 2: Supposons à présent que le régulateur n'observe pas le type du monopole. Le régulateur propose alors au monopole un menu composé de deux contrats: (q_L, t_L) et (q_H, t_H). Le monopole doit choisir parmi ces deux contrats et produire le bien (ou alors refuser le contrat et ne rien produire). Montrer que si le régulateur propose les contrats (q_L^*, t_L^*) et (q_H^*, t_H^*), un des deux types a intérêt à se faire passer pour l'autre.

Lorsque le régulateur ne peut pas observer le type du monopole (leur θ) et qu'il leur propose un menu (q_L^*, t_L^*),(q_H^*, t_H^*), une "déviation" possible d'une firme de type L est de choisir le contrat H; son profit sera dans ce cas égal à $t_H^* - \theta_L q_H^* = (\theta_H - \theta_L) q_H^* > 0$ au lieu de 0.

Question 3: Nous cherchons ci-dessous l'optimum de second rang, à savoir le menu (q_L^{**}, t_L^{**}),(q_H^{**}, t_H^{**}) qui maximise le bien-être des consommateurs sachant que le régulateur ne peut pas observer le type du monopole. Écrire les contraintes d'incitation du type H (ICH,) et du type L (ICL), ainsi que leurs contraintes de participation. Quel est alors le programme du régulateur ?

La contrainte d'incitation du type H est $t_H - \theta_H q_H \geq t_L - \theta_H q_L$ (ICH)

Celle du type L est $t_L - \theta_L q_L \geq t_H - \theta_L q_H$ (ICL)

Les contraintes de participation sont $t_L - \theta_L q_L \geq 0$ (IRL) et $t_H \geq \theta_H q_H$ (IRH).

Le programme du régulateur est par conséquent

$$\max_{(t_L, q_L),(t_H, q_H)} \beta \left(S(q_L) - t_L\right) + (1-\beta)\left(S(q_H) - t_H\right)$$

sous les contraintes d'incitation et de participation.

NB : les acronymes IC et IR viennent de l'anglais *Incentive Compatibility* et *Individual Rationality*.

Question 4: Montrer que la contrainte IRL est automatiquement satisfaite si les autres contraintes le sont. Montrer que ICL est saturée à l'optimum.

Montrons que IRL peut être ignorée: Si IRH est satisfaite, en utilisant ICL on a

$$t_L - \theta_L q_L \geq t_H - \theta_L q_H > t_H - \theta_H q_H \geq 0$$

Ce qui veut dire que ICL et IRH impliquent IRL. On peut donc enlever IRL du problème.

Montrons que ICL est saturée: Supposons que ICL s'écrive avec une inégalité stricte, et que IRH et ICH soient vérifiées. Si on diminue t_L, la contrainte IRH est inchangée, et la contrainte ICH est toujours vérifiée. On arrive ainsi à diminuer le paiement au monopole et à accroître l'objectif du régulateur, ce n'était donc pas un maximum. A l'équilibre, ICL doit être saturée.

Question 5: En combinant (ICL) et (ICH), montrer que $q_L \geq q_H$. Sous cette contrainte, montrer ensuite que (ICH) peut être ignorée. Montrer que (IRH) est saturée à l'optimum.

Montrons que ICH peut être ignorée: En "sommant" (ICL) et(ICH) on a

$$(\theta_H - \theta_L)q_L \geq (\theta_H - \theta_L)q_H$$

et donc

$$q_L \geq q_H$$

.

On a montré que ICL est saturée, donc

$$t_L - t_H = \theta_L(q_L - q_H)$$

or comme $\theta_L \leq \theta_H$:

$$\theta_L(q_L - q_H) \leq \theta_H(q_L - q_H)$$

ce qui donne

$$t_L - t_H \leq \theta_H(q_L - q_H)$$

soit (ICH) vérifiée.

IRH doit être saturée, sinon on pourrait diminuer légèrement le paiement au monopole t_H en continuant de la respecter et en obtenant un meilleur objectif pour le régulateur.

Question 6: Résoudre le programme du régulateur ainsi simplifié. Quels sont les quantités produites q_L^{**}, q_H^{**} à l'optimum de second rang ?

Le programme du monopole se réduit à :

$$\max_{(t_L,q_L),(t_H,q_H)} \beta\left(S(q_L)-t_L\right)+(1-\beta)\left(S(q_H)-t_H\right)$$

sous les contraintes :

$$t_L - q_L\theta_L = t_H - \theta_L q_H$$

$$t_H - q_H\theta_H = 0$$

$$q_L \geq q_H$$

ce qui donne :

$$\max_{(t_L,q_L),(t_H,q_H)} \beta\left(S(q_L)-t_L\right)+(1-\beta)\left(S(q_H)-t_H\right)$$

sous les contraintes :

$$t_L = q_L\theta_L + q_H(\theta_H-\theta_L)$$

$$t_H = q_H\theta_H$$

$$q_L \geq q_H$$

soit :

$$\max_{(q_L,q_H)} \beta\left(S(q_L)-\theta_L q_L\right)+(1-\beta)\left(S(q_H)-\theta_H q_H\right)-\beta q_H(\theta_H-\theta_L)$$

Les CPO donnent :

$$S'(q_L)=\theta_L$$

$$S'(q_H)=\theta_H+\frac{\beta}{1-\beta}(\theta_H-\theta_L)$$

D'où $q_L^{**}=q_L^{*}$. D'autre part, comme $S(.)$ est concave, $S'(.)$ est décroissante d'où $q_H^{**} < q_H^*$. Il existe donc une distorsion pour le type le moins efficace. Enfin, vérifions $q_L^{**} \geq q_H^{**}$:

$$\begin{aligned} q_L^{**} \geq q_H^{**} &\Leftrightarrow S'(q_L^{**}) \leq S'(q_H^{**}) \\ &\Leftrightarrow \theta_L \leq \theta_H + \frac{\beta}{1-\beta}(\theta_H - \theta_L) \\ &\Leftrightarrow (1-\beta)\theta_L \leq (1-\beta)\theta_H + \beta(\theta_H - \theta_L) \\ &\Leftrightarrow \theta_L \leq \theta_H \end{aligned}$$

Question 7: Montrer que le monopole de type θ_L reçoit une "rente informationnelle" (i.e. ses profits sont strictement positifs). Pourquoi parle t-on d'arbitrage rente-efficacité ? Commenter.

Le profit du monopole de type θ_L est $t_L^{**} - \theta_L q_L^{**}$. ICL et IRH sont saturées à l'optimum, ce qui donne : $t_L^{**} = q_L^{**}\theta_L + q_H^{**}(\theta_H - \theta_L)$. On en déduit

$t_L^{**} - \theta_L q_L^{**} = q_H^{**}(\theta_H - \theta_L) > 0$. La rente du monopole le plus efficace est positive alors qu'en information complète, le monopole avait exactement son profit de réservation.

Il existe une situation d'arbitrage pour le régulateur. Le régulateur souhaite extraite une partie de la rente du monopole θ_L, mais cela est coûteux car il se place sur un contrat sous optimal qui n'est plus efficace, au sens de la maximisation du surplus total, pour le type θ_H.

2 Monopole discriminant (Mussa-Rosen 1978)

Une entreprise en monopole fait face à des acheteurs hétérogènes. Lorsqu'un acheteur consomme q unités du bien, et qu'il paie une somme totale T, il retire une utilité

$$u(q, T, \theta) = \theta q - T$$

θ est le « type » d'un consommateur, information privée de ce dernier.

On suppose que θ est continûment distribué sur un support $[\underline{\theta}, \bar{\theta}]$ avec densité notée f et fonction de répartition noté F.

Le profit du monopole, s'il vend q unités au prix T, est $\pi = T - \frac{q^2}{2}$.

Le monopole va choisir, de façon à maximiser son profit, un « menu » de contrats $(q(\theta), t(\theta))$ qui doit être tel que le consommateur de type θ choisit le contrat qui lui est destiné (contraintes d'incitation) et obtient au moins autant que son utilité de réservation (contrainte de participation). Un menu de contrat est donc une paire de fonctions $(q(.), t(.))$, définies sur $[\underline{\theta}, \bar{\theta}]$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.

Question 1: Supposons que le monopole puisse observer θ. Caractériser les solutions $(q^*(\theta), t^*(\theta))$, et commenter.

Pour chaque consommateur de type θ, Le programme du monopole est

$$\max_{q,T}(T - \frac{q^2}{2})$$

sous la contrainte de participation

$$\theta q - T \geq 0$$

Le monopole peut saturer les contraintes de participation, de sorte qu'à l'optimum on a $q^*(\theta) = \theta$ et $T^*(\theta) = \theta^2$. Cette solution est efficace, dans le sens où elle maximise le surplus total $S = \theta q - \frac{q^2}{2}$. Le vendeur est capable d'extraire tout le surplus. Les consommateurs ont une utilité nulle.

On suppose maintenant que le monopole n'observe pas θ. Il sait cependant que θ est continûment distribué sur un support $[\underline{\theta}, \bar{\theta}]$ selon une densité notée f et une fonction de répartition notée F.

Question 2: Montrer que les contraintes d'incitations impliquent que $q(\theta)$ est croissant. *[Indication : On écrira les contraintes d'incitation pour $\theta \neq \theta'$]*

Pour chaque paire (θ, θ'), on a:

$$\theta q(\theta) - T(\theta) \geq \theta q(\theta') - T(\theta')$$

$$\theta' q(\theta') - T(\theta') \geq \theta' q(\theta) - T(\theta)$$

En ajoutant les deux inégalités, on obtient :

$$(\theta - \theta')(q(\theta) - q(\theta')) \geq 0$$

Question 3: Dans ce qui suit, puisque $U(\theta) = \theta q(\theta) - T(\theta)$, la variable d'intérêt sera la rente du consommateur $U(\theta)$ plutôt que $T(\theta)$. Montrer à partir des contraintes d'incitations et de participations que :

$$U(\theta) = \int_{\underline{\theta}}^{\theta} q(x)dx \tag{1}$$

[Indication : On écrira les contraintes d'incitation entre $\tilde{\theta}$ et $\theta \neq \tilde{\theta}$. On interprétera θ comme un maximum, pour avoir une relation entre $\dot{q}(.)$ et $\dot{T}(.)$]

Contraintes d'incitations

Un consommateur de type θ choisit le contrat qui lui est destiné si :

$$\theta q(\theta) - T(\theta) \geq \theta q(\tilde{\theta}) - T(\tilde{\theta}) \text{ pour chaque } \tilde{\theta}$$

On veut donc que $\forall(\theta, \tilde{\theta})$ l'utilité d'un agent qui se fait passer pour $\tilde{\theta}$ sachant qu'il est de type θ, soit maximale en θ. Nous notons cette utilité $U(\tilde{\theta}|\theta)$.

Les contraintes d'incitations se traduisent donc par :

$$\begin{cases} \frac{\partial U(\tilde{\theta}|\theta)}{\partial \tilde{\theta}}\Big|_{\tilde{\theta}=\theta} & = 0 \\ \\ \frac{\partial^2 U(\tilde{\theta}|\theta)}{\partial \tilde{\theta}^2}\Big|_{\tilde{\theta}=\theta} & \leq 0 \end{cases}$$

Par définition :

$$U(\tilde{\theta}|\theta) = \theta q(\tilde{\theta}) - T(\tilde{\theta})$$

Le système de condition se réécrit donc :

$$\begin{cases} \theta q'(\theta) - T'(\theta) & = 0 \text{ (CPO)} \\ \\ \theta q''(\theta) - T''(\theta) & \leq 0 \text{ (CSO)} \end{cases}$$

Intéressons nous à la dérivée de $U(\theta)$:

$$U'(\theta) = q(\theta) + \underbrace{\theta q'(\theta) - T'(\theta)}_{=0 \text{ par CPO}} = q(\theta) \geq 0$$

Pour obtenir l'équation de l'énoncé, intégrons cette équation entre $\underline{\theta}$ et θ :

$$\int_{\underline{\theta}}^{\theta} U'(x)dx = U(\theta) - U(\underline{\theta}) = \int_{\underline{\theta}}^{\theta} q(x)dx$$

.

Contraintes de participations

Il faut : $U(\theta) \geq 0$ pour chaque θ. $U(\theta)$ étant croissante en θ (cf eq. ci dessus), les contraintes de participations se simplifient en : $U(\underline{\theta}) \geq 0$, qui doit être saturée. A l'équilibre le plus bas type à une utilité nulle. En effet, sinon il serait possible de diminuer son transfert en augmentant le profit du monopole donc $U(\underline{\theta}) = 0$.

Finalement, on a bien :

$$\int_{\underline{\theta}}^{\theta} U'(x)dx = U(\theta) = \int_{\underline{\theta}}^{\theta} q(x)dx$$

.

Question 4: Écrire le programme d'optimisation du monopole en fonction de $(q(\theta), U(\theta))$ et montrer qu'il se simplifie à :

$$\max_{(q(.),U(.))} \int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} \left(\theta q(\theta) - U(\theta) - \frac{q^2(\theta)}{2}\right) f(\theta)d\theta \tag{2}$$

avec $U(\theta) = \int_{\underline{\theta}}^{\theta} q(x)dx$.

Le problème de monopole est:

$$\max_{(q(.),U(.))} \int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} \left(T(\theta) - \frac{q^2(\theta)}{2}\right) f(\theta)d\theta$$

s.c. $U'(\theta) = q(\theta)$ et $U(\theta) \geq 0$.
qui se re-écrit:

$$\max_{(q(.),U(.))} \int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} \left(\theta q(\theta) - U(\theta) - \frac{q^2(\theta)}{2}\right) f(\theta)d\theta$$

avec $U(\theta) = \int_{\underline{\theta}}^{\theta} q(x)dx$.

Question 5: En déduire les quantités produites $q^{**}(\theta)$ à l'optimum de second rang. On supposera $f(\theta) \neq 0$ i.e. il existe un consommateur de chaque type sur le support. *[Indication : intégrer par partie $\int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} U(\theta)f(\theta)d\theta$ dans (2)].*

IPP: $\int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} U(\theta)f(\theta)d\theta = -\underbrace{[U(\theta)(1-F(\theta)]_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}}}_{=0} + \int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}}(1-F(\theta))q(\theta)d\theta$

On a donc:

$$\max_{q(.)} \int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} \left(\theta q(\theta) - \frac{q^2(\theta)}{2} - q(\theta)\frac{(1-F(\theta))}{f(\theta)}\right) f(\theta)d\theta$$

En maximisant point par point, on obtient :

$$q^{**}(\theta) = \theta - \frac{(1-F(\theta))}{f(\theta)} \leq q^*(\theta)$$

Remarque: Si le taux de hasard $\frac{f(\theta)}{(1-F(\theta))}$ est croissant, la contrainte de monotonicité (i.e. $q(\theta)$ croissant) est satisfaite.

Question 6: Commenter. Y-a-t'il distorsion de l'allocation efficace ? Comment sont les consommateurs par rapport à la situation avec information connue ?

Distortion pour tous les types sauf pour le plus efficace (car $F(\overline{\theta}) = 1$). Tous les types, sauf le moins efficace, obtiennent une rente informationnelle égale :

$$U^{**}(\theta) = \int_{\underline{\theta}}^{\theta} q^{**}(x)dx$$

Question 7: Comparer avec la solution d'un exercice d'autoselection où θ est discret.

C'est exactement la même interprétation.

3 Taxation optimale

Une économie comporte deux types de travailleurs qui diffèrent par leur productivité:

- n_1 travailleurs de productivité w_1;
- n_2 travailleurs de productivité w_2

avec $w_2 > w_1$. Chaque travailleur produit la quantité $Y_i = w_i L_i$, où L_i est son offre de travail (le nombre d'heures travaillées). L'utilité d'un travailleur croît avec sa consommation C_i et décroît avec le nombre d'heures travaillées $L_i = Y_i/w_i$. Elle est donnée par

$$U_i(C_i, Y_i) = C_i - \left(\frac{Y_i}{w_i}\right)^\alpha,$$

où $\alpha > 1$ est un paramètre fixé dans tout le problème.

Question 1: Représenter l'allure des courbes d'indifférence des travailleurs de type 1 et des travailleurs de type 2 dans le plan (Y, C). Vérifier la propriété de croisement unique.

La pente des courbes d'indifférence est égale au taux marginal de substitution

$$\frac{\partial C_i}{\partial Y_i}_{|U_i} = -\frac{\frac{\partial U_i}{\partial Y_i}}{\frac{\partial U_i}{\partial C_i}} = \frac{\alpha}{w_i^\alpha} Y_i^{\alpha-1}$$

En un point (Y, C) donné, cette pente est plus élevée pour les agents de type 1, car $w_1 < w_2$, voir Figure ??.

Question 2: En l'absence de taxation, chaque agent consomme l'intégralité de sa production. Déterminer l'offre de travail $L^*(w)$ en fonction de la productivité. Quelle est l'élasticité de l'offre de travail? Déterminer l'utilité des travailleurs U_i^* à l'optimum.

En l'absence de taxe, les travailleurs de type i choisissent leur offre de travail L_i pour maximiser $w_i L_i - L_i^\alpha$. Il s'ensuit que l'offre de travail est donnée par:

$$L_i^* = L^*(w_i) = \left(\frac{w_i}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$$

L'élasticité de l'offre de travail est la dérivée de $\ln L$ par rapport à $\ln w$. Elle vaut $1/(\alpha - 1)$. L'utilité des travailleurs de type i est:

$$U_i^* = (\alpha - 1)\left(\frac{w_i}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}.$$

Question 3: L'objectif du gouvernement est la somme

$$n_1\Psi(U_1) + n_2\Psi(U_2),$$

où Ψ est une fonction strictement croissante et strictement concave qui traduit la préférence du gouvernement pour la redistribution.[1]

On suppose ici que le gouvernement observe le type des travailleurs $i = 1$ ou $i = 2$ et peut mettre en oeuvre des transferts forfaitaires[2], c'est l'optimum de premier rang. On note T_i les transferts: $T_i > 0$ représente une taxe sur les travailleurs de type i et $T_i < 0$ représente une subvention à ces agents. La consommation de l'agent i est donc $C_i = Y_i - T_i$. La contrainte budgétaire du gouvernement est

$$n_1 T_1 + n_2 T_2 = R, \tag{3}$$

où R est un paramètre fixé qui représente les dépenses à financer (défense, police, santé, etc.).

Montrer que la redistribution est parfaite et donner l'offre de travail à l'optimum de premier rang.

Comme la taxation n'affecte pas l'offre de travail, celle-ci est donnée par $L^*(w_i)$ et l'utilité des travailleurs de type i est $U_i = U_i^* - T_i$. Le gouvernement choisit T_1 et T_2 pour maximiser $$n_1\Psi(U_1^* - T_1) + n_2\Psi(U_2^* - T_2)$$ sous la contrainte budgétaire (3). En remplaçant T_1 par $(R - n_2 T_2)/n_1$ et en dérivant par rapport à T_2, on trouve $\Psi'(U_1) = \Psi'(U_2)$, d'où $U_1 = U_2$.

Question 4: Pour simplifier l'analyse, on suppose maintenant que le gouvernement maximise la somme

$$n_1 U_1 + \mu n_2 U_2,$$

où $\mu < 1$ reflète la préférence du gouvernement pour les travailleurs de productivité faible.[3]

On suppose que le gouvernement n'observe pas le type des agents, ni leur offre de travail (optimum de second rang). Il observe seulement le revenu avant impôt $Y_i = w_i L_i$. Le gouvernement va donc proposer aux agents de choisir l'une des deux options dans un menu (T_1, Y_1) et (T_2, Y_2). Autrement dit, le gouvernement annonce que s'il observe la production Y_i, il fera payer la taxe T_i.

[1] L'utilité marginale sociale d'un individu, $\Psi'(U)$, décroît avec son niveau d'utilité U.

[2] Les transferts sont "forfaitaires" au sens où ils ne dépendent pas de l'offre de travail.

[3] On fixe ainsi à 1 l'utilité marginale sociale des agents du bas type et à $\mu < 1$ celle des agents de haut type.

a) Ecrire les contraintes d'incitations en fonction de $Y_1, Y_2, T_1, T_2, w_1, w_2$.

b) Montrer que les agents les plus productifs produisent nécessairement plus que les agents les moins productifs: $Y_2 \geq Y_1$. (On admettra dans la suite que l'inégalité est stricte.)

c) Montrer que la contrainte d'incitation du haut type est saturée. (Montrer que si ce n'était pas le cas, le gouvernement pourrait donner un peu plus aux agents de type 1 et prendre un peu plus aux agents de type 2.)

d) Déterminer les transferts T_1 et T_2 en fonction de Y_1 et Y_2, puis l'offre de travail des travailleurs de type 2. Comparer l'offre de travail des travailleurs de type 1 avec la situation de premier rang (question 3).

a) Les consommations sont données par $C_i = Y_i - T_i$. Si les travailleurs de type 1 produisent la quantité Y_2 destinée aux travailleurs de type 2, leur offre de travail est est $L_{1\to 2} = Y_2/w_1$. D'où la contrainte d'incitation des travailleurs de type 1

$$Y_1 - T_1 - v(Y_1/w_1) \geq Y_2 - T_2 - v(Y_2/w_1) \qquad \text{(IC)}_1$$

et de même celle des travailleurs de type 2

$$Y_2 - T_2 - v(Y_2/w_2) \geq Y_1 - T_1 - v(Y_1/w_2), \qquad \text{(IC)}_2$$

en notant v la fonction $v(L) = L^\alpha$.

b) En ajoutant les deux contraintes, on trouve

$$v(Y_2/w_1) - v(Y_2/w_2) \geq v(Y_1/w_1) - v(Y_1/w_2)$$

c'est-à-dire

$$AY_2^\alpha \geq AY_1^\alpha,$$

avec $A = (1/w_1^\alpha) - (1/w_2^\alpha) > 0$. D'où $Y_2 \geq Y_1$.

c) Partons d'une situation optimale et supposons par l'absurde que la contrainte d'incitation des travailleurs de type 2 n'est pas saturée.

On va montrer qu'on peut trouver une autre allocation faisable meilleure pour le gouvernement. On garde Y_1 et Y_2 inchangés. On réduit T_1 de $\eta_1 > 0$ et on augmente T_2 de $\eta_2 > 0$. On choisit η_1 et η_2 de sorte que les recettes du gouvernement soit inchangées (la hausse de taxe pour les travailleurs 2 finance la baisse pour les travailleurs 1):

$$n_1\eta_1 = n_2\eta_2.$$

Comme les travailleurs de type 1 (bas types) préféraient leur allocation (Y_1, T_1) à (Y_2, T_2), cela reste a fortiori vrai après ce changement, puisqu'on a amélioré la situation des bas types et détérioré celle des hauts types. Par l'hypothèse que (IC)$_2$ n'était pas saturée, les travailleurs 2 préféraient strictement (Y_2, T_2) par rapport à (Y_1, T_1), donc cela reste vrai si on prend η_1 et η_2 suffisamment petit. Finalement ce changement augmente l'objectif du gouvernement

$$n_1\eta_1 - \mu n_2\eta_2 = (1-\mu)n_1\eta_1 > 0,$$

ce qui est la contradiction désirée.

d) On trouve d'abord les transferts T_1 et T_2 en utilisant la contrainte budgétaire (3) et la contrainte saturée (IC)$_2$. On trouve:

$$\begin{cases} (n_1+n_2)T_1 = R - n_2 D \\ (n_1+n_2)T_2 = R + n_1 D \end{cases}$$

avec $D = T_2 - T_1 = Y_2 - Y_1 - [v(Y_2/w_2) - v(Y_1/w_2)]$.

L'objectif du gouvernement peut alors se réécrire en fonction de Y_1 et Y_2:

$$\begin{aligned} n_1U_1 + \mu n_2 U_2 &= n_1\left[Y_1 - T_1 - v(Y_1/w_1)\right] + \mu n_2\left[Y_2 - T_2 - v(Y_2/w_2)\right] \\ &= n_1\left[Y_1 - v(Y_1/w_1)\right] + \mu n_2\left[Y_2 - v(Y_2/w_2)\right] \\ &\quad + \frac{n_1n_2(1-\mu)}{n_1+n_2}D + C, \end{aligned}$$

où C est une constante qui dépend des paramètres du modèles (R, μ, n_1, n_2). On voit que Y_2 apparaît ci-dessus seulement au travers du terme $Y_2 - v(Y_2/w_2)$. La maximisation en Y_2 (ou en L_2) donne donc que l'offre de travail des hauts types est efficace: $L_2 = L^*(w_2)$, avec la quantité produite associée $Y_2^* = w_2L^*(w_2)$, comme en l'absence de taxation, cf. questions 2 et 3. Comme d'habitude, il n'y a pas de distorsion en haut de la distribution.

Quant à la quantité produite par les bas types, Y_1, elle apparaît au travers de l'expression

$$n_1\left[Y_1 - v(Y_1/w_1)\right] + \frac{n_1n_2(1-\mu)}{n_1+n_2}\left[v(Y_1/w_2) - Y_1\right].$$

La fonction $v(Y_1/w_2) - Y_1$ est convexe en Y_1 (car $\alpha > 1$) et par définition sa dérivée est nulle en $Y_2 = Y_2^* = w_2L^*(w_2)$. On a vu au b) que $Y_1 \leq Y_2$, donc le terme $v(Y_1/w_2) - Y_1$ est décroissant dans la zone qui nous intéresse (en-dessous de Y_2^*).

Le second terme dans la somme ci-dessus, qui provient de la contrainte $(\text{IC})_2$, pousse donc à réduire la quantité produite par les bas type, Y_1, et donc leur offre de travail $L_1 = Y_1/w_1$, en comparaison de ce qu'on ferait si ce terme n'existait pas, c'est-à-dire si on maximisait seulement le premier terme $Y_1 - v(Y_1/w_1)$, ce qui donnerait la quantité de premier rang $Y_1^* = w_1 L^*(w_1)$. On a ainsi démontré qu'à l'optimum de second rang on a : $Y_1 < Y_1^*$.

En résumé, comme dans le cours, la quantité associée au bas type est distordue vers le bas pour réduire l'incitation du haut type à imiter le bas type. Concrètement, l'optimum est mis en oeuvre en imposant un taux marginal d'imposition positif aux travailleurs du bas type, alors que le taux marginal sur le haut type est nul pour garantir l'efficacité $L_2 = L_2^*$. Ce résultat contre-intuitif vient d'une limitation du modèle (Stiglitz, 1982), qui ne considère que la marge intensive de l'offre de travail : la désutilité du travail $v(L)$ est une fonction continue du nombre d'heures travaillées. Le résultat a été remis en cause par la littérature récente, notamment en introduisant des coûts *fixes* de participation à la force de travail (coûts indépendants du nombre d'heures), c'est-à-dire en étudiant la marge extensive de l'offre de travail.

Pour être complet, précisons enfin qu'on a admis dans l'exercice une étape du raisonnement qui consiste à montrer que l'inégalité $Y_1 < Y_2$ est stricte, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de pooling. Pour le montrer, se reporter à Salanié (2011).

Source de cet exercice: Salanié B., The Economics of Taxation, Second edition, The MIT Press, 2011, Chapitre 4.

4 Incitations avec aléa moral et sélection averse (P 2020-2021)

Un investisseur engage un manager pour mener un projet à bien. Le projet génère un profit R en cas de succès, zéro en cas d'échec. La probabilité de succès est $e\theta$, où e est l'effort du manager et θ représente ses qualités managériales ("talent"). Le coût privé de l'effort pour le manager est $\frac{1}{2}ce^2$. Ses opportunités extérieures sont normalisées à zéro.

Sauf mention du contraire, l'investisseur ne connaît pas le talent du manager. Il sait seulement que le talent peut être haut ($\theta = \theta_H$) ou bas ($\theta = \theta_L$), avec $\theta_L < \theta_H$, et que la probabilité que le talent soit haut est $\rho \in [0, 1]$.

L'investisseur et le manager sont neutres vis-à-vis du risque. Les paramètres du modèle, $(c, \theta_L, \theta_H, \rho)$, sont connus des deux acteurs.

Un contrat spécifie un transfert fixe t payé par l'investisseur au manager et un transfert contingent en cas de succès du projet, r. Comme l'investisseur fait face à deux types de manager, il laisse le manager choisir entre deux contrats (t_H, r_H) et (t_L, r_L). La première option est conçue pour le manager le plus talentueux, la seconde pour le manager le moins talentueux.

Question 1: Pour $\theta = \theta_L, \theta_H$, écrire le profit de l'investisseur, $\pi(\theta, e)$, l'utilité du manager, $U(\theta, e)$, et le surplus total, $S(e, \theta)$, en fonction de θ, e, R, r, c, et t. Trouver l'effort de premier rang $e^*(\theta)$ qui maximise le surplus. A quelle condition sur r le manager de type θ choisit-il l'effort $e^*(\theta)$? [*Indication : π est une espérance de profit, U une espérance d'utilité, S une espérance de surplus, selon que le projet réussisse ou non.*]

$$\begin{aligned} \pi(\theta, e) &= \theta e(R - r) - t \\ U(\theta, e) &= t + \theta e r - \tfrac{1}{2} c e^2 \\ S(\theta, e) &= \theta e R - \tfrac{1}{2} c e^2 \end{aligned}$$

L'effort qui maximise le surplus est $e^*(\theta) = \frac{\theta R}{c}$. L'effort qui maximise l'utilité du manager est $e(\theta) = \frac{\theta r}{e}$. Le manager choisit l'effort de premier rang si et seulement si $r^* = R$, i.e l'investisseur donne l'entièreté de la rente en cas de succès au manager.

Question 2: On suppose, dans cette question, que l'investisseur connaît le talent du manager θ. Trouver et interpréter le contrat optimal. [*Indication : Ecrire le programme du principal et ses contraintes, avant de le maximiser.*]

L'investisseur cherche à maximiser son profit sous contrainte de participation du manager et de l'effort qu'il choisit :

$$\max_{r,t} \theta e(R - r) - t$$

$$\text{s.c.} \begin{cases} U(\theta, e) \geq 0 \Leftrightarrow t \geq \frac{1}{2} c e^2 - \theta e r \\ e(\theta) = \frac{\theta r}{c} \end{cases}$$

La contrainte de participation est saturée et le programme se réécrit :

$$\max_{r} \frac{\theta^2 r}{c}(R - r) - \frac{1}{2}\frac{\theta^2 r^2}{c} + \frac{\theta^2 r^2}{c}$$

La condition du premier ordre donne :

$$R - 2r - r + 2r = 0 \Leftrightarrow r^* = R$$

L'investisseur induit donc le manager à faire l'effort de premier rang en choisissant $r^* = R$. On en déduit $t = -S(\theta, e^*(\theta)) = -\theta^2 R^2/(2c)$. Comme $t \leq 0$, l'investisseur "vend" le projet au manager.

On suppose maintenant que l'investisseur ne connaît pas θ. Soit U_H (respectivement U_L) l'utilité indirecte du manager le plus (respectivement) le moins talentueux.

Question 3: Montrer que les contraintes d'incitation peuvent s'écrire :

$$\frac{r_L^2}{2c} \leq \frac{U_H - U_L}{\theta_H^2 - \theta_L^2} \leq \frac{r_H^2}{2c}$$

[*Indication : Ecrire les contraintes d'incitations en utilisant la valeur de l'effort choisie par l'agent.*]

Les managers maximisent leur utilité et choisissent les efforts suivants (cf Q1) :

$$\begin{cases} e_H = \theta_H r_H / c \\ e_L = \theta_L r_L / c \end{cases}$$

Avec ces efforts, ils obtiennent les utilités :

$$\begin{cases} U_H = t_H + \theta_H^2 r_H^2/(2c) \\ U_L = t_L + \theta_L^2 r_L^2/(2c) \end{cases}$$

Les contraintes d'incitations sont :

$$\begin{cases} U_H \geq t_L + \theta_H^2 r_L^2/(2c) \\ U_L \geq t_H + \theta_L^2 r_H^2/(2c) \end{cases}$$

En enlevant à chaque contrainte l'utilité de l'autre agent :

$$\begin{cases} U_H - U_L \geq t_L + \theta_H^2 r_L^2/(2c) - U_L = (\theta_H^2 - \theta_L^2) r_L^2/(2c) \\ U_L - U_H \geq t_H + \theta_L^2 r_H^2/(2c) - U_H = (\theta_L^2 - \theta_H^2) r_H^2/(2c) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} U_H - U_L \geq (\theta_H^2 - \theta_L^2) r_L^2/(2c) \\ U_H - U_L \leq (\theta_H^2 - \theta_L^2) r_H^2/(2c) \end{cases}$$

Ce qui donne finalement :

$$\frac{r_L^2}{2c} \leq \frac{U_H - U_L}{\theta_H^2 - \theta_L^2} \leq \frac{r_H^2}{2c}.$$

Question 4: Exprimer l'espérance de profit de l'investisseur en termes du surplus total $S(\theta_L, e_L)$,$S(\theta_H, e_H)$ et de la rente laissée à chaque type de manager, U_H et U_L.

$$E(\pi) = \rho(S(\theta_H, e_H) - U_H) + (1-\rho)(S(\theta_L, e_L) - U_L)$$

Question 5: Montrer qu'IRH est automatiquement satisfaite si les autres contraintes le sont. Montrer que ICH est saturée à l'optimum. Écrire la rente du manager le plus talentueux U_H en utilisant r_L.

Si IRL est satisfaite, en utilisant ICH on a :

$$U_H \underbrace{\geq}_{ICH} t_L + \theta_H^2 r_L^2/2c \underbrace{\geq}_{\theta_H \geq \theta_L} t_L + \theta_L^2 r_L^2/2c \underbrace{\geq}_{IRL} 0$$

Ce qui veut dire que ICH et IRL impliquent IRH. On peut donc enlever IRL du problème.

Montrons que ICH est saturée: Supposons que ICH s'écrive avec une inégalité stricte, et que IRL et ICL soient vérifiées. Si on diminue t_H, la contrainte IRL est inchangée, et la contrainte ICL est toujours vérifiée. On arrive ainsi à diminuer le paiement au manager et à accroître l'objectif de l'investisseur, ce n'était donc pas un maximum. A l'équilibre, ICH doit être saturée.

La rente du manager le plus talentueux est donc :

$$U_H = t_L + \theta_H^2 r_L^2/(2c)$$

Question 6: Montrer que (ICL) peut être ignorée. Montrer que (IRL) est saturée à l'optimum. Examiner les contraintes de participation. Trouver la rente du manager le moins talentueux, U_L.

Montrons que ICL peut être ignorée: nous avons montré à la question 3 que $r_H \geq r_L$.

On a montré que ICH est saturée, donc :

$$t_H - t_L = \frac{\theta_H^2}{2c}(r_L^2 - r_H^2)$$

or comme $\theta_H^2 \geq \theta_L^2$ et $r_H^2 \geq r_L^2$:

$$\frac{\theta_H^2}{2c}(r_L^2 - r_H^2) \leq \frac{\theta_L^2}{2c}(r_L^2 - r_H^2)$$

ce qui donne

$$t_H - t_L \leq \frac{\theta_L^2}{2c}(r_L^2 - r_H^2)$$

soit (ICL) vérifiée. Ainsi si ICH et $r_H \geq r_L$ sont vraies (par définition d'après Q3) alors ICL peut être ignorée.

IRL doit être saturée, sinon on pourrait diminuer légèrement le paiement au manager t_L en continuant de la respecter et en obtenant un meilleur objectif pour l'investisseur. La rente du manager le moins talentueux est donc nulle. D'autre part,

$$U_L = 0 \Leftrightarrow t_L = -\theta_L^2 r_L^2/(2c)$$

La rente du manager le plus talentueux devient donc :

$$U_H = t_L + \theta_H^2 r_L^2/(2c) = \frac{r_L^2}{2c}(\theta_H^2 - \theta_L^2)$$

Question 7: . Trouver r_H à l'optimum. Quel effort le manager le plus talentueux choisit-il ?

$$E(\pi) = \rho[S(\theta_H, e_H) - \frac{r_L^2}{2c}(\theta_H^2 - \theta_L^2)] + (1-\rho)S(\theta_L, e_L)$$

$E(\pi)$ dépend de r_H à travers $S(\theta_H, e_H)$. Maximiser sur r_H revient à maximiser sur e_H.

$$\frac{\partial E(\pi)}{\partial e_H} = \rho \frac{\partial S(\theta_H, e_H)}{\partial e_H} = \rho(\theta_H R - c e_H) = 0$$

$$e_H^{**}(\theta_H) = e^*(\theta_H) = \frac{\theta_H R}{c}$$

D'après la question 1, $r_H = e_H c/\theta_h$ d'où $r_H^{**} = R$.

Question 8: Trouver r_L à l'optimum. Comparer l'effort choisi par le manager le moins talentueux avec l'effort de premier rang. Dans quelle mesure cet exercice illustre t'il l'arbitrage entre extraction de la rente et efficacité ? D'où venait l'inefficacité dans ce modèle ?

$$E(\pi) = \rho[S(\theta_H, e_H) - \frac{r_L^2}{2c}(\theta_H^2 - \theta_L^2)] + (1-\rho)S(\theta_L, e_L)$$

avec $S(\theta_L, e_L) = \pi(\theta_L, e_L) = \theta_L \underbrace{e_L}_{\frac{\theta_L r_L}{c}} (R - r_L) - \underbrace{t_L} - \theta_L^2 r_L^2/(2c)$

Maximiser $E(\pi)$ par rapport à r_L revient à maximiser

$$(1-\rho)\left[\theta_L \frac{\theta_L r_L}{c} R - \frac{1}{2} c \frac{\theta_L^2 r_L^2}{c^2}\right] - \rho \frac{r_L^2}{2c}(\theta_H^2 - \theta_L^2)$$

CPO :

$$(1-\rho)\left[\frac{\theta_L^2 R}{c} - \frac{\theta_L^2 r_L}{c}\right] - \rho \frac{r_L}{c}(\theta_H^2 - \theta_L^2) = 0$$

soit

$$r_L^{**}(\theta_L) = \frac{(1-\rho)\theta_L^2 R}{(1-\rho)\theta_L^2 + \rho(\theta_H^2 - \theta_L^2)} \leq R = r_L^*$$

D'après la question 1, $e_L = r_L \theta_L / c$. Comme $r_L^{**} \leq r_L^*$ alors $e_L^{**} \leq e_L^*$. L'effort du bas type est sous-optimal et le manager le moins talentueux reçoit un transfert plus faible. Face à l'incertitude, l'investisseur incite le manager du bon type à se révéler en détériorant le transfert qu'il offre au bas type. Le partage du risque est lié à un arbitrage entre extraction de la rente du haut type et détérioration de l'efficacité sur le bas type. On retrouve l'arbitrage entre extraction de la rente et incitations: donner les incitations maximales $r_L = R$ au manager le moins talentueux force l'investisseur à donner une rente trop élevée au manager le plus talentueux, dans la mesure où le talent n'est pas observé. C'est pourquoi $r_L < R$.