

## Macroéconomie 1 (4/7)

# Le modèle de croissance avec apprentissage par la pratique (Romer, 1986)

Olivier Loisel

ENSAE

Septembre — Décembre 2025

## Caractéristiques clefs du modèle

- Le modèle de Romer (1986) endogénéise le progrès technique du modèle de Cass-Koopmans-Ramsey pour mieux expliquer la croissance à long terme.
- **Paul M. Romer** : économiste américain, né en 1955 à Denver, professeur à l'Université de New York depuis 2011, co-lauréat (avec William D. Nordhaus) du prix de la Banque de Suède en sciences économiques en mémoire d'Alfred Nobel en 2018 "*for integrating technological innovations into long-run macroeconomic analysis*".
- Ce modèle repose sur deux concepts clefs :
  - **l'apprentissage par la pratique,**
  - **la diffusion des connaissances.**
- Il endogénéise le taux d'épargne du modèle de Frankel (1962) de la même façon que le modèle de Cass-Koopmans-Ramsey endogénéise le taux d'épargne du modèle de Solow-Swan.

# Rendements privés et sociaux du capital

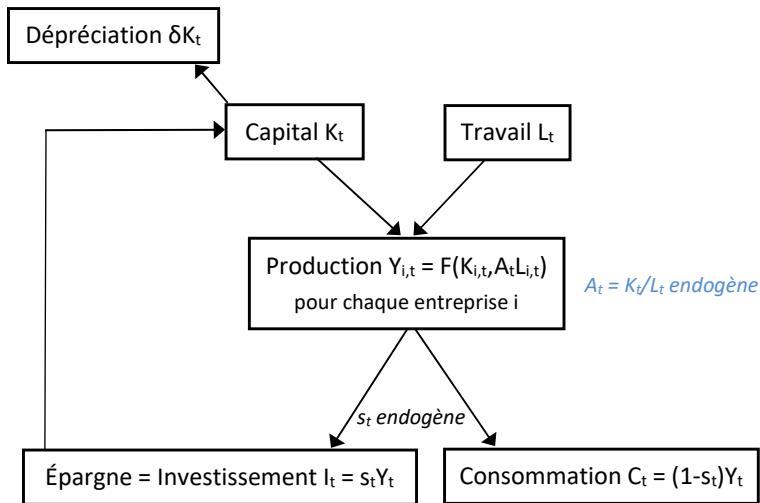
- Ce modèle fait une distinction entre
  - les rendements **privés** du capital, **strictement décroissants**,
  - les rendements **sociaux** du capital, **constants**.
- Il s'agit d'un “**modèle AK**”  $\equiv$  modèle dans lequel la fonction de production agrégée peut être réécrite sous une forme de type  $Y_t = \mathcal{A}_t K_t$  où  $\mathcal{A}_t$  est exogène (attention à ne pas confondre  $\mathcal{A}_t$  et  $A_t$ ).
- La constance des rendements sociaux du capital va
  - générer de la croissance à long terme,
  - entraîner l'absence de convergence conditionnelle.
- L'écart entre les rendements privés et sociaux du capital va donner un rôle à la politique économique.

## Aperçu général du modèle I \*

- Chaque entreprise loue du capital et emploie du travail pour produire des biens, avec une **efficacité du travail** dépendant du **capital agrégé** (stock).
- Les ménages détiennent le capital et fournissent le travail.
- Les biens produits par les entreprises sont utilisés pour la consommation des ménages et l'investissement en nouveau capital.
- Le taux d'épargne est endogène, choisi optimalement par les ménages.
- Le capital évolue dans le temps en fonction de l'investissement et de la dépréciation du capital.

(Dans les pages dont le titre est suivi d'un astérisque,  
en bleu : changements par rapport au chapitre 2.)

## Aperçu général du modèle II \*



## Variables exogènes \*

### ● Ni flux ni stocks :

- temps continu, indicé par  $t$ ,
- prix des biens  $\equiv$  numéraire = 1,
- (grand) nombre d'entreprises  $I$ .

### ● Flux :

- offre de travail = 1 par tête.

### ● Stocks :

- capital agrégé initial  $K_0 > 0$ ,
- population  $L_t = L_0 e^{nt}$ , où  $L_0 > 0$  et  $n \geq 0$ ,
- ~~paramètre de productivité  $A_t = A_0 e^{gt}$ , où  $A_0 > 0$  et  $g \geq 0$ .~~

## Variables endogènes \*

### ● Prix :

- coût réel d'usage du capital  $z_t$ ,
- salaire réel  $w_t$ ,
- taux d'intérêt réel  $r_t$ .

### ● Quantités – flux :

- production  $Y_{i,t}$  de l'entreprise  $i$ ,
- demande de travail  $N_{i,t}$  de l'entreprise  $i$ ,
- production agrégée  $Y_t \equiv \sum_{i=1}^I Y_{i,t}$ ,
- demande de travail agrégée  $N_t \equiv \sum_{i=1}^I N_{i,t}$ ,
- consommation agrégée  $C_t$ .

### ● Quantités – stocks :

- capital  $K_{i,t}$  de l'entreprise  $i$  (sauf en  $t = 0$ ),
- capital agrégé  $K_t \equiv \sum_{i=1}^I K_{i,t}$  (sauf en  $t = 0$ ),
- montant réel agrégé des actifs  $B_t$ ,
- paramètre de productivité  $A_t$ .

## Bien, agents privés, marchés, conditions d'équil. général \*

- Les bien, agents privés et marchés sont identiques à ceux du chapitre 2. En particulier, les marchés sont en **concurrence pure et parfaite**.
- Chaque agent privé résout son problème d'optimisation : du fait que tous les marchés sont en concurrence pure et parfaite,
  - à chaque date  $t \geq 0$ , chaque entreprise  $i$  choisit  $(Y_{i,t}, K_{i,t}, N_{i,t})$ , en fonction des prix  $(w_t, z_t, r_t)$  **et de la productivité  $A_t$**  qu'elle considère comme donnés, de façon à maximiser son profit *instantané*,
  - à la date 0, le ménage représentatif choisit  $(\frac{C_t}{L_t}, \frac{B_t}{L_t})_{t \geq 0}$ , en fonction des prix  $(w_t, z_t, r_t)_{t \geq 0}$  qu'il considère comme donnés, de façon à maximiser son utilité *intertemporelle* (en anticipation parfaite) sous contraintes.
- Les prix sont tels que chaque marché est équilibré à chaque date  $t \geq 0$  :
  - $w_t$  équilibre le marché du travail :  $N_t = L_t$ ,
  - $z_t$  équilibre le marché du capital,
  - $r_t$  équilibre le marché des prêts.



# Plan du chapitre

- ➊ Introduction
- ➋ Conditions d'équilibre
- ➌ Détermination de l'équilibre
- ➍ Sous-optimalité de l'équilibre
- ➎ Conclusion
- ➏ Annexe

# Conditions d'équilibre

- ① Introduction
- ② Conditions d'équilibre
  - Comportement des ménages
  - Comportement des entreprises
  - Equilibre des marchés
- ③ Détermination de l'équilibre
- ④ Sous-optimalité de l'équilibre
- ⑤ Conclusion
- ⑥ Annexe

## Comportement des ménages \*

- Les ménages sont modélisés exactement comme au chapitre 2, avec une élasticité de substitution intertemporelle constante, égale à  $\frac{1}{\theta}$ .
- Leur comportement est donc caractérisé par les conditions d'équilibre
  - $\dot{b}_t = w_t + (r_t - n)b_t - c_t$  (**contrainte budgétaire instantanée**),
  - $\frac{\dot{c}_t}{c_t} = \frac{r_t - \rho}{\theta}$  (**équation d'Euler**),
  - $\lim_{t \rightarrow +\infty} \left[ b_t e^{-\int_0^t (r_\tau - n) d\tau} \right] = 0$  (**condition de transversalité**),

où

- $c_t \equiv \frac{C_t}{L_t}$  est la consommation par tête,
- $\rho$  le taux de préférence pour le présent ( $\rho > n > 0$ ),
- $b_t \equiv \frac{B_t}{L_t}$  le montant par personne des actifs en unités de bien.

## Fonction de production et efficacité du travail

- Production de chaque entreprise  $i$  :  $Y_{i,t} = F(K_{i,t}, A_t N_{i,t})$ , où la fonction de production  $F$  satisfait les mêmes propriétés qu'aux chapitres 1 et 2.
- Efficacité du travail dans chaque entreprise  $i$  :  $A_t = \frac{K_t}{L_t}$  (et non  $A_{i,t} = \frac{K_{i,t}}{N_{i,t}}$ ).
- Cette spécification capture deux concepts définis par Arrow (1962) :
  - **l'apprentissage par la pratique** : plus le stock de capital par tête (qui reflète la production par tête passée cumulée et donc l'expérience de chaque travailleur) est élevé, plus chaque travailleur est efficace ;
  - **la diffusion des connaissances** entre les entreprises, en raison de la nature non-rivale et non-exclusive de ces connaissances (qui explique que l'efficacité des travailleurs dans l'entreprise  $i$  dépend de  $K_t/L_t$ , pas de  $K_{i,t}/N_{i,t}$ ).

## Non-rivalité et non-exclusion

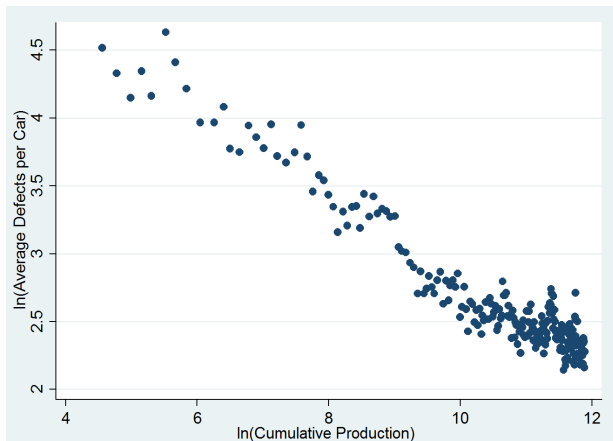
- Bien de nature **non-rivale**  $\equiv$  bien dont la consommation par un agent n'a aucun effet sur la quantité disponible pour les autres agents.
- Bien de nature **non-exclusive**  $\equiv$  bien dont chaque agent peut bénéficier sans coût.
- Dans le chapitre 5, nous considérerons un bien de nature non-rivale mais exclusive (à savoir, la capacité ou le droit de produire un type de bien intermédiaire, du fait d'un secret ou d'un brevet de fabrication).

## Efficacité du travail

- L'efficacité du travail  $A_t = \frac{K_t}{L_t}$  est un stock.
- Cela traduit l'idée que le savoir(-faire) s'accumule au cours du temps.
- **Kenneth J. Arrow** : économiste américain, né en 1921 à New York, mort en 2017 à Palo Alto, professeur à l'Université de Stanford à partir de 1979, co-lauréat (avec John R. Hicks) du prix de la Banque de Suède en sciences économiques en mémoire d'Alfred Nobel en 1972 "*for their pioneering contributions to general economic equilibrium theory and welfare theory*".

# Un exemple d'apprentissage par la pratique

Log du nombre moyen de défauts par voiture produite en fonction du log du nombre de voitures déjà produites (dans une usine de production de voitures)



Source : Levitt, List et Syverson (2013).

## Problème d'optimisation des entreprises \*

- Comme au chapitre 2, on suppose que
  - les entreprises louent leur stock de capital à chaque date,
  - il n'y a pas de coût d'ajustement du capital.
- Donc, à chaque date  $t$ , l'entreprise  $i$  choisit  $K_{i,t}$  et  $N_{i,t}$  de façon maximiser son profit *instantané*

$$F(K_{i,t}, A_t N_{i,t}) - z_t K_{i,t} - w_t N_{i,t}$$

en considérant  $z_t$ ,  $w_t$  et  $A_t = \frac{K_t}{L_t}$  comme donnés.



## Conditions du premier ordre \*

- Comme au chapitre 2, en notant  $F_j$  la dérivée partielle de  $F$  par rapport à son  $j^{\text{ième}}$  argument pour  $j \in \{1, 2\}$ , on obtient les conditions du premier ordre

$$\begin{aligned} F_1(K_{i,t}, A_t N_{i,t}) &= z_t \quad (\text{productivité marginale du capital} = \text{coût d'usage}), \\ A_t F_2(K_{i,t}, A_t N_{i,t}) &= w_t \quad (\text{productivité marginale du travail} = \text{salaire}). \end{aligned}$$

- Comme au chapitre 2, on en déduit que
  - le profit instantané est nul quels que soient  $K_{i,t}$  et  $N_{i,t}$ ,
  - $\frac{K_{i,t}}{N_{i,t}}$  ne dépend pas de  $i$  et vaut donc  $\frac{K_t}{N_t}$ ,
  - $Y_t \equiv \sum_{i=1}^I Y_{i,t} = F(K_t, A_t N_t)$ .

## Rendements sociaux du capital

- En utilisant  $A_t = \frac{K_t}{L_t}$ , on obtient alors la fonction de production *agrégée*

$$Y_t = K_t F \left( 1, \frac{N_t}{L_t} \right) \equiv F^S \left( K_t, \frac{N_t}{L_t} \right).$$

- En notant  $F_{jj}^S$  la dérivée seconde de  $F^S$  par rapport à son  $j^{\text{ième}}$  argument pour  $j \in \{1, 2\}$ , on obtient

$$\forall K_t > 0, \quad F_{1,1}^S \left( K_t, \frac{N_t}{L_t} \right) = 0,$$

donc **les rendements sociaux du capital sont constants.**

## Rendements privés du capital

- La fonction de production *individuelle* de l'entreprise  $i$  est

$$Y_{i,t} = F \left( K_{i,t}, \frac{K_t}{L_t} N_{i,t} \right) \equiv F^P \left( K_{i,t}, N_{i,t}, \frac{K_t}{L_t} \right).$$

- En notant  $F_{j,j}^P$  la dérivée seconde de  $F^P$  par rapport à son  $j^{\text{ième}}$  argument pour  $j \in \{1, 2, 3\}$ , on obtient

$$\forall K_{i,t} > 0, \quad F_{1,1}^P \left( K_{i,t}, N_{i,t}, \frac{K_t}{L_t} \right) < 0,$$

donc **les rendements privés du capital sont strictement décroissants.**

## Coût d'usage du capital \*

- Comme au chapitre 2, on suppose que le capital se déprécie au taux  $\delta$ .
- Comme au chapitre 2, on suppose que les ménages peuvent
  - louer leurs biens comme capital aux entreprises,
  - prêter leurs biens aux autres ménages.
- Donc, comme au chapitre 2, on obtient la condition d'équilibre

$$r_t = z_t - \delta.$$

## Equilibre des marchés \*

- Comme au chapitre 2, les conditions d'équilibre des marchés sont
  - $B_t = K_t$  (marchés des actifs),
  - $N_t = L_t$  (marché du travail),
  - $\dot{K}_t = Y_t - C_t - \delta K_t$  (marché des biens).
- En utilisant  $N_t = L_t$ , on peut réécrire la fonction de production agrégée comme  $Y_t = F(1, 1)K_t$ , donc le modèle est un modèle AK.

# Détermination de l'équilibre

- ① Introduction
- ② Conditions d'équilibre
- ③ Détermination de l'équilibre
  - Conditions d'équilibre sur  $k_t$  et  $c_t$
  - Détermination de  $k_t$  et  $c_t$
  - Implications
- ④ Sous-optimalité de l'équilibre
- ⑤ Conclusion
- ⑥ Annexe

## Conditions d'équilibre sur $k_t$ et $c_t$ | \*

- En notant  $f(x) \equiv F(x, 1)$  pour tout  $x > 0$  et en dérivant  $F(K_{i,t}, A_t N_{i,t}) = A_t N_{i,t} f(\frac{K_{i,t}}{A_t N_{i,t}})$  par rapport à  $K_{i,t}$  et  $N_{i,t}$ , on obtient

$$F_1(K_{i,t}, A_t N_{i,t}) = f' \left( \frac{K_{i,t}}{A_t N_{i,t}} \right),$$

$$A_t F_2(K_{i,t}, A_t N_{i,t}) = A_t \left[ f \left( \frac{K_{i,t}}{A_t N_{i,t}} \right) - \frac{K_{i,t}}{A_t N_{i,t}} f' \left( \frac{K_{i,t}}{A_t N_{i,t}} \right) \right].$$

- En utilisant  $\frac{K_{i,t}}{N_{i,t}} = \frac{K_t}{N_t}$ ,  $N_t = L_t$ ,  $A_t = \frac{K_t}{L_t} \equiv k_t$  et  $r_t = z_t - \delta$ , on peut alors réécrire les conditions du premier ordre du problème d'optimisation des entreprises comme

$$r_t = f'(1) - \delta \text{ et } w_t = [f(1) - f'(1)]k_t.$$

## Conditions d'équilibre sur $k_t$ et $c_t$ II

- Ces dernières conditions permettent de réécrire la contrainte budgétaire instantanée des ménages comme

$$\dot{b}_t = [f(1) - f'(1)]k_t + [f'(1) - (n + \delta)]b_t - c_t.$$

- En utilisant  $B_t = K_t$ , qui implique  $b_t = k_t$ , on obtient alors

$$\dot{k}_t = f(1)k_t - c_t - (n + \delta)k_t.$$

- Cette équation différentielle s'interprète comme "variation du stock de capital = épargne – dilution – dépréciation" (par tête) et n'est autre que l'équilibre sur le marché des biens (conséquence de la loi de Walras).



## Conditions d'équilibre sur $k_t$ et $c_t$ III

- En utilisant  $r_t = f'(1) - \delta$ , on peut réécrire l'équation d'Euler comme

$$\frac{\dot{c}_t}{c_t} = \frac{f'(1) - (\delta + \rho)}{\theta}.$$

- En utilisant  $b_t = k_t$  et  $r_t = f'(1) - \delta$ , on peut réécrire la condition de transversalité comme

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left\{ k_t e^{-[f'(1) - (n + \delta)]t} \right\} = 0.$$

## Conditions d'équilibre sur $k_t$ et $c_t$ IV \*

- $(k_t)_{t \geq 0}$  et  $(c_t)_{t \geq 0}$  sont donc déterminés par deux équations différentielles, une condition initiale et une condition terminale :

$$\dot{k}_t = [f(1) - (n + \delta)]k_t - c_t,$$

$$\frac{\dot{c}_t}{c_t} = \frac{f'(1) - (\delta + \rho)}{\theta},$$

$$k_0 = \frac{K_0}{L_0},$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left\{ k_t e^{-[f'(1) - (n + \delta)]t} \right\} = 0.$$

- Les autres variables endogènes sont déterminées résiduellement, à partir de  $(k_t)_{t \geq 0}$  et  $(c_t)_{t \geq 0}$ , par les autres conditions d'équilibre.

## Détermination de $k_t$ et $c_t$ I

- L'équation différentielle en  $\dot{c}_t$  s'intègre pour donner

$$c_t = c_0 e^{\frac{f'(1) - (\delta + \rho)}{\theta} t}.$$

- On se restreint aux valeurs des paramètres telles que
  - $f'(1) > \delta + \rho$ , de façon à ce que le taux de croissance de la consommation par tête soit strictement positif,
  - $\rho - n > \frac{1-\theta}{\theta} [f'(1) - (\delta + \rho)]$ , de façon à ce que l'utilité intertemporelle prenne une valeur finie.

## Détermination de $k_t$ et $c_t$ II

- On peut alors réécrire l'équation différentielle en  $\dot{k}_t$  comme

$$\dot{k}_t = [f(1) - (n + \delta)]k_t - c_0 e^{\frac{f'(1) - (\delta + \rho)}{\theta} t}.$$

- Puis, en réarrangeant les termes et en multipliant par  $e^{-[f(1) - (n + \delta)]t}$ ,

$$\left\{ \dot{k}_t - [f(1) - (n + \delta)]k_t \right\} e^{-[f(1) - (n + \delta)]t} = -c_0 e^{-\varphi t},$$

$$\text{où } \varphi \equiv f(1) - (n + \delta) - \frac{f'(1) - (\delta + \rho)}{\theta}.$$

- On montre en annexe que  $\varphi > f(1) - f'(1) > 0$ .

## Détermination de $k_t$ et $c_t$ III

- On peut donc intégrer l'égalité précédente pour obtenir

$$k_t e^{-[f(1)-(n+\delta)]t} - k_0 = \frac{c_0}{\varphi} e^{-\varphi t} - \frac{c_0}{\varphi}$$

puis  $k_t = \left(k_0 - \frac{c_0}{\varphi}\right) e^{[f(1)-(n+\delta)]t} + \frac{c_0}{\varphi} e^{\frac{f'(1)-(\delta+\rho)}{\theta} t}.$

- La condition de transversalité se réécrit alors

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left\{ \left(k_0 - \frac{c_0}{\varphi}\right) e^{[f(1)-f'(1)]t} + \frac{c_0}{\varphi} e^{[f(1)-f'(1)-\varphi]t} \right\} = 0$$

et implique  $c_0 = \varphi k_0 > 0$  puisque  $\varphi > f(1) - f'(1) > 0$  (comme au chapitre 2,  $c_0$  s'ajuste pour satisfaire la condition de transversalité).

## Détermination de $k_t$ et $c_t$ IV

- On obtient donc finalement

$$k_t = k_0 e^{\frac{f'(1) - (\delta + \rho)}{\theta} t} \text{ et } c_t = \varphi k_0 e^{\frac{f'(1) - (\delta + \rho)}{\theta} t}.$$

- Croissent donc au même taux constant**

- le stock de capital par tête  $k_t$ ,**
- la consommation par tête  $c_t$ ,**
- la production par tête  $y_t = f(1)k_t$ .**

- Ce taux de croissance, égal à  $\frac{f'(1) - (\delta + \rho)}{\theta}$ , dépend
  - positivement de  $f'(1)$  et  $\frac{1}{\theta}$ ,
  - négativement de  $\delta$  et  $\rho$ ,

ce qui s'interprète par l'équation d'Euler, comme au chapitre 2.

## Détermination de $k_t$ et $c_t$ V

- Du fait des rendements sociaux **constants** du capital,
  - le taux de croissance à long terme dépend de  $f'(1)$ ,  $\frac{1}{\theta}$ ,  $\delta$  et  $\rho$ ,
  - la convergence vers l'état régulier est instantanée,

ce qui n'est pas le cas dans le modèle de Cass-Koopmans-Ramsey, dans lequel les rendements du capital sont **décroissants**.

- Le niveau initial de la consommation par tête  $c_0 = \varphi k_0$  dépend
  - positivement de  $k_0$ ,  $f(1)$ ,  $\rho$  et (si  $\frac{1}{\theta} > 1$ )  $\delta$ ,
  - négativement de  $f'(1)$ ,  $n$ ,  $\frac{1}{\theta}$  et (si  $\frac{1}{\theta} < 1$ )  $\delta$ .
- $c_0$  et  $\frac{\dot{c}_t}{c_t}$  réagissent en sens opposés à une variation de  $\rho$ ,  $f'(1)$ ,  $\frac{1}{\theta}$  ou (si  $\frac{1}{\theta} > 1$ )  $\delta$  pour satisfaire la contrainte budgétaire intertemporelle.

## Faits stylisés de Kaldor (1961)

- Le modèle de Romer (1986) rend donc compte non seulement des cinq premiers **faits stylisés de Kaldor (1961)**, comme le modèle de Cass-Koopmans-Ramsey à l'état régulier, mais aussi du 6<sup>ème</sup> :

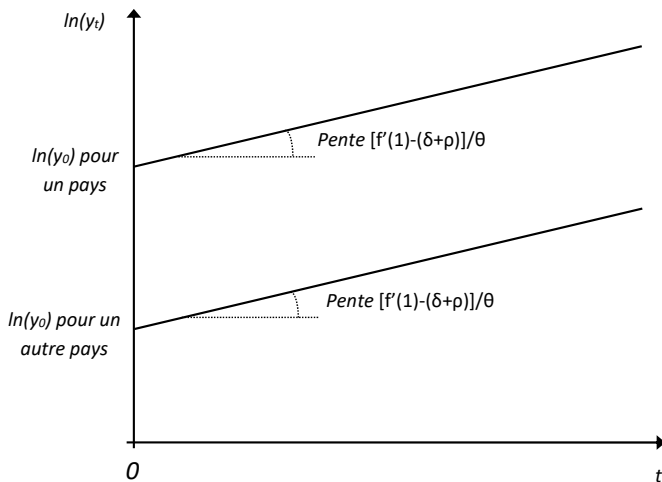
- la production par tête croît :  $\frac{\dot{y}_t}{y_t} = \frac{f'(1) - (\delta + \rho)}{\theta} \geq 0$ ,
- le stock de capital par tête croît :  $\frac{\dot{k}_t}{k_t} = \frac{f'(1) - (\delta + \rho)}{\theta} \geq 0$ ,
- le taux de rendement du capital est constant :  $r_t = f'(1) - \delta$ ,
- le ratio capital / production est constant :  $\frac{K_t}{Y_t} = \frac{1}{f(1)}$ ,
- les parts de rémunération du travail et du capital dans la production sont constantes :  $\frac{w_t L_t}{Y_t} = \frac{f(1) - f'(1)}{f(1)}$  et  $\frac{z_t K_t}{Y_t} = \frac{f'(1)}{f(1)}$ ,
- le taux de croissance de la production par tête varie entre les pays :  $\frac{\dot{y}_t}{y_t} = \frac{f'(1) - (\delta + \rho)}{\theta}$  varie entre les pays lorsque les paramètres de préférence  $\rho$  et  $\theta$  varient entre les pays.



## Ni convergence absolue, ni convergence conditionnelle

- On a  $\ln(y_t) = \ln(y_0) + \frac{f'(1) - (\delta + \rho)}{\theta} t$ , où  $y_0 = f(1)k_0$ .
- Il n'y a donc pas de convergence à long terme des  $\ln(y_t)$  entre les pays ayant des  $y_0$  différents, même s'ils ont les mêmes paramètres
  - de technologie  $f(\cdot)$ ,
  - d'évolution du capital et du travail  $n, \delta$ ,
  - de préférence  $\rho, \theta$ .
- Le modèle ne prédit donc **ni convergence absolue, ni convergence conditionnelle** des  $\ln(y_t)$  entre les pays, contrairement aux modèles de Solow-Swan et Cass-Koopmans-Ramsey.
- L'absence de convergence conditionnelle est en désaccord avec les données empiriques, comme l'a vu au chapitre 1.

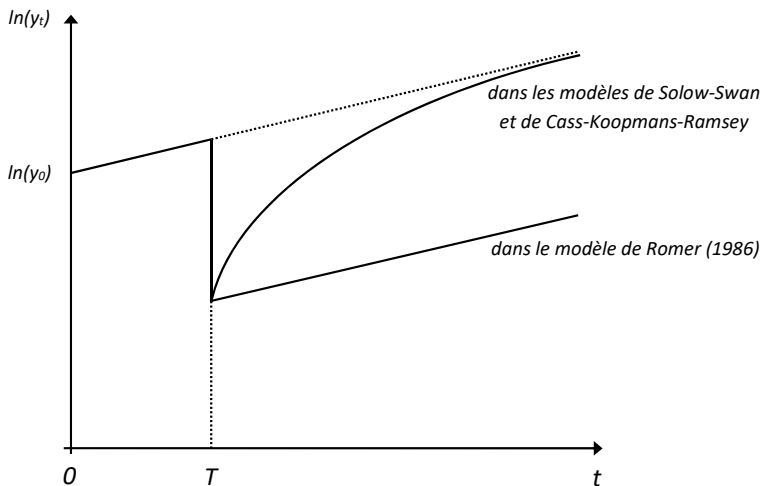
# Absence de convergence conditionnelle



## Effet permanent des chocs

- Un choc exogène non anticipé sur le stock de capital ne modifie pas la pente du sentier de  $\ln(y_t)$ , mais modifie son ordonnée à l'origine.
- Donc, suite à un tel choc,  $\ln(y_t)$  ne “rattrape” pas sa trajectoire initiale : **le choc a un effet permanent.**
- Cette prédiction est en accord avec l'hypothèse, non rejetée par les données, de racine unitaire dans les séries macroéconomiques.
- Les modèles de Solow-Swan et Cass-Koopmans-Ramsey prédisent au contraire qu'un tel choc n'a pas d'effet permanent sur  $\ln(y_t)$  car il ne modifie pas son sentier d'état régulier.

# Effet d'un choc négatif non anticipé sur le capital à $T$



# Sous-optimalité de l'équilibre

- ① Introduction
- ② Conditions d'équilibre
- ③ Détermination de l'équilibre
- ④ Sous-optimalité de l'équilibre
  - Externalité
  - Sous-optimalité sociale de l'équilibre concurrentiel
  - Rôle de la politique économique
- ⑤ Conclusion
- ⑥ Annexe

# Externalité I

- A  $K_{j,t}$  donnés pour  $j \neq i$ , une variation de  $K_{i,t}$  a simultanément
  - un effet direct sur  $Y_{i,t} = F(K_{i,t}, A_t N_{i,t})$ ,
  - un effet indirect sur tous les  $Y_{j,t}$  pour  $j \in \{1, \dots, I\}$ , via  $A_t = \frac{K_t}{L_t}$ .
- L'entreprise  $i$  ne prend en compte que le premier effet lorsqu'elle choisit  $K_{i,t}$  car
  - elle ne prend pas en compte l'effet indirect sur les  $Y_{j,t}$  pour  $j \neq i$ ,
  - l'effet indirect sur  $Y_{i,t}$  est négligeable par rapport à l'effet direct sur  $Y_{i,t}$  ( $I$  étant grand, une variation de  $K_{i,t}$  affecte peu  $K_t$  et  $A_t$ ).
- On dit qu'il y a **externalité de diffusion des connaissances** entre les entreprises.

## Externalité II

- Une variation de  $K_t$  a deux effets simultanés sur  $Y_t = F(K_t, A_t N_t)$  :
  - un effet direct,
  - un effet indirect, via  $A_t = \frac{K_t}{L_t}$ .
- Le planificateur omniscient, omnipotent et bienveillant  $\mathcal{POOB}$  prend en compte les deux effets lorsqu'il choisit  $K_t$ , car ils sont du même ordre de grandeur.
- On dit que **le  $\mathcal{POOB}$  internalise l'externalité** de diffusion des connaissances entre les entreprises.
- On doit donc s'attendre à ce que, par rapport à l'équilibre concurrentiel, le  $\mathcal{POOB}$  commande plus d'investissement.

## Sous-optimalité sociale de l'équilibre concurrentiel I

- L'équilibre concurrentiel est socialement optimal si et seulement s'il coïncide avec l'allocation choisie par le  $\mathcal{POOB}$ .
- Problème d'optimisation du  $\mathcal{POOB}$  : pour  $k_0 > 0$  donné,

$$\max_{(c_t)_{t \geq 0}, (k_t)_{t > 0}} \int_0^{+\infty} e^{-(\rho-n)t} \left( \frac{c_t^{1-\theta} - 1}{1-\theta} \right) dt$$

sous les contraintes

- ①  $\forall t \geq 0, c_t \geq 0$  (contrainte de positivité de la consommation),
- ②  $\forall t > 0, k_t \geq 0$  (contrainte de positivité du capital),
- ③  $\forall t \geq 0, \dot{k}_t = [f(1) - (n + \delta)]k_t - c_t$  (contrainte de technologie et de ressources).



## Sous-optimalité sociale de l'équilibre concurrentiel II

- **Hamiltonien** associé au problème d'optimisation du  $\mathcal{POOB}$  :

$$H^P(c_t, k_t, \lambda_t^P, t) \equiv e^{-(\rho-n)t} \left( \frac{c_t^{1-\theta} - 1}{1-\theta} \right) + \lambda_t^P \{ [f(1) - (n + \delta)]k_t - c_t \}$$

où  $\lambda_t^P$  représente la valeur, mesurée en unités d'utilité à la date 0, d'une augmentation d'une unité de bien des ressources à la date  $t$ .

- En appliquant la théorie du contrôle optimal, on obtient alors
  - $\dot{\lambda}_t^P = e^{-(\rho-n)t} c_t^{-\theta}$  (condition du 1<sup>er</sup> ordre sur la variable de contrôle),
  - $\dot{\lambda}_t = [n + \delta - f(1)]\lambda_t^P$  (cond. d'évolution de la co-variable d'état),
  - $\dot{k}_t = [f(1) - (n + \delta)]k_t - c_t$  (contrainte de ressources),
  - $\lim_{t \rightarrow +\infty} k_t \lambda_t^P = 0$  (condition de transversalité).

## Sous-optimalité sociale de l'équilibre concurrentiel III

- On en déduit, par des calculs similaires à ceux du chapitre 2,
  - $\dot{k}_t = [f(1) - (n + \delta)]k_t - c_t$  (équation différentielle en  $\dot{k}_t$ ),
  - $\frac{\dot{c}_t}{c_t} = \frac{f(1) - (\rho + \delta)}{\theta}$  (équation différentielle en  $\dot{c}_t$ ),
  - $\lim_{t \rightarrow +\infty} \left\{ k_t e^{-[f(1) - (n + \delta)]t} \right\} = 0$  (condition de transversalité).
- Ces trois conditions et  $k_0 = \frac{K_0}{L_0}$  déterminent  $(k_t)_{t \geq 0}$  et  $(c_t)_{t \geq 0}$ .
- L'équation différentielle en  $\dot{c}_t$  s'intègre pour donner  $c_t = c_0 e^{\frac{f(1) - (\delta + \rho)}{\theta} t}$ .
- On se restreint aux valeurs des paramètres telles que  $\rho - n > \frac{1 - \theta}{\theta} [f(1) - (\delta + \rho)]$ , de façon à ce que l'utilité intertemporelle prenne une valeur finie.

(En rouge sur cette page : changements par rapport aux pages 26-27.)

## Sous-optimalité sociale de l'équilibre concurrentiel IV

- On peut alors réécrire l'équation différentielle en  $\dot{k}_t$  comme

$$\dot{k}_t = [f(1) - (n + \delta)]k_t - c_0 e^{\frac{f(1) - (\delta + \rho)}{\theta} t}.$$

- Puis, en réarrangeant les termes et en multipliant par  $e^{-[f(1) - (n + \delta)]t}$ ,

$$\left\{ \dot{k}_t - [f(1) - (n + \delta)]k_t \right\} e^{-[f(1) - (n + \delta)]t} = -c_0 e^{-\varphi^p t},$$

où  $\varphi^p \equiv \frac{\theta - 1}{\theta} f(1) - (n + \delta) + \frac{\delta + \rho}{\theta}$ .

- De la condition  $\rho - n > \frac{1 - \theta}{\theta} [f(1) - (\delta + \rho)]$ , on déduit que  $\varphi^p > 0$ .

## Sous-optimalité sociale de l'équilibre concurrentiel V

- On peut donc intégrer l'égalité précédente pour obtenir

$$k_t e^{-[f(1)-(n+\delta)]t} - k_0 = \frac{c_0}{\varphi^P} e^{-\varphi^P t} - \frac{c_0}{\varphi^P}$$

$$\text{puis } k_t = \left( k_0 - \frac{c_0}{\varphi^P} \right) e^{[f(1)-(n+\delta)]t} + \frac{c_0}{\varphi^P} e^{\frac{f(1)-(\delta+\rho)}{\theta} t}.$$

- La condition de transversalité se réécrit alors

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left\{ k_0 - \frac{c_0}{\varphi^P} + \frac{c_0}{\varphi^P} e^{-\varphi^P t} \right\} = 0$$

et implique  $c_0 = \varphi^P k_0 > 0$  puisque  $\varphi^P > 0$  (comme au chapitre 2,  $c_0$  est choisi de façon à satisfaire la condition de transversalité).

## Sous-optimalité sociale de l'équilibre concurrentiel VI

- On obtient donc finalement

$$k_t = k_0 e^{\frac{f(1) - (\delta + \rho)}{\theta} t}, \quad c_t = \varphi^P k_0 e^{\frac{f(1) - (\delta + \rho)}{\theta} t} \quad \text{et} \quad y_t = f(1) k_0 e^{\frac{f(1) - (\delta + \rho)}{\theta} t}.$$

- Ces résultats diffèrent de ceux obtenus précédemment, donc **l'équilibre concurrentiel n'est pas socialement optimal**.
- Plus précisément, **l'équilibre concurrentiel est socialement sous-optimal** :  $U_0$  prend une valeur strictement plus faible à l'équilibre concurrentiel qu'avec le *POOB*.
- Ce dernier point, qui se vérifie aisément par calcul, vient du fait que le *POOB* ne choisit pas l'allocation de l'équilibre concurrentiel alors qu'elle satisfait les trois contraintes de son problème d'optimisation.

## Sous-optimalité sociale de l'équilibre concurrentiel VII

- Le taux de croissance de  $k_t$ ,  $c_t$  et  $y_t$  est égal à
  - $\frac{f(1) - (\delta + \rho)}{\theta}$  avec le  $\mathcal{POOB}$ ,
  - $\frac{f'(1) - (\delta + \rho)}{\theta}$  à l'équilibre concurrentiel.
- Or, du fait de l'externalité, le produit marginal social du capital,  $f(1)$ , est strictement supérieur au produit marginal privé du capital,  $f'(1)$ .
- Donc **la croissance est plus élevée avec le  $\mathcal{POOB}$**  : ce dernier, qui internalise l'externalité, commande plus d'investissement.
- Et, par conséquent,  $c_0$  est plus faible avec le  $\mathcal{POOB}$  :

$$\varphi^P k_0 = \left[ \varphi - \frac{f(1) - f'(1)}{\theta} \right] k_0 < \varphi k_0.$$

# Rôle de la politique économique I

- Le fait que l'équilibre concurrentiel soit socialement sous-optimal donne un rôle à la politique économique.
- La partie 4 des TDs montre qu'une autorité fiscale peut mettre en œuvre l'allocation du *POOB* dans un cadre décentralisé en
  - **subventionnant l'investissement** à un taux tel que le rendement privé du capital soit égal à son rendement social,
  - **finançant cette subvention par un impôt forfaitaire** sur les ménages, qui ne "distord" pas leurs choix (impôt forfaitaire  $\equiv$  impôt conditionnel à une caractéristique que l'individu ne peut pas modifier),ou bien, de manière alternative, en
  - **subventionnant les revenus des actifs** à un taux tel que le rendement privé du capital soit égal à son rendement social,
  - **finançant cette subvention par une taxe sur les revenus du travail**, qui ne "distord" pas les choix des ménages du fait de la nature exogène de leur offre de travail.

## Rôle de la politique économique II

- Dans le cas d'une **externalité positive** (comme la diffusion des connaissances), de tels systèmes de **subventions**, financées de manière forfaitaire, font **internaliser** aux agents privés le **bénéfice social** de leurs actions.
- Dans le cas d'une **externalité négative** (comme la pollution), un système similaire de **taxes**, redistribuées de manière forfaitaire, permet de faire **internaliser** aux agents privés le **coût social** de leurs actions.
- Ces taxes/subventions sont appelées taxes/subventions **pigouviennes**.
- **Arthur C. Pigou** : économiste anglais, né en 1877 à Ryde, mort en 1959 à Cambridge, professeur à l'Université de Cambridge à partir de 1896.



# Conclusion

- ① Introduction
- ② Conditions d'équilibre
- ③ Détermination de l'équilibre
- ④ Sous-optimalité de l'équilibre
- ⑤ Conclusion
- ⑥ Annexe

## Principales prédictions du modèle

- A court comme à long terme,
  - la croissance dépend des paramètres de technologie, de préférence, d'évolution du capital, et seulement de ces paramètres,
  - les six faits stylisés de Kaldor (1961) sont obtenus.
- L'effet de l'accumulation du capital sur la croissance ne disparaît pas à long terme, grâce à la constance des rendements sociaux du capital.
- Il y a ni convergence absolue ni convergence conditionnelle des niveaux de production par tête (en logarithme) entre les pays.
- L'équilibre concurrentiel est socialement sous-optimal, à cause de la présence d'une externalité.
- Des politiques économiques de subventions pigouviennes permettent de mettre en œuvre l'équilibre socialement optimal.

## Deux limites du modèle

- Le modèle correspond au cas spécial où les rendements sociaux du capital sont constants car les effets d'apprentissage et de diffusion compensent *exactement* la décroissance de ses rendements privés (si les rendements sociaux du capital n'étaient pas constants, alors les implications positives du modèle seraient très différentes).  
  
↪ Le chapitre 5 ne fait pas d'hypothèse “sur le fil du rasoir” concernant la valeur d'un paramètre.
- Le modèle explique la croissance de long terme par **l'accumulation involontaire et non rémunérée de la connaissance**.  
  
↪ Le chapitre 5 l'explique par l'accumulation volontaire et rémunérée de la connaissance en introduisant la notion de brevet.

# Annexe

- ① Introduction
- ② Conditions d'équilibre
- ③ Détermination de l'équilibre
- ④ Sous-optimalité de l'équilibre
- ⑤ Conclusion
- ⑥ Annexe

## Preuve que $\varphi > f(1) - f'(1) > 0$

- On montre que  $\varphi > f(1) - f'(1) > 0$  en quatre étapes :

- En dérivant  $F(1, x) = xf(\frac{1}{x})$  par rapport à  $x \in \mathbb{R}^+$ , on obtient  $F_2(1, x) = f(\frac{1}{x}) - \frac{1}{x}f'(\frac{1}{x})$ . Or  $F_2(1, 1) > 0$ , donc  $f(1) - f'(1) > 0$ .
- En utilisant  $\varphi \equiv f(1) - (n + \delta) - \frac{f'(1) - (\delta + \rho)}{\theta}$ , on obtient  $\varphi - [f(1) - f'(1)] = \frac{\theta - 1}{\theta}f'(1) - (n + \delta) + \frac{\delta + \rho}{\theta}$ .
- On réécrit la condition  $\rho - n > \frac{1 - \theta}{\theta}[f'(1) - (\delta + \rho)]$  comme  $\frac{\theta - 1}{\theta}f'(1) > n - \rho + \frac{\theta - 1}{\theta}(\delta + \rho)$ .
- On déduit des deux précédentes étapes que  $\varphi - [f(1) - f'(1)] > n - \rho + \frac{\theta - 1}{\theta}(\delta + \rho) - n - \delta + \frac{\delta + \rho}{\theta} = 0$ .