Microéconomie 1

Biens publics

Philippe Choné[1] Enrico Rubolino[1]

[1]CREST-ENSAE

Typologie des biens

Bien privé = Bien rival

- La consommation du bien par un agent réduit ou annule les possibilités de conso par un autre agent
- est dit “à exclusion” si on peut en interdire la consommation et la faire payer

Bien public = Bien non rival

- En pratique, souvent des effets externes :
  - la valeur du bien diminue avec le nombre d’agents qui consomment (ex : congestion routière)
  - négligé ici, cf. cours suivant sur les externalités
- est dit “pur” s’il est sans exclusion... voire avec obligation d’usage !

Typologie des biens

Table 1 – Typologie des biens

	Bien rival	Bien non rival
Avec exclusion	Bien privé standard	Bien public Recherches protégées par brevet, télévision payante, route à péage
Sans exclusion	Place de parking gratuite	Bien public pur Défense nationale, police, qualité de l'air, phare

Typologie des biens

Ne pas confondre

- biens publics
- biens privés fournis par le secteur public

En France

- autoroutes ont été gérées par des entreprises publiques ou privées suivant la période (privatisations)
- santé, éducation peuvent être partiellement rivaux : contraintes de capacité dans les classes, dans les hôpitaux
- peuvent être à exclusion (on peut en empêcher l'accès, faire payer)

Plan de cette séance

Optimalité de Paréto

Economie à deux biens : un bien privé x et un bien public z

- n consommateurs consomment x_i et z_i des deux biens
- Fonctions d'utilité $U_i(x_i, z_i)$, $i = 1, \ldots, n$, $U_i \uparrow$ concaves
- Ressources initiales : X en bien privé

Le bien public est produit à partir du bien privé

- Fonction de production $z = f(x)$, $f \uparrow$ concave
- Fonction de coût : $x = C(z) = f^{-1}(z)$, $C \uparrow$ convexe

Contraintes de rareté

Notant x la quantité de bien privé qui sert à fabriquer le bien public z

- Pour le bien privé : $\sum_{i=1}^{n} x_i \leq X - x$
- Pour le bien public : $z_i \leq z, \forall i = 1, \ldots, n$

Optimalité de Paréto

On maximise l'utilité d'un agent $U_1(x_1, z_1)$ sur (x_i, z_i, x, z) sous

$$\begin{cases} U_i(x_i, z_i) \geq \bar{U}_i & \text{pour } i = 2, \ldots, n \\ \sum_{i=1}^n x_i \leq X - x & \\ z_i \leq z & \text{pour } i = 1, \ldots, n \\ z \leq f(x) & \end{cases}$$

A l'optimum, les agents consomment $z_i = z = f(x) \Rightarrow$ on maximize $U_1(x_1, z)$ sur x_i et z sous les contraintes

$$\begin{cases} U_i(x_i, z) \geq \bar{U}_i & \text{pour } i = 2, \ldots, n \\ \sum_{i=1}^n x_i \leq X - C(z) & \end{cases}$$

Lagrangien

$$\mathcal{L} = U_1(x_1, z) + \sum_{i=2}^n \lambda_i \left[U_i(x_i, z) - \bar{U}_i\right] + \mu \left[X - C(z) - \sum_{i=1}^n x_i\right]$$

Optimalité de Paréto

Conditions du premier ordre (en posant $\lambda_1 = 1$)

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial U_i}{\partial z} = \mu C'(z) \quad \text{et} \quad \lambda_i \frac{\partial U_i}{\partial x_i} = \mu$$

Condition de Bowen-Lindahl-Samuelson (BLS)

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\frac{\partial U_i}{\partial z}}{\frac{\partial U_i}{\partial x_i}}(x_i, z) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{TMS}_i = C'(z) = \frac{1}{f'(x)}$$

où $\mathrm{TMS}_i = -\frac{\partial x_i}{\partial z}_{|U_i}$ = propension de i à payer pour le bien public

Coût marginal de prod. du bien public = $\sum$ des propensions à payer

L'équilibre de souscription

Chaque agent souscrit une part s_i de son revenu R_i pour le bien public

- consomme $x_i = R_i - s_i$ en bien privé et z en bien public
- où z = quantité de bien public produite : $z = f(s)$, avec $s = \sum_{j=1}^{n} s_j$

Equilibre de Nash

- Les agents ne se coordonnent pas
- L'agent i prend les souscriptions des autres comme données

$$\max_{s_i} U_i(x_i, z) = U_i\left(R_i - s_i \, , \, f(\sum_{j=1}^{n} s_j)\right)$$

L'équilibre de souscription

Equilibre de Nash

- Pour tout $i = 1, \ldots, n$

$$C'(z) = \frac{1}{f'(s)} = \text{TMS}_i(R_i - s_i, z) < \sum_j \text{TMS}_j(R_j - s_j, z)$$

- Condition différente de BLS
- $\Longrightarrow$ **Sous-production de bien public : s et z trop faibles**

L'équilibre de vote

Chaque conso i vote pour son niveau de bien public préféré z_i

Hypothèses

- Coût marginal de production constant : $C(z) = cz$
- Coût réparti uniformément entre les consommateurs

Niveau de bien public préféré par agent i

- maximise $U_i\,(R_i - cz_i/n\,,\,z_i)$
- qui est concave en z_i car U_i est concave
- donc z_i caractérisé par la condition du premier ordre

$$\mathrm{TMS}_i(R_i - \frac{cz_i}{n}, z_i) = \frac{c}{n}$$

L'équilibre de vote

L'équilibre de vote consiste à choisir la médiane des z_i

- Préférences unimodales en z_i
- Le pic de l'électeur médian est un “vainqueur de Condorcet”
- En notant $z_m = \text{mediane}\, z_i$, m agent médian

$$\text{TMS}_m\left(R_m - \frac{cz_m}{n}, z_m\right) = \frac{c}{n}$$

BLS fausse : $\sum_{i=1}^n \text{TMS}_i \neq c$ sauf si $\text{TMS}_m = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \text{TMS}_i$ en $z = z_m$

- en notant $\text{TMS}_i = \text{TMS}_i(R_i - cz_m/n, z_m)$
- Pas de comparaison simple entre TMS_m et la moyenne des TMS_i
- Il n'y a pas nécessairement sous-production de bien public

L'équilibre de vote

La moitié des électeurs située à droite de z_m préfère z_m à z_0

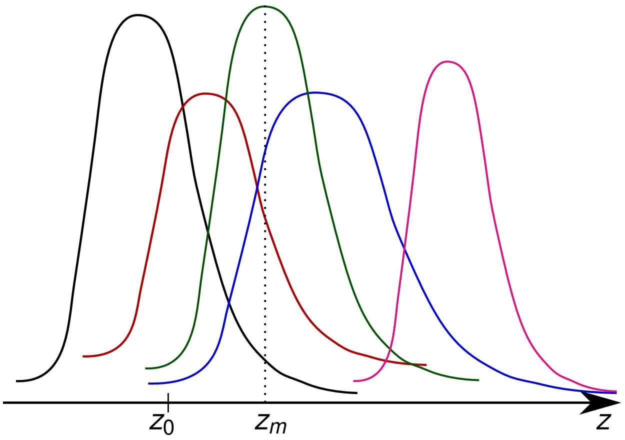


Figure 1 – Le pic de l'électeur médian, z_m, ne peut pas être battu à la majorité

Equilibre concurrentiel avec prix personnalisés

Hypothèses

- Chaque consommateur i paie un prix p_i par unité de bien public
- Le producteur de bien public reçoit $p = \sum_{i=1}^{n} p_i$ par unité

Offre $z^s(p)$

Le producteur maximize son profit : $pz - C(z) \Rightarrow C'(z) = p$

Demande du consommateur i

- Maximise $U_i(R_i - p_i z_i, z_i) \Rightarrow \text{TMS}_i(x_i, z_i) = p_i$
- Demande $z_i^*(p_i)$

Equilibre sur le “micro-marché” i : Offre = Demande

$$z = z^s(p) = z_i^*(p_i) \quad \forall i = 1, \dots, n$$

Equilibre concurrentiel avec prix personnalisés

Equilibre de Lindahl

$$p = \sum p_i = C'(z) = \sum_i \mathrm{TMS}_i(x_i, z)$$

La condition d’optimalité de Bowen-Lindahl-Samuelson est satisfaite

Limites de cette approche

- L’existence de micro-marchés viole l’hypothèse d’atomicité (consommateur preneur de prix)
- Chaque conso a intérêt à manipuler (minorer) sa demande : passager clandestin ou “*free-riding*”
- Fonctionne si plusieurs groupes de consos à l’intérieur desquels
  - TMS identiques entre consos
  - Les consos ne peuvent pas se coordonner pour influer sur le prix

Mécanisme révélateur

Mécanisme de Vickrey-Clarke-Groves (VCG)

- Méthode générale de mise en oeuvre d'une décision sociale optimale
- Dire la vérité est une stratégie dominante

Un bien public indivisible de coût C (Ex. : construire un pont)

- Utilité du consommateur i en fonction de la décision :

$$U_i(x_i, d) = x_i + u_i d \quad \text{avec } d = \begin{cases} 1 & \text{si le bien public est construit} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- u_i : propension de i à payer pour le bien public

Optimalité et pivot

Règle optimale de Bowen-Lindahl-Samuelson

$$\text{Construire le pont est optimal} \iff \sum_{i=1}^{n} u_i \geq C$$

Un agent *i* est pivot si sa présence fait basculer la décision optimale

$$\sum_{j \neq i}^{n} u_j < C \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^{n} u_j \geq C$$

ou

$$\sum_{j \neq i}^{n} u_j > C \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^{n} u_j \leq C$$

Rappel : Le vote ne fonctionne pas

En supposant une contribution uniforme au financement

- i vote pour la construction du pont $\iff u_i \geq C/n$
- Le pont est construit $\iff \text{mediane}\,(u_i) \geq C/n$
- Vote optimal si et seulement si $\text{mediane}(u_i) = \text{moyenne}(u_i)$
  - Si u_i lié au revenu R_i, on peut penser que $\text{med}(u_i) < \text{moy}(u_i)$
  - Alors le pont n'est pas construit alors qu'il devrait l'être quand

$$\text{mediane}(u_i) < C/n < \text{moyenne}(u_i)$$

Analogie avec les enchères à valeurs privées

Contexte

- Un vendeur vend un bien qu'il valorise à θ_0
- n acheteurs valorisent le bien à u_i, $i = 1, \ldots, n$
- Surplus total si i gagne : $S = u_i - \theta_0$

Règle optimale

- Surplus maximisé lorsque le plus grand des u_i gagne l'enchère

$$S^* = u_{(1)} - \theta_0 = \max u_i - \theta_0$$

- Contribution du gagnant au surplus total

$$\Delta S = [u_{(1)} - \theta_0] - [u_{(2)} - \theta_0] = u_{(1)} - u_{(2)}$$

Mise en oeuvre de la règle optimale

Dans l'enchère au second prix

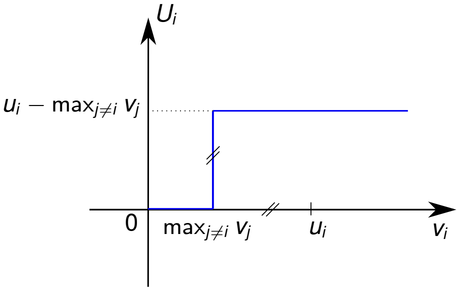
- Les agents enchérissent v_i
- L'agent qui enchérit le plus haut
  - remporte l'enchère
  - paie la seconde enchère la plus élevée
- L'utilité de l'agent i

$$U_i = \begin{cases} u_i - \max_{j \neq i} v_j & \text{si } v_i > \max_{j \neq i} v_j \\ 0 & \text{si } v_i \leq \max_{j \neq i} v_j \end{cases}$$

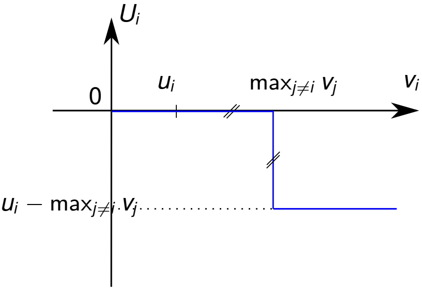
- ne dépend de son annonce v_i que via la règle d'allocation

Enchères au second prix

Annoncer u_i est optimal quoi qu'annoncent les autres



(a) $\max_{j \neq i} v_j < u_i$



(b) $u_i < \max_{j \neq i} v_j$

Utilité du gagnant : $u_{(1)} - u_{(2)} =$ Sa contribution au surplus total

Application au mécanisme VCG*

Changement de notations

- On remplace u_i par $u_i - C/n$ et C par 0
- La règle optimale est de construire le pont quand $\sum_{i=1}^{n} u_i \geq 0$

$$d(u_1, \ldots, u_n) = \mathbb{1}_{\sum_{i=1}^{n} u_i \geq 0}$$

Mécanisme de Vickrey-Clarke-Groves

Vecteurs des annonces : $v = (v_1, \ldots, v_n)$

- Règle d'allocation : $d(v)$
- Transferts fonctions des annonces $t_i(v)$

Mise en oeuvre de la règle optimale*

Pour trouver le transfert, il faut faire en sorte que l'utilité de l'agent i, $U_i = R_i - t_i(v) + u_i d(v)$,

- ne dépende de son annonce v_i que via la règle de décision
- varie avec la règle de décision comme le surplus total

$$U_i = R_i + d(v)\left(\sum_{j \neq i} v_j + u_i\right) - h_i(v_{(-i)}) \tag{1}$$

avec h_i fonction quelconque des annonces des autres

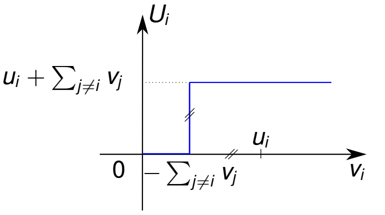
Le transfert

$$t_i(v) = -d(v)\sum_{j \neq i} v_j + h_i(v_{(-i)})$$

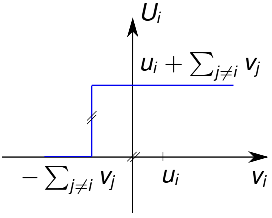
donne (1)

Le mécanisme de Vickrey-Clarke-Groves*

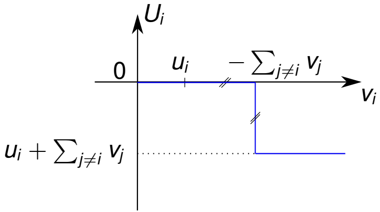
Annoncer u_i est optimal quoi qu'annoncent les autres



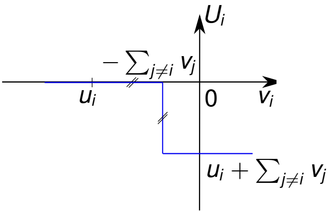
(a) *i* est pivot



(b) *i* n'est pas pivot



(c) *i* n'est pas pivot



(d) *i* est pivot

Agent est "pivot" si son annonce change la décision

Mécanisme de Clarke : $t_i(v) = -d(v)\sum_{j\neq i} v_j + \max\left(\sum_{j\neq i} v_j \ , \ 0\right)$

i Pivot - Construction $2(a)$	:	$t_i = -\sum_{j\neq i} v_j > 0$
i Non pivot - Construction $2(b)$	:	$t_i = 0$
i Non pivot - Non construction $2(c)$	:	$t_i = 0$
i Pivot - Non construction $2(d)$	:	$t_i = \sum_{j\neq i} v_j > 0$

Chaque agent paie, en plus de C/n, le coût qu'il impose aux autres par son annonce. Si on construit le pont :

- Les agents non pivots paient C/n
- Les agents pivots paient plus que C/n
- Le mécanisme n'est pas équilibré budgétairement

S'il y a des pivots, VCG ne peut pas être équilibré

Preuve avec $n = 2$ agents

- Supposons qu'il existe un mécanisme VCG équilibré

$$t_1(v_1, v_2) + t_2(v_1, v_2) = 0, \qquad \forall (v_1, v_2)$$

- avec $t_i(v_1, v_2) = -d(v)v_j + h_i(v_j)$, $i \neq j$
- Si $v_1' + v_2 > 0$ et $v_1'' + v_2 < 0$, l'annonce de 1 change la décision :

$$\begin{aligned} t_1(v_1', v_2) + t_2(v_1', v_2) &= -v_1' - v_2 + h_1(v_2) + h_2(v_1') = 0 \\ t_1(v_1'', v_2) + t_2(v_1'', v_2) &= h_1(v_2) + h_2(v_1'') = 0 \end{aligned}$$

- D'où $h_2(v_1') - h_2(v_1'') - v_1' = v_2$, impossible car v_2 peut varier à droite, pas à gauche

Quand $n \to \infty$, le nombre de pivots diminue*

Exemple avec n agents, dont $n/2$ “hauts types” et $n/2$ “bas types”

$$u_i = \begin{cases} 1,9C/n & \text{pour les hauts types} \\ 0,19C/n & \text{pour les bas types} \end{cases}$$

- Règle optimale : Il faut construire le pont

$$\sum_{i=1}^{n} u_i = \frac{n}{2}\left(1,9\frac{C}{n}\right)+\frac{n}{2}\left(0,19\frac{C}{n}\right) = \frac{C}{2}[1,9+0,19] = 1,045C > C$$

- Pas d’agent pivot pour n grand :

$$1,045C - 1,9C/n > C$$

- Le mécanisme de Clarke est équilibré : tous les agents paient C/n

A RETENIR

Biens publics

Optimalité

Coût marginal de prod. du bien public = Σ des propensions à payer

Mise en oeuvre

- Souscription : Pas assez de bien public (sous-optimal)
- Vote : Non optimal en général
- Pivot : Révélateur, niveau optimal de bien public, mais déséquilibre budgétaire s'il y a des agents pivots