# TD8 : Estimateur du maximum de vraisemblance

**Exercice 1. (données censurées)** Soient $Y_1, \ldots, Y_n$ des variables aléatoires i.i.d. de loi exponentialle de moyenne $\theta^* > 0$. On considère le cadre des données censurées : pour une certaine constante connue $c > 0$, on observe les variables aléatoires

$$X_i = Y_i \wedge c = \min(Y_i, c).$$

1. Déterminer la fonction de répartition $F_{\theta^*}(x)$ de $X_1$.
2. Montrer que l'estimateur par la méthode des moments s'écrit sous la forme $\widehat{\theta}_n^{\text{MM}} = \psi(\bar{X}_n)$, où $\psi : [0, c[ \to [0, \infty[$ est une fonction strictement croissante et infiniment différentiable.
3. Montrer que $\widehat{\theta}_n^{\text{MM}}$ est fortement consistant et asymptotiquement normal.
4. Montrer que le modèle $\{F_\theta : \theta > 0\}$ est dominé par la mesure

$$\mu = \lambda + \delta_c$$

où $\lambda$ désigne la mesure de Lebesgue et $\delta_c$ est la masse de Dirac en $c$.

5. Déterminer la densité de $P_\theta$ par rapport à $\mu$ et en déduire que le fonction de vraisemblance peut s'écrire sous la forme

$$L_n(x_1, \ldots, x_n; \theta) = \frac{1}{\theta^{N_c}} \exp\Big\{ -\frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^n x_i \Big\} \mathbb{1}(x_{(n)} \le c), \qquad N_c = \sum_{i=1}^n \mathbb{1}(x_i < c)$$

pour tout $x_1, \ldots, x_n \ge 0$.

6. Trouver l'estimateur du maximum de vraisemblance $\widehat{\theta}_n^{\text{MV}}$ et montrer qu'il est fortement consistant.
7. Prouver que l'EMV $\widehat{\theta}_n^{\text{MV}}$ est asymptotiquement normal.
8. Quel est le comportement de la variance limite de l'EMV lorsque $c$ tends vers $+\infty$ ? Expliquer intuitivement ce résultat.
9. (facultatif) Comparer les variances limites de $\widehat{\theta}_n^{\text{MM}}$ et de $\widehat{\theta}_n^{\text{MV}}$.

**Exercice 2. (facultatif)** Soit $I(\theta)$ l'information de Fisher du modèle $\{P_\theta : \theta \in \Theta\}$, où $\Theta$ est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Soit $g : B \to \Theta$ une fonction continument différentiable et strictement croissante définie sur un intervalle ouvert $B$. Trouver une formule qui exprime l'informtion de Fisher $J(\beta)$ du modèle $\{Q_\beta = P_{g(\beta)} : \beta \in B\}$ en fonction de $I(\cdot)$ et de la dérivée de $g$.