– Ecole Nationale de la Statistique et de l'Administration Economique –
Année 2024-2025, Deuxième Année
Macroéconomie 1

Examen final : éléments de corrigé

1 Questions de cours (6 points)

Question 1 (1 point) L'exogénéité du taux d'épargne s, et l'exogénéité du taux de progrès technique g.

Question 2 (1 point) Le climat.

Question 3 (1 point) Les rendements privés (qui mesurent à quel point la production d'une entreprise augmente suite à une hausse du capital utilisé par cette entreprise) sont strictements décroissants, les rendements sociaux (qui mesurent à quel point la production agrégée augmente suite à une hausse du capital agrégé) sont constants.

Question 4 (1 point) Cf page 70 du chapitre 5.

Question 5 (1 point) Les dépenses publiques sont un flux (elles n'ont de sens que sur un intervalle de temps donné, tout comme la consommation privée des ménages). La dette publique est un stock (elle n'a de sens qu'à un instant donné, tout comme la dette privée ou les actifs privés des ménages).

Question 6 (1 point) Parce que les générations actuelles ne se soucient pas des générations futures : elles préfèrent donc un financement des dépenses publiques par endettement présent et impôts futurs (payés par les générations futures), plutôt que par impôts présents (payés par elles-mêmes), et elles se comportent différemment dans les deux cas.

2 Problème : automation/robotisation dans le modèle de Cass-Koopmans-Ramsey (14 points)

2.1 Cas $Z = 0$

Question 7 (1 point) La deuxième contrainte est la contrainte budgétaire instantanée : entre les dates t et $t + dt$, la variation du stock d'actifs $b_{t+dt} - b_t$ est égale aux revenus financiers $r_t b_t dt$ plus les revenus salariaux $w_t dt$ moins les dépenses de consommation $c_t dt$ et moins un terme $nb_t dt$ représentant l'effet mécanique à la baisse sur le stock d'actifs par tête b_t causé par la croissance de la population. La troisième contrainte est la contrainte de solvabilité, qui empêche la valeur actualisée à la date 0 du stock d'actifs à long terme d'être négative, de façon à interdire les montages financiers à la Ponzi.

Pour le hamiltonien, la condition du premier ordre sur la variable de contrôle et la condition d'évolution de la co-variable d'état : cf slides 30-31 du chapitre 2. On en déduit facilement l'équation d'Euler.

Question 8 (1 point) Cf slide 41 du chapitre 2 pour $r_t = z_t - \delta$: à l'équilibre, chaque ménage doit être indifférent entre prêter aux autres ménages (rendement r_t) et louer du capital aux entreprises (rendement $z_t - \delta$). Le coût réel d'usage du capital z_t est égal à la productivité marginale du capital ($z_t = f'(\kappa_t)$) car les entreprises trouvent optimal de louer du capital jusqu'à ce que sa productivité marginale soit égale à son coût réel d'usage.

En utilisant $r_t = f'(\kappa_t) - \delta$ et en réécrivant l'équation d'Euler en grandeurs par unité de travail efficace, on obtient facilement l'équation différentielle donnée dans l'énoncé.

Question 9 (1 point) Cf slide 42 du chapitre 2 pour la condition d'équilibre sur le marché des biens en termes agrégés. En la réécrivant en grandeurs par unité de travail efficace, on obtient facilement l'équation différentielle donnée dans l'énoncé.

Question 10 (1,5 point) Cf slide 49 du chapitre 2 (pour la définition et pour la démonstration que κ_t et γ_t sont constants à l'état régulier). En remplaçant $\dot{\gamma_t}$ par zéro dans l'équation différentielle en $\dot{\gamma_t}$, on obtient facilement que $\kappa_t^{1-\alpha}$ est égal à $(\kappa^*)^{1-\alpha} \equiv \alpha/(\delta + \rho + \theta g)$ à l'état régulier. En remplaçant $\dot{\kappa_t}$ par zéro dans l'équation différentielle en $\dot{\kappa_t}$, on obtient que γ_t est égal à $\gamma^* \equiv (\kappa^*)^\alpha - (n + g + \delta)\kappa^*$ à l'état régulier. Le taux d'épargne est $s_t = 1 - C_t/Y_t = 1 - \gamma_t/\kappa_t^\alpha$, donc sa valeur à l'état régulier est constante et égale à $(n + g + \delta)(\kappa^*)^{1-\alpha} = \alpha(n + g + \delta)/(\delta + \rho + \theta g)$.

Toutes choses égales par ailleurs, plus le taux de préférence pour le présent ρ est élevé, moins les ménages épargnent, donc plus s^* est faible. Toutes choses égales par ailleurs, plus θ est élevé, plus l'élasticité de substitution intertemporelle $1/\theta$ est faible, plus les ménages sont réticents à laisser croître leur consommation par tête dans le temps, moins ils épargnent, et donc plus s^* est faible.

2.2 Cas $Z > 0$

Question 11 (0,5 point) La fonction F ne satisfait pas la propriété $F(K_{i,t}, 0) = 0$ pour tout $K_{i,t}$. Elle ne satisfait pas non plus la condition d'Inada $\lim_{K_{i,t}\to+\infty} F_1(K_{i,t}, A_tN_{i,t}) = 0$. Elle satisfait les autres propriétés. Elle peut se justifier par l'hypothèse que le capital (les machines) sert à la production de deux manières différentes : en étant manipulé par des travailleurs (terme $K_{i,t}^\alpha(A_tN_{i,t})^{1-\alpha}$ dans la fonction de production), et de manière autonome robotisée (terme $ZK_{i,t}$ dans la fonction de production).

Question 12 (1 point) Cf slide 16 du chapitre 2 pour le problème d'optimisation des entreprises. La condition du premier ordre par rapport à $K_{i,t}$ est donc $Z+\alpha(A_tN_{i,t}/K_{i,t})^{1-\alpha} = z_t$. Le reste de la réponse suit le raisonnement du slide 44 du chapitre 2 : $K_{i,t}/N_{i,t} = A_t[\alpha/(z_t - Z)]^{1/(1-\alpha)}$ ne dépend pas de i et vaut par conséquent $K_t/N_t = K_t/L_t$; d'où

$$\begin{aligned}
Y_t &\equiv \sum_{i=1}^I Y_{i,t} = \sum_{i=1}^I F(K_{i,t}, A_tN_{i,t}) = \sum_{i=1}^I \left[ZK_{i,t} + K_{i,t}^\alpha (A_tN_{i,t})^{1-\alpha}\right] \\
&= \sum_{i=1}^I N_{i,t}\left[ZK_{i,t}/N_{i,t} + (K_{i,t}/N_{i,t})^\alpha A_t^{1-\alpha}\right] = \sum_{i=1}^I N_{i,t}\left[ZK_t/L_t + (K_t/L_t)^\alpha A_t^{1-\alpha}\right] \\
&= N_t\left[ZK_t/L_t + (K_t/L_t)^\alpha A_t^{1-\alpha}\right] = L_t\left[ZK_t/L_t + (K_t/L_t)^\alpha A_t^{1-\alpha}\right] \\
&= ZK_t + K_t^\alpha(A_tL_t)^{1-\alpha} = F(K_t, A_tL_t).
\end{aligned}$$

Question 13 (0,5 point) La réponse à la question 7 n'est bien sûr pas modifiée (car elle ne dépend pas de la fonction de production). Celle à la question 8 est modifiée du fait qu'on a maintenant $f'(x) = Z + \alpha/x^{1-\alpha}$, d'où la nouvelle équation différentielle en $\dot{\gamma_t}$ donnée dans l'énoncé. Celle à la question 9 est modifiée du fait qu'on a maintenant $Y_t/(A_tL_t) = f(\kappa_t) = Z\kappa_t + \kappa_t^\alpha$, d'où la nouvelle équation différentielle en $\dot{\kappa_t}$ donnée dans l'énoncé.

Question 14 (2 points) On montre d'abord, exactement de la même façon que précédemment, que κ_t et γ_t sont constants à l'état régulier (le fait qu'on a maintenant $Z > 0$ et non plus $Z = 0$ ne change rien à la démonstration). En remplaçant $\dot{\gamma}_t$ par zéro dans l'équation différentielle en $\dot{\gamma}_t$, on obtient facilement que la valeur constante κ^* de κ_t à à l'état régulier est telle que $(\kappa^*)^{1-\alpha} = \alpha/(\delta + \rho + \theta g - Z)$, ce qui n'est possible que si $Z < \delta + \rho + \theta g$ (puisque $(\kappa^*)^{1-\alpha} > 0$).

Supposons maintenant que $Z < \delta + \rho + \theta g$. En remplaçant $\dot{\kappa}_t$ par zéro dans l'équation différentielle en $\dot{\kappa}_t$, on obtient que la valeur constante γ^* de γ_t à à l'état régulier est telle que

$$\begin{aligned}
\frac{\gamma^*}{\kappa^*} &= \frac{1}{(\kappa^*)^{1-\alpha}} - (n + g + \delta - Z) = \frac{\delta + \rho + \theta g - Z}{\alpha} - (n + g + \delta - Z) \\
&> \delta + \rho + \theta g - Z - (n + g + \delta - Z) = \rho - n - (1 - \theta) g > 0,
\end{aligned}$$

où la première inégalité découle de $0 < \alpha < 1$ et la seconde inégalité découle de l'hypothèse $\rho - n > (1 - \theta)g$ faite dans l'énoncé. Par conséquent, on a bien $\gamma^* > 0$.

On en déduit qu'il existe un état régulier si et seulement si $Z < \delta + \rho + \theta g$. Cette condition s'interprète de la façon suivante. Les rendements du capital sont strictement décroissants ($f'(\kappa_t) < 0$), comme chez Cass-Koopmans-Ramsey, mais ils convergent vers $Z > 0$ lorsque le stock de capital tend vers l'infini ($\lim_{\kappa_t \to +\infty} f'(\kappa_t) = Z > 0$), alors qu'ils convergent vers 0 chez Cass-Koopmans-Ramsey. Le taux d'intérêt $r_t = f'(\kappa_t) - \delta$ est donc toujours supérieur à $Z - \delta$. L'équation d'Euler implique alors que le taux de croissance de la consommation par tête c_t est toujours supérieur à $(Z - \delta - \rho)/\theta$, et donc que le taux de croissance de la consommation par unité de travail efficace γ_t est toujours supérieur à $(Z - \delta - \rho - \theta g)/\theta$. Si $Z > \delta + \rho + \theta g$, alors la consommation par unité de travail efficace γ_t augmente toujours (avec un taux de croissance au moins égal à $(Z - \delta - \rho - \theta g)/\theta$), et il ne peut donc pas y avoir d'état régulier avec γ_t constant.

La valeur du taux d'épargne à l'état régulier est

$$\begin{aligned}
1 - \frac{\gamma^*}{Z\kappa^* + (\kappa^*)^\alpha} &= 1 - \frac{(\kappa^*)^\alpha - (n + g + \delta - Z)\kappa^*}{Z\kappa^* + (\kappa^*)^\alpha} = \frac{(n + g + \delta)\kappa^*}{Z\kappa^* + (\kappa^*)^\alpha} \\
&= \frac{n + g + \delta}{Z + \frac{1}{(\kappa^*)^{1-\alpha}}} = \frac{n + g + \delta}{Z + \frac{\delta + \rho + \theta g - Z}{\alpha}} = \frac{(n + g + \delta)\alpha}{\delta + \rho + \theta g - (1 - \alpha) Z}.
\end{aligned}$$

Cette valeur dépend positivement de Z. Plus Z est grand, plus la productivité du capital est élevée, plus l'investissement (i.e. l'épargne) est rentable, et plus le taux d'épargne est élevé.

2.3 Cas $0 < Z < n + g + \delta$

Question 15 (1 point) Du fait de l'hypothèse $\rho - n > (1 - \theta)g$ faite dans l'énoncé, on a $\delta + \rho + \theta g > n + g + \delta$, donc le cas $0 < Z < n + g + \delta$ est un cas particulier du cas $0 < Z < \delta + \rho + \theta g$ (considéré dans la question précédente). Par conséquent, il existe un état régulier, et κ_t et γ_t sont constants à cet état régulier, égaux à $\kappa^* > 0$ et $\gamma^* > 0$.

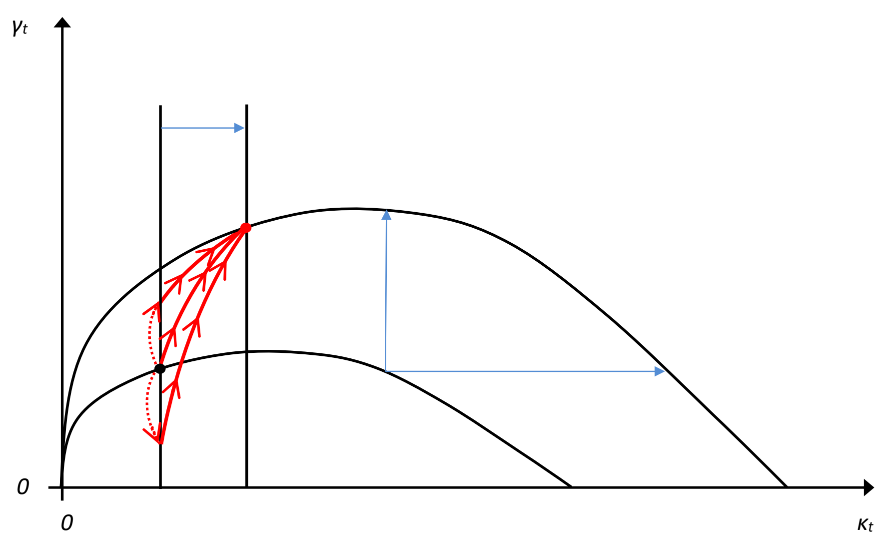
Dans le plan (κ_t, γ_t), l'équation $\dot{\gamma}_t = 0$ correspond à la droite verticale $\kappa_t = \kappa^*$, qu'on retrouve bien dans le quadrant $(\kappa_t > 0, \gamma_t > 0)$ puisque $\kappa^* > 0$. L'équation $\dot{\kappa}_t = 0$, qui est de la forme $\gamma_t = g(\kappa_t)$, correspond à une courbe en cloche dans ce même quadrant, car lorsque κ_t augmente de 0 à $+\infty$, $g'(\kappa_t)$ diminue de $\lim_{\kappa_t \to 0} g'(\kappa_t) = +\infty$ à $\lim_{\kappa_t \to +\infty} g'(\kappa_t) = -(n + g + \delta - Z) < 0$.

L'abscisse de la droite verticale est κ^* défini implicitement par $(\kappa^*)^{1-\alpha} = \alpha/(\delta + \rho + \theta g - Z)$. L'abscisse du sommet de la courbe en cloche est κ_{or} défini implicitement par $\frac{\alpha}{\kappa_{or}^{1-\alpha}} - (n + g + \delta - Z) = 0$. On a donc

$$\kappa_{or}^{1-\alpha} = \frac{\alpha}{n + g + \delta - Z} > \frac{\alpha}{\delta + \rho + \theta g - Z} = (\kappa^*)^{1-\alpha}$$

(du fait de l'inégalité $\rho - n > (1-\theta)g$ donnée dans l'énoncé), et donc $\kappa_{or} > \kappa^*$. Le stock de capital à l'état régulier est donc inférieur au stock de capital à la règle d'or, et on ne peut donc pas avoir d'inefficience dynamique. Cette absence d'inefficience dynamique est due au comportement optimisateur des ménages (qui choisissent leur taux d'épargne de manière à maximiser leur utilité intertemporelle), et ce comportement optimisateur se produit que Z soit nul ou strictement positif.

Question 16 (2 points) La hausse de Z déplace la droite verticale vers la droite, et la courbe en cloche vers le haut et vers la droite (cf flèches en bleu sur le graphique ci-dessous). Le nouveau point d'état régulier (en rouge sur le graphique ci-dessous) est caractérisé par un stock de capital et une consommation plus élevés que le point d'état régulier initial (en noir sur le graphique ci-dessous). Après la date T, il n'y a plus de chocs ni de surprises, donc l'économie est sur son nouveau sentier-selle et converge vers le nouveau point d'état régulier. A la date T, la consommation peut varier de manière discontinue, mais pas le capital, donc on reste sur l'ancienne droite verticale. Il y a donc trois possibilités, selon que le nouveau sentier-selle passe au-dessus de l'ancien point d'état régulier, ou par ce point, ou en-dessous de ce point (cf trajectoires en rouge sur le graphique ci-dessous).



La hausse de Z augmente la productivité du capital (on produit davantage en utilisant autant de capital), donc elle débouche à moyen et long termes sur davantage de production, davantage d'investissement, davantage de capital, et davantage de consommation. A court terme (i.e. à la date T), la consommation peut augmenter, rester constante, ou diminuer, selon que la hausse de l'investissement (due au fait que l'investissement est devenu plus rentable) est moins élevée que, ou égale à, ou plus élevée que la hausse de la production.

Dans chacune des deux équations différentielles, le paramètre Z et le paramètre δ n'interviennent qu'au travers de leur différence $\delta - Z$. Une hausse de Z a donc exactement le même effet qu'une baisse de δ de même ampleur. Dans les deux cas (hausse de Z ou baisse de δ), le rendement de l'investissement augmente, ce qui débouche sur davantage d'investissement, de capital, de production et (au moins à moyen et long termes) davantage de consommation.

2.4 Cas $Z > n + g + \delta$

Question 17 (1 point) Dans le sous-cas $n + g + \delta < Z < \delta + \rho + \theta g$, l'équation $\dot{\gamma_t} = 0$ correspond toujours à la droite verticale $\kappa_t = \kappa^*$, et on a toujours $\kappa^* > 0$ (puisque $Z < \delta + \rho + \theta g$). L'équation $\dot{\kappa_t} = 0$, par contre, ne correspond plus à une courbe en cloche, mais à une courbe strictement croissante : en effet, cette équation est de la forme $\gamma_t = g(\kappa_t)$ avec $g'(\kappa_t)$ qui, maintenant, diminue de $\lim_{\kappa_t \to 0} g'(\kappa_t) = +\infty$ à $\lim_{\kappa_t \to +\infty} g'(\kappa_t) = -(n + g + \delta - Z) > 0$ lorsque κ_t augmente de 0 à $+\infty$. Il n'y a donc plus de valeur finie de κ_t qui maximise $\gamma_t = g(\kappa_t)$, donc plus de valeur finie du stock de capital à la règle d'or, et on ne peut donc pas avoir d'inefficience dynamique.

Question 18 (1,5 point) Dans le sous-cas $Z > \delta + \rho + \theta g$, l'équation différentielle en $\dot{\gamma_t}$ implique

$$\frac{\dot{\gamma_t}}{\gamma_t} = \frac{1}{\theta}\left[\frac{\alpha}{\kappa_t^{1-\alpha}} - (\delta + \rho + \theta g - Z)\right] > \frac{1}{\theta}\left[Z - (\delta + \rho + \theta g)\right] > 0,$$

donc $\lim_{t \to +\infty} \gamma_t = +\infty$. L'équation différentielle en $\dot{\kappa_t}$ donne

$$\gamma_t = \kappa_t^{\alpha} + \left[Z - (n + g + \delta)\right]\kappa_t - \dot{\kappa_t},$$

où $Z - (n + g + \delta) > 0$. Le membre de gauche de cette équation tend vers l'infini au cours du temps, donc le membre de droite doit faire de même. Si $\dot{\kappa_t} < 0$ à toute date t, alors les deux premiers termes du membre de droite sont décroissants dans le temps, et il faut donc que $\lim_{t \to +\infty} \dot{\kappa_t} = -\infty$. En ce cas, on atteint la valeur $\kappa_t = 0$ en un temps fini, et à partir de ce moment il n'y a plus de capital, plus de production, et donc plus de consommation, ce qui contredit le résultat $\lim_{t \to +\infty} \gamma_t = +\infty$. Si $\dot{\kappa_t} = 0$ à toute date t, alors le membre de droite de l'équation est constant dans le temps, ce qui n'est pas possible. Il faut donc que $\dot{\kappa_t} > 0$ à toute date t. Or κ_t ne peut pas converger vers une valeur finie (car en ce cas le membre de droite convergerait ausi vers une valeur finie). Donc $\lim_{t \to +\infty} \kappa_t = +\infty$.

Le résultat $\lim_{t \to +\infty} \kappa_t = +\infty$ implique $\lim_{t \to +\infty} Y_t/(A_t L_t) = +\infty$ (puisque $Y_t/(A_t L_t) = f(\kappa_t)$). Ce dernier résultat est valable pour toute valeur du progrès technique exogène g, donc en particulier pour $g = 0$. Dans le cas particulier $g = 0$, on a donc $\lim_{t \to +\infty} Y_t/L_t = +\infty$: il y a donc croissance à long terme même en l'absence de progrès technique exogène, et le modèle est donc un modèle de croissance endogène. Cette croissance endogène est due au fait que les rendements du capital sont suffisamment proches d'être constants (Z est suffisamment grand).