TD Économie industrielle et expérimentale - Corrigé

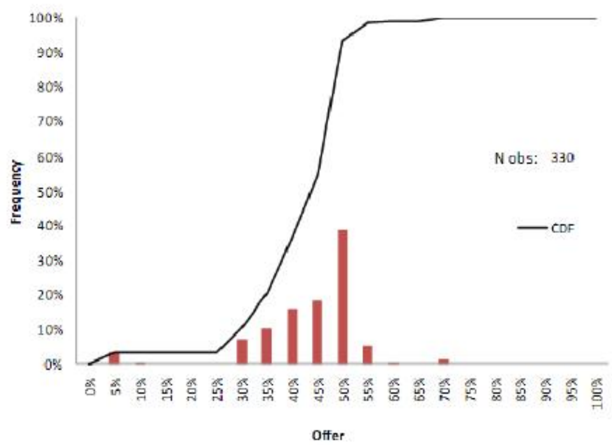
Microéconomie, deuxième année, ENSAE

1 Jeu de l'ultimatum et préférence de Fehr et Schmidt

http://gregmankiw.blogspot.fr/2012/08/monkey-dislike-unequal-pay.html

La figure ci-dessous expose les résultats d'un jeu de l'ultimatum réalisé en 1994 en Slovaquie. Le protocole de l'expérimentation proposait 300 couronnes slovaques (Sk) à négocier entre le proposant et le répondant. A titre indicatif, le salaire moyen mensuel à cette époque était de 5500 Sk. On retrouve des offres strictement positives avec une moyenne autour de 40 %.

Figure 5 – Distribution des propositions pour un enjeu de 300 Sk



Le jeu de l'ultimatum est un jeu à deux joueurs, un proposant et un répondant. Les deux joueurs se disputent le partage d'une somme d'argent donnée. Le jeu se déroule en deux étapes:

1. Le proposant offre une part (en pourcentage) du montant au répondant.

2. Le répondant accepte, ou rejette l'offre :

(a) Si l'offre est acceptée, le proposant garde $1-s$ pour lui, et le receveur reçoit s. En notant (P,R) le résultat du jeu, c'est à dire les gains respectivement du proposant et du répondant, on a ici $(P,R)=(1-s,s)$

(b) Si l'offre est rejetée, les deux joueurs ont 0 – i.e. $(P,R)=(0,0)$.

On va s'inspirer des travaux de Fehr et Schmidt et utiliser des fonctions d'utilité qui tiennent compte de la jalousie et de l'altruisme des agents. On suppose que l'utilité de l'agent $i=\{P,R\}$ s'écrit :

$$u_i = x_i - \alpha_i \max(x_j - x_i, 0) - \beta_i \max(x_i - x_j, 0)$$

où $\alpha_i \geq 0$ désigne le coefficient de jalousie, et $0 \leq \beta_i < 1$ désigne le coefficient d'altruisme. L'objectif de cet exercice est de déterminer le choix s^* du proposant en fonction des paramètres $(\alpha_P, \alpha_R, \beta_P, \beta_R)$.

Question 1: Montrer que $\forall\ (\alpha_P, \alpha_R, \beta_P, \beta_R)$, $s^* \leq \frac{1}{2}$. En déduire que α_P et β_R ne jouent aucun rôle dans la résolution du jeu.

Pour une offre s, l'utilité du proposant et du répondant sont :

$$u_P = 1 - s - \alpha_P \max(2s-1;0) - \beta_P \max(1-2s;0)$$
$$u_R = s - \alpha_R \max(1-2s;0) - \beta_R \max(2s-1;0)$$

Pour $s \geq \frac{1}{2}$, si l'offre est acceptée, l'utilité de P et de R sont :

$$u_P = 1 - s - \alpha_P(2s-1)$$
$$u_R = s - \beta_R(2s-1) = s(1-\beta_R) + \beta_R(1-s) \geq 0$$

Le répondant a toujours une utilité positive et a donc toujours intérêt à accepter l'offre $\forall s$. D'autre part, $\frac{\partial u_P}{\partial s} = -1 - 2\alpha_P \leq 0$ donc u_P est strictement décroissante en s, le proposant choisira au plus $s = \frac{1}{2}$. On en déduit $s^* \leq \frac{1}{2}$.

Question 2: Montrer que $\forall \beta_P \geq \frac{1}{2}$, $s^* = \frac{1}{2}$.

Pour $s \leq \frac{1}{2}$, si l'offre est acceptée, l'utilité de P et de R sont :

$$\begin{aligned} u_P &= 1 - s - \beta_P(1 - 2s) \\ u_R &= s - \alpha_R(1 - 2s) = s(1 + 2\alpha_R) - \alpha_R \end{aligned}$$

Le répondant participe si :

$$u_R \geq 0 \Leftrightarrow s \geq \frac{\alpha_R}{(1 + 2\alpha_R)}$$

D'autre part,

$$\frac{\partial u_P}{\partial s} = 2\beta_P - 1$$

Pour $\beta_P \geq \frac{1}{2}$ alors $\frac{\partial u_P}{\partial s} \geq 0$ donc le proposant fixe $s = \frac{1}{2}$ et on vérifie qu'avec cet équilibre le répondant souhaite participer :

$$u_R = \frac{1}{2} \geq 0$$

Question 3: Montrer que pour $\beta_P < \frac{1}{2}$, $s^* = \frac{\alpha}{1+2\alpha}$.

Le proposant maximise sont utilité sous contrainte de participation du répondant:

$$\max_{s \in [0,1/2]} 1 - s - \beta_P(1 - 2s) = 1 - \beta_P - s(1 - 2\beta_P)$$

$$\text{s.c. } s \geq \frac{\alpha_R}{(1 + 2\alpha_R)}$$

L'objectif est décroissant en s. Le proposant sature la contrainte de participation d'où :

$$s = \frac{\alpha_R}{(1 + 2\alpha_R)} < \frac{1}{2}$$

Plus le proposant est altruiste (β_P grand et donc $\geq \frac{1}{2}$) plus il est généreux donne $1/2$ au répondant. Lorsqu'il est peut altruiste, il donnera davantage si le répondant valorise l'écart, i.e. il est égoïste (α_R grand).

Information imparfaite: Considérons désormais que le proposant ne connaît pas le coefficient de jalousie α_R du répondant, mais seulement sa fonction de distribution (resp. densité) notée F (resp. f).

Question 4: Écrire dans ce cas pour tout $s \leq \frac{1}{2}$, l'espérance d'utilité du proposant.

Pour qu'il y ait incertitude, on se situe forcément dans le cas $\beta_P \leq \frac{1}{2}$. En effet, sinon $s = \frac{1}{2} \forall \alpha_R$). Pour $s \leq \frac{1}{2}$, si l'offre est acceptée, l'utilité de P et de R sont :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(u_P) &= u_P \mathbb{P}(u_R \geq 0) \\
&= u_P \mathbb{P}(s \geq \frac{\alpha_R}{1+2\alpha_R}) \\
&= u_P \mathbb{P}(\alpha_R \leq \frac{s}{(1-2s)}) \\
&= [1 - \beta_P + (2\beta_P - 1)s] F(\frac{s}{1-2s})
\end{aligned}$$

Question 5: En supposant que $\frac{F}{f}$ est croissante et que la solution du programme est intérieure ($s^* > 0$) et unique, montrer que s^* est croissante en β. (Indication : poser $\kappa^*(s) = \frac{s}{1-2s}$)

La CPO du programme précédent est :

$$\frac{\partial \mathbb{E}(s)}{\partial s} = (2\beta_P - 1) F(\frac{s}{1-2s}) + [1 - \beta_P + (2\beta_P - 1)s] f(\frac{s}{1-2s}) \frac{1-2s+2s}{(1-2s)^2}$$

Posons :

$$\kappa^*(s) = \frac{s}{1-2s} \Leftrightarrow s^*(\kappa) = \frac{\kappa}{1+2\kappa}$$

On remarque :

$$\frac{\partial \kappa^*(s)}{\partial s} = \frac{1}{(1-2s)^2} \geq 0$$

Alors :

$$\frac{\partial \mathbb{E}(s)}{\partial s} = (2\beta_P - 1) F(\kappa) + [1 - \beta_P + (2\beta_P - 1)\frac{\kappa}{1+2\kappa}] f(\kappa) \frac{1}{(1-2s)^2}$$

Or :

$$(1-2s)^2 = \frac{1}{(1+2\kappa)^2}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbb{E}(s)}{\partial s} &= 0 \Leftrightarrow \\
(1-2\beta_P)\frac{F(\kappa)}{f(\kappa)} &= [1-\beta_P + (2\beta_P - 1)\frac{\kappa}{1+2\kappa}](1+2\kappa)^2 \\
&= (1-\beta_P)(1+2\kappa)^2 + (2\beta_P-1)\kappa(1+2\kappa) \\
&= (1-\beta_P)(1+4\kappa+4\kappa^2) + (2\beta_P-1)(\kappa+2\kappa^2) \\
&= 2\kappa^2 + \kappa(3-2\beta_P) + (1-\beta_P)
\end{aligned}$$

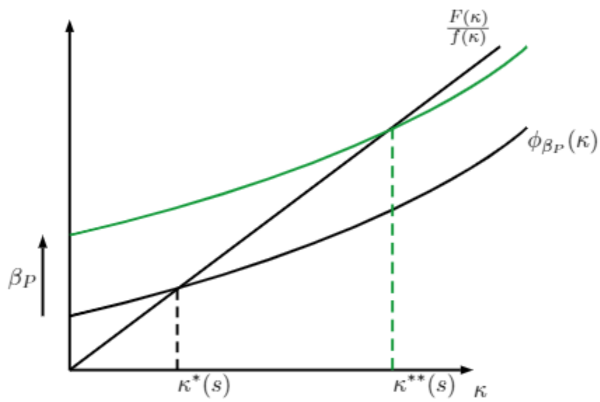
D'où :

$$\frac{F(\kappa)}{f(\kappa)} = \Phi_{\beta_P}(\kappa) = \frac{2\kappa^2 + \kappa(3-2\beta_P) + (1-\beta_P)}{(1-2\beta_P)}$$

On remarque que :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi_{\beta_P}(\kappa)}{\partial \beta_P} &= \frac{4\kappa^2}{(1-2\beta_P)^2} + \frac{-2\kappa(1-2\beta_P)+2\kappa(3-2\beta_P)}{(1-2\beta_P)^2} + \frac{-(1-2\beta_P)+2(1-\beta_P)}{(1-2\beta_P)^2} \\
&= \frac{4\kappa^2}{(1-2\beta_P)^2} + \frac{4\kappa}{(1-2\beta_P)^2} + \frac{1}{(1-2\beta_P)^2} \geq 0
\end{aligned}$$

D'abord, $\frac{F(0)}{f(0)}$ est nul tandis que $\Phi_{\beta_P}(0) = \frac{1-\beta_P}{1-2\beta_P} \geq 0$. On peut donc représenter $\Phi_{\beta_P}(\kappa)$ et $\frac{F(\kappa)}{f(\kappa)}$ sur un même graphique, de la façon suivante (courbes noires) :



On suppose une solution intérieure et unique. L'unique point d'intersection représente alors $\kappa^*(s) = \frac{s}{1-2s}$. Si à κ donné on accroît β_P, alors $\frac{F(\kappa)}{f(\kappa)}$ ne bouge pas et $\Phi_{\beta_P}(\kappa)$ se translate vers le haut, courbe verte ($\frac{\partial \Phi_{\beta_P}(\kappa)}{\partial \beta_P} \geq 0$). Le nouveau point d'intersection est $\kappa^{**}(s) \geq \kappa^*(s)$. Or $\frac{\partial \kappa^*(s)}{\partial s} \geq 0$, ce qui implique $s^{**}(\kappa) \geq s^*(\kappa)$. En conclusion, lorsque β_P s'accroit, $s^*(\kappa)$ augmente. Cela est cohérent avec la réponse à la question 3.

2 Jeux vidéo et consommateurs naïfs (P 2015-2016)

On considère un modèle a deux périodes. Des entreprises de jeux vidéo proposent chacune un jeu au début de la période 1 et une mise à jour au début de la période 2. La qualité de base à la période 1 est notée q_1, celle de la mise à jour est notée q_2. Le prix de base du jeu est noté p et le prix de la mise à jour est noté m.

Les entreprises sont en concurrence à la période 1, mais chacune est en monopole pour la mise à jour de son propre jeu à la période 2. Le coût de servir un client est noté c, le coût de fournir la mise à jour est nul, les coûts marginaux de la qualité (augmenter q_1 et q_2) sont normalisés à zéro.

Tous les consommateurs sont présents dès le début de la période 1. Ils sont tous identiques à cette date. Pour la période 1, ils retirent d'un jeu de qualité q l'utilité $v_1(q)$. Tous croient qu'ils seront lassés du jeu à la fin de cette première période et qu'ils n'en retireront plus aucune utilité ensuite. En réalité, certains consommateurs, dits "naïfs", vont découvrir au début de la seconde période, à leur surprise, qu'ils ont pris goût au jeu et qu'ils retirent l'utilité $v_2(q)$ d'une qualité q en période 2.

Les autres consommateurs, qu'on appelle les "sophistiqués", sont effectivement lassés du jeu à la fin de la première période. La fraction des consommateurs naïfs dans la population est notée α. Les fonctions d'utilité à chaque période, $i = 1, 2$, sont données par

$$v_i(q) = \begin{cases} q - q^2/(2\bar{q}_i) & \text{si } q \leq \bar{q}_i \\ \bar{q}_i/2 & \text{si } q \geq \bar{q}_i, \end{cases}$$

avec $0 < \bar{q}_1 < \bar{q}_2$.

Le temps n'est pas escompté entre les deux périodes, on ajoute simplement (s'il y a lieu) les utilités et les profits de chaque période.

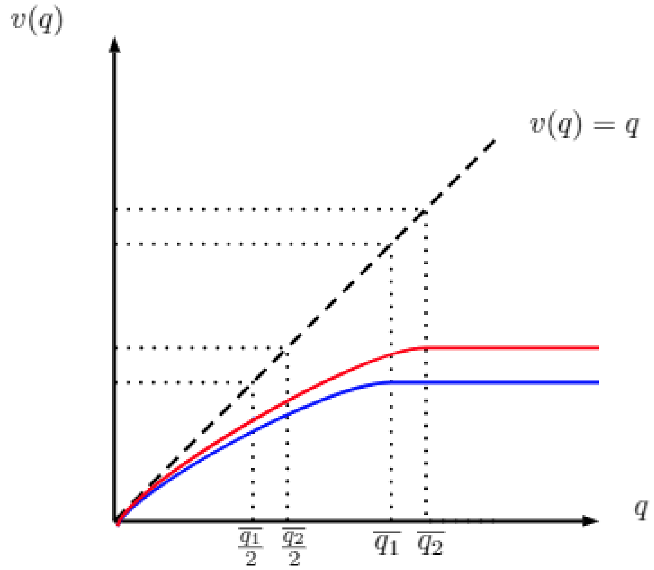
1. Représenter graphiquement les fonctions d'utilité et commenter leur forme. On s'intéressera aux utilités marginales $v_1'(q)$ et $v_2'(q)$.

Les paramètres $\bar{q}_1$ et $\bar{q}_2$ sont les niveaux de qualité à partir desquels améliorer la qualité n'apporte plus d'utilité supplémentaire aux consommateurs. Au delà l'utilité est constante à $\bar{q}_1/2$ et $\bar{q}_2/2$. D'autre part, on note :

$$\frac{\partial v_i(q)}{\partial q} = 1 - \frac{q}{\bar{q}_i} \text{ si } q \leq \bar{q}_i$$

$$\frac{\partial v_i(q)^2}{\partial^2 q} = -\frac{1}{\bar{q}_i} \text{ si } q \leq \bar{q}_i$$

Avant les seuils $\bar{q}_1$ et $\bar{q}_2$, les courbes d'utilité sont donc croissantes concaves. Comme $\bar{q}_1 \leq \bar{q}_2$, les courbes sont plus pentue pour la seconde période. Le graphique ci-dessous représente en bleu l'utilité de première période et en rouge l'utilité de seconde période



2. Quelle utilité totale U_s un consommateur sophistiqué retire-t-il d'une offre (q_1, q_2, p, m)? Au début de la période 1, quelle utilité U_n^a un consommateur naïf pense-t-il retirer de cette offre?

Les sophistiqués anticipent et retirent vraiment l'utilité:

$$U_s = v_1(q_1) - p$$

Les naïf pensent (anticipent) retirer l'utilité:

$$U_n^a = v_1(q_1) - p$$

3. Montrer qu'au début de la période 2 un consommateur naïf achète la mise à jour si et seulement si $v_2(q_2) - m \geq v_2(q_1)$. En déduire le prix m auquel l'entreprise propose la mise à jour. Finalement, quelle utilité totale U_n un consommateur naïf retire-t-il *vraiment* d'une offre (q_1, q_2, p)?

En début de second période, un naïf sera en réalité intéressé par continuer à jouer, et achètera la mise à jour si celle-ci augmente son utilité par rapport à continuer de jouer avec la version de base :

$$v_2(q_2) - m \geq v_2(q_1)$$

La firme est en monopole sur la mise à jour, elle maximise son profit $\pi = \alpha m$ sous contrainte de participation du naïf ci-dessus. Elle fixe :

$$m = v_2(q_2) - v_2(q_1)$$

Finalement la *vraie* utilité du naïf si il achète la mise à jour est

$$U_n = \underbrace{v_1(q_1) - p}_{\text{Période 1}} + \underbrace{v_2(q_2) - m}_{\text{Période 2}}$$
$$U_n = v_1(q_1) - p + v_2(q_1)$$

4. Écrire le profit espéré par client π généré par une offre (q_1, q_2, p), en fonction de q_1, q_2, p, α et c.

Les entreprises perçoivent le prix de la mise à jour seulement sur les naïfs :

$$\pi = p - c + \alpha m = p + \alpha[v_2(q_2) - v_2(q_1)] - c$$

5. Calculer le surplus total (basé sur les profits des entreprises et les utilités réellement obtenues par les agents), en fonction de q_1, q_2, α et c. Déterminer les qualités q_1^{**} et q_2^{**} qui maximisent ce surplus total.

$$\begin{aligned} W &= \alpha U_n + (1-\alpha)U_s + \pi \\ &= \alpha[v_1(q_1) - p + v_2(q_1)] + (1-\alpha)[v_1(q_1) - p] + p + \alpha[v_2(q_2) - v_2(q_1)] - c \\ &= v_1(q_1) + \alpha v_2(q_2) - c \end{aligned}$$

Les qualité de premier rang sont donc: $q_1^{**} = \bar{q}_1$ et $q_2^{**} = \bar{q}_2$.

6. L'équilibre concurrentiel est défini comme une situation où les entreprises ne font pas de profit et où aucune entreprise ne peut proposer une nouvelle offre (q_1, q_2, p, m) qui attire des consommateurs et génère un profit positif.Calculer p à l'équilibre concurrentiel, en fonction de q_1, q_2, α et c. Commenter la position du prix par rapport au coût.

La condition de zéro-profit donne :

$$p = c - \alpha[v_2(q_2) - v_2(q_1)]$$

Comme $m \geq 0$ alors $v_2(q_2) \geq v_2(q_1)$ et $p \leq c$. Le prix est en-dessous du coût marginal car les firmes exploitent ex-post leur pouvoir de monopole sur les naïfs.

7. Calculer $q_1^\star$ et $q_2^\star$, l'équilibre qui maximise l'attractivité de l'offre de jeux vidéo sous contrainte de positivité du profit, en fonction de α, $\bar{q}_1$ et $\bar{q}_2$. Comparer avec q_1^{**} et q_2^{**} et commenter.

Les consommateurs sophistiqués ne consomment qu'en première période et les naïfs pensent ne consommer qu'en première période également. L'entreprise maximise son attractivité en maximisant l'espérance d'utilité, sous contrainte de positivité du profit sur les deux périodes :

$$\max_{q_1,q_2,p} (1-\alpha)U_s + \alpha U_n^a = v_1(q_1) - p$$
$$\text{s.c. } p \geq c - \alpha[v_2(q_2) - v_2(q_1)]$$

L'objectif est strictement décroissant en prix : la contrainte est saturée à l'équilibre. D'où :

$$\max_{q_1,q_2} v_1(q_1) + \alpha[v_2(q_2) - v_2(q_1)] - c$$

La condition du premier ordre sur q_2 donne :

$$\alpha v_2'(q_2^\star) = 0 \Leftrightarrow \alpha \left[\frac{\bar{q}_2 - q_2^\star}{\bar{q}_2}\right] = 0$$

La qualité de la mise à jour est efficace: $q_2^\star = \bar{q}_2 = q_2^{**}$.

$$\begin{aligned}\alpha v_2'(q_1^\star) = v_1'(q_1^\star) &\Leftrightarrow \alpha \left[\frac{\bar{q}_2 - q_1^\star}{\bar{q}_2}\right] = \left[\frac{\bar{q}_1 - q_1^\star}{\bar{q}_1}\right] \\ &\Leftrightarrow \alpha \bar{q}_1 \bar{q}_2 - \alpha \bar{q}_1 q_1^\star = \bar{q}_2 \bar{q}_1 - \bar{q}_2 q_1^\star \\ &\Leftrightarrow q_1^\star = \bar{q}_1 \; \frac{1-\alpha}{1-\alpha\bar{q}_1/\bar{q}_2} < \bar{q}_1 = q_1^{**}\end{aligned}$$

En revanche, comme $\bar{q}_1 \leq \bar{q}_2$, la qualité de base est distordue vers le bas pour maximiser l'exploitation des naïfs.

3 Marché biface avec paiement entre utilisateurs (P 2019-2020)

Une plateforme en monopole propose de mettre en relation deux populations d'utilisateurs, $\bar{N}_B$ acheteurs potentiels d'un côté, $\bar{N}_S$ vendeurs potentiels de l'autre. La plateforme facture une cotisation au moment de l'adhésion: A_B pour les acheteurs, A_S pour les vendeurs. Elle prélève également une commission sur chaque transaction réalisée entre un acheteur et un vendeur: a_B payée par l'acheteur, a_S payée par le vendeur. On note $a = a_B + a_S$ la commission totale par transaction.

Un acheteur achète au plus une unité à chaque vendeur. Une transaction consiste donc en l'échange d'une unité (un objet) entre un acheteur et un vendeur. Au moment d'adhérer à la plateforme, les vendeurs ne connaissent pas le coût c du bien qu'ils auront à vendre. De même, au moment d'adhérer, les acheteurs ne connaissent pas leur valorisation v pour les biens vendus sur la plateforme. Une fois les acheteurs et les vendeurs inscrits, les valorisations des acheteurs et les coûts des vendeurs sont tirés dans les lois de fonction de répartition $F_B(v)$ et $F_S(c)$, qui sont connues de tous dès le début du jeu.

Les évènements se déroulent comme suit:

1. La plateforme fixe ses tarifs A_B, A_S, a_B, a_S;
2. Les utilisateurs potentiels décident de s'inscrire sur la plateforme. On note N_B et N_S les nombres d'acheteurs et de vendeurs qui s'inscrivent;
3. Les acheteurs apprennent leur valorisation et les vendeurs apprennent leur coût. Chaque vendeur j est mis en relation avec chaque acheteur i;

4. Le vendeur j, connaissant c_j mais pas v_i, propose à l'acheteur i un prix p à prendre ou à laisser;

5. Si l'acheteur i accepte, la transaction a lieu avec le vendeur j au prix p, la plateforme facturant a_B à l'acheteur (en plus du prix p) et a_S et au vendeur. Si l'acheteur refuse, la transaction n'a pas lieu.

1. On se place à l'étape 4 du jeu. On considère la rencontre entre un acheteur i et un vendeur j inscrits sur la plateforme. A ce stade, les deux parties ont déjà payé la cotisation d'abonnement A_B et A_S. Toutes les quantités étudiées dans cette question sont relatives à la transaction qui peut avoir lieu entre ces deux parties.

1.a. A quelle condition sur a_B, v_i et p l'acheteur accepte-t-il le prix proposé par le vendeur? En utilisant la fonction F_B, écrire la probabilité que la transaction ait lieu. Ecrire le profit espéré du vendeur j en fonction de p, a_B, a_S et c_j.

Dans la suite , on suppose que les valorisations suivent une distribution exponentielle: $F_B(v) = 1 - \exp(-\lambda v)$, où $\lambda > 0$ est un paramètre connu de tous.

1.b. Déterminer le prix proposé p par le vendeur en fonction de a_B, a_S, c_j et λ.

1.c. Si la transaction a lieu, donner le surplus de l'acheteur $u_B(v_i, c_j; a, \lambda)$ et le profit du vendeur $\pi_S(c_j; a, \lambda)$. Quelle partie supporte, dans les faits, les commissions prélevées par la plateforme sur chaque transaction réalisée?

1.d. A quelle condition sur v_i, c_j, a et λ la transaction a-t-elle lieu? Représenter la région correspondante dans le plan (c_j, v_i).

1.a. L'acheteur accepte le prix p si et seulement si: $v_i \geq p + a_B$. La probabilité que la transaction ait lieu est donc $1 - F_B(p + a_B)$. Le profit espéré du vendeur est

$$\pi_S = (p - a_S - c_j)\,[1 - F_B(p + a_B)].$$

1.b. Dans le cas de la distribution exponentielle, le profit du vendeur est

$$\pi_S = (p - a_S - c_j)\, e^{-\lambda(p + a_B)},$$

qui atteint son maximum en

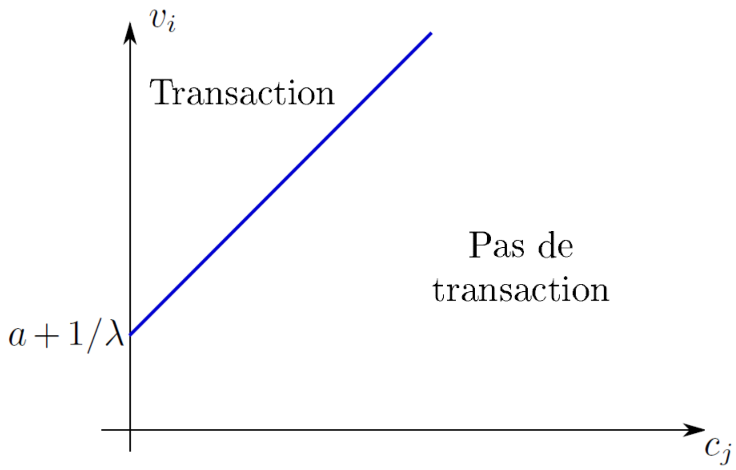
$$p = a_S + c_j + 1/\lambda.$$

1.c. Si la transaction a lieu, le surplus de l'acheteur et le profit du vendeur sont donnés par:

$$u_B(v_i, c_j; a, \lambda) = v_i - c_j - a - 1/\lambda$$
$$\pi_S(c_j; a, \lambda) = 1/\lambda.$$

Le vendeur répercute la commission qu'il paie, a_S, sur l'acheteur au travers du prix de l'objet. L'acheteur supporte donc l'intégralité des commissions. Seule la commission totale a compte dans cet environnement.

1.d. La transaction a lieu si et seulement si $u_B \geq 0$, c'est-à-dire si et seulement si $v_i \geq c_j + a + 1/\lambda$. La région correspondante est représentée sur la Figure 3.



La transaction a lieu si $v_i \geq c_j + a + 1/\lambda$

2. On se place maintenant à l'étape 2 du jeu.

2.a Soit $X(a; \lambda)$ la probabilité qu'une transaction ait lieu entre un acheteur et un vendeur inscrits sur la plateforme. Exprimer $X(a; \lambda)$ comme une intégrale sur v_i et c_j.[1]

2.b. Exprimer de la même manière le gain espéré $U_B(a; \lambda)$ qu'un acheteur retire de la présence d'un vendeur sur la plateforme et le profit espéré $\Pi_S(a; \lambda)$ qu'un vendeur retire de la présence d'un acheteur sur la plateforme.

2.a. La probabilité qu'une transaction ait lieu entre un acheteur et un vendeur inscrits sur la plateforme est:

$$X(a; \lambda) = \Pr(v_i - c_j \geq a + 1/\lambda) = \iint_{v_i - c_j \geq a+1/\lambda} \mathrm{d}F_B(v_i)\,\mathrm{d}F_S(c_j).$$

2.b. Pour un acheteur, le gain espéré par vendeur présent sur la plateforme est

$$U_B(a; \lambda) = \iint_{v_i - c_j \geq a+1/\lambda} [v_i - c_j - a - 1/\lambda]\,\mathrm{d}F_B(v_i)\,\mathrm{d}F_S(c_j).$$

[1] On suppose que les coûts c_j et les valorisations v_i sont indépendants.

Pour un vendeur, le gain espéré par acheteur présent sur la plateforme est

$$\Pi_S(a;\lambda) = \frac{1}{\lambda} X(a;\lambda).$$

3. On suppose que les utilités pour un acheteur potentiel et pour un vendeur potentiel de devenir membre de la plateforme sont respectivement données par

$$\begin{cases} V_B = -A_B + U_B(a;\lambda)N_S + \varepsilon_B \\ V_S = -A_S + \Pi_S(a;\lambda)N_B + \varepsilon_S, \end{cases}$$

où ε_B et ε_S sont des perturbations qui suivent des distributions de fonction de répartition Φ_B et Φ_S. On suppose qu'un acheteur potentiel (respectivement un vendeur potentiel) adhère à la plateforme si et seulement si $V_B \geq 0$ (respectivement $V_S \geq 0$).

Exprimer le nombre d'acheteurs qui s'inscrivent, N_B, en fonction de $\bar{N}_B, A_B, N_S$ et $U_B(a;\lambda)$. De même, exprimer le nombre de vendeurs qui s'inscrivent, N_S, en fonction de $\bar{N}_S, A_S, \Pi_S(a;\lambda)$ et N_B.

3. Les demandes d'adhésions de chaque côté du marché sont déterminées par le système:

$$\begin{cases} N_B = \bar{N}_B.\left[1 - \Phi_B(A_B - U_B(a;\lambda)N_S)\right] \\ N_S = \bar{N}_S.\left[1 - \Phi_S(A_S - \Pi_S(a;\lambda)N_B)\right]. \end{cases} \tag{1}$$

Les demandes N_B et N_S dépendent des trois prix A_B, A_S et a.

4. La plateforme supporte un coût C_B^P par acheteur inscrit et un coût C_S^P par vendeur inscrit. Elle supporte de plus un coût c^P pour chaque transaction réalisée.

4.a. Exprimer le nombre espéré de transactions qui ont lieu sur la plateforme en fonction de $X(a;\lambda)$, N_B et N_S.

4.b. Ecrire le profit espéré de la plateforme, Π_P, en fonction de $A_S, A_B, a, C_B^P, C_S^P$, $c^P, X(a;\lambda), N_B$ et N_S.

4.c. Le surplus total créé par la présence d'un acheteur et d'un vendeur sur la plateforme s'écrit

$$W(a;\lambda) = w(a;\lambda) - C_B^P - C_S^P,$$

où $w(a;\lambda)$ est le surplus total espéré créé par la transaction qui peut se réaliser entre l'acheteur et le vendeur. Exprimer $w(a;\lambda)$ comme une intégrale sur v_i et c_j.

4.a. Le nombre espéré de transactions qui ont lieu sur la plateforme est $X(a;\lambda)N_BN_S$.

4.b. Le profit espéré de la plateforme est donc

$$\Pi_P(A_B, A_S, a) = \left(A_B - C_B^P\right) N_B + \left(A_S - C_S^P\right) N_S + \left(a - c^P\right) X(a;\lambda) N_B N_S, \quad (2)$$

où les demandes N_B et N_S sont données par (1) et dépendent de (A_B, A_S, a).

4.c. Le surplus total espéré créé par la transaction qui peut se réaliser entre l'acheteur et le vendeur est

$$\begin{aligned} w(a;\lambda) &= \iint_{v_i - c_j \geq a + 1/\lambda} \left\{[v_i - c_j - a - 1/\lambda] + [1/\lambda] + [a - c^P]\right\} \mathrm{d}F_B(v_i)\,\mathrm{d}F_S(c_j) \\ &= \iint_{v_i - c_j \geq a + 1/\lambda} \left\{v_i - c_j - c^P\right\} \mathrm{d}F_B(v_i)\,\mathrm{d}F_S(c_j). \end{aligned}$$

Les trois termes entre crochets ci-dessus représentent respectivement le surplus de l'acheteur, le profit du vendeur et le profit de la plateforme si la transaction se réalise.

5.a Montrer que le profit de la plateforme se réécrit:

$$\Pi_P = \left(A_B - U_B(a;\lambda)N_S - C_B^P\right) N_B + \left(A_S - \Pi_S(a;\lambda)N_B - C_S^P\right) N_S + w(a;\lambda) N_B N_S.$$

5.b. On admet que les demandes d'adhésion données par (1) sont contrôlées par les cotisations A_B et A_S, c'est-à-dire que pour tout niveau de la cotisation par transaction a l'application $(A_B, A_S) \to (N_B, N_S)$ est bijective.

Montrer que le niveau a^* de la commission totale a qui maximise le profit de la plateforme est aussi celui qui maximise $w(a;\lambda)$. Donner ce niveau en fonction de c^P et λ. Quelle est la fonction économique de la commission par transaction?

5.c. Montrer comment le problème se ramène au cas traité dans le cours. Expliquer qualitativement la démarche pour déterminer les cotisations à l'adhésion A_B et A_S.

5.a. La preuve consiste à ajouter et à retrancher à l'expression du profit de la plateforme la partie du surplus causée par les transaction qui concerne l'acheteur et le vendeur:

$$N_B N_S \iint_{v_i - c_j \geq a + 1/\lambda} \{v_i - c_j - a\} \,\mathrm{d}F_B(v_i)\,\mathrm{d}F_S(c_j).$$

5.b. Par hypothèse, quel que soit le niveau de la commission par transaction a, les nombres d'acheteurs et de vendeurs, N_B at N_S, sont controlés par les cotisations fixes A_B et A_S. Il s'ensuit que lorsqu'on fait varier a, on peut faire varier parallèlement les cotisations fixes A_B et A_S de manière à ce que N_B et N_S restent fixes, et donc également (voir (1)) que les quantités $A_B - U_B(a;\lambda)N_S$ et $A_S - \Pi_S(a;\lambda)N_B$ restent fixes, et donc encore que les deux premiers termes du profit de la plateforme restent fixes.

Quand elle maximise son profit par rapport à a, la plateforme peut donc considérer que N_B, N_S, $A_B - U_B(a;\lambda)N_S$ et $A_S - \Pi_S(a;\lambda)N_B$ sont donnés. Elle doit donc maximiser sur a le surplus total par paire (acheteur inscrit, vendeur inscrit) $w(a;\lambda)$. Pour cela, la plateforme choisit

$$a^* = c^P - 1/\lambda. \tag{3}$$

Ainsi, toute les transactions efficaces, c'est-à-dire toutes les transactions pour lesquelles $v_i - c_j - c^P$ est positif, auront lieu. Ce qui s'écrit formellement: $X(a^*;\lambda) = \Pr(v_i - c_j - c^P \geq 0)$.

La plateforme fixe donc la commission totale par transaction à un niveau qui est inférieur à son coût par transaction c^P. Autrement dit, elle subventionne les transactions pour contrecarrer la distortion de monopole $1/\lambda$, c'est-à-dire pour compenser le fait que les vendeurs fixent des prix trop élevés au regard de l'efficacité économique. (Le prix de monopole des vendeurs conduirait, si la plateforme n'agissait pas, à éliminer des transactions efficaces.)

5.c. On retrouve l'intuition souvent vue en cours. Le monopole n'a pas intérêt à distordre les transactions quand il peut récupérer le surplus grâce aux parties fixes des paiements. La plateforme étant en monopole, elle récupère tout le surplus créé au travers des cotisations d'adhésion A_B et A_S. D'après (2), le profit de la plateforme peut se réécrire:

$$\Pi_P = \left(A_B - C_B^P\right) N_B + \left(A_S - C_S^P\right) N_S + \mu N_B N_S,$$

où μ est donné par

$$\mu = (a^* - c^P)X(a^*;\lambda) = -\Pr(v_i - c_j - c^P \geq 0)/\lambda < 0,$$

et où, d'après les équations de demande (1), les nombres d'utilisateurs inscrits sont donnés par

$$\begin{cases} N_B = \bar{N}_B.\left[1 - \Phi_B(A_B - b_B N_S)\right] \\ N_S = \bar{N}_S.\left[1 - \Phi_S(A_S - b_S N_B)\right]. \end{cases} \tag{4}$$

avec

$$b_B = U_B(a^*;\lambda) \quad \text{et} \quad b_S = \Pi_S(a^*;\lambda).$$

On retrouve ici la même configuration que dans le cours avec des bénéfices par vendeur (pour les acheteurs) et par acheteur (pour les vendeurs) exogènes et constants (respectivement b_B et b_S). La seule différence est le nouveau terme $\mu N_B N_S$ dans la fonction de profit.

Pour mémoire, rappelons la méthode de résolution vue en cours pour trouver les cotisations A_B et A_S. On écrit que la différentielle du profit par rapport à A_B et A_S:

$$\mathrm{d}\Pi_P = (\,\mathrm{d}N_B \ \ \mathrm{d}N_S) \begin{pmatrix} A_B - C_B^P + \mu N_S \\ A_S - C_S^P + \mu N_B \end{pmatrix} + (\,\mathrm{d}A_B \ \ \mathrm{d}A_S) \begin{pmatrix} N_B \\ N_S \end{pmatrix} = 0$$

est nulle. La différentielle de la fonction de demande $(\,\mathrm{d}N_B \ \ \mathrm{d}N_S)$ s'obtient en différenciant le système de demande (4) par rapport à A_B et A_S. Les calculs conduisent au même résultat que celui vu en cours, par exemple pour le tarif côté acheteurs:

$$\frac{A_B - C_B^P + b_S N_S + \mu N_S}{A_B} = \frac{1}{\eta_B},$$

où η_B est l'élasticité de la demande des acheteurs (à nombre de vendeurs fixé)

$$\eta_B = -\frac{\partial \ln N_B}{\partial \ln A_B}_{|N_S} = \frac{A_B \bar{N}_B \Phi_B'}{N_B}.$$

Le coût économique d'un acheteur supplémentaire est donc: $C_B^P - \mu N_S - b_S N_S$. La seule différence avec la formule du cours est le terme supplémentaire $-\mu N_S > 0$, qui correspond au coût pour la plateforme de subventionner les transactions.

4 Mécanisme de vente par rationnement (P2021-2022)

Un vendeur en monopole fait face à une population de N consommateurs potentiels. Chaque consommateur achète au plus une unité du bien. Les acheteurs sont de deux types:

- $\underline{N}$ d'entre eux sont prêts à payer $\underline{v}$ pour le bien;
- $\bar{N}$ d'entre eux sont prêts à payer $\bar{v}$ pour le bien;

avec $N = \underline{N} + \bar{N}$ et $0 < \underline{v} < \bar{v}$.

Le vendeur n'observe pas le type des acheteurs. Il dispose de K unités à vendre, avec $\bar{N} < K < N$. Il cherche à maximiser sa recette totale.

On suppose dans tout l'exercice que: $\bar{N}\bar{v} < N\underline{v}$.

1. Représenter graphiquement dans le plan (q, p) la fonction de demande agrégée $q = D(p)$, qui donne le nombre total d'unités vendues pour chaque valeur possible du prix p.

> L'exercice est tiré de l'article "Monopoly pricing, optimal randomization and resale", par Simon Loertscher et Ellen V. Muir, Journal of Political Economy, 2022.
>
> La fonction de demande est représentée sur la Figure 1 ci-dessous.

2. On note $p = P(q)$ la fonction inverse de demande, c'est-à-dire la fonction réciproque de la fonction $D(p)$ introduite à la question précédente.

Représenter graphiquement l'allure de la fonction de recettes $R(q) = qP(q)$. Pour quelle valeur de q la recette $R(q)$ est-elle maximale?

> La fonction de recettes est représentée sur la Figure 2 ci-dessous. Elle atteint son maximum en $q = N$. Son maximum vaut $N\underline{v}$.

3. On suppose dans cette question que le monopole affiche un prix p et qu'en fonction de ce prix chaque consommateur décide d'acheter une unité ou non.

Déterminer le prix et la quantité de monopole en fonction de K. Le monopole vend-il toutes ses unités? Donner sa recette totale à l'optimum.

Indication: On distinguera selon que K est plus grand ou plus petit que $Q^* = \bar{N}\bar{v}/\underline{v}$.

> Si $K \leq Q^*$, le monopole affiche le prix $\bar{v}$ et vend $\bar{N}$ unités, c'est-à-dire une unité à chaque consommateur de type $\bar{v}$. Il réalise une recette totale de $\bar{v}\bar{N}$. Il ne vend pas donc pas toutes ces unités.
> Si $K \geq Q^*$, le monopole affiche le prix $\underline{v}$, vend toutes ses unités, et réalise une recette totale de $\underline{v}K$.
> Pour $K = Q^*$, le vendeur est indifférent entre les deux situations précédentes.

4. On suppose maintenant que le monopole est capable de s'engager sur un mécanisme de rationnement. Il propose deux options aux consommateurs:

- payer le prix $\bar{p}$ en échange d'une unité d'une manière certaine;

- ou participer à une loterie: si le consommateur gagne, il a accès à une unité au prix $\underline{p}$; s'il perd, il n'a pas accès au bien et il ne paie rien. Le consommateur gagne avec probabilité $\underline{x} \leq 1$.

Les acheteurs sont neutres vis-à-vis du risque. Ceux qui choisissent la seconde option sont rationnés : seule une fraction $\underline{x}$ d'entre eux (tirée au hasard) a accès au bien.

a) Ecrire les contraintes d'incitation qui assurent que les consommateurs de type $\bar{v}$ choisissent la première option et que les consommateurs de type $\underline{v}$ choisissent la seconde.

b) On admet qu'à l'optimum: $\underline{p} = \underline{v} < \bar{p}$.[2] En déduire, en fonction de $\underline{v}, \bar{v}$ et $\underline{x}$, la valeur de $\bar{p}$ qui est optimale pour le vendeur.

c) Soit Q le nombre d'unités vendues avec ce mécanisme. Écrire Q en fonction de $\bar{N}$, N et $\underline{x}$.

d) Écrire la recette réalisée par le vendeur, R, en fonction de $\bar{N}\bar{v}$, $N\underline{v}$ et $\underline{x}$.

e) Donner la valeur optimale de $\underline{x}$ en fonction de $\underline{N}, \bar{N}$ et K.

f) Représenter la recette réalisée en fonction de K sur la même figure que celle de la question 2. Décrire l'impact du mécanisme pour le vendeur et pour les deux types de consommateurs, selon que K est plus petit ou plus grand que Q^*.

a) Les contraintes d'incitation des hauts types et des bas types sont respectivement:

$$\bar{v} - \bar{p} \geq \underline{x}(\bar{v} - \underline{p}) \quad \text{and} \quad \underline{x}(\underline{v} - \underline{p}) \geq \underline{v} - \bar{p}.$$

b) Si $\underline{v} = \underline{p} < \bar{p}$, la contrainte d'incitation des bas types n'est pas active et celle des hauts types donne

$$\bar{p} \leq (1 - \underline{x})\bar{v} + \underline{x}\underline{v},$$

ce qui est une combinaison convexe de $\underline{v}$ et $\bar{v}$. Le monopole a intérêt à choisir le prix $\bar{p}$ qui sature cette contrainte, car cela augmente sa recette sans rien changer à la demande, donc

$$\bar{p} = (1 - \underline{x})\bar{v} + \underline{x}\underline{v}.$$

c) La quantité vendue s'écrit:

$$Q = \bar{N} + \underline{x}\,\underline{N} = (1 - \underline{x})\bar{N} + \underline{x}\,(\underline{N} + \bar{N}) = (1 - \underline{x})\bar{N} + \underline{x}N.$$

[2] On prend en fait $\underline{p}$ légèrement en-dessous de $\underline{v}$ pour que les bas types achètent en cas de succès à la loterie.

d) La recette réalisée par le vendeur est

$$R = \bar{N}\bar{p} + \underline{x}\,\underline{N}\,\underline{v} = \bar{N}\,[(1-\underline{x})\bar{v} + \underline{x}\underline{v}] + \underline{x}\,\underline{N}\,\underline{v} = (1-\underline{x})\bar{N}\bar{v} + \underline{x}\,N\underline{v}.$$

e) Puisque par hypothèse $\bar{N}\bar{v} < N\underline{v}$, la recette R ci-dessous est croissante avec $\underline{x}$. Le vendeur a donc intérêt à prendre $\underline{x}$ le plus élevé possible, c'est-à-dire à vendre toutes ses unités. Il chosit donc $\underline{x}$ pour que $Q = K$, ce qui donne

$$\bar{N} + \underline{x}\,\underline{N} = K$$

ou

$$\underline{x} = \frac{K - \bar{N}}{\underline{N}}.$$

Une fois que le vendeur a vendu $\bar{N}$ unités aux consommateurs de haut type, il lui reste $K - \bar{N} \leq \underline{N}$ unités pour les bas types, qu'il leur attribue de manière aléatoire.

f) La recette réalisée est représentée sur la Figure 3. Le mécanisme permet au monopole dans tous les cas de vendre toutes ses unités, $Q = K$. Plus précisément:

- Si $K < Q^*$: avec un prix unitaire déterministe (cf. question 3.), le vendeur ne vend pas toutes ses unités, alors qu'il les vend avec un mécanisme de rationnement. Les hauts types continuent d'acquérir une unité, mais à un prix moindre ($\bar{p} < \bar{v}$), et le vendeur perçoit une recette plus grande. Une fraction des bas types acquiert maintenant une unité, mais en obtenant un surplus nul ($\underline{p} = \underline{v}$);
- Si $K > Q^*$: Toutes les unités sont vendues avec les deux mécanismes. Le vendeur a une recette plus élevée avec le mécanisme de rationnement, les consommateurs de haut type y perdent car le prix monte de $\underline{v}$ à $\bar{p} > \underline{v}$. Les bas types ont un surplus nul dans les deux cas ($\underline{p} = \underline{v}$).

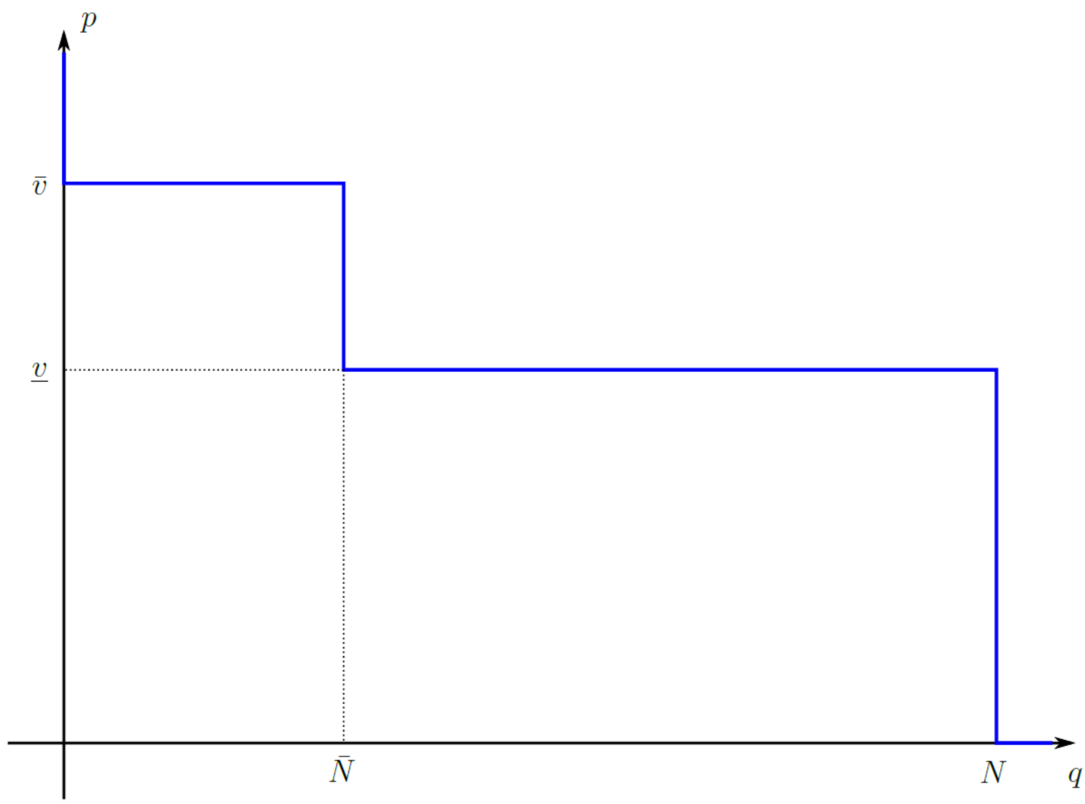


Figure 1: Demande

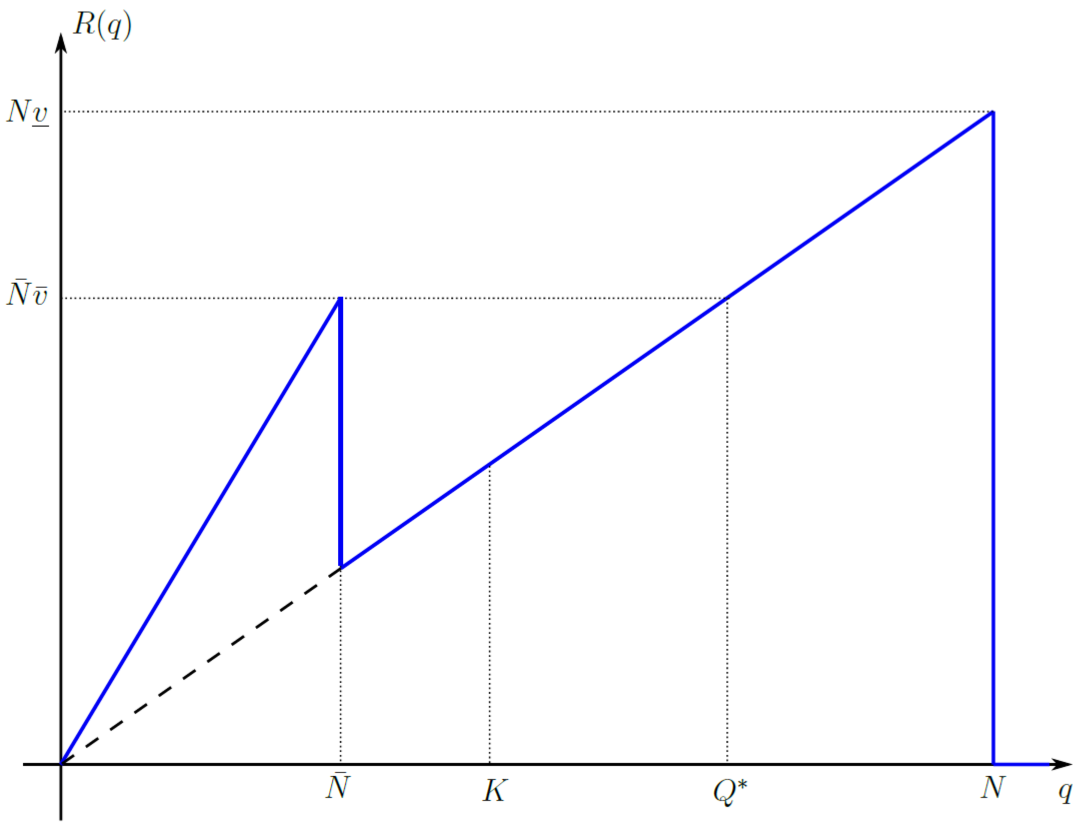


Figure 2: Recette totale du vendeur s'il vend q unités

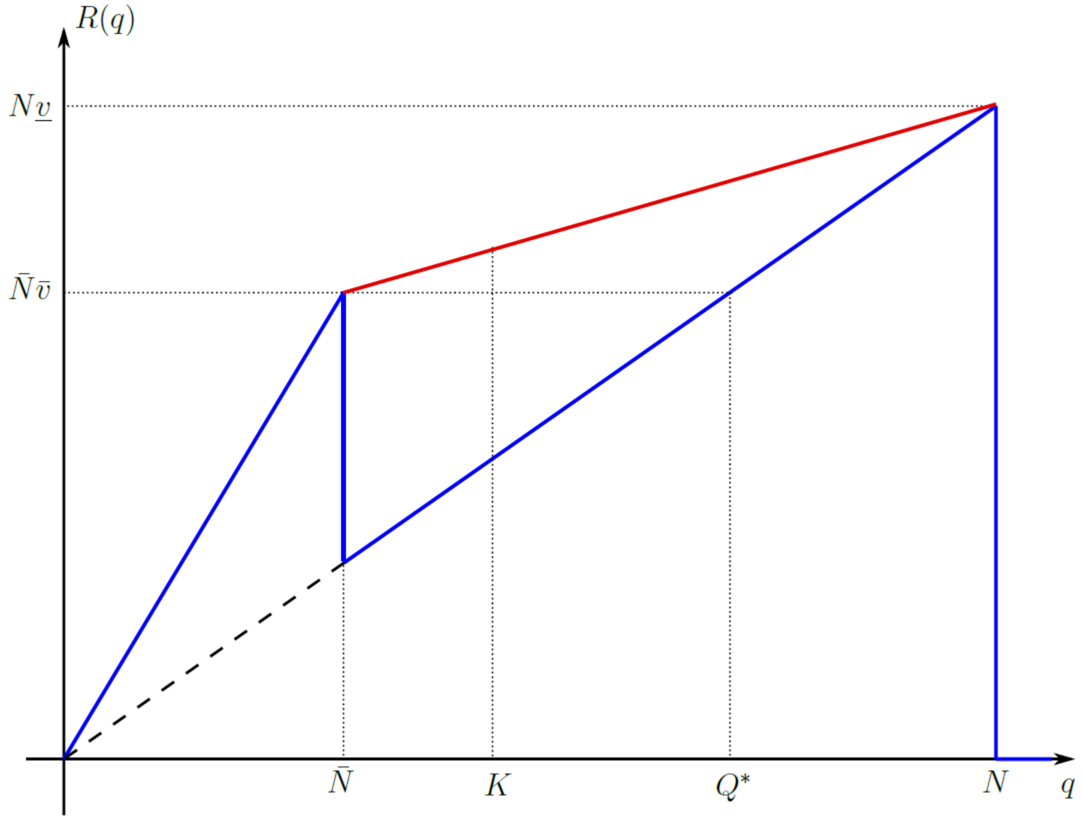


Figure 3: Recette totale obtenue avec le mecanisme de rationnement (en rouge)