Autour du modèle de Cass-Koopmans-Ramsey

Cette partie est inspirée de l'article de Barro et Sala-i-Martin (1992) [1], qui s'intéresse à la pertinence empirique du modèle de croissance à épargne endogène de Cass, Koopmans (1965) et Ramsey (1928).

1 Spécification des préférences

On considère une économie peuplée de ménages à durée de vie infinie. Le taux de croissance de la population est nul. Le temps est continu, indicé par t. Le ménage représentatif offre inélastiquement un flux de travail d'une unité à chaque instant t, rémunéré au salaire w_t. On note $b_t = B_t/L_t$ la quantité d'actifs qu'il détient (en unités de bien par tête), et r_t le taux de rendement de ces actifs. Son utilité intertemporelle à la date 0 est

$$U_0 \equiv \int_0^{+\infty} e^{-\rho t} u(c_t) dt$$

où c_t est la consommation par tête, ρ le taux de préférence pour le présent ($\rho > 0$), et u la fonction d'utilité instantanée. On suppose que cette dernière vérifie les propriétés usuelles.

1.1 Programme des ménages

Question 1 Ecrire la contrainte budgétaire instantanée du ménage représentatif, puis obtenir sa contrainte budgétaire intertemporelle et sa condition de solvabilité.

La contrainte budgétaire instantanée du ménage représentatif s'écrit :

$$\dot{B}_t = r_t B_t + w_t L_t - C_t$$

où B_t est le montant total des actifs en unités de bien, r_t le taux d'intérêt réel sur les prêts, w_t le salaire par unité de travail L_t. En divisant par L_t :

$$\frac{\dot{B}_t}{L_t} = r_t \frac{B_t}{L_t} + w_t - c_t$$

Si on note le montant des actifs par tête $b_t = \frac{B_t}{L_t}$, alors (cf. TD1) $\frac{\dot{b}_t}{b_t} = \frac{\dot{B}_t}{B_t} - \frac{\dot{L}_t}{L_t} = \frac{\dot{B}_t}{B_t}$ car le taux de croissance démographique est supposé nul. On a donc $\frac{\dot{B}_t}{L_t} = \frac{\dot{B}_t}{B_t}\frac{B_t}{L_t} = \frac{\dot{b}_t}{b_t} b_t = \dot{b}_t$ et donc finalement la contrainte budgétaire instantanée par tête :

$$\dot{b}_t = r_t b_t + w_t - c_t$$

où r_t représente le rendement réel des titres de propriété par unité de travail.
En actualisant à la date 0 :

$$(\dot{b}_t - r_t b_t) e^{-\int_0^t r_\tau d\tau} = (w_t - c_t) e^{-\int_0^t r_\tau d\tau}$$

Si on note T la date terminale du ménage représentatif, la contrainte budgétaire à la date 0 pour le reste

1. Barro, R. J., & Sala-i-Martin, X. (1992). Convergence. *Journal of political Economy*, 100(2), 223-251.

de la vie du ménage s'écrit :

$$\int_0^T (\dot{b}_t - r_t b_t) e^{-\int_0^t r_\tau d\tau} d_t = \int_0^T (w_t - c_t) e^{-\int_0^t r_\tau d\tau} dt$$

En intégrant le terme de gauche :

$$\int_0^T (\dot{b}_t - r_t b_t) e^{-\int_0^t r_\tau d\tau} d_t = \left[b_t e^{-\int_0^t r_\tau d\tau} \right]_0^T = b_T e^{-\int_0^T r_\tau d\tau} - b_0$$

où on a utilisé $\partial(-\int_0^t r_\tau d\tau)/\partial t = -r_t$ On a finalement pour la contrainte budgétaire, à T fini :

$$b_T e^{-\int_0^T r_\tau d\tau} = b_0 + \int_0^T (w_t - c_t) e^{-\int_0^t r_\tau d\tau} dt$$

En passant à la limite $T \to +\infty$:

$$\lim_{T \to +\infty} b_T e^{-\int_0^T r_\tau d\tau} = b_0 + \int_0^{+\infty} (w_t - c_t) e^{-\int_0^t r_\tau d\tau} dt$$

La contrainte de solvabilité du ménage impose la condition

$$\lim_{T \to +\infty} b_T e^{-\int_0^T r_\tau d\tau} \geq 0$$

La contrainte intertemporelle du ménage peut donc s'écrire :

$$0 \leq b_0 + \int_0^{+\infty} (w_t - c_t) e^{-\int_0^t r_\tau d\tau} dt$$

et finalement

$$\int_0^{+\infty} c_t e^{-\int_0^t r_\tau d\tau} dt \leq b_0 + \int_0^{+\infty} w_t e^{-\int_0^t r_\tau d\tau} dt$$

Question 2 Ecrire le programme de maximisation du ménage représentatif. Résoudre ce programme pour obtenir l'équation d'Euler.

Le programme de maximisation du ménage représentatif à la date 0 s'écrit pour $(r_t, w_t)_{t \geq 0}$ et b_0 donnés :

$$\begin{array}{rl} \max\limits_{(c_t)_{t\geq 0}, (b_t)_{t>0}} & \int_0^{+\infty} e^{-\rho t} u(c_t) dt \\ \text{s.t.} & \forall t,\ c_t \geq 0 \\ & \forall t,\ \dot{b}_t = r_t b_t + w_t - c_t \\ & \lim\limits_{t \to +\infty} b_t e^{-\int_0^t r_\tau d\tau} \geq 0 \end{array}$$

On définit l'Hamiltonien associé au programme du ménage :

$$H(c_t, b_t, \lambda_t, t) = e^{-\rho t} u(c_t) + \lambda_t [r_t b_t + w_t - c_t]$$

où la covariable d'état λ_t représente la valeur actualisée en utilité à la date t d'une augmentation du stock d'actifs d'une unité de bien.

$[(c_t)_{t\geq 0},(b_t)_{t>0}]$ est une solution au programme du ménage s'il existe $(\lambda_t)_{t\geq 0}$ tel que :

$$\begin{cases} \forall t,\ c_t \geq 0 \text{ et } \lambda_t \geq 0 \\ \forall t,\ \dfrac{\partial H(c_t,b_t,\lambda_t,t)}{\partial c_t} = 0 \qquad (1) \\ \forall t, \dfrac{\partial H(c_t,b_t,\lambda_t,t)}{\partial b_t} = -\dot{\lambda}_t \quad (2) \\ \forall t, \dot{b}_t = r_t b_t + w_t - c_t \\ \lim\limits_{t\to+\infty} b_t\lambda_t = 0 \\ \lim\limits_{t\to+\infty} b_t e^{-\int_0^t r_\tau d\tau} \geq 0 \end{cases}$$

(1) implique

$$e^{-\rho t}u'(c_t) = \lambda_t \text{ donc } \dot{\lambda}_t = e^{-\rho t}[u''(c_t)\dot{c}_t - \rho u'(c_t)]$$

D'après (2)

$$\dot{\lambda}_t = -r_t\lambda_t \qquad \text{donc} \qquad \frac{u''(c_t)\dot{c}_t}{u'(c_t)} = \rho - r_t$$

on obtient finalement l'équation d'Euler suivante :

$$\frac{\dot{c}_t}{c_t} = \sigma(c_t)(r_t - \rho)$$

où $\sigma(c_t) = \left[-\dfrac{u''(c_t)c_t}{u'(c_t)}\right]^{-1}$ est l'élasticité de substitution intertemporelle.

1.2 Préférences exponentielles

On suppose que l'utilité instantanée des ménages est exponentielle :

$$u(c) \equiv -\alpha e^{-\frac{1}{\alpha}c} \qquad \text{où } \alpha > 0$$

Question 3 Existe-t-il une propriété usuelle que cette fonction u ne vérifie pas ? Si oui, on admet que cela n'affecte pas les conditions d'optimisation du programme des ménages.

On a $u(c) = -\alpha e^{-\frac{1}{\alpha}c}$, donc

$$u'(c) = e^{-\frac{1}{\alpha}c} > 0 \text{ et } u''(c) = -\frac{1}{\alpha}e^{-\frac{1}{\alpha}c} < 0$$

u est strictement croissante, strictement concave.

$$\lim_{c\to+\infty} u'(c) = 0 \text{ et } \lim_{c\to 0^+} u'(c) = u'(0) = 1$$

u vérifie la condition d'Inada en $+\infty$, mais pas en 0.

Question 4 Déterminer l'équation d'Euler exprimant $\frac{\dot{c}_t}{c_t}$ en fonction de c_t, r_t et de paramètres constants du modèle.

L'élasticité de substitution intertemporelle s'écrit

$$\sigma(c) = \left[-\frac{u''(c_t)c_t}{u'(c_t)}\right]^{-1} = -\frac{e^{-\frac{1}{\alpha}c}}{-\frac{1}{\alpha}e^{-\frac{1}{\alpha}c}c} = \frac{\alpha}{c}$$

On en déduit l'équation d'Euler

$$\frac{\dot{c}_t}{c_t} = \frac{\alpha}{c_t}(r_t - \rho).$$

Question 5 Peut-on avoir un taux de croissance de la consommation strictement positif et constant à long terme ? Interpréter en commentant la valeur prise par l'élasticité de substitution intertemporelle.

L'équation d'Euler implique que, pour avoir un taux de croissance de la consommation strictement positif et constant à long terme, il faut que r_t tende vers l'infini à long terme. Or $r_t = f'(\kappa_t) - \delta$, donc, compte tenu des propriétés de la fonction f, cela impliquerait que κ_t tend vers zéro à long terme. Par conséquent, la production tendrait aussi vers zéro à long terme, ce qui n'est pas compatible avec un taux de croissance de la consommation strictement positif et constant à long terme. On ne peut donc pas avoir un taux de croissance de la consommation strictement positif et constant à long terme.

Ce résultat est dû au fait que l'élasticité de substitution intertemporelle, égale à $\frac{\alpha}{c_t}$, tend vers zéro lorsque c_t tend vers l'infini : donc, au fur et à mesure que c_t augmente, pour que les ménages acceptent d'investir dans le présent pour consommer encore plus dans le futur, il faut que le rendement de l'investissement r_t augmente de plus en plus ; or ceci nécessite une baisse du stock de capital, donc de la production, et donc, à long terme, de la consommation, ce qui est contradictoire.

2 Baisse permanente du taux de préférence pour le présent

On reprend le cadre du modèle de Caas-Koopmans-Ramsey étudié en cours. La technologie A_t croît au taux g, la population L_t croît au taux n et le capital K_t se déprécie au taux δ. À la date 0, la fonction d'utilité intertemporelle du ménage représentatif est

$$U_0 = \int_0^{+\infty} e^{-\rho t} L_t u(c_t) dt,$$

avec $u(c) = \begin{cases} \frac{c^{1-\theta}-1}{1-\theta} & \text{si} \quad \theta \geq 0,\ \theta \neq 1, \\ \ln(c) & \text{si} \quad \theta = 1. \end{cases}$

On définit les variables du capital et de la consommation par unité de travail efficace $\kappa_t = \frac{K_t}{A_t L_t}$ et $\gamma_t = \frac{C_t}{A_t L_t}$. On suppose $\rho > n > 0$ et $\rho > n + (1-\theta)g$.

On rappelle le système d'équations différentielles régissant l'évolution de κ_t et γ_t à l'équilibre :

$$\begin{cases} \dot{\gamma}_t = & \frac{f'(\kappa_t)-\delta-\rho-g\theta}{\theta}\gamma_t \\ \dot{\kappa}_t = & f(\kappa_t) - (\delta+n+g)\kappa_t - \gamma_t \end{cases}$$

Question 6 Représenter les courbes $\dot{\kappa}_t = 0$ et $\dot{\gamma}_t = 0$ ainsi que l'état régulier dans le plan (κ_t, γ_t).

A l'équilibre,

$$\begin{cases} \dot{\kappa}_t = f(\kappa_t) - (\delta+n+g)\kappa_t - \gamma_t \\ \dot{\gamma}_t = \dfrac{f'(\kappa_t) - \delta - \rho - g\theta}{\theta}\gamma_t \end{cases}$$

A l'état régulier, les quantités sont non nulles et les taux de croissance constants. Par conséquent, $\dfrac{\dot{\gamma}_t}{\gamma_t}$ est constant, donc κ_t l'est aussi, i.e. $\dot{\kappa}_t = 0$. Donc $\gamma_t = f(\kappa_t) - (\delta+n+g)\kappa_t$, constant par la même occasion, et par conséquant $\dot{\gamma}_t = 0$. Au total,

$$\begin{cases} \dot{\kappa}_t = 0 \\ \dot{\gamma}_t = 0 \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} \gamma_t = f(\kappa_t) - (\delta+n+g)\kappa_t \\ \kappa_t = f'^{-1}(\delta+\rho+\theta g) \end{cases}$$

$\dot{\kappa}_t = 0$ donne une courbe en dôme dont le maximum se trouve en $f'(\kappa_{or}) = \delta + n + g$ et $\dot{\gamma}_t = 0$ une droite verticale. L'état régulier (κ^*, γ^*) se trouve à l'intersection.

De plus, d'après l'énoncé, $\rho > n + (1-\theta)g \Leftrightarrow f'(\kappa^*) = \delta + \rho + \theta g > \delta + n + g = f'(\kappa_{or}) \Leftrightarrow \kappa^* < \kappa_{or}$

Démonstration du cours (superflu pour le TD) :

comme $\dot{\lambda}_t = (\rho - r_t)\lambda_t \Leftrightarrow \dfrac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t} = \rho - r_t \Leftrightarrow \displaystyle\int_0^t \frac{\dot{\lambda}_\tau}{\lambda_\tau} d\tau = \int_0^t (\rho - r_\tau) d\tau$

$[\log \lambda_t]_0^t = -\displaystyle\int_0^t (r_\tau - \rho) d\tau \Leftrightarrow \log \lambda_t - \log \lambda_0 = -\int_0^t (r_\tau - \rho) d\tau \Leftrightarrow \lambda_t = \lambda_0 e^{-\int_0^t (r_\tau - \rho) d\tau}$ où $\lambda_0 =$

$u'(c_0) > 0$ donc la condition de transversalité $\lim_{t \to +\infty} b_t \lambda_t e^{-(\rho-n)t} = 0$ peut se réécrire

$$\lim_{t \to +\infty} b_t e^{-\int_0^t (r_\tau - n) d\tau} = 0$$

(la valeur actualisée à la date 0 du montant total d'actif à long terme vaut 0)
L'équilibre sur le marché du capital, unique moyen d'épargne du ménage, implique :

- $B_t = K_t$ donc $b_t = \frac{B_t}{L_t} = \frac{K_t}{L_t} = A_t \kappa_t = \kappa_t A_0 e^{gt}$
- $r_t = f'(\kappa_t) - \delta$

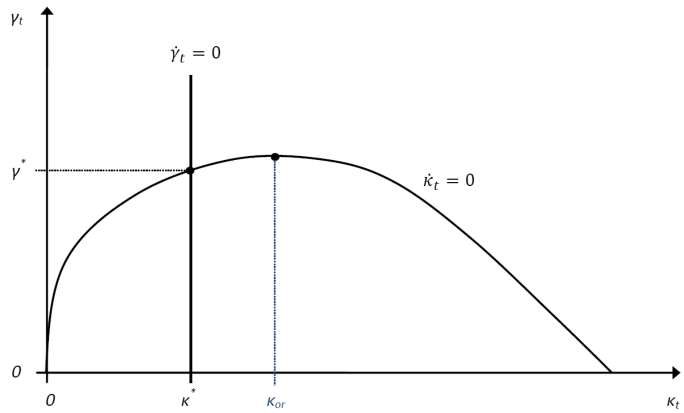
Donc la condition de transversalité à l'état régulier s'écrit finalement

$$\lim_{t \to +\infty} \kappa^* A_0 e^{-\int_0^t [f'(\kappa^*) - (\delta+n+g)] d\tau} = 0$$

$\dot{\gamma}_t = 0$ implique que $\kappa^* > 0$, donc

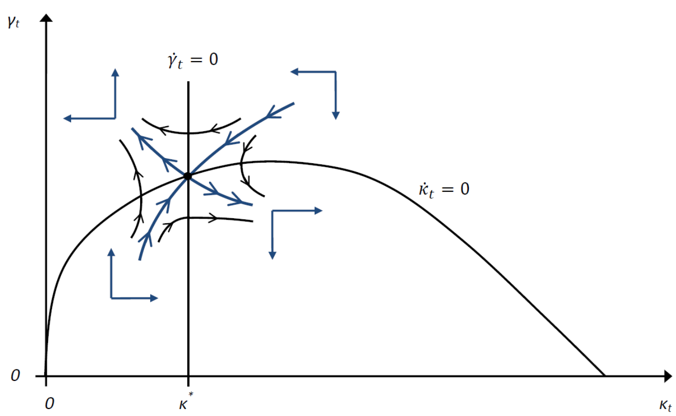
$$\lim_{t \to +\infty} \int_0^t [f'(\kappa^*) - (n+g+\delta)] d\tau = +\infty \Leftrightarrow f'(\kappa^*) > \delta + n + g = f'(\kappa_{or}) \Leftrightarrow \kappa^* < \kappa_{or}$$

Graphiquement :



Question 7 Indiquer le signe de $\dot{\kappa}_t$ et de $\dot{\gamma}_t$ dans les différentes zones et représenter le sentier-selle.

- $\dot{\kappa}_t > 0 \Leftrightarrow f(\kappa_t) - (\delta+n+g)\kappa_t - \gamma_t > 0 \Leftrightarrow f(\kappa_t) - (\delta+n+g)\kappa_t > \gamma_t$: lorsque l'on se trouve en dessous (resp. au dessus) de la courbe $\dot{\kappa}_t = 0$, κ_t augmente (resp. diminue).
- $\dot{\gamma}_t > 0 \Leftrightarrow f'(\kappa_t) - \delta - \rho - g\theta > 0 \Leftrightarrow \kappa_t < f'^{-1}(\delta + \rho + \theta g)$ (car $f'(.)$ est décroissante donc $f'^{-1}(.)$ aussi) : lorsque l'on se trouve à gauche (resp. à droite) de la droite $\dot{\gamma}_t = 0$, γ_t augmente (resp. diminue).



On suppose que l'économie est initialement dans son état stationnaire. En $t = T$, le taux de préférence pour le présent ρ diminue de manière non anticipée de ρ_1 à ρ_2 avec $\rho_2 < \rho_1$, puis reste à ρ_2 par la suite. Les conditions sur ρ énoncées en introduction restent vérifiées.

Question 8 Comparer le nouvel état stationnaire à l'ancien. Interpréter.

Les anciens niveaux stationnaires sont

$$\kappa_1^* = f'^{-1}(\delta + \rho_1 + g\theta) \qquad \text{et} \qquad \gamma_1^* = f(\kappa_1^*) - (\delta + n + g)\kappa_1^*,$$

tandis que les nouveaux sont

$$\kappa_2^* = f'^{-1}(\delta + \rho_2 + g\theta) \qquad \text{et} \qquad \gamma_2^* = f(\kappa_2^*) - (\delta + n + g)\kappa_2^*,$$

Comme $\rho_2 < \rho_1$, $\kappa_2^* > \kappa_1^*$. De plus, on a toujours $\kappa^* < \kappa_{or}$ (d'après les conditions énoncées sur ρ), donc on est dans la partie croissante de la courbe $\dot{\kappa}_t = 0$, d'où $\gamma_2^* > \gamma_1^*$.

Les ménages étant moins impatients, ils valorisent davantage leur consommation de long terme, ce qui favorise l'épargne et l'accumulation du capital.

Question 9 Représenter l'ancien et le nouvel état stationnaire. Représenter la dynamique de l'économie à partir de la date T dans le plan (κ_t, γ_t). Interpréter.

La courbe $\dot{\kappa}_t = 0$ reste inchangée puisqu'elle ne fait pas intervenir ρ. La droite verticale $\dot{\gamma}_t = 0$ est quant à elle décalée vers l'est. Au final, comme les différents états stationnaires sont toujours sur la partie croissante de la courbe en dôme, l'état stationnaire se déplace vers le nord-est (ce qui est conforme aux résultats analytiques de la question précédente).

En $t = T$, l'économie saute verticalement sur la nouvelle trajectoire-selle (la consommation baisse ainsi brutalement), puis la suit jusqu'au nouvel état stationnaire.

Valorisant soudainement davantage le futur, les ménages augmentent brusquement leur épargne, ce qui réduit la consommation à court terme, mais qui favorise l'accumulation du capital. Ainsi à long terme, consommation et capital sont plus élevés.

Question 10 Comparer cette dynamique à celle obtenue dans le cas d'une hausse permanente du taux d'épargne dans le modèle de Solow-Swan.

La dynamique est semblable au cas d'une hausse du taux d'épargne exogène dans le modèle de Solow-Swan, telle que $s_1 < s_2 < s_{or}$ (c'est-à-dire dans le cas d'absence d'inefficience dynamique qui est aussi celui considéré ici, d'après les conditions énoncées sur ρ). A court terme, les ménages diminuent brusquement leur consommation et favorisent l'accumulation du capital. A long terme, consommation et capital sont plus élevés.

3 Vitesse de convergence

On reprend le système d'équations différentielles régissant l'évolution de κ_t et γ_t étudié dans la section précédente

$$\begin{cases} \dot{\kappa}_t = f(\kappa_t) - (\delta + n + g)\kappa_t - \gamma_t \\ \dot{\gamma}_t = \dfrac{f'(\kappa_t) - \delta - \rho - g\theta}{\theta}\gamma_t \end{cases}$$

On suppose que la fonction de production est du type Cobb-Douglas de sorte que $f(\kappa_t) = \kappa_t^\alpha$ avec $0 < \alpha < 1$. On introduit les variables exprimées en déviation logarithmique par rapport à l'état régulier

$$\hat{\kappa}_t \equiv \log\left(\frac{\kappa_t}{\kappa^*}\right) \qquad \text{et} \qquad \hat{\gamma}_t \equiv \log\left(\frac{\gamma_t}{\gamma^*}\right)$$

Question 11 Déterminer les équations vérifiées par les variables à l'état régulier.

On rappelle qu'à l'équilibre :

$$\begin{cases} \dot{\kappa}_t = f(\kappa_t) - (\delta + n + g)\kappa_t - \gamma_t \\ \dot{\gamma}_t = \dfrac{f'(\kappa_t) - \delta - \rho - g\theta}{\theta}\gamma_t \end{cases}$$

A l'état régulier :

$$\begin{cases} f(\kappa^*) - (\delta + n + g)\kappa^* - \gamma^* = 0 \\ f'(\kappa^*) - \delta - \rho - g\theta = 0 \end{cases}$$

$f(\kappa_t) = \kappa_t^\alpha$ donc $f'(\kappa_t) = \alpha\kappa_t^{\alpha-1}$, l'état régulier devient :

$$\begin{cases} \gamma^* & = & \kappa^{*\alpha} - (\delta + n + g)\kappa^* \\ \kappa^* & = & \left(\frac{\delta + \rho + g\theta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \end{cases}$$

A l'instar du chapitre 1 et du TD1, on peut trouver la solution générale du modèle et calculer la vitesse de convergence vers l'état régulier. On admettra les questions 14 à 17 pour les détails des calculs.

Question 12 À partir des données de 47 états américains entre 1880 et 1988, l'estimation économétrique de l'équation suivante :

$$\frac{1}{T}\log\left(\frac{y_{i,t_0+T}}{y_{i,t_0}}\right) = A + B\log(y_{i,t_0}) + u_{i,t_0,t_0+T} \tag{1}$$

où $y_{i,t}$ est le niveau de la production par tête dans l'état i pendant l'année t et $u_{i,t,t'}$ un terme d'erreur, donne les résultats affichés dans la Table 1.

TABLE 1

CROSS-STATE REGRESSIONS FOR PERSONAL INCOME

Sample	$\hat{\beta}$		R^2	$\hat{\sigma}$
1. 1880–1988	.0175 (.0046)	...	.92	.0014
		...		

NOTE.—Standard errors of coefficients are shown in parentheses. Regression 22 has 29 observations, regressions 1 and 2 have 47 observations (excluding Oklahoma), and regression 12 has 46 observations (excluding Oklahoma and Wyoming). All others have 48 observations. The dependent variable is the growth rate of real per capita personal income exclusive of transfers over the indicated sample period. Each regression includes a constant and three regional dummy variables, south, midwest, and west. (Regression 22 includes only south and midwest.) The coefficient $\hat{\beta}$ applies to $\log(y_{i,t_0})$, where y_{i,t_0} is real per capita personal income at the start of the period.

Sachant les équations (1) et (2) et l'estimateur de la vitesse de convergence

$$\hat{\beta} = -\frac{1}{T}\log(1 + \hat{B}T)$$

, combien de temps faut-il pour résorber la moitié de l'écart initial par rapport à l'état régulier ?

Tous les paramètres à part A_0 sont considérés comme identiques entre les états. Par identification entre (2) et (1), on a alors

$$A + u_{i,t_0,t_0+T} = g + \frac{1 - e^{-\beta T}}{T}[\log(A_{0,i}\tilde{y}^*) + gt_0] \quad \text{et} \quad B = -\frac{1 - e^{-\beta T}}{T}$$

On peut donc obtenir l'estimateur de β en calculant

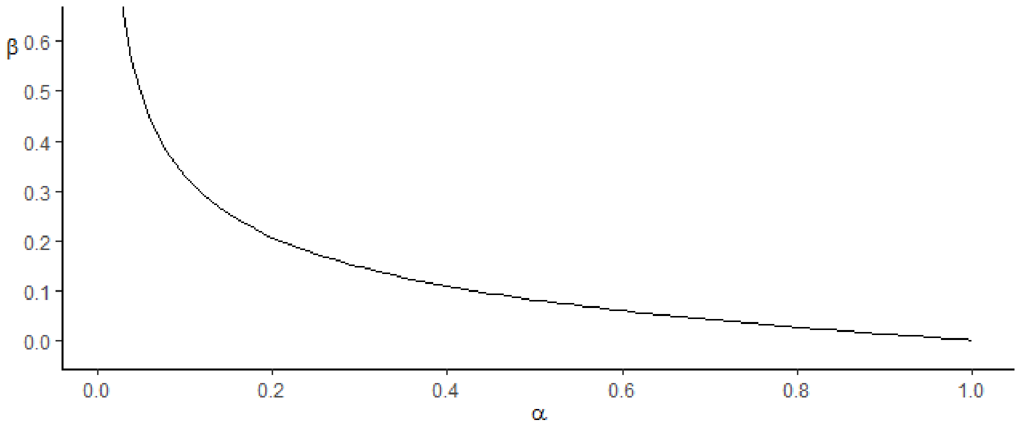
$$\hat{\beta} = -\frac{1}{T}\log(1 + \hat{B}T)$$

La moitié de l'écart initial par rapport à l'état régulier est résorbé au bout de T années tel que

$$\hat{y}_T = \frac{1}{2}\hat{y}_0 = \hat{y}_0 e^{-\beta T} \Leftrightarrow T = \frac{\log 2}{\beta}$$

donc avec $\hat{\beta} = 0.0175$, la moitié de l'écart est résorbé au bout d'environ $\hat{T} \approx 40$ années.

Question 13 Le graphique ci-dessous représente β en fonction de α pour les valeurs des paramètres énoncées précédemment. Quelle valeur de α le modèle de Cass-Koopmans-Ramsey avec fonction de production Cobb-Douglas implique-t-il ? Ce modèle permet-il de rendre compte de la vitesse de convergence conditionnelle des niveaux de vie entre les états américains ?



$\hat{\beta} = 0.0175$ implique $\hat{\alpha} \approx 0.86$, qui correspond dans ce modèle à la part de la rémunération du capital dans le revenu national. Dans une définition restreinte du capital comme capital physique, la valeur empiriquement pertinente serait $\alpha \approx 1/3$, auquel cas le modèle ne rendrait pas compte des données. Dans une définition plus large telle que le capital physique et humain comme au TD1, la rémunération du capital représenterait entre 65% et 85% du revenu national. L'estimation $\hat{\alpha} \approx 0.86$ serait cohérente avec cette représentation, et le modèle rendrait donc compte de la vitesse de convergence conditionnelle des niveaux de vie entre les états américains.

4 Annexe - questions 14 à 17

Question 14 (*optionnel*) Montrer que l'approximation log-linéaire du système d'équations différentielles autour de l'état régulier peut s'écrire[2]

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{\kappa}}_t \\ \dot{\hat{\gamma}}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \zeta & g+n+\delta-(\rho+\theta g+\delta)/\alpha \\ -(1-\alpha)(\rho+\theta g+\delta)/\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\kappa}_t \\ \hat{\gamma}_t \end{bmatrix} \quad \text{où } \zeta \equiv \rho - n - (1-\theta)g > 0$$

On note :

$$\hat{x}_t = \log(\frac{x_t}{x^*}) \approx \log\left(\frac{x^*}{x^*}\right) + \frac{x^*}{x^{*2}}(x_t - x^*) \ \text{ donc } \ \hat{x}_t \approx \frac{x_t - x^*}{x^*} \Leftrightarrow x_t \approx (1+\hat{x}_t)x^*$$

$$\dot{\hat{x}}_t = \frac{\partial}{\partial t}\hat{x}_t = \frac{\frac{\dot{x}_t}{x^*}}{\frac{x_t}{x^*}} = \frac{\dot{x}_t}{x_t}$$

- L'équation différentielle du capital par utilité de travail efficace peut donc se réécrire :

$$\dot{\hat{\kappa}}_t = \frac{\dot{\kappa}_t}{\kappa_t} = \frac{1}{\kappa_t}\left[f(\kappa_t) - (\delta+n+g)\kappa_t - \gamma_t\right]$$

On a $\kappa_t \approx (1+\hat{\kappa}_t)\kappa^*$, $\gamma_t \approx (1+\hat{\gamma}_t)\gamma^*$, et l'approximation linéaire de $f(\kappa_t)$ au voisinage de $f(k^*)$ donne

$$\begin{aligned} f(\kappa_t) &\approx f(\kappa^*) + f'(\kappa^*)(\kappa_t - \kappa^*) \\ &\approx \kappa^{*\alpha} + \alpha\kappa^{*\alpha-1}\hat{\kappa}_t\kappa^* \\ &\approx \kappa^{*\alpha}(1+\alpha\hat{\kappa}_t) \end{aligned}$$

2. On pourra par exemple utiliser le fait que toute variable X_t qui converge vers X^* vérifie l'approximation linéaire autour de l'état régulier : $X_t \sim X^*(1+\hat{X}_t)$.

On a donc :

$$
\begin{aligned}
\dot{\hat{\kappa}}_t &\approx \frac{1}{1+\hat{\kappa}_t}\left[\kappa^{*\alpha-1}(1+\alpha\hat{\kappa}_t)-(\delta+n+g)(1+\hat{\kappa}_t)-\frac{\gamma^*}{\kappa^*}(1+\hat{\gamma}_t)\right] \\
&\approx \frac{1}{1+\hat{\kappa}_t}\left[\kappa^{*\alpha-1}(1+\alpha\hat{\kappa}_t)-(\delta+n+g)(1+\hat{\kappa}_t)-(\kappa^{*\alpha-1}-(\delta+n+g))(1+\hat{\gamma}_t)\right] \\
&\approx \frac{1}{1+\hat{\kappa}_t}\left[\alpha\hat{\kappa}_t\kappa^{*\alpha-1}-(\delta+n+g)\hat{\kappa}_t-(\kappa^{*\alpha-1}-(\delta+n+g))\hat{\gamma}_t\right] \\
&\approx \frac{1}{1+\hat{\kappa}_t}\left[\alpha\hat{\kappa}_t\frac{\delta+\rho+g\theta}{\alpha}-(\delta+n+g)\hat{\kappa}_t+(\delta+n+g-\frac{\delta+\rho+g\theta}{\alpha})\hat{\gamma}_t\right] \\
&\approx \frac{1}{1+\hat{\kappa}_t}\left[(\rho-n-(1-\theta)g)\hat{\kappa}_t+(\delta+n+g-\frac{\delta+\rho+g\theta}{\alpha})\hat{\gamma}_t\right]
\end{aligned}
$$

Remarquons que $\frac{1}{1+\hat{\kappa}_t}\approx 1-\hat{\kappa}_t$ donc :

$$\dot{\hat{\kappa}}_t \approx (1-\hat{\kappa}_t)\left[(\rho-n-(1-\theta)g)\hat{\kappa}_t+(\delta+n+g-\frac{\delta+\rho+g\theta}{\alpha})\hat{\gamma}_t\right]$$

Si on développe et néglige les termes de second ordre en $\hat{\kappa}_t^2$ et $\hat{\kappa}_t\hat{\gamma}_t$:

$$\dot{\hat{\kappa}}_t \approx (\rho-n-(1-\theta)g)\hat{\kappa}_t+(\delta+n+g-\frac{\delta+\rho+g\theta}{\alpha})\hat{\gamma}_t$$

- Pour l'équation différentielle de la consommation par utilité de travail efficace :

$$\dot{\hat{\gamma}}_t = \frac{f'(\kappa_t)-\delta-\rho-g\theta}{\theta}$$

L'approximation linéaire de $f'(\kappa_t)$ au voisinage de $f'(k^*)$ donne

$$
\begin{aligned}
f'(\kappa_t) &\approx f'(\kappa^*)+f''(\kappa^*)(\kappa_t-\kappa^*) \\
&\approx \delta+\rho+g\theta+\alpha(\alpha-1)\kappa^{*\alpha-2}\hat{\kappa}_t\kappa^*
\end{aligned}
$$

donc

$$\dot{\hat{\gamma}}_t \approx \frac{\alpha(\alpha-1)\kappa^{*\alpha-1}\hat{\kappa}_t}{\theta} = \frac{(\alpha-1)(\delta+\rho+g\theta)}{\theta}\hat{\kappa}_t$$

On obtient donc bien finalement :

$$\begin{bmatrix}\dot{\hat{\kappa}}_t \\ \dot{\hat{\gamma}}_t\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\rho-n-(1-\theta)g & g+n+\delta-\frac{(\rho+\theta g+\delta)}{\alpha} \\ \frac{-(1-\alpha)(\rho+\theta g+\delta)}{\theta} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{\kappa}_t \\ \hat{\gamma}_t\end{bmatrix}$$

Question 15 (*optionnel*) Déterminer les valeurs propres du système linéaire. En déduire que la solution générale du système pour $\hat{\kappa}_t$ peut s'écrire

$$\hat{\kappa}_t = \psi_1 e^{\varepsilon_1 t}+\psi_2 e^{\varepsilon_2 t} \qquad \text{avec } \varepsilon_1>0 \text{ et } \varepsilon_2<0.$$

En notant M la matrice associée au système d'équations différentielles linéaires, ainsi que :

$$\begin{cases} \zeta = \rho-n-(1-\theta)g & \\ b = g+n+\delta-\frac{(\rho+\theta g+\delta)}{\alpha} = -\frac{\gamma^*}{\kappa^*} & <0 \\ c = \frac{-(1-\alpha)(\rho+\theta g+\delta)}{\theta} & <0 \end{cases}$$

on a alors $M=\begin{bmatrix}\zeta & b \\ c & 0\end{bmatrix}$, donc $\text{tr}(M)=\zeta$ et $\det(M)=-bc<0$.
Ses valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique :

$$\det(M-\varepsilon I) = \begin{vmatrix}\zeta-\varepsilon & b \\ c & -\varepsilon\end{vmatrix} = (\zeta-\varepsilon)(-\varepsilon)-bc = \varepsilon^2-\zeta\varepsilon-bc = \varepsilon^2-\text{tr}(M)\varepsilon+\det(M)$$

On a $\Delta = \zeta^2 + 4bc > 0$ donc le polynôme a deux racines conjuguées ε_1 et ε_2 et le système d'équations différentielles la solution générale pour $\hat{\kappa}_t$:

$$\hat{\kappa}_t = \psi_1 e^{\varepsilon_1 t} + \psi_2 e^{\varepsilon_2 t}$$

avec

$$\varepsilon_1 = \frac{\zeta + \sqrt{\Delta}}{2} > 0 \quad \text{et} \quad \varepsilon_2 = \frac{\zeta - \sqrt{\Delta}}{2}$$

dont le produit est $\varepsilon_1\varepsilon_2 = \det(M) < 0$, on en conclut $\varepsilon_2 < 0$, d'où le résultat énoncé.

Question 16 (*optionnel*) Déterminer l'unique solution $\hat{\kappa}_t$ qui vérifie les conditions initiales et aux limites du problème. En déduire que la solution log-linéaire pour l'évolution de la production par unité de travail efficace $\tilde{y}_t = Y_t/(A_t L_t)$ s'écrit

$$\log(\tilde{y}_t) = e^{-\beta t}\log(\tilde{y}_0) + (1 - e^{-\beta t})\log(\tilde{y}^*)$$

où la vitesse de convergence est $\beta \equiv \frac{1}{2}\left\{\sqrt{\zeta^2 + 4\frac{1-\alpha}{\theta}(\rho + \delta + \theta g)\left[\frac{\rho+\delta+\theta g}{\alpha} - (n + g + \delta)\right]} - \zeta\right\}$.

La condition à la limite est $\lim_{t\to\infty} \hat{\kappa}_t = 0$. Comme $\lim_{t\to\infty} \psi_2 e^{\varepsilon_2 t} = 0$ (car $\varepsilon_2 < 0$), il faut donc $\lim_{t\to\infty} \psi_1 e^{\varepsilon_1 t} = 0$, ce qui impose $\psi_1 = 0$ (car $\varepsilon_1 > 0$).
La condition initiale $\hat{\kappa}_0 = \log\left(\frac{\kappa_0}{\kappa^*}\right) = \psi_1 + \psi_2$ détermine alors $\psi_2 = \hat{\kappa}_0 = \log\left(\frac{\kappa_0}{\kappa^*}\right)$. Donc $\hat{\kappa}_t = \log\left(\frac{\kappa_0}{\kappa^*}\right)e^{\varepsilon_2 t} \Leftrightarrow \log\left(\frac{\kappa_t}{\kappa^*}\right) = \log\left(\frac{\kappa_0}{\kappa^*}\right)e^{\varepsilon_2 t}$
Comme $\tilde{y}_t = f(\kappa_t) = \kappa_t^\alpha$ on a donc $\log(\tilde{y}_t) = \alpha\log(\kappa_t)$
Si on note $\beta = -\varepsilon_2 = \frac{1}{2}\left\{\sqrt{\zeta^2 + 4\frac{1-\alpha}{\theta}(\rho + \delta + \theta g)\left[\frac{\rho+\delta+\theta g}{\alpha} - (n + g + \delta)\right]} - \zeta\right\}$ on peut écrire :

$$\begin{aligned}
\alpha\log\left(\tfrac{\kappa_t}{\kappa^*}\right) &= \alpha\log\left(\tfrac{\kappa_0}{\kappa^*}\right)e^{-\beta t} \\
\alpha\log\kappa_t - \alpha\log\kappa^* &= \alpha\log\kappa_0 e^{-\beta t} - \alpha\log\kappa^* e^{-\beta t} \\
\log\tilde{y}_t &= \log\tilde{y}_0 e^{-\beta t} + (1 - e^{-\beta t})\log\tilde{y}^*
\end{aligned}$$

ce qui peut se réécrire

$$\log\left(\frac{\tilde{y}_t}{\tilde{y}^*}\right) = \log\left(\frac{\tilde{y}_0}{\tilde{y}^*}\right)e^{-\beta t} \tag{i}$$

ou encore

$$\hat{y}_t = \hat{y}_0 e^{-\beta t}$$

L'écart initial à l'état régulier après un choc $\hat{y}_0$ se résorbe à chaque période au taux de convergence β.

Les quantités par unité de travail efficace et l'état régulier ne sont pas mesurables dans les données. On cherche cependant à estimer empiriquement la valeur de β. Les seules données disponibles pour les auteurs sont les productions annuelles par tête $y_{i,t} = Y_{i,t}/L_{i,t}$ des états américains à différentes dates entre 1880 et 1988.
Pour les Etats-Unis, les valeurs de paramètres suivantes sont choisies :
— $\delta = 0,05$ par an (mesuré pour le stock des infrastructures et des équipements)
— $n = 0,02$ par an (taux de croissance moyen de la population au cours des décennies récentes)
— $g = 0,02$ par an (taux de croissance moyen du revenu par habitant à long terme)
— $\rho = 0,05$ par an
— $\theta = 1$ $(u(c) = \log c)$
On suppose que tous les états ont la même production par unité de travail efficace à l'état régulier $\tilde{y}_i^* = \tilde{y}^*$.

Question 17 (*optionnel*) Soient deux dates t_0 et $t_0 + T$. Déduire de la question précédente que le taux de croissance moyen de la production par tête entre ces deux dates peut s'exprimer

$$\frac{1}{T}\log\left(\frac{y_{t_0+T}}{y_{t_0}}\right) = g + \frac{1 - e^{-\beta T}}{T}[\log(A_0\tilde{y}^*) + gt_0] - \frac{1 - e^{-\beta T}}{T}\log(y_{t_0}) \tag{2}$$

L'évolution de $\log\tilde{y}_t$ peut se réécrire

$$\log(\tilde{y}_t) - \log(\tilde{y}_0) = e^{-\beta t}\log(\tilde{y}_0) + (1 - e^{-\beta t})\log(\tilde{y}^*) - \log(\tilde{y}_0)$$

donc

$$\log\left(\frac{\tilde{y}_t}{\tilde{y}_0}\right) = (1 - e^{-\beta t})\log\left(\frac{\tilde{y}^*}{\tilde{y}_0}\right) \tag{ii}$$

Soit deux dates t_0 et $t_0 + T$. On a alors

$$
\begin{array}{rrcl}
 & \log\left(\dfrac{\tilde{y}_{t_0+T}}{\tilde{y}_{t_0}}\right) & = & \log\left(\dfrac{\tilde{y}_{t_0+T}}{\tilde{y}_0}\dfrac{\tilde{y}_0}{\tilde{y}_{t_0}}\right) \;=\; \log\left(\dfrac{\tilde{y}_{t_0+T}}{\tilde{y}_0}\right) - \log\left(\dfrac{\tilde{y}_{t_0}}{\tilde{y}_0}\right) \\
\text{avec (ii)} \;\Leftrightarrow & \log\left(\dfrac{y_{t_0+T}}{A_{t_0+T}}\dfrac{A_{t_0}}{y_{t_0}}\right) & = & (e^{-\beta t_0} - e^{-\beta(t_0+T)}) \log\left(\dfrac{\tilde{y}^*}{\tilde{y}_0}\right) \\
\text{avec } A_t = A_0 e^{gt} \Leftrightarrow & \log\left(\dfrac{y_{t_0+T}}{y_{t_0}} e^{-gT}\right) & = & (1 - e^{-\beta T}) e^{-\beta t_0} \log\left(\dfrac{\tilde{y}^*}{\tilde{y}_0}\right) \\
\Leftrightarrow & \log\left(\dfrac{y_{t_0+T}}{y_{t_0}}\right) - gT & = & -(1 - e^{-\beta T}) e^{-\beta t_0} \log\left(\dfrac{\tilde{y}_0}{\tilde{y}^*}\right) \\
\text{avec (i)} \;\Leftrightarrow & \log\left(\dfrac{y_{t_0+T}}{y_{t_0}}\right) & = & gT - (1 - e^{-\beta T}) \log\left(\dfrac{\tilde{y}_{t_0}}{\tilde{y}^*}\right) \\
 & & = & gT - (1 - e^{-\beta T}) \log\left(\dfrac{y_{t_0}}{\tilde{y}^* A_0 e^{g t_0}}\right)
\end{array}
$$

$$
\frac{1}{T} \log\left(\frac{y_{t_0+T}}{y_{t_0}}\right) = g + \frac{1 - e^{-\beta T}}{T} [\log(A_0 \tilde{y}^*) + g t_0] - \frac{1 - e^{-\beta T}}{T} \log(y_{t_0})
$$