Autour du modèle de croissance avec variété de bien (Romer 1990)

1 Durée finie du pouvoir de monopole dans le modèle de croissance avec variété des biens

Ce problème est extrait de l'examen final de l'année 2014-2015.

Le but de ce problème est d'étudier la dynamique de long terme de l'économie et le rôle du gouvernement dans le modèle de croissance avec variété des biens (Romer, 1990) lorsque le pouvoir de monopole des inventeurs-producteurs de biens intermédiaires a une durée finie.

Rappel des principales hypothèses du modèle de Romer (1990). Le temps est continu, indicé par t. Les agents privés sont des ménages (dont le nombre, L, est constant dans le temps), des producteurs de bien final (en grand nombre I), et des inventeurs-producteurs de bien intermédiaire. Le marché des prêts (offre des ménages, demande des inventeurs-producteurs de bien intermédiaire pour inventer), le marché du travail (offre des ménages, demande des producteurs de bien final), et le marché des biens finaux (offre des producteurs de bien final, demande des ménages pour consommer et des inventeurs-producteurs de bien intermédiaire pour inventer et pour produire) sont en concurrence pure et parfaite. Il y a un continuum $[0; N_t]$ de types de bien intermédiaire (dont la taille initiale $N_0 > 0$ est exogène), et, pour chaque type j, un marché des biens intermédiaires de ce type (offre de l'inventeur-producteur du bien intermédiaire de ce type, demande des producteurs de bien final). Le prix des biens finaux est normalisé à 1. On note w_t le salaire réel, r_t le taux d'intérêt réel, et $P_{j,t}$ le prix réel des biens intermédiaires de type j.

Les ménages ont un flux d'offre de travail constant dans le temps, égal à 1 par tête, et une élasticité de substitution intertemporelle constante dans le temps, égale à $\frac{1}{\theta}$. Une des conditions d'équilibre caractérisant leur comportement est l'équation d'Euler

$$\frac{\dot{c_t}}{c_t} = \frac{r_t - \rho}{\theta},$$

où c_t est la consommation par tête, et ρ le taux de préférence pour le présent ($\rho > 0$). La fonction de production du producteur i de bien final est

$$Y_{i,t} = AL_{i,t}^{1-\alpha} \int_0^{N_t} X_{i,j,t}^{\alpha} dj,$$

avec $A > 0$ et $0 < \alpha < 1$, où $Y_{i,t}$ est son offre de biens finaux, $L_{i,t}$ sa demande de travail, et $X_{i,j,t}$ sa demande de biens intermédiaires de type j. La fonction de production de l'inventeur-producteur de bien intermédiaire de type j (une fois ce type inventé) est

$$X_{j,t} = Y_{j,t},$$

où $X_{j,t}$ est son offre de biens intermédiaires de type j et $Y_{j,t}$ (à ne pas confondre avec $Y_{i,t}$) sa demande de biens finaux. L'invention de dj nouveaux types de bien intermédiaire (de N_t à N_t+dj) est un processus déterministe nécessitant l'utilisation de ηdj unités de bien final, où $\eta > 0$. On note C_t la consommation agrégée (de sorte que $c_t \equiv \frac{C_t}{L}$), $Y_t \equiv \sum_{i=1}^{I} Y_{i,t}$ la production de biens finaux agrégée, et $L_t \equiv \sum_{i=1}^{I} L_{i,t}$ la demande de travail agrégée (égale à l'offre de travail agrégée L à l'équilibre).

Nouvelle hypothèse. L'inventeur-producteur du bien intermédiaire de type j est initialement (à la date de l'invention t_j) en situation de monopole. Pour toute date $t \geq t_j$, s'il est toujours en situation de monopole à la date t, alors la probabilité qu'il passe en situation de concurrence pure et parfaite entre t et $t + dt$ (où dt est arbitrairement petit) est égale à πdt, où $\pi \geq 0$. Une fois que le bien de type j est devenu "concurrentiel", il le reste pour toujours.

1.1 Production de biens intermédiaires concurrentiels et monopolisés

Question 1 Ecrire le profit instantané du producteur i de bien final à la date t, puis son problème d'optimisation instantané à la date t. En déduire que

$$X_{i,j,t} = \left(\frac{\alpha A}{P_{j,t}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} L_{i,t}.$$

Interpréter très brièvement.

Question 2 Sans utiliser d'équation, déterminer le prix sur le marché des biens intermédiaires de type j lorsque ce type de bien est concurrentiel. En déduire que la quantité notée X^c (indépendante du type j et de la date t) de biens intermédiaires de type j produits à la date t, lorsque ces biens sont concurrentiels, est

$$X^c = A^{\frac{1}{1-\alpha}} \alpha^{\frac{1}{1-\alpha}} L.$$

Question 3 Ecrire le profit instantané de l'inventeur-producteur de bien intermédiaire de type j à la date t (postérieure à la date d'invention du type j), puis son problème d'optimisation instantané à la date t, lorsqu'il est en situation de monopole à cette date. En déduire que la quantité notée X^m (indépendante du type j et de la date t) de biens intermédiaires de type j produits à la date t, lorsque ces biens sont monopolisés, est

$$X^m = A^{\frac{1}{1-\alpha}} \alpha^{\frac{2}{1-\alpha}} L.$$

Comparer X^c et X^m et interpréter très brièvement.

1.2 Taux d'intérêt et production de biens finaux

On admettra les résultats suivants :

Question 4 Calculer la probabilité que le bien intermédiaire inventé à la date t soit encore un bien "monopolisé" à la date $\nu \geq t$. En déduire, à l'aide des questions précédentes, que l'espérance à la date t de la valeur actualisée à la date t du bénéfice de l'invention de ce bien à la date t vaut

$$E(V_t) = A^{\frac{1}{1-\alpha}} (1-\alpha) \alpha^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} L \int_t^{+\infty} e^{-\int_t^{\nu} (r_\tau + \pi) d\tau} d\nu.$$

— Version courte 1 (pour les physiciens) : Soit p_τ la probabilité que le bien intermédiaire inventé à la date t soit encore monopolisé à la date τ. On a $p_{\tau+d\tau} = p_\tau(1-\pi d\tau)$ et donc

$$\frac{p_{\tau+d\tau} - p_\tau}{d\tau} = -\pi p_\tau \text{ donc } p_\tau = -\pi p_\tau \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\dot{p}_\tau}{p_\tau} = -\pi$$

— Version courte 2 (théorie de l'analyse de survie connue) : Si π est la probabilité qu'un bien intermédiaire devienne concurrentiel à la date $\tau > s$, π est donc par définition la fonction d'aléa (*hazard function* : la probabilité instantanée de changer d'état) associée à la situation de monopole. On a donc

$$\pi = -\frac{\dot{p}_\tau}{p_\tau}$$

où p_τ est la fonction de survie de la situation de monopole, c'est-à-dire la probabilité que le bien intermédiaire soit encore monopolisé à la date τ.

— Version longue : si un bien intermédiaire a pour probabilité π de devenir concurrentiel en τ, alors la probabilité que τ se trouve dans l'intervalle $]s; s+ds]$ sachant que le bien était monopolisé à la date s s'écrit :

$$P(s < \tau \leq s + ds | \tau > s) = \pi ds$$

On a donc

$$\pi = \frac{P(s < \tau \leq s+ds)}{dsP(\tau > s)} = \frac{P(\tau \leq s+ds) - P(\tau < s)}{dsP(\tau > s)} = -\frac{P(\tau > s+ds) - P(\tau \geq s)}{dsP(\tau > s)}$$

En passant à la limite $ds \to 0$:

$$\lim_{ds\to 0} -\frac{P(\tau > s+ds) - P(\tau > s)}{dsP(\tau > s)} = -\frac{\frac{\partial \tau}{\partial P}(\tau > s)}{P(\tau > s)} = \pi$$

Si on note $p_\tau = P(\tau > s)$ la probabilité que le bien soit encore monopolisé à la date τ (c'est la fonction de survie), on a alors

$$-\frac{\dot{p}_\tau}{p_\tau} = \pi$$

En intégrant $\dfrac{\dot{p}_\tau}{p_\tau} = -\pi$ entre t et ν :

$$\int_t^\nu \frac{\dot{p}_\tau}{p_\tau} d\tau = \int_t^\nu -\pi d\tau \quad \Leftrightarrow \quad [\log p_\tau]_t^\nu = [-\pi\tau]_t^\nu \quad \Leftrightarrow \quad p_\nu = p_t e^{-\pi(\nu - t)}$$

et en utilisant $p_t = 1$, on obtient

$$p_\nu = e^{-\pi(\nu-t)}.$$

Une fois le bien devenu concurrentiel, le bénéfice est nul. Par conséquent,

$$E(V_t) = \int_t^{+\infty} \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) X^m e^{-\pi(\nu-t)} e^{-\int_t^\nu r_\tau d\tau} d\nu = A^{\frac{1}{1-\alpha}} (1-\alpha)\alpha^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} L \int_t^{+\infty} e^{-\int_t^\nu (r_\tau + \pi) d\tau} d\nu.$$

Question 5 On suppose que les inventeurs-producteurs potentiels décident d'inventer en fonction de cette espérance $E(V_t)$.[1] On admet que, sous certaines conditions sur les paramètres du modèle (qu'on suppose vérifiées par la suite), on a $E(V_t) = \eta$ à l'équilibre. En déduire que r_t est constant dans le temps et déterminer sa valeur notée r.

De $E(V_t) = \eta$ on déduit que

$$\int_t^{+\infty} e^{-\int_t^\nu (r_\tau+\pi)d\tau} d\nu = \frac{\eta}{A^{\frac{1}{1-\alpha}}(1-\alpha)\alpha^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} L} = \textit{cste}$$

(cf. chapitre 4 slide 73) En notant $\mathcal{A}_t = g(t,t) = \int_t^{+\infty} e^{-\int_t^\nu (r_\tau+\pi)d\tau} d\nu$, avec $g(u,v) = \int_u^{+\infty} e^{-\int_v^\nu (r_\tau+\pi)d\tau} d\nu$, on a

$$\mathcal{A}_t = \frac{\partial g}{\partial u}(t,t) + \frac{\partial g}{\partial v}(t,t) = -e^{-\int_t^t (r_\tau+\pi)d\tau} + (r_t + \pi) \int_t^{+\infty} e^{-\int_t^\nu (r_\tau+\pi)d\tau} d\nu = (r_t+\pi)\mathcal{A}_t - 1$$

où on a utilisé $\frac{\partial x}{\partial \int}{}_a^x f(z)dz = f(x)$ par le théorème fondamental de l'analyse (qui est un cas particulier de la règle de Leibniz).
$\mathcal{A}_t$ étant constant, $\mathcal{A}_t = 0$ donc $r_t = \dfrac{1}{\mathcal{A}} - \pi$ est constant et

$$r = A^{\frac{1}{1-\alpha}}(1-\alpha)\alpha^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} \frac{L}{\eta} - \pi$$

Question 6 Interpréter très brièvement l'effet de π sur r.

Question 7 En utilisant les réponses aux questions 2 et 3, montrer que

$$Y_t = A^{\frac{1}{1-\alpha}} \alpha^{\frac{2\alpha}{1-\alpha}} L N_t \left[1 + \frac{N_t^c}{N_t}\left(\alpha^{\frac{-\alpha}{1-\alpha}} - 1\right)\right],$$

où N_t^c représente la taille du continuum de biens intermédiaires concurrentiels à la date t. Interpréter très brièvement l'effet de N_t^c sur Y_t à N_t donné.

1. Cette hypothèse est justifiée lorsque les inventeurs-producteurs sont regroupés dans des entreprises diversifiées, de sorte qu'ils se comportent comme des agents neutres au risque (i.e. des agents dont l'aversion au risque est égale à zéro).

1.3 Etat régulier et politique économique

Question 8 Ecrire la condition d'équilibre sur le marché des biens finaux. Par ailleurs, montrer très brièvement que

$$\dot{N_t^c} = \pi(N_t - N_t^c).$$

Question 9 Définir l'état régulier. Déduire des réponses aux questions 5, 6 et 8 qu'à l'état régulier les quantités Y_t, C_t, N_t et N_t^c croissent au taux

$$\gamma \equiv \frac{1}{\theta}\left[A^{\frac{1}{1-\alpha}}(1-\alpha)\alpha^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}}\frac{L}{\eta} - \rho - \pi\right].$$

Déterminer la valeur de $\frac{N_t^c}{N_t}$ à l'état régulier en fonction de γ et π. Interpréter très brièvement.

Question 10 On suppose dans cette question que le gouvernement peut choisir la valeur de π (ce qui revient à choisir la durée moyenne des brevets de fabrication), mais n'a pas d'autre instrument de politique économique à sa disposition. On rappelle que dans le modèle vu en cours (correspondant à la valeur $\pi = 0$, c'est-à-dire à des monopoles perpétuels), le taux de croissance de l'économie est plus faible à l'équilibre de marché qu'à l'allocation choisie par le planificateur. Le gouvernement peut-il mettre en œuvre l'allocation du planificateur en choisissant une valeur adéquate de π ? Interpréter très brièvement.

Question 11 On suppose dans cette question que le gouvernement peut proposer des subventions financées par impôt forfaitaire sur les ménages (mais ne peut pas choisir la valeur de π, qu'on peut alors interpréter comme un paramètre mesurant la vitesse à laquelle des concurrents percent un secret de fabrication). On rappelle que, dans le modèle vu en cours (correspondant à la valeur $\pi = 0$, c'est-à-dire à des monopoles perpétuels), subventionner l'achat de biens intermédiaires au taux $1-\alpha$ permet de mettre en œuvre l'allocation du planificateur en augmentant le rendement privé de la R&D à l'équilibre de marché de $A^{\frac{1}{1-\alpha}}(1-\alpha)\alpha^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}}\frac{L}{\eta}$ à $r^p \equiv A^{\frac{1}{1-\alpha}}(1-\alpha)\alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\frac{L}{\eta}$. Dans le présent modèle (avec $\pi > 0$), le gouvernement peut-il mettre en œuvre l'allocation du planificateur en ne subventionnant que l'achat de biens intermédiaires monopolisés ? Interpréter très brièvement.