**MICROÉCONOMIE**
**Deuxième année**
**Philippe Choné**
**Session de janvier 2022**
**Deux heures - Sans document ni calculatrice**

La présentation générale et la lisibilité des copies seront prises en compte dans la notation. Les réponses peuvent être rédigées en français ou en anglais.

**Question de cours :** On considère une relation économique entre un principal et un agent.

1. Dans quelles circonstances la relation est-elle sujette à un problème d'aléa moral ?
2. Décrire l'optimum de premier rang.
3. Décrire l'arbitrage auquel fait face le principal en second rang.
4. Expliquer pourquoi l'optimum de second rang est inefficace.

*Les réponses attendues sont brèves, trois ou quatre lignes au maximum par question.*

**Exercice :** Alice et Bob consomment un bien privé en quantité $x_i$, $i \in \{A, B\}$, et un bien public $z$. Ils ont la même fonction d'utilité

$$u(x_i, z) = \ln x_i + \ln z.$$

La production d'une unité de bien public demande une unité de bien privé. Alice et Bob ont initialement la même dotation en bien privé, notée $\bar{x}$. Les dotations intiales en bien public sont nulles.

**1.** Un planificateur cherche les consommations $x_A$, $x_B$ et $z$ qui maximisent la somme des utilités des deux agents. Déterminer les consommations d'Alice et Bob en biens public et privé, $x_A$, $x_B$ et $z$, ainsi que leur utilité individuelle, en fonction de $\bar{x}$.

Le planificateur maximise

$$u(x_A, z) + u(x_B, z) = \ln x_A + \ln x_B + 2\ln z$$

sous la contrainte de faisabilité $x_A + x_B + z = 2\bar{x}$. Le Lagrangien s'écrit

$$\mathcal{L} = \ln x_A + \ln x_B + 2\ln z + \lambda\left(2\bar{x} - x_A - x_B - z\right).$$

D'où : $1/x_A = 1/x_B = 2/z = \lambda$ et donc $x_A = x_B = x$ et $z = 2x$. En remplaçant dans la contrainte de faisabilité, on trouve $4x = 2\bar{x}$, donc $x = \bar{x}/2$ et $z = \bar{x}$. L'utilité de chaque agent est donc $\ln(\bar{x}/2) + \ln(\bar{x}) = \ln\left(\bar{x}^2\right) + \ln(1/2)$.

**2.** On suppose maintenant qu'Alice et Bob contribuent au bien public pour des montants $s_i$, $i \in \{A, B\}$. Les contributions sont déterminées simultanément et sans coopération (équilibre de Nash).

a) Déterminer les niveaux de bien public, de consommation privée et d'utilité qui en résultent pour Alice et Bob.

b) Comparer au résultat de la question 1 et commenter.

a) Si les contributions sont $s_i + s_j$, le niveau de bien public produit est $z = s_i + s_j$. L'agent $i$ décide de sa contribution en maximisant son utilité, la contribution de l'agent $j$ étant fixée :

$$\max_{s_i} \ln(\bar{x} - s_i) + \ln(s_i + s_j),$$

ce qui donne

$$\frac{1}{\bar{x} - s_i} = \frac{1}{s_i + s_j},$$

et de même pour l'agent $j$. On en déduit que les deux agents contribuent pour le même montant $s_i = s_j = s$ donné par

$$\frac{1}{\bar{x} - s} = \frac{1}{2s}.$$

D'où $s = \bar{x}/3$ et $z = 2s = 2\bar{x}/3$ et $x = 2\bar{x}/3$. L'utilité de chaque agent est donc $\ln(2\bar{x}/3) + \ln(2\bar{x}/3) = \ln\left(\bar{x}^2\right) + \ln(4/9)$.

b) A l'équilibre de Nash il y a sous-production de bien public, $2\bar{x}/3 < \bar{x}$, et l'utilité de chaque agent est inférieure à l'utilité optimale de la question 1. La raison est qu'à l'équilibre de Nash chaque agent n'internalise pas l'effet positif de sa contribution (augmentation du niveau de bien public) sur l'utilité de l'autre agent.

**Problème : Mécanisme de vente par rationnement** Un vendeur en monopole fait face à une population de $N$ consommateurs potentiels. Chaque consommateur achète au plus une unité du bien. Les acheteurs sont de deux types :

— $\underline{N}$ d'entre eux sont prêts à payer $\underline{v}$ pour le bien ;

— $\bar{N}$ d'entre eux sont prêts à payer $\bar{v}$ pour le bien ;

avec $N = \underline{N} + \bar{N}$ et $0 < \underline{v} < \bar{v}$.

Le vendeur n'observe pas le type des acheteurs. Il dispose de $K$ unités à vendre, avec $\bar{N} < K < N$. Il cherche à maximiser sa recette totale.

On suppose dans tout l'exercice que : $\bar{N}\bar{v} < N\underline{v}$.

**1.** Représenter graphiquement dans le plan $(q, p)$ la fonction de demande agrégée $q = D(p)$, qui donne le nombre total d'unités vendues pour chaque valeur possible du prix $p$.

L'exercice est tiré de l'article "Monopoly pricing, optimal randomization and resale", par Simon Loertscher et Ellen V. Muir, Journal of Political Economy, 2022.

La fonction de demande est représentée sur la Figure 1 ci-dessous.

**2.** On note $p = P(q)$ la fonction inverse de demande, c'est-à-dire la fonction réciproque de la fonction $D(p)$ introduite à la question précédente.

Représenter graphiquement l'allure de la fonction de recettes $R(q) = qP(q)$. Pour quelle valeur de $q$ la recette $R(q)$ est-elle maximale ?

La fonction de recettes est représentée sur la Figure 2 ci-dessous. Elle atteint son maximum en $q = N$. Son maximum vaut $N\underline{v}$.

**3.** On suppose dans cette question que le monopole affiche un prix $p$ et qu'en fonction de ce prix chaque consommateur décide d'acheter une unité ou non.

Déterminer le prix et la quantité de monopole en fonction de $K$. Le monopole vend-il toutes ses unités ? Donner sa recette totale à l'optimum.

Indication : On distinguera selon que $K$ est plus grand ou plus petit que $Q^* = \bar{N}\bar{v}/\underline{v}$.

Si $K \leq Q^*$, le monopole affiche le prix $\bar{v}$ et vend $\bar{N}$ unités, c'est-à-dire une unité à chaque consommateur de type $\bar{v}$. Il réalise une recette totale de $\bar{v}\bar{N}$. Il ne vend pas donc pas toutes ces unités.
Si $K \geq Q^*$, le monopole affiche le prix $\underline{v}$, vend toutes ses unités, et réalise une recette totale de $\underline{v}K$.
Pour $K = Q^*$, le vendeur est indifférent entre les deux situations précédentes.

**4.** On suppose maintenant que le monopole est capable de s'engager sur un mécanisme de rationnement. Il propose deux options aux consommateurs :

- payer le prix $\bar{p}$ en échange d'une unité d'une manière certaine ;
- ou participer à une loterie : si le consommateur gagne, il a accès à une unité au prix $\underline{p}$ ; s'il perd, il n'a pas accès au bien et il ne paie rien. Le consommateur gagne avec probabilité $\underline{x} \leq 1$.

Les acheteurs sont neutres vis-à-vis du risque. Ceux qui choisissent la seconde option sont rationnés : seule une fraction $\underline{x}$ d'entre eux (tirée au hasard) a accès au bien.

a) Ecrire les contraintes d'incitation qui assurent que les consommateurs de type $\bar{v}$ choisissent la première option et que les consommateurs de type $\underline{v}$ choisissent la seconde.

b) On admet qu'à l'optimum : $\underline{p} = \underline{v} < \bar{p}$.[1] En déduire, en fonction de $\underline{v}, \bar{v}$ et $\underline{x}$, la valeur de $\bar{p}$ qui est optimale pour le vendeur.

c) Soit $Q$ le nombre d'unités vendues avec ce mécanisme. Écrire $Q$ en fonction de $\bar{N}$, $N$ et $\underline{x}$.

d) Écrire la recette réalisée par le vendeur, $R$, en fonction de $\bar{N}\bar{v}$, $N\underline{v}$ et $\underline{x}$.

e) Donner la valeur optimale de $\underline{x}$ en fonction de $\underline{N}, \bar{N}$ et $K$.

f) Représenter la recette réalisée en fonction de $K$ sur la même figure que celle de la question 2. Décrire l'impact du mécanisme pour le vendeur et pour les deux types de consommateurs, selon que $K$ est plus petit ou plus grand que $Q^*$.

a) Les contraintes d'incitation des hauts types et des bas types sont respectivement :

$$\bar{v} - \bar{p} \geq \underline{x}(\bar{v} - \underline{p}) \quad \text{and} \quad \underline{x}(\underline{v} - \underline{p}) \geq \underline{v} - \bar{p}.$$

1. On prend en fait $\underline{p}$ légèrement en-dessous de $\underline{v}$ pour que les bas types achètent en cas de succès à la loterie.

b) Si $\underline{v} = \underline{p} < \bar{p}$, la contrainte d'incitation des bas types n'est pas active et celle des hauts types donne

$$\bar{p} \leq (1 - \underline{x})\bar{v} + \underline{xv},$$

ce qui est une combinaison convexe de $\underline{v}$ et $\bar{v}$. Le monopole a intérêt à choisir le prix $\bar{p}$ qui sature cette contrainte, car cela augmente sa recette sans rien changer à la demande, donc

$$\bar{p} = (1 - \underline{x})\bar{v} + \underline{xv}.$$

c) La quantité vendue s'écrit :

$$Q = \bar{N} + \underline{x}\,\underline{N} = (1 - \underline{x})\bar{N} + \underline{x}\,(\underline{N} + \bar{N}) = (1 - \underline{x})\bar{N} + \underline{x}N.$$

d) La recette réalisée par le vendeur est

$$R = \bar{N}\bar{p} + \underline{x}\,\underline{N}\,\underline{v} = \bar{N}\,[(1 - \underline{x})\bar{v} + \underline{xv}] + \underline{x}\,\underline{N}\,\underline{v} = (1 - \underline{x})\bar{N}\bar{v} + \underline{x}\,N\underline{v}.$$

e) Puisque par hypothèse $\bar{N}\bar{v} < N\underline{v}$, la recette $R$ ci-dessous est croissante avec $\underline{x}$. Le vendeur a donc intérêt à prendre $\underline{x}$ le plus élevé possible, c'est-à-dire à vendre toutes ses unités. Il chosit donc $\underline{x}$ pour que $Q = K$, ce qui donne

$$\bar{N} + \underline{x}\,\underline{N} = K$$

ou

$$\underline{x} = \frac{K - \bar{N}}{\underline{N}}.$$

Une fois que le vendeur a vendu $\bar{N}$ unités aux consommateurs de haut type, il lui reste $K - \bar{N} \leq \underline{N}$ unités pour les bas types, qu'il leur attribue de manière aléatoire.

f) La recette réalisée est représentée sur la Figure 3. Le mécanisme permet au monopole dans tous les cas de vendre toutes ses unités, $Q = K$. Plus précisément :

— Si $K < Q^*$ : avec un prix unitaire déterministe (cf. question 3.), le vendeur ne vend pas toutes ses unités, alors qu'il les vend avec un mécanisme de rationnement. Les hauts types continuent d'acquérir une unité, mais à un prix moindre ($\bar{p} < \bar{v}$), et le vendeur perçoit une recette plus grande. Une fraction des bas types acquiert maintenant une unité, mais en obtenant un surplus nul ($\underline{p} = \underline{v}$) ;

— Si $K > Q^*$ : Toutes les unités sont vendues avec les deux mécanismes. Le vendeur a une recette plus élevée avec le mécanisme de rationnement, les consommateurs de haut type y perdent car le prix monte de $\underline{v}$ à $\bar{p} > \underline{v}$. Les bas types ont un surplus nul dans les deux cas ($\underline{p} = \underline{v}$).

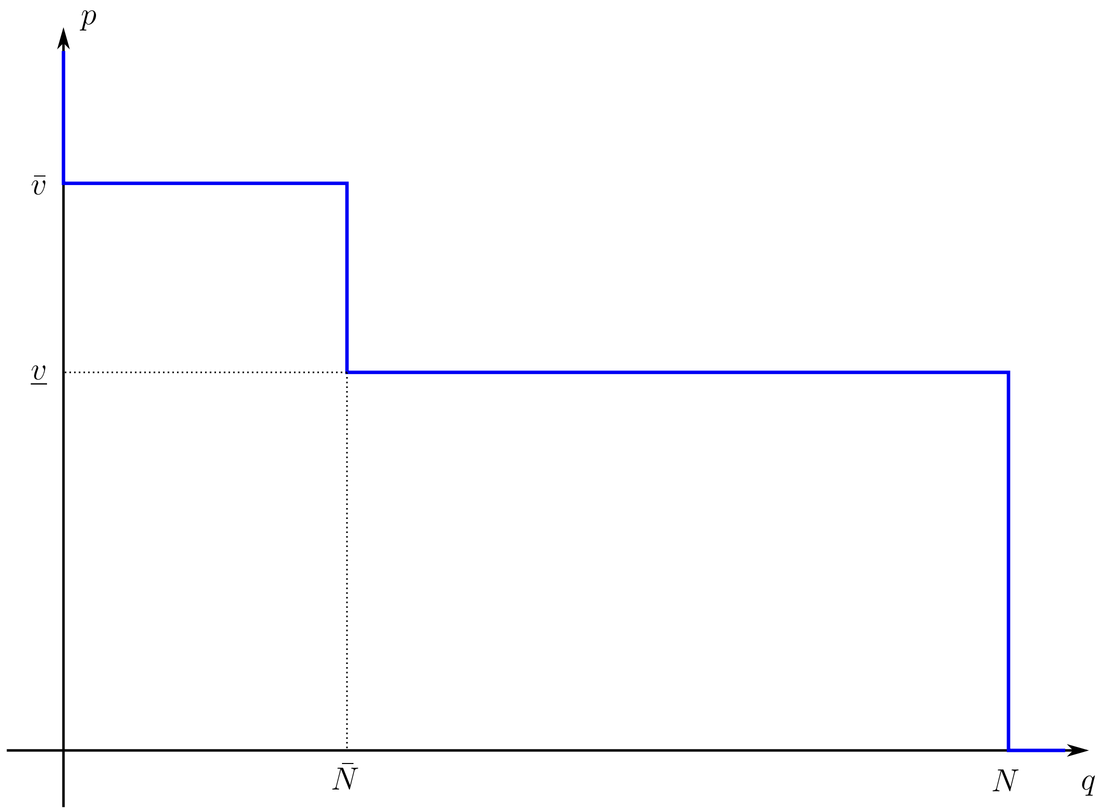


Figure 1 – Demande

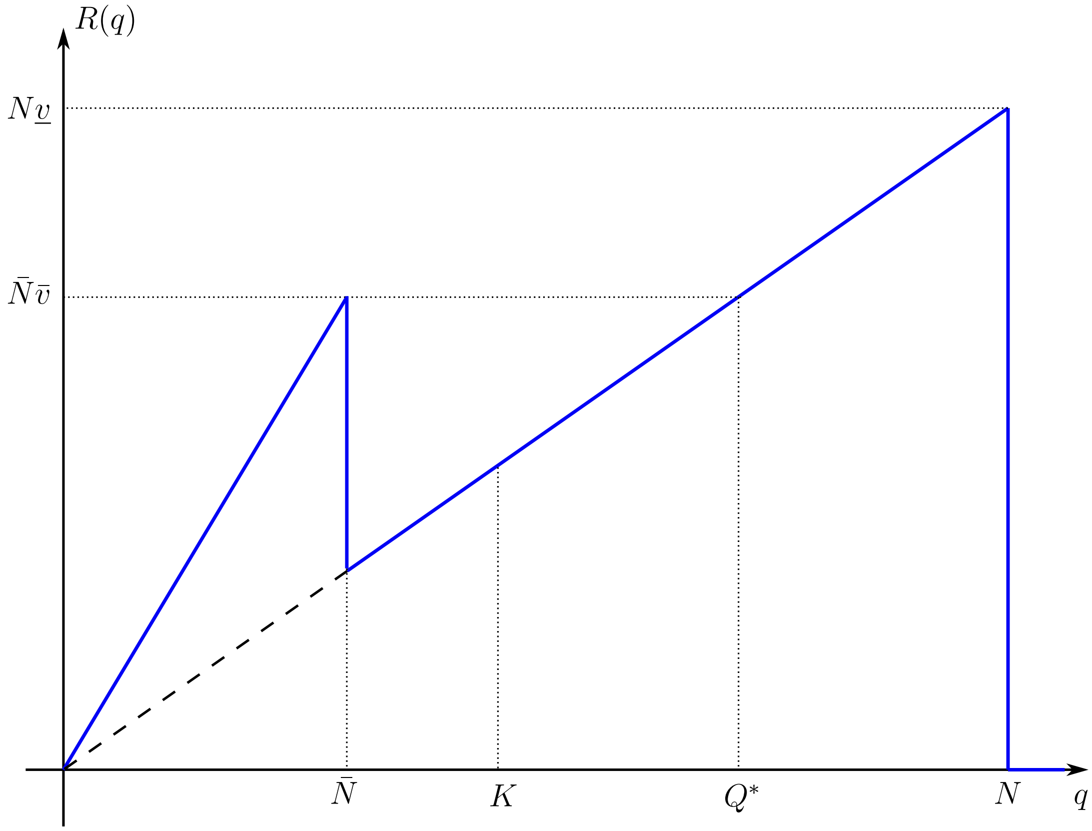


FIGURE 2 – Recette totale du vendeur s'il vend $q$ unités

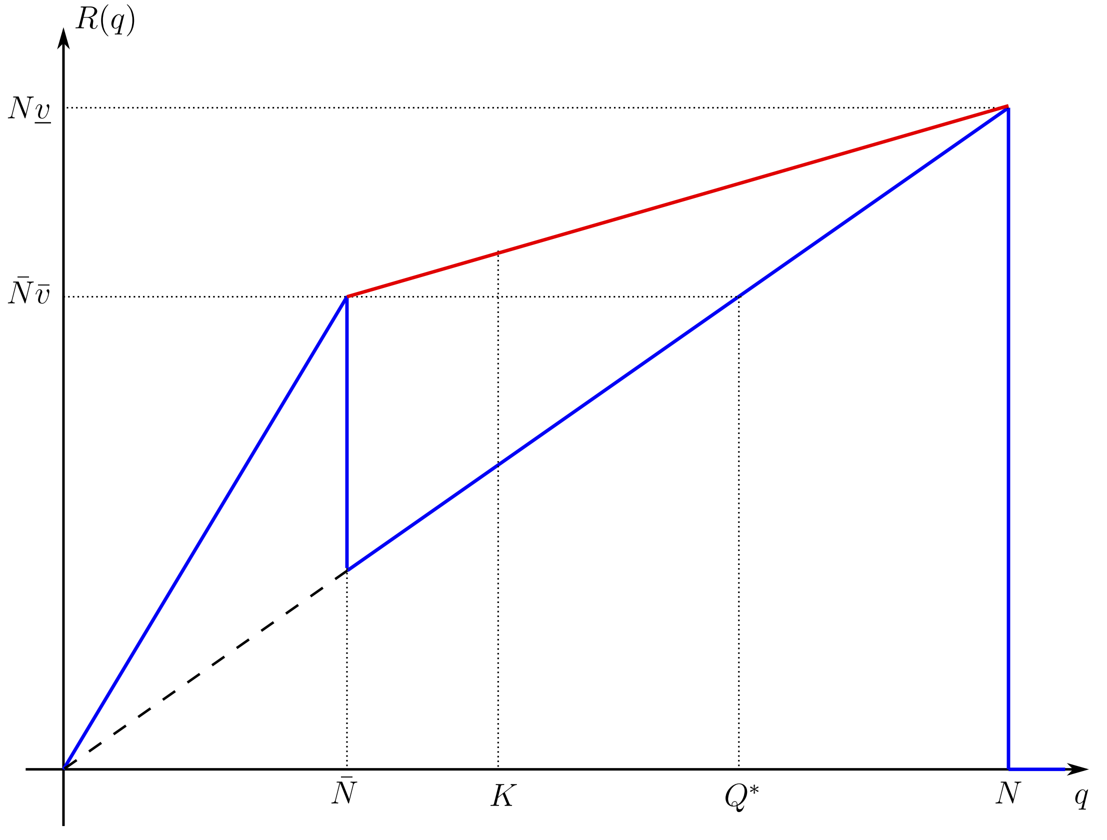


FIGURE 3 – Recette totale obtenue avec le mecanisme de rationnement (en rouge)