TD2 : Méthodes empiriques

Exercice 1. (Inégalité de Hoeffding) Soient $V_1, \ldots, V_n$ des variables indépendantes (pas nécessairement de même loi) à valeurs dans $[-1,1]$. On pose $\bar{V}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n V_i$ et $\mu = \mathbf{E}[\bar{V}_n]$. Le but de l'exercice est de prouver que

$$\mathbf{P}(\bar{V}_n - \mu \geq t) \leq e^{-nt^2/2}, \qquad \forall t > 0.$$

1. Montrer que pour tout $\lambda > 0$, on a

$$\mathbf{P}(\bar{V}_n - \mu \geq t) \leq e^{-n\lambda(t+\mu)} \prod_{i=1}^n \mathbf{E}[e^{\lambda V_i}].$$

2. Posons $\varphi_i(\lambda) = \log \mathbf{E}[e^{\lambda V_i}]$. Calculer la dérivée et la dérivée seconde de φ_i.
3. Montrer que $\varphi_i''(x) \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En déduire que $\varphi_i(\lambda) \leq \lambda \mathbf{E}[V_i] + \lambda^2/2$.
4. Utiliser la question 1 et la question précédente, pour vérifier que

$$\mathbf{P}(\bar{V}_n - \mu \geq t) \leq e^{-n\lambda t + n\lambda^2/2}, \qquad \forall \lambda, t > 0.$$

   Conclure.

Exercice 2. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires i.i.d. de fonction de répartition F^*. Rappelons que la fonction de répartition empirique est définie par

$$\widehat{F}_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbb{1}(X_i \leq x).$$

1. Montrer que

$$\mathbf{P}\Big(2\widehat{F}_n(x) - 1 \geq 2F^*(x) - 1 + t\Big) \leq e^{-nt^2/2}, \qquad \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

2. En déduire que

$$\mathbf{P}\Big(|\widehat{F}_n(x) - F^*(x)| \geq y\Big) \leq 2e^{-2ny^2}, \qquad \forall y \in \mathbb{R}_+.$$

3. Soit $\alpha \in]0,1[$. Trouver un nombre réel $a > 0$ tel que

$$\mathbf{P}\Big(F^*(x) \in [\widehat{F}_n(x) - a, \widehat{F}_n(x) + a]\Big) \geq 1 - \alpha.$$

Exercice 3. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables indépendantes et de même loi de moment d'ordre 4 fini.
Rappelons les notations

$$\mu = \mathbf{E}[X_1], \quad \sigma^2 = \mathbf{E}[X_1^2] - \mu^2, \quad S_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \bar{X}_n^2.$$

Supposons, pour simplifier les calculs, que $\mu = \mathbf{E}[X_1] = 0$.

1. Montrer que la suite $\{n^{1/4}\bar{X}_n : n \in \mathbb{N}^*\}$ converge en probabilité vers zéro.
2. Trouver la loi limite de la suite $\{\sqrt{n}(S_n - \sigma^2) : n \in \mathbb{N}^*\}$.