TD4 : Méthode des moments

Exercice 1. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables indépendantes de densité

$$f(x;\theta) = \frac{1}{a} e^{-(x-b)/a} \mathbb{1}(x \geq b), \qquad \forall x \in \mathbb{R},$$

où $\theta = (a, b) \in]0, +\infty[\times \mathbb{R}$ est le paramètre inconnu.

1. Calculer $\mu_1(\theta) = \mathbf{E}_\theta[X_1]$ et $\mu_2(\theta) = \mathbf{E}[X_1^2]$.
2. Déterminer l'estimateur par la méthode des moments $\widehat{\theta}_n^{\text{MM}} = (\widehat{a}_n^{\text{MM}}, \widehat{b}_n^{\text{MM}})$ du paramètre θ.
3. Montrer que $\widehat{a}_n^{\text{MM}}$ est asymptotiquement normal et déterminer sa variance limite.
4. (Facultative) Quelle est la loi de la variable $Y_1 = (X_1 - b)/a$?

Exercice 2. (*Modèle de mélange*.) Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires i.i.d. dont la densité f est un mélange de deux densités gaussiennes $\mathcal{N}(0, 1)$ et $\mathcal{N}(0, 4)$:

$$f(x;\theta) = \frac{\theta}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) + \frac{(1-\theta)}{2\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{8}\right),$$

où $\theta \in]0, 1[$ est un paramètre inconnu que l'on souhaite estimer. Expliciter $\widehat{\theta}_n^{\text{MM}}$, l'estimateur de θ obtenu à l'aide de la méthode des moments. Montrer que l'estimateur $\widehat{\theta}_n$ est consistant et déterminer la loi limite de $\sqrt{n}(\widehat{\theta}_n^{\text{MM}} - \theta)$ lorsque $n \to \infty$.

Exercice 3. (facultatif) Soient $\{X_i : i \in \mathbb{N}^*\}$ une suite de variables iid à valeurs réelles et soit N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On pose

$$S = \sum_{n=1}^{N} X_n$$

Montrer que si N est indépendant de X_i pour tout $i \in \mathbb{N}$, alors

$$\mathbf{E}[S] = \mathbf{E}[N]\, \mathbf{E}[X_1].$$