

# Autour du modèle de Cass-Koopmans-Ramsey

Cette partie est inspirée de l'article de Barro et Sala-i-Martin (1992)<sup>1</sup>, qui s'intéresse à la pertinence empirique du modèle de croissance à épargne endogène de Cass, Koopmans (1965) et Ramsey (1928).

## 1 Spécification des préférences

On considère une économie peuplée de ménages à durée de vie infinie. Le taux de croissance de la population est nul. Le temps est continu, indiqué par  $t$ . Le ménage représentatif offre inélastiquement un flux de travail d'une unité à chaque instant  $t$ , rémunéré au salaire  $w_t$ . On note  $b_t = B_t/L_t$  la quantité d'actifs qu'il détient (en unités de bien par tête), et  $r_t$  le taux de rendement de ces actifs. Son utilité intertemporelle à la date 0 est

$$U_0 \equiv \int_0^{+\infty} e^{-\rho t} u(c_t) dt$$

où  $c_t$  est la consommation par tête,  $\rho$  le taux de préférence pour le présent ( $\rho > 0$ ), et  $u$  la fonction d'utilité instantanée. On suppose que cette dernière vérifie les propriétés usuelles.

### 1.1 Programme des ménages

**Question 1** Ecrire la contrainte budgétaire instantanée du ménage représentatif, puis obtenir sa contrainte budgétaire intertemporelle et sa condition de solvabilité.

**Question 2** Ecrire le programme de maximisation du ménage représentatif. Résoudre ce programme pour obtenir l'équation d'Euler.

### 1.2 Préférences exponentielles

On suppose que l'utilité instantanée des ménages est exponentielle :

$$u(c) \equiv -\alpha e^{-\frac{1}{\alpha}c} \quad \text{où } \alpha > 0$$

**Question 3** Existe-t-il une propriété usuelle que cette fonction  $u$  ne vérifie pas ? Si oui, on admet que cela n'affecte pas les conditions d'optimisation du programme des ménages.

**Question 4** Déterminer l'équation d'Euler exprimant  $\frac{\dot{c}_t}{c_t}$  en fonction de  $c_t$ ,  $r_t$  et de paramètres constants du modèle.

**Question 5** Peut-on avoir un taux de croissance de la consommation strictement positif et constant à long terme ? Interpréter en commentant la valeur prise par l'élasticité de substitution intertemporelle.

## 2 Baisse permanente du taux de préférence pour le présent

On reprend le cadre du modèle de Caas-Koopmans-Ramsey étudié en cours. La technologie  $A_t$  croît au taux  $g$ , la population  $L_t$  croît au taux  $n$  et le capital  $K_t$  se déprécie au taux  $\delta$ . À la date 0, la fonction d'utilité intertemporelle du ménage représentatif est

$$U_0 = \int_0^{+\infty} e^{-\rho t} L_t u(c_t) dt,$$

---

1. Barro, R. J., & Sala-i-Martin, X. (1992). Convergence. *Journal of political Economy*, 100(2), 223-251.

$$\text{avec } u(c) = \begin{cases} \frac{c^{1-\theta}-1}{1-\theta} & \text{si } \theta \geq 0, \theta \neq 1, \\ \ln(c) & \text{si } \theta = 1. \end{cases}$$

On définit les variables du capital et de la consommation par unité de travail efficace  $\kappa_t = \frac{K_t}{A_t L_t}$  et  $\gamma_t = \frac{C_t}{A_t L_t}$ . On suppose  $\rho > n > 0$  et  $\rho > n + (1 - \theta)g$ .

On rappelle le système d'équations différentielles régissant l'évolution de  $\kappa_t$  et  $\gamma_t$  à l'équilibre :

$$\begin{cases} \dot{\kappa}_t = \frac{f'(\kappa_t) - \delta - \rho - g\theta}{\theta} \gamma_t \\ \dot{\gamma}_t = f(\kappa_t) - (\delta + n + g)\kappa_t - \gamma_t \end{cases}$$

**Question 6** Représenter les courbes  $\dot{\kappa}_t = 0$  et  $\dot{\gamma}_t = 0$  ainsi que l'état régulier dans le plan  $(\kappa_t, \gamma_t)$ .

**Question 7** Indiquer le signe de  $\dot{\kappa}_t$  et de  $\dot{\gamma}_t$  dans les différentes zones et représenter le sentier-selle.

On suppose que l'économie est initialement dans son état stationnaire. En  $t = T$ , le taux de préférence pour le présent  $\rho$  diminue de manière non anticipée de  $\rho_1$  à  $\rho_2$  avec  $\rho_2 < \rho_1$ , puis reste à  $\rho_2$  par la suite. Les conditions sur  $\rho$  énoncées en introduction restent vérifiées.

**Question 8** Comparer le nouvel état stationnaire à l'ancien. Interpréter.

**Question 9** Représenter l'ancien et le nouvel état stationnaire. Représenter la dynamique de l'économie à partir de la date  $T$  dans le plan  $(\kappa_t, \gamma_t)$ . Interpréter.

**Question 10** Comparer cette dynamique à celle obtenue dans le cas d'une hausse permanente du taux d'épargne dans le modèle de Solow-Swan.

### 3 Vitesse de convergence

On reprend le système d'équations différentielles régissant l'évolution de  $\kappa_t$  et  $\gamma_t$  étudié dans la section précédente

$$\begin{cases} \dot{\kappa}_t = f(\kappa_t) - (\delta + n + g)\kappa_t - \gamma_t \\ \dot{\gamma}_t = \frac{f'(\kappa_t) - \delta - \rho - g\theta}{\theta} \gamma_t \end{cases}$$

On suppose que la fonction de production est du type Cobb-Douglas de sorte que  $f(\kappa_t) = \kappa_t^\alpha$  avec  $0 < \alpha < 1$ . On introduit les variables exprimées en déviation logarithmique par rapport à l'état régulier

$$\hat{\kappa}_t \equiv \log\left(\frac{\kappa_t}{\kappa^*}\right) \quad \text{et} \quad \hat{\gamma}_t \equiv \log\left(\frac{\gamma_t}{\gamma^*}\right)$$

**Question 11** Déterminer les équations vérifiées par les variables à l'état régulier.

A l'instar du chapitre 1 et du TD1, on peut trouver la solution générale du modèle et calculer la vitesse de convergence vers l'état régulier. On admettra les questions 14 à 17 pour les détails des calculs.

**Question 12** À partir des données de 47 états américains entre 1880 et 1988, l'estimation économétrique de l'équation suivante :

$$\frac{1}{T} \log\left(\frac{y_{i,t_0+T}}{y_{i,t_0}}\right) = A + B \log(y_{i,t_0}) + u_{i,t_0,t_0+T} \quad (1)$$

où  $y_{i,t}$  est le niveau de la production par tête dans l'état  $i$  pendant l'année  $t$  et  $u_{i,t,t'}$  un terme d'erreur, donne les résultats affichés dans la Table 1.

Sachant les équations (1) et (2) et l'estimateur de la vitesse de convergence

$$\hat{\beta} = -\frac{1}{T} \log(1 + \hat{B}T)$$

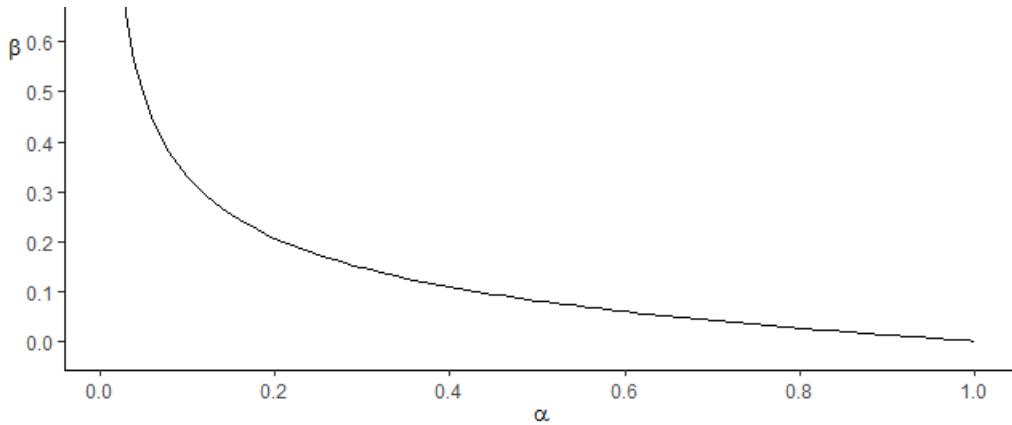
, combien de temps faut-il pour résorber la moitié de l'écart initial par rapport à l'état régulier ?

**Question 13** Le graphique ci-dessous représente  $\beta$  en fonction de  $\alpha$  pour les valeurs des paramètres énoncées précédemment. Quelle valeur de  $\alpha$  le modèle de Cass-Koopmans-Ramsey avec fonction de production Cobb-Douglas implique-t-il ? Ce modèle permet-il de rendre compte de la vitesse de convergence conditionnelle des niveaux de vie entre les états américains ?

**TABLE 1**  
**CROSS-STATE REGRESSIONS FOR PERSONAL INCOME**

Sample	$\hat{\beta}$		$R^2$	$\sigma$
I. 1880–1988	.0175 (.0046)	...	.92	.0014
...				

NOTE.—Standard errors of coefficients are shown in parentheses. Regression 22 has 29 observations, regressions 1 and 2 have 47 observations (excluding Oklahoma), and regression 12 has 46 observations (excluding Oklahoma and Wyoming). All others have 48 observations. The dependent variable is the growth rate of real per capita personal income exclusive of transfers over the indicated sample period. Each regression includes a constant and three regional dummy variables, south, midwest, and west. (Regression 22 includes only south and midwest.) The coefficient  $\hat{\beta}$  applies to  $\log(y_{i,t_0})$ , where  $y_{i,t_0}$  is real per capita personal income at the start of the period.



## 4 Annexe - questions 14 à 17

**Question 14** (optionnel) Montrer que l'approximation log-linéaire du système d'équations différentielles autour de l'état régulier peut s'écrire<sup>2</sup>

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{\kappa}}_t \\ \dot{\hat{\gamma}}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \zeta & g + n + \delta - (\rho + \theta g + \delta)/\alpha \\ -(1 - \alpha)(\rho + \theta g + \delta)/\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\kappa}_t \\ \hat{\gamma}_t \end{bmatrix} \quad \text{où } \zeta \equiv \rho - n - (1 - \theta)g > 0$$

On note :

$$\hat{x}_t = \log\left(\frac{x_t}{x^*}\right) \approx \log\left(\frac{x^*}{x^*}\right) + \frac{x^*}{x^{*2}}(x_t - x^*) \quad \text{donc} \quad \hat{x}_t \approx \frac{x_t - x^*}{x^*} \Leftrightarrow x_t \approx (1 + \hat{x}_t)x^*$$

$$\dot{\hat{x}}_t = \frac{\partial}{\partial t} \hat{x}_t = \frac{\dot{x}_t}{\frac{x_t}{x^*}} = \frac{\dot{x}_t}{x_t}$$

- L'équation différentielle du capital par utilité de travail efficace peut donc se réécrire :

$$\dot{\hat{\kappa}}_t = \frac{\dot{\kappa}_t}{\kappa_t} = \frac{1}{\kappa_t} [f(\kappa_t) - (\delta + n + g)\kappa_t - \gamma_t]$$

On a  $\kappa_t \approx (1 + \hat{\kappa}_t)\kappa^*$ ,  $\gamma_t \approx (1 + \hat{\gamma}_t)\gamma^*$ , et l'approximation linéaire de  $f(\kappa_t)$  au voisinage de  $f(k^*)$  donne

$$\begin{aligned} f(\kappa_t) &\approx f(\kappa^*) + f'(\kappa^*)(\kappa_t - \kappa^*) \\ &\approx \kappa^{*\alpha} + \alpha \kappa^{*\alpha-1} \hat{\kappa}_t \kappa^* \\ &\approx \kappa^{*\alpha} (1 + \alpha \hat{\kappa}_t) \end{aligned}$$

2. On pourra par exemple utiliser le fait que toute variable  $X_t$  qui converge vers  $X^*$  vérifie l'approximation linéaire autour de l'état régulier :  $X_t \sim X^*(1 + \hat{X}_t)$ .

On a donc :

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{\kappa}}_t &\approx \frac{1}{1+\hat{\kappa}_t} \left[ \kappa^{*\alpha-1}(1+\alpha\hat{\kappa}_t) - (\delta+n+g)(1+\hat{\kappa}_t) - \frac{\gamma^*}{\kappa^*}(1+\hat{\gamma}_t) \right] \\
&\approx \frac{1}{1+\hat{\kappa}_t} \left[ \kappa^{*\alpha-1}(1+\alpha\hat{\kappa}_t) - (\delta+n+g)(1+\hat{\kappa}_t) - (\kappa^{*\alpha-1} - (\delta+n+g))(1+\hat{\gamma}_t) \right] \\
&\approx \frac{1}{1+\hat{\kappa}_t} \left[ \alpha\hat{\kappa}_t\kappa^{*\alpha-1} - (\delta+n+g)\hat{\kappa}_t - (\kappa^{*\alpha-1} - (\delta+n+g))\hat{\gamma}_t \right] \\
&\approx \frac{1}{1+\hat{\kappa}_t} \left[ \alpha\hat{\kappa}_t \frac{\delta+\rho+g\theta}{\alpha} - (\delta+n+g)\hat{\kappa}_t + (\delta+n+g - \frac{\delta+\rho+g\theta}{\alpha})\hat{\gamma}_t \right] \\
&\approx \frac{1}{1+\hat{\kappa}_t} \left[ (\rho-n-(1-\theta)g)\hat{\kappa}_t + (\delta+n+g - \frac{\delta+\rho+g\theta}{\alpha})\hat{\gamma}_t \right]
\end{aligned}$$

Remarquons que  $\frac{1}{1+\hat{\kappa}_t} \approx 1 - \hat{\kappa}_t$  donc :

$$\dot{\hat{\kappa}}_t \approx (1 - \hat{\kappa}_t) \left[ (\rho-n-(1-\theta)g)\hat{\kappa}_t + (\delta+n+g - \frac{\delta+\rho+g\theta}{\alpha})\hat{\gamma}_t \right]$$

Si on développe et néglige les termes de second ordre en  $\hat{\kappa}_t^2$  et  $\hat{\kappa}_t\hat{\gamma}_t$  :

$$\dot{\hat{\kappa}}_t \approx (\rho-n-(1-\theta)g)\hat{\kappa}_t + (\delta+n+g - \frac{\delta+\rho+g\theta}{\alpha})\hat{\gamma}_t$$

- Pour l'équation différentielle de la consommation par utilité de travail efficace :

$$\dot{\hat{\gamma}}_t = \frac{f'(\kappa_t) - \delta - \rho - g\theta}{\theta}$$

L'approximation linéaire de  $f'(\kappa_t)$  au voisinage de  $f'(k^*)$  donne

$$\begin{aligned}
f'(\kappa_t) &\approx f'(\kappa^*) + f''(\kappa^*)(\kappa_t - \kappa^*) \\
&\approx \delta + \rho + g\theta + \alpha(\alpha-1)\kappa^{*\alpha-2}\hat{\kappa}_t\kappa^*
\end{aligned}$$

donc

$$\dot{\hat{\gamma}}_t \approx \frac{\alpha(\alpha-1)\kappa^{*\alpha-1}\hat{\kappa}_t}{\theta} = \frac{(\alpha-1)(\delta+\rho+g\theta)}{\theta}\hat{\kappa}_t$$

On obtient donc bien finalement :

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{\kappa}}_t \\ \dot{\hat{\gamma}}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho-n-(1-\theta)g & g+n+\delta - \frac{(\rho+\theta g+\delta)}{\alpha} \\ \frac{-(1-\alpha)(\rho+\theta g+\delta)}{\theta} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\kappa}_t \\ \hat{\gamma}_t \end{bmatrix}$$

**Question 15 (optionnel)** Déterminer les valeurs propres du système linéaire. En déduire que la solution générale du système pour  $\hat{\kappa}_t$  peut s'écrire

$$\hat{\kappa}_t = \psi_1 e^{\varepsilon_1 t} + \psi_2 e^{\varepsilon_2 t} \quad \text{avec } \varepsilon_1 > 0 \text{ et } \varepsilon_2 < 0.$$

En notant  $M$  la matrice associée au système d'équations différentielles linéaires, ainsi que :

$$\begin{cases} \zeta = \rho - n - (1 - \theta)g \\ b = g + n + \delta - \frac{(\rho + \theta g + \delta)}{\alpha} = -\frac{\gamma^*}{\kappa^*} < 0 \\ c = \frac{-(1 - \alpha)(\rho + \theta g + \delta)}{\theta} < 0 \end{cases}$$

on a alors  $M = \begin{bmatrix} \zeta & b \\ c & 0 \end{bmatrix}$ , donc  $\text{tr}(M) = \zeta$  et  $\det(M) = -bc < 0$ .

Ses valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique :

$$\det(M - \varepsilon I) = \begin{vmatrix} \zeta - \varepsilon & b \\ c & -\varepsilon \end{vmatrix} = (\zeta - \varepsilon)(-\varepsilon) - bc = \varepsilon^2 - \zeta\varepsilon - bc = \varepsilon^2 - \text{tr}(M)\varepsilon + \det(M)$$

On a  $\Delta = \zeta^2 + 4bc > 0$  donc le polynôme a deux racines conjuguées  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  et le système d'équations différentielles la solution générale pour  $\hat{\kappa}_t$  :

$$\hat{\kappa}_t = \psi_1 e^{\varepsilon_1 t} + \psi_2 e^{\varepsilon_2 t}$$

avec

$$\varepsilon_1 = \frac{\zeta + \sqrt{\Delta}}{2} > 0 \quad \text{et} \quad \varepsilon_2 = \frac{\zeta - \sqrt{\Delta}}{2}$$

dont le produit est  $\varepsilon_1 \varepsilon_2 = \det(M) < 0$ , on en conclut  $\varepsilon_2 < 0$ , d'où le résultat énoncé.

**Question 16 (optionnel)** Déterminer l'unique solution  $\hat{\kappa}_t$  qui vérifie les conditions initiales et aux limites du problème. En déduire que la solution log-linéaire pour l'évolution de la production par unité de travail efficace  $\tilde{y}_t = Y_t/(A_t L_t)$  s'écrit

$$\log(\tilde{y}_t) = e^{-\beta t} \log(\tilde{y}_0) + (1 - e^{-\beta t}) \log(\tilde{y}^*)$$

où la vitesse de convergence est  $\beta \equiv \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{\zeta^2 + 4 \frac{1-\alpha}{\theta} (\rho + \delta + \theta g) \left[ \frac{\rho+\delta+\theta g}{\alpha} - (n + g + \delta) \right]} - \zeta \right\}$ .

La condition à la limite est  $\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\kappa}_t = 0$ . Comme  $\lim_{t \rightarrow \infty} \psi_2 e^{\varepsilon_2 t} = 0$  (car  $\varepsilon_2 < 0$ ), il faut donc  $\lim_{t \rightarrow \infty} \psi_1 e^{\varepsilon_1 t} = 0$ , ce qui impose  $\psi_1 = 0$  (car  $\varepsilon_1 > 0$ ).

La condition initiale  $\hat{\kappa}_0 = \log\left(\frac{\kappa_0}{\kappa^*}\right) = \psi_1 + \psi_2$  détermine alors  $\psi_2 = \hat{\kappa}_0 = \log\left(\frac{\kappa_0}{\kappa^*}\right)$ . Donc  $\hat{\kappa}_t = \log\left(\frac{\kappa_0}{\kappa^*}\right) e^{\varepsilon_2 t} \Leftrightarrow$

Comme  $\tilde{y}_t = f(\kappa_t) = \kappa_t^\alpha$  on a donc  $\log(\tilde{y}_t) = \alpha \log(\kappa_t)$

Si on note  $\beta = -\varepsilon_2 = \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{\zeta^2 + 4 \frac{1-\alpha}{\theta} (\rho + \delta + \theta g) \left[ \frac{\rho+\delta+\theta g}{\alpha} - (n + g + \delta) \right]} - \zeta \right\}$  on peut écrire :

$$\begin{aligned} \alpha \log\left(\frac{\kappa_t}{\kappa^*}\right) &= \alpha \log\left(\frac{\kappa_0}{\kappa^*}\right) e^{-\beta t} \\ \alpha \log \kappa_t - \alpha \log \kappa^* &= \alpha \log \kappa_0 e^{-\beta t} - \alpha \log \kappa^* e^{-\beta t} \\ \log \tilde{y}_t &= \log \tilde{y}_0 e^{-\beta t} + (1 - e^{-\beta t}) \log \tilde{y}^* \end{aligned}$$

ce qui peut se réécrire

$$\log\left(\frac{\tilde{y}_t}{\tilde{y}^*}\right) = \log\left(\frac{\tilde{y}_0}{\tilde{y}^*}\right) e^{-\beta t} \tag{i}$$

ou encore

$$\hat{y}_t = \hat{y}_0 e^{-\beta t}$$

L'écart initial à l'état régulier après un choc  $\hat{y}_0$  se résorbe à chaque période au taux de convergence  $\beta$ .

Les quantités par unité de travail efficace et l'état régulier ne sont pas mesurables dans les données. On cherche cependant à estimer empiriquement la valeur de  $\beta$ . Les seules données disponibles pour les auteurs sont les productions annuelles par tête  $y_{i,t} = Y_{i,t}/L_{i,t}$  des états américains à différentes dates entre 1880 et 1988.

Pour les Etats-Unis, les valeurs de paramètres suivantes sont choisies :

- $\delta = 0,05$  par an (mesuré pour le stock des infrastructures et des équipements)
- $n = 0,02$  par an (taux de croissance moyen de la population au cours des décennies récentes)
- $g = 0,02$  par an (taux de croissance moyen du revenu par habitant à long terme)
- $\rho = 0,05$  par an
- $\theta = 1$  ( $u(c) = \log c$ )

On suppose que tous les états ont la même production par unité de travail efficace à l'état régulier  $\tilde{y}_i^* = \tilde{y}^*$ .

**Question 17 (optionnel)** Soient deux dates  $t_0$  et  $t_0 + T$ . Déduire de la question précédente que le taux de croissance moyen de la production par tête entre ces deux dates peut s'exprimer

$$\frac{1}{T} \log\left(\frac{y_{t_0+T}}{y_{t_0}}\right) = g + \frac{1 - e^{-\beta T}}{T} [\log(A_0 \tilde{y}^*) + gt_0] - \frac{1 - e^{-\beta T}}{T} \log(y_{t_0}) \tag{2}$$

L'évolution de  $\log \tilde{y}_t$  peut se réécrire

$$\log(\tilde{y}_t) - \log(\tilde{y}_0) = e^{-\beta t} \log(\tilde{y}_0) + (1 - e^{-\beta t}) \log(\tilde{y}^*) - \log(\tilde{y}_0)$$

donc

$$\log\left(\frac{\tilde{y}_t}{\tilde{y}_0}\right) = (1 - e^{-\beta t}) \log\left(\frac{\tilde{y}^*}{\tilde{y}_0}\right) \tag{ii}$$

Soit deux dates  $t_0$  et  $t_0 + T$ . On a alors

$$\begin{aligned}
\log \left( \frac{\tilde{y}_{t_0+T}}{\tilde{y}_{t_0}} \right) &= \log \left( \frac{\tilde{y}_{t_0+T}}{\tilde{y}_0} \frac{\tilde{y}_0}{\tilde{y}_{t_0}} \right) = \log \left( \frac{\tilde{y}_{t_0+T}}{\tilde{y}_0} \right) - \log \left( \frac{\tilde{y}_{t_0}}{\tilde{y}_0} \right) \\
\text{avec (ii)} \Leftrightarrow \log \left( \frac{y_{t_0+T}}{A_{t_0+T}} \frac{A_{t_0}}{y_{t_0}} \right) &= (e^{-\beta t_0} - e^{-\beta(t_0+T)}) \log \left( \frac{\tilde{y}^*}{\tilde{y}_0} \right) \\
\text{avec } A_t = A_0 e^{gt} \Leftrightarrow \log \left( \frac{y_{t_0+T}}{y_{t_0}} e^{-gT} \right) &= (1 - e^{-\beta T}) e^{-\beta t_0} \log \left( \frac{\tilde{y}^*}{\tilde{y}_0} \right) \\
\Leftrightarrow \log \left( \frac{y_{t_0+T}}{y_{t_0}} \right) - gT &= -(1 - e^{-\beta T}) e^{-\beta t_0} \log \left( \frac{\tilde{y}_0}{\tilde{y}^*} \right) \\
\text{avec (i)} \Leftrightarrow \log \left( \frac{y_{t_0+T}}{y_{t_0}} \right) &= gT - (1 - e^{-\beta T}) \log \left( \frac{\tilde{y}_{t_0}}{\tilde{y}^*} \right) \\
&= gT - (1 - e^{-\beta T}) \log \left( \frac{y_{t_0}}{\tilde{y}^* A_0 e^{gt_0}} \right) \\
\frac{1}{T} \log \left( \frac{y_{t_0+T}}{y_{t_0}} \right) &= g + \frac{1 - e^{-\beta T}}{T} [\log(A_0 \tilde{y}^*) + gt_0] - \frac{1 - e^{-\beta T}}{T} \log(y_{t_0})
\end{aligned}$$