ENSAE

Deuxième année

Introduction aux processus

Ecrit. Deux heures. Pas de calculatrice. Seul document autorisé: une feuille manuscrite remplie par l'étudiant.e

Nicolas Chopin

Justifiez toutes vos réponses.

Solution:
Total sur 24 points. Ne pas mettre de demi-point.

1 Processus de Poisson

Soit un processus de Poisson de fonction d'intensité $\lambda(x) \geq 0$, telle que $\int_{\mathcal{X}} \lambda(x)dx < \infty$, où $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^d$. En se basant sur les propriétés vues en cours, proposer un algorithme pour simuler des réalisations de ce processus. Bien détailler les étapes, et les conditions nécessaires à la faisabilité de l'algorithme (par ex. les quantités devant être calculées explicitement.)

Solution:
Dans le poly, on donne la méthode de construction suivante pour un processus de Poisson: (a) générer $N \sim \text{Poisson}(\mu)$, avec $\mu = \int \lambda(x)dx$ **[1 point]**(ce qui suppose que cette intégrale soit calculable, première condition, **[1 point]** et finie, mais c'est déjà supposé dans l'énoncé); puis (b) simuler $X_1, \ldots, X_N$, des variables IID de loi de densité $f(x) = \lambda(x)/\mu$. **[1 point]**La deuxième condition de faisabilité est donc de disposer d'une méthode de simulation selon cette loi. **[1 point]**

2 Go home, Spock, you're drunk

Dans une version moderne de la marche aléatoire d'un individu éméché, on considère la marche de Spock après une soirée bien arrosée au bord de l'Enterprise. On suppose que sa position X_t peut être représentée par un entier (espace d'état: $\mathbb{Z}$), que $X_0 = 0$, et qu'au temps t, Spock a une probabilité $\tau \in]0, 1[$ de se téléporter à la case initiale, 0. S'il ne se téléporte pas, il a une probabilité q_g de faire un pas vers la gauche, q_d de faire un pas vers la droite, avec $q_g + q_d = 1$.

1. Montrer que (X_t) est une chaîne de Markov irréductible.

Solution:

Chaîne de Markov: il suffit de remarquer que la loi de X_{t+1} sachant le passé ne dépend que de X_t. Une autre réponse possible est d'écrire $X_{t+1} = f(X_t, V_t)$, avec $f(x, y) = |y|x + y$, par exemple, et les V_t IID de loi telle que $V_t = -1$, 0, 1, avec probabilités bien choisies. (Cette construction peut aider dans d'autres questions.) **[1 point]**On peut aller de la case 0 à la case $j > 0$ en j étapes, avec probabilité $(1-\tau)^j q_d^j > 0$; même chose pour une case $j < 0$. On peut aller d'une case i à une case j, en se téléportant à 0, puis en allant de 0 à j. Bref, pour tout couple (i, j), on peut trouver un entier k tel que Spock peut aller de i à k en k étapes (avec proba > 0). **[1 point]**

2. Soit T le temps de la première téléportation à un temps $t > 0$ (on ne peut pas avoir $T = 0$). Donner la loi de T, et montrer que $\sigma_0 \leq T$ (où σ_0 est le temps du premier retour en 0, comme défini en cours.)

Solution:

Puisque la téléportation peut arriver à chaque temps t avec proba τ, T suit une loi géométrique de paramètre τ. **[1 point]**(Selon les conventions, une loi géométrique a pour support soit $\mathbb{N}$, soit $\mathbb{N}^+$. Donc répondre que c'est $T-1$ qui suit une loi géométrique est correct aussi.)

Clairement $\sigma_0 \leq T$, puisque, partant de 0, une des possibilités pour retourner à 0 est d'attendre la première téléportation (à un temps $t > 0$). L'autre possibilité est de revenir sur ses pas (par ex. un pas à droite puis un pas à gauche). La dernière possibilité est de se téléporter dès le temps 0; dans ce cas $\sigma_0 = 1$. **[1 point]**

Remarque: mettre les points si raisonnement correct mais dans un autre ordre; par exemple, on montre d'abord que la chaîne est récurrente positive, et donc que tous les états sont récurrents.

3. En déduire que l'état 0 est récurrent, que la chaîne (X_t) est récurrente, et récurrente positive.

Solution:

Puisque $\sigma_0 \leq T < \infty$, l'état 0 est récurrent **[1 point]**, donc la chaîne est récurrente (une seule classe, car la chaîne est irréductible) **[1 point]**Par ailleurs: $\mathbb{E}[\sigma_0] \leq \mathbb{E}[T] = 1/\tau - 1 < \infty$, ce qui implique (cours) que la chaîne est récurrente positive. **[1 point]**

4. Déterminer la loi invariante π de (X_t) dans le cas $q_d = q_g = 1/2$.

Solution:

On résout le système $\pi P = \pi$, soit ici, pour $j \neq 0$, en posant $q = (1-\tau)/2$,

$$\pi(j) = q\pi(j-1) + q\pi(j+1)$$

et $\pi(0) = q\pi(-1) + q\pi(1) + \tau$.

Résolution classique: symétrie $\Rightarrow \pi(i) = \pi(-i)$, on a pour $j > 0$: $\pi(j+2) = \frac{1}{q}\pi(j+1) - \pi(j)$, dont la solution est: $\pi(j) = \pi(1)\alpha^{j-1}$, $j \geq 1$ avec:

$$\alpha = \frac{1}{2q} - \sqrt{\frac{1}{4q^2} - 1} = \frac{1 - \sqrt{\tau^2 - 2\tau}}{1 - \tau}$$

et puisque

$$1 = \sum_j \pi(j) = \pi(0) + 2\pi(1) \sum_{j \geq 0} \alpha^j$$

et $\pi(0) = (1-\tau)\pi(1) + \tau$, on trouve:

$$\pi(1) = \frac{(1-\alpha)(1-\tau)}{2 + (1-\alpha)(1-\tau)}$$

[2 points]

5. Expliquer comment on peut construire une seconde chaîne de Markov, (Y_t), de loi initiale π (la loi invariante), de matrice de transition égale à celle de (X_t), et telle que $X_t = Y_t$ pour $t \geq T$.

   En déduire que $\mathbb{P}(X_t = x) \to \pi(x)$ à une vitesse exponentielle (en t, pour un x fixé).

Solution:

On prend $Y_0 \sim \pi$, puis $Y_t = f(Y_{t-1}, V_t)$, avec f et V_t définis comme en 1. Noter qu'il est important de prendre les mêmes V_t pour les deux chaînes. De cette façon, le temps T de la première téléportation est bien le même, et pour $t \geq T$, $X_t = Y_t$.

Note: expliquer les mêmes idées en invoquant la technique du couplage (vue en cours), sans nécessairement expliciter f et les V_t suffit. **[1 point]**

On a:

$$P(X_t = x) = P(X_t = x, T \leq t) + P(X_t = x, T > t) \leq P(Y_t = x) + P(T > t)$$

de même, $P(Y_t = x) \leq P(X_t = x) + P(T > t)$, et $P(T > t) = (1-\tau)^{t+1}$. **[2 points]**

3 Une martingale dans $[0,1]^d$

On va considérer dans cet exercice des martingales à valeurs dans $[0,1]^d$, $d \geq 2$. En toute rigueur, les propriétés vues en cours ne concernent que les martingales à valeurs dans $\mathbb{R}$, mais on pourra supposer qu'elles restent vraies en dimension $d \geq 2$.

On considère un processus (X_t) à valeurs dans $[0,1]^d$, tel que $X_0 = (\frac{k}{d}, \ldots, \frac{k}{d})$, pour un entier k, $0 < k < d$. Ce processus est construit de la manière suivante: au temps t, sachant X_{t-1}, et pour un certain vecteur V_t dans $\mathbb{R}^d$, X_t est l'un des deux points à l'intersection de la droite parallèle à V_t qui traverse X_{t-1} et des bords de l'hyper-cube $[0,1]^d$. De plus, le vecteur V_t est choisi de manière à ce que (a) la somme de ses composantes soit nulle;

et (b) V_t soit parallèle à tous les axes i tels que la composante i de X_t vaut 0 ou 1; en d'autres termes, V_t est parallèle à toutes les faces du cubes auxquelles X_t appartient. (La loi aléatoire de V_t n'est pas précisée pour l'instant, mais on supposera qu'elle a été "bien" choisie, de manière à s'assurer que la droite sus-mentionnée intersecte bien le cube en deux points.)

Noter qu'une conséquence de (a) est que la somme des composantes de X_t reste constante et égale à k à tout temps t; et une conséquence de (b) est que, dès que le processus X_t atteint une des 2^d faces du cube, il ne la quitte plus.

(On considérera comme filtration la filtration adaptée au processus (X_t, V_t) pour faire simple.)

1. Donner les probabilités (conditionnellement à $\mathcal{F}_{t-1}$) à assigner aux deux points du support de la loi de X_t sachant X_{t-1} et V_t pour faire de (X_t) une martingale. (Expliquer brièvement comment ces probabilités dépendent des longueurs de X_t aux deux points, sans donner de formule pour ces longeurs.)

Solution:

Il suffit de calculer les longueurs de X_t aux deux points, l_1 et l_2, et d'assigner la probabilité $l_2/(l_1 + l_2)$ au point 1, $l_1/(l_1 + l_2)$ au point 2. De cette façon, l'epérance de $X_t - X_{t-1}$, sachant X_{t-1}, est bien nulle. **[1 point]**

On suppose désormais que (X_t) est bien une martingale. Soit τ le temps d'atteinte à l'ensemble des sommets de l'hyper-cube (i.e. le plus petit t tel que toutes les composantes de X_t valent 0 ou 1).

2. Montrer que τ est un temps d'arrêt, et qu'il est borné.

Solution:

Temps d'arrêt: l'événement $\{\tau \leq t\}$ est complètement déterminé par (X_s, V_s) pour $s = 0, \ldots, t$. **[1 point]**

Temps d'arrêt borné: par construction, à chaque temps t, le nombre de composantes non fixées (à 0 ou 1) décroit strictement. Donc $\tau \leq d$ p.s. **[1 point]**

3. Montrer que (X_t) converge p.s. vers une limite Z. Que peut-on dire de la vitesse de convergence, du support de Z, et de la loi marginale de chaque composante, i.e. $\mathbb{P}(Z_i = 1)$?

Solution:

Clairement le processus est borné, donc borné dans $\mathcal{L}^p$, pour tout $p \geq 1$, donc il converge p.s. (cours) **[1 point]**

De plus, clairement $Z = X_\tau$, et la convergence a lieu en un temps fini (borné). **[1 point]**Le support de la loi est inclus dans l'ensemble des sommets dont le nombre de composantes est égal k.

Théorème d'arrêt (borné): $\mathbb{E}(X_\tau) = E(X_0) = (k/d, \ldots, k/d)$, donc $\mathbb{P}(Z_i = 1) = k/d$. **[1 point]**

4. (Bonus) Déduire de cet exercice un algorithme pour effectuer un tirage sans remise de k points parmi d, de façon à ce que la probabilité marginale d'inclure le point i soit égale à α_i, pour un certain vecteur $(\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in [0,1]^d$ dont la somme vaut k.

   Proposer une loi pour V_t.

   (Bonus maximus) Généraliser au problème d'un tirage sans remise de k points parmi d, sous la contrainte que $\sum_{i=1}^d \beta_{ij} z_i = \gamma_j$ pour $j = 1, \ldots, J$ et certaines constantes β_{ij} et γ_i. (C'est la méthode du cube, utilisée en sondage pour tirer k individus selon certaines contraintes.)

Solution:

Il suffit de reprendre l'exercice en prenant $X_0 = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$. On a toujours une martingale, qui converge en un temps fini, vers une loi qui a les bonnes marginales. **[1 point]**

Pour la loi de V_t, soit n_t le nombre de composantes encore "actives" (non égales à 0 ou 1). Choisir au hasard une composante I active, et construire le vecteur qui vaut $(n_t - 1)/n_t$ pour la composante I, $-/n_t$ pour les autres composantes actives, et 0 pour les composantes inactives. D'autre choix sont possibles. (Par exemple, simuler $W_i \sim N(0,1)$, pour chaque composante active, puis retirer la moyenne.) **[1 point]**

On généralise en prenant un vecteur V_t qui est perpendiculaire non seulement au vecteur $(1, \ldots, 1)$ (ce qui est fait implicitement quand on impose que la somme des composantes est nulle) mais aussi aux J vecteurs définis par les β_{ij}. Il faut cependant s'assurer qu'il existe bien des solutions au problème, c'est à dire des vecteurs z à valeurs dans $\{0,1\}^d$ vérifiant toutes ces contraintes.

Me montrer toute copie qui trouve cette solution!