

TD5 : ESTIMATEUR DU MAXIMUM DE VRAISEMBLANCE

Exercice 1. Soient X_1, \dots, X_n des variables aléatoires i.i.d. de loi de Paréto, dont la densité est donnée par

$$f(x; \theta) = \frac{\theta}{x^{\theta+1}} \mathbb{1}(x \geq 1), \quad x \in \mathbb{R}.$$

1. On suppose d'abord que l'espace de paramètres est $\Theta =]1, +\infty[$. Estimer θ par la méthode des moments.
2. On considère maintenant le cas plus général où $\Theta =]0, +\infty[$. Expliquer pourquoi la méthode des moments est inapplicable dans ce cas. Proposer un estimateur par la méthode des moments généralisée.
3. Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance (EMV) du paramètre θ . Montrer qu'il peut être vu comme un estimateur obtenu par la méthode des moments généralisée.
4. Déterminer la loi limite et la variance limite de l'EMV.
5. Calculer l'information de Fisher du modèle de Paréto et la comparer avec l'inverse de la variance asymptotique.

Exercice 2. Une chaîne de montage produit des objets, dont on veut estimer la durée moyenne de fabrication. On suppose que les durées de fabrication T_i sont indépendantes et de loi exponentielle de paramètre θ . Le $n^{\text{ième}}$ objet est donc fabriqué à la date $T_1 + \dots + T_n$. On observe uniquement le nombre d'objets N_t fabriqués à la date t .

1. Montrer que $\mathbf{P}(N_t \leq n) = \mathbf{P}(T_1 + \dots + T_{n+1} > t)$.
2. Déterminer la loi de la variable aléatoire $S_n = T_1 + \dots + T_n$. Rappelons ici que la fonction gamma est définie par

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} dx, \quad \forall a > 0,$$

et elle vérifie $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$.

3. Montrer que N_t suit une loi de Poisson dont on déterminera le paramètre.
4. Quel est l'EMV de θ ?
5. Calculer le risque de $\hat{\theta}_t^{\text{MV}}$ et étudier son comportement lorsque $t \rightarrow +\infty$.