TD Autoselection - Énoncé

Microéconomie, deuxième année, ENSAE

1 Régulation d'un monopole (Baron-Myerson 1982)

On s'intéresse au problème d'un régulateur qui maximise le bien-être des consommateurs sous contrainte de ses coûts, face à un monopole. Soit $C(q, \theta) = \theta q$ la fonction de coût du monopole qui produit le bien en quantité q.

Soit θ le type du monopole. $\theta = \theta_L$, avec probabilité β, et $\theta = \theta_H > \theta_L$ avec probabilité $1 - \beta$.

Le régulateur délègue la production du bien au monopole : le monopole reçoit du régulateur un transfert monétaire t, si bien que le profit du monopole est $(t - \theta q)$. Le monopole accepte de produire seulement si le régulateur lui assure un profit non négatif. Le surplus des consommateurs pour q unités est égal à $S(q)$ avec $S' > 0$, $S'' < 0$ et $S(0) = 0$.

Question 0: Qui est le principal ? L'agent ?

Question 1: Supposons que le régulateur puisse observer le type θ du monopole. Le régulateur propose un contrat (q_L, t_L) au monopole de type θ_L, et un contrat (q_H, t_H) au monopole de type θ_H. Le monopole a le choix entre accepter le contrat qui lui est proposé ou refuser le contrat et ne rien produire. Quelles sont les quantités q_L^* et q_H^* qui maximisent le bien-être des consommateurs ? Quels sont les transferts t_L^* et t_H^* qui assurent la participation du monopole ?

Question 2: Supposons à présent que le régulateur n'observe pas le type du monopole. Le régulateur propose alors au monopole un menu composé de deux contrats: (q_L, t_L) et (q_H, t_H). Le monopole doit choisir parmi ces deux contrats et produire le bien (ou alors refuser le contrat et ne rien produire). Montrer que si le régulateur propose les contrats (q_L^*, t_L^*) et (q_H^*, t_H^*), un des deux types a intérêt à se faire passer pour l'autre.

Question 3: Nous cherchons ci-dessous l'optimum de second rang, à savoir le menu (q_L^{**}, t_L^{**}),(q_H^{**}, t_H^{**}) qui maximise le bien-être des consommateurs sachant que le régulateur ne peut pas observer le type du monopole. Écrire les contraintes d'incitation du type H

(ICH,) et du type L (ICL), ainsi que leurs contraintes de participation. Quel est alors le programme du régulateur ?

Question 4: Montrer que la contrainte IRL est automatiquement satisfaite si les autres contraintes le sont. Montrer que ICL est saturée à l'optimum.

Question 5: En combinant (ICL) et (ICH), montrer que $q_L \geq q_H$. Sous cette contrainte, montrer ensuite que (ICH) peut être ignorée. Montrer que (IRH) est saturée à l'optimum.

Question 6: Résoudre le programme du régulateur ainsi simplifié. Quels sont les quantités produites q_L^{**}, q_H^{**} à l'optimum de second rang ?

Question 7: Montrer que le monopole de type θ_L reçoit une "rente informationnelle" (i.e. ses profits sont strictement positifs). Pourquoi parle t-on d'arbitrage rente-efficacité ? Commenter.

2 Monopole discriminant (Mussa-Rosen 1978)

Une entreprise en monopole fait face à des acheteurs hétérogènes. Lorsqu'un acheteur consomme q unités du bien, et qu'il paie une somme totale T, il retire une utilité

$$u(q, T, \theta) = \theta q - T$$

θ est le « type » d'un consommateur, information privée de ce dernier.

On suppose que θ est continûment distribué sur un support $[\underline{\theta}, \bar{\theta}]$ avec densité notée f et fonction de répartition noté F.

Le profit du monopole, s'il vend q unités au prix T, est $\pi = T - \frac{q^2}{2}$.

Le monopole va choisir, de façon à maximiser son profit, un « menu » de contrats $(q(\theta), t(\theta))$ qui doit être tel que le consommateur de type θ choisit le contrat qui lui est destiné (contraintes d'incitation) et obtient au moins autant que son utilité de réservation (contrainte de participation). Un menu de contrat est donc une paire de fonctions $(q(.), t(.))$, définies sur $[\underline{\theta}, \bar{\theta}]$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.

Question 1: Supposons que le monopole puisse observer θ. Caractériser les solutions $(q^*(\theta), t^*(\theta))$, et commenter.

On suppose maintenant que le monopole n'observe pas θ. Il sait cependant que θ est continûment distribué sur un support $[\underline{\theta}, \bar{\theta}]$ selon une densité notée f et une fonction de répartition notée F.

Question 2: Montrer que les contraintes d'incitations impliquent que $q(\theta)$ est croissant. *[Indication : On écrira les contraintes d'incitation pour $\theta \neq \theta'$]*

Question 3: Dans ce qui suit, puisque $U(\theta) = \theta q(\theta) - T(\theta)$, la variable d'intérêt sera la rente du consommateur $U(\theta)$ plutôt que $T(\theta)$. Montrer à partir des contraintes d'incitations et de participations que :

$$U(\theta) = \int_{\underline{\theta}}^{\theta} q(x)dx \tag{1}$$

[Indication : On écrira les contraintes d'incitation entre $\tilde{\theta}$ et $\theta \neq \tilde{\theta}$. On interprétera θ comme un maximum, pour avoir une relation entre $\dot{q}(.)$ et $\dot{T}(.)$]

Question 4: Écrire le programme d'optimisation du monopole en fonction de $(q(\theta), U(\theta))$ et montrer qu'il se simplifie à :

$$\max_{(q(.),U(.))} \int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} \left(\theta q(\theta) - U(\theta) - \frac{q^2(\theta)}{2} \right) f(\theta)d\theta \tag{2}$$

avec $U(\theta) = \int_{\underline{\theta}}^{\theta} q(x)dx$.

Question 5: En déduire les quantités produites $q^{**}(\theta)$ à l'optimum de second rang. On supposera $f(\theta) \neq 0$ i.e. il existe un consommateur de chaque type sur le support. *[Indication : intégrer par partie $\int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} U(\theta)f(\theta)d\theta$ dans (2)].*

Question 6: Commenter. Y-a-t'il distorsion de l'allocation efficace ? Comment sont les consommateurs par rapport à la situation avec information connue ?

Question 7: Comparer avec la solution d'un exercice d'autoselection où θ est discret.

3 Taxation optimale

Une économie comporte deux types de travailleurs qui diffèrent par leur productivité:

- n_1 travailleurs de productivité w_1;
- n_2 travailleurs de productivité w_2

avec $w_2 > w_1$. Chaque travailleur produit la quantité $Y_i = w_i L_i$, où L_i est son offre de travail (le nombre d'heures travaillées). L'utilité d'un travailleur croît avec sa consommation C_i et décroît avec le nombre d'heures travaillées $L_i = Y_i/w_i$. Elle est donnée par

$$U_i(C_i, Y_i) = C_i - \left(\frac{Y_i}{w_i}\right)^\alpha,$$

où $\alpha > 1$ est un paramètre fixé dans tout le problème.

Question 1: Représenter l'allure des courbes d'indifférence des travailleurs de type 1 et des travailleurs de type 2 dans le plan (Y, C). Vérifier la propriété de croisement unique.

Question 2: En l'absence de taxation, chaque agent consomme l'intégralité de sa production. Déterminer l'offre de travail $L^*(w)$ en fonction de la productivité. Quelle est l'élasticité de l'offre de travail? Déterminer l'utilité des travailleurs U_i^* à l'optimum.

Question 3: L'objectif du gouvernement est la somme

$$n_1\Psi(U_1) + n_2\Psi(U_2),$$

où Ψ est une fonction strictement croissante et strictement concave qui traduit la préférence du gouvernement pour la redistribution.[1]

On suppose ici que le gouvernement observe le type des travailleurs $i = 1$ ou $i = 2$ et peut mettre en oeuvre des transferts forfaitaires[2], c'est l'optimum de premier rang. On note T_i les transferts: $T_i > 0$ représente une taxe sur les travailleurs de type i et $T_i < 0$ représente une subvention à ces agents. La consommation de l'agent i est donc $C_i = Y_i - T_i$. La contrainte budgétaire du gouvernement est

$$n_1T_1 + n_2T_2 = R, \tag{3}$$

où R est un paramètre fixé qui représente les dépenses à financer (défense, police, santé, etc.).

Montrer que la redistribution est parfaite et donner l'offre de travail à l'optimum de premier rang.

Question 4: Pour simplifier l'analyse, on suppose maintenant que le gouvernement maximise la somme

$$n_1U_1 + \mu n_2U_2,$$

[1] L'utilité marginale sociale d'un individu, $\Psi'(U)$, décroît avec son niveau d'utilité U.

[2] Les transferts sont "forfaitaires" au sens où ils ne dépendent pas de l'offre de travail.

où $\mu < 1$ reflète la préférence du gouvernement pour les travailleurs de productivité faible.[3]

On suppose que le gouvernement n'observe pas le type des agents, ni leur offre de travail (optimum de second rang). Il observe seulement le revenu avant impôt $Y_i = w_i L_i$. Le gouvernement va donc proposer aux agents de choisir l'une des deux options dans un menu (T_1, Y_1) et (T_2, Y_2). Autrement dit, le gouvernement annonce que s'il observe la production Y_i, il fera payer la taxe T_i.

a) Ecrire les contraintes d'incitations en fonction de $Y_1, Y_2, T_1, T_2, w_1, w_2$.

b) Montrer que les agents les plus productifs produisent nécessairement plus que les agents les moins productifs: $Y_2 \geq Y_1$. (On admettra dans la suite que l'inégalité est stricte.)

c) Montrer que la contrainte d'incitation du haut type est saturée. (Montrer que si ce n'était pas le cas, le gouvernement pourrait donner un peu plus aux agents de type 1 et prendre un peu plus aux agents de type 2.)

d) Déterminer les transferts T_1 et T_2 en fonction de Y_1 et Y_2, puis l'offre de travail des travailleurs de type 2. Comparer l'offre de travail des travailleurs de type 1 avec la situation de premier rang (question 3).

4 Incitations avec aléa moral et sélection averse (P 2020-2021)

Un investisseur engage un manager pour mener un projet à bien. Le projet génère un profit R en cas de succès, zéro en cas d'échec. La probabilité de succès est $e\theta$, où e est l'effort du manager et θ représente ses qualités managériales ("talent"). Le coût privé de l'effort pour le manager est $\frac{1}{2}ce^2$. Ses opportunités extérieures sont normalisées à zéro.

Sauf mention du contraire, l'investisseur ne connaît pas le talent du manager. Il sait seulement que le talent peut être haut ($\theta = \theta_H$) ou bas ($\theta = \theta_L$), avec $\theta_L < \theta_H$, et que la probabilité que le talent soit haut est $\rho \in [0, 1]$.

L'investisseur et le manager sont neutres vis-à-vis du risque. Les paramètres du modèle, $(c, \theta_L, \theta_H, \rho)$, sont connus des deux acteurs.

Un contrat spécifie un transfert fixe t payé par l'investisseur au manager et un transfert contingent en cas de succès du projet, r. Comme l'investisseur fait face à deux types de manager, il laisse le manager choisir entre deux contrats (t_H, r_H) et (t_L, r_L).

[3] On fixe ainsi à 1 l'utilité marginale sociale des agents du bas type et à $\mu < 1$ celle des agents de haut type.

La première option est conçue pour le manager le plus talentueux, la seconde pour le manager le moins talentueux.

Question 1: Pour $\theta = \theta_L, \theta_H$, écrire le profit de l'investisseur, $\pi(\theta, e)$, l'utilité du manager, $U(\theta, e)$, et le surplus total, $S(e, \theta)$, en fonction de θ, e, R, r, c, et t. Trouver l'effort de premier rang $e^*(\theta)$ qui maximise le surplus. A quelle condition sur r le manager de type θ choisit-il l'effort $e^*(\theta)$? [*Indication : π est une espérance de profit, U une espérance d'utilité, S une espérance de surplus, selon que le projet réussisse ou non.*]

Question 2: On suppose, dans cette question, que l'investisseur connaît le talent du manager θ. Trouver et interpréter le contrat optimal. [*Indication : Ecrire le programme du principal et ses contraintes, avant de le maximiser.*]

On suppose maintenant que l'investisseur ne connaît pas θ. Soit U_H (respectivement U_L) l'utilité indirecte du manager le plus (respectivement) le moins talentueux.

Question 3: Montrer que les contraintes d'incitation peuvent s'écrire :

$$\frac{r_L^2}{2c} \leq \frac{U_H - U_L}{\theta_H^2 - \theta_L^2} \leq \frac{r_H^2}{2c}$$

[*Indication : Ecrire les contraintes d'incitations en utilisant la valeur de l'effort choisie par l'agent.*]

Question 4: Exprimer l'espérance de profit de l'investisseur en termes du surplus total $S(\theta_L, e_L)$,$S(\theta_H, e_H)$ et de la rente laissée à chaque type de manager, U_H et U_L.

Question 5: Montrer qu'IRH est automatiquement satisfaite si les autres contraintes le sont. Montrer que ICH est saturée à l'optimum. Écrire la rente du manager le plus talentueux U_H en utilisant r_L.

Question 6: Montrer que (ICL) peut être ignorée. Montrer que (IRL) est saturée à l'optimum. Examiner les contraintes de participation. Trouver la rente du manager le moins talentueux, U_L.

Question 7: . Trouver r_H à l'optimum. Quel effort le manager le plus talentueux choisit-il ?

Question 8: Trouver r_L à l'optimum. Comparer l'effort choisi par le manager le moins talentueux avec l'effort de premier rang. Dans quelle mesure cet exercice illustre t'il l'arbitrage entre extraction de la rente et efficacité ? D'où venait l'inefficacité dans ce modèle ?