Examen à mi-parcours, 7 novembre 2023

Durée : 1 heure 30 minutes. Sans document, sans calculatrice. Qualité de présentation : ± 2 points.

Questions à choix mutiple.

Chaque question admet une et une seule bonne réponse. Recopiez la lettre correspondante à cette réponse sans aucune justification (exemple : Question 17 — réponse f). Le barème suivant sera utilisé :

- Bonne réponse : $+1.5$ points
- Pas de réponse : 0 points
- Mauvaise réponse : -1 point

1. On considère deux suites de variables aléatoires, $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ et $\{Y_n : n \in \mathbb{N}\}$, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Laquelle de ces 3 assertions est **fausse** ?

   (a) Si $X_n \xrightarrow{\text{loi}} X$ et $Y_n \xrightarrow{\text{loi}} Y$ alors, $X_n + Y_n \xrightarrow{\text{loi}} X + Y$

   (b) Si $X_n \xrightarrow{p.s.} X$ et $Y_n \xrightarrow{p.s.} Y$ alors, $X_n + Y_n \xrightarrow{p.s.} X + Y$

   (c) Si $X_n \xrightarrow{P} X$ et $Y_n \xrightarrow{P} Y$ alors, $X_n + Y_n \xrightarrow{P} X + Y$

2. Soit $\widehat{\theta}_n$ un estimateur fortement convergent de $\theta^* \in \mathbb{R}$ et $\widehat{\beta}_n$ un estimateur fortement convergent de $\beta^* \in \mathbb{R}$. Laquelle de ces assertions est **juste** ?

   (a) $\widehat{\theta}_n\widehat{\beta}_n$ est nécessairement un estimateur sans biais de $\theta^*\beta^*$.

   (b) $\widehat{\theta}_n\widehat{\beta}_n$ est nécessairement un estimateur fortement convergent de $\theta^*\beta^*$.

   (c) $\widehat{\theta}_n\widehat{\beta}_n$ est nécessairement un estimateur asymptotiquement normal de $\theta^*\beta^*$.

3. Soit $\widehat{F}_n$ la fonction de répartition empirique de n variables iid $X_1, \ldots, X_n$. Soit F la vraie fonction de répartition de X_1. Laquelle de ces assertions est **fausse** ?

   (a) $\widehat{F}_n(x) \xrightarrow{p.s.} F(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

   (b) $\sqrt{n}\big(\widehat{F}_n(x) - F(x)\big) \xrightarrow{\text{loi}} \mathcal{N}(0, 1)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

   (c) $\widehat{F}_n(x)$ est un estimateur sans biais de $F(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

   (d) $\sup_{x\in\mathbb{R}} \big|\widehat{F}_n(x) - F(x)\big| \xrightarrow{P} 0$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit X_n une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre $1/n$. Laquelle des assertions suivantes est **juste** ?

   (a) $X_n \xrightarrow{P} 0$

   (b) $nX_n \xrightarrow{P} 0$

   (c) Toutes les assertions ci-dessus

   (d) Aucune des assertions ci-dessus

Questions de cours.

1. Énoncer le théorème de Glivenko-Cantelli.
2. Donner la définition d'un modèle dominé.

Tourner SVP

Exercice 1 . Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires iid de loi uniforme $\mathrm{Unif}([-\theta, \theta])$ avec un paramètre inconnu $\theta > 0$.

1. Ecrire le modèle statistique.
2. Le modèle est-il identifiable ? Est-il dominé ? Justifier les réponses.
3. On suppose d'abord qu'on cherche à estimer θ. On définit l'estimateur
$$\widehat{\theta}_n := -\min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}.$$
   (a) Déterminer la fonction de répartition G_n et la densité g_n de $\widehat{\theta}_n$.
   (b) Calculer le biais de $\widehat{\theta}_n$.
   (c) Calculer la variance de $\widehat{\theta}_n$.
   (d) Calculer le risque quadratique de $\widehat{\theta}_n$.
   (e) Peut-on affirmer que $\widehat{\theta}_n$ est un estimateur faiblement convergent de θ ? Justifier votre réponse.
4. On suppose maintenant qu'on cherche à estimer le paramètre $\beta = \theta^3$. Peut-on affirmer que $\widehat{\beta}_n = \left(\frac{2}{n}\sum_{i=5}^n |X_i|\right)^3$ est un estimateur convergent du paramètre β ? Justiifer votre réponse.

Exercice 2 . On dit qu'une variable aléatoire suit une loi log-normale si la loi du logarithme naturel de cette variable aléatoire est Gaussienne. C'est-à-dire, X suit la loi log-normale $\mathrm{Lognormal}(\mu, \sigma^2)$ avec des paramètres μ et σ^2 si $Y := \log(X)$ suit la loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$. Par conséquent, la densité de Y est donnée par
$$f_Y(y; (\mu, \sigma^2)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{\sigma^2}}, \qquad y \in \mathbb{R}$$
et sa fonction génératrice des moments est
$$M_Y(t) = \mathbf{E}[e^{tY}] = e^{t\mu + \sigma^2 t^2/2}.$$

1. Calculer les deux premiers moments de X, où $X \sim \mathrm{Lognormal}(\mu, \sigma^2)$.
2. Soit $X_1, \ldots, X_n$ une suite de variables aléatoires iid de loi log-normale $\mathrm{Lognormal}(\mu, \sigma^2)$. En utilisant la méthode des moments (éventuellement généralisée), proposer des estimateurs des paramètres μ et σ^2.