ENSAE Paris - IP Paris
Année scolaire 2023-2024
Session d'examens : 2A S1
(session principale)

Examen final du cours "Macroéconomie 1"

Durée : 2 heures. Aucun document autorisé. Aucune calculatrice autorisée.
Le barème, susceptible d'être modifié, est donné uniquement à titre indicatif.

1 Questions de cours (6 points)

Répondre très brièvement aux questions suivantes, sans utiliser d'équation (une ou deux phrases suffisent pour chaque réponse).

Question 1 L'annonce d'un événement futur peut-elle impacter l'économie dès à présent dans le modèle de Cass-Koopmans-Ramsey ? Et dans le modèle de Solow-Swan ? Pourquoi ?

Question 2 Dans quel but considère-t-on un "planificateur omniscient, omnipotent et bienveillant" ?

Question 3 Quelle est la politique économique socialement optimale dans le modèle de Cass-Koopmans-Ramsey, et pourquoi ?

Question 4 Dans le modèle DICE à l'état régulier, le taux d'actualisation (r) dépend-il positivement ou négativement de l'incertitude autour du taux de croissance futur de l'économie (g), et pourquoi ?

Question 5 Qu'est-ce qu'une taxe pigouvienne ? Citez un exemple vu en cours ou en TD.

Question 6 Qu'est-ce que l'équivalence ricardienne ? Citez une raison pour laquelle elle pourrait ne pas être satisfaite empiriquement.

2 Exercice 1 : chocs dans le modèle de croissance avec apprentissage par la pratique (10 points)

On considère le modèle de croissance avec apprentissage par la pratique vu en cours et en TD, dans le cas particulier d'une élasticité de substitution intertemporelle constante, égale à $1/\theta$, où $\theta > 0$ et $\theta \neq 1$.

Pour mémoire, dans ce modèle, le temps est continu, indicé par t. La fonction de production F, homogène de degré un, strictement croissante et strictement concave en chacun de ses arguments, est la même pour toutes les entreprises : pour chaque entreprise i, $Y_{i,t} = F(K_{i,t}, A_t N_{i,t})$, où $Y_{i,t}$ est sa production, $K_{i,t}$ son stock de capital, et $N_{i,t}$ sa demande de travail. On note $Y_t \equiv \sum_{i=1}^{I} Y_{i,t}$, $K_t \equiv \sum_{i=1}^{I} K_{i,t}$, et $N_t \equiv \sum_{i=1}^{I} N_{i,t}$ les variables agrégées correspondantes. La variable de productivité A_t est supposée égale à

$$A_t = \frac{K_t}{L_t}, \tag{1}$$

où L_t est la population (supposée exogène, croissant au taux n, et fournissant une unité de travail par personne). Chaque ménage peut détenir deux types d'actifs : prêts aux autres ménages et titres de propriété sur le capital. On note w_t le salaire réel, r_t le taux d'intérêt réel, z_t le coût réel d'usage du capital, ρ le taux de préférence pour le présent, et δ le taux de dépréciation du capital. On note B_t le montant total agrégé des actifs et C_t la consommation agrégée à la date t. On note avec des minuscules les variables par tête, par exemple $b_t \equiv B_t/L_t$. On rappelle que le programme d'optimisation du ménage représentatif est le suivant : pour $(r_t, w_t)_{t\geq 0}$ et b_0 donnés,

$$\max_{(c_t)_{t\geq 0},(b_t)_{t>0}} \left[L_0 \int_0^{+\infty} e^{-(\rho-n)t} \left(\frac{c_t^{1-\theta}-1}{1-\theta} \right) dt \right]$$

sous les contraintes

$$\forall t \geq 0,\ c_t \geq 0, \tag{2}$$

$$\forall t \geq 0,\ \dot{b}_t = (r_t - n)b_t + w_t - c_t, \tag{3}$$

$$\lim_{t\to+\infty} \left[b_t e^{-\int_0^t (r_\tau - n)d\tau} \right] \geq 0. \tag{4}$$

2.1 Équation différentielle en $\dot{k}_t$

Question 7 Interpréter l'équation (1). En admettant que $Y_t = F(K_t, A_t N_t)$ et en utilisant l'équation (1) et la condition d'équilibre du marché du travail, obtenir Y_t en fonction de K_t.

Question 8 Ecrire la condition d'équilibre sur le marché des biens à la date t, faisant intervenir $\dot{K}_t$, Y_t, C_t, K_t, et δ. En déduire l'équation différentielle

$$\dot{k}_t = f(1)k_t - c_t - (n+\delta)k_t, \tag{5}$$

où $f(x) \equiv F(x, 1)$.

2.2 Équation différentielle en $\dot{c}_t$

Question 9 Interpréter les contraintes (3) et (4). Ecrire le Hamiltonien du programme du ménage représentatif, puis la condition du premier ordre sur la variable de contrôle et la condition d'évolution de la co-variable d'état.

Question 10 En déduire que $\frac{\dot{c}_t}{c_t} = \frac{r_t - \rho}{\theta}$. Interpréter les effets de r_t et de ρ sur $\frac{\dot{c}_t}{c_t}$. Expliquer brièvement, sans utiliser d'équation, pourquoi on a $r_t = z_t - \delta$ et $z_t = f'(1)$ à l'équilibre. En déduire l'équation différentielle

$$\frac{\dot{c}_t}{c_t} = \frac{f'(1) - (\delta + \rho)}{\theta}. \tag{6}$$

2.3 Equilibre pour δ constant

Pour mémoire, en utilisant les équations différentielles (5) et (6), la condition initiale (k_0 exogène) et la condition terminale (provenant de la condition de transversalité), on obtient les trajectoires suivantes pour k_t et c_t à l'équilibre concurrentiel, lorsque les paramètres du modèle (en particulier δ) sont constants dans le temps :

$$k_t = k_0 e^{g(\delta)t} \text{ et } c_t = \varphi(\delta) k_0 e^{g(\delta)t},$$

où $g(\delta) \equiv \frac{f'(1)-(\delta+\rho)}{\theta} > 0$ et $\varphi(\delta) \equiv f(1) - (n + \delta) - g(\delta) > 0$.

2.4 Effet d'une baisse permanente de δ

Question 11 On suppose qu'initialement δ prend la valeur δ_1 et les agents anticipent (incorrectement) que δ restera à cette valeur par la suite. En $t = T > 0$, δ passe de manière non anticipée de δ_1 à δ_2 avec $\delta_2 < \delta_1$, puis reste à δ_2 par la suite. A partir de T, les agents anticipent (correctement) que $\delta = \delta_2$ par la suite. (On suppose que $\varphi(\delta_j) > 0$ et $g(\delta_j) > 0$ pour $j \in \{1, 2\}$.) Représenter graphiquement la forme que prennent les trajectoires de $ln(k_t)$ et $ln(c_t)$ en fonction de $t \geq 0$, selon que $\theta < 1$, $\theta = 1$, ou $\theta > 1$. Interpréter.

Question 12 On considère le même scénario qu'à la question précédente, à l'exception près que la baisse permanente de δ à la date T est maintenant anticipée par les agents dès la date 0. Quelles conditions d'équilibre (deux équations différentielles, une condition initiale, et une condition terminale) faut-il utiliser pour obtenir analytiquement les trajectoires de $ln(k_t)$ et $ln(c_t)$ en fonction de t pour $0 \leq t \leq T$? Utiliser ces conditions pour obtenir

$$c_0 = \frac{\varphi(\delta_1) k_0}{\left[1 - e^{-\varphi(\delta_1)T}\right] + \frac{\varphi(\delta_1)}{\varphi(\delta_2)} \left[e^{-\varphi(\delta_1)T}\right]} \quad \text{et} \quad c_T = c_0 e^{g(\delta_1)T}.$$

Question 13 La valeur prise par c_0 à la question 12 est-elle supérieure, égale, ou inférieure à la valeur prise par c_0 à la questions 11 ? Même question pour la valeur prise par c_t juste avant T, et pour la valeur prise par c_t juste après T. Représenter, sur le même graphique qu'à la question 11, la forme que prend la trajectoire de $ln(c_t)$ en fonction de $t \geq 0$ à la question 12, selon que $\theta < 1$, $\theta = 1$, ou $\theta > 1$. Interpréter. Que devient c_0 lorsque $T \to +\infty$, et pourquoi ?

3 Exercice 2 : le "modèle de Solow-Swan vert" et la "courbe de Kuznets environnementale" (4 points)

Cet exercice s'inspire d'un article de Brock et Taylor publié en 2010.[1] Le but de cet article est de proposer une explication de la "courbe de Kuznets environnementale". Cette

1. Brock, W.A., et Taylor, M.S., 2010, "The Green Solow Model", Journal of Economic Growth, 15, 127-153.

courbe est une hypothèse selon laquelle, au fur et à mesure qu'une économie croît, la quantité totale de polluants émise dans cette économie augmente dans un premier temps, puis diminue ensuite. Cette hypothèse semble vérifiée dans les données pour certains polluants et certains pays (mais pas pour tous les polluants ni tous les pays).

On considère le modèle de Solow-Swan vu en cours et en TD, avec une fonction de production Cobb-Douglas. Pour mémoire, dans ce modèle, le temps est continu, indicé par t. La production agrégée Y_t est $Y_t = K_t^\alpha (A_t L_t)^{1-\alpha}$ avec $0 < \alpha < 1$, où K_t est le stock de capital agrégé, A_t la productivité du travail (exogène, croissant au taux g), et L_t la population (exogène, croissant au taux n, et fournissant une unité de travail par personne) à la date t. On note s le taux d'épargne (exogène), δ le taux de dépréciation du capital, et $\kappa_t \equiv K_t/(A_t L_t)$ le stock de capital agrégé par unité de travail efficace à la date t.

On suppose que la production de biens émet des polluants. Plus précisément, en l'absence d'effort de réduction de la pollution, la production de Y_t unités de bien à la date t émettrait $E_t = \Omega_t Y_t$ unités de pollution, où Ω_t est exogène et décroît au taux $g_\Omega > 0$: $\Omega_t = \Omega_0 e^{-g_\Omega t}$, où $\Omega_0 > 0$. La décroissance de Ω_t dans le temps s'interprète comme la conséquence d'un progrès technique exogène de "verdissement" des moyens de production (ne nécessitant pas d'effort particulier).

On suppose aussi qu'il existe par ailleurs une technologie de réduction de pollution : avec X_t unités de bien, on réduit la pollution de $\Omega_t R(Y_t, X_t)$ unités de pollution, où la fonction R est strictement croissante et strictement concave dans chacun de ses arguments, et homogène de degré un. On suppose enfin qu'une fraction exogène et constante de la production est consacrée à la réduction de la pollution : $X_t/Y_t = \chi$, où $0 < \chi < 1$. La réduction de pollution est donc $\Omega_t R(Y_t, X_t) = \Omega_t Y_t R(1, X_t/Y_t) = \Omega_t Y_t R(1,\chi) = \eta \Omega_t Y_t$, où $\eta \equiv R(1,\chi) > 0$. En prenant en compte cette réduction, la quantité totale de polluants émise est donc $E_t = (1-\eta)\Omega_t Y_t$.

Le taux d'épargne s s'applique sur les biens non consacrés à la réduction de la pollution $(Y_t - X_t)$: la quantité $s(Y_t - X_t)$ de ces biens est épargnée, et la quantité $(1-s)(Y_t - X_t)$ de ces biens est consommée.

Question 14 Montrer qu'on a l'équation différentielle suivante :

$$\dot{\kappa}_t = s(1-\chi)\kappa_t^\alpha - (n+g+\delta)\,\kappa_t.$$

Définir l'état régulier. Montrer que κ_t est constant à l'état régulier, et déterminer sa valeur κ^*. Interpréter brièvement la façon dont κ^* dépend des paramètres s, χ, n, g, et δ. Montrer que quel que soit κ_0, κ_t converge au cours du temps vers κ^*.

Question 15 Montrer que

$$\frac{\dot{E}_t}{E_t} = (n+g-g_\Omega) + \alpha s(1-\chi)\left[\left(\frac{1}{\kappa_t}\right)^{1-\alpha} - \left(\frac{1}{\kappa^*}\right)^{1-\alpha}\right].$$

Quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes sur κ_0 et les paramètres du modèle pour obtenir une courbe de Kuznets environnementale, i.e. pour qu'à partir de la date 0 le taux de croissance de l'économie soit toujours positif et le taux de croissance des émissions de polluants $\dot{E}_t/E_t$ soit d'abord positif, puis négatif ? Interpréter.