Autour du modèle de Solow-Swan

Exercice 1 : Le modèle de Solow-Swan avec capital humain

Cet exercice reprend et analyse l'article de Mankiw, Romer et Weil (1992) [1], dans lequel les auteurs cherchent à montrer que le modèle de Solow (1956) peine à reproduire parfaitement les faits stylisés de croissance économique des économies de marché s'il ne prend pas en compte certains facteurs de productions clés.

On rappelle que l'évolution de la production par tête dans le modèle de Solow-Swan standard (1956) à l'état régulier est donnée par

$$\frac{Y_t}{L_t} = A_0 e^{gt} \left(\frac{s_K}{\delta + g + n} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

Le tableau I rapporte les résultats de l'estimation de l'équation économétrique

$$\ln(Y_i/L_i) = a + b[\ln s_{Ki} - \ln(n_i + g + \delta)] + \varepsilon_i$$

sur un ensemble de pays i en 1985.

TABLE I
Estimation of the Textbook Solow Model

Dependent variable: log GDP per working-age person in 1985			
Sample:	Non-oil	Intermediate	OECD
Observations:	98	75	22
CONSTANT	6.87	7.10	8.62
	(0.12)	(0.15)	(0.53)
$\ln(I/GDP) - \ln(n + g + \delta)$	1.48	1.43	0.56
	(0.12)	(0.14)	(0.36)
$\overline{R}^2$	0.59	0.59	0.06
Implied α	0.60	0.59	0.36
	(0.02)	(0.02)	(0.15)

Note. Standard errors are in parentheses. The investment and population growth rates are averages for the period 1960–1985. $(g + \delta)$ is assumed to be 0.05.

Question 1 Quelle est la signification de α dans le cadre du modèle ? Comment est-il calculé ("Implied α" dans le tableau I) à partir des coefficients estimés ? Répondre en discutant les hypothèses selon lesquelles la valeur estimée de α serait interprétable de la même manière que dans le modèle.

Question 2 En se basant sur la littérature montrant que la part de la rémunération du travail représente environ 2/3 du PIB de la plupart des économies de marché, les auteurs considèrent que la valeur empiriquement pertinente pour α est de 1/3. Dans ce cas, le modèle permet-il de rendre compte des écarts de niveaux de vie entre pays ?

En reprenant à présent le cadre du modèle de Solow-Swan, les auteurs proposent de modifier la fonction de production en introduisant le capital humain H_t :

$$Y_t = K_t^{\alpha} H_t^{\beta} (A_t L_t)^{1-\alpha-\beta}, \qquad \alpha > 0, \beta > 0, \alpha + \beta < 1.$$

1. Mankiw G., Romer D. et Weil D., 1992. "A Contribution to the Empirics of Economic Growth". *The Quarterly Journal of Economics*, MIT Press, vol. 107(2), pages 407-37.

La quantité de travail L_t et son efficacité A_t croissent à des taux constants n et g. L'accumulation de capital physique et de capital humain est déterminée par les taux d'épargne correspondants s_K et s_H. Le taux de dépréciation est δ dans les deux cas. On introduit les variables par unité de travail efficace $\kappa_t = K_t/(A_t L_t)$, $\eta_t = H_t/(A_t L_t)$, et $y_t = Y_t/(A_t L_t)$.

Question 3 Montrer que y_t se met sous la forme $\kappa_t^\alpha \eta_t^\beta$. Ecrire les équations d'évolution de κ_t et η_t.

Question 4 Déterminer les valeurs stationnaires κ^*, η^* et y^*. Quel est l'impact d'une hausse permanente des taux d'épargne sur la croissance ?

On dit que les taux d'épargne satisfont la *règle d'or* lorsqu'ils maximisent la consommation par travailleur à l'état régulier.

Question 5 Déterminer les taux d'épargne de la *règle d'or* (s_{Kor}, s_{Hor}).

Question 6 Ecrire le logarithme de la production par tête à une date t en fonction des paramètres du modèle, en supposant que l'économie est à son état stationnaire depuis la date initiale $t = 0$.

Le tableau II rapporte les résultats de l'estimation de l'équation économétrique

$$\ln(Y_i/L_i) = a + b[\ln s_{Ki} - \ln(n_i + g + \delta)] + c[\ln s_{Hi} - \ln(n_i + g + \delta)] + \varepsilon_i$$

sur un ensemble de pays i en 1985.

TABLE II
ESTIMATION OF THE AUGMENTED SOLOW MODEL

Dependent variable: log GDP per working-age person in 1985			
Sample:	Non-oil	Intermediate	OECD
Observations:	98	75	22
CONSTANT	7.86	7.97	8.71
	(0.14)	(0.15)	(0.47)
$\ln(I/GDP) - \ln(n + g + \delta)$	0.73	0.71	0.29
	(0.12)	(0.14)	(0.33)
$\ln(SCHOOL) - \ln(n + g + \delta)$	0.67	0.74	0.76
	(0.07)	(0.09)	(0.28)
$\bar{R}^2$	0.78	0.77	0.28
Implied α	0.31	0.29	0.14
	(0.04)	(0.05)	(0.15)
Implied β	0.28	0.30	0.37
	(0.03)	(0.04)	(0.12)

Note. Standard errors are in parentheses. The investment and population growth rates are averages for the period 1960–1985. $(g + \delta)$ is assumed to be 0.05. SCHOOL is the average percentage of the working-age population in secondary school for the period 1960–1985.

Question 7 Comment sont calculés les α et β résultants ("Implied α" et "Implied β" dans le tableau II) à partir des coefficients estimés ?

Question 8 D'après les auteurs, le salaire minimum aux Etats-Unis représentait environ 30 à 50% du salaire moyen du secteur manufacturier. Si l'on considère grossièrement le salaire minimum comme le niveau de rémunération du travail non qualifié, le capital humain, ici le niveau d'éducation, compterait pour 50 à 70% de la part de la rémunération du facteur travail en moyenne. En admettant que la valeur empiriquement pertinente de α, c'est-à-dire la part de la rémunération du capital physique, soit à nouveau 1/3, celle du travail est donc de 2/3 et par conséquent celle du capital humain environ entre 1/3 et 1/2. La prise en compte du capital humain améliore-t-elle le pouvoir explicatif du modèle ?

On rappelle la dynamique de l'économie dans le modèle de Solow-Swan avec fonction de production Cobb-Douglas que l'on obtient en résolvant le modèle (vu en cours) :

$$y_t = \left\{(\kappa^*)^{1-\alpha} - \left[(\kappa^*)^{1-\alpha} - (\kappa_0)^{1-\alpha}\right] e^{-(n+g+\delta)(1-\alpha)t}\right\}^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

Question 9 Montrer que l'on peut réécrire cette relation sous la forme suivante :

$$\log(\frac{y_t}{y^*}) = \log(\frac{y_0}{y^*})e^{-\lambda t}$$

On pose $\hat{y}_t = \log\left(\frac{y_t}{y_t^*}\right)$. Que représente $\hat{y}_t$? Interprêter λ comme une vitesse de convergence vers l'état régulier.

Question 10 Soient deux dates t_0 et $t_0 + T$. Déduire de la question précédente que le taux de croissance moyen de la production par tête entre ces deux dates peut s'exprimer

$$\frac{1}{T}\log\left(\frac{(Y/L)_{t_0+T}}{(Y/L)_{t_0}}\right) = g + \frac{1-e^{-\lambda T}}{T}[\log(A_0 y^*) + gt_0] - \frac{1-e^{-\lambda T}}{T}\log((Y/L)_{t_0}) \tag{1}$$

Question 11 À partir des données précédentes, l'estimation économétrique de l'équation suivante :

$$\frac{1}{T}\log\left(\frac{(Y/L)_{i,t_0+T}}{(Y/L)_{i,t_0}}\right) = A + B\log((Y/L)_{i,t_0}) + u_{i,t_0,t_0+T} \tag{2}$$

où $y_{i,t}$ est le niveau de la production par tête dans le pays i pendant l'année t et $u_{i,t,t'}$ un terme d'erreur, donne les résultats affichés dans le tableau suivant :

Dependent variable: log difference GDP per working-age person 1960–1985			
Sample:	Non-oil	Intermediate	OECD
Observations:	98	75	22
CONSTANT	−0.266	0.587	3.69
	(0.380)	(0.433)	(0.68)
ln(Y60)	0.0943	−0.00423	−0.341
	(0.0496)	(0.05484)	(0.079)
$\overline{R}^2$	0.03	−0.01	0.46
s.e.e.	0.44	0.41	0.18
Implied λ	−0.00360	0.00017	0.0167
	(0.00219)	(0.00218)	(0.0023)

Note. Standard errors are in parentheses. Y60 is GDP per working-age person in 1960.

Comment est calculé l'estimateur de la vitesse de convergence $\hat{\lambda}$? Combien de temps faut-il pour résorber la moitié de l'écart initial par rapport à l'état régulier ?

Question 12 En considérant que la population a augmenté en moyenne d'1% par an dans les pays de l'OCDE entre 1960 et 1985, quelle valeur de α le modèle de Solow-Swan avec fonction de production Cobb-Douglas implique-t-il ? Ce modèle permet-il de rendre compte de la vitesse de convergence des niveaux de vie entre ces pays ?

Exercice 2 *(Optionnel)* : La terre comme facteur de production dans le modèle de Solow-Swan

Depuis Malthus, au moins, certains économistes ont soutenu que le fait que certains facteurs de production (en particulier la terre) sont disponibles en quantité limitée finirait par stopper la croissance. On s'intéresse à ce problème dans le cadre du modèle de Solow-Swan en introduisant le stock de terre R_t dans la fonction de production :

$$Y_t = K_t^\alpha (A_t L_t)^\beta R_t^{1-\alpha-\beta}, \qquad \alpha > 0,\ \beta > 0,\ \alpha + \beta < 1.$$

La quantité de travail L_t et son efficacité A_t croissent à des taux constants n et g. L'accumulation du capital est régie par les taux d'épargne s et de dépréciation δ. Le stock de terre est fixe, $R_t = R$.

Question 1 On note γ_t le taux de croissance du capital. Déterminer la relation qui lie $\dot{\gamma}_t$ à γ_t, et la représenter sur un graphe.

Question 2 Cette économie possède-t-elle un état régulier stable ? Est-il unique ?

Question 3 Le fait que la terre est disponible en quantité fixe rend-il impossible la croissance permanente de la production par tête $y_t \equiv \frac{Y_t}{L_t}$? Commenter.