

## Macroéconomie 1 (5/7)

# Le modèle de croissance avec variété des biens (Romer, 1990)

Olivier Loisel

ENSAE

Septembre – Décembre 2025

## Caractéristiques clefs du modèle

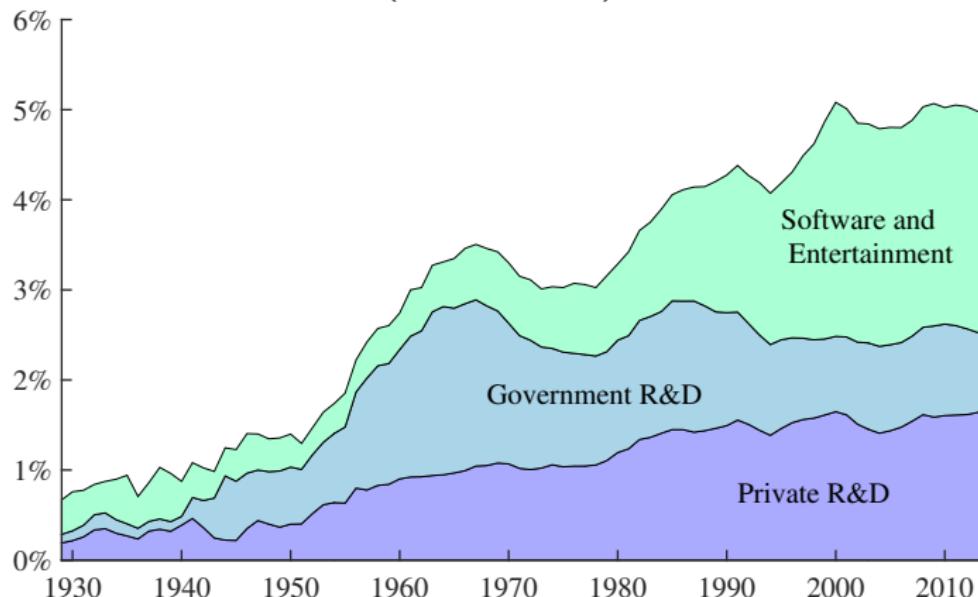
- Le modèle de Romer (1990) explique la croissance de long terme par **un progrès technique volontaire et rémunéré**, la rémunération prenant la forme d'une rente de monopole protégée par secret ou par brevet.
- Il modélise ce progrès technique comme **l'augmentation de la variété des biens** (d'où l'appellation "modèle de croissance avec variété des biens" ou "modèle d'élargissement de la gamme des produits").
- La constance des rendements de la variété des biens va
  - générer de la croissance à long terme,
  - entraîner l'absence de convergence conditionnelle.
- L'absence de concurrence pure et parfaite, source de la rémunération du progrès technique, va donner un rôle à la politique économique.

# Littérature

- Dans les modèles de croissance avec variété des biens, les biens dont la variété augmente peuvent être des biens
    - **de production**, comme dans Romer (1990),
    - **de consommation**, comme dans Grossman et Helpman (1991, ch. 3).
  - Dans la version originale du modèle de Romer (1990), le coût de la recherche et développement ( $\equiv$  R&D, nécessaire à l'invention de nouveaux types de bien) est spécifié en termes de *travail*.
  - Dans ce chapitre, on se limite à une version simplifiée du modèle de Romer (1990), dans laquelle le coût de R&D est spécifié en termes de *biens*, comme dans Rivera-Batiz et Romer (1991).

# Dépenses de R&D aux États-Unis, 1929-2013

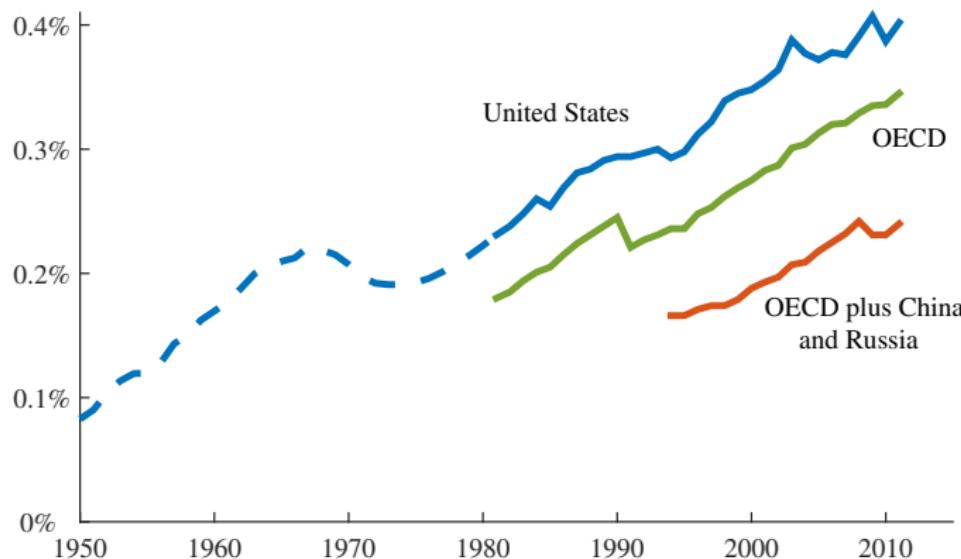
(en % du PIB)



Source : Jones (2015). "Software and entertainment" : logiciels et divertissement.  
"Government/private R&D" : R&D publique/privée.

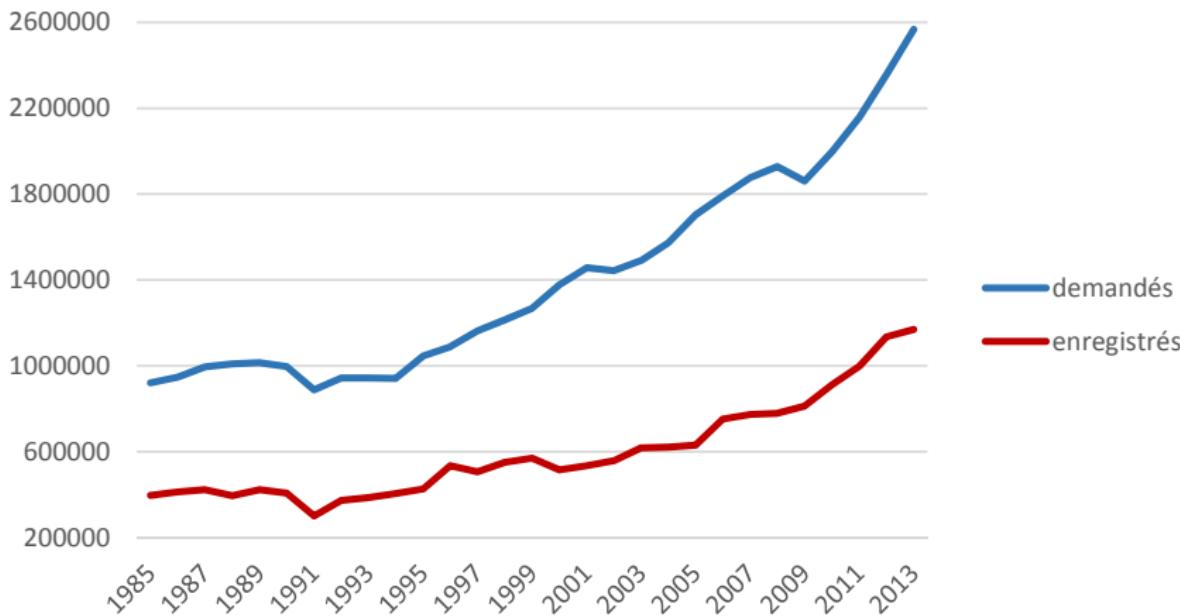
# Part des chercheurs dans la population...

...dans différents pays ou groupes de pays, 1950-2011



Source : Jones (2015). Noms des pays et groupes de pays en anglais.

## Nombre de nouveaux brevets dans le monde, 1985-2013

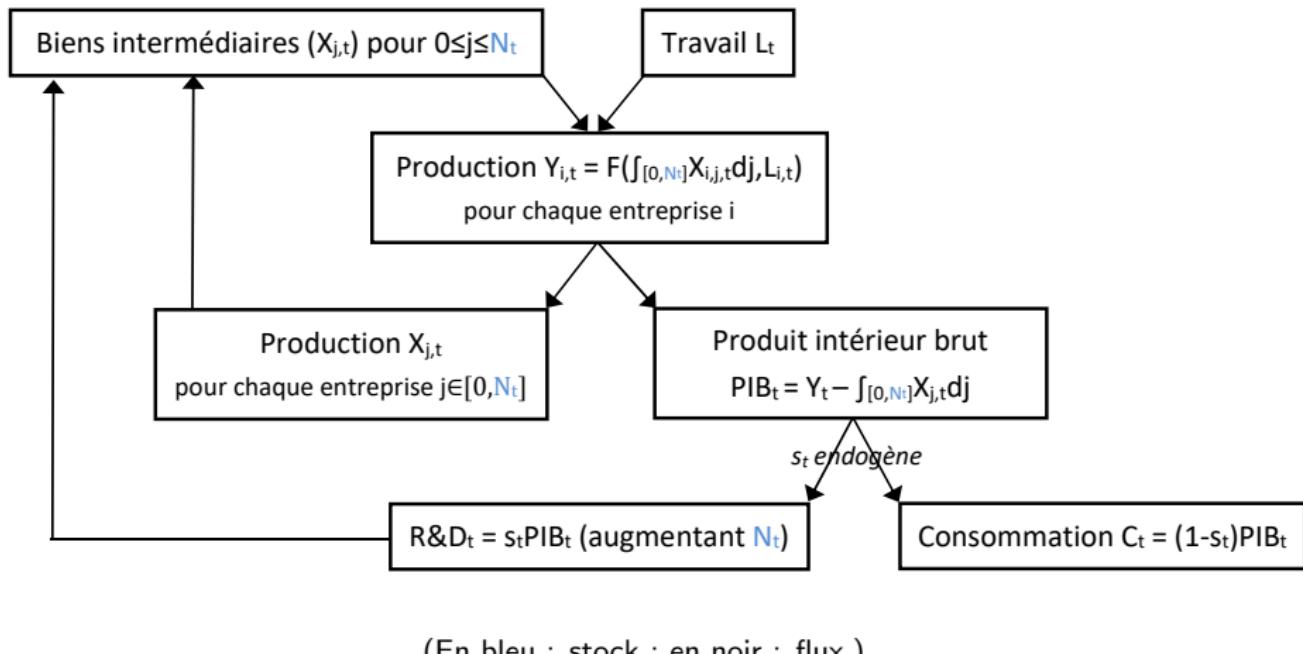


Source : Organisation Mondiale de la Propriété Intellectuelle.

## Aperçu général du modèle I

- Les **producteurs de bien final** utilisent des biens intermédiaires et du travail pour produire des biens finaux.
- Les **inventeurs-producteurs de bien intermédiaire**
  - empruntent auprès des ménages pour inventer des types de bien int.,
  - utilisent des biens finaux pour produire des biens intermédiaires,
  - utilisent leurs profits pour rembourser les ménages.
- Les **ménages**
  - fournissent le travail,
  - utilisent les biens finaux pour consommer et pour prêter aux inv.-prod.
- Le **taux d'épargne** (quantité de biens finaux prêtés / quantité de biens finaux consommés ou prêtés) est **endogène**, choisi optim. par les ménages.

## Aperçu général du modèle II



## Biens finaux et biens intermédiaires

- **Un seul type** de bien final, utilisé pour
  - la consommation,
  - la production de biens intermédiaires,
  - l'invention de types de bien intermédiaire.
- **Un continuum de types** de bien intermédiaire, utilisés pour la production de biens finaux.
- L'hypothèse que
  - les biens finaux servent à produire des biens intermédiaires,
  - les biens intermédiaires servent à produire des biens finaux,est faite par souci de simplicité, pas par souci de réalisme.
- Le remplacement de cette hypothèse par une hypothèse plus réaliste
  - compliquerait singulièrement l'exposition du modèle,
  - n'affecterait pas qualitativement les résultats.

## Agents privés, marchés

- **Trois sortes** d'agents privés :
  - des ménages,
  - des producteurs de bien final,
  - des inventeurs-producteurs de bien intermédiaire.
- On obtient que, pour chaque type de bien intermédiaire, il n'y a qu'**un seul inventeur-producteur de bien intermédiaire de ce type** (d'où absence de concurrence pure et parfaite).
- **Marchés en concurrence pure et parfaite** :
  - marché des prêts,
  - marché du travail,
  - marché des biens finaux.
- **Marchés en concurrence monopolistique** : pour chaque type de bien intermédiaire, le marché des biens intermédiaires de ce type.

# Origine de l'offre et de la demande sur chaque marché

- **Marché des prêts :**

- *offre* des ménages,
- *demande* des inventeurs-producteurs de bien interm. (pour inventer).

- **Marché du travail :**

- *offre* des ménages,
- *demande* des producteurs de bien final.

- **Marché des biens finaux :**

- *offre* des producteurs de bien final,
- *demande* des ménages (pour consommer et pour prêter) et des inventeurs-producteurs de bien intermédiaire (pour produire).

- **Marché des biens intermédiaires de type  $j$  :**

- *offre* de l'inventeur-producteur du bien intermédiaire de type  $j$ ,
- *demande* des producteurs de bien final.

# Variables exogènes

- **Ni flux ni stocks :**

- temps continu, indiqué par  $t$ ,
- prix des biens finaux = numéraire  $\equiv 1$ ,
- (grand) nombre  $l$  de producteurs de bien final.

- **Flux :**

- offre de travail = 1 par tête.

- **Stocks :**

- population  $L > 0$  (constante dans le temps),
- taille initiale  $N_0 > 0$  du continuum de types de bien intermédiaire.

# Variables endogènes I

- **Prix** à la date  $t$  :
  - salaire réel  $w_t$ ,
  - taux d'intérêt réel  $r_t$ ,
  - prix réel  $P_{j,t}$  des biens intermédiaires de type  $j$ .
- **Quantités – flux liés au producteur  $i$  de bien final** à la date  $t$  :
  - offre de biens finaux  $Y_{i,t}$ ,
  - demande de travail  $L_{i,t}$ ,
  - demande  $X_{i,j,t}$  de biens intermédiaires de type  $j$ .
- **Quantités – flux liés au producteur de bien intermédiaire de type  $j$  à la date  $t$  :**
  - offre  $X_{j,t}$  de biens intermédiaires de type  $j$ ,
  - demande de biens finaux  $Y_{j,t}$  (à ne pas confondre avec  $Y_{i,t}$ ).

## Variables endogènes II

- **Quantités – flux agrégés à la date  $t$  :**

- production de biens finaux agrégée  $Y_t \equiv \sum_{i=1}^I Y_{i,t}$ ,
- demande de travail agrégée  $L_t \equiv \sum_{i=1}^I L_{i,t}$ ,
- consommation agrégée  $C_t$ .

- **Quantités – stocks à la date  $t$  :**

- taille  $N_t$  du continuum de types de bien intermédiaire (sauf en  $t = 0$ ),
- montant réel agrégé des prêts  $B_t$ .

# Plan du chapitre

- ① Introduction
- ② Conditions d'équilibre
- ③ Détermination de l'équilibre
- ④ Sous-optimalité de l'équilibre
- ⑤ Mise en œuvre de l'équilibre optimal
- ⑥ Conclusion
- ⑦ Annexe

# Conditions d'équilibre

- ① Introduction
- ② Conditions d'équilibre
  - Comportement des ménages
  - Comportement des producteurs de bien final
  - Comportement des inventeurs-producteurs de bien intermédiaire et équilibre des marchés
- ③ Détermination de l'équilibre
- ④ Sous-optimalité de l'équilibre
- ⑤ Mise en œuvre de l'équilibre optimal
- ⑥ Conclusion
- ⑦ Annexe

## Comportement des ménages

- Les ménages sont modélisés exactement comme au chapitre 2, avec
  - une élasticité de substitution intertemporelle constante, égale à  $\frac{1}{\theta}$ ,
  - un taux de croissance démographique nul ( $n = 0$ ).
- Leur comportement est donc caractérisé par les conditions d'équilibre
  - $\dot{b}_t = w_t + r_t b_t - c_t$  (**contrainte budgétaire instantanée**),
  - $\dot{\frac{c_t}{c_t}} = \frac{r_t - \rho}{\theta}$  (**équation d'Euler**),
  - $\lim_{t \rightarrow +\infty} \left\{ b_t e^{-\int_0^t r_\tau d\tau} \right\} = 0$  (**condition de transversalité**),

où

- $c_t \equiv \frac{C_t}{L}$  est la consommation par tête,
- $\rho$  le taux de préférence pour le présent ( $\rho > 0$ ),
- $b_t \equiv \frac{B_t}{L}$  le montant total des prêts en unités de bien final par tête.

## Fonction de production du bien final

- Fonction de production du producteur  $i$  de bien final :

$$Y_{i,t} = F[L_{i,t}, (X_{i,j,t})_{0 \leq j \leq N_t}] \equiv AL_{i,t}^{1-\alpha} \int_0^{N_t} X_{i,j,t}^\alpha dj$$

où  $A > 0$  et  $0 < \alpha < 1$ .

- Donc, à  $N_t$  donné,  $F$  satisfait les mêmes propriétés qu'aux chapitres 1, 2 et 4.
- La forme “additivement séparable” de  $F$  implique que le produit marginal de  $X_{i,j,t}$  est indépendant de  $X_{i,j',t}$  pour  $j' \neq j$ .
- Donc, **un nouveau type de bien n'est ni un substitut direct, ni un complément direct aux types de bien existants.**

## Rendements des biens intermédiaires

- $\frac{\partial^2 Y_{i,t}}{\partial X_{i,j,t}^2} < 0$  : **les rendements de chaque type de bien intermédiaire sont strictement décroissants.**
- Si  $\forall (j, j') \in [0; N_t]^2$ ,  $X_{i,j,t} = X_{i,j',t} \equiv X_{i,t}$  (ce qui sera le cas à l'équilibre), alors  $Y_{i,t} = AL_{i,t}^{1-\alpha} N_t X_{i,t}^\alpha$ , donc  $\frac{\partial^2 Y_{i,t}}{\partial N_t^2} = 0$  : **les rendements de la variété des biens intermédiaires sont constants.**
- Les rendements des biens intermédiaires sont donc
  - strictement décroissants dans la marge intensive,
  - constants dans la marge extensive.
- Le progrès technique, défini comme la hausse de  $N_t$ , va générer de la croissance à long terme grâce à la constance des rendements de  $N_t$ .
- Une fois inventé, un type de bien intermédiaire n'est jamais oublié ni caduque : comme au chapitre 4, le savoir est cumulatif.

## Problème d'optimisation des producteurs de bien final

- Il n'y a pas de capital, et les biens intermédiaires sont non durables, donc le problème des producteurs de bien final est **instantané**.
- Il y a concurrence pure et parfaite sur le marché des biens finaux, donc chaque producteur de bien final considère les prix de ses facteurs de production comme **donnés**.
- Par conséquent, à chaque date  $t$ , le producteur  $i$  de bien final choisit  $L_{i,t}$  et les  $X_{i,j,t}$  de façon à maximiser son profit **instantané**

$$AL_{i,t}^{1-\alpha} \int_0^{N_t} X_{i,j,t}^\alpha dj - w_t L_{i,t} - \int_0^{N_t} P_{j,t} X_{i,j,t} dj$$

en considérant  $w_t$ , les  $P_{j,t}$  et  $N_t$  comme **donnés**.

## Conditions du premier ordre

- Les conditions du premier ordre de ce problème d'optimisation sont

$$w_t = (1 - \alpha) \frac{Y_{i,t}}{L_{i,t}} \quad (\text{salaire} = \text{productivité marginale du travail}),$$

$$X_{i,j,t} = \left( \frac{\alpha A}{P_{j,t}} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} L_{i,t} \quad \text{pour tout } j \in [0; N_t] \quad (\text{courbes de demande}).$$

- En utilisant ces conditions pour remplacer  $w_t$  et  $P_{j,t}$  dans l'expression du profit instantané, on obtient que ce dernier est nul quels que soient  $L_{i,t}$  et les  $X_{i,j,t}$ .

## Coût d'une invention

- On suppose que l'invention de  $dj$  nouveaux types de bien intermédiaire (de  $N_t$  à  $N_t + dj$ ) est un **processus déterministe** nécessitant l'utilisation de  $\eta dj$  unités de bien final, où  $\eta > 0$ .
- Ce coût de R&D ne dépend pas de  $N_t$  : on suppose donc en particulier qu'il n'y a pas tendance à la raréfaction des nouvelles idées.
- Ce coût est emprunté auprès des ménages et remboursé par la suite au taux d'intérêt réel  $r_t$ .

## Bénéfice d'une invention I

- S'il y avait concurrence pure et parfaite sur le marché des biens intermédiaires d'un certain type, alors personne ne souhaiterait inventer ce type car l'invention, coûteuse, ne rapporterait rien.
- On suppose donc que l'inventeur d'un nouveau type de bien intermédiaire est récompensé par une **situation de monopole** sur le marché des biens intermédiaires de ce type (par secret ou par brevet).
- Les inventions sont donc de nature non-rivale mais exclusive.
- Par souci de simplicité, on suppose qu'un inventeur-producteur conserve sa situation de monopole **perpétuellement**.
- La partie 5 des TDs considère l'hypothèse alternative de situation **temporelle** de monopole et en étudie les implications positives et normatives.

## Bénéfice d'une invention II

- Fonction de production de l'inventeur-producteur de bien intermédiaire de type  $j$  (une fois ce type inventé) :  $X_{j,t} = Y_{j,t}$ .
- La valeur actualisée du bénéfice de l'invention du type  $j$ , à toute date  $t$  postérieure ou égale à la date de cette invention, est donc

$$V_{j,t} = \int_t^{+\infty} (P_{j,\nu} - 1) X_{j,\nu} e^{-\int_t^\nu r_\tau d\tau} d\nu.$$

- A l'équilibre des marchés des biens interm. de type  $j$  et du travail,

$$\begin{aligned} X_{j,\nu} &= \sum_{i=1}^I X_{i,j,\nu} = \sum_{i=1}^I \left( \frac{\alpha A}{P_{j,\nu}} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} L_{i,\nu} \\ &= \left( \frac{\alpha A}{P_{j,\nu}} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} L_\nu = \left( \frac{\alpha A}{P_{j,\nu}} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} L. \end{aligned}$$

## Bénéfice d'une invention III

- En remplaçant  $X_{j,\nu}$  par  $\left(\frac{\alpha A}{P_{j,\nu}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} L$  dans l'expression de  $V_{j,t}$ , on obtient

$$V_{j,t} = \int_t^{+\infty} (P_{j,\nu} - 1) \left(\frac{\alpha A}{P_{j,\nu}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} L e^{-\int_t^\nu r_\tau d\tau} d\nu.$$

- A la date, notée  $t_j$ , de l'invention du type  $j$ , l'inventeur-producteur du type  $j$  choisit  $(P_{j,\nu})_{\nu \geq t_j}$  en tenant compte de la fonction de demande  $X_{j,\nu} = (\alpha A)^{\frac{1}{1-\alpha}} (P_{j,\nu})^{\frac{-1}{1-\alpha}} L$ , car il est en situation de monopole perpétuel sur le marché des biens intermédiaires de type  $j$ .
- Il choisit donc  $(P_{j,\nu})_{\nu \geq t_j}$  à la date  $t_j$  de façon à maximiser

$$V_{t_j} \equiv V_{j,t_j} = \int_{t_j}^{+\infty} (P_{j,\nu} - 1) \left(\frac{\alpha A}{P_{j,\nu}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} L e^{-\int_{t_j}^\nu r_\tau d\tau} d\nu$$

en considérant  $(r_\tau)_{\tau \geq t_j}$  comme donné.

## Bénéfice d'une invention IV

- Ce problème intertemporel se ramène à un problème instantané : à chaque date  $\nu \geq t_j$ , l'inventeur-producteur choisit  $P_{j,\nu}$  de façon à maximiser

$$(P_{j,\nu} - 1) \left( \frac{\alpha A}{P_{j,\nu}} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} L.$$

- La condition du premier ordre donne  $P_{j,\nu} = \frac{1}{\alpha}$ . **Ce prix est**
  - **supérieur au coût marginal** (du fait de la situation de monopole),
  - **constant dans le temps** (comme la fonction de profit instantané),
  - **identique pour tous les types** de bien intermédiaire (par symétrie).
- Dans le cas limite  $\alpha \rightarrow 1$ , qui correspond à la concurrence pure et parfaite (les biens intermédiaires étant alors parfaitement substituables dans la fonction de production  $F$ ), on a  $P_{j,\nu} \rightarrow 1$  (prix  $\rightarrow$  coût marginal).

## Bénéfice d'une invention V

- En remplaçant  $P_{j,t}$  par sa valeur dans  $X_{j,t} = \left(\frac{\alpha A}{P_{j,t}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} L$ , on obtient

$$X_{j,t} = A^{\frac{1}{1-\alpha}} \alpha^{\frac{2}{1-\alpha}} L.$$

- La quantité de biens intermédiaires est donc identique pour tous les types et constante dans le temps.**
- En remplaçant  $P_{j,\nu}$  et  $X_{j,\nu}$  par leurs valeurs dans l'expression de  $V_{j,t}$ , pour  $t \geq t_j$ , on obtient

$$V_{j,t} = A^{\frac{1}{1-\alpha}} (1 - \alpha) \alpha^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} L \int_t^{+\infty} e^{- \int_t^\nu r_\tau d\tau} d\nu.$$

## Préliminaire à la comparaison entre coût et bénéfice

- En utilisant  $X_{i,j,t} = \left(\frac{\alpha A}{P_{j,t}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} L_{i,t}$ ,  $P_{j,t} = \frac{1}{\alpha}$  et  $L_t = L$ , on obtient

$$\begin{aligned} Y_t &\equiv \sum_{i=1}^I Y_{i,t} = \sum_{i=1}^I A L_{i,t}^{1-\alpha} \int_0^{N_t} X_{i,j,t}^\alpha dj \\ &= \sum_{i=1}^I A L_{i,t}^{1-\alpha} \int_0^{N_t} \left(\frac{\alpha A}{P_{j,t}}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} L_{i,t}^\alpha dj \\ &= \sum_{i=1}^I A L_{i,t} \int_0^{N_t} (\alpha^2 A)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} dj \\ &= A^{\frac{1}{1-\alpha}} \alpha^{\frac{2\alpha}{1-\alpha}} L_t N_t = A^{\frac{1}{1-\alpha}} \alpha^{\frac{2\alpha}{1-\alpha}} LN_t. \end{aligned}$$

- On se restreint aux équilibres tels que  $V_t$  est constant dans le temps, et on note  $V$  sa valeur.
- On montre en annexe qu'en ce cas  $r_t$  est constant dans le temps, égal à

$$r(V) \equiv A^{\frac{1}{1-\alpha}} (1 - \alpha) \alpha^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} \frac{L}{V}.$$

# Comparaison entre coût et bénéfice I

- On considère tout d'abord les deux cas suivants :

① Cas  $V > \eta$  : alors le marché des prêts n'est pas à l'équilibre (du fait de la libre entrée, une mesure infinie d'inv.-prod. souhaitent emprunter).

→ Ce cas est donc impossible.

② Cas  $V < \eta$  : alors

- $N_t$  est constant pour  $t \geq 0$  (car il n'y a jamais d'invention),
- donc  $Y_t = A^{\frac{1}{1-\alpha}} \alpha^{\frac{2\alpha}{1-\alpha}} L N_t$  est constant pour  $t \geq 0$ ,
- donc  $c_t$  est borné pour  $t \geq 0$  (car  $L c_t \leq Y_t$ ),
- donc  $r(V) \leq \rho$  (car l'équation d'Euler s'écrit  $\frac{c_t}{c_{t-1}} = \frac{r(V)-\rho}{\theta}$ ),
- donc  $V \geq A^{\frac{1}{1-\alpha}} (1-\alpha) \alpha^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} \frac{L}{\rho}$ .

→ On écarte ce cas en se restreignant aux valeurs des paramètres telles que  $\rho \leq r \equiv (1-\alpha) \alpha^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} A^{\frac{1}{1-\alpha}} \frac{L}{\eta}$ .

## Comparaison entre coût et bénéfice II

- On en déduit qu'on est nécessairement dans le cas restant :
  - ③ Cas  $V = \eta$  : alors  $r_t = r$  pour  $t \geq 0$ .
- Donc **le bénéfice actualisé d'une invention, à la date de cette invention, est constamment égal à son coût**, et le taux d'intérêt est constant.
- L'inventeur-producteur de bien intermédiaire de type  $j$  utilise donc l'intégralité de ses bénéfices jusqu'à la date  $+\infty$  pour rembourser sa dette initiale.
- Donc, à toute date  $t \geq t_j$ , sa dette est égale à la valeur actualisée  $V_{j,t}$  de ses bénéfices futurs.
- Or  $V_{j,t}$  est constant dans le temps, donc sa dette est aussi constante dans le temps, égale à sa valeur initiale  $\eta$ .

## Comparaison entre coût et bénéfice III

- A l'équilibre sur le marché des prêts, on a donc

$$B_t = \int_0^{N_t} V_{j,t} dj = \eta N_t.$$

- Les bénéfices des inventeurs-producteurs étant entièrement reversés aux ménages sous forme de remboursement de dette, la condition d'équilibre sur le marché des biens finaux s'écrit donc

$$Y_t = Lc_t + N_t X_{j,t} + \eta \dot{N}_t.$$

# Détermination de l'équilibre

- ① Introduction
- ② Conditions d'équilibre
- ③ Détermination de l'équilibre
  - Conditions d'équilibre sur  $N_t$  et  $c_t$
  - Détermination de  $N_t$  et  $c_t$
  - Implications
- ④ Sous-optimalité de l'équilibre
- ⑤ Mise en œuvre de l'équilibre optimal
- ⑥ Conclusion
- ⑦ Annexe

# Variables endogènes (sauf $N_t$ et $c_t$ ) en fonction de $N_t$

## • Quantités :

- on a déjà obtenu  $L_t = L$  et  $B_t = \eta N_t$ ,
- on a  $Y_t = A^{\frac{1}{1-\alpha}} \alpha^{\frac{2\alpha}{1-\alpha}} L N_t = \frac{\eta r N_t}{\alpha(1-\alpha)}$  et  $X_{j,t} = A^{\frac{1}{1-\alpha}} \alpha^{\frac{2}{1-\alpha}} L = \frac{\alpha \eta r}{1-\alpha}$ .

## • Prix :

- on a déjà obtenu  $r_t = r$  et  $P_{j,t} = \frac{1}{\alpha}$ ,
- de  $w_t = (1 - \alpha) \frac{Y_{i,t}}{L_{i,t}}$ , on déduit que  $\frac{Y_{i,t}}{L_{i,t}}$  ne dépend pas de  $i$  et vaut donc  $\frac{Y_t}{L}$ . Par conséquent,  $w_t = (1 - \alpha) \frac{Y_t}{L} = \frac{\eta r N_t}{\alpha L}$ .

## Conditions d'équilibre sur $N_t$ et $c_t$ I

- En utilisant  $b_t \equiv \frac{B_t}{L} = \frac{\eta N_t}{L}$ ,  $r_t = r$  et  $w_t = \frac{\eta r N_t}{\alpha L}$ , on peut réécrire la contrainte budgétaire instantanée des ménages comme

$$\dot{N}_t = \frac{(1 + \alpha)r}{\alpha} N_t - \frac{L}{\eta} c_t.$$

- Cette équation différentielle peut aussi s'obtenir en remplaçant  $Y_t$  par  $\frac{\eta r N_t}{\alpha(1-\alpha)}$  et  $X_{j,t}$  par  $\frac{\alpha \eta r}{1-\alpha}$  dans la condition d'équilibre du marché des biens finaux (conséquence de la loi de Walras).

## Conditions d'équilibre sur $N_t$ et $c_t$ II

- En utilisant  $r_t = r$ , on peut réécrire l'équation d'Euler comme

$$\frac{\dot{c}_t}{c_t} = \frac{r - \rho}{\theta}.$$

- En utilisant  $b_t = \frac{\eta N_t}{L}$  et  $r_t = r$ , on peut réécrire la condition de transversalité comme

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \{N_t e^{-rt}\} = 0.$$

## Conditions d'équilibre sur $N_t$ et $c_t$ III

- $(N_t)_{t \geq 0}$  et  $(c_t)_{t \geq 0}$  sont donc déterminés par deux équations différentielles, une condition initiale et une condition terminale :

$$\dot{N}_t = \frac{(1 + \alpha)r}{\alpha} N_t - \frac{L}{\eta} c_t,$$

$$\frac{\dot{c}_t}{c_t} = \frac{r - \rho}{\theta},$$

$N_0$  donné,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \{N_t e^{-rt}\} = 0.$$

- Les autres variables endogènes sont déterminées résiduellement, à partir de  $N_t$ , par les expressions précédemment obtenues.

## Détermination de $N_t$ et $c_t$ I

- L'équation différentielle en  $\dot{c}_t$  s'intègre pour donner

$$c_t = c_0 e^{\frac{r-\rho}{\theta} t}.$$

- La condition  $r \geq \rho$  implique que le taux de croissance de la consommation par tête est positif ou nul.
- On se restreint aux valeurs des paramètres telles que  $\rho > \frac{1-\theta}{\theta}(r - \rho)$ , de façon à ce que l'utilité intertemporelle prenne une valeur finie.

## Détermination de $N_t$ et $c_t$ II

- On peut alors réécrire l'équation différentielle en  $N_t$  comme

$$\dot{N}_t = \frac{(1+\alpha)r}{\alpha} N_t - \frac{Lc_0}{\eta} e^{\frac{r-\rho}{\theta} t}.$$

- Puis, en réarrangeant les termes et en multipliant par  $e^{-\frac{(1+\alpha)r}{\alpha} t}$ ,

$$\left\{ \dot{N}_t - \frac{(1+\alpha)r}{\alpha} N_t \right\} e^{-\frac{(1+\alpha)r}{\alpha} t} = -\frac{Lc_0}{\eta} e^{-\varphi t},$$

où  $\varphi \equiv \frac{(1+\alpha)r}{\alpha} - \frac{r-\rho}{\theta}$ .

## Détermination de $N_t$ et $c_t$ III

- La condition  $\rho > \frac{1-\theta}{\theta}(r - \rho)$  implique  $r > \frac{r-\rho}{\theta}$  et donc

$$\varphi > \frac{r}{\alpha} > 0.$$

- On peut donc intégrer l'égalité précédente pour obtenir

$$N_t e^{-\frac{(1+\alpha)r}{\alpha}t} - N_0 = \frac{Lc_0}{\eta\varphi} e^{-\varphi t} - \frac{Lc_0}{\eta\varphi}$$

puis

$$N_t = \left( N_0 - \frac{Lc_0}{\eta\varphi} \right) e^{\frac{(1+\alpha)r}{\alpha}t} + \frac{Lc_0}{\eta\varphi} e^{-[\varphi - \frac{(1+\alpha)r}{\alpha}]t}.$$

## Détermination de $N_t$ et $c_t$ IV

- La condition de transversalité se réécrit alors

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left\{ \left( N_0 - \frac{Lc_0}{\eta\varphi} \right) e^{\frac{r}{\alpha}t} + \frac{Lc_0}{\eta\varphi} e^{-\left(\varphi - \frac{r}{\alpha}\right)t} \right\} = 0$$

et implique  $c_0 = \frac{\eta\varphi N_0}{L} > 0$  puisque  $\varphi > \frac{r}{\alpha} > 0$  (comme aux chapitres 2 et 4,  $c_0$  s'ajuste pour satisfaire la condition de transversalité).

- On obtient donc finalement

$$N_t = N_0 e^{\frac{r-\rho}{\theta}t} \text{ et } c_t = \frac{\eta\varphi N_0}{L} e^{\frac{r-\rho}{\theta}t}.$$

# Taux de croissance I

- Croissent donc au même taux constant

- la variété des biens  $N_t$ ,
- la consommation par tête  $c_t$ ,
- la production de biens finaux par tête  $y_t = \frac{\eta r N_t}{\alpha(1-\alpha)L}$ .

- En définissant le PIB comme la quantité de biens finaux produite moins la quantité de biens finaux utilisée pour produire des biens intermédiaires :

$$PIB_t \equiv Y_t - \int_0^{N_t} Y_{j,t} dj = Y_t - N_t X_{j,t} = \frac{(1+\alpha)\eta r}{\alpha} N_t,$$

on obtient que le **PIB et le PIB par tête**  $pib_t \equiv \frac{PIB_t}{L}$  **croissent aussi à ce taux constant.**

## Taux de croissance II

- **Du fait de la constance des rendements de  $N_t$ ,**
  - **le taux de croissance n'est pas nul à long terme,**
  - **la convergence vers l'état régulier est instantanée,**
- comme dans le modèle de Romer (1986), dans lequel les rendements sociaux du capital sont constants.
- Ce taux de croissance, égal à  $\frac{r-\rho}{\theta}$  où  $r \equiv A^{\frac{1}{1-\alpha}}(1-\alpha)\alpha^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}}\frac{L}{\eta}$ , dépend
  - positivement de  $A$ ,  $L$  et  $\frac{1}{\theta}$ ,
  - négativement de  $\eta$  et  $\rho$ ,
  - positivement ou négativement de  $\alpha$ .

## Taux de croissance III

- L'interprétation de ces sens de variation peut se faire en deux étapes :

- ➊  $\frac{1}{\theta} \uparrow$  ou  $\rho \downarrow$  ou  $A \uparrow$  ou  $L \uparrow$  ou  $\eta \downarrow \Rightarrow$  offre de prêts  $\uparrow$  à  $N_t$  donné :
  - $\frac{1}{\theta} \uparrow$  ou  $\rho \downarrow \Rightarrow$  offre de prêts  $\uparrow$  à  $N_t$  et  $r_t$  donnés  $\Rightarrow$  offre de prêts  $\uparrow$  à  $N_t$  donné car  $r_t$  reste tel que bénéfice actualisé = coût ( $r_t = r$  est indépendant de  $\frac{1}{\theta}$  et  $\rho$ );
  - $A \uparrow$  ou  $L \uparrow \Rightarrow$  productivité marginale  $\uparrow \Rightarrow$  demande de biens intermédiaires de type  $j \uparrow$  à  $P_{j,t}$  donné  $\Rightarrow$  bénéfice actualisé  $\uparrow$  à  $r_t$  donné  $\Rightarrow$  demande de prêts  $\uparrow$  à  $N_t$  et  $r_t$  donnés  $\Rightarrow r_t \uparrow$  à  $N_t$  donné jusqu'à ce que bénéfice actualisé = coût  $\Rightarrow$  offre de prêts  $\uparrow$  à  $N_t$  donné ;
  - $\eta \downarrow \Rightarrow$  coût  $\downarrow \Rightarrow$  demande de prêts  $\uparrow$  à  $N_t$  et  $r_t$  donnés  $\Rightarrow r_t \uparrow$  à  $N_t$  donné jusqu'à ce que bénéfice actualisé = coût  $\Rightarrow$  offre de prêts  $\uparrow$  à  $N_t$  donné ;
- ➋ offre de prêts  $\uparrow$  à  $N_t$  donné  $\Rightarrow$  prêts  $\uparrow$  à  $N_t$  donné  $\Rightarrow \eta N_t \uparrow$  à  $N_t$  donné  $\Rightarrow N_t \uparrow$  à  $N_t$  donné (car  $\eta \rightarrow$  ou  $\downarrow$ )  $\Rightarrow$  taux de croissance  $\frac{N_t}{N_t} \uparrow$ .

## Faits stylisés de Kaldor (1961)

- Contrairement au modèle de Romer (1986), le modèle de Romer (1990) ne rend donc compte que des 1<sup>er</sup> et 6<sup>ème</sup> **faits stylisés de Kaldor (1961)**, du fait que le capital en est absent :

- ① la production par tête croît :  $\frac{\dot{y}_t}{y_t} = \frac{r-\rho}{\theta} \geq 0$ ,
- ② le stock de capital par tête croît,
- ③ le taux de rendement du capital est constant,
- ④ le ratio capital / production est constant,
- ⑤ les parts de rémunération du travail et du capital dans la production sont constantes,
- ⑥ le taux de croissance de la production par tête varie entre les pays :  
 $\frac{\dot{y}_t}{y_t} = \frac{r-\rho}{\theta}$  varie entre les pays lorsque les paramètres de préférence ( $\rho$ ,  $\theta$ ) ou d'échelle ( $L$ ) varient entre les pays.

## Effet d'échelle

- Le modèle prédit l'existence d'un **effet d'échelle** : plus la taille de la population est grande, plus le taux de croissance est élevé.
- Cet effet d'échelle semble ne pas être vérifié empiriquement au niveau des pays. Cependant, la population du modèle pourrait davantage correspondre à la population mondiale qu'à celle d'un pays dans la mesure où
  - les biens peuvent circuler entre les pays,
  - un brevet peut être déposé ou un secret gardé dans plusieurs pays.
- Kremer (1993) met empiriquement en évidence un effet d'échelle sur longue période **au niveau mondial**.
- **Michael Kremer**: économiste américain, né en 1964, professeur à l'Université de Harvard à partir de 1999, co-lauréat (avec Abhijit Banerjee et Esther Duflo) du prix de la Banque de Suède en sciences économiques en mémoire d'Alfred Nobel en 2019 "*for their experimental approach to alleviating global poverty*".

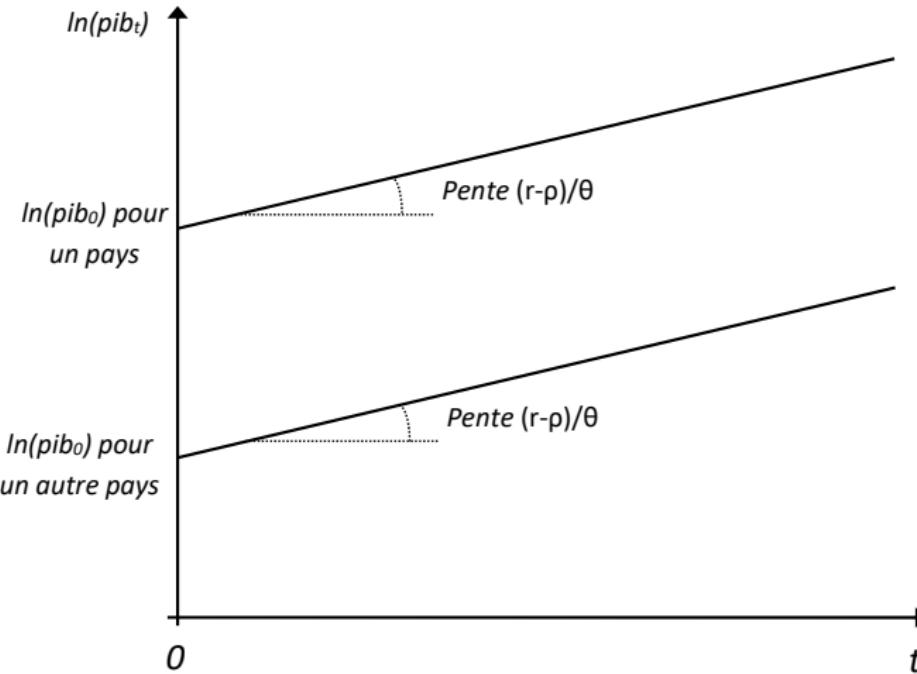
## Niveau initial et taux de croissance de $c_t$

- Le niveau initial de la consommation par tête  $c_0 = \frac{\eta\varphi N_0}{L}$  dépend
  - positivement de  $N_0$ ,  $\eta$  et  $\rho$ ,
  - négativement de  $L$  et  $\frac{1}{\theta}$ ,
  - positivement ou négativement de  $A$  et  $\alpha$ .
- $c_0$  et  $\frac{c_t}{c_{t-1}}$  réagissent en sens opposés à une variation de  $L$ ,  $\eta$ ,  $\rho$  ou  $\frac{1}{\theta}$  pour satisfaire la contrainte budgétaire intertemporelle.

## Ni convergence absolue, ni convergence conditionnelle

- On a  $\ln(pib_t) = \ln(pib_0) + \frac{r-\rho}{\theta}t$ , où  $pib_0 = \frac{(1+\alpha)\eta r}{\alpha L} N_0$ .
- Il n'y a donc pas de convergence à long terme des  $\ln(pib_t)$  entre les pays ayant des  $pib_0$  différents, même s'ils ont les mêmes paramètres
  - technologiques  $A$ ,  $\alpha$ ,  $\eta$ ,
  - démographique  $L$ ,
  - de préférence  $\rho$ ,  $\theta$ .
- Le modèle ne prédit donc **ni convergence absolue, ni convergence conditionnelle** des  $\ln(pib_t)$  entre les pays, comme le modèle de Romer (1986) et contrairement aux modèles de Solow-Swan et Cass-Koop.-Ramsey.
- Le fait que la prédiction d'absence de convergence conditionnelle soit en désaccord avec les données empiriques (comme on l'a vu au chapitre 1) est une raison supplémentaire de considérer ce modèle comme un modèle de l'économie mondiale.

# Absence de convergence conditionnelle



# Sous-optimalité de l'équilibre

- ① Introduction
- ② Conditions d'équilibre
- ③ Détermination de l'équilibre
- ④ Sous-optimalité de l'équilibre
- ⑤ Mise en œuvre de l'équilibre optimal
- ⑥ Conclusion
- ⑦ Annexe

## Sous-optimalité sociale de l'équilibre de marché I

- L'équilibre de marché est socialement optimal si et seulement s'il coïncide avec l'allocation du **planificateur omniscient, omnipotent et bienveillant POOB**.
- Du fait des rendements strictement décroissants de chaque type de bien intermédiaire, le **POOB** commande la même quantité, notée  $X_t$ , pour tous les types de bien intermédiaire.
- La condition d'équilibre sur le marché des biens finaux, qui correspond à la contrainte de ressources du **POOB**, s'écrit donc

$$AL^{1-\alpha} X_t^\alpha N_t = Lc_t + X_t N_t + \eta \dot{N}_t.$$

## Sous-optimalité sociale de l'équilibre de marché II

- Le problème d'optimisation du POOB est donc le suivant : pour  $N_0 > 0$  donné,

$$\max_{(c_t)_{t \geq 0}, (X_t)_{t \geq 0}, (N_t)_{t > 0}} \int_0^{+\infty} e^{-\rho t} \left( \frac{c_t^{1-\theta} - 1}{1-\theta} \right) dt$$

sous les contraintes

- ①  $\forall t \geq 0, c_t \geq 0$  et  $X_t \geq 0$  (contrainte de positivité des consommations),
- ②  $\forall t > 0, N_t \geq 0$  (cont. de positivité de la taille du continuum de types),
- ③  $\forall t \geq 0, \dot{N}_t \geq 0$  (contrainte de croissance ou constance de cette taille)
- ④  $\forall t \geq 0, \dot{N}_t = \frac{(AL^{1-\alpha}X_t^\alpha - X_t)N_t - Lc_t}{\eta}$  (contrainte de technologie et de ressources).

## Sous-optimalité sociale de l'équilibre de marché III

- On résoud ce problème de la façon suivante :
  - ① on considère le problème obtenu en ignorant la troisième contrainte,
  - ② on résoud ce problème auxiliaire en appliquant la théorie du contrôle optimal, comme dans le chapitre 2,
  - ③ on vérifie que la solution de ce problème auxiliaire satisfait la troisième contrainte du problème initial.
- **Hamiltonien** associé au problème auxiliaire :

$$H^P(c_t, X_t, N_t, \lambda_t^P, t) \equiv e^{-\rho t} \left( \frac{c_t^{1-\theta} - 1}{1-\theta} \right) + \lambda_t^P \left[ \frac{(AL^{1-\alpha}X_t^\alpha - X_t)N_t - Lc_t}{\eta} \right]$$

où  $\lambda_t^P$  représente la valeur, mesurée en unités d'utilité à la date 0, d'une augmentation des ressources à la date  $t$  de  $\eta$  unités de bien.

## Sous-optimalité sociale de l'équilibre de marché IV

- $H^P$  est une fonction de
  - deux variables de contrôle :  $c_t$  et  $X_t$ ,
  - une variable d'état :  $N_t$ ,
  - une co-variable d'état :  $\lambda_t^P$ .
- On obtient alors les conditions d'optimalité suivantes :
  - $\lambda_t^P = \frac{\eta}{L} e^{-\rho t} c_t^{-\theta}$  (condition du premier ordre sur  $c_t$ ),
  - $X_t = \alpha^{\frac{1}{1-\alpha}} A^{\frac{1}{1-\alpha}} L$  (condition du premier ordre sur  $X_t$ ),
  - $\dot{\lambda}_t^P = \frac{-(AL^{1-\alpha}X_t^\alpha - X_t)}{\eta} \lambda_t^P$  (condition d'évolution de la co-variable d'état),
  - $\dot{N}_t = \frac{(AL^{1-\alpha}X_t^\alpha - X_t)N_t - Lc_t}{\eta}$  (contrainte de ressources),
  - $\lim_{t \rightarrow +\infty} N_t \lambda_t^P = 0$  (condition de transversalité).

## Sous-optimalité sociale de l'équilibre de marché V

- On en déduit, par des calculs similaires à ceux des chapitres 2 et 4,

- $\dot{N}_t = r^P N_t - \frac{L}{\eta} c_t$  (équation différentielle en  $\dot{N}_t$ ),
- $\dot{\frac{c_t}{r^P}} = \frac{r^P - \rho}{\theta}$  (équation différentielle en  $\dot{\frac{c_t}{r^P}}$ ),
- $\lim_{t \rightarrow +\infty} (N_t e^{-r^P t}) = 0$  (condition de transversalité),

où  $r^P \equiv (1 - \alpha) \alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} A^{\frac{1}{1-\alpha}} \frac{L}{\eta} = \alpha^{\frac{-1}{1-\alpha}} r > r$ .

- Ces trois conditions et  $N_0$  déterminent  $(N_t)_{t \geq 0}$  et  $(c_t)_{t \geq 0}$ .

(En rouge sur cette page : changements par rapport à la page 36.)

## Sous-optimalité sociale de l'équilibre de marché VI

- L'équation différentielle en  $\dot{c}_t$  s'intègre pour donner

$$c_t = c_0 e^{\frac{r^P - \rho}{\theta} t}.$$

- Le résultat  $r^P > r$  et la condition  $r \geq \rho$  impliquent que le taux de croissance de la consommation par tête est positif ou nul.
- On se restreint aux valeurs des paramètres telles que  $\rho > \frac{1-\theta}{\theta}(r^P - \rho)$ , de façon à ce que l'utilité intertemporelle prenne une valeur finie.

## Sous-optimalité sociale de l'équilibre de marché VII

- On peut alors réécrire l'équation différentielle en  $\dot{N}_t$  comme

$$\dot{N}_t = r^p N_t - \frac{Lc_0}{\eta} e^{\frac{r^p - \rho}{\theta} t}.$$

- Puis, en réarrangeant les termes et en multipliant par  $e^{-r^p t}$ ,

$$\left( \dot{N}_t - r^p N_t \right) e^{-r^p t} = - \frac{Lc_0}{\eta} e^{-\varphi^p t},$$

où  $\varphi^p \equiv r^p - \frac{r^p - \rho}{\theta}$ .

## Sous-optimalité sociale de l'équilibre de marché VIII

- La condition  $\rho > \frac{1-\theta}{\theta} (r^P - \rho)$  implique  $r^P > \frac{r^P - \rho}{\theta}$  et donc

$$\varphi^P > 0.$$

- On peut donc intégrer l'égalité précédente pour obtenir

$$N_t e^{-r^P t} - N_0 = \frac{Lc_0}{\eta \varphi^P} e^{-\varphi^P t} - \frac{Lc_0}{\eta \varphi^P}$$

puis

$$N_t = \left( N_0 - \frac{Lc_0}{\eta \varphi^P} \right) e^{r^P t} + \frac{Lc_0}{\eta \varphi^P} e^{-(\varphi^P - r^P)t}.$$

## Sous-optimalité sociale de l'équilibre de marché IX

- La condition de transversalité se réécrit alors

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left[ \left( N_0 - \frac{Lc_0}{\eta \varphi^P} \right) + \frac{Lc_0}{\eta \varphi} e^{-\varphi^P t} \right] = 0$$

et implique  $c_0 = \frac{\eta \varphi^P N_0}{L} > 0$  puisque  $\varphi^P > 0$  (comme aux chap. 2 et 4,  $c_0$  est choisi de façon à satisfaire la condition de transversalité).

- On obtient donc finalement

$$N_t = N_0 e^{\frac{r^P - \rho}{\theta} t} \quad \text{et} \quad c_t = \frac{\eta \varphi^P N_0}{L} e^{\frac{r^P - \rho}{\theta} t},$$

$$\text{puis } y_t = \frac{\eta r^P N_0}{(1-\alpha)L} e^{\frac{r^P - \rho}{\theta} t} \quad \text{et} \quad pib_t = \frac{\eta r^P N_0}{L} e^{\frac{r^P - \rho}{\theta} t}.$$

- On vérifie alors que  $\forall t \geq 0$ ,  $N_t \geq 0$  (du fait que  $r^P > r \geq \rho$ ).

## Sous-optimalité sociale de l'équilibre de marché X

- Ces résultats diffèrent de ceux obtenus précédemment, donc **l'équilibre de marché n'est pas socialement optimal.**
- Plus précisément, **l'équilibre de marché est socialement sous-optimal** :  $U_0$  prend une valeur strictement plus faible à l'équilibre de marché qu'avec le  $\mathcal{POOB}$ .
- Ce dernier point, qui se vérifie aisément par calcul, vient du fait que le  $\mathcal{POOB}$  ne choisit pas l'allocation de l'équilibre de marché alors qu'elle satisfait les contraintes de son problème d'optimisation.
- Comme on va voir, **la sous-optimalité sociale de l'équilibre de marché est due à la présence de concurrence monopolistique** (même si cette dernière est la source de la rémunération du progrès technique).

## Sous-optimalité sociale de l'équilibre de marché XI

- Le taux de croissance de  $N_t$ ,  $c_t$ ,  $y_t$  et  $pib_t$  est égal à  $\frac{r^P - \rho}{\theta}$  avec le  $\mathcal{POOB}$  et à  $\frac{r - \rho}{\theta}$  à l'équilibre de marché.
- Comme  $r^P > r$ , **le taux de croissance est plus élevé avec le  $\mathcal{POOB}$  qu'à l'équilibre de marché.**
- Cette différence de taux de croissance est due à la présence de concurrence monopolistique dans le cadre décentralisé.
- En effet, cette dernière implique que le produit marginal de  $X_t$  est supérieur à son coût de production à l'équilibre de marché ( $\frac{\partial PIB_t}{\partial X_t} = \frac{1-\alpha}{\alpha} N_t > 0$ ), alors qu'il lui est égal avec le  $\mathcal{POOB}$  ( $\frac{\partial PIB_t}{\partial X_t} = 0$ ).

## Sous-optimalité sociale de l'équilibre de marché XII

- Donc les rendements sociaux  $\frac{\partial PIB_t}{\partial N_t}$  de la variété des biens sont plus élevés avec le  $\mathcal{POOB}$  qu'à l'équilibre de marché :  $\eta r^P > \frac{(1+\alpha)\eta r}{\alpha}$ .
- Donc les rendements sociaux  $\frac{1}{\eta} \frac{\partial PIB_t}{\partial N_t}$  de la R&D sont plus élevés avec le  $\mathcal{POOB}$  qu'à l'équilibre de marché :  $r^P > \frac{(1+\alpha)r}{\alpha}$ .
- Donc les rendements sociaux de la R&D avec le  $\mathcal{POOB}$  sont plus élevés que ses rendements privés à l'équilibre de marché :  $r^P > r$ .
- Donc l'investissement  $\eta N_t$  en R&D, à  $N_t$  donné, est plus élevé avec le  $\mathcal{POOB}$  qu'à l'équilibre de marché :  $\frac{\eta(r^P-\rho)}{\theta} N_t > \frac{\eta(r-\rho)}{\theta} N_t$ .
- Donc le taux de croissance  $\frac{N_t}{N_t}$  est plus élevé avec le  $\mathcal{POOB}$  qu'à l'équilibre de marché :  $\frac{r^P-\rho}{\theta} > \frac{r-\rho}{\theta}$ .

## Sous-optimalité sociale de l'équilibre de marché XIII

- Avec le  $\mathcal{POOB}$ , par rapport à l'équilibre de marché,
  - la consommation par tête initiale  $c_0$  peut être plus basse ou plus élevée :  $\frac{\eta\varphi^P N_0}{L} \leq \frac{\eta\varphi N_0}{L}$  selon les valeurs de  $\alpha$ ,  $\eta$ ,  $\theta$ ,  $\rho$ ,  $A$  et  $L$ ,
  - elle peut être plus élevée, alors que l'investissement en R&D initial  $\eta N_0$  est aussi plus élevé, car  $PIB_0 = Lc_0 + \eta N_0$  est lui-même plus élevé.
- A titre de comparaison, dans le modèle de Romer (1986), avec le  $\mathcal{POOB}$ , par rapport à l'équilibre de marché,
  - elle est nécessairement plus basse car l'investissement en capital initial  $K_0 + \delta K_0$  est plus élevé alors que  $PIB_0 = Lc_0 + K_0 + \delta K_0$  est le même.

# Mise en œuvre de l'équilibre optimal

- ① Introduction
- ② Conditions d'équilibre
- ③ Détermination de l'équilibre
- ④ Sous-optimalité de l'équilibre
- ⑤ Mise en œuvre de l'équilibre optimal
- ⑥ Conclusion
- ⑦ Annexe

## Mise en œuvre de l'équilibre socialement optimal I

- Le fait que l'équilibre de marché soit socialement sous-optimal donne un rôle à la politique économique.
- En particulier, une autorité fiscale peut mettre en œuvre l'allocation du  $\mathcal{POOB}$  dans un cadre décentralisé en
  - subventionnant l'achat de biens intermédiaires** à un taux tel que leur prix effectif soit égal à leur coût de production,
  - finançant cette subvention par un impôt forfaitaire** sur les ménages, qui ne “distord” pas leurs choix.
- En effet, soit  $\tau$  le taux de subvention : pour chaque quantité  $1 - \tau$  de biens intermédiaires achetée, une quantité  $\tau$  est offerte par l'autorité fiscale.
- Le prix effectif d'une unité de bien intermédiaire de type  $j$ , pour les producteurs de bien final, est donc  $(1 - \tau)P_{j,t}$ .

## Mise en œuvre de l'équilibre socialement optimal II

- Le profit instantané du producteur  $i$  de bien final devient

$$AL_{i,t}^{1-\alpha} \int_0^{N_t} X_{i,j,t}^\alpha dj - w_t L_{i,t} - \int_0^{N_t} (1-\tau) P_{j,t} X_{i,j,t} dj$$

et la seconde condition du premier ordre de sa maximisation devient

$$X_{i,j,t} = \left[ \frac{\alpha A}{(1-\tau) P_{j,t}} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} L_{i,t}.$$

- Le profit instantané de l'inv.-prod. de bien intermédiaire de type  $j$  devient

$$(P_{j,v} - 1) X_{j,v} = (P_{j,v} - 1) \left[ \frac{\alpha A}{(1-\tau) P_{j,v}} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} L$$

et la condition du premier ordre de sa maximisation reste  $P_{j,v} = \frac{1}{\alpha}$ .

## Mise en œuvre de l'équilibre socialement optimal III

- Par des calculs et raisonnements similaires aux précédents, on obtient alors tour à tour

$$(a) \quad X_{j,t} = (1 - \tau)^{\frac{-1}{1-\alpha}} \frac{\alpha \eta r}{1-\alpha},$$

$$(b) \quad V_{j,t} = (1 - \tau)^{\frac{-1}{1-\alpha}} \dots \\ \dots \eta r \int_t^{+\infty} e^{-\int_t^\nu r_\tau d\tau} d\nu,$$

$$(c) \quad Y_t = (1 - \tau)^{\frac{-\alpha}{1-\alpha}} \frac{\eta r}{\alpha(1-\alpha)} N_t,$$

$$(d) \quad V_{j,t} = \eta,$$

$$(e) \quad r_t = (1 - \tau)^{\frac{-1}{1-\alpha}} r,$$

$$(f) \quad B_t = \eta N_t,$$

$$(g) \quad w_t = (1 - \tau)^{\frac{-\alpha}{1-\alpha}} \frac{\eta r}{\alpha L} N_t.$$

- La contrainte budgétaire instantanée des ménages s'écrit

$$\dot{b}_t = w_t + r_t b_t - c_t - t_t$$

où  $t_t$  est l'impôt forfaitaire par tête.

## Mise en œuvre de l'équilibre socialement optimal IV

- En utilisant la contrainte budgétaire de l'autorité fiscale

$$Lt_t = \tau P_{j,t} X_{j,t} N_t = \tau (1 - \tau)^{\frac{-1}{1-\alpha}} \frac{\eta r}{1 - \alpha} N_t$$

et les résultats (e), (f), (g), on peut réécrire la contrainte budgétaire instantanée des ménages comme

$$\dot{N}_t = \frac{(1 - \tau)^{\frac{-1}{1-\alpha}} (1 - \tau - \alpha^2) r}{\alpha(1 - \alpha)} N_t - \frac{L}{\eta} c_t.$$

- Cette équation différentielle peut aussi être obtenue en utilisant les résultats (a) et (c) pour remplacer  $X_{j,t}$  et  $Y_t$  dans la condition d'équilibre du marché des biens finaux (conséquence de la loi de Walras).

## Mise en œuvre de l'équilibre socialement optimal V

- L'équation d'Euler et la condition de transversalité s'écrivent toujours
 
$$\frac{\dot{c}_t}{c_t} = \frac{r_t - \rho}{\theta}$$
 et  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \left( b_t e^{-\int_0^t r_\tau d\tau} \right) = 0.$
- En utilisant (e) et (f), on peut les réécrire comme
 
$$\frac{\dot{c}_t}{c_t} = \frac{(1-\tau)^{\frac{-1}{1-\alpha}} r - \rho}{\theta}$$
 et
 
$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left[ N_t e^{-(1-\tau)^{\frac{-1}{1-\alpha}} rt} \right] = 0.$$
- $(N_t)_{t \geq 0}$  et  $(c_t)_{t \geq 0}$  sont donc déterminés par les quatre conditions

$$\dot{N}_t = \frac{(1-\tau)^{\frac{-1}{1-\alpha}} (1-\tau - \alpha^2) r}{\alpha(1-\alpha)} N_t - \frac{L}{\eta} c_t, \quad N_0 \text{ donné},$$

$$\frac{\dot{c}_t}{c_t} = \frac{(1-\tau)^{\frac{-1}{1-\alpha}} r - \rho}{\theta} \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[ N_t e^{-(1-\tau)^{\frac{-1}{1-\alpha}} rt} \right] = 0.$$

## Mise en œuvre de l'équilibre socialement optimal VI

- Ces conditions sont identiques à celles déterminant les  $(N_t)_{t \geq 0}$  et  $(c_t)_{t \geq 0}$  commandés par le  $\mathcal{POOB}$  si et seulement si  $\tau = 1 - \alpha$ .
- On vérifie aisément que, lorsque  $\tau = 1 - \alpha$ , les autres quantités  $(X_t, Y_t, y_t, PIB_t, pib_t)$  prennent les mêmes valeurs qu'avec le  $\mathcal{POOB}$ .
- Cette subvention au taux  $1 - \alpha$ , financée par impôt forfaitaire, met donc en œuvre l'équilibre socialement optimal, et ce par deux effets simultanés :
  - elle **corrige l'inefficacité due à la concurrence monopolistique** en égalisant le prix effectif des biens intermédiaires à leur coût de production :  $(1 - \tau)P_{j,t} = 1$ ,
  - elle **augmente la rémunération du progrès technique**, et donc l'incitation à faire de la R&D, en augmentant le profit instantané (avant remboursement de dette) des inventeurs-producteurs.

## Mise en œuvre de l'équilibre socialement optimal VII

- Une autorité fiscale *peut aussi* mettre en œuvre l'allocation du  $\mathcal{POOB}$  dans un cadre décentralisé en
  - **subventionnant la production de biens finaux** à un taux tel que la demande de biens intermédiaires soit égale à celle qui prévaudrait si le prix des biens intermédiaires était égal à leur coût de production,
  - **finançant cette subvention par un impôt forfaitaire** sur les ménages, qui ne “distord” pas leurs choix.
- Une autorité fiscale *ne peut pas* mettre en œuvre l'allocation du  $\mathcal{POOB}$  dans un cadre décentralisé en
  - **subventionnant la R&D,**
  - **finançant cette subvention par un impôt forfaitaire,**car une telle politique économique n'a aucun effet sur  $X_t$  : elle s'attaque à un *symptôme* (le trop faible niveau de R&D) mais pas à la *cause* (la présence de concurrence monopolistique) de la sous-optimalité sociale de l'équilibre de marché.

# Conclusion

- ① Introduction
- ② Conditions d'équilibre
- ③ Détermination de l'équilibre
- ④ Sous-optimalité de l'équilibre
- ⑤ Mise en œuvre de l'équilibre optimal
- ⑥ Conclusion
- ⑦ Annexe

## Principales prédictions du modèle

- La croissance est strictement positive à long terme grâce à la constance des rendements de la variété des biens.
- La croissance à long terme dépend des paramètres de technologie et de préférence, ainsi que de la taille de la population.
- Il y a ni convergence absolue ni convergence conditionnelle des niveaux de production par tête (en logarithme) entre les pays.
- L'équilibre de marché est socialement sous-optimal à cause de la présence de concurrence monopolistique.
- Des politiques économiques de subvention, financées par impôt forfaitaire, peuvent mettre en œuvre l'équilibre socialement optimal.

## Une limite du modèle

- Le progrès technique est modélisé comme l'augmentation de la variété des biens, et non comme l'amélioration des biens existants.
  - La théorie schumpétérienne le modélise comme une “destruction créatrice”, i.e. comme l'invention de nouveaux biens qui sont des substituts directs aux biens existants, qu'ils rendent obsolètes.

# Annexe

- ① Introduction
- ② Conditions d'équilibre
- ③ Détermination de l'équilibre
- ④ Sous-optimalité de l'équilibre
- ⑤ Mise en œuvre de l'équilibre optimal
- ⑥ Conclusion
- ⑦ Annexe

## Preuve que $r_t = r(V)$

On montre que  $r_t = r(V)$  en quatre étapes :

- ① On écrit  $V_t = A^{\frac{1}{1-\alpha}}(1-\alpha)\alpha^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} L \mathcal{A}_t$ , où  $\mathcal{A}_t \equiv \int_t^{+\infty} e^{-\int_t^\nu r_\tau d\tau} d\nu$ .
- ② En notant  $\mathcal{A}_t = g(t, t)$  avec  $g(u, v) \equiv \int_u^{+\infty} e^{-\int_v^r r_\tau d\tau} d\nu$ , on obtient  
$$\dot{\mathcal{A}}_t = \frac{\partial g}{\partial u}(t, t) + \frac{\partial g}{\partial v}(t, t) = -e^{-\int_t^t r_\tau d\tau} + r_t \int_t^{+\infty} e^{-\int_t^\nu r_\tau d\tau} d\nu = r_t \mathcal{A}_t - 1.$$
- ③ En utilisant  $V_t = V$  pour  $t \geq 0$ , on déduit de la première étape que  
$$\mathcal{A}_t = \frac{V}{A^{\frac{1}{1-\alpha}}(1-\alpha)\alpha^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} L}$$
 pour  $t \geq 0$ , et donc  $\dot{\mathcal{A}}_t = 0$ .
- ④ On déduit des deuxième et troisième étapes que  $r_t \mathcal{A}_t - 1 = 0$  et donc  
$$r_t = \frac{1}{\mathcal{A}_t} = A^{\frac{1}{1-\alpha}}(1-\alpha)\alpha^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} \frac{L}{V} = r(V)$$
 pour  $t \geq 0$ .