

Rappel TD₆

Marion Brouard, Pauline Leveneuer

November 19, 2025

- **Objectif du rappel:**

1. Comprendre le Model de Neyman-Rubin
2. Connaître les différences entre ATE, ATT, et estimateur OLS.
3. Comprendre les différences entre Randomized study et Observational Study.

1 Introduction au Model de Neyman-Rubin

Le modèle de Neyman-Rubin modélise les effets causaux, c'est à dire l'effet d'une variable binaire sur un outcome considéré. Cette variable binaire est souvent appelée traitement ($D \in \{0, 1\}$). On est donc intéressé par l'impact d'un traitement (D) sur un outcome (Y). Lorsqu'un individu est traité $D=1$; lorsqu'il n'a pas reçu de traitement $D=0$. **L'effet causal de traitement** pour un individu s'obtient par la différence entre l'outcome dans la situation où l'individu est traité et l'outcome dans la situation où il n'est pas traité:

$$\Delta = Y(1) - Y(0)$$

Où $Y(0)$ et $Y(1)$ sont les **potential outcomes** :

- **$Y(0)$:** L'outcome si l'individu n'avait pas été traité
- **$Y(1)$:** L'outcome si l'individu avait été traité.

A noter que l'outcome observé Y peut être écrit comme fonction des outcome potentiels :

$$Y = Y(D) = DY(1) + (1 - D)Y(0)$$

Cependant, on n'observe jamais à la fois la situation où l'individu est traité, et la situation où ce même individu ne l'est pas (**ie, on n'observe jamais les deux potential outcomes $Y(1)$ et $Y(0)$ pour un même individu**). Ainsi, pour obtenir une idée de l'effet de traitement, il s'agit de comparer plusieurs individus : un groupe d'individus ayant reçu le traitement (treatment group) et un groupe d'individus ne l'ayant pas reçu (control group). En comparant ces deux populations, il est possible d'estimer deux principales grandeurs :

- **Average treatment effect (ATE) :**

Il s'agit de l'effet de traitement de la population entière. Si on intervertit le groupe de contrôle et le groupe de traitement, l'effet δ est le même. Il s'agit de l'effet de traitement de la population dans son ensemble, quels que soient les individus traités et non traités, i.e. ne dépend pas de D .

$$\delta = E(Y(1) - Y(0))$$

- **Average treatment effect on the treated (ATT) :**

Il s'agit de l'effet de traitement de la population des traités. Si on intervertit le groupe de contrôle et le groupe

de traitement, il n'est pas sûr que nous obtenions le même δ^T (cf section 3). δ^T dépend de D : il s'agit de l'effet de traitement moyen pour les individus traités (i.e. lorsque D=1).

$$\delta^T = E(Y(1) - Y(0)|D = 1)$$

Exemple : Effet de la prise d'un doliprane sur la température.

On est intéressé par l'effet de la prise d'un doliprane sur la température (Y = Température, $D=1$ si l'individu a pris un doliprane, $D=0$ sinon).

Ainsi pour connaître l'effet de la prise de doliprane sur la température, on se demande, quelle est la différence de températures pour un individu, dans la situation où il a pris un doliprane vs la situation où il n'a pas pris de doliprane. Les deux niveaux de température dans ces situations correspondent aux "potential outcomes" suivants :

- **Y(0)** : La température si l'individu n'avait pas pris de doliprane.
- **Y(1)** : La température si l'individu avait pris de doliprane.

On peut donc formaliser l'effet de la prise de doliprane sur la température pour un individu i comme étant la différence entre les deux outcomes potentiels - **Treatment effect** :

$$\Delta = \underbrace{Y(1)}_{\substack{\text{la température de } i \\ \text{s'il avait pris un doliprane}}} - \underbrace{Y(0)}_{\substack{\text{la température de } i \\ \text{s'il n'avait pas pris un doliprane}}}$$

Attention: L'effet du traitement Δ est individuel, et donc random (on parle d'hétérogénéité des effets de traitement: l'effet du doliprane sur ma température n'est pas forcément le même que pour mon voisin !)

On comprend ici facilement pourquoi il ne nous est pas possible d'estimer Δ pour un individu i . On observe jamais simultanément la situation où il a pris un doliprane et celle où il n'en a pas pris, i.e. on observe qu'un seul des deux potential outcomes. Soit il a pris un doliprane, et on observe $Y(1)$ mais pas $Y(0)$, soit il n'en a pas pris, et dans ce cas on observe $Y(0)$, mais pas $Y(1)$.

2 Lien MCO et ATE

Nous voulons estimer les effets de traitement ATE (δ) et ATT (δ^T) mais nous observons seulement D et Y (et non $Y(0)$, $Y(1)$). Nous souhaitons comprendre dans quels cas nous pouvons utiliser une régression linéaire simple (de Y sur D) pour estimer des effets de traitement.

Nous prenons le modèle théorique suivant :

$$Y = \alpha + \beta_D D + \epsilon$$

La valeur théorique du coefficient associé au traitement D est $\beta_D = E(Y|D = 1) - E(Y|D = 0)$. (Ou, par les MCO, $\beta_D = \frac{Cov(Y,D)}{V(D)}$)

On peut décomposer l'ATT en deux parties : le coefficient associé au traitement dans la régression linéaire et un biais de sélection (cf propriété 1 chap 4)

$$\delta^T = E(Y(1) - Y(0)|D = 1) = \underbrace{(E(Y(1)|D = 1) - E(Y(0)|D = 0))}_{\beta_D} - \underbrace{(E(Y(0)|D = 1) - E(Y(0)|D = 0))}_{\text{Biais de sélection (B)}}$$

Il y a un **biais de sélection** si $E(Y(0)|D = 1) \neq E(Y(0)|D = 0)$ ou de manière équivalente $Cov(D, Y(0)) \neq 0$. Le

potential outcome sans traitement est différent pour les individus qui reçoivent le traitement et pour les individus qui ne reçoivent pas le traitement. Autrement dit, en l'absence de traitement, les individus traités sont différents (par leurs caractéristiques) des individus non-traités. En pratique, on ne peut pas tester si le biais de sélection est égal à 0 car on n'observe pas $Y(0)$ quand $D = 1$, il faut donc pouvoir expliquer les mécanismes économiques qui justifient l'absence de biais de sélection. (Cf TD7)

Ainsi $\delta^T = \beta_D \iff B = 0$. On peut estimer correctement l'ATT (δ_T) avec une régression linéaire de Y sur D seulement s'il n'y a pas de biais de sélection.

3 Randomized VS Non-Randomized Trial

Dans la section 1, nous avons vu qu'il n'est pas possible d'estimer Δ et qu'il s'agit donc de comparer deux populations pour estimer ATE et ATT : une population d'individus traités (treated group), et une population d'individus non traités (control group). On distingue deux situations :

1. **Randomized Trial:** Le traitement a été assigné aléatoirement: $Y(0), Y(1) \perp\!\!\!\perp D$. Le groupe de traitement et le groupe de contrôle sont identiques (il n'y a pas de biais de sélection).

Par exemple, le modèle 1 dans le TD est un randomized trial: $D|Y(0), Y(1) \sim B(0.5)$. Chaque individu a une probabilité 0.5 d'être traité.

- Lorsque $Y(0), Y(1) \perp\!\!\!\perp D$, $\delta = \delta^T$ puisque les populations traitée et non traitée sont identiques. (cf question 1 et 2)
- Lorsque $Y(0), Y(1) \perp\!\!\!\perp D$, il n'y a pas de biais de selection: $B=0$, et donc, $\delta^T = \beta_0$. (cf question 2)

2. **Non-Randomized Trial (Observational Studies):** Le traitement n'est pas assigné de manière aléatoire. Le groupe de contrôle et le groupe de traitement sont différents.

Par exemple, le modèle 2 dans le TD est une observational study : $D := \mathbb{1}\{Y(1) - Y(0) > c\} \stackrel{\text{def.}}{=} \Delta \mathbb{1}\{\Delta > c\}$. Ici, on peut imaginer une situation dans laquelle un individu choisit ou non d'être traité en comparant le coût de ce traitement et l'effet de ce traitement. Seuls les individus ayant un effet de traitement élevé choisissent de suivre le traitement. (Ex: Job training. Un individu choisit de suivre le job training seulement si l'effet du traitement, disons sur sa durée de chômage, est plus important que le coût de suivre le training qui est coûteux en temps.)

- $\delta \neq \delta^T$ puisque les individus du groupe de traitement sont différents du groupe de contrôle (cf question 1), sauf rares cas très particuliers (cf question 5).
- Il y a un de biais de sélection: $B \neq 0$, et donc, $\delta^T \neq \beta_0$. (cf question 2)

\Rightarrow Le TD7 permettra de tester si nous nous trouvons dans cadre randomized ou non randomized.