Macroéconomie 1 (1/7)

Le modèle de croissance à taux d'épargne exogène (Solow-Swan)

Olivier Loisel

ENSAE

Septembre – Décembre 2025

La croissance à long terme

- "**Croissance**" : croissance du Produit Intérieur Brut (PIB) par tête.

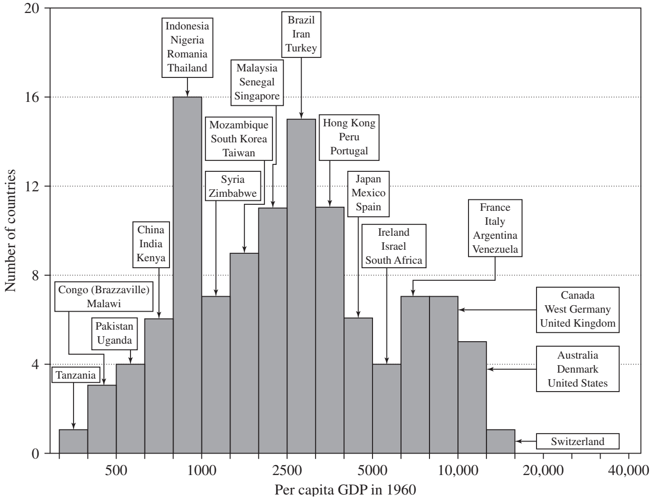
- La croissance est un phénomène relativement récent :

Année	1500	1820	1992
Population mondiale (millions)	425	1068	5441
PIB mondial par tête ($ de 1990)	565	651	5145

Source : Maddison (1995).

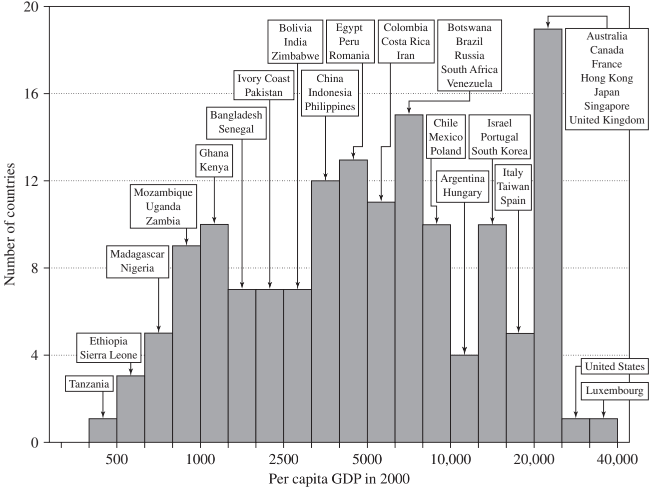
- Le taux de croissance annuel moyen à l'échelle mondiale est de
    - 0,04% entre 1500 et 1820,
    - 1,21% entre 1820 et 1992.

Dispersion des PIBs par tête entre pays en 1960



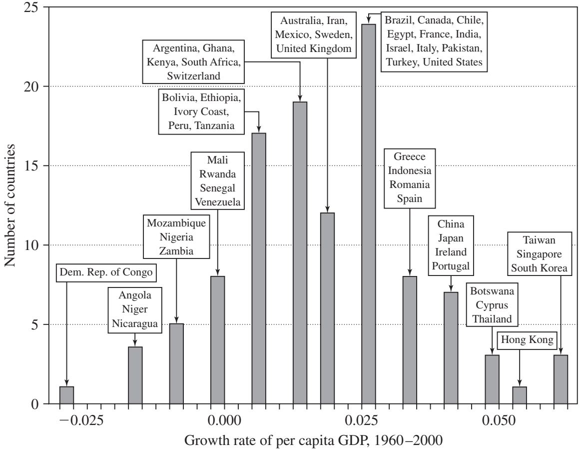
Source : Barro et Sala-i-Martin (2004). "Number of countries" : nombre de pays.
"Per capita GDP in 1960" : PIB par tête en 1960 ($ de 1996). Noms de pays en anglais.

Dispersion des PIBs par tête entre pays en 2000



Source : Barro et Sala-i-Martin (2004). "Number of countries" : nombre de pays.
"Per capita GDP in 2000" : PIB par tête en 2000 ($ de 1996). Noms de pays en anglais.

Dispersion des taux de croissance entre pays, 1960-2000



Source : Barro et Sala-i-Martin (2004). “Number of countries” : nombre de pays. “Growth rate of per capita GDP, 1960-2000” : taux de croissance annuel moyen du PIB par tête entre 1960 et 2000 (par ex., 0.02 = 2% par an). Noms de pays en anglais.

Questions

- Principales questions abordées dans les parties 1 et 2 du cours :
  - à quoi est due cette croissance à long terme ?
  - à quoi est due cette dispersion des PIBs par tête et des taux de croissance entre les pays ?
  - quelle politique économique mener pour “optimiser” la croissance de long terme ?

- Questions qui peuvent être jugées plus importantes, pour le bien-être des hommes, que les questions de fluctuations macroéconomiques de court terme (Lucas, 2003).

Les théories de la croissance

- “**Théorie de la croissance exogène (resp. endogène)**” $\equiv$ théorie dans laquelle le taux de croissance à long terme est égal (resp. n’est pas égal) à un taux de progrès technique exogène.

- Théories de la croissance exogène :
  - le modèle à taux d’épargne exogène (étudié au chapitre 1),
  - le modèle à taux d’épargne endogène (étudié au chapitre 2).

- Théories de la croissance endogène :
  - le modèle avec apprentissage par la pratique (étudié au chapitre 4),
  - le modèle avec variété des biens (étudié au chapitre 5),
  - le modèle schumpétérien (pas étudié dans ce cours).

- **Joseph A. Schumpeter** : économiste autrichien, né en 1883 à Triesch, mort en 1950 à Salisbury, professeur à l’Université de Harvard de 1927 à 1950.

Modèle de Solow-Swan

- Le modèle avec taux d'épargne exogène, élaboré indépendamment par Solow (1956) et Swan (1956), est appelé "**modèle de Solow-Swan**".

- **Robert M. Solow** : économiste américain, né en 1924 à New York, professeur au MIT depuis 1950, lauréat du prix de la Banque de Suède en sciences économiques en mémoire d'Alfred Nobel en 1987 "*for his contributions to the theory of economic growth*".

- **Trevor W. Swan** : économiste australien, né en 1918 à Sydney, mort en 1989, professeur à l'Université Nationale d'Australie de 1950 à 1983.

- Ce modèle n'est pas micro-fondé, contrairement aux modèles étudiés dans la suite du cours, mais il fait néanmoins l'objet du chapitre 1 car
  - il demeure une référence très utile pour comprendre la croissance,
  - il permet d'introduire des concepts utilisés dans les autres modèles.

Stocks et flux

- En temps continu,
  - un **stock** est une variable qui n'a de sens qu'à un instant donné,
  - un **flux** est une variable qui n'a de sens que sur un intervalle de temps arbitrairement court donné.

- Par exemple, le capital K_t est un stock, l'investissement I_t un flux :
  - à l'instant t, le capital est K_t,
  - entre les instants t et $t + dt$, où $dt \to 0^+$, l'investissement est $I_t dt$.

- La dérivée d'un stock par rapport au temps est un flux.

- Par exemple, en l'absence de dépréciation du capital,

$$\dot{K}_t \equiv \lim_{dt \to 0^+} \frac{K_{t+dt} - K_t}{dt} = I_t.$$

- Contrairement aux flux, les stocks sont nécessairement des fonctions continues du temps (sauf suite à des chocs particuliers de type "séisme").

Taux de croissance instantané d'un stock ou d'un flux

- Soit X_t un stock ou un flux et soit dt une durée arbitrairement proche de 0.

- Entre les instants t et $t + dt$, le taux de croissance de X_t est

$$\frac{X_{t+dt} - X_t}{X_t}.$$

- Rapporté à la durée dt de cet intervalle de temps, ce taux de croissance s'écrit

$$\frac{X_{t+dt} - X_t}{X_t dt}.$$

- À l'instant t, le **taux de croissance instantané** de X_t est

$$\lim_{dt \to 0^+} \frac{X_{t+dt} - X_t}{X_t dt} = \frac{\dot{X}_t}{X_t}.$$

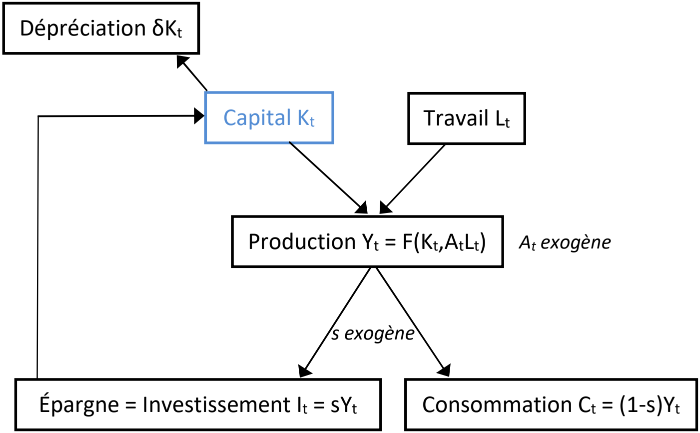
Plan du chapitre

Présentation du modèle

Aperçu général du modèle I

- **Capital** (stock) et **travail** (flux) sont utilisés pour produire des **biens** (flux).
- Les **biens** produits (flux) sont utilisés pour la **consommation** (flux) et l'**investissement** en nouveau capital (flux).
- Le **taux d'épargne** (quantité de biens non consommée, ou épargnée, ou investie / quantité totale de biens produits) est **exogène**.
- Le **capital** (stock) évolue dans le temps en fonction de l'**investissement** (flux) et de la **dépréciation** du capital (flux).

Aperçu général du modèle II



(En bleu : stock ; en noir : flux.)

Variables exogènes

- **Ni flux ni stock** :
  - temps continu, indicé par t,
  - taux d'épargne s, tel que $0 < s < 1$.

- **Flux** :
  - travail $= 1$ par tête.

- **Stocks** :
  - capital initial $K_0 > 0$,
  - population $L_t = L_0 e^{nt}$, où $L_0 > 0$ et $n \geq 0$,
  - paramètre de productivité $A_t = A_0 e^{gt}$, où $A_0 > 0$ et $g \geq 0$.

Variables endogènes

- **Flux** :
    - production Y_t,
    - consommation C_t.
- **Stock** :
    - capital K_t (sauf en $t = 0$).
- Résoudre le modèle $\equiv$ obtenir chaque variable endogène en fonction des seules variables exogènes.

Fonction de production I

- **Fonction de production** F : $Y_t = F(K_t, A_t L_t)$ (progrès technique augmentant l'efficacité du travail ou "neutre au sens de Harrod").

- **Roy F. Harrod** : économiste anglais, né en 1900 à Londres, mort en 1978 à Holt, professeur à l'Université d'Oxford de 1923 à 1967.

- Notant F_j la dérivée première de F et $F_{j,j}$ sa dérivée seconde par rapport à son $j^{\text{ième}}$ argument pour $j \in \{1, 2\}$, on fait les hypothèses suivantes sur F :

1. $F : \mathbb{R}^{+2} \to \mathbb{R}^{+}$, $(x, y) \mapsto F(x, y)$; $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^{+2}$, $F(x, 0) = F(0, y) = 0$.

2. F est **strictement croissante** en chacun de ses arguments : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^{+2}$, $F_1(x, y) > 0$ et $F_2(x, y) > 0$ (les productivités marginales du capital et du travail efficace sont strictement positives).

Fonction de production II

3. F est **strictement concave** en chacun de ses arguments : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^{+2}$, $F_{1,1}(x, y) < 0$ et $F_{2,2}(x, y) < 0$ (les productivités marginales du capital et du travail efficace sont strictement décroissantes).

4. F est **homogène de degré 1** (ou "à rendements d'échelle constants") : $\forall (x, y, \lambda) \in \mathbb{R}^{+3}$, $F(\lambda x, \lambda y) = \lambda F(x, y)$.

5. F satisfait les **conditions d'Inada** (1963) :

$$\begin{aligned} \forall y &\in \mathbb{R}^+, \lim_{x \to 0^+} F_1(x, y) = +\infty \text{ et } \lim_{x \to +\infty} F_1(x, y) = 0, \\ \forall x &\in \mathbb{R}^+, \lim_{y \to 0^+} F_2(x, y) = +\infty \text{ et } \lim_{y \to +\infty} F_2(x, y) = 0. \end{aligned}$$

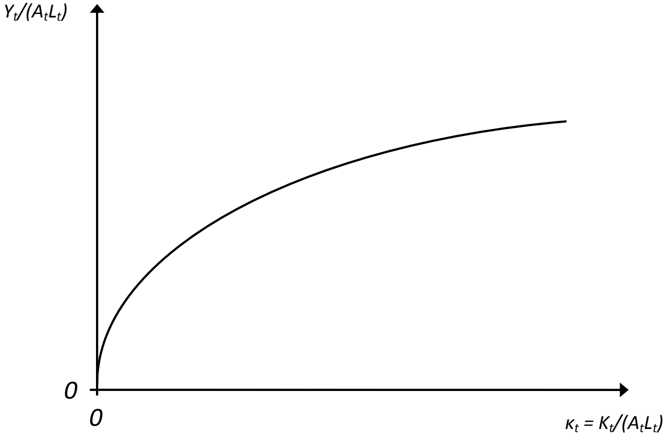
- **Exemple** de fonction satisfaisant ces hypothèses : fonction de Cobb-Douglas $F(x, y) = x^\alpha y^{1-\alpha}$ avec $0 < \alpha < 1$.

Réécriture de la fonction de production

- En notant $\kappa_t \equiv \frac{K_t}{A_t L_t}$ le stock de capital par unité de travail efficace, on obtient
$$\frac{Y_t}{A_t L_t} = \frac{1}{A_t L_t} F(K_t, A_t L_t) = F(\kappa_t, 1) \equiv f(\kappa_t)$$
où f a les propriétés suivantes :

1. $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $z \mapsto f(z)$, avec $f(0) = 0$,
2. f est **strictement croissante** : $\forall z \in \mathbb{R}^+$, $f'(z) > 0$,
3. f est **strictement concave** : $\forall z \in \mathbb{R}^+$, $f''(z) < 0$,
4. f satisfait les **conditions d'Inada** (1963) : $\lim\limits_{z \to 0^+} f'(z) = +\infty$ et $\lim\limits_{z \to +\infty} f'(z) = 0$.

Forme de la fonction de production f



Autres fonctions de production

- La partie 1 des TDs considère d'autres fonctions de production, qui ne satisfont pas nécessairement les mêmes conditions :
  - $Y_t = K_t^{\alpha} H_t^{\beta} (A_t L_t)^{1-\alpha-\beta}$, où H_t représente le capital humain,
  - $Y_t = K_t^{\alpha} R^{\beta} (A_t L_t)^{1-\alpha-\beta}$, où R représente un stock de ressources naturelles en quantité fixe (comme la terre),

  avec $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et $\alpha + \beta < 1$.

Hypothèses sur la dynamique du capital

1. Entre t et $t + dt$, une fraction exogène et constante s de la production $Y_t dt$ est épargnée et investie dans du nouveau capital, avec $0 < s < 1$.

2. Entre t et $t + dt$, une fraction exogène et constante δdt du stock de capital K_t disparaît à cause de la dépréciation du capital, avec $\delta > 0$.

$\hookrightarrow$ La dynamique du stock de capital est donc décrite par l'équation

$$\dot{K}_t = \underbrace{sY_t}_{\text{épargne}} - \underbrace{\delta K_t}_{\text{dépréciation}} .$$

Résolution

Equation différentielle

- En divisant $\dot{K}_t = sY_t - \delta K_t$ par $A_t L_t$ et en utilisant $\kappa_t \equiv K_t / (A_t L_t)$ et $Y_t / (A_t L_t) = f(\kappa_t)$, on obtient

$$\frac{\dot{K}_t}{K_t}\kappa_t = sf(\kappa_t) - \delta\kappa_t.$$

- Puis, en utilisant

$$\frac{\dot{K}_t}{K_t} = \dot{\ln K_t} = \dot{\ln \kappa_t} + \dot{\ln A_t} + \dot{\ln L_t} = \frac{\dot{\kappa}_t}{\kappa_t} + \frac{\dot{A}_t}{A_t} + \frac{\dot{L}_t}{L_t} = \frac{\dot{\kappa}_t}{\kappa_t} + g + n,$$

on obtient l'**équation différentielle**

$$\dot{\kappa}_t = \underbrace{sf(\kappa_t)}_{\text{épargne}} - \underbrace{(n + g + \delta)\kappa_t}_{\substack{\text{dilution plus} \\ \text{dépréciation}}}$$

à résoudre pour un κ_0 donné.

Etat régulier I

- **Etat régulier** (ou stationnaire, ou encore de croissance équilibrée) $\equiv$ situation dans laquelle κ_0 est tel que toutes les quantités sont non nulles et croissent à taux constants.

- En divisant $\dot{\kappa}_t = sf(\kappa_t) - (n+g+\delta)\kappa_t$ par κ_t, on obtient que

$$\frac{\dot{\kappa}_t}{\kappa_t} \text{ est constant dans le temps } \Rightarrow \frac{f(\kappa_t)}{\kappa_t} \text{ est constant dans le temps.}$$

- On montre en annexe que la fonction $z \mapsto f(z)/z$ est strictement décroissante.

Etat régulier II

- La fonction $z \mapsto f(z)/z$ est donc bijective, de sorte que

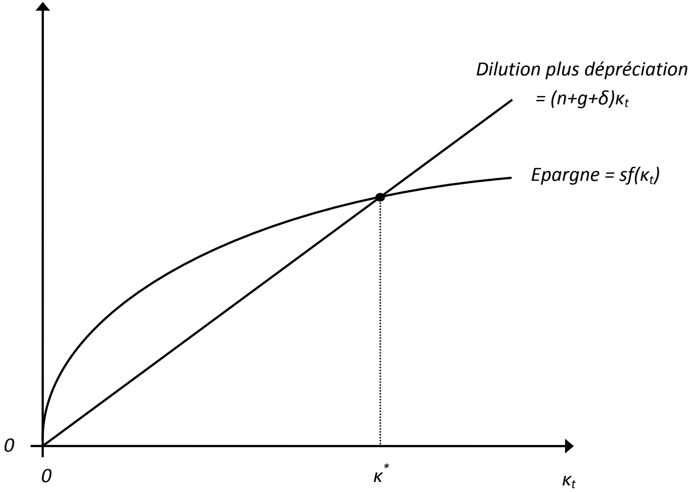
$$\frac{f(\kappa_t)}{\kappa_t} \text{ est constant dans le temps } \Rightarrow \kappa_t \text{ est constant dans le temps.}$$

- Par conséquent, à l'état régulier, κ_t est constant dans le temps.

- En remplaçant $\dot{\kappa}_t$ par 0 dans l'équation différentielle et en utilisant la bijectivité de $z \mapsto f(z)/z$, on obtient que κ_t à l'état régulier est égal à l'unique valeur $\kappa^* > 0$ telle que

$$sf(\kappa^*) = (n + g + \delta)\,\kappa^*.$$

Etat régulier III



Etat régulier IV

- En dérivant $sf(\kappa^*) = (n+g+\delta)\,\kappa^*$ par rapport à s, n, g ou δ, et en utilisant $sf'(\kappa^*) < n+g+\delta$, on obtient que κ^* **est**
  - **croissant en** s**,**
  - **décroissant en** n**,** g**,** δ**,**

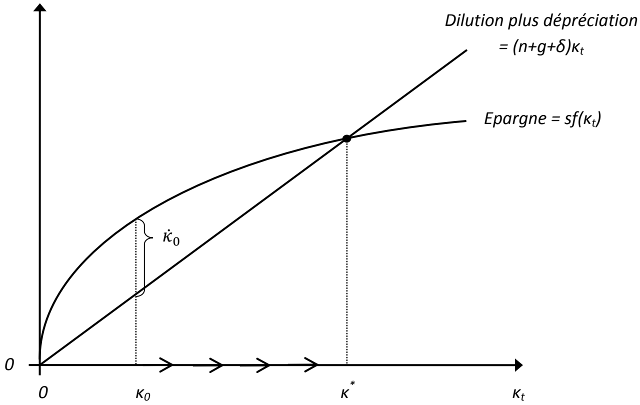
  comme l'illustre le graphique précédent.

- Dans le cas où $F(x,y) = x^{\alpha}y^{1-\alpha}$ avec $0 < \alpha < 1$ ($\equiv$ "cas Cobb-Douglas"), on a $f(z) = z^{\alpha}$ et donc

$$\kappa^* = \left(\frac{s}{n+g+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Convergence vers l'état régulier

- Représentation graphique de $\dot{\kappa}_t = sf(\kappa_t) - (n + g + \delta)\kappa_t$:



- κ_t converge donc vers κ^*.

Interprétation de la convergence vers l'état régulier I

(En italique : par unité de travail efficace.)

productivité marginale du capital $F_1(K_t, A_t L_t)$ décroît
de $+\infty$ (lorsque $K_t \to 0$) à 0 (lorsque $K_t \to +\infty$)

$$\Downarrow$$

productivité marginale du capital $f'(\kappa_t)$ décroît
de $+\infty$ (lorsque $\kappa_t \to 0$) à 0 (lorsque $\kappa_t \to +\infty$)

$$\Downarrow$$

productivité moyenne du capital $\frac{f(\kappa_t)}{\kappa_t}$ décroît
de $+\infty$ (lorsque $\kappa_t \to 0$) à 0 (lorsque $\kappa_t \to +\infty$)

$$\Downarrow$$

$$\vdots$$

Interprétation de la convergence vers l'état régulier II

$$\Downarrow$$

ratio $\frac{\textit{épargne } sf(\kappa_t)}{\textit{dilution plus dépréciation } (n+g+\delta)\kappa_t}$ décroît
de $+\infty$ (lorsque $\kappa_t \to 0$) à 0 (lorsque $\kappa_t \to +\infty$)

$$\Downarrow$$

épargne $sf(\kappa_t) \gtreqless$ *dilution plus dépréciation* $(n+g+\delta)\kappa_t$
lorsque $\kappa_t \lesseqgtr \kappa^*$

$$\Downarrow$$

$$\dot{\kappa}_t \gtreqless 0 \text{ lorsque } \kappa_t \lesseqgtr \kappa^*$$

La convergence de κ_t vers κ^* est donc due à la décroissance de la productivité du capital.

Résolution dans le cas Cobb-Douglas I

- Dans le cas où $F(x, y) = x^\alpha y^{1-\alpha}$ avec $0 < \alpha < 1$, l'équation différentielle devient
$$\dot{\kappa}_t = s\kappa_t^\alpha - (n + g + \delta)\,\kappa_t.$$

- En notant $u_t \equiv \kappa_t^{1-\alpha}$, on obtient $\dot{u}_t = (1-\alpha)\,\kappa_t^{-\alpha}\dot{\kappa}_t$ et l'équation différentielle peut donc se réécrire
$$\frac{\dot{u}_t}{s - (n + g + \delta)\,u_t} = 1 - \alpha.$$

Résolution dans le cas Cobb-Douglas II

- En intégrant cette dernière équation, on obtient

$$\frac{-1}{n+g+\delta}\ln\left[\frac{s-(n+g+\delta)\,u_t}{s-(n+g+\delta)\,u_0}\right]=(1-\alpha)\,t$$

puis

$$u_t=\frac{s-\left[s-(n+g+\delta)\,u_0\right]e^{-(n+g+\delta)(1-\alpha)t}}{n+g+\delta}.$$

- En utilisant $\kappa_t=u_t^{\frac{1}{1-\alpha}}$ et l'expression de κ^*, on obtient alors

$$\kappa_t^{1-\alpha}=(\kappa^*)^{1-\alpha}-\left[(\kappa^*)^{1-\alpha}-\kappa_0^{1-\alpha}\right]e^{-(n+g+\delta)(1-\alpha)t},$$

qui dit que $\kappa_t^{1-\alpha}$ converge **exponentiellement**, au taux $(n+g+\delta)(1-\alpha)$, vers sa valeur à l'état régulier $(\kappa^*)^{1-\alpha}$.

Résolution dans le cas Cobb-Douglas III

- Notons $y_t \equiv \frac{Y_t}{L_t}$ la production par unité de travail, qui correspond au PIB par tête.

- En utilisant $y_t = A_t \kappa_t^\alpha$, on obtient

$$y_t = \left\{ \left(\kappa^*\right)^{1-\alpha} - \left[\left(\kappa^*\right)^{1-\alpha} - \kappa_0^{1-\alpha} \right] e^{-(n+g+\delta)(1-\alpha)t} \right\}^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} A_0 e^{gt}.$$

Implications positives

Croissance à long terme

- Notons $G_t \equiv \frac{\dot{y}_t}{y_t}$ le taux de croissance de la production par tête.

- On a $y_t = A_t f(\kappa_t)$, donc

$$G_t = \dot{\ln y_t} = \dot{\ln A_t} + \dot{\ln f(\kappa_t)} = \frac{\dot{A}_t}{A_t} + \frac{f'(\kappa_t)\dot{\kappa}_t}{f(\kappa_t)} = g + \frac{f'(\kappa_t)\dot{\kappa}_t}{f(\kappa_t)}.$$

- Puisque $\lim_{t \to +\infty} \frac{f'(\kappa_t)\dot{\kappa}_t}{f(\kappa_t)} = 0$, on obtient

$$\lim_{t \to +\infty} G_t = g,$$

c'est-à-dire que **le taux de croissance de long terme est égal au taux de progrès technique.**

Les deux sources de croissance

- Notons $k_t \equiv \frac{K_t}{L_t}$ le stock de capital par tête.

- On a $y_t = F(k_t, A_t)$, donc les deux sources potentielles de croissance de la production par tête y_t sont
  - l'accroissement du stock de capital par tête k_t,
  - le progrès technique, c'est-à-dire l'accroissement de la productivité A_t.

- A court terme, la croissance peut être due à ces deux facteurs.

- A long terme, elle ne peut être due qu'au second facteur : sans progrès technique ($g = 0$), $k_t \to A_0\kappa^*$ lorsque $t \to +\infty$, et il n'y a donc pas de croissance à long terme.

Sentier de long terme de $\ln(y_t)$

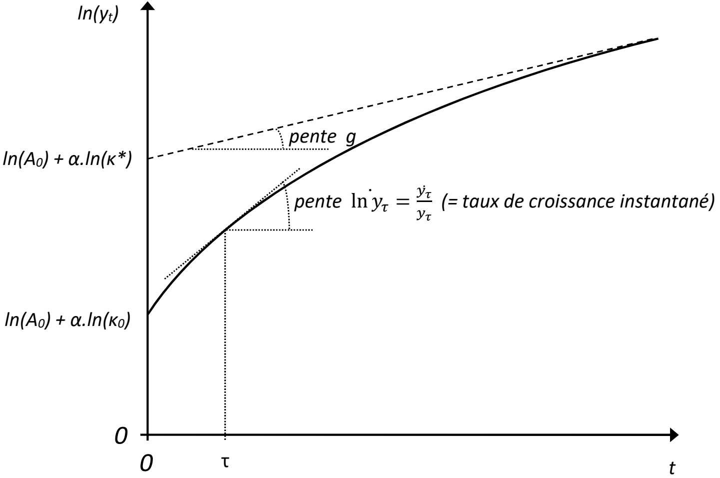
- Notons $y_t^* \equiv A_t f(\kappa^*)$ la valeur de y_t à l'état régulier.

- Le sentier de $\ln(y_t) = \ln(A_0) + \ln[f(\kappa_t)] + gt$ admet pour asymptote, lorsque $t \to +\infty$, celui de $\ln(y_t^*) = \ln(A_0) + \ln[f(\kappa^*)] + gt$, au sens où

$$\lim_{t \to +\infty} [\ln(y_t) - \ln(y_t^*)] = 0.$$

- Donc le sentier de long terme de $\ln(y_t)$ est une droite qui a
  - une ordonnée à l'origine qui dépend positivement de A_0, s,
  - une ordonnée à l'origine qui dépend négativement de n, g, δ,
  - une pente qui dépend positivement de g.

Représentation graphique dans le cas Cobb-Douglas



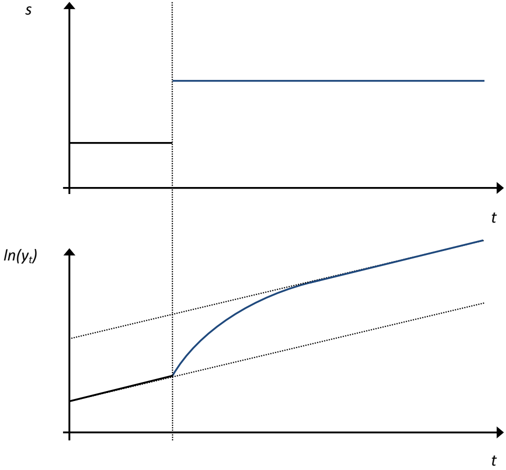
Effet d'une variation discontinue d'un paramètre

- Suite à une variation discontinue de s, n, δ ou g,
  - k_t reste une fonction continue du temps car c'est un stock,
  - A_t reste une fonction continue du temps car c'est un stock (si $g = g_0$ pour $t < T$ et $g = g_1$ pour $t \geq T$, alors $A_t = A_0 e^{g_0 t}$ pour $t \leq T$ et $A_t = A_T e^{g_1 (t-T)}$ pour $t \geq T$),
  - y_t reste une fonction continue du temps car $y_t = F(k_t, A_t)$.

- Notons $c_t \equiv \frac{C_t}{L_t}$ la consommation par tête.

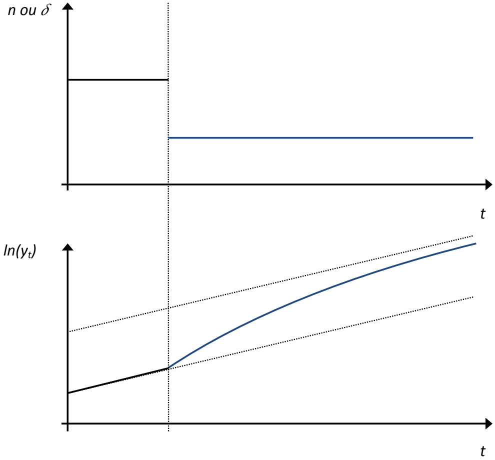
- On a $c_t = (1-s)y_t$, donc
  - suite à une variation discontinue de n, δ ou g, c_t reste continue,
  - suite à une variation discontinue de s, c_t varie de manière discontinue.

Effet d'une hausse permanente de s



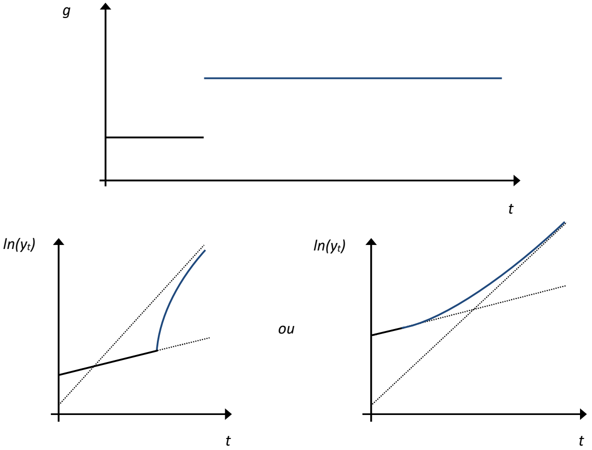
(L'économie est supposée être initialement à l'état régulier.)

Effet d'une baisse permanente de n ou δ



(L'économie est supposée être initialement à l'état régulier. La vitesse de convergence de $\ln(y_t)$ vers son nouveau sentier de long terme est plus faible qu'à la page 41.)

Effet d'une hausse permanente de g



(L'économie est supposée être initialement à l'état régulier. La vitesse de convergence de $\ln(y_t)$ vers son nouveau sentier de long terme est plus élevée qu'à la page 41.)

Convergence conditionnelle, pas absolue

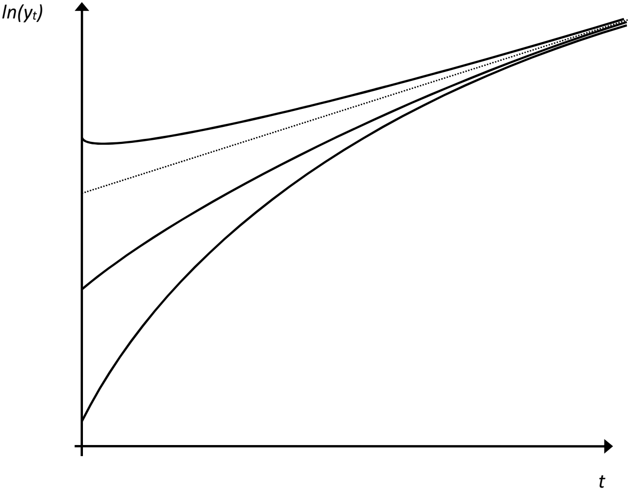
- **Convergence conditionnelle** des niveaux de production par tête (en logarithme) entre les pays : convergence à long terme des $\ln(y_t)$ entre les pays ayant des y_0 différents mais les mêmes paramètres
  - de technologie A_0, g, $f(.)$,
  - d'évolution du capital et du travail s, n, δ,

  car ces pays ont le même sentier de long terme de $\ln(y_t)$.

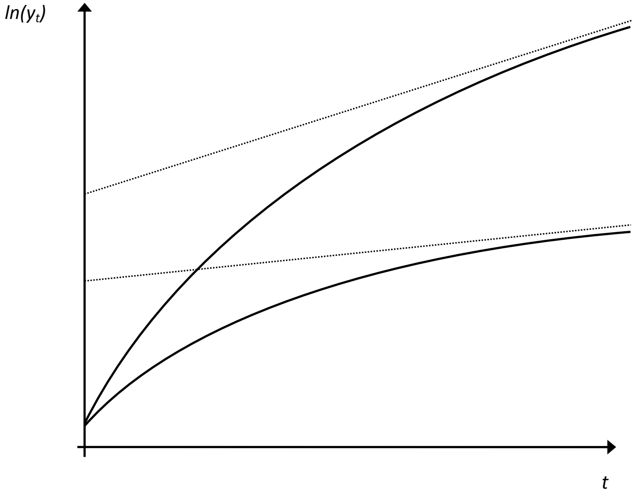
- **Pas de convergence absolue** : pas de convergence à long terme des $\ln(y_t)$ entre les pays ayant des paramètres A_0, g, $f(.)$, s, n, δ différents.

- En effet, un pays croît d'autant plus vite qu'il est éloigné de son propre sentier de long terme, et non pas d'autant plus vite qu'il est pauvre.

Exemple de convergence conditionnelle

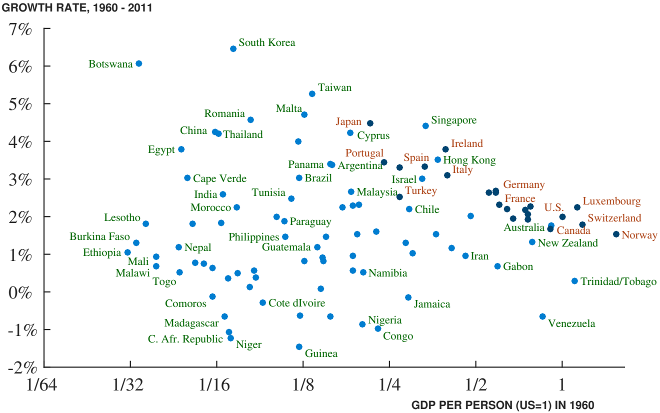


Exemple de divergence



Dans les données, pas de signe de convergence absolue...

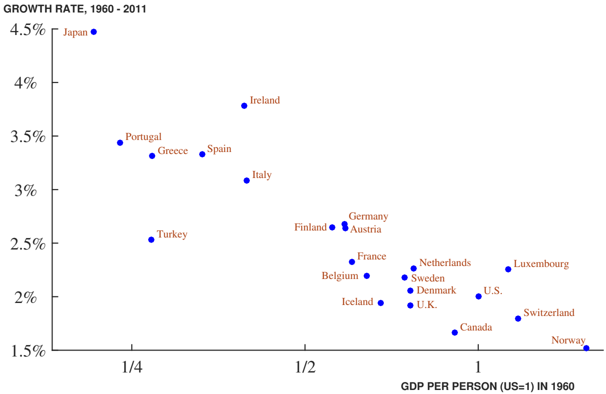
Pas de convergence des PIBs par tête au sein d'un groupe hétérogène de pays



Source: Jones (2015). "Growth rate, 1960-2011" : taux de croissance annuel moyen entre 1960 et 2011. "GDP per person (US=1) in 1960" : PIB par tête en 1960 (États-Unis = 1). Noms de pays en anglais.

...mais des signes de convergence conditionnelle

Convergence des PIBs par tête au sein d'un sous-groupe homogène de pays (ceux de l'OCDE)



Source: Jones (2015). "Growth rate, 1960-2011" : taux de croissance annuel moyen entre 1960 et 2011. "GDP per person (US=1) in 1960" : PIB par tête en 1960 (États-Unis = 1). Noms de pays en anglais.

Tests de convergence conditionnelle

- La littérature empirique testant la convergence conditionnelle estime généralement, sur données de panel, une équation de la forme

$$\frac{1}{T}\ln\left(\frac{y_{i,t+T}}{y_{i,t}}\right)=\beta_0+\beta_1\ln\left(y_{i,t}\right)+\beta_2 X_{i,t}+u_{i,t},$$

  où $X_{i,t}$ est un vecteur de variables de contrôle incluant s_i, n_i, δ_i (en supposant que les pays disposent de la même technologie).

- L'hypothèse de convergence conditionnelle correspond alors à $\beta_1 < 0$ et, le plus souvent, n'est pas rejetée par les données.

Implications normatives

1. Introduction
2. Présentation
3. Résolution
4. Implications positives
5. Implications normatives
   - Règle d'or de l'accumulation du capital
   - Lorsque $s > s_{or}$
   - Lorsque $s < s_{or}$
6. Conclusion
7. Annexe

Règle d'or de l'accumulation du capital I

- A l'état régulier, la consommation par tête est égale à

$$(1-s)\,y_t^* = (1-s)\,A_t f(\kappa^*).$$

- Elle est positive et tend vers 0 lorsque $s \to 0$ et lorsque $s \to 1$.

- Par conséquent, elle est maximale pour une valeur $s_{or} \in \,]0;1[$ de s.

- En utilisant $sf(\kappa^*) = (n+g+\delta)\,\kappa^*$, on peut la réécrire comme

$$A_t\left[f(\kappa^*) - (n+g+\delta)\,\kappa^*\right].$$

Règle d'or de l'accumulation du capital II

- Par conséquent, s_{or} est l'unique valeur de s telle que

$$f'(\kappa^*) = n + g + \delta$$

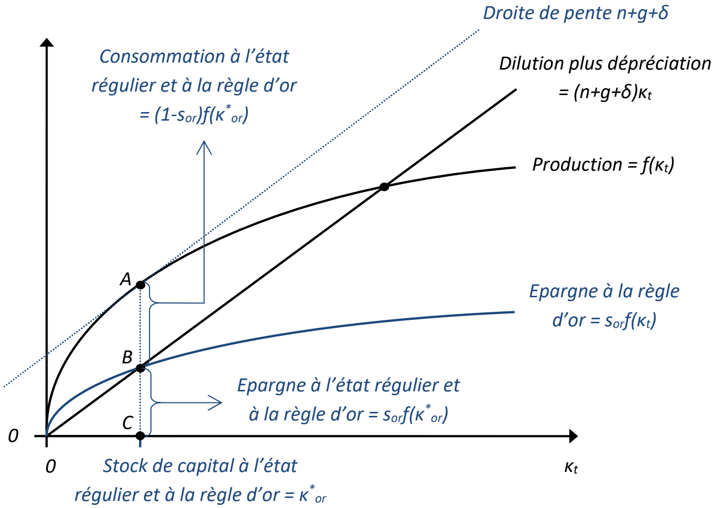
  (i.e. telle que la productivité marginale du capital par unité de travail effic. est égale à la somme des taux de dépréciation et de dilution du capital).

- Cette dernière équation est appelée "**règle d'or de l'accumulation du capital**" (Phelps, 1966).

- **Edmund S. Phelps** : économiste américain, né en 1933 à Evanston, professeur à l'Université de Columbia depuis 1971, lauréat du prix de la Banque de Suède en sciences économiques en mémoire d'Alfred Nobel en 2006 "*for his analysis of intertemporal tradeoffs in macroeconomic policy*".

- Sur la page suivante, on détermine d'abord le point A grâce à la règle d'or de l'accumulation du capital, puis on en déduit les points B et C ; le segment AB représente l'écart vertical maximal entre la courbe de production et la droite de dilution plus dépréciation.

Règle d'or de l'accumulation du capital III



<u>Note</u> : κ^*_{or} représente la valeur de κ^* lorsque s = s_{or}.

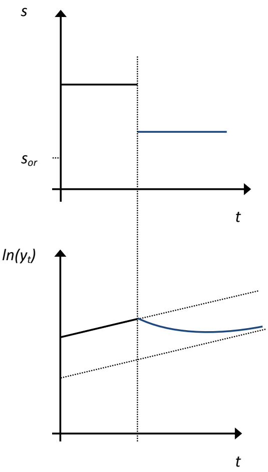
Lorsque $s > s_{or}$ I

- **Lorsque** $s > s_{or}$, une diminution de s vers s_{or} augmenterait la consommation par tête $(1 - s)\, y_t$ en tout point du temps :
  - à long terme (par définition de s_{or}),
  - à court terme (car la hausse de $1 - s$ dominerait la baisse de y_t).

- Dans ce cas, **il y a inefficience dynamique** ($\equiv$ situation dans laquelle on pourrait augmenter la consommation par tête en tout point du temps), **due à une sur-accumulation du capital**.

- Dans la mesure où l'utilité des agents dépend positivement de leur consommation à court terme et à long terme, cette diminution de s vers s_{or} est souhaitable.

Lorsque $s > s_{or}$ II

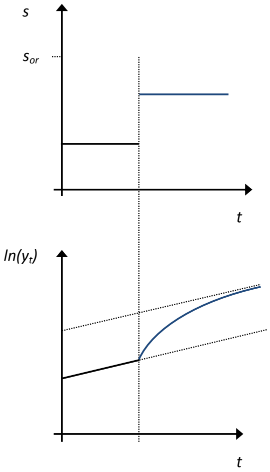


(En supposant que l'économie est initialement à l'état régulier.)

Lorsque $s < s_{or}$ I

- **Lorsque** $s < s_{or}$, une hausse de s vers s_{or}
  - augmenterait la consommation par tête à long terme (par déf. de s_{or}),
  - la réduirait à court terme (car la baisse de $1 - s$ dominerait la hausse de y_t).
- Dans ce cas, **il n'y a pas inefficience dynamique**.
- Pour juger si cette hausse de s vers s_{or} est souhaitable, il faut pondérer l'utilité de la consommation à court terme et l'utilité de la consommation à long terme (ce que fait le chapitre 2).

Lorsque $s < s_{or}$ II



(En supposant que l'économie est initialement à l'état régulier.)

Conclusion

Principales prédictions du modèle

- A long terme, la croissance est uniquement due au progrès technique.
- L'effet de l'accumulation du capital sur la croissance disparaît à long terme à cause de la décroissance de la productivité marginale du capital.
- Il y a convergence conditionnelle des niveaux de production par tête (en logarithme) entre les pays.
- Il y a inefficience dynamique, due à une sur-accumulation du capital, lorsque le taux d'épargne excède celui de la règle d'or.

Deux limites du modèle

- **Le taux d'épargne s est exogène.** S'il était endogène,
  - pourrait-on encore avoir une inefficience dynamique ?
  - quel rôle devrait jouer une politique influençant le taux d'épargne ?

$\hookrightarrow$ Le chapitre 2 endogénéise le taux d'épargne.

- **Le taux de progrès technique g est exogène.** S'il était endogène,
  - y aurait-il des politiques capables de l'influencer ?
  - quel rôle devraient-elles jouer ?

$\hookrightarrow$ Les chapitres 4 et 5 ("théories de la croissance endogène") endogénéisent le taux de progrès technique.

Annexe

Preuve que $z \mapsto f(z)/z$ est strictement décroissante

- La fonction f est strictement concave, donc telle que tout arc est au-dessus de sa corde.

- En particulier, $\forall y \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$, $\forall \lambda \in]0,1[$,

$$f(\lambda y) = f[(1-\lambda)0 + \lambda y] > (1-\lambda)f(0) + \lambda f(y) = \lambda f(y).$$

- En écrivant $\lambda = \frac{x}{y}$ avec $0 < x < y$, on obtient alors : $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^+ \setminus \{0\})^2$, si $x < y$ alors $\frac{f(x)}{x} > \frac{f(y)}{y}$.

- La fonction $z \mapsto f(z)/z$ est donc strictement décroissante.