**ENSAE**

**Deuxième année**

**Introduction aux processus**

**Ecrit. Deux heures. Pas de calculatrice. Seul document autorisé: une feuille manuscrite remplie par l'étudiant.e**

**Nicolas Chopin**

Justifiez toutes vos réponses.

# 1 Chaîne de Markov sur un cadran (5 points)

Soit un entier $N \geq 2$, $E = \{1, \ldots, N\}$, et $(X_t)$ une chaîne de Markov à valeurs dans $E$, de matrice de transition $P$ telle que $P(i, i+1) = q$, pour $i < N$, $P(i, i-1) = 1 - q$ pour $i > 1$, et $P(N, 1) = q$, $P(1, N) = 1 - q$, pour un certain $q \in ]0, 1[$.

1. Représenter le graphe (d'états) de cette chaîne de Markov.
2. Déterminer la loi invariante de cette chaîne.
3. On a vu en cours deux types de résultat sur la convergence des chaînes de Markov. Lequel des deux s'applique encore lorsque $q = 1$, et lequel des deux ne s'applique plus? Expliquer.

# 2 Processus de Poisson (4 points)

Soit $N_t$ un processus de Poisson sur $\mathbb{R}^+$, d'intensité constante $\lambda > 0$.

1. Calculer $\mathbb{E}[N_t|N_s]$ et $\mathbb{E}[N_s|N_t]$ pour $0 \leq s \leq t$. (Pour la deuxième espérance, on pourra d'abord rappeler (sans la justifier) la loi des $n$ réalisations du processus dans l'intervalle $[0, t]$, conditionnellement à l'événement $N_t = n$.)
2. Donner plus généralement l'expression de $\mathbb{E}[N(A)|N(B)]$ et $\mathbb{E}[N(B)|N(A)]$, où $N(\cdot)$ est le processus de comptage associé à un processus de Poisson général de mesure moyenne $\mu$ (sur un espace mesurable $(E, \mathcal{E})$), et $A \subset B \subset E$.

# 3 Temps d'arrêts et martingales (6 points)

Soit $(\mathcal{F}_t)$ une filtration par rapport à un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Les temps d'arrêts considérés dans cet exercice sont des temps d'arrêt par rapport à cette filtration.

1. Expliquer pourquoi $\tau = n$ (i.e. la variable aléatoire telle que $\tau = n$ p.s.) pour $n \geq 0$ est un temps d'arrêt.

2. Soient $\tau_1$ et $\tau_2$ deux temps d'arrêt tels que $\tau_1 \leq \tau_2$ p.s. Montrer que $\mathcal{F}_{\tau_1} \subset \mathcal{F}_{\tau_2}$.

3. Soit $A \in \mathcal{F}_{\tau_1}$. Montrer que la variable définie par

$$\tau(w) = \tau_1(w)\mathbb{1}_A(w) + \tau_2(w)\mathbb{1}_{A^c}(w)$$

   est aussi un temps d'arrêt. (La quantité $\omega$ représente bien sûr un élément de $\Omega$.)

4. Soit un processus $(X_t)$ intégrable et adapté à la filtration considérée. Montrer que $(X_t)$ est une martingale si et seulement si $\mathbb{E}[X_\tau] = \mathbb{E}[X_0]$ pour tout temps d'arrêt $\tau$ borné.

   Indication: considérer les temps d'arrêts $\tau_1 = n$ et $\tau_2 = n + 1$, et un certain $A \in \mathcal{F}_n$.

# 4 Chaîne de Markov dans $\mathbb{Z}$ (8 points)

Soit $X_1, X_2, \ldots$ une suite de variables indépendantes et identiquement distribuées, à valeurs dans $\mathbb{Z}$, et d'espérance nulle. Soit $S_t = \sum_{s=1}^{t} X_s$ (pour $t \geq 1$, et $S_0 = 0$) et

$$f_n(x) = \mathbb{E}\left[\sum_{t=0}^{n} \mathbb{1}\{S_t = x\}\right].$$

1. Montrer que $(S_t)$ est une chaîne de Markov.

2. Montrer que (pour $n \geq 0$ et $x \in \mathbb{Z}$)

$$f_n(x) = \mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_x}^{n} \mathbb{1}\{S_t = x\}\right]$$

   où $\tau_x = \inf\{t \geq 0 : \, S_t = x\}$. (Convention: la somme vaut zéro si $\tau_x > n$. )

3. En déduire que $f_n(x) \geq f_n(0)$.

4. Par la loi (faible) des grands nombres, on sait que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}(|S_n| \leq n\varepsilon) \to 1, \quad \text{pour } n \to \infty.$$

   En déduire que

$$\frac{1}{n} \sum_{x:|x| \leq n\varepsilon} f_n(x) \to 1, \quad \text{pour } n \to \infty.$$

5. Déduire des deux questions précédentes que pour tout $C > 0$, et $n$ assez grand $f_n(0) \geq C$.

6. Montrer que l'état 0 est récurrent. Que dire de la chaîne de Markov $(S_t)$? (Vous pouvez faire des hypothèses sur la loi des $X_i$.)