# Microéconomie 1

## Aléa moral

Philippe Choné[1] Enrico Rubolino[1 2]

[1]CREST-ENSAE [2]U. Lausanne

# Plan du cours

# Économie de l'information et des contrats

Table 1 – Typologie des modèles en information imparfaite

| Information sur | Joue en premier | |
|---|---|---|
| | Partie informée | Partie non informée |
| Caractéristiques | Signal | Auto-sélection |
| Action | | Aléa moral |

A retenir : Les intuitions et résultats économiques vont beaucoup dépendre du type de situations

## Aléa moral lorsque

- Agent prend une action qui affecte son utilité et celle du principal
- Principal observe seulement le résultat, signal imparfait de l'action
- L'action que l'agent choisirait spontanément n'est pas efficace

## De nombreuses relations économiques contaminées par ce problème

- Dans l'entreprise : un employeur ne peut pas contrôler toutes les décisions des employés
- Finance d'entreprise : actionnaire (max profit) et manager ne partagent pas les mêmes objectifs
- Assurance : précaution contre le vol ou le feu
- Services d'experts : médecins, réparateurs automobiles
- Propriétaire terrien et métayer : partage de la récolte entre les deux parties

# Premier rang : P peut contrôler l'action de A

## L'action peut être inscrite dans un contrat

### Le principal choisit

- l'action la plus efficace
- et les salaires qui partagent le risque optimalement

### Le partage efficace du risque, c'est l'assurance parfaite si

- Principal neutre au risque
  - peut diversifier car partie prenante dans plusieurs relations
- Agent averse au risque
  - difficile de diversifier son risque

# Second rang : Action inobservable

“Effort” = Tous les inputs non contrôlables, non contractualisables

### Instrument du principal : payer l’agent au résultat

- P observe seulement le résultat, corrélé à l’action
- seul moyen pour le principal d’influencer l’action

### Arbitrage en second rang

- Partage du risque : Assurer l’agent
- Incitation : Lui laisser du risque

### Si l’agent est risque neutre, pas d’arbitrage

“Principal vend le projet à l’agent”

# Plan du cours

# Deux actions, deux résultats

## Modèle

- Une tâche peut réussir ou échouer
- Surplus $x_S$ si succès , $x_E < x_S$ si échec, à partager entre P et A
- L'agent peut "travailler" (coût $e$) ou "ne pas travailler" ($\emptyset$)
- Fonction d'utilité de l'agent $u(.)$ $\uparrow$ et concave / au salaire $w$
- Utilité de réservation $\underline{U}$
- Principal risque neutre

Table 2 – Proba de succès et utilité en fonction de l'action

| Action | Proba de succès | Utilité de A si salaire $w$ |
|---|---|---|
| Effort | P | u(w)-e |
| $\emptyset$ | p<P | u(w) |

# Utilité de l'agent

S'il reçoit un salaire $w_S$ en cas de succès et $w_E$ en cas d'échec

## Espérance d'utilité si effort

$$\mathbb{E}U = Pu(w_S) + (1-P)u(w_E) - e$$

Taux marginal de substitution

$$-\frac{\partial w_S}{\partial w_E}_{|U} = \frac{(1-P)u'(w_E)}{Pu'(w_S)}$$

## Espérance d'utilité sans effort

$$\mathbb{E}U = pu(w_S) + (1-p)u(w_E)$$

Taux marginal de substitution

$$-\frac{\partial w_S}{\partial w_E}_{|U} = \frac{(1-p)u'(w_E)}{pu'(w_S)}$$

# Les courbes d'indifférence sans effort sont plus pentues

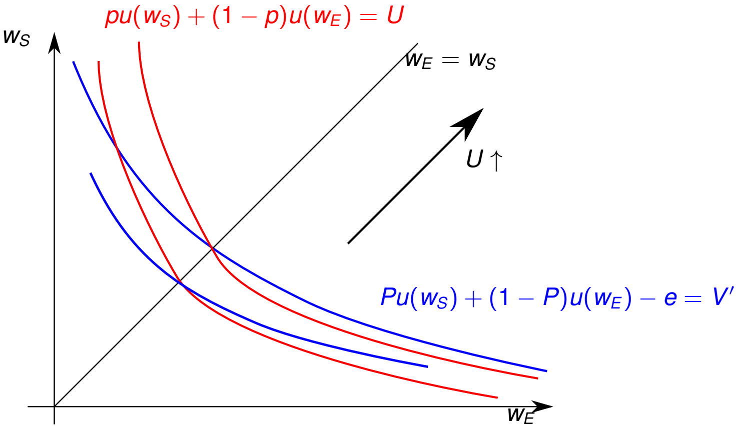



Figure 1 – Pente des courbes bleues si salaire fixe $w_E = w_S$ : $-(1-P)/P$. Pour les courbes rouges : $-(1-p)/p$

# L'assurance parfaite est Paréto-optimale

## Profit espéré du principal si effort

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Pi &= P(x_S - w_S) + (1-P)(x_E - w_E) \\ &= [Px_S + (1-P)x_E] - [Pw_S + (1-P)w_E]\end{aligned}$$

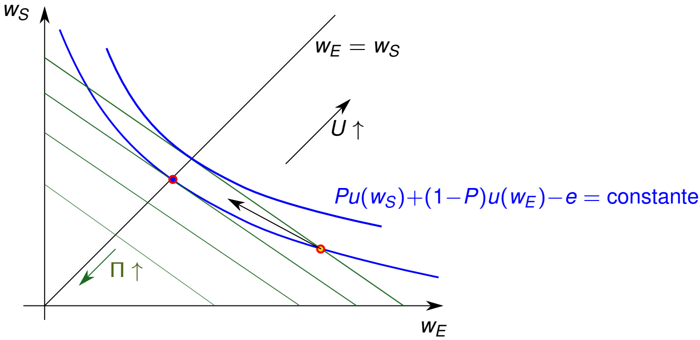



Figure 2 – Courbes d'iso-profit si effort : droites vertes de pente $-(1-P)/P$

# Premier rang : Effort vérifiable

## L'effort peut être imposé par le contrat

S'il décide d'inscrire l'effort dans le contrat, P maximise sur $(w_E, w_S)$

$$\mathbb{E}\Pi = P(x_S - w_S) + (1 - P)(x_E - w_E)$$

sous la contrainte de participation

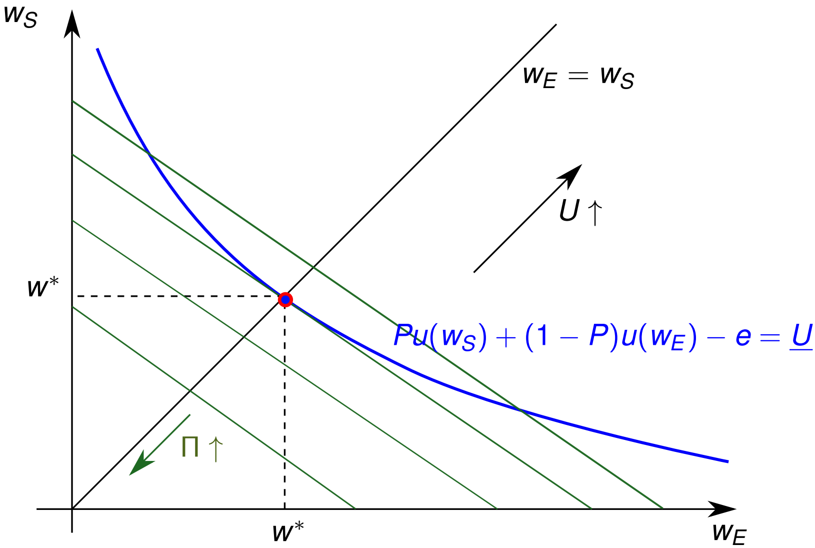
$$Pu(w_S) + (1 - P)u(w_E) - e \geq \underline{U} \quad \text{(CP)}$$

Ce qui conduit P à

- assurer parfaitement l'agent
- lui offrir le salaire minimum pour qu'il participe, $u(w^*) = \underline{U} + e$
- gagner le profit

$$\Pi^* = Px_S + (1 - P)x_E - w^*$$

# Salaire de premier rang $w^*$ si effort



# Premier rang : Effort vérifiable

L'effort peut être imposé par le contrat

## S'il décide de ne pas inscrire l'effort dans le contrat, P

- assure parfaitement l'agent
- lui offre le salaire minimum pour qu'il participe, $u(w^{\emptyset}) = \underline{U}$
- gagne

$$\Pi^{\emptyset} = px_S + (1-p)x_E - w^{\emptyset}$$

## Inscrire l'effort dans le contrat est coûteux pour P

$$w^* = u^{-1}(\underline{U} + e) > w^{\emptyset} = u^{-1}(\underline{U})$$

## Le Principal impose l'effort contractuellement si et seulement si

$$\Pi^* = Px_S + (1-P)x_E - w^* > \Pi^{\emptyset} = px_S + (1-p)x_E - w^{\emptyset}$$

# Second rang : Effort inobservable

Le contrat ne peut dépendre que du résultat $(w_S, w_E)$

## Si P veut induire l'effort, il maximise

$$\mathbb{E}\Pi = P(x_S - w_S) + (1 - P)(x_E - w_E)$$

- sous la contrainte de participation

$$Pu(w_S) + (1 - P)u(w_E) - e \geq \underline{U} \quad \text{(CP)}$$

- et la contrainte d'incitation

$$Pu(w_S) + (1 - P)u(w_E) - e \geq pu(w_S) + (1 - p)u(w_E) \quad \text{(CI)}$$

## Lemme : Les deux contraintes sont saturées

Preuve : Pour CP, on $\downarrow$ $u(w_S)$ et $u(w_E)$ par $\varepsilon$. Pour CI : Graphique

# Contrat optimal de 2[d] rang si effort $(w_S(e), w_E(e))$

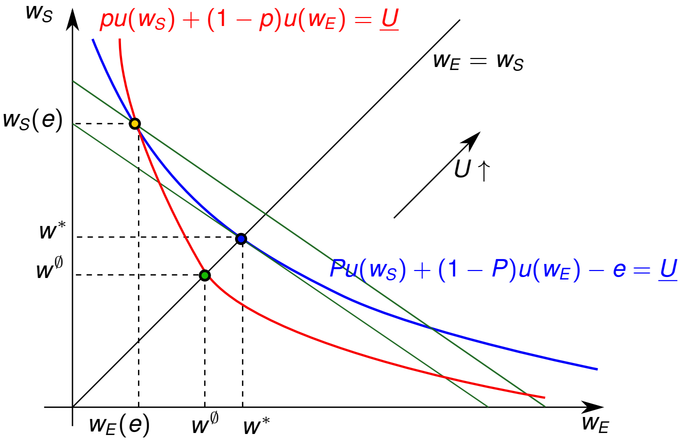



Figure 4 – Contrainte de participation saturée : L'optimum est sur la courbe bleue. Contrainte d'incitation : L'optimum doit être sous la courbe rouge

Premier rang : Point bleu. Second rang : Point jaune

# Contrat optimal si effort $(w_S(e), w_E(e))$

Comme les deux contraintes CP et CI sont actives, on a

$$\begin{cases} u(w_S) = \underline{U} + \dfrac{1-p}{P-p} e \\ u(w_E) = \underline{U} - \dfrac{p}{P-p} e \end{cases}$$

## Propriétés du contrat $(w_S(e), w_E(e))$

- Les salaires ne dépendent pas des niveaux de $x_S$ et $x_E$
- Le salaire croît en le résultat : $w_S > w_E$
- L'optimum de second rang est inefficace : L'agent n'est pas complètement assuré

# Quand est-il optimal d'induire l'effort ?

**Profit sans effort**

$$\Pi^{\emptyset} = p x_S + (1-p) x_E - w^{\emptyset}$$

avec $w^{\emptyset} = u^{-1}(\underline{U})$

**En second rang, le principal choisit d'induire l'effort si le profit avec effort est plus grand que $\Pi^{\emptyset}$**

$$P(x_S - w_S(e)) + (1-P)(x_E - w_E(e)) \geq \Pi^{\emptyset} \tag{1}$$

**En premier rang, le principal choisit d'induire l'effort si**

$$\Pi^* = P(x_S - w^*) + (1-P)(x_E - w^*) \geq \Pi^{\emptyset} \tag{2}$$

avec $w^* = u^{-1}(\underline{U} + e)$

# Distorsion causée par l'aléa moral

## Quand P renonce à induire l'effort en 2nd rang alors qu'il le ferait en 1er rang

### Plus coûteux d'induire l'effort lorsqu'il est inobservable

- (1) est plus forte que (2) car P doit
  - soumettre l'agent à un risque
  - lui donner un salaire espéré plus élevé pour compenser son aversion au risque et assurer sa participation

### Preuve

- Contrainte de participation $\underline{U} + e = Pu(w_S(e)) + (1 - P)u(w_E(e))$
- et la convexité de $u^{-1}$ impliquent

$$u^{-1}(\underline{U} + e) = w^* < Pw_S(e) + (1 - P)w_E(e)$$

# Partage du surplus

## P induit l'effort quand le surplus lié au succès $x_S - x_E$ est grand

$$(1) \iff x_S - x_E \geq \frac{Pw_S(e) + (1-P)w_E(e) - w^{\emptyset}}{P - p} \quad (3)$$

- Rappel : $w_S(e)$, $w_E(e)$ et $w^{\emptyset}$ ne dépendent pas de $x_S$ et $x_E$

## Le surplus lié au succès est partagé entre P et A

- La convexité de $u^{-1}$ et la contrainte d'incitation impliquent

$$w^{\emptyset} < pw_S(e) + (1-p)w_E(e)$$

- ce qui, avec (3), donne $x_S - x_E \geq w_S(e) - w_E(e)$, ou

$$w_S = w_E + s(x_S - x_E) \Rightarrow \text{Taux de bonus } s \leq 100\%$$

# Plan du cours

# Le modèle

## Actions et résultats

- $n$ actions inobservées : $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$
- $m$ résultats observés possibles : $x_1 < x_2 \cdots < x_m$
- $x_k$ : Surplus à partager entre P et A

## Le salaire ne peut dépendre que du résultat : $w_k$

- Partage du surplus : Agent obtient $w_k$, Principal $x_k - w_k$

## "Technologie" : Lien stochastique entre actions et résultats

- Proba (résultat $k$ si action $i$) = $p_{ik}$

$$\sum_{\text{résultats } k} p_{ik} = 1$$

- $\Rightarrow$ Le résultat renseigne partiellement sur l'action prise

# Objectifs du principal P et de l'agent A

## Agent risquophobe

- Utilité de l'agent $u(w) - a$, $u(.) \uparrow$ concave
- Séparable en revenu et effort $\Rightarrow$ l'action ne change pas l'aversion au risque

## Principal risque neutre

- Maximise l'espérance de son profit $x - w$

## Question

A quelles conditions (notamment sur les $p_{ik}$) le salaire croît-il avec le résultat ?

# Programme de l'agent

## Agent face à un menu $w_k$ choisit l'action $a_i$ solution

$$\max_{i=1,\ldots,n}\left(\sum_{k=1}^{m} p_{ik}u(w_k)-a_i\right)$$

## Contraintes d'incitation

- Si P veut que A choisisse action $i$, il faut que

$$\sum_{k=1}^{m} p_{ik}u(w_k)-a_i \geq \sum_{k=1}^{m} p_{jk}u(w_k)-a_j \qquad (\mathrm{CI}_{ij})$$

pour tout $j=1,\ldots,n$ ($j \neq i$)

## Contrainte de participation ($\underline{U}$ = meilleure opportunité extérieure)

$$\sum_{k=1}^{m} p_{ik}u(w_k)-a_i \geq \underline{U} \qquad (\mathrm{CP}_i)$$

# Programme du principal

## P choisit le contrat $(w_1, \ldots, w_m)$ qui maximise son profit espéré

$$\max_{w_1,\ldots,w_m} \sum_{k=1}^{m} p_{ik}(x_k - w_k)$$

où $i$ est l'action choisie par A, contrôlée indirectement par P :

- Revient à imposer ($\text{CI}_{ij}$) pour tout $j \neq i$
- Multiplicateur de Lagrange associé : $\lambda_j$
- On doit aussi imposer (CP), qui est active. Multiplicateur associé $\mu$

## Méthode de résolution

- Résoudre le problème pour chaque action $i$
- Minimiser le coût à induire $i$ : $\min \sum_k p_{ik} w_k$, indépendant des $x_k$
- Comparer les profits obtenus, qui, eux, dépendent des $x_k$

## Minimiser le coût d'induire l'action $i \Rightarrow$ maximiser Lagrangien

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_i &= -\sum_{k=1}^{m} p_{ik} w_k + \mu \left( \sum_{k=1}^{m} p_{ik} u(w_k) - a_i - \underline{U} \right) \\ &\quad + \sum_{\text{actions } j \neq i} \lambda_j \left( \sum_{k=1}^{m} p_{ik} u(w_k) - a_i - \sum_{k=1}^{m} p_{jk} u(w_k) + a_j \right)\end{aligned}$$

## Optimum de premier rang (si action observable : on satisfait CP)

$$\frac{1}{u'(w_k^*)} = \mu$$

## Optimum de second rang

$$\frac{1}{u'(w_k)} = \mu + \sum_{j \neq i} \lambda_j \left( 1 - \frac{p_{jk}}{p_{ik}} \right)$$

# Analogie statistique*

## Question : Le salaire est-il croissant en le résultat ?

### Ratio de vraisemblance

- Modèle statistique paramétrique $f(x;\theta)$
- Vraisemblance : Fonction du paramètre $l(\theta|x) = f(x;\theta)$
- Ratio de vraisemblance :

$$\mathrm{RV}(\theta', \theta; x) = \frac{l(\theta'|x)}{l(\theta|x)} = \frac{f(x|\theta')}{f(x|\theta)}$$

- D'autant plus grand qu'il est plus vraisemblable que l'observation $x$ ait été générée sous $\theta'$ que sous $\theta$

$\hat{\theta}$ = estimateur du max de vrais. (EMV) de $\theta \iff \mathrm{RV}(\hat{\theta}, \theta; x) \geq 1, \forall \theta$

# Analogie statistique : propriété de la technologie*

## Analogie

- Paramètre = action $i$
- Observation : résultat $k$
- Ratio de vraisemblance $\mathrm{RV}(i, j; k) = p_{ik}/p_{jk}$
- Si P voulait “estimer” l’action par max. de vrais., $i$ serait l’EMV si $\mathrm{RV}(i, j; k) \geq 1, \forall j$
- Exemple à deux actions

$$\mathrm{RV}(\text{effort}, \emptyset) = \begin{cases} P/p & \text{si succès} \\ (1-P)/(1-p) & \text{si échec} \end{cases}$$

- $P \geq p \Longrightarrow$ “effort” est l’EMV de l’action si succès observé

# Propriété de la technologie*

## Définition : Monotonicité du RV

$$\forall\theta' > \theta, x' > x \Longrightarrow \mathrm{RV}(\theta', \theta; x') \geq \mathrm{RV}(\theta', \theta; x)$$

## Lemme : RV monotone $\Longrightarrow$ $x \uparrow$ avec $\theta$ stochastiquement au 1er ordre

$$\frac{f(x;\theta')}{f(x;\theta)} \leq \frac{f(x';\theta')}{f(x';\theta)} \Rightarrow \frac{f(x;\theta')}{f(x';\theta')} \leq \frac{f(x;\theta)}{f(x';\theta)} \Rightarrow \frac{F(x';\theta')}{f(x';\theta')} \leq \frac{F(x';\theta)}{f(x';\theta)} \Rightarrow \frac{f(x';\theta')}{F(x';\theta')} \geq \frac{f(x';\theta)}{F(x';\theta)}$$
$$\Rightarrow -\ln F(x';\theta') \geq -\ln F(x';\theta) \Rightarrow F(x';\theta') \leq F(x';\theta)$$

## Monotonie du RV dans le modèle d'aléa moral, avec

- deux actions et $p < P$ : $P/p > (1-P)/(1-p)$
- $n$ actions et $m$ résultats ordonnés $a_1 < \cdots < a_n$, $x_1 < \cdots < x_m$ :

$$j > i, l > k \Longrightarrow p_{jl}/p_{il} > p_{jk}/p_{ik}$$

# Propriétés du contrat optimal*

## Interprétation du contrat optimal

- En appelant $i$ l'action optimale

$$\frac{1}{u'(w_k)} = \mu + \sum_{\text{actions } j \neq i} \lambda_j \left(1 - \frac{p_{jk}}{p_{ik}}\right)$$

- Cette expression est ↑ en le rapport de vraisemblance $p_{ik}/p_{jk}$
- P paie plus A pour des résultats $k$ qui suggèrent qu'il a pris l'action optimale

## Proposition 1

*Si le ratio de vraisemblance est croissant et si l'action optimale est $i = n$, alors le salaire croît en le résultat.*

Cette propriété n'est pas vraie en général

# Plan du cours

# Rationnement du crédit

## Un emprunteur potentiel est rationné

- s'il ne peut pas obtenir le crédit qu'il souhaite
- alors qu'il est prêt à payer le taux d'intérêt demandé par les prêteurs

## Rationnement : un phénomène fréquent et non temporaire

- Emprunteurs contraints par des lignes de crédit fixes
- Prêts refusés

## Deux explications possibles fondées sur

- Asymétrie d'information entre prêteurs et emprunteurs
- Responsabilité limitée de l'emprunteur

# Pourquoi les prêteurs n'augmentent-ils pas les taux si la demande excède l'offre ?

## Une hausse des taux d'intérêt

- réduit le gain de l'emprunteur s'il rembourse
- n'a pas d'effet en cas de faillite s'il est protégé par la responsabilité limitée

## Explication 1 : Sélection adverse

- Prêteurs ne peuvent pas identifier bons et mauvais emprunteurs
- $\uparrow$ taux affecte moins les mauvais (qui rembourseront moins souvent) et les attire donc davantage que les bons
- Prêteurs ne veulent pas $\uparrow$ les taux pour garder un bon échantillon d'emprunteurs

# Pourquoi les prêteurs n'augmentent-ils pas les taux si la demande excède l'offre ?

## Explication 2 : Aléa moral

- $\uparrow$ taux $\Rightarrow \downarrow$ gain pour l'emprunteur
- peut le demotiver, l'inciter à poursuivre des projets avec des gains privés plus importants, négliger le projet en faveur d'activités alternatives, etc.
- $\Longrightarrow \uparrow$ la probabilité de défaut
- $\Longrightarrow$ Les emprunteurs n'accroissent pas les taux proposés
- Le modèle qui suit formalise ce mécanisme

# Rationnement du crédit : Projet et résultats

## L'entrepreneur-emprunteur

- a un projet qui requiert un investissement $I$
- a une richesse initiale (cash) $A < I$
- Pour mettre en oeuvre le projet, l'entrepreneur doit emprunter $I - A$

## Le projet

- réussit avec probabilité
  - $p_H$ si l'entrepreneur se “comporte bien”, “exerce l'effort”
  - $p_L$ s'il tire au flanc, avec $\Delta p = p_H - p_L > 0$
- rapporte $R$ s'il réussit et 0 s'il échoue

# Préférences de l'entrepreneur

## Bénéfices privés de l'entrepreneur

- Tirer au flanc rapporte $B$ à l'entrepreneur
- Bien se comporter ne lui rapporte rien

## Deux interprétations

- Effort : $B$ est la désutilité de l'effort économisée en tirant au flanc
- L'entrepreneur peut choisir entre
  - un projet avec proba de succès $p_H$
  - un autre projet qu'il préfère (plus utile pour sa carrière future, qui bénéficie à des amis, etc.), proba de succès $p_L$
  - $B$ représente la préférence pour le mauvais projet

# Préférences : Responsabilité limitée

- Pas de préférence pour le présent, pas d'actualisation, $\delta = 1$
- Entrepreneur et prêteur(s) risque neutres
- L'emprunteur est protégé par la responsabilité limitée

Espérance d'utilité $= -\infty$ dès que revenu est négatif avec proba $> 0$

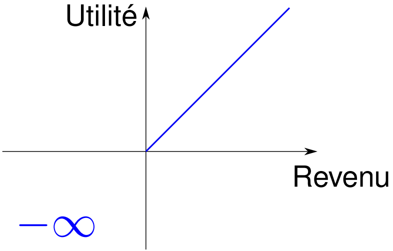


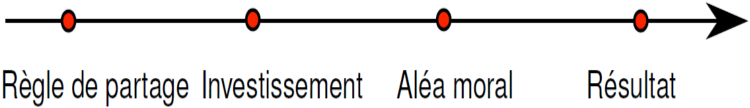

Figure 5 – Aversion infinie pour les revenus négatifs

# Contrat

## Contrat de prêt stipule

- si le projet est financé
- $(R_b, R_l)$ le partage du profit entre investisseurs et emprunteur en cas de succès
    - L'emprunteur reçoit $R_b$, le prêteur $R_l$, avec $R = R_b + R_l$
    - Les deux parties reçoivent 0 en cas d'échec (responsabilité limitée)

# Timing du jeu




Hypothèse : Le projet est viable seulement si effort

- Valeur nette présente du projet positive seulement si effort

$$p_H R - I > 0 > p_L R - I + B$$

- Donc aucun prêt induisant l'entrepreneur à tirer au flanc ne sera accordé

# Contrainte d'incitation (CI) de l'entrepreneur

$$\mathbb{E}S_b = p_H R_b - A \geq p_L R_b - A + B \quad \text{ou} \quad R_b \geq B/\Delta p$$

## Rente d'agence : $p_H B/\Delta p$

- Espérance de revenu qu'il faut laisser à l'emprunteur pour préserver les incitations
- L'emprunteur récupère au moins

$$\mathbb{E}S_b \geq p_H B/\Delta p - A$$

## A cause de la CI, le taux d'intérêt $i$ ne peut pas être trop élevé

$$1 + i = \frac{R_l}{I - A} = \frac{R - R_b}{I - A} \leq \frac{R - B/\Delta p}{I - A}$$

# Contrainte de participation (CP) de l'entrepreneur

## L'espérance d'utilité de l'entrepreneur est positive ou nulle

$$\mathbb{E}S_b = p_H R_b - A \geq 0 \qquad \text{(CP)}$$

## Interaction entre (CI) et (CP)

$$\mathbb{E}S_b = p_H R_b - A \geq \max\left(\, p_H B/\Delta p - A, 0 \,\right)$$

- $A < p_H B/\Delta p$ : (CI) active, (CP) inactive
- $A > p_H B/\Delta p$ : (CP) active, (CI) inactive. Il est crédible que l'entrepreneur fera l'effort

# Quand le projet est-il finançable ?

## Contrainte de participation des prêteurs

$$\underbrace{p_H R_l}_{\text{Revenu espéré max des prêteurs}} \geq \underbrace{I - A}_{\text{Montant prêté}}$$

## Revenu espéré net de l'emprunteur et des prêteurs, surplus total

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}S_b &= p_H R_b - A &&\geq \max(p_H B/\Delta p - A, 0) \\
\mathbb{E}S_l &= p_H R_l - (I - A) &&\geq 0 \\
\mathbb{E}W &= p_H R - I
\end{aligned}$$

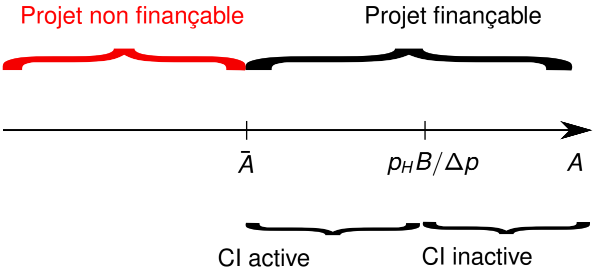
Le surplus total doit permettre de financer la rente d'agence

$$\mathbb{E}W = p_H R - I \geq p_H B/\Delta p - A$$

# Quand le projet est-il finançable ?

Le projet est finançable $\Longleftrightarrow$ L'entrepreneur a assez de cash $\Longleftrightarrow$

$$A \geq \bar{A} \stackrel{\text{def}}{\equiv} p_H B/\Delta p - (p_H R - I)$$



# Partage du surplus (lorsque $\bar{A} \leq A \leq I$)

## Si le prêteur est monopolistique

- Rappel : La condition de financement est :

$$\mathbb{E}W = p_H R - I \geq \max(0, p_H B/\Delta p - A)$$

- Le prêteur récupère tout le surplus moins la rente d'agence

$$\mathbb{E}S_l = \mathbb{E}W - \max(0, p_H B/\Delta p - A)$$

- Lorsque $A > p_H B/\Delta p$, l'espérance de surplus du prêteur est $\mathbb{E}W$
- Lorsque $A = \bar{A}$, l'espérance de surplus du prêteur est nulle

# Partage du surplus (lorsque $\bar{A} \leq A \leq I$)

## Si concurrence parfaite des prêteurs

- L'emprunteur a tout le surplus : $\mathbb{E}S_b = \mathbb{E}W = p_H R - I$
- Les prêteurs ont zéro : $\mathbb{E}S_l = p_H R_l - (I - A) = 0$, d'où

$$1 + i = \frac{R_l}{I - A} = \frac{1}{p_H} > 1 \Longrightarrow i > 0$$

- Le taux d'intérêt est positif malgré l'absence de préférence pour le présent : Prime de défaut
- Le revenu laissé aux prêteurs $R_l = (I - A)/p_H$ décroît avec $A$
  - Si $A = I$, ils n'ont rien du tout : $R_l = 0$
  - Si $A = \bar{A}$, les prêteurs récupèrent le revenu max qui peut leur être promis : $R_l = R - B/\Delta p$

# Plan du cours

# Rémunération d'un employé avec utilité CARA

## Modèle mono-tâche

### Si l'agent prend l'action (continue) $e$, le résultat est gaussien

$$x = e + \varepsilon, \;\; \varepsilon \hookrightarrow \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

- Si $\sigma^2$ grand, l'employeur ne peut pas estimer précisément l'effort à partir du résultat observé

### Utilité de l'employé s'il fait l'effort $e$ et reçoit le salaire $w$

$$u(w; e) = -\exp[-r(w - C(e))], r > 0$$

- $u$ est $\uparrow$ concave en $w$
- L'aversion au risque absolue, $-u''/u' = r$, est constante (CARA)
- Coût de l'effort (exprimé en euros) : $C(e) = ce^2/2$, $c > 0$
- Utilité de réservation $\underline{U} < 0$

# Premier rang

## Effort vérifiable, inscrit dans le contrat

Employeur (risque-neutre) choisit $e$ et $w$ qui maximisent

$$\mathbb{E}x - w = e - w$$

sous contrainte de participation : $$w \geq C(e) - \frac{1}{r}\ln(-\underline{U}) \qquad \text{(CP)}$$

- Salaire $w$ sature (CP), donc $\max_e e - C(e) = \max_e e - ce^2/2$
- Effort de premier rang : $e^* = 1/c$
- Agent parfaitement assuré. Salaire fixe.
- Niveau de salaire fonction de l'effort (observé)

$$w(e) = \begin{cases} C(e^*) - \frac{1}{r}\ln(-\underline{U}) & \text{si } e = e^* \\ -\infty & \text{si } e \neq e^* \end{cases}$$

# Second rang : Effort inobservé

### Contrat : Salaire $w$ fonction du résultat $x$

- On se limite à des contrats linéaires : $w(x) = \alpha x + \beta$
- $\beta$ : partie fixe, transfert de surplus entre employeur et employé
- $\alpha$ : part variable, gouverne les incitations
- Si $\alpha > 0$, le salaire est aléatoire, l'agent supporte du risque

### La distribution de salaire est gaussienne

- $w = \alpha(e + \varepsilon) + \beta$, avec $\varepsilon \hookrightarrow \mathcal{N}(0, \sigma^2)$
- Le salaire est gaussien, avec $\mathbb{E}w = \alpha e + \beta$, $\mathbb{V}w = \alpha^2\sigma^2$

# Programme de l'Agent

- Rappel : si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, alors $\mathbb{E}e^{-X} = \exp(\sigma^2/2)$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}u(w;e) &= -\mathbb{E}\exp\left[-r(w - C(e))\right] \\
&= -\mathbb{E}\exp\left[-r\left(\alpha(e+\varepsilon) + \beta - C(e)\right)\right] \\
&= -\mathbb{E}\exp\left[-r\left(\mathbb{E}w - C(e) + \alpha\varepsilon\right)\right] \\
&= -e^{-r[\mathbb{E}w - C(e)]}\; e^{r^2\alpha^2\sigma^2/2} \\
&= -e^{-r[\mathbb{E}w - C(e) - r\mathbb{V}w/2]} = u(\mathrm{EC}; e)
\end{aligned}
$$

- $\mathbb{E}w - r\mathbb{V}w/2 =$ Équivalent certain (EC) de la distribution de salaire

## Choix de l'effort par l'agent

$$\max_e \mathbb{E}w - C(e) = \max_e \beta + \alpha e - ce^2/2 \Longrightarrow e = \alpha/c$$

Effort nul si $\alpha = 0$, croissant avec $\alpha$

# Programme du Principal : Choix de $\alpha$ et $\beta$

## En anticipant le choix de l'effort par l'agent, $e = \alpha/c$

$$\begin{cases} \max \mathbb{E}\Pi = \mathbb{E}x - \mathbb{E}w = e - (\beta + \alpha e) \\ \mathrm{EC}(w) - C(e) = \beta + \alpha e - r\sigma^2\alpha^2/2 - ce^2/2 \geq -\dfrac{1}{r}\ln(-\underline{U}) \end{cases}$$

- La partie fixe, $\beta$, permet de mettre l'agent sur sa CP

$$\mathbb{E}u = \underline{U} \quad \text{ou} \quad \text{Equivalent certain} = C(e) - \frac{1}{r}\ln(-\underline{U})$$

- Après remplacement de $\mathbb{E}w$ et de $e$ par leur valeur, la partie variable $\alpha$ maximise

$$e - ce^2/2 - r\alpha^2\sigma^2/2 = \alpha/c - \underbrace{\alpha^2/2c}_{\text{Coût de l'effort}} - \underbrace{r\alpha^2\sigma^2/2}_{\text{Coût du risque}} \tag{4}$$

# Partage du risque optimal

## Arbitrage assurance ($\downarrow \alpha$) et incitation ($\uparrow \alpha$)

- La part variable optimale

$$\alpha = \frac{1}{1 + rc\sigma^2} \leq 1$$

- L'effort est sous-optimal : $e = \alpha / c < 1/c = e^*$
- A l'optimum, l'agent est plus assuré et le contrat est moins incitatif lorsque
  - il est plus averse au risque ($r \uparrow$)
  - il y a plus de risque ($\sigma^2 \uparrow$)
  - l'effort plus coûteux ($c \uparrow$)

# Modèle multi-tâches*

## Holmstrom et Milgrom (1991)

### Avec deux tâches, efforts $e_1$ et $e_2$

- Résultat de chaque tâche : $x_1 = e_1 + \varepsilon_1$, $x_2 = e_2 + \varepsilon_2$
- avec $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ gaussien d'espérance nulle, de variance $\Sigma$
- Résultat total : $x = x_1 + x_2$
- Utilité de l'agent $-\exp[-r(w - C(e_1, e_2))]$
- Fonction de coût convexe $C(e_1, e_2)$

### Question

Si l'effort sur la tâche 2 est mal observé ($\sigma_2^2$ élevé), comment cela affecte-t-il les incitations données sur la tâche 1 ?

# Programme de l'Agent*

## Contrats linéaires en fonction des résultats

- $\beta$ partie fixe, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)' \in (\mathbb{R}^+)^2$, vecteur des parties variables
- $w = \beta + \alpha' x$, soit

$$w = \beta + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = \beta + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_1 \varepsilon_1 + \alpha_2 \varepsilon_2$$

## Agent choisit ses efforts $e = (e_1, e_2)'$ pour maximiser

$$\text{EC} - C(e) = \mathbb{E}w - C(e) - r\mathbb{V}w/2 = \beta + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 - C(e) - r\alpha'\Sigma\alpha/2$$

- D'où $\alpha_1 = C_1'(e)$, $\alpha_2 = C_2'(e)$, ou $\alpha = \nabla C(e)$

# Tâches substituables v. complémentaires*

Donc $D_\alpha e = (C'')^{-1}$ ou

$$\begin{pmatrix} \mathrm{d}e_1 \\ \mathrm{d}e_2 \end{pmatrix} = (C'')^{-1} \begin{pmatrix} \mathrm{d}\alpha_1 \\ \mathrm{d}\alpha_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\det C''} \begin{pmatrix} C''_{22} & -C''_{12} \\ -C''_{12} & C''_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{d}\alpha_1 \\ \mathrm{d}\alpha_2 \end{pmatrix}$$

L'effort $e_i$ croît avec l'incitation $\alpha_i$ et, si $j \neq i$

- décroît avec $\alpha_j$ si $C''_{12} > 0$ : tâches substituables
- croît avec $\alpha_j$ si $C''_{12} < 0$ : tâches complémentaires

# Programme du principal*

- ajuste le paiement forfaitaire $\beta$ pour que $\mathbb{E}u = \underline{U}$
- maximise l'espérance du "surplus total" $W(\alpha)$

$$
\begin{aligned}
W(\alpha) = \mathrm{EC} - C(e) + \mathbb{E}\,\Pi &= \mathbb{E}w - r\alpha'\Sigma\alpha/2 - C(e) + \mathbb{E}x - \mathbb{E}w \\
&= \mathbb{E}x - C(e) - r\alpha'\Sigma\alpha/2 \\
&= e_1 + e_2 - C(e) - r\alpha'\Sigma\alpha/2
\end{aligned}
$$

- avec $e = e(\alpha)$ : effort choisi par A étant donné $\alpha$
- Le vecteur des dérivées de $W(\alpha)$ par rapport à $\alpha_1$ et $\alpha_2$ est

$$
\nabla W(\alpha) = (D_\alpha e)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - (D_\alpha e)\nabla C - r\Sigma\alpha
$$

# Détermination du contrat optimal*

Utilisant $D_\alpha e = (C'')^{-1}$

$$\nabla W(\alpha) = (C'')^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - (C'')^{-1}\alpha - r\Sigma\alpha$$

et $\nabla W(\alpha) = 0$ donne (implicitement si $C''(e)$ n'est pas constante)

$$\alpha = (I + rC''\Sigma)^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

## Tâches indépendantes : $C''$ diagonale

Si $C''_{12} = 0$, on retrouve la formule en mono-tâche :

$$\alpha = \frac{1}{1 + rc\sigma^2}$$

# Pas de signal pour l'une des deux tâches*

Si P ne peut rien inférer sur la tâche 2, cherche-t-il induire des efforts dans la tâche 2 ? dans la tâche 1 ?

- Supposons que P a un très mauvais signal sur la tâche 2 et ne peut rien déduire du signal sur la tâche 1 :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \quad \text{avec } \sigma_2 \text{ très grand}$$

- En passant à la limite quand $\sigma_2 \to +\infty$ dans

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + r\sigma_1^2 C''_{11} & r\sigma_2^2 C''_{12} \\ r\sigma_1^2 C''_{12} & 1 + r\sigma_2^2 C''_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- on trouve $\alpha_2 \to 0$ : pas d'incitation sur la tâche 2

# Pas de signal pour l'une des deux tâches (suite)*

## Si tâche 2 très bruitée et non corrélée à la tâche 1

$$\alpha_1 \xrightarrow[\sigma_2^2 \to \infty]{} \bar{\alpha}_1 = \frac{1 - C''_{12}/C''_{22}}{1 + r\sigma_1^2 \left[C''_{11} - (C''_{12})^2/C''_{22}\right]}$$

## Tâches indépendantes : $C''_{12} = 0$

- On retrouve la formule mono-tâche $\alpha_1^{\text{mono}}$

## Tâches complémentaires : $C''_{12} < 0$

- On incite davantage qu'en mono-tâche : $\bar{\alpha}_1 > \alpha_1^{\text{mono}}$
- $\bar{\alpha}_1$ d'autant plus grand que $C''_{12}$ est négatif

# Pas de signal pour l'une des deux tâches (suite)*

$$\bar{\alpha}_1 = \frac{1 - C''_{12}/C''_{22}}{1 + r\sigma_1^2 \left[ C''_{11} - (C''_{12})^2/C''_{22} \right]}$$

## Tâches substituables : $C''_{12} > 0$

- Le numérateur et le dénominateur décroissent en $C''_{12}$
- Cas limite : Substituabilité parfaite

$$C(e_1, e_2) = c(e_1 + e_2) \text{ et donc } C''_{11} = C''_{22} = C''_{12} = c''(e) > 0$$

- $\bar{\alpha}_1 = 0$
- La présence d'une tâche annexe inobservable et parfaitement substituable détruit toute possibilité d'incitation sur la tâche 1
- Peut expliquer qu'en pratique les incitations soient plutôt faibles

# Plan du cours

# A RETENIR

## Arbitrage : “Assurance” versus “Incitations”

### Premier rang : Action contractualisable

- Le principal assure parfaitement l’agent : c’est efficace
- L’agent reçoit un salaire fixe qui le compense pour sa participation et l’effort demandé

### Second rang : Action non contractualisable

- Le principal laisse du risque à l’agent pour l’inciter à travailler
- L’agent étant risque averse, il est plus coûteux de le compenser
- peut conduire à lui faire faire moins d’effort qu’au premier rang