

# TD Biens publics & Externalités - Énoncé

Microéconomie, deuxième année, ENSAE

## 1 Approvisionnement en Bien Public (P 2021-2022)

Alice et Bob consomment un bien privé en quantité  $x_i$ ,  $i \in \{A, B\}$ , et un bien public  $z$ . Ils ont la même fonction d'utilité

$$u(x_i, z) = \ln x_i + \ln z.$$

La production d'une unité de bien public demande une unité de bien privé. Alice et Bob ont initialement la même dotation en bien privé, notée  $\bar{x}$ . Les dotations initiales en bien public sont nulles.

1. Un planificateur cherche les consommations  $x_A$ ,  $x_B$  et  $z$  qui maximisent la somme des utilités des deux agents. Déterminer les consommations d'Alice et Bob en biens public et privé,  $x_A$ ,  $x_B$  et  $z$ , ainsi que leur utilité individuelle, en fonction de  $\bar{x}$ .

2. On suppose maintenant qu'Alice et Bob contribuent au bien public pour des montants  $s_i$ ,  $i \in \{A, B\}$ . Les contributions sont déterminées simultanément et sans coopération (équilibre de Nash).

a) Déterminer les niveaux de bien public, de consommation privée et d'utilité qui en résultent pour Alice et Bob.

b) Comparer au résultat de la question 1 et commenter.

## 2 La tragédie des biens communs

On considère un lac sur lequel la pêche n'est pas réglementée. Le coût pour les pêcheurs d'envoyer un bateau est  $r > 0$ . Lorsque  $b$  bateaux sont envoyés sur le lac,  $f(b)$  poissons sont attrapés au total. On suppose  $f$  croissante et concave. Chaque poisson peut ensuite être revendu à un prix 1, indépendant de la quantité pêchée.

**Question 1:** Quel est le nombre de bateaux envoyés à l'équilibre de libre entrée ?

**Question 2:** Quel est le nombre optimal de bateaux qui devraient être envoyés ? Est-il supérieur ou inférieur à celui de libre entrée ?

**Question 3:** Quelle taxe  $t$  permettrait de restaurer l'optimalité ?

**Question 4:** Si le lac était la propriété d'une personne, combien de bateaux choisirait-elle d'envoyer ?

### 3 Tarification des péages autoroutiers (P 2019-2020)

Le but de cet exercice est d'étudier la tarification optimale par péage sur une autoroute dont l'usage n'entraîne pas de détérioration, si bien qu'on peut considérer le coût marginal comme nul. Pour commencer, on néglige la congestion de l'autoroute. L'utilisateur  $\theta$  a une utilité nulle s'il n'emprunte pas l'autoroute, et égale à  $\theta - p$  s'il l'emprunte en payant un péage  $p$ . Le paramètre de goût  $\theta$  est réparti dans la population (d'effectif normalisé à un) selon une loi uniforme sur  $[0, 1]$ .

**Question 1:** Étant donné un péage  $p$ , combien d'automobilistes  $N(p)$  empruntent-ils l'autoroute ?

**Question 2:** On admet qu'avec un coût marginal nul, on peut écrire le surplus social comme l'intégrale sur  $\theta$  des utilités individuelles : l'objectif de l'État est de maximiser le surplus des consommateurs. Calculez le surplus social quand le péage est  $p$ .

**Question 3:** Montrez que le surplus social est maximal en  $p = 0$ . Interprétez.

On prend maintenant en compte la congestion : plus l'autoroute est utilisée, et plus elle est encombrée, ce qui réduit l'utilité des automobilistes. On supposera que celle-ci peut s'écrire  $\theta e^{-3N} - p$ , où  $N$  est le nombre d'automobilistes qui empruntent l'autoroute.

**Question 4:** A  $p$  et  $N$  donnés, qui emprunte l'autoroute ?

**Question 5:** Déduisez-en que pour un péage  $p$ , le nombre d'automobilistes qui empruntent l'autoroute  $N(p)$  est donné par  $N(p) + pe^{3N(p)} = 1$ .

**Question 6:** Écrivez le surplus social en fonction de  $p$ .

**Question 7:** Montrez que le surplus social croît en  $p$  au voisinage de 0.

Question 8: Interprétez ce résultat.

## 4 Vente de billets pour un concert (P 2014-2015)

Un promoteur de spectacles vend des billets pour un concert<sup>1</sup>. L'utilité que chaque spectateur retire du concert dépend d'un terme de préférence individuelle et d'un terme collectif:

- Le terme individuel, noté  $v$ , peut dépendre du revenu de la personne, de sa disponibilité pour se rendre au concert, de la distance entre son domicile et la salle de spectacle, etc.
- Le terme collectif est fonction de la "qualité" des spectateurs présents au concert. Dans le cas d'un concert d'une star de la musique ou de la chanson, les spectateurs potentiels sont plus ou moins "fans" de la star, connaissent plus ou moins bien son répertoire, sont plus ou moins capables de reprendre ses titres, etc.<sup>2</sup> La "qualité" de chaque spectateur individuel en tant que fan est notée  $q$ . L'expérience du concert est meilleure si le public est constitué de fans. Le terme collectif dans l'utilité est  $\alpha \bar{q}$ , où  $\bar{q}$  est la qualité moyenne des spectateurs présents. On prendra  $\alpha = 4$  dans l'application.

Pour vendre les billets, le promoteur recourt à un système de file d'attente, dont la longueur est notée  $l$ . Ce paramètre peut représenter toute disposition (autre que le temps d'attente) qui rend l'achat des billets pénible. On suppose que cette pénibilité est mieux supportée par les fans. Précisément, le coût d'achat du billet est  $(1 - q)l$ , auquel s'ajoute évidemment le prix du billet lui-même, noté  $p$ .

Au total, l'utilité du consommateur de type  $(q, v)$  s'il achète un billet est

$$U = v + \alpha \bar{q} - (1 - q)l - p,$$

et zéro s'il n'achète pas de billet.

Le profit du promoteur est

$$\Pi = (p - c)N,$$

où  $N$  est le nombre de spectateurs du concert et  $c$  désigne le coût par spectateur. On prendra  $c = 2$  dans l'application. On suppose dans tout l'exercice que  $q$  et  $v$  sont indépendants et uniformément répartis sur le carré  $[0, 1]^2$ .

---

<sup>1</sup>L'exercice est tiré de l'article "Ticket pricing and the impression of excess demand", par Lutz-Alexander Busch et Philip A. Curry, *Economics Letters* 111 (2011) 40-42.

<sup>2</sup>La qualité de fan peut se reconnaître à d'autres signes comme l'apparence physique, l'âge, la tenue vestimentaire, etc.

**Question 1 :** Quel mot utilisé dans le titre d'un chapitre du cours reprendriez-vous pour décrire la composante  $\alpha\bar{q}$  de l'utilité?

**Question 2 :** Dans cette question , on suppose que le promoteur ne met pas en place de file d'attente, donc  $l = 0$ .

a) Pour une valeur de  $p$  donnée, représenter dans le plan  $(q, v)$  l'ensemble des types qui achètent un billet.

b) Que vaut  $\bar{q}$ ?

c) Quel est le nombre de spectateurs  $N(p)$ ?

d) Déterminer le prix  $p$  choisi par le promoteur et le profit qu'il retire du spectacle.

**Question 3 :** On suppose dans cette question que  $l = 2$ ,  $p = 10/3$ ,  $N = 1/4$  et  $\bar{q} = 5/6$ .

a) Représenter graphiquement l'ensemble des spectateurs dans le plan  $(q, v)$ . b) Vérifier que les données ci-dessus sont cohérentes, i.e retrouvez  $\bar{q} = \frac{5}{6}$ . c) Quel profit obtient le promoteur? Commenter.

## 5 Externalités (Partiel 2023-2024)

On considère un terrain qui est affecté négativement par une externalité produite par une seule entreprise. Le profit de l'entreprise est donné par

$$\pi(h) = \alpha + \beta h - \mu h^2,$$

où  $h$  représente le niveau d'externalité, et  $\alpha, \beta, \mu > 0$ . Il y a  $I$  agriculteurs qui possèdent le terrain, chacun en détenant une fraction égale  $1/I$ . Le rendement total du terrain est

$$\phi(h) = \gamma - \eta h,$$

où  $\beta, \eta > 0$ . La fonction d'utilité de chaque agriculteur est  $\phi(h)/I$ .

Les négociations entre les agriculteurs et l'entreprise se déroulent comme suit. Chaque agriculteur décide simultanément s'il souhaite faire partie ou non d'une coalition de négociation. Ensuite, la coalition de négociation fait à l'entreprise une offre à prendre ou à laisser, qui consiste en un niveau d'externalité  $h$  et un transfert  $T$  à l'entreprise. L'entreprise accepte ou rejette ensuite cette offre. En cas d'acceptation, le transfert à l'entreprise est réparti uniformément entre ses membres (chaque agriculteur participant à la coalition paie donc  $T/I$ ). En l'absence d'accord, l'entreprise peut générer le niveau d'externalité qu'elle souhaite.

**Question 1** Calculez l'externalité en l'absence d'accord,  $\hat{h}$ , et les profits obtenus par l'entreprise à ce niveau d'externalité.

**Question 2** Calculez le niveau socialement optimal d'externalité,  $h^*$ , c'est-à-dire le niveau d'externalité qui maximise la somme des gains des différents agents sur le marché.

**Question 3** Calculez l'externalité si tous les agriculteurs ensemble (formant une grande coalition) font conjointement une offre à prendre ou à laisser  $(h, T)$  à l'entreprise, chaque agriculteur individuel payant la même part du transfert  $T$  à l'entreprise, à savoir  $T/I$ .

**Question 4** Supposons maintenant qu'une fraction  $\theta \in (0, 1)$  des agriculteurs (autrement dit,  $\theta I$  agriculteurs) forment une coalition qui fait une offre du type à prendre ou à laisser  $(h, T)$  à l'entreprise. On suppose toujours que chaque agriculteur de la coalition supporte la même part du transfert payé à l'entreprise.

Déterminez l'externalité  $h^0(\theta)$  et le transfert  $T^0(\theta)$  en fonction de  $\theta$ . Comparez  $h^0(\theta)$  avec le niveau d'externalité socialement optimal déterminé à la question 2.

**Question 5** Étant donnée une coalition de  $\theta I$  agriculteurs, un agriculteur supplémentaire est-il disposé à rejoindre la coalition ? Déduisez la taille de la coalition qui se forme à l'équilibre. L'externalité générée à l'équilibre est-elle socialement optimale ?

**Question 6** Montrez que quand le nombre des agriculteurs  $I$  augmente, la fraction qui participent à la coalition,  $\theta$ , diminue. De plus, prouvez que  $\lim_{I \rightarrow \infty} \theta^0 = 0$ .