Macroéconomie 1 (3/7)

Le modèle DICE (Nordhaus)

Olivier Loisel

ENSAE

Septembre – Décembre 2025

Croissance et changement climatique

- Le modèle de CKR ne prend pas en compte les conséquences de l'activité économique pour le climat ni, vice-versa, les conséquences du **changement climatique** pour l'économie.

- Nordhaus (1992, 1994) a élargi le modèle de CKR pour prendre ces conséquences en compte, donnant naissance au **modèle DICE** ($\equiv$ modèle Dynamique Integré Climat-Économie), qui est un modèle de l'économie mondiale et du climat mondial.

- **William D. Nordhaus** : économiste américain, né en 1941 à Albuquerque, professeur à l'Université de Yale depuis 1967, co-lauréat (avec Paul M. Romer) du prix de la Banque de Suède en sciences économiques en mémoire d'Alfred Nobel en 2018 "*for integrating climate change into long-run macroeconomic analysis*".

Externalité de pollution

- Une différence clef avec le modèle de CKR est la présence, dans le modèle DICE, d'une **externalité de pollution**.
- La production de chaque entreprise, en émettant des gaz à effet de serre, contribue au réchauffement climatique qui nuit à toute la société.
- Du fait de cette externalité,
  - le premier théorème du bien-être ne s'applique pas,
  - l'équilibre concurrentiel sous laisser-faire n'est pas socialement optimal,
  - le $\mathcal{POOB}$ choisirait moins de production et moins d'émissions de gaz à effet de serre,
  - la "**taxe carbone**" optimale est strictement positive.

Objet du chapitre

- Ce chapitre présente
  - les **conditions d'équilibre** du modèle DICE,
  - ses **implications de nature normative** (taxe carbone optimale).
- Le montant optimal de la taxe carbone dans le modèle DICE est très sensible à la valeur retenue pour le **taux d'actualisation**.
- Pour cette raison, le chapitre discute également de la façon dont calibrer le taux d'actualisation
  - selon l'approche descriptive ou prescriptive retenue,
  - sans ou avec prise en compte de l'incertitude.

Quel modèle DICE ?

- Nordhaus a, au fil du temps, développé plusieurs versions successives du modèle DICE :
  - la première, DICE 1992 (Nordhaus, 1992, 1994), est la plus simple,
  - les deux dernières, DICE 2016 et DICE 2023, sont les plus complexes.
- Dans ce qui suit, on présente
  - les conditions d'équilibre de DICE 1992 (reformulées en temps continu),
  - la calibration et les résultats de DICE 1992, DICE 2016 et DICE 2023.

Plan du chapitre

Conditions d'équilibre

Partie économique I

- Le modèle DICE se divise en deux parties interagissant l'une avec l'autre :
  - une partie économique,
  - une partie climatique.

- La **partie économique** du modèle DICE 1992 correspond au modèle de CKR avec deux simplifications et un changement.

- **Simplifications :**
  - utilité de la consommation logarithmique : $u(c_t) = \ln(c_t)$ (i.e. coeff. d'aversion relative pour le risque constant, égal à $\theta = 1$),
  - fonction de production Cobb-Douglas pour chaque entreprise i : $Y_{i,t} = \Omega_t K_{i,t}^{\alpha} (A_t N_{i,t})^{1-\alpha}$, avec $0 < \alpha < 1$.

Partie économique II

- **Changement :** dans la fonction de production, au lieu de $\Omega_t \equiv 1$, on a

$$\Omega_t \equiv \frac{1 - b_1 \mu_t^{b_2}}{1 + \theta_1 T_t^{\theta_2}}$$

avec $b_1 > 0$, $b_2 > 0$, $\theta_1 > 0$, $\theta_2 > 0$, où

  - T_t est la température de l'atmosphère et de la surface des océans,
  - μ_t est le taux de réduction des émissions de gaz à effet de serre.

- **Interprétation :**
  - $\partial\Omega_t / \partial T_t < 0$ capture le coût économique du changement climatique,
  - $\partial\Omega_t / \partial\mu_t < 0$ capture le coût économique de réduction des émissions de gaz à effet de serre.

- Dans ce modèle, le **taux de réduction des émissions** μ_t est considéré comme l'instrument de politique économique ; il peut s'interpréter comme le résultat d'une taxation des émissions ("taxe carbone").

Partie économique III

- Chaque entreprise i étant atomistique, ses décisions individuelles ont, toutes choses égales par ailleurs, un effet négligeable sur la température T_t et sur l'instrument de politique économique μ_t.
- Chaque entreprise i choisit donc $K_{i,t}$ et $N_{i,t}$ pour maximiser son profit instantané en considérant T_t et μ_t, et par conséquent Ω_t, comme donnés.
- Les conditions du premier ordre du problème d'optimisation des entreprises sont donc les mêmes qu'au chapitre 2, avec le facteur Ω_t en plus.
- Les autres conditions d'équilibre du chapitre 2, caractérisant le comportement des ménages et l'équilibre des marchés, sont inchangées.

Aperçu général de la partie économique I *

- Les **entreprises** louent du capital et emploient du travail pour produire des biens, avec une productivité totale des facteurs qui dépend négativement
  - de la température de l'atmosphère et de la surface des océans,
  - du taux de réduction des émissions de gaz à effet de serre.

- Les **ménages** détiennent le capital et fournissent le travail.

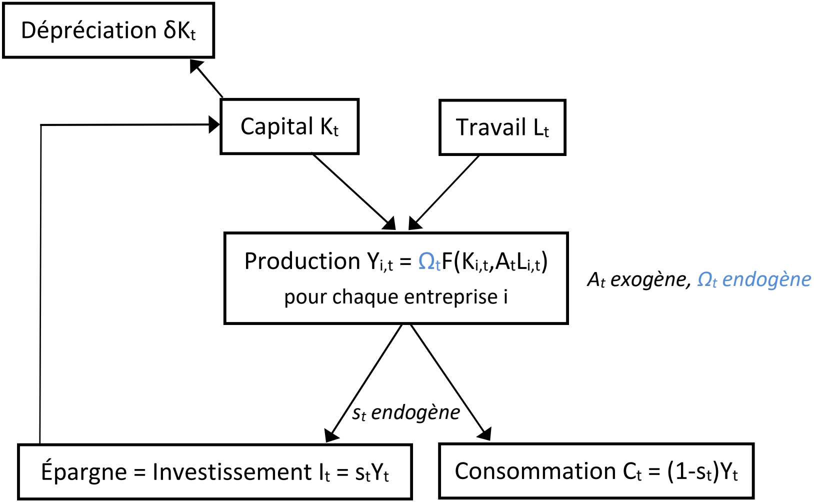
- Les biens produits par les entreprises sont utilisés pour la consommation des ménages et l'investissement en nouveau capital.

- Le **taux d'épargne** est **endogène, choisi optimalement par les ménages**.

- Le capital évolue dans le temps en fonction de l'investissement et de la dépréciation du capital.

(Dans les pages dont le titre est suivi d'un astérisque,
en bleu : changements par rapport au chapitre 2.)

Aperçu général de la partie économique II *

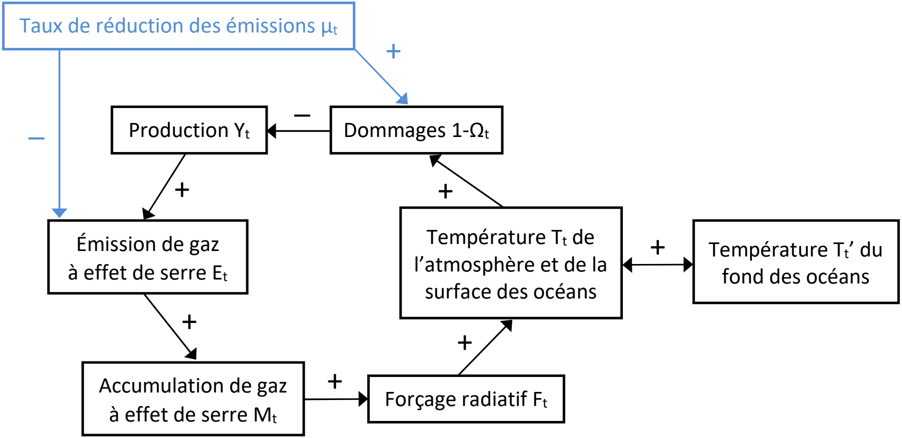


Aperçu général de la partie climatique I

- La production (flux Y_t) émet des gaz à effet de serre (flux E_t), d'autant plus que le taux de réduction des émissions μ_t est faible.
- Ces gaz s'accumulent dans l'atmosphère (stock M_t).
- Cette accumulation augmente le forçage radiatif F_t.
- Cette augmentation du forçage radiatif entraîne une augmentation de
  - la température T_t de l'atmosphère et de la surface des océans,
  - la température T'_t du fond des océans,

  qui sont liées l'une à l'autre.
- L'augmentation de T_t entraîne, toutes choses égales par ailleurs, une diminution de la production Y_t.

Aperçu général de la partie climatique II



(En bleu : instrument de politique économique.)

Équations de la partie climatique I

- **Émissions** de gaz à effet de serre :

$$E_t = (1 - \mu_t)\varphi_t Y_t,$$

où φ_t est exogène.

- **Accumulation** des gaz à effet de serre dans l'atmosphère :

$$\dot{M}_t = \gamma E_t - \delta_m (M_t - M)$$

avec $\gamma > 0$ et $\delta_m > 0$, où M représente la valeur pré-industrielle de M_t.

- **Forçage radiatif** :

$$F_t = \eta \log_2 \frac{M_t}{M} + O_t$$

avec $\eta > 0$, où O_t est exogène.

Équations de la partie climatique II

- Dynamique de la **température** T_t **de l'atmosphère et de la surface des océans** :

$$\dot{T}_t = \frac{1}{R_1}\left[F_t - \lambda T_t - \frac{R_2}{\tau}\left(T_t - T_t'\right)\right]$$

avec $R_1 > 0$, $R_2 > 0$, $\lambda > 0$, et $\tau > 0$.

- Dynamique de la **température** T_t' **du fond des océans** :

$$\dot{T}_t' = \frac{1}{\tau}\left(T_t - T_t'\right).$$

Implications normatives

Externalité de pollution

- À $(K_{j,t}, N_{j,t})$ donnés pour $j \neq i$, une variation de $(K_{i,t}, N_{i,t})$ a à la fois
  - un effet direct sur $Y_{i,t} = \Omega_t K_{i,t}^{\alpha}(A_t N_{i,t})^{1-\alpha}$,
  - un effet indirect sur tous les $Y_{j,t'}$ pour $j \in \{1, ..., I\}$ et $t' \geq t$, via Y_t, E_t, $(M_{t'})_{t' \geq t}$, $(F_{t'})_{t' \geq t}$, $(T_{t'})_{t' \geq t}$ et $(\Omega_{t'})_{t' \geq t}$.

- L'entreprise i ne prend en compte que le premier effet lorsqu'elle choisit $(K_{i,t}, N_{i,t})$ car
  - elle ne prend pas en compte l'effet indirect sur les $Y_{j,t'}$ pour $j \neq i$,
  - l'effet indirect de $(K_{i,t}, N_{i,t})$ sur $Y_{i,t'}$ est négligeable par rapport à l'effet direct de $(K_{i,t'}, N_{i,t'})$ sur $Y_{i,t'}$ (le nombre d'entr. I étant grand).

- Par conséquent, chaque entreprise i choisit $K_{i,t}$ et $N_{i,t}$ pour maximiser son profit instantané en considérant Ω_t comme donné.

- On dit qu'il y a **externalité de pollution** entre les entreprises.

Implications pour la taxe carbone optimale

- Du fait de cette externalité,
  - le premier théorème du bien-être ne s'applique pas,
  - l'équilibre conc. avec $\mu_t = 0$ pour $t \geq 0$ n'est pas socialement optimal,
  - la trajectoire $(\mu_t)_{t \geq 0}$ optimale (i.e. maximisant U_0) est non nulle.
- Les résultats chiffrés concernant la taxe carbone optimale dépendent
  - de la version du modèle,
  - de la calibration de cette version.
- Ils dépendent tout particulièrement de la calibration
  - des dommages causés par le chang. climatique (paramètres θ_1 et θ_2),
  - le taux d'actualisation ("paramètre" r).

Calibration des modèles DICE 1992, 2016 et 2023

	DICE 1992	DICE 2016	DICE 2023
Dommages causés par un réchauffement de 3°C *(en % de production)*	1.3%	2.1%	3.1%
Taux d'actualisation *(en % par an)*			
moyenne entre 2020 et 2050	non disp.	4.7%	4.4%
moyenne entre 2020 et 2100	non disp.	4.2%	3.9%

Sources : Barrage et Nordhaus (2023), Nordhaus (1994, 2018, 2019).

Résultats des modèles DICE 1992, 2016 et 2023

	DICE 1992	**DICE 2016**	**DICE 2023**
Taxe optimale sur le carbone *(en \$ de 2018 par tonne de CO_2)*			
en 2020	18\$	43\$	53\$
en 2050	32\$	105\$	127\$
en 2100	40\$	295\$	non disp.
Réchauffement entre la période pré-industrielle et 2100 *(en ℃)*			
avec taxe courante	3.3℃	4.1℃	3.8℃
avec taxe optimale	3.2℃	3.5℃	2.7℃

Sources : Barrage et Nordhaus (2023), Nordhaus (1994, 2018, 2019).

Sensibilité des résultats à la calibration I

- Nordhaus a, au fil du temps, révisé à la hausse sa calibration des dommages causés par le changement climatique (comme le montre la page 20).
- Néanmoins, cette calibration a été critiquée comme étant trop faible.
- Dans les deux pages qui suivent, on considère une calibration plus élevée, inspirée de Howard et Sterner (2017).
- Cette calibration chiffre les dommages à 9% de la production pour un réchauffement de 3°C (au lieu de 3.1% dans le modèle DICE 2023).
- Dans ces deux pages, on considère également des calibrations alternatives pour le taux d'actualisation, allant de 5% à 1% par an.

Sensibilité des résultats à la calibration II

Taxe carbone optimale *(en $ de 2019 par tonne de CO_2)*
selon la calibration du modèle DICE 2023

Calibration...	**2020**	**2025**	**2050**
...de référence	53	62	127
...avec dommages plus élevés	132	156	293
...avec d'autres taux d'actualisation			
$r = 5\%$ par an	33	39	77
$r = 4\%$ par an	51	60	110
$r = 3\%$ par an	87	103	170
$r = 2\%$ par an	170	200	289
$r = 1\%$ par an	429	505	609

Source : Barrage et Nordhaus (2023).

Sensibilité des résultats à la calibration III

Réchauffement par rapport à la période pré-industrielle *(en ℃)*
avec taxe optimale selon la calibration du modèle DICE 2023

Calibration...	**2020**	**2050**	**2100**	**2150**
...de référence	1.2	1.9	2.7	2.8
...avec dommages plus élevés	1.2	1.8	1.9	1.7
...avec d'autres taux d'actualisation				
$r = 5\%$ par an	1.2	2.0	3.0	3.6
$r = 4\%$ par an	1.2	2.0	2.9	3.3
$r = 3\%$ par an	1.2	1.9	2.6	2.7
$r = 2\%$ par an	1.2	1.9	2.2	2.0
$r = 1\%$ par an	1.2	1.9	1.8	1.6

Source : Barrage et Nordhaus (2023).

Taux d'actualisation

1. Introduction
2. Conditions d'équilibre
3. Implications normatives
4. Taux d'actualisation
   - Calibration du taux d'actualisation
   - Prise en compte de l'incertitude
5. Conclusion
6. Annexe

Rôle du taux d'actualisation

- Les implications normatives chiffrées du modèle DICE sont très sensibles à la calibration du **taux d'actualisation** (ou taux d'intérêt réel r_t).
- Pour une valeur donnée D_t de dommages survenant à la date $t > 0$ (causés par le changement climatique), plus $(r_\tau)_{0 \leq \tau \leq t}$ est faible,
    - plus la valeur actualisée de ces domm. futurs, $D_t e^{-\int_0^t r_\tau d\tau}$, est élevée,
    - plus la trajectoire optimale de la taxe, $(\mu_t)_{0 \leq \tau \leq t}$, sera élevée,
    - plus la trajectoire "optimale" de la température, $(T_t)_{0 \leq \tau \leq t}$, sera faible.

Taux d'actualisation à l'état régulier I

- Avec une fonction d'utilité instantanée CRRA, l'équation d'Euler s'écrit

$$\frac{\dot{c}_t}{c_t} = \frac{r_t - \rho}{\theta}.$$

- On admet que le modèle DICE a un état régulier dans lequel la consommation par tête c_t croît au taux de progrès technique g, comme le modèle de CKR (chapitre 2).

- À cet état régulier, le taux d'actualisation (i.e. la valeur de r_t) est donc

$$r = \underbrace{\rho}_{\substack{\text{effet}\\ \text{d'impatience}}} + \underbrace{\theta g}_{\substack{\text{effet}\\ \text{de richesse}}}.$$

Taux d'actualisation à l'état régulier II

- Le taux d'actualisation r dépend positivement
  - du **taux de préférence pour le présent** ρ : plus on est impatient, ...
  - du **taux de croissance de l'économie** g : plus on consommera dans le futur relativement au présent, plus l'utilité marginale à consommer sera faible par rapport à sa valeur présente, ...
  - de **l'inverse de l'élasticité de substitution intertemporelle** θ : plus θ est grand, plus l'utilité marginale à consommer $\left(c_t^{-\theta}\right)$ est décroissante en la consommation (c_t), plus l'utilité marginale à consommer sera faible dans le futur par rapport à sa valeur présente (pour $g > 0$), ...

...mieux il vaut consommer aujourd'hui que demain.

Exemples de calibration de r

	ρ (% par an)	g (% par an)	θ	**taux d'actualisation** (% par an)
Weitzman (2007)	2%	2%	2	**6%**
Nordhaus (2007)	1.5%	2%	2	**5.5%**
Nordhaus (2008)	1%	2%	2	**5%**
Gollier (2013)	0%	2%	2	**4%**
Stern (2007)	0.1%	1.3%	1	**1.4%**

$\hookrightarrow$ Stern (2007) recommande une taxation nettement plus élevée que Nordhaus (2007) parce qu'il considère un taux d'actualisation nettement plus faible.

Calibration de ρ I

- **Approche descriptive** : Nordhaus (2007) calibre ρ à partir de données macroéconomiques et financières (taux d'intérêt réel).

- **Approche prescriptive** : Stern (2007) considère que ρ représente
  - le poids de l'utilité des générations présentes par rapport à celle des générations futures (dans la fonction d'utilité sociale),
  - et non le poids de l'utilité présente par rapport à l'utilité future pour une même génération (dans la fonction d'utilité individuelle)

  (on reprendra cette distinction dans le modèle à générations imbriquées, au chapitre 7).

- L'approche prescriptive milite pour la calibration $\rho = 0$: il n'y a pas de raison de moins pondérer l'utilité des générations futures que celle des générations présentes (dans la fonction d'utilité sociale).

Calibration de ρ II

- La calibration de ρ doit toutefois respecter la contrainte

$$\rho - n > (1 - \theta)\, g,$$

pour que l'utilité intertemporelle des ménages prenne une valeur finie à l'état régulier (comme vu au chapitre 2).

- Pour $\theta = 1$ (valeur choisie par Stern, 2007) et $n = 0$ (valeur choisie par Stern, 2007, pour l'après-2200), cette contrainte se réécrit $\rho > 0$.

- Stern (2007) choisit la valeur $\rho = 0.1\%$ par an, qu'il justifie par un risque (exogène) d'extinction de l'espèce humaine de 0.1% par an.

Prise en compte de l'incertitude I

- L'expression $r = \rho + \theta g$ a été obtenue en supposant l'absence d'incertitude ; or l'avenir est évidemment incertain, d'autant plus avec le chang. climatique.

- En présence d'**incertitude**, on considère l'utilité intertemporelle suivante ("théorie de l'**utilité espérée**" de Morgenstern et Von Neumann, 1953) :

$$U_0 \equiv \mathbb{E}_0 \left\{ \int_0^{+\infty} e^{-\rho t} u(c_t) dt \right\},$$

  où $\mathbb{E}_0\{.\}$ représente l'opérateur d'**espérance** conditionnelle à l'ensemble d'information de la date 0.

- Pour simplifier l'analyse, on a fixé $n = 0$ (ce qui ne modifie pas les résultats).

- Supposons le taux d'intérêt réel constant, et notons r sa valeur.

Prise en compte de l'incertitude II

- Le ménage a la possibilité de dévier de son choix optimal (c_0, c_1) en
  - prêtant une quantité infinitésimale supplément. de biens ds à la date 0,
  - consommant la quantité infinitésimale suppl. de biens $e^r ds$ à la date 1.

- La variation d'utilité intertemporelle ΔU_0 qu'entraînerait cette déviation est

$$\Delta U_0 = -u'(c_0) ds + e^{-\rho} \mathbb{E}_0 \{u'(c_1)\} e^r ds = \left[-u'(c_0) + e^{r-\rho} \mathbb{E}_0 \{u'(c_1)\} \right] ds.$$

- Puisque (c_0, c_1) est le choix optimal du ménage, on a $\Delta U_0 = 0$:
  - si $\Delta U_0 > 0$, alors le ménage préférerait dévier dans le sens ci-dessus,
  - si $\Delta U_0 < 0$, alors le ménage préférerait dévier dans le sens opposé (emprunter davantage à la date 0 et consommer moins à la date 1).

- On obtient donc l'**équation d'Euler** suivante entre les dates 0 et 1:

$$u'(c_0) = e^{r-\rho} \mathbb{E}_0 \{u'(c_1)\}.$$

Prise en compte de l'incertitude III

- Dans le cas particulier suivant :
  - **absence d'incertitude** : $\mathbb{E}_0\{u'(c_1)\} = u'(c_1)$,
  - fonction d'utilité instantanée CRRA : $u'(c_t) = c_t^{-\theta}$,
  - taux de croissance de la consommation par tête constant : $c_1 = e^g c_0$,

  cette équation d'Euler se réécrit $c_0^{-\theta} = e^{r-\rho} c_0^{-\theta} e^{-\theta g}$, c'est-à-dire

$$r = \rho + \theta g.$$

- Si u' est strictement convexe, alors, toutes choses égales par ailleurs, plus l'incertitude entourant c_1 (i.e. la variance de c_1) est grande,
  - plus $\mathbb{E}_0\{u'(c_1)\}$ est grande (conséquence d'une version généralisée de l'inégalité de Jensen),
  - plus c_0 et/ou r sont petits (conséquence de l'équation d'Euler), i.e. plus les ménages souhaitent épargner (**épargne de précaution**).

Prise en compte de l'incertitude IV

- La fonction u' étant positive et strictement décroissante, elle est strictement convexe au moins localement.

- Dans le cas CRRA ($u'(c_t) = c_t^{-\theta}$), u' est strictement convexe globalement : $u'''(c_t) = \theta(\theta+1)c_t^{-\theta-2} > 0$ pour tout $c_t > 0$.

- Une mesure de la convexité de u' est le **coefficient de prudence relative** (Kimball, 1990) :

$$p(c_t) \equiv \frac{-c_t u'''(c_t)}{u''(c_t)}.$$

- Dans le cas CRRA, $p(c_t)$ est indépendant de c_t et égal à

$$p(c_t) = \theta + 1.$$

Prise en compte de l'incertitude V

- On considère désormais le cas particulier suivant :
  - fonction d'utilité instantanée CRRA : $u'(c_t) = c_t^{-\theta}$,
  - taux de croissance de la consommation par tête entre les dates 0 et 1 suivant une loi normale :

$$c_1 = e^{\tilde{g}} c_0 \quad \text{avec} \quad \tilde{g} \sim \mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right),$$

  où $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$.

- L'équation d'Euler se réécrit alors $c_0^{-\theta} = e^{r-\rho} c_0^{-\theta} \mathbb{E}\{e^{-\theta\tilde{g}}\}$, c'est-à-dire

$$r = \rho - \ln \mathbb{E}\{e^{-\theta\tilde{g}}\} = \rho + \theta\left(\mu - \frac{\theta}{2}\sigma^2\right),$$

où la dernière égalité découle du résultat $\mathbb{E}\{e^{-\theta\tilde{g}}\} = e^{-\theta\left(\mu - \frac{\theta}{2}\sigma^2\right)}$ démontré en annexe.

Prise en compte de l'incertitude VI

- Notons g le taux de croissance de *l'espérance* de la consommation par tête entre les dates 0 et 1: $\mathbb{E}\{c_1\} = e^g c_0$ et donc

$$g = \ln \frac{\mathbb{E}_0\{c_1\}}{c_0} = \ln \frac{\mathbb{E}_0\{e^{\tilde{g}} c_0\}}{c_0} = \ln \mathbb{E}\{e^{\tilde{g}}\} = \mu + \frac{1}{2}\sigma^2,$$

où la dernière égalité découle du résultat $\mathbb{E}\{e^{\tilde{g}}\} = e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2}$ démontré en annexe.

- On peut donc réécrire l'équation d'Euler comme

$$r = \underbrace{\rho}_{\substack{\text{effet} \\ \text{d'impatience}}} + \underbrace{\theta g}_{\substack{\text{effet} \\ \text{de richesse}}} - \underbrace{\frac{1}{2}\theta\left(\theta + 1\right)\sigma^2}_{\substack{\text{effet} \\ \text{de précaution}}}.$$

Prise en compte de l'incertitude VII

- L'**effet de précaution** est égal à la moitié du produit
  - du coefficient d'aversion relative pour le risque (θ),
  - du coefficient de prudence relative ($\theta + 1$),
  - de la variance du taux de croissance de l'économie (σ^2).

- Ce même résultat s'obtient, cette fois-ci comme une approximation du second ordre, lorsqu'on relâche les hypothèses d'utilité CRRA et de loi normale.

- En considérant $\sigma = 3.6\%$ (écart-type du taux de croissance annuel de la consommation par tête aux États-Unis), Gollier (2013) obtient un effet de précaution de 0.4% par an et donc un taux d'actualisation de 3.6% par an.

- Gollier (2013) montre que l'effet de précaution peut être plus important, et donc le taux d'actualisation plus faible, à **long terme** et/ou en présence de **risques catastrophiques**.

Conclusion

Principales prédictions du modèle

- L'équilibre concurrentiel sous laisser-faire n'est pas socialement optimal à cause d'une **externalité de pollution**.

- Toutes choses égales par ailleurs, la **taxe carbone optimale** dépend
  - positivement des dommages écon. causés par le chang. climatique,
  - négativement du **taux d'actualisation**.

- En environnement **certain**, le taux d'actualisation (r) est la somme
  - d'un **effet d'impatience** (ρ),
  - d'un **effet de richesse** (θg).

- L'environ. **incertain** (loi normale pour le taux de croissance) réduit le taux d'actualisation (r) à court terme d'un **effet de précaution** ($\theta(\theta+1)\sigma^2/2$).

Une limite du modèle

- Comme dans le modèle de CKR (chapitre 2), **le taux de progrès technique g est exogène.**
- Or ce taux de progrès technique est un déterminant clef du taux d'actualisation et donc de la taxe carbone optimale dans le modèle DICE.
- Si le taux de progrès technique était endogène,
  - y aurait-il des politiques économiques capables de l'influencer ?
  - quel rôle devraient-elles jouer ?

$\hookrightarrow$ Les chapitres 4 et 5 ("**théories de la croissance endogène**") endogénéisent le taux de progrès technique.

Annexe

Calcul de $\mathbb{E}\{e^{-\varphi\tilde{g}}\}$ lorsque $\tilde{g} \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ I

- Pour tout $\mu^* \in \mathbb{R}$ et $\sigma^* \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$, notons

$$x \mapsto f(x; \mu^*, \sigma^*) \equiv \frac{1}{\sigma^* \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu^*}{\sigma^*}\right)^2}$$

la densité de probabilité de la loi $\mathcal{N}(\mu^*, \sigma^{*2})$.

- Pour tout $\mu^* \in \mathbb{R}$ et $\sigma^* \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$, comme $f(x; \mu^*, \sigma^*)$ est une densité, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x; \mu^*, \sigma^*) dx = 1.$$

Calcul de $\mathbb{E}\{e^{-\varphi\tilde{g}}\}$ lorsque $\tilde{g} \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ II

- Si $\tilde{g} \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, alors pour tout $\varphi \in \mathbb{R}$,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\{e^{-\varphi\tilde{g}}\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\varphi x} f(x; \mu, \sigma)\, dx \\
&= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\varphi x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx \\
&= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\varphi\left(\mu-\frac{\varphi}{2}\sigma^2\right)} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{x-\left(\mu-\varphi\sigma^2\right)}{\sigma}\right]^2} dx \\
&= e^{-\varphi\left(\mu-\frac{\varphi}{2}\sigma^2\right)} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x; \mu-\varphi\sigma^2, \sigma\right) dx \\
&= e^{-\varphi\left(\mu-\frac{\varphi}{2}\sigma^2\right)}.
\end{aligned}
$$

- En remplaçant φ par θ et -1 respectivement, on en déduit les résultats mentionnés aux pages 36 et 37.