
TD n° 2 : Chaînes de Markov

Exercices et problèmes portant sur tout le chapitre sur les chaînes de Markov.

EXERCICE 1. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ la réalisation d'un dé à 6 faces non biaisé au n -ième tirage (on supposera les tirages indépendants). On note Y_n le maximum parmi les n premières réalisations :

$$Y_n = \max_{1 \leq i \leq n} X_i$$

et Z_n le nombre de 6 parmi les n premières réalisations :

$$Z_n = \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{6\}}(X_i).$$

- 1) Montrer que (Y_n) et (Z_n) sont des chaînes de Markov, dont on précisera la matrice de transition.
- 2) Représenter graphiquement ces chaînes et déterminer les classes d'états, et les états qui sont récurrents/transients.
- 3) Montrer qu'il existe une unique mesure invariante pour (Y_n) , que l'on précisera.

EXERCICE 2. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une chaîne de Markov homogène de matrice de transition P .

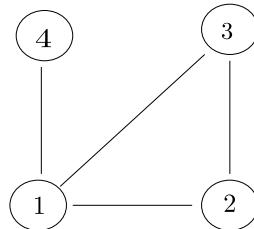
- 1) Dans chacun des cas ci-dessous, on demande de déterminer si il y a des états absorbants, quelles sont les classes de communication de la chaîne, et d'étudier la périodicité et la récurrence (ou la transience) des états.

a) $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ b) $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ c) $P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ d) $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

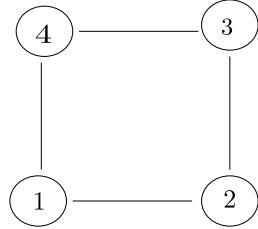
e) $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$

- 2) Pour chaque matrice P , étudier l'existence et l'unicité d'éventuelle(s) probabilité(s) invariante(s).

EXERCICE 3. Marche aléatoire sur un graphe fini. Un graphe fini \mathcal{G} est un ensemble fini V muni d'un ensemble d'arêtes E : $\mathcal{G} = (V, E)$. La convention est que deux points de V , v et v' , sont reliés si et seulement si la paire $\{v, v'\} \in E$. Par exemple, étant donné $V = \{1, 2, 3, 4\}$ et $E = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}\}$, le graphe G est comme suit :



alors que si $E = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 1\}\}$, le graphe G est :



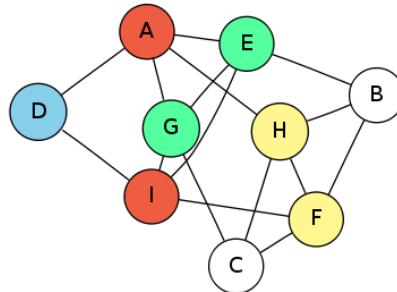
(noter qu'ici les graphes sont non-orientés, $\{1, 4\} = \{4, 1\}$; il est possible de définir des graphes orientés en remplaçant les paires de points par des couples mais ça ne sert à rien dans cet exercice).

Pour chaque $x \in V$ on note $V(x)$ l'ensemble des points connectés à x (les “voisins” de x , x non compris) et $d(x) = \text{card}[V(x)]$ (le “degré” de x).

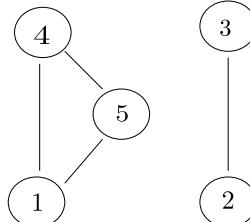
La marche aléatoire sur le graphe fini \mathcal{G} est une chaîne de Markov (X_t) dont l'espace d'états est V est dont la matrice de transition P est donnée par

$$P(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2d(x)} & \text{si } y \in V(x), \\ 1 - \sum_{y \in V(x)} p(x, y) & \text{si } x = y, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- 1) Ecrire la matrice de transition pour les deux graphes donnés en exemple.
- 2) En général, est-ce que (X_t) est irréductible ? Apériodique ?
- 3) On définit une loi π par $\pi(x) = d(x)/(2M)$ où $M = \text{card}(E)$. Montrer que π est une mesure invariante pour P .
- 4) Voici un graphe trouvé au hasard en tapant “graphe fini” sur Google Images. Déterminer la probabilité de long terme que la marche aléatoire sur ce graphe soit dans l'état D ? Dans l'état C ?



- 5) On considère le graphe :



- (a) Déterminer E pour ce graphe.
- (b) Déterminer toutes les probabilités invariantes pour ce graphe.
- (c) A l'aide d'exemple, montrer que la loi de X_n dépend de la loi de X_0 même lorsque $n \rightarrow \infty$.

- (d) Déterminer la loi asymptotique de X_n comme fonction de la loi initiale μ .

EXERCICE 4. Gestion de stocks. Batman possède N costumes. Chaque matin à 8 :00, il prend un costume dans sa penderie (si il y en a un), va sauver tout un tas de gens et revient chez lui à 17 :00. A ce moment là, le costume est toujours très sale et il le met dans le panier de linge sale. En revanche, si le matin, il n'y a plus de costume dans la penderie, il ne peut pas travailler et reste chez lui à regarder la télé et manger des pizzas trop caloriques.

Chaque soir à 21 :00, Alfred décide ou non de faire une lessive avec une probabilité fixe $p \in]0, 1[$: il prend tous les costumes du panier, les lave et les remet en place dans la penderie de Batman avant 23 :00 (la décision d'Alfred ne dépend ni de l'état de remplissage du panier, ni de sa décision des jours précédents mais seulement de son humeur que l'on peut considérer comme aléatoire).

On note Y_n le nombre de costumes dans la penderie lors du jour n , avant que Batman ne regarde dans sa penderie (pour fixer les idées, disons à 7 :00).

- 1) Modéliser (Y_n) comme une chaîne de Markov, donner son espace d'états, sa matrice de transition et une représentation graphique.
- 2) Démontrer qu'il n'y a qu'une seule probabilité invariante π et la déterminer.
- 3) Quelle est la probabilité limite p_{repos} que Batman ne puisse pas travailler (i.e., la limite de $\mathbb{P}(Y_n = 0)$ quand $n \rightarrow \infty$) ?
- 4) Quelle est la durée moyenne entre deux jours de repos ?
- 5) Soucieux de la sécurité de ses concitoyens, Batman veut que la probabilité p_{repos} reste au dessous d'un seuil α . Il n'a aucun contrôle sur Alfred (la probabilité p) mais il peut toujours acheter plus de costumes (donc il choisit N). Déterminer le nombre minimal de costumes N tel que $p_{\text{repos}} \leq \alpha$. Application numérique : $(\alpha, p) = (0.05, 0.1)$ et $(\alpha, p) = (0.05, 0.7)$.

EXERCICE 5. Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de v.a. à valeurs dans \mathbb{N} i.i.d. de loi μ . Pour tout n entier on pose $X_n = \{U_0, \dots, U_n\}$. (Les X_n sont des v.a. à valeurs dans l'ensemble E (dénombrable) des parties finies de \mathbb{N} , évidemment muni de la tribu $\mathcal{P}(E)$.)

- 1) Montrer que (X_n) est une chaîne de Markov et donner son noyau de transition P .
- 2) On suppose dorénavant que μ est la probabilité uniforme sur $\{1, \dots, N\}$. On pose $Y_n = \text{card}(X_n)$. Montrer que (Y_n) est une chaîne de Markov et donner sa matrice de transition Q .
- 3) Montrer que la suite (Y_n) converge p.s. vers N .
- 4) Pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$ on définit :

$$\tau_i := \inf\{n \in \mathbb{N} : Y_n = i\}.$$

Montrer que les τ_i sont des temps d'arrêt p.s. finis, puis, à l'aide de la propriété de Markov forte, que les v.a. $\tau_{i+1} - \tau_i$ ($1 \leq i \leq N - 1$) sont indépendantes et de lois géométriques :

$$\mathbb{P}(\tau_{i+1} - \tau_i = k) = \left(1 - \frac{i}{N}\right) \left(\frac{i}{N}\right)^{k-1} \text{ pour } k \geq 1.$$

- 5) On fait maintenant tendre N vers l'infini. Montrer que $\mathbb{E}(\tau_N)$ est équivalent à $N \log(N)$ et que $\text{Var}(\tau_N)$ est équivalent à cN^2 où c est une constante strictement positive.
- 6) En déduire que $\tau_N / (N \log N)$ converge en probabilité vers 1 quand N tend vers l'infini.
- 7) On définit maintenant $Z_n = \max(X_n)$. Montrer que (Z_n) est encore une chaîne de Markov et donner sa matrice de transition R .

- 8) Montrer que la suite (Z_n) converge p.s. vers N .
- 9) Quelle est ici la loi de $\tau_N = \inf\{n : Z_n = N\}$?
- 10) Montrer que lorsque N tend vers l'infini, τ_N/N converge en loi vers une loi exponentielle de paramètre 1.

EXERCICE 6. Ruine du joueur. On considère un jeu répété entre deux joueurs. Chaque joueur possède une richesse initiale de N euros. A chaque tour de jeu, le perdant donne 1 euro au gagnant. La partie s'arrête lorsqu'un des joueurs n'a plus d'euros en réserve, et alors l'autre joueur garde les $2N$ euros. On suppose que la probabilité que le joueur 1 gagne un tour de jeu est p , et la probabilité que le joueur 2 la gagne est $1 - p$. Par exemple, si le jeu est un pile ou face avec une pièce équilibrée, $p = 1/2$, mais pour des jeux d'adresse, si 1 est plus adroit que 2, $p > 1/2$. On modélise ce jeu par une chaîne de Markov $(X_n)_{n \geq 0}$ où $X_n \in \{0, 1, \dots, 2N\}$ est la richesse du joueur 1 après n tours de jeux, et la loi initiale est donnée par $X_0 = N$. (On rappelle la notation du cours, \mathbb{P}_j est la loi de la chaîne si $X_0 = j$).

- 1) Ecrire la matrice de transition P de $(X_n)_{n \geq 0}$.
 - 2) Est-ce que (X_n) est irréductible ?
 - 3) On note $\rho_j = \mathbb{P}_j(1 \text{ gagne la partie}) = \mathbb{P}_j(\exists n : X_n = 2N)$. Démontrer que pour tout $0 < j < 2N$
- $$\rho_j = (1 - p)\rho_{j-1} + p\rho_{j+1}.$$
- 4) En déduire une forme explicite pour les ρ_j , et en particulier pour ρ_0 , la probabilité que le joueur 1 gagne la partie.

EXERCICE 7. Le modèle d'Ehrenfest est un modèle simplifié de diffusion de particules à travers une paroi poreuse, proposé par Tatiana et Paul Ehrenfest en 1907. Ce modèle a été aussi repris et étendu en économie et en sociologie pour modéliser des phénomènes de diffusion de technologies.

On suppose que N particules sont réparties dans une urne à deux compartiments A et B séparés par une paroi poreuse. Le système évolue de la manière suivante. A chaque instant n , une particule au hasard passe dans le compartiment voisin, c'est à dire, si il y avait i particules dans A à l'instant n , il y a une particule de moins dans le compartiment A avec la probabilité i/N ou une de plus avec la probabilité $\frac{N-i}{N}$, à l'instant $n+1$. On note X_n le nombre de particules dans A à chaque instant partant de l'état initial $X_0 = x_0$.

- 1) Montrer que (X_n) est une chaîne de Markov, décrire l'espace d'état E . Déterminer sa matrice de transition P .
- 2) Pour $N = 2$, représenter le graphe de cette chaîne de Markov. Y-a-t-il des éléments absorbants ? Est elle irréductible ? Récurrente positive ? Périodique ? Existe-t-il une mesure invariante ? Si oui, l'expliciter. La chaîne est-elle ergodique ? (On dit qu'un chaîne est ergodique si elle vérifie les hypothèses du théorème ergodique, ie : irréductible récurrente positive).
- 3) Répondre très rapidement aux mêmes questions pour $N = 3$.
- 4) De manière générale, caractériser la mesure invariante pour N quelconque. Comment s'interprète-t-elle ?
- 5) Montrer que ce processus markovien est reversible (i.e. il existe une fonction $h > 0$ telle que $h(i)P(i,j) = h(j)P(j,i)$ pour tout (i,j) dans E^2).
- 6) Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$.
- 7) Sachant que l'on est parti d'un état initial où il y avait K atomes dans A et autant dans B ($N = 2K$), quel est le temps moyen $t_{0,N}$ pour revenir dans cet état ? Donner la limite de $N^{-1/2}t_{0,N}$ quand le nombre de particules N tend vers l'infini.

EXERCICE 8. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une chaîne de Markov sur E au plus dénombrable, caractérisée par sa loi initiale δ_{x_0} (i.e. $X_0 = x_0$ fixé) et sa matrice de transition P .

- 1) Montrer que $\mathbb{E}[f(X_N)] = P^N f(x_0)$.
- 2) On pose $u(N, x) = f(x)$ et, pour n décroissant de N vers 0,

$$u(n, x) = \sum_{y \in E} P(x, y) u(n+1, y) = P u(n+1, \cdot)(x).$$

Montrer que $\{u(n, X_n), n \geq 0\}$ est une martingale pour la filtration naturelle associée à $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

- 3) En déduire que $u(0, x_0) = \mathbb{E}[u(n, X_n)] = \mathbb{E}[f(X_N)]$.
- 4) Proposer un algorithme récursif simple pour calculer $\mathbb{E}[f(S_N)]$ pour (S_n) une marche aléatoire symétrique partant de 0.

EXERCICE 9. Soient $(\varepsilon_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées à valeurs dans \mathbb{Z} . Démontrer que (X_n) définie par $X_n = \prod_{i=1}^n \varepsilon_i$ est une chaîne de Markov (homogène). Que dire de l'état 0 lorsque $\mathbb{P}(\varepsilon_i = 0) > 0$? Dans le cas contraire, montrer que (X_n) ne peut pas admettre de loi stationnaire.