



## Introduction aux processus

Deuxième année

2023-2024

**Ecrit. Deux heures. Pas de calculatrice. Seul document autorisé : une feuille manuscrite remplie par l'étudiant.e**

Nicolas Chopin

Justifiez toutes vos réponses. Les quatre exercices sont indépendants.

### 1 Chaîne de Markov sur $\mathbb{N}$ (5 points)

Soit  $p \in ]0, 1/2[$  et  $q = 1/2 - p$ . On considère une chaîne de Markov sur  $\mathbb{N}$  de matrice de transition  $P$  telle que :

- $P(i, i+1) = p$  pour tout  $i \geq 0$  ;
- $P(i, i-1) = 1/2$  pour tout  $i > 0$  ;
- $P(i, i) = q$  pour tout  $i > 0$  ;
- $P(0, 0) = 1 - p$ .

1. Montrer que cette chaîne est irréductible.
2. Donner les équations vérifiées par une éventuelle loi invariante  $\pi$  pour cette chaîne de Markov.
3. Montrer que  $\pi_i = c\alpha^i$  vérifie ces équations, pour des valeurs  $c > 0$ , et  $\alpha \in [0, 1]$  que vous déterminerez.
4. Dédurre de la question précédente le caractère récurrent positif de la chaîne. Que peut-on dire dans le cas  $p = 1/2$  ?

### 2 Mouvement brownien (2 points)

1. Donner la loi de  $W_{t+h} - W_t$  pour  $(W_t)$  mouvement brownien, pour  $h, t > 0$ , et expliquer pourquoi (informellement, et brièvement) la réalisation d'un mouvement brownien ne peut pas être dérivable.

### 3 Martingales (8 points)

On admettra le résultat suivant : si  $X \sim N(0, \sigma^2)$ , alors  $\mathbb{E}(e^X) = \exp(\sigma^2/2)$ .

Soit  $X_1, X_2, \dots$  une suite de variables aléatoires IID (indépendantes et identiquement distribuées) de loi  $N(0, \sigma^2)$ , soit  $S_0 = 0$ ,  $S_t = X_1 + \dots + X_t$  pour  $t \geq 1$ , et soit

$$M_t = \exp \left\{ S_t - \frac{t\sigma^2}{2} \right\}$$

pour  $t \geq 0$ .

1. Montrer que  $(M_t)$  est une martingale (pour une filtration que l'on précisera).
2. Déterminer  $\mathbb{E}[M_t]$  et  $E[M_t^2]$  (pour tout  $t \geq 0$ ).
3. Montrer que  $(M_t)$  converge p.s. vers une limite  $M_\infty$ .
4. Déterminer la loi de  $M_\infty$ .
5. En déduire que  $(M_t)$  n'est pas bornée dans  $\mathcal{L}_2$ .

### 4 Chaîne de Markov dans $\{0, 1\}^d$ (8 points)

Soit  $E_d = \{0, 1\}^d$ , l'espace des "mots binaires" de longueur  $d$ ,  $d \geq 2$ ,  $\psi : E_d \rightarrow \mathbb{R}^+$  une fonction arbitraire,

$$\pi(x) = \psi(x)/Z$$

pour  $x = (x_1, \dots, x_d) \in E_d$ , et  $Z > 0$  constante choisie de manière à ce que  $\pi$  soit une densité de probabilité sur  $E_d$ ; soit  $Z = \sum_{x \in E_d} \psi(x)$ .

1. Pour  $X$  variable de loi  $\pi$ , montrer que la loi conditionnelle de la composante  $X_i$  sachant  $X_j = x_j$  pour tout  $j \neq i$  est une loi de Bernoulli dont on précisera le paramètre. (Vous pouvez faire les calculs pour  $d = 2$  pour simplifier les notations, puis déduire la formule générale pour tout  $d$  sans justification supplémentaire.)
2. Soit  $P_i$  ( $i = 1, \dots, d$ ) la matrice de transition qui correspond à la chaîne de Markov suivante (dans  $E_d$ ) : si  $X_t = x$ , alors  $X_{t+1}$  est le vecteur obtenu en prenant  $x$ , et en remplaçant sa  $i$ -ème composante par un tirage selon la loi conditionnelle de la question précédente.

Montrer que  $\pi$  est la loi invariante de  $P_i$  (pour tout  $i = 1, \dots, d$ ). (A nouveau, on pourra présenter les calculs dans le cas  $d = 2$  pour simplifier les notations.) Quelle est alors la loi invariante de  $P = P_1 \times \dots \times P_d$ ?

3. On suppose  $\psi(x) > 0$  pour tout  $x \in E_d$ . Montrer que  $P$  est irréductible. Peut-on en déduire qu'une chaîne de Markov de matrice de transition  $P$  est récurrente positive?
4. Donner un contre-exemple (cas où  $P$  n'est pas irréductible) si on ne suppose pas que  $\psi(x) > 0$  pour tout  $x \in E_d$ .
5. Pour  $d = 2$ , montrer que  $P$  n'est pas réversible en général.

Indication : calculer la probabilité de passer de l'état  $(0, 0)$  à l'état  $(1, 1)$ , par exemple, et montrer que  $\psi(1, 0) = \psi(0, 1)$  est une condition nécessaire pour que  $P$  soit réversible.

6. (bonus, pour celles et ceux qui ont fait tout le reste de l'examen)

Quel est le lien, à votre avis, entre cet exercice et l'algorithme de Metropolis-Hastings vu en cours ?