Autour du modèle de Cass-Koopmans-Ramsey (2)

1 Problème : Croissance et ressources non renouvelables

Ce problème est extrait de l'examen final de l'année 2016-2017.

Le but de ce problème est d'introduire le concept de ressources non renouvelables (et, dans une moindre mesure, celui de changement climatique) dans le modèle de croissance exogène de Cass-Koopmans-Ramsey et d'en étudier les conséquences de nature positive et normative.

On peut répondre à chaque question sans avoir préalablement répondu aux questions qui la précèdent, simplement en admettant les résultats donnés dans ces questions précédentes.

Le temps est continu, indicé par $t \geq 0$. A chaque intervalle de temps $[t, t + dt]$, où dt est infiniment petit, une quantité agrégée $Y_t dt$ de biens est produite, à l'aide de la technologie suivante :

$$Y_t = F(K_t, R_t, L),$$

où K_t est le stock de capital agrégé à la date t, R_t est le *flux* agrégé de ressources non renouvelables détruites dans la production (de sorte que $R_t dt$ est la quantité agrégée de ressources non renouvelables détruites pour produire $Y_t dt$ dans l'intervalle de temps $[t, t + dt]$), et L est le flux de travail agrégé (supposé constant dans le temps et égal à la taille de la population). Le stock de capital initial est exogène et strictement positif ($K_0 > 0$). La fonction de production F est strictement croissante en chacun de ses arguments. Le bien produit est utilisé pour la consommation et l'investissement. On note C_t le flux de consommation agrégé et δ le taux de dépréciation du capital ($\delta \geq 0$). Le *stock* initial de ressource non renouvelable, noté S_0, est exogène, connu, et strictement positif ($S_0 > 0$).

1.1 Sentiers réalisables et dynamiquement efficients

Question 1 On dit qu'un sentier de croissance $(C_t, K_t, R_t)_{t \geq 0}$ issu de (K_0, S_0) est *réalisable* lorsque

$$\forall t \geq 0,\ C_t \geq 0,\ K_t \geq 0,\ R_t \geq 0, \tag{1}$$

$$\forall t \geq 0,\ \dot{K}_t = F(K_t, R_t, L) - C_t - \delta K_t, \tag{2}$$

$$\int_0^{+\infty} R_t dt \leq S_0. \tag{3}$$

Commenter très brièvement les conditions (1), (2), et (3) (une phrase suffit pour chaque condition).

La première condition stipule que le stock de capital et les flux de consommation et de ressources non renouvelables doivent être positifs ou nuls. La deuxième condition est la contrainte de ressources de biens (dans le cadre centralisé) ou la condition d'équilibre du marché des biens (dans le cadre décentralisé). La troisième condition stipule que la quantité de ressources non renouvelables utilisée entre les dates 0 et $+\infty$ ne doit pas excéder le stock de ressource non renouvelable disponible à la date 0.

Question 2 On dit qu'un sentier de croissance réalisable $(C_t, K_t, R_t)_{t\geq 0}$ issu de (K_0, S_0) est *dynamiquement efficient* lorsqu'il n'existe pas de sentier de croissance réalisable $(\widetilde{C}_t, \widetilde{K}_t,\ \widetilde{R}_t)_{t\geq 0}$ issu des mêmes conditions initiales et tel que $\forall t \geq 0,\ \widetilde{C}_t \geq C_t$ et $\exists T \geq 0,\ \widetilde{C}_T > C_T$. Montrer, sans faire de calcul, qu'un sentier de croissance dynamiquement efficient $(C_t^*, K_t^*, R_t^*)_{t\geq 0}$ issu de (K_0, S_0) satisfait l'équation

$$S_0 = \min_{(K_t)_{t>0},(R_t)_{t\geq 0}} \int_0^{+\infty} R_t dt,$$

où la minimisation se fait pour K_0 et $(C_t^*)_{t\geq 0}$ donnés sous les contraintes

$$\forall t \geq 0,\ K_t \geq 0,\ R_t \geq 0,$$

$$\forall t \geq 0,\ \dot{K}_t = F(K_t, R_t, L) - C_t^* - \delta K_t.$$

Notons M le minimum en question. Si on avait $S_0 < M$, alors le sentier ne serait pas réalisable car il violerait la troisième condition de la question précédente. Si on avait $S_0 > M$, alors on pourrait, à au moins une date t, augmenter R_t et donc la production Y_t, et utiliser ce surcroît de production pour augmenter C_t sans modifier $(K_t)_{t\geq 0}$, donc le sentier ne serait pas dynamiquement efficient. Donc $S_0 = M$.

Question 3 Résoudre le problème d'optimisation de la question précédente (en notant qu'il rentre dans le cas général vu en cours, avec une variable d'état, une variable de contrôle, et un "taux de préférence pour le présent" égal à zéro) pour obtenir la *condition nécessaire d'efficience dynamique* suivante, appelée "règle d'Hotelling" [1] :

$$\frac{\dot{F}_R(K_t, R_t, L)}{F_R(K_t, R_t, L)} = F_K(K_t, R_t, L) - \delta, \tag{4}$$

où F_K (respectivement F_R) représente la dérivée première de F par rapport à K_t (respectivement R_t).

Le problème d'optimisation de la question précédente rentre dans le cas général vu en cours. Le Hamiltonien est

$$H(R_t, K_t, \lambda_t, t) \equiv R_t + \lambda_t \left[F(K_t, R_t, L) - C_t^* - \delta K_t\right].$$

La condition du premier ordre sur la variable de contrôle et la condition d'évolution de la co-variable d'état sont

$$\begin{aligned} 0 &= 1 + \lambda_t F_R(K_t, R_t, L), \\ \dot{\lambda}_t &= -\lambda_t \left[F_K(K_t, R_t, L) - \delta\right]. \end{aligned}$$

On en déduit aisément la règle d'Hotelling.

Question 4 Dans cette question, on considère une version décentralisée de cette économie dans laquelle (i) les ménages détiennent le capital et les ressources non renouvelables, et (ii) tous les marchés sont en concurrence pure et parfaite. Interpréter $F_K(K_t, R_t, L)$ et $F_R(K_t, R_t, L)$ comme des prix et la règle d'Hotelling (4) comme une condition d'indifférence entre deux types d'actifs. Quelle conséquence cette règle a-t-elle sur l'évolution du prix des ressources non renouvelables au cours du temps ?

Dans le cadre décentralisé et concurrentiel, F_K représente le prix de location (exprimé en termes de biens) d'une unité de capital et F_R le prix de vente (exprimé en termes de biens) d'une unité de ressource non renouvelable. Le ménage souhaitant épargner une unité de bien à la date t a au moins deux options : 1/ le louer comme capital aux entreprises, ce qui lui rapporte $1 - \delta dt + F_K dt$ à la date $t + dt$; 2/ acheter $\frac{1}{F_R(t)}$ unités de ressource non renouvelable à la date t et les revendre au prix $F_R(t + dt)$ à la date $t + dt$, ce qui lui rapporte $\frac{F_R(t+dt)}{F_R(t)} = 1 + \frac{\dot{F}_R}{F_R} dt$ à la date $t + dt$. A l'équilibre, il doit être indifférent entre ces deux options, d'où la règle d'Hotelling : le taux de rendement des titres de propriété sur la ressource non renouvelable est égal au taux de rendement des titres de propriété sur le capital.

Dans la mesure où $F_K > \delta$, cette règle implique que le prix des ressources non renouvelables augmente au cours du temps, au fur et à mesure que ces ressources se raréfient.

1. Cf Hotelling, H., 1931, "The Economics of Exhaustible Resources", *Journal of Political Economy*, 39(2), 137-175.

1.2 Planificateur avec une préférence pour le présent

Dans cette section, on normalise L à 1 ; on néglige la dépréciation du capital : $\delta = 0$; et on considère une fonction de production de type Cobb-Douglas : $F(K_t, R_t, L) \equiv K_t^\alpha R_t^\beta$, avec $0 < \beta < \alpha < 1$. On s'intéresse à un planificateur maximisant l'utilité intertemporelle à la date 0 suivante :

$$U_0 \equiv \int_0^{+\infty} e^{-\rho t} \frac{C_t^{1-\theta} - 1}{1-\theta} dt,$$

où ρ est le taux de préférence pour le présent ($\rho > 0$) et θ l'inverse de l'élasticité de substitution intertemporelle ($\theta > 0$ et $\theta \neq 1$).

Question 5 Montrer, sans faire de calcul, que le sentier choisi par ce planificateur est dynamiquement efficient (deux ou trois phrases suffisent).

Si le sentier choisi par le planificateur n'était pas dynamiquement efficient, alors le planificateur pourrait, à au moins une date $t \geq 0$, augmenter la consommation C_t, sans la diminuer à aucune autre date. Ceci augmenterait la valeur prise par la fonction d'utilité intertemporelle (qui dépend positivement de la consommation). Donc le sentier choisi par le planificateur ne serait pas optimal, ce qui est contradictoire.

Question 6 Ecrire le problème d'optimisation *auxiliaire* de ce planificateur consistant à choisir $(K_t, C_t)_{t\geq 0}$ pour $(R_t)_{t\geq 0}$ donné. En résolvant ce problème auxiliaire, montrer que le sentier $(K_t, C_t, R_t)_{t\geq 0}$ choisi par le planificateur satisfait l'équation d'Euler suivante :

$$\frac{\dot{C}_t}{C_t} = \frac{\alpha K_t^{\alpha-1} R_t^\beta - \rho}{\theta}.$$

Notons $(R_t^*)_{t\geq 0}$ le sentier de R_t choisi par le planificateur. Le problème d'optimisation restant pour ce planificateur est, pour K_0 donné, de choisir $(K_t)_{t>0}$ et $(C_t)_{t\geq 0}$ de manière à maximiser l'utilité intertemporelle sous les contraintes

$$\forall t \geq 0,\ K_t \geq 0,\ C_t \geq 0,$$
$$\forall t \geq 0,\ \dot{K}_t = K_t^\alpha R_t^{*\beta} - C_t.$$

Ce problème d'optimisation rentre dans le cas général vu en cours. Le Hamiltonien est

$$H(C_t, K_t, \lambda_t, t) \equiv \frac{C_t^{1-\theta} - 1}{1-\theta} + \lambda_t \left[K_t^\alpha R_t^{*\beta} - C_t\right].$$

La condition du premier ordre sur la variable de contrôle et la condition d'évolution de la co-variable d'état sont

$$\begin{aligned} 0 &= C_t^{-\theta} - \lambda_t, \\ \dot{\lambda}_t &= \lambda_t \left[\rho - \alpha K_t^{\alpha-1} R_t^{*\beta}\right]. \end{aligned}$$

On en déduit aisément l'équation d'Euler.

Question 7 Dans cette question, on suppose que $\alpha + \beta = 1$. Déduire des questions précédentes que le sentier choisi par le planificateur est tel que $\dot{x}_t = x_t^\alpha$, où $x_t \equiv \frac{K_t}{R_t}$, puis qu'il est tel que $\lim_{t\to+\infty} C_t = 0$. Cette situation vous semble-t-elle juste à l'égard des générations futures ?

Comme $F(K_t, R_t, L) \equiv K_t^\alpha R_t^\beta$, on a alors :
$F_K(K_t, R_t, L) = \dfrac{\partial}{\partial K} F_K(K_t, R_t, L) = \alpha K_t^{\alpha-1} R_t^\beta$

$F_R(K_t, R_t, L) = \dfrac{\partial}{\partial R} F_K(K_t, R_t, L) = \beta K_t^\alpha R_t^{\beta-1} \Rightarrow \dfrac{\dot{F}_R(K_t, R_t, L)}{F_R(K_t, R_t, L)} = \alpha \dfrac{\dot{K}_t}{K_t} + (\beta - 1) \dfrac{\dot{R}_t}{R_t}$

En utilisant la règle d'Hotelling et $\alpha+\beta=1$, on obtient

$$\alpha\frac{\dot{K}_t}{K_t}-\alpha\frac{\dot{R}_t}{R_t}=\alpha K_t^{\alpha-1}R_t^{1-\alpha}\Leftrightarrow\alpha\frac{\dot{K}_tR_t-K_t\dot{R}_t}{K_tR_t}=\alpha\left(\frac{K_t}{R_t}\right)^{\alpha-1}\Leftrightarrow\frac{\dot{K}_tR_t-K_t\dot{R}_t}{R_t^2}=\left(\frac{K_t}{R_t}\right)^{\alpha}$$

On a donc bien $\dot{x}_t=x_t^\alpha$, et donc

$$x_t=\left[x_0^{1-\alpha}+(1-\alpha)\,t\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

En utilisant l'équation d'Euler, on obtient alors

$$\frac{\dot{C}_t}{C_t}=\frac{\alpha K_t^{\alpha-1}R_t^{1-\alpha}-\rho}{\theta}=\frac{\alpha x_t^{\alpha-1}-\rho}{\theta}=\frac{\alpha\left[x_0^{1-\alpha}+(1-\alpha)\,t\right]^{-1}-\rho}{\theta}$$

et donc

$$C_t=C_0e^{-\frac{\rho}{\theta}t}\left[\frac{x_0^{1-\alpha}+(1-\alpha)\,t}{x_0^{1-\alpha}}\right]^{\frac{\alpha}{(1-\alpha)\theta}},$$

d'où $\lim_{t\to+\infty}C_t=0$. Cette situation peut légitimement sembler injuste à l'égard des générations futures qui auront (asymptotiquement) une consommation infiniment petite, et une utilité marginale de leur consommation infiniment grande, simplement parce qu'elles sont nées plus tard.

Question 8 Dans cette question, on considère une version décentralisée de cette économie dans laquelle (i) l'utilité intertemporelle de chaque ménage m à la date 0 est

$$U_{m,0}\equiv\int_0^{+\infty}e^{-\rho t}\frac{c_{m,t}^{1-\theta}-1}{1-\theta}dt,$$

où $c_{m,t}$ est la consommation du ménage m à la date t, (ii) les ménages détiennent le capital et les ressources non renouvelables, et (iii) tous les marchés sont en concurrence pure et parfaite. Sans faire de calcul, déterminer si l'équilibre concurrentiel obtenu est socialement optimal. S'il ne l'est pas, quel type de politique économique pourrait, selon vous, être optimal ?

Les conditions d'application du premier théorème du bien-être (convexité des préférences, convexité des ensembles de productions, absences d'externalités) sont satisfaites, donc l'équilibre concurrentiel est socialement optimal.

Question 9 Même question que la précédente, dans le cas où l'utilité intertemporelle de chaque ménage m à la date 0 est

$$U_{m,0}\equiv\int_0^{+\infty}e^{-\rho t}\left[\frac{c_{m,t}^{1-\theta}-1}{1-\theta}-G\left(S_t\right)\right]dt,$$

où S_t est le stock agrégé de ressource non renouvelable restant à la date t et G est une fonction strictement décroissante représentant le coût, en termes d'utilité, du changement climatique dû à l'exploitation des ressources non renouvelables.

Les conditions d'application du premier théorème du bien-être ne sont pas satisfaites car il y a une externalité : un ménage particulier m ne prend pas en compte l'effet négatif de l'exploitation des ressources non renouvelables qu'il détient sur le bien-être des autres ménages (via son effet sur le changement climatique), ni même son effet sur son propre bien-être (car cet effet est négligeable, du fait que le ménage est atomistique). Le planificateur, lui, internalise l'externalité. L'équilibre concurrentiel est donc socialement sous-optimal. Une taxe sur l'utilisation des ressources non renouvelables, redistribuée de manière forfaitaire aux ménages et telle que le coût privé de l'utilisation de ces ressources soit égal à son coût social (ce dernier incluant la perte en bien-être dû au changement climatique), serait une politique économique optimale dans ce contexte.

1.3 Planificateur sans préférence pour le présent

Dans cette section, on reste dans le cas où $L=1$, $\delta=0$, et $F(K_t,R_t,L)\equiv K_t^\alpha R_t^\beta$ avec $0<\beta<\alpha<1$, mais (compte tenu du résultat obtenu à la question 7) on s'intéresse maintenant à un planificateur "rawlsien" [2] imposant l'équité

2. Cf Rawls, J., 1971, "A Theory of Justice", Cambridge, Massachusetts : Belknap Press of Harvard University Press.

intergénérationnelle, c'est-à-dire choisissant un niveau de consommation agrégé, noté C, à la fois constant dans le temps et maximal.

Question 10 Montrer, sans faire de calcul, que le sentier choisi par le planificateur rawlsien est dynamiquement efficient (trois ou quatre phrases suffisent).

> La dépréciation du capital étant nulle, si ce sentier n'était pas dynamiquement efficient, alors on aurait $S_0 > M$, où M est défini à la question 2. On pourrait alors, à toutes les dates $t \geq 0$, augmenter R_t et donc la production Y_t de manière à augmenter le niveau de consommation C_t tout en le gardant constant dans le temps, sans modifier $(K_t)_{t\geq 0}$. Le sentier ne serait donc pas celui choisi par le planificateur rawlsien.

Question 11 On admet que K_t est linéaire en t le long du sentier choisi par le planificateur rawlsien. Vérifier alors, en utilisant les résultats de la section 1.1 et sans écrire ni résoudre aucun problème d'optimisation, que ce sentier est le suivant :

$$\begin{aligned}
K_t &= K_0 + \frac{\beta C}{1-\beta} t, \\
R_t &= \left(\frac{C}{1-\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}} \left(K_0 + \frac{\beta C}{1-\beta} t\right)^{\frac{-\alpha}{\beta}}, \\
C &= (1-\beta)\left[(\alpha-\beta) S_0\right]^{\frac{\beta}{1-\beta}} K_0^{\frac{\alpha-\beta}{1-\beta}}.
\end{aligned}$$

Commenter très brièvement.

> On a donc
> $$x_t = \frac{K_t}{R_t} = \left(\frac{C}{1-\beta}\right)^{-\frac{1}{\beta}} \left(K_0 + \frac{\beta C}{1-\beta} t\right)^{1+\frac{\alpha}{\beta}} = \left(\frac{C}{1-\beta}\right)^{-\frac{1}{\beta}} \left(K_0 + \frac{\beta C}{1-\beta} t\right)^{\frac{1}{\beta}}$$
> et donc
> $$\dot{x}_t = \left(\frac{C}{1-\beta}\right)^{-\frac{1}{\beta}} \frac{1}{\beta} \left(K_0 + \frac{\beta C}{1-\beta} t\right)^{\frac{1}{\beta}-1} \frac{\beta C}{1-\beta} = \left(\frac{C}{1-\beta}\right)^{\frac{\beta-1}{\beta}} \left(K_0 + \frac{\beta C}{1-\beta} t\right)^{\frac{1-\beta}{\beta}}$$
> $$\dot{x}_t = \left(\frac{C}{1-\beta}\right)^{-\frac{\alpha}{\beta}} \left(K_0 + \frac{\beta C}{1-\beta} t\right)^{\frac{\alpha}{\beta}} = x_t^{\alpha}$$
> On retrouve bien la règle d'Hotelling.
> $$F(K_t, R_t, L) - C_t = \left(K_0 + \frac{\beta C}{1-\beta} t\right)^{\alpha} \left(\frac{C}{1-\beta}\right) \left(K_0 + \frac{\beta C}{1-\beta} t\right)^{-\alpha} - C = \frac{C}{1-\beta} - C = \frac{\beta C}{1-\beta} = \dot{K}_t$$
> On retrouve bien aussi la contrainte de ressources de biens.
> On vérifie aisément que le sentier indiqué satisfait aussi la condition initiale sur le stock de capital,, la condition de constance de la consommation dans le temps ($C_t = C$), et la condition de linéarité de K_t en t. Il doit aussi satisfaire la contrainte de ressources non renouvelables saturée (c'est-à-dire la troisième condition de la question 1 avec une égalité et non une inégalité stricte).
>
> Le flux de ressources non renouvelables R_t doit décroître dans le temps vers zéro pour satisfaire la contrainte de ressources non renouvelables (la troisième condition de la question 1). Pour maintenir une consommation constante dans le temps, la production ne doit pas décroître vers zéro et donc le stock de capital doit croître vers $+\infty$. Le niveau de consommation constant dépend bien sûr positivement de K_0 et S_0.

Question 12 Vérifier que le sentier donné à la question précédente satisfait la condition suivante, appelée "règle de Hartwick" [3] :

$$\dot{K}_t = F_R(K_t, R_t, L) R_t.$$

Selon cette règle, comment doit être utilisée la rente tirée de l'exploitation des ressources non renouvelables pour assurer aux générations futures une consommation égale à celle des générations présentes ?

3. Cf Hartwick, J., 1977, "Intergenerational Equity and the Investing of Rents from Exhaustible Resources", *American Economic Review*, 67(5), 972-974.

$$F_R(K_t, R_t, L)R_t = \beta K_t^\alpha R_t^{\beta-1} R_t = \beta K_t^\alpha R_t^\beta = \beta F(K_t, R_t, L)$$

Or on a obtenu à la question précédente $F(K_t, R_t, L) = \dfrac{C}{1-\beta}$, on a donc bien

$$F_R(K_t, R_t, L)R_t = \frac{\beta C}{1-\beta} = \dot{K}_t$$

Cette règle stipule que pour ne pas léser les générations futures, il faut ré-investir la rente tirée de l'exploitation des ressources non renouvelables (c'est-à-dire le prix $F_R(K_t, R_t, L)$ multiplié par la quantité $R_t dt$) sous forme de capital physique ($\dot{K}_t dt$).