Autour du modèle de Solow-Swan

Exercice 1 : Le modèle de Solow-Swan avec capital humain

Cet exercice reprend et analyse l'article de Mankiw, Romer et Weil (1992) [1], dans lequel les auteurs cherchent à montrer que le modèle de Solow (1956) peine à reproduire parfaitement les faits stylisés de croissance économique des économies de marché s'il ne prend pas en compte certains facteurs de productions clés.

On rappelle que l'évolution de la production par tête dans le modèle de Solow-Swan standard (1956) à l'état régulier est donnée par

$$\frac{Y_t}{L_t} = A_0 e^{gt} \left(\frac{s_K}{\delta + g + n} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

Le tableau I rapporte les résultats de l'estimation de l'équation économétrique

$$\ln(Y_i/L_i) = a + b[\ln s_{Ki} - \ln(n_i + g + \delta)] + \varepsilon_i$$

sur un ensemble de pays i en 1985.

TABLE I
Estimation of the Textbook Solow Model

Dependent variable: log GDP per working-age person in 1985			
Sample:	Non-oil	Intermediate	OECD
Observations:	98	75	22
CONSTANT	6.87	7.10	8.62
	(0.12)	(0.15)	(0.53)
$\ln(I/GDP) - \ln(n + g + \delta)$	1.48	1.43	0.56
	(0.12)	(0.14)	(0.36)
$\overline{R}^2$	0.59	0.59	0.06
Implied α	0.60	0.59	0.36
	(0.02)	(0.02)	(0.15)

Note. Standard errors are in parentheses. The investment and population growth rates are averages for the period 1960–1985. $(g + \delta)$ is assumed to be 0.05.

Question 1 Quelle est la signification de α dans le cadre du modèle ? Comment est-il calculé ("Implied α" dans le tableau I) à partir des coefficients estimés ? Répondre en discutant les hypothèses selon lesquelles la valeur estimée de α serait interprétable de la même manière que dans le modèle.

Dans un modèle macroéconomique avec fonction de production de type Cobb-Douglas de la forme $Y_t = K_t^{\alpha}(A_t L_t)^{1-\alpha}$ et marché des biens parfaitement concurrentiel, α peut être interprété comme la part du revenu du capital dans le revenu total.
Le logarithme de la production par travailleur à l'état régulier donne :

$$\log\left(\frac{Y_t}{L_t}\right) = \log(A_0) + gt + \frac{\alpha}{1-\alpha}[\log(s_K) - \log(n + g + \delta)]. \quad (1)$$

1. Mankiw G., Romer D. et Weil D., 1992. "A Contribution to the Empirics of Economic Growth". *The Quarterly Journal of Economics*, MIT Press, vol. 107(2), pages 407-37.

Les auteurs estiment l'équation

$$\ln\left(\frac{Y_i}{L_i}\right) = a + b[\ln s_{Ki} - \ln(n_i + g + \delta)] + \varepsilon_i \tag{2}$$

avec comme observations le ratio Y/L de plusieurs économies i à une même date donnée (1985), alors que dans le modèle on analyse la dynamique d'une seule économie en observant plusieurs dates t. Régresser (2) pour estimer (1) revient à faire les hypothèses que :

— tous les pays ont les mêmes paramètres α, g et δ

— le niveau du progrès technique pour chaque pays est défini par son niveau de départ A_0 et le temps t passé depuis cette date.

— les taux d'épargne s_{Ki} et les taux de croissance démographique n_i ne sont pas corrélés à des caractéristiques propres à chaque pays ε_i

On a alors par identification :

$$a + \varepsilon_i = \log(A_{i,0})_i + gt_i \quad \text{et} \quad b = \frac{\alpha}{1-\alpha}$$

On en déduit alors $\alpha = \dfrac{b}{1+b}$.

Question 2 En se basant sur la littérature montrant que la part de la rémunération du travail représente environ 2/3 du PIB de la plupart des économies de marché, les auteurs considèrent que la valeur empiriquement pertinente pour α est de 1/3. Dans ce cas, le modèle permet-il de rendre compte des écarts de niveaux de vie entre pays ?

Rappel sur la signification statistique : Commençons par calculer la statistique d'un T-test pour un paramètre donné γ

$$T_\gamma = \frac{\hat{\gamma} - \gamma_0}{\widehat{\sigma_\gamma}}$$

où $\hat{\gamma}$ est l'estimation du paramètre γ, γ_0 est une constante connue, usuellement 0, pour laquelle on teste $\hat{\gamma} - \gamma_0 = 0$, et $\widehat{\sigma_\gamma}$ est l'estimation de l'erreur standard indiquée entre parenthèse dans le tableau de régression. Comparons ensuite cette T-statistique avec les valeurs critiques de la loi de Student (asymptotique, $dist. = \infty$, ou à df degrés de liberté, $dist. = df$) au niveau $k\%$ avec $k \in \{1, 5, 10\}$:

$$1(T_\gamma > Z_{k\%}^{dist.}) = \begin{cases} 1 \implies \text{significatif au niveau } k\% \\ 0 \implies \text{non significatif au niveau } k\% \end{cases}$$

Rappelons que, si l'échantillon observé est large (au moins 30 observations), la T-statistique est comparée avec les valeurs critiques de la loi de Student asymptotique pour les niveaux 1% ($Z_{1\%}^{\infty} = 2.58$), 5%($Z_{5\%}^{\infty} = 1.96$), et 10% ($Z_{10\%}^{\infty} = 1.645$). Si au contraire l'échantillon est petit (strictement moins de 30 observations), nous calculons d'abord le nombre de degrés de liberté (df = nombre d'observations − nombre de paramètres estimés) et comparons la T-statistique avec les valeurs critiques de la loi de Student à df degrés de liberté.

Dans la Table 1, par exemple, les groupe des pays de l'OECD a 22 observations et 2 paramèters sont estimés. De fait, la statistique de test sera comparée aux valeurs critiques de la loi de Student à 20 degrés de libertés pour les niveaux 1% ($Z_{1\%}^{df=20} = 2.85$), 5%($Z_{5\%}^{df=20} = 2.53$)), et 10% ($Z_{10\%}^{df=20} = 1.73$). Les deux autres groupes ont plus de 30 observations et seront donc comparés aux valeurs critiques de la loi de Student asymptotiques aux niveau de signification statistique usuels.

Nous sommes intéressés par le coefficient "Implied α". Puisque ce dernier est dérivé de l'estimation de $\beta = \ln(\text{I/GDP}) - \ln(n + g - \delta)$, le niveau de signification du coefficient β servira de référence pour éviter les additionnelles erreurs de calcul.

Pour les pays non-OCDE, le coefficient β donc le coefficient α est du signe attendu et statistiquement significtif au niveau 1%, et le R^2 ajusté de 59% est plutôt bon.

Pour les pays de l'OCDE, le coefficient n'est pas significatif ($T_\beta = \frac{\hat{\beta}}{\sigma_\beta} = \frac{0.56}{0.36} \approx 1.56 < 1.73 = Z_{10\%}^{df=22}$). De plus, pour les pays de l'OCDE,le R^2 ajusté très petit (6%) indique que l'estimation du modèle ne permet pas d'expliquer la détermination du PIB par tête.

Concentrons-nous donc plutôt sur les deux premières colonnes. $\alpha/(1-\alpha) = 1.48$ ou 1.43 implique $\alpha = 0.60$ ou 0.59. Ce n'est pas cohérent avec l'observation par d'autres méthodes que α, qui correspond dans le cas de la fonction de production Cobb-Douglas à la part de la rémunération du capital dans la production, est de l'ordre de $1/3$. Sous les hypothèses énoncées à la question précédente, cela signifie que le modèle de Solow-Swan standard ne parvient pas à expliquer les différences de niveaux de vie entre pays par les différences de taux d'épargne et de taux de croissance démographique entre pays.

En reprenant à présent le cadre du modèle de Solow-Swan, les auteurs proposent de modifier la fonction de production en introduisant le capital humain H_t :

$$Y_t = K_t^{\alpha} H_t^{\beta} (A_t L_t)^{1-\alpha-\beta}, \qquad \alpha > 0, \beta > 0, \alpha + \beta < 1.$$

La quantité de travail L_t et son efficacité A_t croissent à des taux constants n et g. L'accumulation de capital physique et de capital humain est déterminée par les taux d'épargne correspondants s_K et s_H. Le taux de dépréciation est δ dans les deux cas. On introduit les variables par unité de travail efficace $\kappa_t = K_t/(A_t L_t)$, $\eta_t = H_t/(A_t L_t)$, et $y_t = Y_t/(A_t L_t)$.

Question 3 Montrer que y_t se met sous la forme $\kappa_t^{\alpha} \eta_t^{\beta}$. Ecrire les équations d'évolution de κ_t et η_t.

— On montre que $y_t = \kappa_t^{\alpha} \eta_t^{\beta}$:

$$y_t = \frac{Y_t}{A_t L_t} = \frac{K_t^{\alpha} H_t^{\beta} (A_t L_t)^{1-\alpha-\beta}}{A_t L_t} = \frac{K_t^{\alpha} H_t^{\beta}}{(A_t L_t)^{\alpha+\beta}} = \kappa_t^{\alpha} \eta_t^{\beta}$$

— Ensuite, $\dot{K}_t = s_K Y_t - \delta K_t \Leftrightarrow \dfrac{\dot{K}_t}{A_t L_t} = s_K y_t - \delta \kappa_t$

or $\dfrac{\dot{K}_t}{A_t L_t} = \dfrac{\dot{K}_t}{K_t} \kappa_t$

Remarque : Si $X_t = \prod_k x_{kt}$ alors

$$\frac{\dot{X}_t}{X_t} = \frac{\partial}{\partial t} \log X_t = \frac{\partial}{\partial t} \left[\log \prod_k x_{kt} \right] = \frac{\partial}{\partial t} \left[\sum_k \log x_{kt} \right] = \sum_k \frac{\partial}{\partial t} \log x_{kt} = \sum_k \frac{\dot{x}_{kt}}{x_{kt}}$$

donc $\dfrac{\dot{\kappa}_t}{\kappa_t} = \dfrac{\dot{K}_t}{K_t} - \dfrac{\dot{A}_t}{A_t} - \dfrac{\dot{L}_t}{L_t} \Leftrightarrow \dfrac{\dot{K}_t}{K_t} = \dfrac{\dot{\kappa}_t}{\kappa_t} + \dfrac{\dot{A}_t}{A_t} + \dfrac{\dot{L}_t}{L_t} = \dfrac{\dot{\kappa}_t}{\kappa_t} + g + n$

donc $\dfrac{\dot{K}_t}{A_t L_t} = \left(\dfrac{\dot{\kappa}_t}{\kappa_t} + g + n \right) \kappa_t = \dot{\kappa}_t + (g+n)\kappa_t$

donc

$$\begin{aligned} \dot{\kappa}_t + (g+n)\kappa_t &= s_K y_t - \delta \kappa_t \\ \dot{\kappa}_t &= s_k y_t - (n+g+\delta)\kappa_t \end{aligned}$$

finalement

$$\dot{\kappa}_t = s_k \kappa_t^{\alpha} \eta_t^{\beta} - (n+g+\delta)\kappa_t$$

— De la même manière à partir de $\dot{H}_t = s_H Y_t - \delta K_t$ on trouve

$$\dot{\eta}_t = s_H \kappa_t^{\alpha} \eta_t^{\beta} - (n+g+\delta)\eta_t$$

Question 4 Déterminer les valeurs stationnaires κ^*, η^* et y^*. Quel est l'impact d'une hausse permanente des taux d'épargne sur la croissance ?

L'état régulier implique $\dot{\kappa}_t = \dot{\eta}_t = 0$ (cf. cours), on peut donc calculer les valeurs à l'état régulier $\kappa^* = \kappa$ et $\eta^* = \eta$ telles que

$$\left\{ \begin{array}{lcll} 0 &=& s_K \kappa^{\alpha} \eta^{\beta} - (n+g+\delta)\kappa & \quad (1) \\ 0 &=& s_H \kappa^{\alpha} \eta^{\beta} - (n+g+\delta)\eta & \quad (2) \end{array} \right.$$

(1) implique :

$$\eta^\beta = \frac{n+g+\delta}{s_K}\kappa^{1-\alpha}$$

avec (2) :

$$\begin{aligned}(n+g+\delta)\left(\frac{n+g+\delta}{s_K}\kappa^{1-\alpha}\right)^{\frac{1}{\beta}} &= s_H\frac{n+g+\delta}{s_K}\kappa \\ \frac{n+g+\delta}{s_K}\kappa^{1-\alpha} &= \left(\frac{s_H}{s_K}\kappa\right)^\beta \\ \kappa^{1-\alpha-\beta} &= \frac{s_K^{1-\beta}s_H^\beta}{n+g+\delta}\end{aligned}$$

donc

$$\kappa^* = \left(\frac{s_K^{1-\beta}s_H^\beta}{n+g+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}}$$

de manière symétrique on montre que

$$\eta^* = \left(\frac{s_H^{1-\alpha}s_K^\alpha}{n+g+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}}$$

enfin,

$$\begin{aligned}y^* &= \kappa^{*\alpha}\eta^{*\beta} \\ &= \left(\frac{s_K^{1-\beta}s_H^\beta}{n+g+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\beta}}\left(\frac{s_H^{1-\alpha}s_K^\alpha}{n+g+\delta}\right)^{\frac{\beta}{1-\alpha-\beta}} \\ &= s_K^{\frac{(1-\beta)\alpha+\alpha\beta}{1-\alpha-\beta}}s_H^{\frac{\beta\alpha+(1-\alpha)\beta}{1-\alpha-\beta}}\left(\frac{1}{n+g+\delta}\right)^{\frac{\alpha+\beta}{1-\alpha-\beta}} \\ &= s_K^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\beta}}s_H^{\frac{\beta}{1-\alpha-\beta}}\left(\frac{1}{n+g+\delta}\right)^{\frac{\alpha+\beta}{1-\alpha-\beta}} \\ y^* &= \left(\frac{s_K^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}s_H^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}}{n+g+\delta}\right)^{\frac{\alpha+\beta}{1-\alpha-\beta}}\end{aligned}$$

Sur le sentier régulier, la production par unité de travail efficace est constante : $y_t = y^*$. Le taux de croissance de la production par tête $Y_t/L_t = A_t y_t$ est donc égal au seul progrès technique g. La production totale $Y_t = A_t L_t y_t$ croît elle grâce au progrès technique et à l'augmentation de la quantité de travail au taux $g+n$. Ainsi, dans ce modèle, la croissance du niveau de vie provient uniquement du progrès technologique, qui lui-même "tombe du ciel". L'étape suivante de l'analyse économique est de déterminer d'où celui-ci provient ; c'est l'objet de la suite du cours (voir les chapitres sur la croissance endogène).

Les taux de croissance à l'état régulier ne dépendent pas des taux d'épargne. En revanche, le niveau de la production (ou de la production par tête, ou par unité de travail efficace) dépend positivement de s_K et s_H. Un relèvement permanent d'un des taux d'épargne conduit à court terme à une croissance plus élevée pour atteindre le nouvel état stationnaire. A long terme, une fois le nouvel état stationnaire atteint, le taux de croissance revient à son niveau initial.

On dit que les taux d'épargne satisfont la *règle d'or* lorsqu'ils maximisent la consommation par travailleur à l'état régulier.

Question 5 Déterminer les taux d'épargne de la *règle d'or* (s_{Kor}, s_{Hor}).

Une forte accumulation de capital permet une production élevée à long terme. Mais il faut consacrer beaucoup de ressources pour maintenir un niveau élevé de capital par unité de travail efficace, au dépens de la consommation. Les taux d'épargne optimaux arbitrent entre ces deux effets opposés, ils maximisent la consommation par tête à l'état régulier

$$C_t^* = (1 - s_K - s_H)Y_t^*$$

On note $c^* = \frac{C_t^*}{A_t L_t^*}$ le niveau de consommation par unité de travail efficace à l'état régulier, on a donc :

$$\begin{aligned} c^* &= (1 - s_K - s_H) y^* \\ &= \left(\frac{1}{n+g+\delta}\right)^{\frac{\alpha+\beta}{1-\alpha-\beta}} (1 - s_K - s_H) s_K^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\beta}} s_H^{\frac{\beta}{1-\alpha-\beta}} \end{aligned}$$

De manière équivalente, on peut maximiser $\log c^*$ ce qui donne les conditions du premier ordre :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\alpha}{1-\alpha-\beta} = \dfrac{s_{Kor}}{1 - s_{Kor} - s_{Hor}} \\ \dfrac{\beta}{1-\alpha-\beta} = \dfrac{s_{Hor}}{1 - s_{Kor} - s_{Hor}} \end{array} \right. \quad \text{soit par identification} \quad \left\{ \begin{array}{l} s_{Kor} = \alpha \\ s_{Hor} = \beta \end{array} \right.$$

Question 6 Ecrire le logarithme de la production par tête à une date t en fonction des paramètres du modèle, en supposant que l'économie est à son état stationnaire depuis la date initiale $t = 0$.

L'évolution du PIB par tête $Y_t/L_t = A_t y_t$ à l'état régulier est maintenant donnée par

$$\log\left(\frac{Y_t}{L_t}\right) = \log A_t + \log(y^*) = \log A_t + \frac{\alpha}{1-\alpha-\beta}[\log(s_K) - \log(n+g+\delta)] + \frac{\beta}{1-\alpha-\beta}[\log(s_H) - \log(n+g+\delta)].$$

Le tableau II rapporte les résultats de l'estimation de l'équation économétrique

$$\ln(Y_i/L_i) = a + b[\ln s_{Ki} - \ln(n_i + g + \delta)] + c[\ln s_{Hi} - \ln(n_i + g + \delta)] + \varepsilon_i$$

sur un ensemble de pays i en 1985.

TABLE II
ESTIMATION OF THE AUGMENTED SOLOW MODEL

Dependent variable: log GDP per working-age person in 1985			
Sample:	Non-oil	Intermediate	OECD
Observations:	98	75	22
CONSTANT	7.86	7.97	8.71
	(0.14)	(0.15)	(0.47)
$\ln(I/GDP) - \ln(n + g + \delta)$	0.73	0.71	0.29
	(0.12)	(0.14)	(0.33)
$\ln(SCHOOL) - \ln(n + g + \delta)$	0.67	0.74	0.76
	(0.07)	(0.09)	(0.28)
$\bar{R}^2$	0.78	0.77	0.28
Implied α	0.31	0.29	0.14
	(0.04)	(0.05)	(0.15)
Implied β	0.28	0.30	0.37
	(0.03)	(0.04)	(0.12)

Note. Standard errors are in parentheses. The investment and population growth rates are averages for the period 1960–1985. $(g + \delta)$ is assumed to be 0.05. SCHOOL is the average percentage of the working-age population in secondary school for the period 1960–1985.

Question 7 Comment sont calculés les α et β résultants ("Implied α" et "Implied β" dans le tableau II) à partir des coefficients estimés ?

La régression permet d'estimer b et c. On en déduit alors α et β d'après

$$b = \frac{\alpha}{1-\alpha-\beta} \quad \text{et} \quad c = \frac{\beta}{1-\alpha-\beta}$$

soit en montrant laborieusement par substitution, soit en remarquant par exemple que

$$1+b+c = 1 + \frac{\alpha}{1-\alpha-\beta} + \frac{\beta}{1-\alpha-\beta} = \frac{1}{1-\alpha-\beta} = \frac{b}{\alpha} = \frac{c}{\beta}$$

qu'au final, on a

$$\alpha = \frac{b}{1+b+c} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{c}{1+b+c}$$

Question 8 D'après les auteurs, le salaire minimum aux Etats-Unis représentait environ 30 à 50% du salaire moyen du secteur manufacturier. Si l'on considère grossièrement le salaire minimum comme le niveau de rémunération du travail non qualifié, le capital humain, ici le niveau d'éducation, compterait pour 50 à 70% de la part de la rémunération du facteur travail en moyenne. En admettant que la valeur empiriquement pertinente de α, c'est-à-dire la part de la rémunération du capital physique, soit à nouveau 1/3, celle du travail est donc de 2/3 et par conséquent celle du capital humain environ entre 1/3 et 1/2. La prise en compte du capital humain améliore-t-elle le pouvoir explicatif du modèle ?

Mis à part pour les pays de l'OCDE pour lesquels l'estimation donne un coefficient α non significatif malgré un meilleur R^2 ajusté que précédement grâce à un β significatif, les valeurs estimées de α et β sont proches de 30%, et les R^2 ajustés augmentent sensiblement. On a donc un α très proche de la valeur empiriquement pertinente considérée 1/3. Inclure le niveau d'éducation comme capital humain a donc amélioré le pouvoir explicatif du modèle, toujours sous les hypothèses considérées précédemment. Le capital humain joue donc un rôle important pour expliquer les écarts de richesse entre pays.

On rappelle la dynamique de l'économie dans le modèle de Solow-Swan avec fonction de production Cobb-Douglas que l'on obtient en résolvant le modèle (vu en cours) :

$$y_t = \left\{ (\kappa^*)^{1-\alpha} - \left[(\kappa^*)^{1-\alpha} - (\kappa_0)^{1-\alpha} \right] e^{-(n+g+\delta)(1-\alpha)t} \right\}^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

Question 9 Montrer que l'on peut réécrire cette relation sous la forme suivante :

$$\log(\frac{y_t}{y^*}) = \log(\frac{y_0}{y^*})e^{-\lambda t}$$

On pose $\hat{y}_t = \log\left(\frac{y_t}{y_t^*}\right)$. Que représente $\hat{y}_t$? Interprêter λ comme une vitesse de convergence vers l'état régulier.

En utilisant $\kappa = y^{\frac{1}{\alpha}}$, on obtient successivement :

$$\begin{aligned}
y_t &= \left\{ \kappa^{*1-\alpha} - (\kappa^{*1-\alpha} - \kappa_0^{1-\alpha}) e^{-(n+g+\delta)(1-\alpha)t} \right\}^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \\
y_t^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} &= y^{*\frac{1-\alpha}{\alpha}} - (y^{*\frac{1-\alpha}{\alpha}} - y_0^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}) e^{-(n+g+\delta)(1-\alpha)t} \\
y_t^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} - y^{*\frac{1-\alpha}{\alpha}} &= (y_0^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} - y^{*\frac{1-\alpha}{\alpha}}) e^{-(n+g+\delta)(1-\alpha)t} \\
\frac{y_t^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} - y^{*\frac{1-\alpha}{\alpha}}}{y^{*\frac{1-\alpha}{\alpha}}} &= \frac{y_0^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} - y^{*\frac{1-\alpha}{\alpha}}}{y^{*\frac{1-\alpha}{\alpha}}} e^{-(n+g+\delta)(1-\alpha)t}
\end{aligned}$$

Si la déviation à l'état régulier $y_0 - y^*$ n'est pas importante, alors, α étant raisonablement plus grand que 0 et inférieur à 1 et donc $\frac{1-\alpha}{\alpha}$ n'étant raisonnablement pas trop grand, $y_0^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} - y^{*\frac{1-\alpha}{\alpha}}$ n'est pas importante non plus, donc on peut appliquer le développement limité :

$$\frac{y_0^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} - y^{*\frac{1-\alpha}{\alpha}}}{y^{*\frac{1-\alpha}{\alpha}}} \approx \log\left(\frac{y_0^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}}{y^{*\frac{1-\alpha}{\alpha}}}\right) = \frac{1-\alpha}{\alpha} \log\left(\frac{y_0}{y^*}\right)$$

Et aussi comme $|y_t - y^*| \leq |y_0 - y^*|$ (convergence vers l'état régulier), on a aussi :

$$\frac{y_t^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} - y^{*\frac{1-\alpha}{\alpha}}}{y^{*\frac{1-\alpha}{\alpha}}} \approx \frac{1-\alpha}{\alpha} \log\left(\frac{y_t}{y^*}\right)$$

donc on peut écrire

$$\log\left(\frac{y_t}{y^*}\right) = \log\left(\frac{y_0}{y^*}\right) e^{-(n+g+\delta)(1-\alpha)t} = \log\left(\frac{y_0}{y^*}\right) e^{-\lambda t} \tag{i}$$

où $\lambda = (n+g+\delta)(1-\alpha)$.

$\hat{y}_t = \log\left(\frac{y_t}{y_t^*}\right)$ représente la différence en pourcentage entre le niveau de la production par unité de travail efficace à la date t et son niveau à l'état régulier. On a donc finalement :

$$\hat{y}_t = \hat{y}_0 e^{-\lambda t}$$

En dérivant cette expression par rapport à t, on obtient $\frac{\dot{\hat{y}}_t}{\hat{y}_t} = -\lambda$.
Comme $\lambda > 0$, cela signifie que suite à un choc $\hat{y}_0$, l'écart à l'état régulier décroît au taux λ à chaque période. λ représente donc la vitesse de convergence vers l'état régulier.

Question 10 Soient deux dates t_0 et $t_0 + T$. Déduire de la question précédente que le taux de croissance moyen de la production par tête entre ces deux dates peut s'exprimer

$$\frac{1}{T}\log\left(\frac{(Y/L)_{t_0+T}}{(Y/L)_{t_0}}\right) = g + \frac{1-e^{-\lambda T}}{T}[\log(A_0 y^*) + g t_0] - \frac{1-e^{-\lambda T}}{T}\log((Y/L)_{t_0}) \tag{3}$$

L'évolution de $\log y_t$ peut se réécrire

$$\log(y_t) - \log(y_0) = e^{-\lambda t}\log(y_0) + (1-e^{-\lambda t})\log(y^*) - \log(y_0)$$

donc

$$\log\left(\frac{y_t}{y_0}\right) = (1-e^{-\lambda t})\log\left(\frac{y^*}{y_0}\right) \tag{ii}$$

Soit deux dates t_0 et $t_0 + T$. On a alors

$$\begin{array}{rrcl}
 & \log\left(\frac{y_{t_0+T}}{y_{t_0}}\right) & = & \log\left(\frac{y_{t_0+T}}{y_0}\frac{y_0}{y_{t_0}}\right) = \log\left(\frac{y_{t_0+T}}{y_0}\right) - \log\left(\frac{y_{t_0}}{y_0}\right) \\
\text{avec (ii)} \Leftrightarrow & \log\left(\frac{(Y/L)_{t_0+T}}{A_{t_0+T}}\frac{A_{t_0}}{(Y/L)_{t_0}}\right) & = & (e^{-\lambda t_0} - e^{-\lambda(t_0+T)})\log\left(\frac{y^*}{y_0}\right) \\
\text{avec } A_t = A_0 e^{gt} \Leftrightarrow & \log\left(\frac{(Y/L)_{t_0+T}}{(Y/L)_{t_0}}e^{-gT}\right) & = & (1-e^{-\lambda T})e^{-\lambda t_0}\log\left(\frac{y^*}{y_0}\right) \\
\Leftrightarrow & \log\left(\frac{(Y/L)_{t_0+T}}{(Y/L)_{t_0}}\right) - gT & = & -(1-e^{-\lambda T})e^{-\lambda t_0}\log\left(\frac{y_0}{y^*}\right) \\
\text{avec (i)} \Leftrightarrow & \log\left(\frac{(Y/L)_{t_0+T}}{(Y/L)_{t_0}}\right) & = & gT - (1-e^{-\lambda T})\log\left(\frac{y_{t_0}}{y^*}\right) \\
 & & = & gT - (1-e^{-\lambda T})\log\left(\frac{(Y/L)_{t_0}}{y^* A_0 e^{g t_0}}\right)
\end{array}$$

$$\frac{1}{T}\log\left(\frac{(Y/L)_{t_0+T}}{(Y/L)_{t_0}}\right) = g + \frac{1-e^{-\lambda T}}{T}[\log(A_0 y^*) + g t_0] - \frac{1-e^{-\lambda T}}{T}\log((Y/L)_{t_0})$$

Question 11 À partir des données précédentes, l'estimation économétrique de l'équation suivante :

$$\frac{1}{T}\log\left(\frac{(Y/L)_{i,t_0+T}}{(Y/L)_{i,t_0}}\right) = A + B\log((Y/L)_{i,t_0}) + u_{i,t_0,t_0+T} \tag{4}$$

où $(Y/L)_{i,t}$ est le niveau de la production par tête dans le pays i pendant l'année t et $u_{i,t,t'}$ un terme d'erreur, donne les résultats affichés dans le tableau suivant :

Dependent variable: log difference GDP per working-age person 1960–1985			
Sample:	Non-oil	Intermediate	OECD
Observations:	98	75	22
CONSTANT	−0.266	0.587	3.69
	(0.380)	(0.433)	(0.68)
ln(Y60)	0.0943	−0.00423	−0.341
	(0.0496)	(0.05484)	(0.079)
$\overline{R}^2$	0.03	−0.01	0.46
s.e.e.	0.44	0.41	0.18
Implied λ	−0.00360	0.00017	0.0167
	(0.00219)	(0.00218)	(0.0023)

Note. Standard errors are in parentheses. Y60 is GDP per working-age person in 1960.

Comment est calculé l'estimateur de la vitesse de convergence $\hat{\lambda}$? Combien de temps faut-il pour résorber la moitié de l'écart initial par rapport à l'état régulier ?

Par identification entre (3) et (4), on a :

$$A + u_{i,t_0,t_0+T} = g + \frac{1 - e^{-\lambda T}}{T}[\log(A_{0,i}y^*) + gt_0] \quad \text{et} \quad B = -\frac{1 - e^{-\lambda T}}{T}$$

On peut donc obtenir l'estimateur de λ en calculant

$$\hat{\lambda} = -\frac{1}{T}\log(1 + \hat{B}T)$$

La moitié de l'écart initial par rapport à l'état régulier est résorbé au bout de T années tel que

$$\hat{y}_T = \frac{1}{2}\hat{y}_0 = \hat{y}_0 e^{-\lambda T} \Leftrightarrow T = \frac{\log 2}{\lambda}$$

donc avec $\hat{\lambda} = 0.0167$ pour les pays de l'OCDE, seul échantillon où le coefficient est significatif, la moitié de l'écart est résorbé au bout d'environ $\hat{T} \approx 42$ années.

Question 12 En considérant que la population a augmenté en moyenne d'1% par an dans les pays de l'OCDE entre 1960 et 1985, quelle valeur de α le modèle de Solow-Swan avec fonction de production Cobb-Douglas implique-t-il ? Ce modèle permet-il de rendre compte de la vitesse de convergence des niveaux de vie entre ces pays ?

Les données donnent $\lambda = 0.0167$ et $n = 0.01$, et la littérature, $\delta = 0.05$. Bien que rien ne soit mentionné au sujet de g, il est rationel de penser que le taux de croissance du progrès technologique au sein des pays de l'OCDE pendant les Trentes Glorieuses, et donc sur la période 1960-1985, est positif (i.e., $g \geq 0$). Ainsi, le modèle implique $\alpha = 1 - \frac{\lambda}{n+g+\delta} \approx 0.72$. Il ne permet pas de rendre compte de la vitesse de convergence des niveaux de vie entre les pays si on considère l'approche restrictive $\alpha = 1/3$, inversement il le permet si on considère l'approche avec capital humain $\alpha = 65\%$ à 85%.

Exercice 2 *(Optionnel)* : La terre comme facteur de production dans le modèle de Solow-Swan

Depuis Malthus, au moins, certains économistes ont soutenu que le fait que certains facteurs de production (en particulier la terre) sont disponibles en quantité limitée finirait par stopper la croissance. On s'intéresse à ce problème dans le cadre du modèle de Solow-Swan en introduisant le stock de terre R_t dans la fonction de production :

$$Y_t = K_t^{\alpha}(A_tL_t)^{\beta}R_t^{1-\alpha-\beta}, \qquad \alpha > 0,\ \beta > 0,\ \alpha + \beta < 1.$$

La quantité de travail L_t et son efficacité A_t croissent à des taux constants n et g. L'accumulation du capital est régie par les taux d'épargne s et de dépréciation δ. Le stock de terre est fixe, $R_t = R$.

Question 1 On note γ_t le taux de croissance du capital. Déterminer la relation qui lie $\dot{\gamma}_t$ à γ_t, et la représenter sur un graphe.

L'équation d'accumulation du capital s'écrit :

$$\dot{K}_t = sY_t - \delta K_t \qquad \text{soit} \qquad \gamma_t = \frac{\dot{K}_t}{K_t} = s\frac{Y_t}{K_t} - \delta.$$

En dérivant cette expression par rapport à t :

$$\dot{\gamma}_t = s\left(\frac{\dot{Y}_t K_t - Y_t \dot{K}_t}{K_t^2}\right) = s\frac{Y_t}{K_t}\left(\frac{\dot{Y}_t}{Y_t} - \frac{\dot{K}_t}{K_t}\right) = s\frac{Y_t}{K_t}\left(\frac{\dot{Y}_t}{Y_t} - \gamma_t\right)$$

Par ailleurs, on peut écrire le logarithme de la fonction de production :

$$\log Y_t = \alpha \log K_t + \beta(\log A_t + \log L_t) + (1-\alpha-\beta)\log R$$

et sa dérivé par rapport au temps

$$\frac{\dot{Y}_t}{Y_t} = \alpha\frac{\dot{K}_t}{K_t} + \beta(\frac{\dot{A}_t}{A_t} + \frac{\dot{L}_t}{L_t}) = \alpha\gamma_t + \beta(g+n)$$

En notant que $s\dfrac{Y_t}{K_t} = \gamma_t + \delta$, on trouve alors :

$$\dot{\gamma}_t = (\gamma_t + \delta)[(\alpha-1)\gamma_t + \beta(g+n)]$$

Le graphe de $\dot{\gamma}_t$ en fonction de γ_t est donc une parabole qui admet deux racines γ_1 et γ_2 telles que

$$\begin{cases} 0 = \gamma_1 + \delta \\ 0 = (\alpha-1)\gamma_2 + \beta(g+n) \end{cases}$$

donc

$$\gamma_1 = -\delta \qquad \text{et} \qquad \gamma_2 = \frac{\beta(g+n)}{1-\alpha}.$$

Question 2 Cette économie possède-t-elle un état régulier stable ? Est-il unique ?

A l'état régulier, les taux de croissance sont constants, donc on a $\dot{\gamma}_t = 0$. Il y a donc deux possibilités pour le taux de croissance du capital, γ_1 ou γ_2. En développant :

$$\dot{\gamma}_t = (\alpha-1)\gamma_t^2 + \delta[(\alpha-1) + \beta(g+n)]\gamma_t + \delta\beta(g+n)$$

$\alpha \in]0:1[$ donc $\alpha - 1 < 1$. L'étude du tableau de variation du polynome $\dot{\gamma}_t$ montre donc que :

- si $\gamma_t < \gamma_1$ alors $\dot{\gamma}_t < 0$ donc γ_t est décroissante,
- si $\gamma_1 < \gamma_t < \gamma_2$ alors $\dot{\gamma}_t > 0$ donc γ_t est croissante,
- si $\gamma_t > \gamma_2$ alors $\dot{\gamma}_t < 0$ donc γ_t est décroissante.

On en déduit que $\frac{\dot{K}_t}{K_t} = \gamma_2$ est l'unique état régulier stable de l'économie. On a alors $\frac{\dot{Y}_t}{Y_t} = \frac{\dot{K}_t}{K_t} = \frac{\beta(g+n)}{1-\alpha} > 0$.

Question 3 Le fait que la terre est disponible en quantité fixe rend-il impossible la croissance permanente de la production par tête $y_t \equiv \frac{Y_t}{L_t}$? Commenter.

La croissance de la production par tête à l'état régulier est

$$\frac{\dot{y}_t}{y_t} = \frac{\dot{Y}_t}{Y_t} - \frac{\dot{L}_t}{L_t} = \frac{\dot{Y}_t}{Y_t} - n = \alpha\gamma_2 + \beta(g+n) - n = \alpha\frac{\beta(g+n)}{1-\alpha} + \beta(g+n) - n = \frac{\beta g - (1-\alpha-\beta)n}{1-\alpha}$$

Il y a croissance permanente si $\beta g - (1-\alpha-\beta)n > 0$, soit

$$g > \frac{1-\alpha-\beta}{\beta} n,$$

c'est-à-dire lorsque le progrès technique g est assez élevé, la croissance démographique n est assez faible, et l'importance relative du facteur terre par rapport au travail efficace dans la fonction de production $(1-\alpha-\beta)/\beta$ est assez faible.

Dans ce modèle, une fois qu'on prend en compte que R_t est constant, la fonction de production n'est plus à rendements d'échelle constants, mais strictement décroissants : $Y_t = K_t^\alpha (A_t L_t)^\beta R^{1-\alpha-\beta}$ avec $\alpha + \beta < 1$. La condition pour obtenir une croissance permanente sera donc plus stricte que dans le modèle de Solow-Swan standard. Pour comprendre d'où vient cette condition, considérons une fonction de production de forme générale $Y_t = K_t^\alpha L_t^{1-\alpha} E_t$ où E_t est exogène et croît au taux constant g_E. L'analyse faite en cours implique que le taux de croissance à long terme de la production par tête $\frac{Y_t}{L_t}$ est strictement positif si et seulement si $g_E > 0$. Dans le modèle de Solow-Swan standard, $E_t = A_t^{1-\alpha}$ et $g_E = (1-\alpha)g$, donc cette condition nécessaire et suffisante est $g > 0$. Dans le modèle avec le facteur terre, $E_t = R^{1-\alpha-\beta} A_t^\beta L_t^{-(1-\alpha-\beta)}$ et $g_E = \beta g - (1-\alpha-\beta)n$, donc cette condition nécessaire et suffisante est $g > \frac{1-\alpha-\beta}{\beta} n$.