ENSAE Paris - IP Paris
Année scolaire 2024-2025
Session d'examens : 2A S1
(session principale)

Examen final du cours "Macroéconomie 1"

Durée : 2 heures. Aucun document autorisé. Aucune calculatrice autorisée.
Le barème, susceptible d'être modifié, est donné uniquement à titre indicatif.

1 Questions de cours (6 points)

Répondre très brièvement aux questions suivantes, sans utiliser d'équation (une ou deux phrases suffisent pour chaque réponse).

Question 1 Citer deux limites importantes du modèle de Solow-Swan.

Question 2 Avec quoi interagit l'économie dans le modèle DICE ? Ou, dit autrement, de quel mot la lettre "C" est-elle l'initiale dans l'acronyme "DICE" ?

Question 3 En quoi diffèrent les rendement privés et les rendements sociaux du capital dans le modèle de Romer (1986) ?

Question 4 Pourquoi subventionner la recherche et développement, dans le modèle de Romer (1990), ne permet-il pas de mettre en oeuvre l'équilibre socialement optimal ?

Question 5 Les dépenses publiques sont-elles un stock ou un flux ? Et la dette publique ?

Question 6 Pourquoi l'équivalence ricardienne n'est-elle pas satisfaite dans le modèle à générations imbriquées ?

2 Problème : automation/robotisation dans le modèle de Cass-Koopmans-Ramsey (14 points)

Le but de ce problème est d'étudier les implications positives et normatives d'un changement de fonction de production dans le modèle de Cass-Koopmans-Ramsey. **On peut répondre à chaque question sans avoir préalablement répondu aux questions qui la précèdent**, simplement en admettant les résultats donnés dans ces questions précédentes.

On part du modèle de Cass-Koopmans-Ramsey vu en cours et en TD, dans le cas particulier d'une élasticité de substitution intertemporelle constante, égale à $\frac{1}{\theta}$, où $\theta > 0$ et $\theta \neq 1$. On utilise exactement les mêmes notations qu'en cours et en TD : r_t représente le taux d'intérêt réel, w_t le salaire réel, b_t le montant total réel d'actifs par tête, L_t la population et l'offre de travail agrégée, C_t la consommation agrégée, $c_t \equiv C_t/L_t$ la consommation par tête, $\gamma_t \equiv C_t/(A_t L_t)$ la consommation par unité de travail efficace, K_t le stock de capital agrégé, $\kappa_t \equiv K_t/(A_t L_t)$ le stock de capital par unité de travail efficace, et Y_t la production agrégée à la date t ; $\rho > 0$ représente le taux de préférence pour le présent, $n \geq 0$ le taux de croissance démographique (i.e. le taux de croissance de la population L_t), $g \geq 0$ le taux de progrès technique (i.e. le taux de croissance de l'efficacité du travail A_t), et $\delta > 0$ le taux de dépréciation du capital. Comme en cours et en TD, on se limite aux valeurs des paramètres telles que $\rho - n > (1-\theta)g$. La seule différence avec le modèle de Cass-Koopmans-Ramsey vu en cours et en TD est qu'on considère ici la fonction de production suivante :

$$Y_{i,t} = F(K_{i,t}, A_t N_{i,t}) \equiv Z K_{i,t} + K_{i,t}^{\alpha} \left(A_t N_{i,t}\right)^{1-\alpha},$$

où $Z \geq 0$, $0 < \alpha < 1$, et $Y_{i,t}$, $K_{i,t}$, $N_{i,t}$ sont respectivement la production, le capital, la demande de travail de l'entreprise i à la date t. On note $f(x) \equiv F(x,1) = Zx + x^{\alpha}$.

2.1 Cas $Z = 0$

On s'intéresse dans un premier temps au cas $Z = 0$. En ce cas, le modèle est exactement le même que celui vu en cours et en TD, dans le cas particulier d'une fonction de production Cobb-Douglas ($Y_{i,t} = K_{i,t}^{\alpha} \left(A_t N_{i,t}\right)^{1-\alpha}$).

Question 7 On rappelle que, dans ce modèle, le programme d'optimisation du ménage représentatif est le suivant : pour $(r_t, w_t)_{t\geq 0}$ et b_0 donnés,

$$\max_{(c_t)_{t\geq 0}, (b_t)_{t>0}} \int_0^{+\infty} e^{-(\rho-n)t} \left(\frac{c_t^{1-\theta} - 1}{1-\theta}\right) dt$$

sous les contraintes

$$\forall t \geq 0,\ c_t \geq 0,$$
$$\forall t \geq 0,\ \dot{b}_t = (r_t - n) b_t + w_t - c_t,$$
$$\lim_{t \to +\infty} \left[b_t e^{-\int_0^t (r_\tau - n) d\tau} \right] \geq 0.$$

Interpréter très brièvement, en termes économiques, les deux dernières contraintes (une ou deux phrases suffisent pour chaque contrainte). Ecrire le hamiltonien associé à ce programme, puis la condition du premier ordre sur la variable de contrôle et la condition d'évolution de la co-variable d'état. En déduire l'équation d'Euler $\dot{c}_t / c_t = (r_t - \rho)/\theta$.

Question 8 Expliquer très brièvement pourquoi on a $r_t = f'(\kappa_t) - \delta$ à l'équilibre. En déduire l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\dot{\gamma}_t}{\gamma_t} = \frac{1}{\theta}\left[\frac{\alpha}{\kappa_t^{1-\alpha}} - (\delta + \rho + \theta g)\right].$$

Question 9 Ecrire la condition d'équilibre sur le marché des biens en termes agrégés. En déduire l'équation différentielle suivante :

$$\dot{\kappa}_t = \kappa_t^{\alpha} - \gamma_t - (n + g + \delta)\, \kappa_t.$$

Question 10 Définir l'état régulier et montrer que κ_t et γ_t sont constants à l'état régulier. Montrer que le taux d'épargne $s_t \equiv (Y_t - C_t)/Y_t$ est aussi constant à l'état régulier, égal à $s^* \equiv \alpha(n+g+\delta)/(\delta+\rho+\theta g)$. Interpréter brièvement, en termes économiques, le fait que s^* soit strictement décroissant en ρ et θ.

2.2 Cas $Z > 0$

On s'intéresse dans cette section au cas $Z > 0$.

Question 11 Lesquelles des cinq propriétés de la fonction de production du modèle de Cass-Koopmans-Ramsey vu en cours et en TD la fonction de production considérée ici ne satisfait-elle pas ? Peut-on justifier une telle fonction de production en invoquant des processus d'automation et de robotisation ?

Question 12 Écrire le problème d'optimisation des entreprises, obtenir la condition du premier ordre par rapport à $K_{i,t}$, en déduire que $K_{i,t}/N_{i,t}$ ne dépend pas de i et vaut K_t/L_t, puis que $Y_t = F(K_t, A_t L_t)$.

Question 13 Expliquer très brièvement comment les réponses aux questions 7, 8 et 9 sont modifiées (si elles le sont), et en déduire les deux équations différentielles suivantes :

$$\frac{\dot{\gamma_t}}{\gamma_t} = \frac{1}{\theta}\left[\frac{\alpha}{\kappa_t^{1-\alpha}} - (\delta+\rho+\theta g - Z)\right],$$

$$\dot{\kappa_t} = \kappa_t^{\alpha} - \gamma_t - [(n+g+\delta) - Z]\,\kappa_t.$$

Question 14 Montrer qu'il existe un état régulier si et seulement si

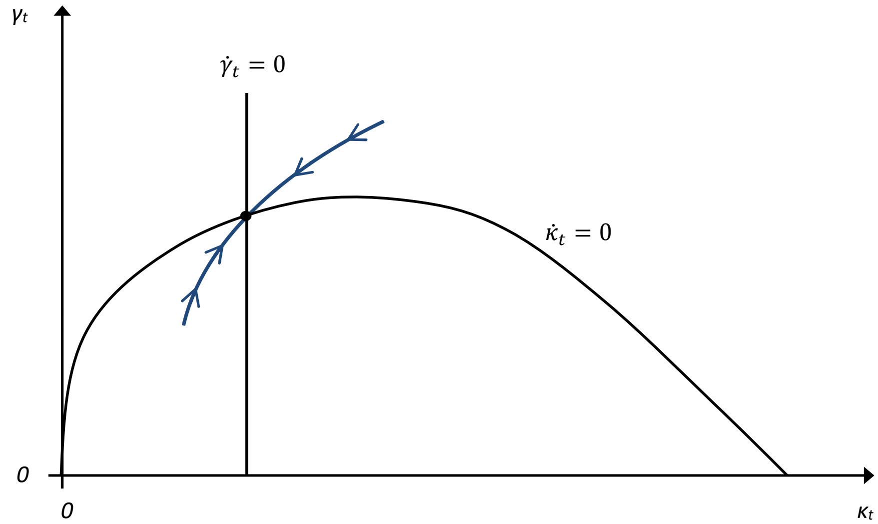
$$Z < \delta + \rho + \theta g.$$

Interpréter cette condition en termes économiques. En supposant cette condition satisfaite, montrer que le taux d'épargne s_t est constant à l'état régulier et calculer sa valeur en fonction des paramètres du modèle. Cette valeur dépend-elle de Z, et si oui comment ? Interpréter en termes économiques.

2.3 Cas $0 < Z < n + g + \delta$

On s'intéresse dans cette section au cas $0 < Z < n + g + \delta$.

Question 15 Montrer que ce cas est un cas particulier du cas $0 < Z < \delta + \rho + \theta g$ (considéré dans la question précédente). Expliquer brièvement pourquoi les équations $\dot{\kappa_t} = 0$ et $\dot{\gamma_t} = 0$ correspondent à une courbe en cloche et une droite verticale dans le quadrant $(\kappa_t > 0, \gamma_t > 0)$ du plan (κ_t, γ_t), comme pour le modèle de Cass-Koopmans-Ramsey vu en cours et en TD, et comme représenté sur la figure ci-dessous. Montrer que le sommet de la courbe en cloche est nécessairement situé à droite de la droite verticale. Que peut-on en déduire en termes de possibilité d'inefficience dynamique ? Expliquer brièvement.



Question 16 On admet que, en l'absence de chocs et de surprises, l'unique sentier d'équilibre est le sentier-selle, comme dans le modèle de Cass-Koopmans-Ramsey vu en cours et en TD, et comme représenté sur la figure ci-dessus.[1] On suppose que l'économie est à l'état régulier jusqu'à la date $T > 0$ (exclue). À la date T, de manière non anticipée, le paramètre Z prend une nouvelle valeur, plus élevée que sa valeur précédente, et reste à cette nouvelle valeur par la suite. Représenter la trajectoire suivie par l'économie dans le plan (κ_t, γ_t). Expliquer et interpréter. Cette trajectoire est-elle qualitativement différente de celle obtenue suite à une baisse permanente du paramètre δ, et si oui en quoi est-elle différente ?

2.4 Cas $Z > n + g + \delta$

On s'intéresse dans cette section au cas $Z > n + g + \delta$.

Question 17 Dans le sous-cas $n + g + \delta < Z < \delta + \rho + \theta g$, tracer, dans le plan (κ_t, γ_t), la forme que prennent les équations $\dot{\kappa}_t = 0$ et $\dot{\gamma}_t = 0$. Peut-il y avoir inefficience dynamique en ce cas, et pourquoi ?

Question 18 Dans le sous-cas $Z > \delta + \rho + \theta g$, montrer que $\gamma_t \to +\infty$ lorsque $t \to +\infty$. En admettant que κ_t varie de manière monotone dans le temps (i.e. soit toujours à la baisse, soit toujours à la hausse, soit toujours constant), montrer que $\kappa_t \to +\infty$ lorsque $t \to +\infty$. Le modèle est-il alors un modèle de croissance endogène ? Justifier et interpréter.

1. La démonstration de ce résultat est essentiellement la même que celle vue en cours.