Examen final : éléments de corrigé

1 Questions de cours (8 points)

Question 1 (1 point) Cf les slides 55 et 59 du chapitre 2.

Question 2 (1,5 point) Cf le slide 96 du chapitre 2.

Question 3 (1,5 point) Cf les slides 96-97 du chapitre 2.

Question 4 (1 point) Involontaire et non rémunérée chez Romer (1986) (externalité de diffusion des connaissances), volontaire et rémunérée chez Romer (1990) (efforts de R&D récompensés par une position de monopole).

Question 5 (1,5 point) Cf le slide 5 de la conclusion générale.

Question 6 (1,5 point) Cf le slide 6 du chapitre 5.

2 Problème : dynamique du taux d'épargne dans le modèle de Cass-Koopmans-Ramsey (18 points)

Question 7 (1 point) Cf slide 34 du chapitre 2.

Question 8 (1,5 point) A l'équilibre, les entreprises louent du capital aux ménages jusqu'à ce que la productivité marginale du capital $f'(\kappa_t)$ soit égale au prix de location du capital z_t ; et les ménages n'acceptent de louer du capital aux entreprises que si le prix de location du capital z_t, net du taux de dépréciation δ, est égal au taux d'intérêt réel qu'ils perçoivent sur leurs prêts. En utilisant $\dot{\gamma}_t/\gamma_t = \dot{c}_t/c_t - \dot{A}_t/A_t$, on peut facilement réécrire l'équation d'Euler comme l'équation différentielle (1).

Question 9 (1,5 point) Cf slide 41 du chapitre 2. En utilisant $\dot{\kappa}_t/\kappa_t = \dot{K}_t/K_t - \dot{A}_t/A_t - \dot{L}_t/L_t$, on peut facilement réécrire la condition d'équilibre sur le marché des biens comme l'équation différentielle (2).

Question 10 (1,5 point) Cf slide 49 du chapitre 2. En remplaçant $\dot{\gamma}_t$ par zéro dans l'équation différentielle (1), on obtient facilement que κ_t est égal à $\kappa^* \equiv [\alpha/(\delta + \rho + \theta g)]^{1/(1-\alpha)}$ à l'état régulier.

Question 11 (1,5 point) On a $s_t \equiv (Y_t - C_t)/Y_t = 1 - \gamma_t \kappa_t^{-\alpha}$. A l'état régulier, on a $\kappa_t = \kappa^*$ et $\gamma_t = (\kappa^*)^\alpha - (n+g+\delta)\kappa^*$, cette dernière égalité étant obtenue en remplaçant $\dot{\kappa}_t$ par zéro dans l'équation différentielle (2). On en déduit que s_t est égal à $s^* \equiv \alpha(n+g+\delta)/(\delta+\rho+\theta g)$ à l'état régulier.

On suppose $\rho > n + (1-\theta)g$ pour que l'utilité intertemporelle prenne une valeur finie : puisque c_t croît asymptotiquement au taux g, $e^{-(\rho-n)t}c_t^{1-\theta}$ croît asymptotiquement au taux $-(\rho - n) + (1-\theta)g$, et ce dernier taux de croissance doit être négatif pour que l'utilité intertemporelle prenne une valeur finie. L'inégalité $\rho > n + (1-\theta)g$ implique $s^* < \alpha$ et donc $s^* < 1$ (et par ailleurs on a $s^* > 0$).

Toutes choses égales par ailleurs, plus le taux de préférence pour le présent ρ est élevé, moins les ménages épargnent, donc plus s^* est faible. Toutes choses égales par ailleurs, plus θ est élevé, plus l'élasticité de substitution intertemporelle $1/\theta$ est faible, plus les ménages sont réticents à laisser croître leur consommation par tête dans le temps, moins ils épargnent, et donc plus s^* est faible.

Question 12 (1,5 point) On a $s_t = 1 - \gamma_t \kappa_t^{-\alpha}$, donc $1 - s_t = \gamma_t \kappa_t^{-\alpha}$, donc $\log(1-s_t) = \log(\gamma_t) - \alpha \log(\kappa_t)$, donc $-\dot{s}_t/(1-s_t) = \dot{\gamma}_t/\gamma_t - \alpha\dot{\kappa}_t/\kappa_t$, donc $\dot{s}_t/(1-s_t) = \alpha\dot{\kappa}_t/\kappa_t - \dot{\gamma}_t/\gamma_t$. En remplaçant, dans cette équation, $\dot{\gamma}_t/\gamma_t$ par sa valeur donnée par (1) et $\dot{\kappa}_t/\kappa_t$ par sa valeur donnée par (2), on obtient (3).

Étant donnée la trajectoire d'équilibre de κ_t (convergeant vers κ^* lorsque $t \to +\infty$), la trajectoire d'équilibre de s_t doit donc satisfaire l'équation différentielle du premier ordre (3) et la condition terminale $s_t \to s^*$ lorsque $t \to +\infty$ (du fait que l'économie converge dans le temps vers l'état régulier).

Question 13 (1 point) Lorsque $s^* = 1/\theta$, la trajectoire constante $s_t = s^*$ satisfait l'équation différentielle (3) et la condition terminale $s_t \to s^*$, c'est donc la trajectoire d'équilibre. Le taux d'épargne est donc constant dans le temps, et le modèle coïncide alors exactement avec le modèle de Solow-Swan avec un taux d'épargne exogène s égal à s^*. Les deux modèles ont donc exactement les mêmes implications positives et normatives (si on se limite, en termes d'implications normatives, au fait qu'il n'y a pas inefficience dynamique – seule implication normative envisageable dans le modèle de Solow-Swan, car il n'y a pas de fonction d'utilité dans ce modèle).

Question 14 (2 points) L'économie se déplace le long du sentier-selle vers le point d'état régulier, donc $\dot{\kappa}_t > 0$ et $\kappa_t < \kappa^*$.

Dans le cas $s^* > 1/\theta$, on ne peut pas avoir $s_t < 1/\theta$, car le membre de droite de (3) serait alors négatif, donc le membre de gauche de (3) serait aussi négatif, donc s_t diminuerait dans le temps, donc s_t ($< 1/\theta$) ne pourrait pas converger vers s^* ($> 1/\theta$). On ne peut pas non plus avoir $s_t > s^*$, car le membre de droite de (3) serait alors positif (du fait que $\kappa_t < \kappa^*$), donc le membre de gauche de (3) serait aussi positif, donc s_t augmenterait dans le temps, donc s_t ($> s^*$) ne pourrait pas converger vers s^*. Par conséquent, on a nécessairement $1/\theta < s_t < s^*$.

De plus, en dérivant (3) par rapport au temps, on obtient

$$\frac{\ddot{s}_t}{\alpha(1-s_t)} = \frac{-\left(\dot{s}_t\right)^2}{\alpha(1-s_t)^2} - (1-\alpha)\frac{\dot{\kappa}_t}{\kappa_t^{2-\alpha}}\left(s_t - \frac{1}{\theta}\right) + \frac{\dot{s}_t}{\kappa_t^{1-\alpha}}.$$

Donc, si $\dot{s}_t < 0$, alors $\ddot{s}_t < 0$. Par conséquent, si s_t décroissait à une certaine date, alors s_t décroîtrait à toute date ultérieure, et donc s_t ($< s^*$) ne pourrait pas converger vers s^*. On en conclut que $\dot{s}_t > 0$ à toute date t.

Question 15 (2 points) La dynamique du taux d'épargne résulte de deux forces de sens opposés. D'un côté, puisque $r_t = f'(\kappa_t) - \delta$, on a $\dot{r}_t = f''(\kappa_t)\dot{\kappa}_t < 0$; le rendement de l'épargne diminue donc au cours du temps ; ce qui a tendance, toutes choses égales par ailleurs, à faire décroître le taux d'épargne s_t au cours du temps. De l'autre côté, les ménages souhaitent lisser leur consommation dans le temps, et donc transférer de la consommation depuis le futur (où ils consommeront beaucoup, du fait que l'économie aura "rattrapé" son état régulier) vers le présent ; ce qui a tendance, toutes choses égales par ailleurs, à faire croître le taux d'épargne s_t au cours du temps. Le taux d'épargne croît ou décroît dans le temps selon la force qui domine.

L'inégalité $s^* > 1/\theta$ est équivalente à $[\alpha(n + g + \delta) - g]\theta > \delta + \rho$, c'est-à-dire à $\alpha(n + g + \delta) > g$ et $\theta > (\delta + \rho)/[\alpha(n + g + \delta) - g]$. Il faut donc que θ soit suffisamment grand. Toutes choses égales par ailleurs, plus θ est élevé, plus l'élasticité de substitution intertemporelle $1/\theta$ est faible, plus les ménages souhaitent lisser leur consommation dans le temps, et donc transférer de la consommation depuis le futur (où ils consommeront beaucoup, du fait que l'économie aura "rattrapé" son état régulier) vers le présent ; ce qui a tendance, toutes choses égales par ailleurs, à faire croître le taux d'épargne s_t au cours du temps.

Question 16 (1 point) Le paramètre α est égal à la part de la rémunération du capital dans la production ; dans les données, cette part est d'environ 1/3. L'inégalité $\alpha \geq 0.69$ semble donc empiriquement implausible. Des valeurs aussi élevées pour α sont obtenues lorsqu'on estime le modèle de Solow-Swan sur des données de panel, et la prise en compte du capital humain (en plus du capital physique) permet de résoudre ce problème (cf exercice 1 du TD 1). Il semble donc légitime de penser qu'introduire le capital humain dans le modèle de Cass-Koopmans-Ramsey pourrait le réconcilier avec les données (en termes de dynamique du taux d'épargne) avec $\alpha = 1/3$.

Question 17 (1,5 point) La hausse de n laisse κ^* inchangé et augmente s^*. Dans le plan (κ_t, γ_t), la droite verticale ne bouge pas et la courbe en cloche se déplace vers le bas. A la date 0, l'économie passe directement de l'ancien état régulier au nouvel état régulier (κ_t ne varie pas et γ_t chute discontinûment à la date 0). Le taux d'épargne augmente donc de manière discontinue à la date 0 pour passer directement à sa nouvelle valeur d'état régulier et y rester par la suite. La hausse de n augmente la dilution du capital par unité de travail efficace κ_t ; pour que κ_t reste constant malgré l'augmentation de sa dilution dans le temps, il faut davantage d'investissement, donc davantage d'épargne. La trajectoire de s_t ne dépend pas du signe de $s^* - 1/\theta$ (ni à l'ancien ni au nouvel état régulier).

Question 18 (2 points) La baisse de θ augmente κ^* et s^*. La hausse de κ^* et le fait que κ_t ne varie pas discontinûment à la date 0 impliquent que nous sommes dans le cas de la question 14 ($\kappa_0 < \kappa^*$, où κ^* est ici la valeur de κ_t au nouvel état régulier). On en déduit que si $s^* > 1/\theta$, alors $1/\theta < s_t < s^*$ et $\dot{s}_t > 0$ après la date 0 ; et qu'inversement, si $s^* < 1/\theta$, alors $s^* < s_t < 1/\theta$ et $\dot{s}_t < 0$ après la date 0 (où s^* est ici la valeur de s_t au nouvel état régulier). L'interprétation de ces sens de variation de s_t au cours du temps (après la date 0) est la même qu'à la question 15.

A la date 0, s_t varie de manière discontinue. Dans le plan (κ_t, γ_t), la courbe en cloche se bouge pas et la droite verticale se déplace vers la droite. Le nouveau point d'état régulier est donc en haut à droite de l'ancien point d'état régulier, et le nouveau sentier-selle est en-dessous de l'ancien sentier-selle. A la date 0, le stock de capital κ_t ne varie pas de manière discontinue, et la consommation γ_t chute donc de manière discontinue pour passer de l'ancien au nouveau sentier-selle. Le taux d'épargne, donc, augmente de manière discontinue à la date 0. Ce comportement du taux d'épargne à la date 0 ne dépend pas du signe de $s^* - 1/\theta$ (ni à l'ancien ni au nouvel état régulier). Pour faire augmenter le stock de capital au cours du temps, il faut davantage d'investissement et donc davantage d'épargne.