TD Théorie du signal - Corrigé

Microéconomie, deuxième année, ENSAE

1 Le marché des voitures d'occasion avec possibilité de garantie

On considère un marché de voiture d'occasions avec 90 vendeurs, dont 2/3 de mauvaise qualité et 1/3 de bonne qualité. Il y a un 100 acheteurs potentiels sur le marché. Une voiture de bonne qualité peut rouler 6 mois sans problème avec probabilité 3/4. En revanche, il y a une probabilité 1/4 qu'elle tombe en panne durant cette période. Pour les voitures de mauvaise qualité, les probabilités sont inversées.Une voiture qui roule 6 mois sans problème procure à un acheteur une utilité de 3. Si elle tombe en panne durant les 6 premiers mois, l'utilité de l'acheteur est 0. Pour les vendeurs, l'utilité est égale à 2 si la voiture roule 6 mois sans problème, et 0 sinon. On suppose que le marché est concurrentiel : le prix est déterminé par la condition d'égalité entre l'offre et la demande, et les agents considèrent le prix comme donné. Les acheteurs et les vendeurs sont neutres au risque.

Question 1: Si les vendeurs sont informés de la qualité mais pas les acheteurs, montrer qu'il n'y a pas d'équilibre où les bonnes voitures sont vendues. *Indication : déterminer l'offre et la demande sur le marché des voitures.*

Un vendeur de bonne qualité est prêt à vendre sa voiture si le prix est supérieur à l'utilité espérée s'il ne la vend pas :

$$p \geq \frac{3}{4} \times 2 + \frac{1}{4} \times 0 = \frac{3}{2}$$

De même un vendeur de mauvaise qualité est prêt à vendre sa voiture si et seulement si :

$$p \geq \frac{1}{4} \times 2 = \frac{1}{2}$$

L'offre de voitures est égale à :

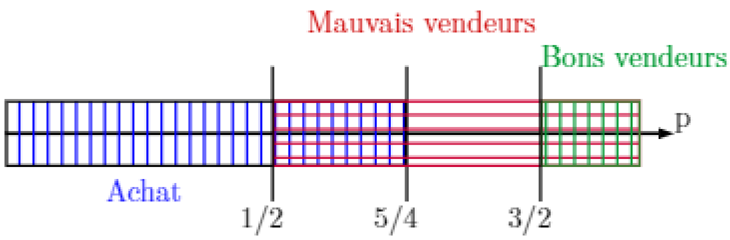
$$O(p) = \begin{cases} 90 & \text{si } p \geq \frac{3}{2} \\ 60 & \text{si } p \in [\frac{1}{2}; \frac{3}{2}[\\ 0 & \text{si } p < \frac{1}{2} \end{cases}$$

Pour avoir un équilibre où les bonnes voitures sont vendues, il faut que $p \geq 3/2$.

Lorsqu'un acheteur anticipe que toutes les voitures sont sur le marché, il est prêt à acheter si le prix est inférieur à son espérance d'utilité :

$$p \leq \frac{1}{3}\left(\frac{3}{4} \times 3\right) + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{4} \times 3\right) = \frac{5}{4} < \frac{3}{2}$$

Les acheteurs ne sont donc pas prêts à payer le prix qui permettrait d'attirer les bonnes voitures. A l'équilibre, seuls les mauvais vendeurs vendent.



Question 2: À présent on suppose que les vendeurs peuvent offrir une garantie aux acheteurs, du type "si la voiture tombe en panne, nous vous remboursons une somme G".

Montrer qu'il existe un équilibre où les vendeurs de bonne qualité se signalent en offrant une garantie G, et où les vendeurs de mauvaise qualité n'offrent pas de garantie. Donnez une condition sur G pour que ce soit le cas.

La garantie est un "signal", dans le sens où elle ne certifie pas directement la qualité, mais où donner une garantie est plus coûteux pour les vendeurs de mauvaise qualité que pour les vendeurs de bonne qualité.

Recherchons un équilibre séparateur dans lequel les bons vendeurs offrent une garantie d'un montant G tandis que les mauvais vendeurs n'en offrent pas.

Cet équilibre doit être tel que :

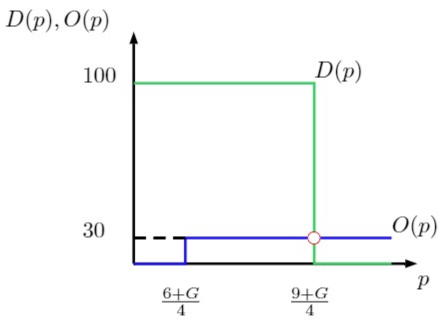
1. Lorsque les consommateurs observent une garantie G ils doivent savoir que ce sont des vendeurs de qualité. Leur espérance d'utilité est donc : $3 \times \frac{3}{4} + \frac{G}{4}$. Les 100 achètent si $p \leq \frac{9+G}{4}$. Le vendeur de bonne qualité vend si garder sa voiture ne lui rapporte pas plus que la vendre et devoir (parfois) payer la garantie : $p - \frac{G}{4} \geq \frac{3}{2}$. On a donc l'offre et la demande suivante :

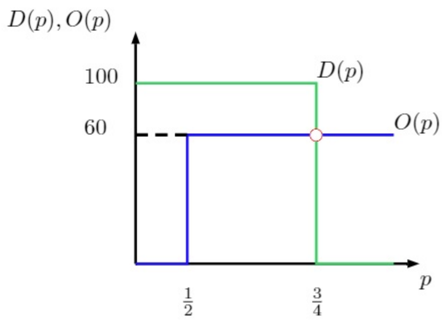
$$D(p) = \begin{cases} 0 & \text{si } p \geq \frac{9+G}{4} \\ \in]0;100[& \text{si } p = \frac{9+G}{4} \\ 100 & \text{si } p \leq \frac{9+G}{4} \end{cases} \qquad O(p) = \begin{cases} 30 & \text{si } p \geq \frac{6+G}{4} \\ \in]0;30[& \text{si } p = \frac{6+G}{4} \\ 0 & \text{si } p \leq \frac{6+G}{4} \end{cases}$$

2. Lorsque les consommateurs n'observent pas une garantie G ils doivent savoir que ce sont des vendeurs de mauvaise qualité. Leur espérance d'utilité est donc : $3 \times \frac{1}{4}$. Les 100 achètent si $p \leq \frac{3}{4}$. Le vendeur de mauvaise qualité vend si garder sa voiture ne lui rapporte pas plus que de la vendre : $p \geq \frac{1}{2}$. On a donc l'offre et la demande suivante :

$$D(p) = \begin{cases} 0 & \text{si } p \geq \frac{3}{4} \\ \in]0;100[& \text{si } p = \frac{3}{4} \\ 100 & \text{si } p \leq \frac{3}{4} \end{cases} \qquad O(p) = \begin{cases} 60 & \text{si } p \geq \frac{1}{2} \\ \in]0;60[& \text{si } p = \frac{1}{2} \\ 0 & \text{si } p \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Graphiquement :





L'équilibre est en $p_G = \frac{9+G}{4}$ et $p_B = \frac{3}{4}$ à condition qu'aucun des deux types de vendeurs n'a intérêt à dévier et à agir différemment :

- Pour un bon vendeur, vendre avec garantie doit rapporter toujours plus que vendre sans garantie ou ne pas vendre :

$$p_G - \frac{G}{4} \geq \max\{ \underbrace{p_B}_{\text{Vendre sans garantie}} ; \underbrace{3/2}_{\text{Ne pas vendre}} \} \Leftrightarrow \frac{9}{4} \geq \frac{3}{2}$$

Cette inéquation est toujours vérifiée.

- Pour un mauvais vendeur, vendre sans garantie doit rapporter toujours plus que vendre avec garantie ou ne pas vendre :

$$p_B \geq \max\{ \underbrace{p_G - \frac{3G}{4}}_{\text{Vendre avec garantie}} \; ; \; \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{Ne pas vendre}} \} \Leftrightarrow \frac{3}{4} \geq \max\{\frac{9-2G}{4}; \frac{1}{2}\}$$

Si $\frac{9-2G}{4} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow G \geq \frac{7}{2}$ alors la contrainte d'incitation est vérifiée : vendre avec garantie est pire que de ne pas vendre et il préfère toujours vendre sans garantie que de ne pas vendre.

Si $G \leq \frac{7}{2}$ alors il est plus intéressant de vendre avec garantie que de ne pas vendre. Il faut alors que G soit assez grand ($G \geq 3$) pour que la garantie soit dissuasive.

Il existe donc un équilibre séparateur où les bons vendeurs proposent une garantie G et où les mauvais vendeurs n'offrent pas de garantie si $G \geq 3$.

2 Financement de projet et asymétrie d'information

Un entrepreneur ne disposant d'aucune richesse initiale fait face à une opportunité de projet nécessitant un investissement d'un montant I. Le projet rapporte R si c'est un succès, 0 si c'est un échec. Il existe un grand nombre d'agents disposant de fonds à prêter. Ces agents ont le choix entre prêter à l'entrepreneur et placer à un taux sans risque, normalisé à zéro. Tous les agents sont supposés neutres au risque.

L'entrepreneur observe la qualité du projet. Un bon projet a une probabilité p d'être un succès. Un mauvais projet a une probabilité q d'être un succès, avec $p > q$. On fait de plus l'hypothèse que $pR > I > qR$.

Question 1: Commenter cette hypothèse. *Indication : déterminer l'espérance de revenu net pour chaque type de projet.*

L'espérance de revenu net d'un bon projet est : $pR - I$. L'espérance de revenu net d'un mauvais projet est : $qR - I$. L'hypothèse indique donc que lorsque la qualité du projet est observée, il est socialement optimal de ne financer que les bons projets.

Les investisseurs n'observent pas la qualité du projet. La probabilité qu'un projet soit bon est α. Soit $m = \alpha p + (1-\alpha)q$.

Le déroulement du jeu est le suivant:

1. L'entrepreneur observe la qualité du projet.
2. L'entrepreneur choisit un salaire W qu'il touchera en cas de succès.
3. Les investisseurs décident de prêter à l'entrepreneur ou non.
4. Le projet se réalise, et les gains sont partagés: $R - W - I$ pour les investisseurs, et W pour l'entrepreneur en cas de succès, $-I$ pour les investisseurs et 0 pour l'entrepreneur en cas d'échec.

Question 2: Si la qualité du projet est observée par tout le monde, quel est l'équilibre du jeu ?

L'espérance de profit de l'investisseur pour un mauvais projet est :

$$\mathbb{E}(\Pi_I) = q(R - W - I) - (1-q)I = q(R - W) - I < 0 \text{ (par hypothèse)}$$

Les mauvais projets ne sont jamais financés.

L'espérance de profit de l'investisseur pour un bon projet est :

$$\mathbb{E}(\Pi_I) = p(R - W - I) - (1-p)I = p(R - W) - I$$

Il ne participe au projet que si cette espérance est positive.

L'entrepreneur maximise son espérance de profit sous contrainte de participation de l'investisseur :

$$\max_W pW$$

$$\text{s.c } p(R - W) - I \geq 0$$

L'objectif est strictement croissant en W qui a une borne supérieure par la contrainte. Cette dernière est donc saturée à l'équilibre : $p(R - W^*) = I$ Tous les bons projets sont financés et les mauvais ne le sont pas, la situation est efficace socialement.

Question 3: Montrer que dans le cas avec information asymétrique, l'équilibre est inefficace socialement.

Le problème ici est qu'un investisseur ne connaît pas la qualité du projet donc un entrepreneur avec un mauvais projet peut imiter l'entrepreneur avec un bon projet en demandant le même salaire.

L'espérance de profit de l'investisseur est :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\Pi_I) &= \alpha[p(R-W-I)-(1-p)I]+(1-\alpha)[q(R-W-I)-(1-q)I]\\ &= [\alpha p+(1-\alpha)q](R-W-I)-[\alpha(1-p)+(1-\alpha)(1-q)]I\\ &= m(R-W-I)-(1-m)I\end{aligned}$$

Il ne participe au projet que si cette espérance est positive.

L'entrepreneur maximise son espérance de profit pW ou qW selont le type de son projet, sous contrainte de participation de l'investisseur. Pour la même raison que précédemment, il sature cette contrainte et choisit W tel que $m(R-W)=I$.

- Si $mR > I$ (i.e $W \geq 0$), l'entrepreneur propose alors $W^{**} = R - I/m$, et obtient le financement: il y a alors sur-investissement, car tous les projets, même les mauvais, sont financés.
- En revanche si $mR < I$, l'entrepreneur ne peut pas s'offrir un salaire descent. Il y a alors sous-investissement, car aucun des projets ne sont financés, y compris les bons.

Question 4: On suppose à présent que l'entrepreneur peut déposer en gage un bien dont il est le propriétaire, après avoir observé la qualité du projet. Ce bien a une valeur de C pour lui, et une valeur $\beta C < C$ pour les investisseurs. Plus spécifiquement, l'entrepreneur s'engage alors à céder le bien aux investisseurs si le projet échoue. Montrer que sous certaines conditions ce mécanisme peut servir aux entrepreneurs ayant un bon projet à se signaler auprès du marché.

On cherche un équilibre séparateur où seuls les entrepreneurs avec un bon projet utilisent le mécanisme. L'équilibre vérifie alors les conditions suivantes :

- Un investisseur qui observe un gage doit savoir que le projet est bon. Il accepte de prêter si et seulement si :

$$\mathbb{E}\Pi_I = p(R - W - I) + (1-p)(\beta C - I) \geq 0$$

L'entrepreneur maximisant $pW - (1-p)C$ choisira alors un salaire qui sature cette contrainte de participation : $W^{***} = \frac{(1-p)\beta C - I + pR}{p}$.

- Un investisseur qui n'observe pas de gage doit savoir que le projet est mauvais et ne pas le financer ($\mathbb{E}\Pi_I = q(R - W) - I \leq 0$).

Pour que cela soit bien un équilibre séparateur, il faut vérifier qu'aucun des deux types d'entrepreneurs (avec bon ou mauvais projet) n'a intérêt à dévier en se faisant passer pour l'autre ou en ne participant pas (il obtient alors 0) :

- Si un bon entrepreneur dépose son bien en gage, sont utilité espérée est $pW^{***} - (1-p)C$. S'il ne le fait pas les investisseurs croient qu'il est mauvais. D'après les questions précédentes, il ne peut alors pas se financer, et a une utilité égale à zéro. Sa contrainte d'incitation est alors :

$$\begin{aligned} pW^{***} - (1-p)C &\geq 0 \\ \Leftrightarrow (1-p)\beta C - I + pR - (1-p)C &\geq 0 \\ \Leftrightarrow pR - I - (1-p)(1-\beta)C &\geq 0 \\ \Leftrightarrow pR - I &\geq (1-p)(1-\beta)C \end{aligned}$$

- Si un mauvais entrepreneur ne dépose pas de bien en gage, il obtient également une utilité nulle. S'il se fait passer pour un bon entrepreneur, les investisseurs sont trompés et acceptent de lui verser le salaire W^{***} en cas de succès. Le mauvais entrepreneur n'a pas intérêt à offrir de gage si :

$$\begin{aligned} qW^{***} - (1-q)C &\leq 0 \\ \Leftrightarrow q\frac{(1-p)\beta C - I + pR}{p} - (1-q)C &\leq 0 \\ \Leftrightarrow (1-p)\beta C - I + pR - \frac{p(1-q)C}{q}) &\leq 0 \\ \Leftrightarrow pR - I &\leq C(\frac{p(1-q)}{q} - \beta(1-p)) \end{aligned}$$

Un équilibre séparateur est donc possible si et seulement si :

$$(1-p)(1-\beta)C \leq pR - I \leq C(\frac{p(1-q)}{q} - \beta(1-p))$$

Ces conditions sont-elles compatibles ?

$$(1-p)(1-\beta)C \leq C(\frac{p(1-q)}{q} - \beta(1-p))$$

$$\Leftrightarrow q(1-p)(1-\beta) \leq p(1-q) - \beta q(1-p)$$

$$\Leftrightarrow q(1-p) \leq p(1-q)$$

Ce qui est vrai car $p \geq q$ d'après l'énoncé.

3 Financement de projets par dette et fonds propres (P 2016-2017)

Des entrepreneurs cherchent à financer des projets auprès du système bancaire. Chaque entrepreneur a un seul projet, qui peut être bon ou mauvais. Les bons projets réussissent avec probabilité p_H, et les mauvais avec probabilité $p_L < p_H$. Un projet qui réussit rapporte un profit $\Pi > 0$, un projet qui échoue rapporte zéro.

Tous les projets nécessitent un investissement initial $I > 0$. Le taux d'intérêt est normalisé à zéro. On suppose dans tout l'exercice que:

$$p_H \Pi - I > 0 > p_L \Pi - I. \tag{1}$$

Les banques n'observent pas la qualité des projets. Elles savent seulement que parmi les entrepreneurs, une fraction λ a un bon projet, une fraction $1-\lambda$ a un mauvais projet, avec $0 < \lambda < 1$. On note $\bar{p} = \lambda p_H + (1-\lambda)p_L$.

Question 1 Dans cette question, on suppose que tous les entrepreneurs empruntent auprès des banques l'intégralité de la mise initiale I. On note R le montant du remboursement du prêt. L'entrepreneur doit payer ce montant à la banque quand son projet réussit. En cas d'échec, il ne rembourse pas, car il est protégé par la responsabilité limitée.

a) Du point de vue d'une banque, avec quelle probabilité va-t-elle être remboursée? Écrire la contrainte de participation des banques.

b) Écrire la contrainte de participation d'un entrepreneur en fonction Π et R.

c) A quelle condition sur λ est-il optimal d'accorder le financement ?

d) En supposant que les banques sont en concurrence pure et parfaite, déterminer l'espérance de profit des banques, notée V^b, et l'espérance de profit de chaque type d'entrepreneur, V_H^e et V_L^e.

a) La banque ne sait pas si le projet est bon ou mauvais. S'il est bon (avec probabilité λ) elle recevra R seulement en cas de succès (avec probabilité p_H). S'il est mauvais (avec probabilité $1-\lambda$) elle recevra R seulement en cas de succès (avec probabilité p_L). Sa contrainte de participation est donc :

$$[\lambda p_H + (1-\lambda)p_L]R = \bar{p}R \geq I$$

b) L'espérance de profit de l'entrepreneur est :

$$p_H(\Pi - R) \text{ s'il a un bon projet}$$
$$p_L(\Pi - R) \text{ s'il a un mauvais projet}$$

La contrainte de participation est donc dans les deux cas $\Pi \geq R$.

c) Il y a financement s'il est socialement optimal de le faire i.e le surplus est positif :

$$\begin{aligned} \bar{p}R - I + \lambda[p_H(\Pi - R)] + (1-\lambda)p_L(\Pi - R) \geq 0 \\ \Leftrightarrow \lambda p_H \Pi + (1-\lambda)p_L \Pi - I \geq 0 \\ \Leftrightarrow \bar{p}\Pi - I \geq 0 \end{aligned}$$

D'après (1), cette condition est fausse pour $\lambda = 0$ ($\bar{p} = p_L$) et vraie pour $\lambda = 1$ ($\bar{p} = p_H$). Comme $\bar{p}$ est croissante en λ, plus il y a de bons projets, plus les projets sont financés. La valeur seuil est :

$$\begin{aligned} \bar{p}\Pi - I \geq 0 \\ \lambda p_H \Pi - \lambda p_L \Pi + p_L \Pi \geq I \\ \lambda \geq \frac{I - p_L \Pi}{(p_H - p_L)\Pi} \end{aligned}$$

Cette valeur seuil est comprise entre 0 et 1.

d) Dans le cas de concurrence bancaire, les banques font zéro profit en espérance,

$V^b = 0$, donc le remboursement est :

$$R^* = \frac{I}{\bar{p}}$$

Les utilités des deux types d'entrepreneurs sont :

$$V_H^{e*} = p_H(\Pi - \frac{I}{\bar{p}}) \text{ et } V_L^{e*} = p_L(\Pi - \frac{I}{\bar{p}})$$

Question 2 On suppose jusqu'à la fin que les banques sont en concurrence parfaite. On suppose de plus que les entrepreneurs peuvent choisir de financer une partie A de l'investissement I sur leurs fonds propres, mais que cela leur impose de renoncer à d'autres activités et se traduit pour eux par un coût $(1+\rho)A$, avec $\rho > 0$.

a) On considère un entrepreneur qui emprunte $I - A$ auprès d'une banque, rembourse R en cas de succès du projet, et finance le reste sur fonds propres.

Déterminer l'espérance de profit de la banque, $V^b(A, R)$, et l'espérance d'utilité de l'entrepreneur, $V^e(A, R)$, en fonction de $\bar{p}, p_H, p_L, R, \Pi, I, A$ et ρ.

b) Déterminer le surplus total et le niveau efficace de A.

c) Dans le plan (A, R), représenter la contrainte de participation des banques lorsqu'elles savent que l'entrepreneur est de type H. Idem pour un entrepreneur de type L. Idem lorsque la banque ne connaît pas le type de l'entrepreneur.

d) Représenter dans le même plan l'allure des courbes d'iso-utilité des deux types d'entrepreneur.

a) L'espérance de profit de la banque est :

$$V^b(A, R) = \bar{p}R - (I - A).$$

L'espérance d'utilité de l'entrepreneur est :

$$V^e(A, R) = p_H(\Pi - R) - (1+\rho)A \text{ s'il a un bon projet}$$
$$V^e(A, R) = p_L(\Pi - R) - (1+\rho)A \text{ s'il a un mauvais projet}$$

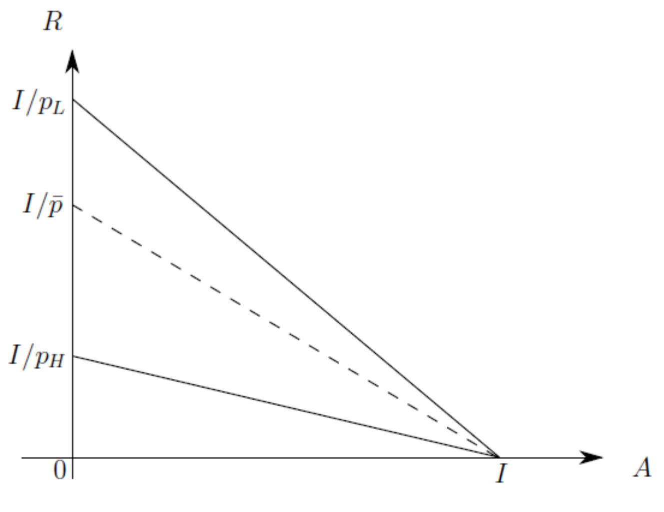
b) Le surplus total est :

$$\begin{aligned} W &= V^b(A,R) + \lambda[p_H(\Pi - R) - (1+\rho)A] + (1-\lambda)[p_L(\Pi - R) - (1+\rho)A] \\ &= \overline{p}R - (I - A) + \lambda[p_H(\Pi - R) - (1+\rho)A] + (1-\lambda)[p_L(\Pi - R) - (1+\rho)A] \\ &= \lambda[p_H\Pi - (1+\rho)A] + (1-\lambda)[p_L\Pi - (1+\rho)A] - (I - A) \\ &= \overline{p}\Pi - I - \rho A \end{aligned}$$

Comme $\rho > 0$, le niveau efficace de A est $A^* = 0$.

c) On trace les droites d'équation :

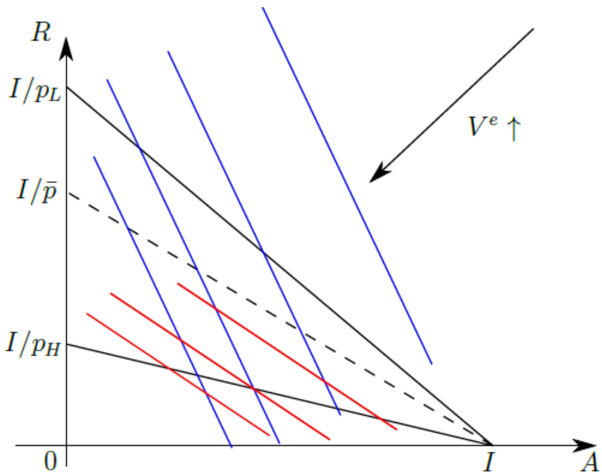
$$R = \frac{I - A}{p_H}$$
$$R = \frac{I - A}{p_L}$$
$$R = \frac{I - A}{\bar{p}}$$



d) On trace les droites d'équation :

$$V^e(A,R) = p_H(\Pi - R) - (1+\rho)A = k \Leftrightarrow R = \Pi - \frac{k}{p_H} - \frac{(1+\rho)A}{p_H}$$
$$V^e(A,R) = p_L(\Pi - R) - (1+\rho)A = k \Leftrightarrow R = \Pi - \frac{k}{p_L} - \frac{(1+\rho)A}{p_L}$$

La pente est de $\frac{(1+\rho)}{p}$ plus faible pour les type H (en rouge) que pour les types L (en bleu). D'autre part, $\frac{(1+\rho)}{p} \geq \frac{1}{p}$ donc les droites d'indifférence sont plus pentues que celles d'iso-profit.



Question 3 On cherche un équilibre séparateur où les entrepreneurs ayant un bon projet le signalent aux banques en investissant davantage sur leurs fonds propres.

On note A_H et R_H le montant investi sur fonds propres et le remboursement bancaire pour les bons types, et de même A_L et R_L pour les mauvais types, avec $0 \leq A_L < A_H$.

a) Calculer R_H et R_L en fonction de I, A_H, A_L, p_H, p_L.

b) Écrire les contraintes d'incitation associées à l'équilibre séparateur.

c) Calculer l'espérance de surplus total à l'équilibre séparateur, en fonction de $\bar{p}, \Pi, I, \rho, A_H, A_L$ et λ.

d) Calculer les valeurs minimales de A_H et A_L compatibles avec la séparation des deux types d'entrepreneurs à l'équilibre. Quelle contrainte d'incitation est saturée ? Représenter l'équilibre graphiquement.

a) Avec un équilibre séparateur, quand une banque voit un entrepreneur demander un emprunt $I - A_H$, elle comprend qu'il a un bon projet. De même, quand elle voit un entrepreneur demander un emprunt $I - A_L$, elle comprend qu'il a un mauvais projet.

La concurrence bancaire fait que les banques réalisent un profit nul sur chaque type d'entrepreneur, donc :

$$R_H = \frac{I - A_H}{p_H} \quad \text{et} \quad R_L = \frac{I - A_L}{p_L}. \tag{2}$$

b) La contrainte d'incitation du bon type est:

$$p_H(\Pi - R_H) - (1+\rho)A_H \geq p_H(\Pi - R_L) - (1+\rho)A_L.$$

Pour le mauvais type, dire vrai, doit rapporter plus que mentir :

$$p_L(\Pi - R_H) - (1+\rho)A_H \leq p_L(\Pi - R_L) - (1+\rho)A_L \tag{3}$$

c) L'espérance de surplus est :

$$\begin{aligned}
W = {} & \lambda[V^b(A_H, R_H) + p_H(\Pi - R_H) - (1+\rho)A_H] \\
& + (1-\lambda)[V^b(A_L, R_L) + p_L(\Pi - R_L) - (1+\rho)A_L] \\
& = \lambda[p_H R_H - (I - A_H) + p_H(\Pi - R_H) - (1+\rho)A_H] \\
& + (1-\lambda)[p_L R_L - (I - A_L) + p_L(\Pi - R_L) - (1+\rho)A_L] \\
& = \lambda[p_H\Pi - (1+\rho)A_H - (I - A_H)] + (1-\lambda)[p_L\Pi - (1+\rho)A_L - (I - A_L)] \\
& = \bar{p}\Pi - I - \rho\left[\lambda A_H + (1-\lambda)A_L\right]
\end{aligned}$$

Pour que le surplus espéré soit le plus grand possible, il faut que A_H et A_L soient le plus petit possible, car $\rho > 0$.

d) Le surplus est strictement décroissant en A_H et A_L, or l'énoncé indique :

$$A_H > A_L \geq 0$$

A l'équilibre séparateur le plus efficace, les mauvais types n'investissent pas du tout sur fonds propres : $A_L = 0$.

Les contraintes d'incitations deviennent :

$$\begin{aligned}
p_H(\Pi - R_H) - (1+\rho)A_H &\geq p_H(\Pi - R_L) - (1+\rho)A_L = p_H(\Pi - R_L) \\
p_L(\Pi - R_L) - (1+\rho)A_L &= p_L(\Pi - R_L) \geq p_L(\Pi - R_H) - (1+\rho)A_H
\end{aligned}$$

Nb : Pour les mauvais types, dire vrai rapporterait $p_L(\Pi - R_L) \leq 0$. La contrainte du bas type devient donc formellement : mentir doit apporter un profit négatif ou nul.

Les contraintes d'incitations se réecrivent :

$$A_H \leq \frac{p_H(R_L - R_H)}{1+\rho}$$
$$A_H \geq \frac{p_L(R_L - R_H)}{1+\rho}$$

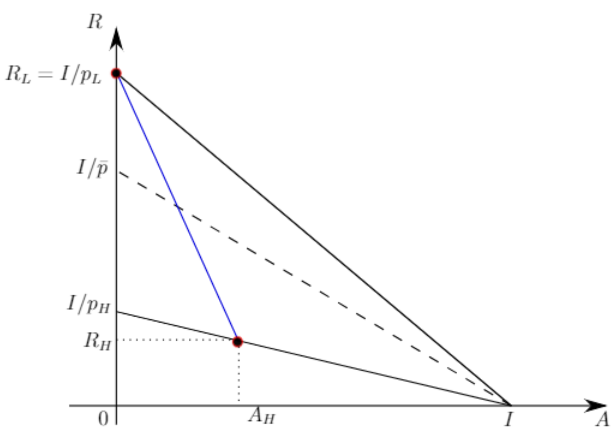
L'objectif est décroissant en A_H, or la contrainte d'incitation du bas type donne une borne supérieure sur sa valeur. A l'équilibre c'est donc la contrainte d'incitation du bas type qui est saturée :

$$A_H = \frac{p_L(R_L - R_H)}{1+\rho}$$
$$A_H = \frac{p_L(\frac{I-A_L}{p_L} - \frac{I-A_H}{p_H})}{1+\rho}$$
$$A_H(1+\rho - \frac{p_H}{p_L}) = (I - \frac{Ip_H}{p_L})$$
$$A_H = I(1 - \frac{p_L}{p_H})[1+\rho - \frac{p_L}{p_H}]^{-1}$$

Noter que l'équilibre ne dépend pas de λ.

On remarquera aussi que lorsque ρ diminue jusqu'à se rapprocher de 0, le signal envoyé aux banques consistant à emprunter sur fonds propres est de moins en moins coûteux (par rapport à s'endetter auprès des banques) et pour se séparer des mauvais types, les bons types doivent investir de plus en plus sur leurs fonds propres.

Graphiquement :

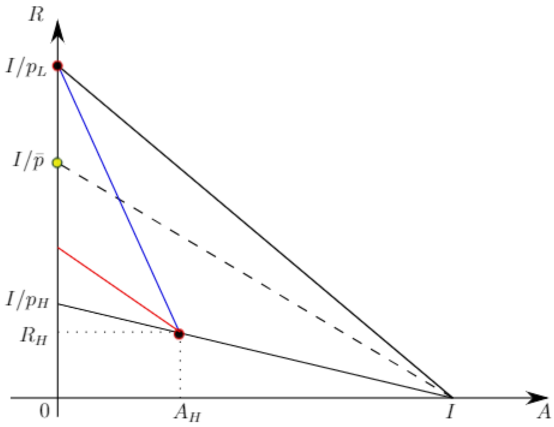


Remarquez que la contrainte d'incitation du mauvais type est saturée, L est donc indifférent entre (R_H, A_H) et (R_L, A_L).

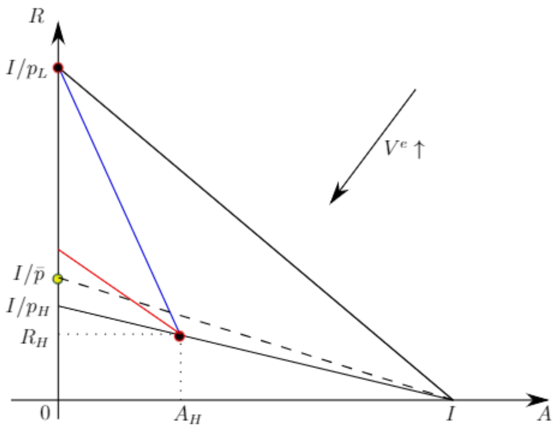
Question 4 Les entrepreneurs qui ont un bon projet préfèrent-ils l'équilibre mélangeant vu à la question 1 ou l'équilibre séparateur vu à la question 3 ? Discuter en fonction de λ.

D'un côté, les bons types veulent se séparer des mauvais pour bénéficier d'un remboursement plus faible de leur emprunt, mais de l'autre c'est coûteux pour eux d'utiliser leurs fonds propres car $\rho > 0$.

Quand λ est petit, les bons types préfèrent se séparer des mauvais, car alors il y a beaucoup de mauvais types ($\bar{p}$ est proche de p_L) et le remboursement que les bons types doivent payer s'ils sont mélangés, $I/\bar{p}$, est élevé.



Quand λ est grand, c'est l'inverse, voir ci dessous :



4 Effort et réputation sur le marché du travail

On considère une économie composée de 2 firmes neutres au risque et d'un travailleur, dont le talent θ est connu de lui seul. θ peut prendre 2 valeurs, 0 ou 1. Ces deux valeurs sont équiprobables.

Le travailleur vit T périodes. À chaque période, il offre ses services à l'une des deux firmes. Il est alors en charge d'un projet. Si le travailleur exerce un effort $e \in [0;1]$, le projet est un succès avec probabilité $\max(e, \theta)$. Lorsque le projet réussit ($q = 1$), la firme réalise un gain de 1. On suppose que l'effort est coûteux pour le travailleur : un effort e entraîne une désutilité $c(e) = e^2/2$. Le niveau d'effort choisi par le travailleur n'est pas observé par les firmes. Le marché du travail est réglementé, de sorte qu'il est interdit aux firmes de faire varier la rémunération du travailleur dans l'année courante en fonction de la réussite du projet.

Le déroulement du jeu est le suivant: À chaque période t,

1. Les firmes observent l'ensemble des réalisations passées (succès ou échecs) et forment une croyance sur θ.
2. Chaque firme i offre un salaire. Le travailleur va chez le plus offrant.
3. Le travailleur exerce un niveau d'effort e_t, et son utilité est $w_t - c(e_t)$.
4. Le projet se réalise avec probabilité $\max(e_t, \theta)$.

Question 1: Montrer que si θ est observé par les firmes, le travailleur n'exerce plus aucun effort et reçoit un salaire égal à θ à chaque période.

Plaçons-nous à la dernière période (T). Si le travailleur est employé au salaire w_T, il choisit son effort e en maximisant son utilité $U = w_T - c(e)$. Il n'a aucune incitation à travailler: il fournira alors un effort nul ($e = 0$). Le profit d'une entreprise est donc :

$$\Pi = \max[e; \theta] - w_T = \theta - w_T$$

Le travailleur va chez l'entreprise la plus offrante, ce qui les incite par concurrence à avoir un profit nul. On en déduit : $w_T = \theta$.

À l'avant-dernière période, tout le monde anticipe parfaitement ce qui se passera à la dernière période : on sait que quoi qu'il arrive le travailleur ne fournira pas d'effort et gagnera θ. Dans ce cas, quel que soit son salaire w_{T-1}, le travailleur n'a toujours pas intérêt à fournir d'effort. Le raisonnement s'applique donc jusqu'à $t = 1$, le travailleur ne fournit jamais d'effort et reçoit toujours un salaire égal à θ.

À présent on suppose que les firmes n'observent pas θ. On prend $T = 1$.

Question 2: Montrer que le travailleur n'exerce aucun effort, quel que soit son type, et que son salaire est égal à $1/2$.

De la même manière qu'à la question précédente, w_1 ne dépend pas de l'effort donc le travailleur maximise son utilité et n'en fournit pas.

Les entreprises n'observent pas θ, elles émettent donc une croyance basée sur son espérance: $\mathbb{E}(\theta) = 1/2$. Le profit d'une entreprise est donc :

$$\Pi = \max[e; \mathbb{E}(\theta)] - w_1 = \max[0; 1/2] - w_1 = 1/2 - w_1$$

Les entreprises se livrent une concurrence salariale, d'où à l'équilibre $w_1 = 1/2$.

On prend à présent $T = 2$.

Question 3: Montrer que le niveau d'effort d'un type $\theta = 1$ est toujours égal à zéro. Montrer qu'un travailleur de type $\theta = 0$ n'exerce pas d'effort en $t = 2$.

Si un type $\theta = 1$ exerce un effort, cela ne change rien à sa probabilité de succès (égale à 1) : il n'a donc aucun intérêt à exercer un effort. En $t = 2$, l'effort d'un type $\theta = 0$ ne lui rapporte rien : il n'en exercera pas.

Question 4: Si les firmes pensent que le travailleur de type $\theta = 0$ a fait un effort e_1 en première période, quel salaire sont-elles prêtes à offrir au travailleur à la seconde période, en fonction de la réussite du projet de la période 1?

Supposons que le projet de la période 1 a échoué: les firmes apprennent alors que $\theta = 0$. Elles savent que le travailleur n'exercera pas d'effort en seconde période, et par conséquent elles offrent un salaire nul.

Si le projet a été un succès, les firmes savent que c'est soit car il s'agit d'un travailleur de type $\theta = 1$ ou d'un travailleur de type $\theta = 0$ qui a fait un effort. Elles forment une croyance sur le type du travailleur :

$$P[\theta = 1 | q_1 = 1, e_1] = \frac{P[q_1 = 1 | \theta = 1, e_1] P[\theta = 1]}{P[q_1 = 1 | \theta = 1, e_1] P[\theta = 1] + P[q_1 = 1 | \theta = 0, e_1] P[\theta = 0]}$$

i.e.

$$P[\theta = 1 | q_1 = 1, e_1] = \frac{1}{1 + e_1}$$

En second période, les firmes maximisent toujours leur profit :

$$\Pi = \max[\underbrace{e_2}_{0}; E[\theta | q_1 = 1, e_1]] - w_2$$

D'après les raisonnements précédents, elles savent que le travailleur n'exercera pas d'effort en seconde période ($e_2 = 0$). Leur profit est donc :

$$\begin{aligned}\Pi &= E[\theta | q_1 = 1, e_1] - w_2 \\ &= P[\theta = 1 | q_1 = 1, e_1] - w_2 \\ &= \frac{1}{1 + e_1} - w_2\end{aligned}$$

Les firmes offrent en seconde période un salaire égal à $\frac{1}{1+e_1}$ si un succès a été observé en $t = 1$.

Question 5: Si les firmes pensent que le travailleur de type $\theta = 0$ fait un effort e_1 en première période, quelle est l'utilité espérée d'un travailleur de type $\theta = 0$ s'il exerce un effort e_1'? En déduire le niveau d'effort d'équilibre à anticipations rationnelles e_1^*, et le profil temporel des salaires perçus.

Si les firmes pensent qu'un travailleur $\theta = 0$ fait un effort e_1 en première période, leur espérance de profit en première période est :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Pi &= \frac{1}{2}(1 - w_1) + \frac{1}{2}(\max[0; e_1] - w_1) \\ &= \frac{1}{2}(1 + e_1) - w_1\end{aligned}$$

Elles offrent donc un salaire :

$$w_1 = \frac{1 + e_1}{2}$$

En première période, le travailleur reçoit un salaire w_1 et si le travailleur fournit un effort e_1', cela lui coûte $e_1'^2/2$. D'autre part, si le travailleur fournit un effort e_1' en première période, le projet sera un échec avec probabilité e_1' et il recevra un salaire nul en seconde période ou le projet sera une réussite avec probabilité $1 - e_1'$ et il recevra alors w_2 en seconde période. Plus précisément, l'utilité du travailleur est égale à :

$$\mathbb{E}U = w_1 - e_1'^2/2 + e_1' w_2 + (1 - e_1') \times 0$$
$$\mathbb{E}U = \frac{1 + e_1}{2} - e_1'^2/2 + e_1' \frac{1}{1 + e_1}$$

Le choix d'effort optimal est alors :

$$e_1 = arg \max_{e_1'} \mathbb{E}U \Leftrightarrow e_1' = \frac{1}{1 + e_1}$$

Un équilibre à anticipations rationnelles est tel que les croyances des firmes sont justes à l'équilibre, i.e $e_1' = e_1$ d'où

$$e_1^* = \frac{1}{1 + e_1^*} \Longleftrightarrow e_1^* = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \simeq 0.62$$

On en déduit le salaire de première période quel que soit θ:

$$w_1 = \frac{1 + e_1^*}{2} \simeq 0.81$$

Puis, si le projet est un succès, le salaire de deuxième période est :

$$w_2 = \frac{1}{1 + e_1^*} \simeq 0.62$$

Question 6: Discuter le modèle, en vous référant au modèle d'aléa moral vu en cours.

Ici, l'effort n'est pas motivé par un éventuel bonus, comme dans les cas vus en cours, mais simplement par la possibilité pour le travailleur de construire une réputation. En faisant un effort, il augmente sa valeur aux yeux des futurs employeurs. Les employeurs ne peuvent pas inciter à l'effort, mais la présence d'information incomplète sur le type du travailleur suffit à donner des incitations. C'est donc moins un problème d'aléa-moral que de signal !