Examen final : éléments de corrigé

1 Questions de cours (6 points)

Question 1 (1 point) Oui dans le modèle de Cass-Koopmans-Ramsey, parce que le problème d'optimisation des ménages est dynamique (choix de trajectoires de consommation et d'épargne pour maximiser l'utilité intertemporelle), de sorte que le comportement des ménages à chaque moment dépend de leur anticipation des événements futurs. Non dans le modèle de Solow-Swan, parce que le comportement des ménages consiste à épargner une fraction exogène de la production et consommer l'autre fraction, à chaque moment, sans anticiper les événements futurs.

Question 2 (1 point) Pour faire une comparaison entre l'équilibre centralisé (celui choisi par le planificateur) et l'équilibre décentralisé (l'équilibre de marché), afin de déterminer si ce dernier est socialement optimal ou non (cf chapitre 2, slides 72-73).

Question 3 (1 point) Il s'agit de la politique de laisser-faire, car l'équilibre de marché sans intervention gouvernementale coïncide avec l'allocation du planificateur dans ce modèle (cf chapitre 2, slides 76-77).

Question 4 (1 point) Le taux d'actualisation (r) dépend négativement de la variance du taux de croissance futur de l'économie (g) : plus cette variance est grande, plus les ménages veulent constituer une épargne de précaution, plus la demande d'épargne est élevée, plus le rendement de l'épargne est faible (cf chapitre 3, slides 34 et 37).

Question 5 (1 point) Cf chapitre 4, slide 46.

Question 6 (1 point) L'effet des dépenses publiques sur l'économie ne dépend pas de leur mode de financement – impôt forfaitaire immédiat ou emprunt remboursé par impôt forfaitaire futur (cf chapitre 6, slide 36). Raisons possibles de la non-validité empirique de l'équivalence ricardienne : cf chapitre 6, slide 40.

2 Exercice 1 : chocs dans le modèle de croissance avec apprentissage par la pratique (13,5 points)

2.1 Équation différentielle en $\dot{k}_t$

Question 7 (1,5 point) Le fait que la productivité des travailleurs dépende positivement du stock de capital par tête reflète l'hypothèse d'apprentissage par la pratique (le stock de capital par tête étant un proxy de la production passée cumulée et donc de l'expérience des travailleurs). Le fait que ce stock de capital par tête soit le capital agrégé, et non pas le capital de l'entreprise considérée, reflète l'hypothèse de diffusion des connaissances entre les entreprises (supposée instantanée).

En utilisant $Y_t = F(K_t, A_t N_t)$ (fonction de production agrégée), $N_t = L_t$ (équilibre du marché du travail), $A_t = K_t/L_t$ (apprentissage par la pratique et diffusion des connaissances), et l'homogénéité de degré 1 de F, on obtient $Y_t = K_t F(1,1)$.

Question 8 (1,5 point) La condition d'équilibre sur le marché des biens à la date t est $\dot{K}_t = Y_t - C_t - \delta K_t$ (la production sert à la consommation et à l'investissement, et la variation du capital est égale à l'investissement moins la dépréciation). En utilisant $Y_t = K_t F(1,1)$ puis en ré-exprimant en grandeurs par tête, on obtient facilement

$$\dot{k}_t = f(1)k_t - c_t - (n+\delta)k_t.$$

2.2 Équation différentielle en $\dot{c}_t$

Question 9 (2 points) La contrainte (3) est la contrainte budgétaire instantanée des ménages : en grandeurs par tête, la variation du stock d'actifs ($\dot{b}_t$) est égale à la somme des revenus financiers ($r_t b_t$) et des revenus salariaux (w_t), moins les dépenses de consommation (c_t) et moins la dilution du stock d'actifs par tête due à la croissance de la population (nb_t).

La contrainte (4) est la contrainte de solvabilité des ménages. Elle empêche les montages financiers à la Ponzi, dans lesquels chaque emprunt est remboursé au moyen d'un nouvel emprunt (cf chapitre 2, slide 25).

Le Hamiltonien est $H(c_t, b_t, \lambda_t, t) = e^{-(\rho-n)t}u(c_t) + \lambda_t[(r_t - n)b_t + w_t - c_t]$, où $u(c_t) = (c_t^{1-\theta} - 1)/(1-\theta)$. La condition du premier ordre sur la variable de contrôle, $\partial H/\partial c_t = 0$, donne $\lambda_t = e^{-(\rho-n)t}u'(c_t)$. La condition d'évolution de la co-variable d'état, $\partial H/\partial b_t = -\dot{\lambda}_t$, donne $\dot{\lambda}_t = -(r_t - n)\lambda_t$.

Question 10 (2 points) Les deux dernières conditions donnent $(r_t - \rho)u'(c_t) + u''(c_t)\dot{c}_t = 0$, d'où on déduit l'équation d'Euler $\frac{\dot{c}_t}{c_t} = \frac{r_t - \rho}{\theta}$.

Plus le taux d'intérêt r_t est élevé, plus le rendement de l'épargne est élevé, donc plus les ménages épargnent : moins ils consomment "aujourd'hui" et plus ils consommeront "demain", et donc plus le taux de croissance de la consommation par tête est élevé. Inversement, plus le taux de préférence pour le présent ρ est élevé, plus les ménages sont impatients de consommer, donc moins les ménages épargnent : plus ils consomment "aujourd'hui" et moins ils consommeront "demain", et donc plus le taux de croissance de la consommation par tête est faible.

Cf slide 41 du chapitre 2 pour $r_t = z_t - \delta$: à l'équilibre, chaque ménage doit être indifférent entre prêter aux autres ménages (rendement r_t) et louer du capital aux entreprises (rendement $z_t - \delta$). Le coût réel d'usage du capital z_t est égal à la productivité marginale privée du capital car les entreprises trouvent optimal de louer du capital jusqu'à ce que sa productivité marginale privée soit égale à son coût réel d'usage ; cette productivité marginale privée est $f'(\kappa_t) = f'(1)$, donc on a $z_t = f'(1)$.

En utilisant $r_t = z_t - \delta = f'(1) - \delta$, on peut réécrire l'équation d'Euler comme

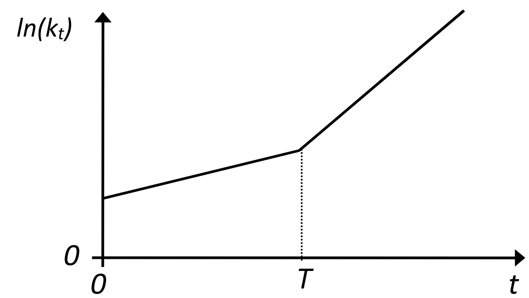
$$\frac{\dot{c}_t}{c_t} = \frac{f'(1) - (\delta + \rho)}{\theta}.$$

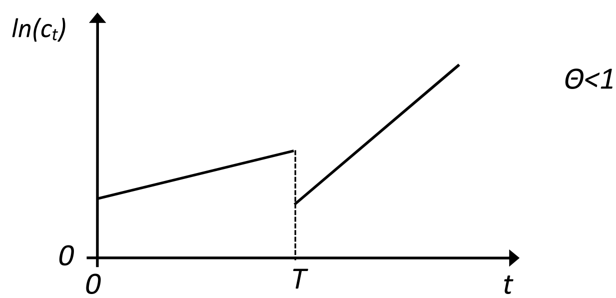
2.3 Equilibre pour δ constant

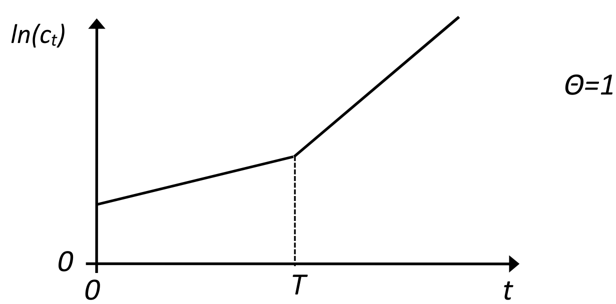
2.4 Effet d'une baisse permanente de δ

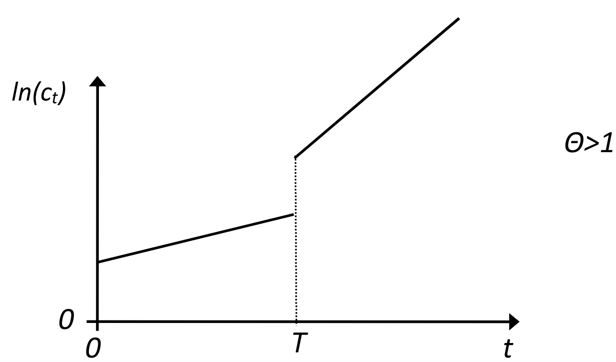
Question 11 **(2 points)** Le stock de capital et la consommation croissent au taux constant $[f'(1)-(\delta+\rho)]/\theta$ en l'absence de choc (comme rappelé dans la section précédente). Du fait que le choc considéré est non anticipé, ils croissent donc au taux constant $g(\delta_1)$ avant le choc et au taux constant $g(\delta_2)$ (supérieur à $g(\delta_1)$) après le choc.

Le stock de capital ne varie pas discontinûment à la date T (car c'est un stock). La consommation peut varier discontinûment à la date T (car c'est un flux). Si $\theta < 1$, alors $\varphi'(\delta) > 0$, et la consommation diminue discontinûment à la date T ; si $\theta = 1$, alors $\varphi'(\delta) = 0$, et la consommation varie continûment à la date T ; si $\theta > 1$, alors $\varphi'(\delta) < 0$, et la consommation augmente discontinûment à la date T.









La baisse du taux de dépréciation du capital δ à la date T a deux effets opposés sur c_T. D'une part, parce que δ diminue, moins de ressources sont consacrées à remplacer le stock de capital déprécié, ce qui a tendance à faire augmenter la consommation (terme $-\delta$ dans l'expression de $\varphi(\delta)$). D'autre part, parce que δ diminue, le rendement de l'épargne $f'(1)-\delta$ augmente, donc l'épargne augmente, donc le taux de croissance de la consommation augmente, ce qui a tendance à faire diminuer la consommation à la date T afin de satisfaire la contrainte budgétaire intertemporelle (terme δ/θ dans l'expression de $\varphi(\delta)$). Le premier effet est indépendant des préférences des ménages et donc du paramètre θ. Le second effet fait intervenir les préférences des ménages et, plus précisément, dépend positivement de l'élasticité de substitution intertemporelle $1/\theta$ (plus cette élasticité est élevée, plus la hausse du rendement de l'épargne aura un effet important sur le taux de croissance de la consommation). Le second effet domine donc le premier lorsque θ est suffisamment faible, et inversement le premier effet domine le second lorsque θ est suffisamment élevé.

Question 12 (2 points) Le fait que la baisse permanente de δ à la date T soit maintenant anticipée par les agents dès la date 0 ne change pas la condition initiale (k_0 exogène donné), ni l'équation différentielle en $\dot{k}_t$ (condition d'équilibre sur le marché des biens), ni l'équation différentielle en $\dot{c}_t$ (équation d'Euler). A partir de la date $t = T$, la valeur des paramètres ne change plus et il n'y a pas de surprise pour les agents, donc on connaît les trajectoires $(k_t)_{t>T}$ et $(c_t)_{t\geq T}$ en fonction de k_T, et en particulier on sait que $c_T = \varphi(\delta_2)k_T$: cette équation est donc la nouvelle condition terminale pour déterminer $(k_t)_{0\leq t\leq T}$ et $(c_t)_{0\leq t\leq T}$.

En intégrant l'équation différentielle en $\dot{c}_t$ entre 0 et t (où $t \leq T$), on obtient $c_t = c_0 e^{g(\delta_1)t}$ et donc en particulier $c_T = c_0 e^{g(\delta_1)T}$. En utilisant $c_T = \varphi(\delta_2)k_T$, on en déduit $c_0 = \varphi(\delta_2)k_T e^{-g(\delta_1)T}$, et donc $c_t = \varphi(\delta_2)k_T e^{-g(\delta_1)T} e^{g(\delta_1)t}$ pour $t \leq T$. En remplaçant c_t par cette expression dans l'équation différentielle en $\dot{k}_t$, en ré-arrangeant les termes, et en multipliant par $e^{-[f(1)-(n+\delta_1)]t}$, on obtient

$$\left\{\dot{k}_t - [f(1) - (n + \delta)]\, k_t\right\} e^{-[f(1)-(n+\delta_1)]t} = -\varphi(\delta_2)k_T e^{-g(\delta_1)T} e^{-\varphi(\delta_1)t}.$$

En intégrant cette équation entre 0 et T, on obtient

$$k_T e^{-[f(1)-(n+\delta_1)]T} - k_0 = \frac{\varphi(\delta_2)}{\varphi(\delta_1)} k_T e^{-g(\delta_1)T} \left[e^{-\varphi(\delta_1)T} - 1\right],$$

d'où on déduit k_T puis, en utilisant $c_0 = \varphi(\delta_2)k_T e^{-g(\delta_1)T}$,

$$c_0 = \frac{\varphi(\delta_1)k_0}{\left[1 - e^{-\varphi(\delta_1)T}\right] + \frac{\varphi(\delta_1)}{\varphi(\delta_2)} \left[e^{-\varphi(\delta_1)T}\right]}.$$

Question 13 (2,5 points) Notons $c_{0|Q11}$ et $c_{0|Q12}$ les valeurs prises par c_0 aux questions 11 et 12 respectivement. On a

$$c_{0|Q12} = \frac{c_{0|Q11}}{\left[1 - e^{-\varphi(\delta_1)T}\right] + \frac{\varphi(\delta_1)}{\varphi(\delta_2)} \left[e^{-\varphi(\delta_1)T}\right]}.$$

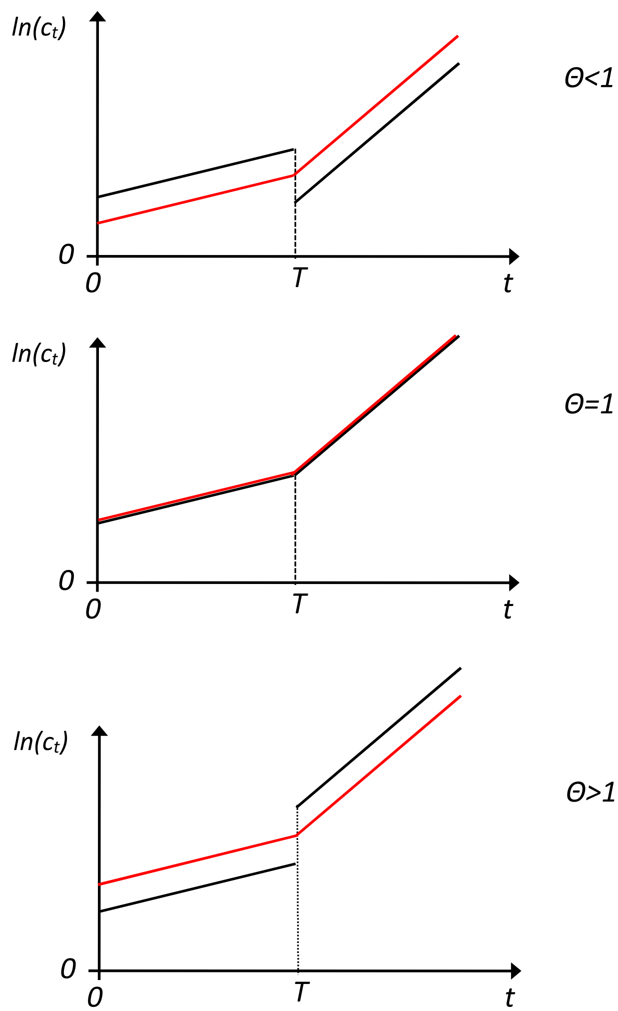
Donc : si $\theta < 1$, alors $\varphi'(\delta) > 0$, $\varphi(\delta_1)/\varphi(\delta_2) > 1$, et $c_{0|Q12} < c_{0|Q11}$; si $\theta = 1$, alors $\varphi'(\delta) = 0$, $\varphi(\delta_1)/\varphi(\delta_2) = 1$, et $c_{0|Q12} = c_{0|Q11}$; si $\theta > 1$, alors $\varphi'(\delta) < 0$, $\varphi(\delta_1)/\varphi(\delta_2) < 1$, et $c_{0|Q12} > c_{0|Q11}$.

La consommation évolue de manière continue à la question 12, et (sauf si $\theta = 1$) de manière discontinue à la question 11. Notons $c_{T|Q12}$, $c_{T-|Q11}$ et $c_{T+|Q11}$ les valeurs prises par c_t à la date T à la question 12, juste avant la date T à la question 11, et juste après la date T à la question 11 respectivement. On a

$$c_{T|Q12} = \frac{c_{T-|Q11}}{\left[1 - e^{-\varphi(\delta_1)T}\right] + \frac{\varphi(\delta_1)}{\varphi(\delta_2)}\left[e^{-\varphi(\delta_1)T}\right]} = \frac{c_{T+|Q11}}{\frac{\varphi(\delta_2)}{\varphi(\delta_1)}\left[1 - e^{-\varphi(\delta_1)T}\right] + \left[e^{-\varphi(\delta_1)T}\right]}.$$

Donc : si $\theta < 1$, alors $\varphi'(\delta) > 0$, $\varphi(\delta_1)/\varphi(\delta_2) > 1$, et $c_{T-|Q11} > c_{T|Q12} > c_{T+|Q11}$; si $\theta = 1$, alors $\varphi'(\delta) = 0$, $\varphi(\delta_1)/\varphi(\delta_2) = 1$, et $c_{T-|Q11} = c_{T|Q12} = c_{T+|Q11}$; si $\theta > 1$, alors $\varphi'(\delta) < 0$, $\varphi(\delta_1)/\varphi(\delta_2) < 1$, et $c_{T-|Q11} < c_{T|Q12} < c_{T+|Q11}$.

La trajectoire de $ln(c_t)$ prend donc la forme suivante à la question 12, par rapport à la question 11 :



(En noir : question 11. En rouge : question 12.)

En termes de taux de croissance de la consommation, il n'y a pas de différence entre les questions 11 et 12. Ce taux de croissance est dicté par l'équation d'Euler, et cette équation ne dépend pas du caractère anticipé ou non anticipé du choc.

En termes de niveau de consommation, il y a une différence entre les questions 11 et 12. Lorque le choc n'est pas anticipé (question 11), les ménages sont surpris à la date T et modifient de manière discontinue leur niveau de consommation à la date T. Lorsque le choc est anticipé (question 12), les ménages ne sont pas surpris à la date T, et leur niveau de consommation évolue de manière continue à la date T. Cette absence de discontinuité à la date T traduit leur préférence pour lisser leur consommation dans le temps (leur fonction d'utilité instantanée étant strictement concave ; cf slides 19-20 du chapitre 2). L'utilité intertemporelle des ménages à la date 0 est ainsi plus grande dans le cas d'un choc anticipé que dans le cas d'un choc non anticipé ; en d'autres termes, les ménages préfèrent anticiper que ne pas anticiper le choc.

Le niveau de consommation à la date T dans le cas d'un choc anticipé ($c_{T|Q12}$) se situe entre les niveaux de consommation juste avant et juste après la date T dans le cas d'un choc non anticipé ($c_{T-|Q11}$ et $c_{T+|Q11}$). S'il était au-dessus de ces deux niveaux, alors la contrainte budgétaire intertemporelle et la contrainte de solvabilité ne seraient pas satisfaites (dans le cas d'un choc anticipé). S'il était en-dessous de ces deux niveaux, alors la contrainte budgétaire intertemporelle ne serait pas saturée et la condition de transversalité ne serait pas satisfaite (dans le cas d'un choc anticipé).

Lorsque $T \to +\infty$, on a $c_{0|Q12} \to c_{0|Q11}$: plus le choc anticipé est éloigné dans le futur, plus son effet initial (à la date de l'annonce du choc, i.e. la date 0) est faible. Si les ménages réagissaient fortement à la date 0 au choc anticipé très éloigné dans le futur, alors ils auraient une consommation très élevée (si $\theta > 1$) ou très faible (si $\theta < 1$) durant un temps très long, et leur contrainte budgétaire intertemporelle ne serait pas satisfaite (si $\theta > 1$) ou ne serait pas saturée (si $\theta < 1$).

3 Exercice 2 : le "modèle de Solow-Swan vert" et la "courbe de Kuznets environnementale" (5 points)

Question 14 (2,5 points) La variation du stock de capital $\dot{K}_t$ est égale à l'investissement $s(Y_t - X_t) = s(1-\chi)Y_t$ moins la dépréciation du capital δK_t :

$$\dot{K}_t = s(1-\chi)Y_t - \delta K_t.$$

En divisant cette équation par $A_t L_t$ et en utilisant

$$\frac{\dot{K}_t}{A_t L_t} = \frac{\dot{K}_t}{K_t}\kappa_t = \left(\frac{\dot{\kappa}_t}{\kappa_t} + \frac{\dot{A}_t}{A_t} + \frac{\dot{L}_t}{L_t}\right)\kappa_t = \dot{\kappa}_t + (g+n)\kappa_t$$

et $Y_t/(A_t L_t) = \kappa_t^\alpha$, on obtient

$$\dot{\kappa}_t = s(1-\chi)\kappa_t^\alpha - (n+g+\delta)\,\kappa_t.$$

L'état régulier est la situation dans laquelle κ_0 est tel que toutes les quantités sont non nulles et croissent à taux constants. A l'état régulier, le taux de croissance $\dot{\kappa}_t/\kappa_t$ est donc constant, donc $s(1-\chi)\kappa_t^{\alpha-1} - (n+g+\delta)$ est constant, donc κ_t est constant, donc $\dot{\kappa}_t = 0$, donc $\kappa_t = \kappa^*$ avec

$$\kappa^* \equiv \left(\frac{s(1-\chi)}{n+g+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

κ^* dépend positivement de s (plus le taux d'épargne est élevé, plus on investit, plus le stock de capital est élevé) et négativement de χ (plus on consacre une fraction importante de la production à la réduction de la pollution, moins on investit, plus le stock de capital est faible), de n et g (effet de dilution : plus le travail efficace croît rapidement, plus le stock de capital par unité de travail efficace est faible), et de δ (plus le taux de dépréciation du capital est élevé, plus le stock de capital est faible).

On a

$$\frac{\dot{\kappa}_t}{\kappa_t} = s(1-\chi)\left[\left(\frac{1}{\kappa_t}\right)^{1-\alpha} - \left(\frac{1}{\kappa^*}\right)^{1-\alpha}\right], \tag{1}$$

donc si $\kappa_0 < \kappa^*$ alors $\dot{\kappa}_t > 0$ et κ_t converge vers κ^* par en-dessous ; et si $\kappa_0 > \kappa^*$ alors $\dot{\kappa}_t < 0$ et κ_t converge vers κ^* par au-dessus.

Question 15 (2,5 points) On a

$$E_t = (1-\eta)\Omega_t Y_t = (1-\eta)\Omega_t A_t L_t \kappa_t^\alpha,$$

et donc (en passant aux logarithmes puis en dérivant par rapport au temps)

$$\frac{\dot{E}_t}{E_t} = -g_\Omega + n + g + \alpha\frac{\dot{\kappa}_t}{\kappa_t} = (n + g - g_\Omega) + \alpha s(1-\chi)\left[\left(\frac{1}{\kappa_t}\right)^{1-\alpha} - \left(\frac{1}{\kappa^*}\right)^{1-\alpha}\right].$$

Lorsque $t \to +\infty$, on a $\kappa_t \to \kappa^*$ et donc $\dot{E}_t/E_t \to n + g - g_\Omega$. Une condition nécessaire est donc que

$$n + g - g_\Omega < 0. \tag{2}$$

De plus, pour que $\dot{E}_0/E_0 > 0$, il faut que

$$\kappa_0 < \frac{1}{\left[\left(\frac{1}{\kappa^*}\right)^{1-\alpha} - \frac{n+g-g_\Omega}{\alpha s(1-\chi)}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}}. \tag{3}$$

Ces deux conditions nécessaires (2) et (3) impliquent que $\kappa_0 < \kappa^*$ et donc que le taux de croissance de κ_t est toujours positif, ce qui implique que le taux de croissance de l'économie est toujours positif et que le taux de croissance des émissions de polluants $\dot{E}_t/E_t$ est d'abord positif, puis négatif. Ces deux conditions nécessaires (2) et (3) sont donc également suffisantes.

On a $E_t = (1-\eta)\Omega_t Y_t$, donc le taux de croissance des émissions de polluants E_t est égal au taux de croissance de la production agrégée Y_t moins le taux de décroissance de Ω_t (i.e. moins le taux de progrès technique de "verdissement" des moyens de production, g_Ω).

A long terme, le taux de croissance de la production agrégée Y_t est la somme du taux de croissance de la population (n) et du taux de croissance de la production par tête (i.e. le taux de progrès technique g). Donc, pour que le taux de croissance des émissions de polluants E_t soit négatif à long terme, il faut que le taux de progrès technique de "verdissement" des moyens de production, g_Ω, soit plus grand que le taux de croissance de la production agrégée Y_t à long terme, $n + g$. C'est ce qu'indique la condition (2).

A la date 0, le taux de croissance de la production agrégée Y_t est égal à $n + g + \alpha\dot{\kappa}_t/\kappa_t$, où $\dot{\kappa}_t/\kappa_t$ est donné par (1). Le taux de croissance initial de la production agrégée Y_t est donc d'autant plus grand que κ_0 est petit (une économie croît d'autant plus vite qu'elle est éloignée de son sentier d'état régulier). Donc, pour que le taux de croissance des émissions de polluants E_t soit positif à la date 0, il faut que le stock de capital initial κ_0 soit suffisamment petit pour que le taux de croissance initial de la production agrégée Y_t soit plus grand que le taux de progrès technique de "verdissement" des moyens de production, g_Ω. C'est ce qu'indique la condition (3).