TD3 : Estimation de paramètres

Exercice 1. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables indépendantes de loi $\mathcal{N}(0, \theta^*)$, où $\theta^* > 0$ est un paramètre inconnu. On considère les deux estimateurs suivants du paramètre θ^* :

$$\widehat{\theta}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2, \qquad \widetilde{\theta}_n = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2.$$

Le but de cet exercice est de comparer ces 2 estimateurs.

1. Montrer que
$$\widehat{\theta}_n = \frac{n-1}{n^2}\sum_{i=1}^n X_i^2 - \frac{2}{n^2}\sum_{k<\ell} X_k X_\ell,$$
où $\sum_{k<\ell}$ est un raccourci pour $\sum_{\ell=2}^n \sum_{k=1}^{\ell-1}$.
2. Déduire de la question précédente que $\widehat{\theta}_n$ est biaisé alors que $\widetilde{\theta}_n$ est sans biais.
3. On pose
$$Y = \sum_{i=1}^n X_i^2, \qquad Z = \sum_{k<\ell} X_k X_\ell.$$
Montrer que
$$\mathbf{E}[YZ] = \mathbf{Cov}(Y, Z) = 0 \qquad \text{et} \qquad \mathbf{E}[Z^2] = \frac{n(n-1)}{2}\,\sigma^4.$$
4. Déduire de la question précédente que
$$\mathbf{Var}(\widehat{\theta}_n) = \frac{(n-1)^2}{n^3}\Big(\mathbf{E}[X_1^4] - \frac{n-3}{n-1}\sigma^4\Big).$$
Est-ce qu'on a utilisé le fait que X_1 est de loi gaussienne ?
5. Calculer les risques des estimateurs $\widehat{\theta}_n$ et $\widetilde{\theta}_n$ dans le cas gaussien. Comparer les.

Exercice 2. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires i.i.d. de loi uniforme sur $[0, \theta^*]$ où $\theta^* > 0$ est un paramètre inconnu. On considère l'estimateur

$$\widehat{\theta}_n = \max_{i=1,\ldots,n} X_i.$$

1. Calculer la fonction de répartition $F_{n,\theta}$ de la variable $\widehat{\theta}_n$ lorsque les X_i sont de loi $\mathcal{U}([0,1])$.
2. Montrer que pour tout $\delta > 0$, on a
$$\mathbf{P}_\theta(|\widehat{\theta}_n - \theta| \geq \delta) = \mathbf{P}_\theta(\widehat{\theta}_n \leq \theta - \delta) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$
En déduire que $\widehat{\theta}_n$ est un estimateur faiblement consistant de θ^*.

3. En utilisant un argument de monotonie, prouver que cet estimateur est également fortement consistant.
4. Montrer que la suite $\{n(\theta^* - \widehat{\theta}_n)\}$ converge en loi et déterminer sa limite.

Exercice 3. (facultatif) Soient $\{X_i : i \in \mathbb{N}^*\}$ une suite de variables iid de fonction de répartition F. On pose $\theta = F(0)$. Soit N une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et indépendante de $\{X_i : i \in \mathbb{N}^*\}$. On pose

$$N_1 = \sum_{i=1}^{N} \mathbb{1}(X_i \leq 0), \qquad N_2 = \sum_{i=1}^{N} \mathbb{1}(X_i > 0).$$

Montrer que N_1 et N_2 sont deux variables aléatoires indépendantes et que toutes les deux sont de loi de Poisson dont on déterminera les paramètres.