
TD n° 1 : Espérance conditionnelle et rappels de probabilités

Ce TD porte essentiellement sur les rappels sur l'espérance conditionnelle vus dans l'introduction du cours. Il y a également un exercice sur les notions de convergence en probabilité, qui permettra un petit rappel sur le sujet.

On rappelle la notation $x \vee y = \max\{x, y\}$ et $x \wedge y = \min\{x, y\}$. On rappelle également le résultat important suivant : soit X une variable aléatoire réelle, toute variable aléatoire $\sigma(X)$ -mesurable Y s'écrit sous la forme $Y = h(X)$ où h est fonction borélienne.

EXERCICE 1. Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, avec $\mathbb{E}(X^2) < \infty$, et soit \mathcal{A} une sous-algèbre de \mathcal{F} . On pose $Y = \mathbb{E}(X|\mathcal{A})$.

- 1) Démontrer que $0 \leq \mathbb{E}(Y^2) \leq \mathbb{E}(X^2)$.
- 2) Démontrer que $\mathbb{E}(Y^2) = \mathbb{E}(X^2) \Rightarrow X = Y$ p.s.
- 3) Ce résultat reste-t'il vrai si $\mathbb{E}(X^2) = \infty$?

EXERCICE 2. On considère un vecteur $X = (X_1, X_2)$ de densité (par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^2) :

$$f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{3}{2} \frac{1}{\sqrt{x_1}} & 0 \leq x_2 \leq x_1 \leq 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- 1) Calculer la densité marginale de X_1 , de X_2 . Calculer $\mathbb{E}(X_1)$.
- 2) Déterminer une densité conditionnelle de $X_2|X_1 = x_1$, et en déduire la valeur de $\mathbb{E}(X_2|X_1 = x_1)$ et de $\mathbb{E}(X_2|X_1)$.
- 3) Est-ce que X_1 et X_2 sont indépendantes ?

EXERCICE 3. Soit T une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre 1 et X une variable aléatoire qui, conditionnellement à T , suit une loi gaussienne d'espérance 0 et de variance $1/T$. Autrement dit, $T \sim \mathcal{E}(1)$ et $X|T \sim \mathcal{N}(0, 1/T)$.

- 1) Déterminer la densité de X .
- 2) Quelle est la loi de T conditionnellement à X ?
- 3) Calculer $\mathbb{E}(T|X)$.

EXERCICE 4. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0, 1]$. Calculer $\mathbb{E}[Y|X \vee Y]$ et $\mathbb{E}[Y|X \wedge Y]$.

EXERCICE 5. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées, de loi exponentielle de paramètre α et N une variable aléatoire, indépendante de la suite $(X_n)_{n \geq 1}$, de loi géométrique de paramètre p . On pose, pour $n \geq 1$,

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k.$$

Calculer $\mathbb{E}(S_N|N)$ et $\mathbb{E}(N|S_N)$.

EXERCICE 6. Quelques révisions sur les différentes notions de convergences de variables aléatoires :

- 1) Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de v.a.réelles avec $|X_n| \leq c$ p.s.
- Montrer que si (X_n) converge en probabilité alors elle converge aussi dans L^p pour tout $p \geq 1$.
 - Proposer un contre-exemple qui montre que si l'hypothèse de bornitude n'est pas satisfaite, le résultat précédent ne tient plus.
- 2) Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.réelles i.i.d. avec $\mathbb{E}(X_1) = 0$ et $\mathbb{E}(X_1^2) = \sigma^2 < \infty$. On pose

$$Y_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n X_i.$$

- (Facile). Rappeler pourquoi (Y_n) converge en loi et donner la loi limite.
 - (Plus difficile, facultatif). Démontrer que (Y_n) ne converge pas en probabilité.
- 3) (Plus difficile, facultatif). Soit (X_n) une suite de variables aléatoires réelles de densités respectives f_n et X une v.a.r. de densité f .
- Montrer que si $f_n \rightarrow f$ presque partout alors $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ (convergence en loi). Indication : montrer en fait $f_n \rightarrow f$ p.p. $\Rightarrow f_n \xrightarrow{L_1} f \Rightarrow X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.
 - Montrer que la réciproque est fausse. Indication : poser $f_n(x) = [1 - \varphi(nx)]\mathbf{1}_{[0,1]}(x)$ pour φ bien choisie.