TD Aléa moral - Corrigé

Microéconomie, deuxième année, ENSAE

1 Aléa moral et aversion au risque

Un principal fait appel à un agent pour un projet qui peut se révéler un succès ($q = R$) ou un échec ($q = 0$). La probabilité de succès dépend du niveau d'effort e: $\mathbb{P}[q = R|e] = p(e)$. On suppose que $p(e)$ est strictement croissante et concave en e et que $p(0) = 0$, $p'(0) = +\infty$, $p'(\infty) = 0$ et $p(\infty) = 1$. Le principal prévoit une rémunération minimale garantie, w_0, ainsi qu'un bonus en cas de réussite, w_1. Dès lors, la rémunération perçue peut prendre deux valeurs:$w = w_0$ ou $w = w_0 + w_1$. La fonction d'utilité du principal $V(q - w)$ est supposée concave ($V' > 0$, $V'' \leq 0$) avec $V(.) \geq 0$. L'agent présente la fonction d'utilité suivante: $u(w) - e$, avec $u'(.) > 0$, $u''(.) \leq 0$.

On s'intéresse d'abord à la situation de premier rang, c'est-à-dire lorsque e est observable par le principal. Le principal propose alors un contrat spécifiant e, w_0 et w_1, et l'agent accepte ou refuse.

Question 1: Écrire la contrainte de participation de l'agent. En utilisant le lagrangien du programme du principal, montrer que l'optimum est caractérisé par l'égalité des taux marginaux de substitution entre de la richesse dans l'état du monde "succès" et de la richesse dans l'état du monde "échec" pour le principal et l'agent. Interpréter.

Le principal résout

$$\max_{e,w_0,w_1} p(e)V(R - w_1 - w_0) + (1 - p(e))V(-w_0)$$

sous la contrainte de participation :

$$p(e)u(w_1 + w_0) + (1 - p(e))u(w_0) - e \geq 0$$

On note λ le multiplicateur associé à cette contrainte.

$$\mathcal{L}(w_0, w_1, \lambda) = p(e)V(R - w_1 - w_0) + (1 - p(e))V(-w_0)$$
$$+ \lambda[p(e)u(w_1 + w_0) + (1 - p(e))u(w_0) - e]$$

Les deux premières conditions de Khun-Tucker sont :

$$\frac{\partial \mathcal{L}(w_0, w_1, \lambda)}{\partial w_1} = 0 \Longleftrightarrow p(e)V'(R - w_1 - w_0) = \lambda p(e)u'(w_1 + w_0)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(w_0, w_1, \lambda)}{\partial w_0} = 0 \Longleftrightarrow (1 - p(e))V'(-w_0) = \lambda(1 - p(e))u'(w_0)$$

Cette seconde CPO est obtenue utilisant la première CPO pour simplifier.

On obtient alors :

$$\frac{p(e)V'(R - w_1 - w_0)}{(1 - p(e))V'(-w_0)} = \frac{p(e)u'(w_1 + w_0)}{(1 - p(e))u'(w_0)} \tag{1}$$

C'est bien l'égalité des TMS demandée. Si on n'avait pas cette égalité, il serait possible pour le principal de renoncer à de la richesse dans un état du monde contre de la richesse dans un autre état du monde et d'augmenter son espérance d'utilité.

Le partage des risques est donc optimal.

Question 2: Caractériser le contrat de premier rang (a) lorsque seul le principal est neutre au risque, et (b) lorsque seul l'agent est neutre au risque.

La neutralité au risque se représente avec une fonction d'utilité linéaire. Prenons la fonction la plus simple $V(x) = x$ ou $U(x) = x$.

(a) Le principal est neutre au risque d'où $V(x) = x$, en remplaçant dans (1) on trouve $w_1 = 0$: le salaire de l'agent est constant, le principal supporte tout le risque. La deuxième condition de Khun-Tucker donne :

$$V'(-w_0) = \lambda u'(w_0) \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{u'(w_0)} > 0$$

λ est non nul donc la contrainte de participation est saturée à l'équilibre. On a alors $u(w_0) = e$, i.e $w_0 = u^{-1}(e)$. En injectant cette égalité dans l'objectif du principal, on trouve que le principal doit maximiser $p(e)R - u^{-1}(e)$ en choisissant e. La fonction est bien concave, et la CPO est : $p'(e)R = u^{-1'}(e)$: le principal égalise rendement marginal de l'effort et coût monétaire marginal de l'effort.

(b) L'agent est neutre risque d'où $u(x) = x$, en remplaçant dans (1) on trouve $w_1 = R$: c'est l'agent qui supporte tout le risque, le principal a un gain constant égal à $-w_0$. La deuxième condition de Khun-Tucker donne :

$$\lambda = V'(-w_0) > 0$$

λ est non nul donc la contrainte de participation est saturée à l'équilibre. On alors $p(e)(R + w_0) + (1 - p(e))w_0 = e$, i.e $w_0 = e - p(e)R$. Le principal cherche alors à maximiser $V(p(e)R - e)$, et choisit pour cela e tel que $p'(e)R = 1$, égalisant encore le rendement marginal de l'effort à son coût marginal.

À présent on suppose que le principal ne peut pas observer l'effort de l'agent.

Question 3: Montrer que la contrainte d'incitations peut s'écrire simplement au moyen d'une condition du premier ordre.

La contrainte d'incitations est :

$$\forall e', \quad p(e)u(w_1+w_0)+(1-p(e))u(w_0)-e \geq p(e')u(w_1+w_0)+(1-p(e'))u(w_0)-e'$$

Il faut donc que pour tout agent de type e qui se fait passer pour $e' \neq e$, l'utilité avec le contrat qui prévoit e soit plus élevée qu'avec celui qui prévoit e' :

$$\frac{\partial U(e'|e)}{\partial e'}\Big|_{e'=e} = 0$$

Puisque $U(e'|e) = p(e')u(w_1 + w_0) + (1 - p(e'))u(w_0) - e'$, la fonction est concave en e', croissante en $e' = 0$, décroissante en $+\infty$, donc elle est maximale si et seulement si la dérivée s'annule en e'.

La contrainte d'incitations peut donc s'écrire $p'(e)[u(w_1 + w_0) - u(w_0)] = 1$.

Question 4: Montrer alors que l'égalité des TMS n'est plus vérifiée au second rang. Interpréter.

Soit μ le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte d'incitations.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(w_0, w_1, \lambda, \mu) = p(e)V(R - w_1 - w_0) + (1 - p(e))V(-w_0) \\ + \lambda\big[p(e)u(w_1 + w_0) + (1 - p(e))u(w_0) - e\big] \\ + \mu\big[p'(e)[u(w_1 + w_0) - u(w_0)] - 1\big]\end{aligned}$$

Les CPO par rapport à w_1 et w_0 donnent respectivement :

$$\frac{\partial L}{\partial w_1} = 0 \Longleftrightarrow \frac{p(e)V'(R - w_1 - w_0)}{p(e)u'(w_1 + w_0)} = \lambda + \mu\frac{p'(e)}{p(e)}$$

$$\frac{\partial L}{\partial w_0} = 0 \Longleftrightarrow \frac{(1 - p(e))V'(-w_0)}{(1 - p(e))u'(w_0)} = \lambda - \mu\frac{p'(e)}{1 - p(e)}$$

On a donc :

$$\frac{p(e)V'(R - w_1 - w_0)}{p(e)u'(w_1 + w_0)} \neq \frac{(1 - p(e))V'(-w_0)}{(1 - p(e))u'(w_0)} \text{ si } \mu \neq 0$$

L'inégalité se réécrit :

$$\frac{p(e)V'(1 - w_1 - w_0)}{(1 - p(e))V'(-w_0)} \neq \frac{p(e)u'(w_1 + w_0)}{(1 - p(e))u'(w_0)}$$

$\mu \neq 0$ signifie que la contrainte d'incitation $(p'(e)(u(w_1 + w_0) - u(w_0)) = 1)$ est saturée. Dans ce cas, il y a une distorsion au second rang : le partage du risque n'est pas optimal.

2 Responsabilité limitée et tarifs binômes

Un principal souhaite déléguer une tâche à un agent. Si l'agent fait un effort e, la production q sera tirée uniformément sur $[0; 2e]$. Le coût de l'effort est $c(e) = e^2/2$. On s'intéresse aux contrats linéaires, où la rémunération de l'agent est sous la forme $\alpha q + \beta$. Le principal et l'agent sont supposés neutres au risque.

Question 1: Si le principal peut observer l'effort de l'agent, quel est le contrat optimal pour le principal?

Dans ce cas, il n'est pas nécessaire de faire dépendre la rémunération de q, puisque le principal peut directement observer e.

Le programme est donc:

$$\max_{e,\alpha,\beta} \mathbb{E}(\pi) = \underbrace{\mathbb{E}(q)}_{=e} - \alpha \underbrace{\mathbb{E}(q)}_{=e} - \beta$$

$$\text{s.c } \alpha \underbrace{\mathbb{E}(q)}_{=e} + \beta \geq \frac{e^2}{2}$$

L'objectif est strictement décroissant en $\alpha\mathbb{E}(q) - \beta$ qui a une borne inférieure par la contrainte. Cette dernière est donc saturée à l'équilibre. L'objectif se réécrit :

$$\max_{e} \mathbb{E}(\pi) = e - \frac{e^2}{2}$$

D'où à l'équilibre :

$$c'(e^*) = e^* = 1$$

$$\alpha^* + \beta^* = \frac{1}{2}$$

Question 2: On suppose que l'effort n'est plus observable. Pour α et β donnés, quel est l'effort choisi par l'agent?

Le programme de l'agent est :

$$\max_{e} \mathbb{E}(\pi) = \alpha \underbrace{\mathbb{E}(q)}_{=e} + \beta - c(e)$$

$$\text{s.c } c(e) = \frac{e^2}{2}$$

La condition du premier ordre donne :

$$c'(e^{**}) = e^{**} = \alpha$$

En comparaison à la situation d'efficacité de la première question, cet effort est sous-optimal si $\alpha < 1$.

Question 3: Quel est alors le contrat optimal pour le principal? Est-ce efficace?

Le programme du principal est :

$$\max_{\alpha,\beta,e} \mathbb{E}(\pi) = (1-\alpha)\underbrace{\mathbb{E}(q)}_{=e} - \beta$$

$$\text{s.c} \begin{cases} \alpha e + \beta - e^2/2 \geq 0 & \text{(Contrainte de participation)} \\ e = \alpha & \text{(Contrainte de compatibilité des incitations)} \end{cases}$$

La contrainte de participation est saturée car l'objectif est décroissant en β. Le programme se réécrit :

$$\max_{\alpha} \mathbb{E}(\pi) = \alpha(1-\alpha) + \alpha^2/2$$

Ce programme est maximisé en :

$$\alpha^{**} = e^{**} = 1$$

$$\beta^{**} = -1/2$$

L'agent fait un paiement au principal, et récupère tous les bénéfices du projet: ses incitations sont alors parfaitement alignées avec la maximisation de la valeur du projet. C'est efficace.

Question 4: Supposons que l'agent a une richesse initiale $W \geq 0$. L'agent ne peut donc pas payer au principal un montant supérieur à W. Calculer le contrat linéaire optimal pour le principal. Commenter le rôle de W.

Le programme du principal devient :

$$\max_{\alpha,\beta,e} \mathbb{E}(\pi) = (1-\alpha)e - \beta$$

$$s.c \begin{cases} \alpha e + \beta - \frac{e^2}{2} \geq 0 & \text{(Contrainte de participation)} \\ \alpha = e & \text{(Contrainte d'incitation)} \\ W \geq -\beta & \text{(Contrainte de financement)} \end{cases}$$

Les trois contraintes peuvent se réécrire :

$$\beta \geq \max\{-W; -\frac{\alpha^2}{2}\}$$

Il y a alors trois cas :

- Si $-W \geq -\frac{\alpha^2}{2}$ alors le programme devient :

$$\max_{\alpha} \mathbb{E}(\pi) = (1-\alpha)\alpha + W$$

A l'équilibre, $\alpha^{***} = e^{***} = \frac{1}{2}$ et $\beta^{***} = -W$.
Il faut alors $-W \geq -\frac{\alpha^2}{2} \Leftrightarrow W \leq \frac{1}{8}$.
L'utilité de l'agent est : $U = \frac{\alpha^2}{2} + \beta = \frac{1}{8} - W \geq 0$.
Dans ce cas l'agent obtient une rente. L'effort est sous optimal, car l'agent est contraint financièrement et ne peut pas acheter le projet.

- Si $-W \leq -\frac{\alpha^2}{2}$ alors le programme devient :

$$\max_{\alpha} \mathbb{E}(\pi) = (1-\alpha)\alpha + \frac{\alpha^2}{2}$$

A l'équilibre, $\alpha^{***} = e^{***} = 1$ et $\beta^{***} = -\frac{1}{2}$.
Il faut alors $-W \leq -\frac{\alpha^2}{2} \Leftrightarrow W \geq \frac{1}{2}$.
On retrouve ici le résultat efficace de la question précédente, qui n'est possible que si l'agent a assez pour financer le projet.

- Si $W = \frac{\alpha^2}{2}$ alors $\alpha^{***} = e^{***} = \sqrt{2W}$ et $\beta = -W$.
On se situe alors dans le cas $\frac{1}{8} \leq W \leq \frac{1}{2}$.
Ici encore, l'agent ne peut pas acheter toutes les parts au principal.

La présence de W permet donc, dans certains cas, à l'agent de disposer d'assez de richesse initiale pour acheter le projet et permettre un effort optimal. Si W n'est pas assez élevé alors l'équilibre est sous-optimal.

3 Offre publique d'achat et aléa moral

On considère une entreprise-cible dont l'actionnariat est dispersé (il y a un continuum d'actionnaires, neutres au risque)[1]. Un acquéreur potentiel, neutre au risque, est présent. La valeur actuelle de la firme est normalisée à 0. Si l'acquéreur potentiel obtient le contrôle de l'entreprise, il perçoit un gain privé Z, et peut également exercer un effort a, au coût $\frac{ka^2}{2}$, qui permet d'augmenter la valeur de l'entreprise à aV_R.

Pour obtenir le contrôle de l'entreprise, il faut posséder au moins 50% des actions. L'acquéreur potentiel ne possède aucune action initialement. On suppose également que la direction en place ne fera rien pour empêcher l'acquisition.

[1] Exercice tiré de *Contract Theory*, de P. Bolton et M. Dewatripont

L'acquéreur fait une offre publique d'achat, à un prix de b par action. Cette offre est illimitée et conditionnelle: l'acquéreur s'engage à acheter toutes les actions (en proportion s) dont les propriétaires sont prêts à accepter un prix b, mais uniquement si le nombre d'actions est supérieur à $\frac{1}{2}$ (on normalise le nombre total d'actions à 1). Étant donnée l'offre, les actionnaires décident de façon non-coopérative s'ils souhaitent vendre leur part. Chaque actionnaire a un impact négligeable sur le résultat de l'OPA.

Question 1: Dans le cas où $s > \frac{1}{2}$, calculer les profits de l'acquéreur, des actionnaires vendeurs et des actionnaires non-vendeurs. Quel est l'effort de premier rang, a^{FB}, qui maximise le surplus total ?

Les profits sont les suivants:

- Pour l'acquéreur: $saV_R - sb - \frac{ka^2}{2} + Z$
- Pour les actionnaires vendeurs : sb
- Pour les actionnaires non-vendeurs : $(1-s)aV_R$

Le surplus total égal à la somme de ces trois profits : $S = aV_R - \frac{ka^2}{2} + Z$.
On en déduit $a^{FB}(s) = \arg\max_a \; S(a) = \frac{V_R}{k}$.
La valeur de l'entreprise est alors $a^{FB}(s)V_R = \frac{V_R^2}{k}$

Question 2: Si l'acquéreur arrive à obtenir une part $s \geq 1/2$ de l'entreprise, quel effort choisit-il ? En déduire la valeur de l'entreprise après l'achat.

L'acquéreur choisit son effort de sorte à maximiser son profit:

$$\max_a \; saV_R - \frac{ka^2}{2} + (Z - sb)$$

Il choisit $a^*(s) = \frac{sV_R}{k}$. La valeur de l'entreprise est alors $a^*(s)V_R = s\frac{V_R^2}{k}$.

Question 3: En déduire le prix minimum auquel les actionnaires acceptent de vendre leur actions.

Chaque actionnaire compare l'offre b et la valeur espérée après acquisition. L'énoncé indique d'une part qu'il y a un continuum d'actionnaires et d'autre part que le nombre d'actions est normalisé à 1. La valeur d'un non acquéreur est donc de 1 action divisée par le nombre d'actions (égal 1) multiplié par la valeur de l'entreprise aV_R.

Lorsqu'il anticipe qu'une part s des actions seront achetées par l'acquéreur, un actionnaire accepte de vendre si :

$$b \geq aV_R$$

On a donc $b(s) = s\frac{V_R^2}{k}$.

Question 4: Déterminer l'offre optimale b^* de l'acquéreur. En déduire sous quelle condition (sur Z) le rachat de l'entreprise-cible a lieu.

Conditionnellement à l'acquisition, le programme de l'acquéreur est :

$$\max_{s,a} \; saV_R - \frac{ka^2}{2} - sb + Z$$

$$\text{s.c} \begin{cases} s \geq 1/2 \\ b \geq aV_R \\ a = \frac{sV_R}{k} \end{cases}$$

Il se réecrit :

$$\max_{s} \; \frac{s^2V_R^2}{k} - \frac{s^2V_R^2}{2k} - \frac{s^2V_R^2}{k} + Z = -\frac{s^2V_R^2}{2k} + Z$$

$$\text{s.c } s \geq 1/2$$

La solution du programme est alors $s^* = 1/2$. L'acquéreur va alors choisir de lancer une OPA au prix $b^* = \frac{V_R^2}{2k}$ si son profit est positif i.e : $Z \geq \frac{V_R^2}{8k}$.

Il y a potentiellement deux sources d'inefficacité:

- L'acquéreur, afin de ne pas dépenser trop en rachat d'actions, n'achète pas toute l'entreprise ($s = \frac{1}{2}$), ce qui le pousse à fournir un effort sous-optimal par rapport au premier rang (vis à vis de la maximisation du surplus). On a en effet $a^{**} = \frac{a^{FB}}{2}$.

- D'autre part, si son gain privé Z est inférieur au coût du rachat, le rachat ne se fait pas (auquel cas $a = 0$). C'est également sous-optimal.

4 Financement de projet et aléa moral : collateral

Un entrepreneur a un projet qui requiert un investissement I. Il dispose initialement d'une richesse $A < I$ et doit donc emprunter $I - A$ pour financer son projet.

Le projet rapporte un revenu net R s'il réussit et zéro s'il échoue. La probabilité de succès est p_H si l'entrepreneur exerce un effort et $p_L < p_H$ s'il tire au flanc. Tirer au flanc rapporte un bénéfice privé B à l'entrepreneur. Un contrat de prêt stipule le partage du revenu $(R_E; R_I)$ en cas de succès du projet. On suppose :

$$p_H R - I > 0 > p_L R - I + B.$$

Question 0 : Commenter s'interprète cette inégalité ?

A ce stade de l'énoncé (i.e. sans prendre en compte l'existence d'un collatéral), si l'agent exerce un effort :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}S_E &= p_H R_E - A \\ \mathbb{E}S_I &= p_H R_I - (I - A) \\ \mathbb{E}W &= p_H R - I. \end{aligned}$$

La première partie de l'inégalité traduit donc la viabilité du projet à l'échelle de la société dans le cas où l'agent fait un effort. Si l'agent n'exerce pas d'effort :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}S_{E\emptyset} &= p_L R_E - A + B \\ \mathbb{E}S_{I\emptyset} &= p_L R_I - (I - A) \\ \mathbb{E}W_{\emptyset} &= p_L R - I + B. \end{aligned}$$

La seconde partie de l'inégalité traduit donc la non-viabilité du projet à l'échelle de la société dans le cas où l'agent fait ne fait pas d'effort.

L'entrepreneur et les investisseurs sont neutres vis-à-vis du risque, mais l'entrepreneur est protégé par la responsabilité limitée, ce qui implique qu'en cas d'échec du projet les deux parties reçoivent un revenu nul. Le facteur d'actualisation est normalisé à zéro.

On suppose également que l'actif utilisé dans la production (machines, brevets, bureaux, etc.) a une valeur résiduelle : une fois utilité ou non dans la production, ils gardent une utilité K pour l'entrepreneur et $K' < K$ pour les investisseurs.

En plus du partage du revenu $(R_E; R_I)$ en cas de succès du projet, le contrat stipule la fraction y de l'actif que l'entrepreneur garde en cas d'échec, la fraction complémentaire, $1-y$, allant aux investisseurs. Enfin, en cas de réussite du projet l'entrepreneur conserve la totalité de la valeur résiduelle.

Question 1 : Commenter l'hypothèse $K' < K$.

> En cas d'échec du projet et dans l'hypothèse que les actifs ne peuvent pas être revendus, l'investisseur a un savoir-faire moindre que l'entrepreneur pour les réutiliser. Il les valorise donc moins.

Question 2 : En supposant que l'entrepreneur exerce l'effort, écrire l'espérance de revenu net de l'entrepreneur et des investisseurs, $\mathbb{E}S_E$ et $\mathbb{E}S_I$, ainsi que le surplus total espéré, $\mathbb{E}W$ (valeur nette présente du projet). Comment le surplus espéré varie-t-il avec y?

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}S_E &= p_H R_E - A + (1-p_H)yK + p_H K \\
\mathbb{E}S_I &= p_H R_I - (I-A) + (1-p_H)(1-y)K' \\
\mathbb{E}W &= p_H R - I + (1-p_H)(yK + (1-y)K') + p_H K.
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \mathbb{E}W}{\partial y} = (1-p_H)(K-K') \geq 0$$

Question 3 : Ecrire la contrainte d'incitation de l'entrepreneur. Ecrire la valeur minimale du revenu net espéré qui doit lui être laissé pour qu'il exerce l'effort. On notera $\mathbb{E}S_E^{\min}$ cette valeur; comment varie-t-elle avec y?

En l'absence d'effort, l'entrepreneur gagne :

$$p_L R_E - A + B + (1 - p_L)yK + p_L K$$

La contrainte d'incitation est :

$$p_H R_E - A + (1 - p_H)yK + p_H K \geq p_L R_E - A + B + (1 - p_L)yK + p_L K$$

Elle équivaut à :

$$p_H[R_E - yK + K] - A + yK \geq p_L[R_E - yK + K] - A + B + yK$$

Finalement, en notant $\Delta p = p_H - p_L$:

$$R_E - yK + K \geq \frac{B}{\Delta p}$$

On en déduit :

$$\mathbb{E}S_E = p_H(R_E - yK + K) - A + yK \geq \frac{p_H B}{\Delta p} - A + yK = \mathbb{E}S_E^{\min}$$

Le minimum de revenu net espéré qui doit être laissé à l'entrepreneur pour préserver ses incitations est :

$$\mathbb{E}S_E^{\min} = p_H B/\Delta p - A + yK.$$

Il est croissant en y de pente K.

Question 4 : Écrire la contrainte de participation des investisseurs. Montrer qu'elle implique $\mathbb{E}W \geq \mathbb{E}S_E^{\min}$.

En supposant que le contrat incite à l'effort, la contrainte de participation des investisseurs est :

$$\mathbb{E}S_I \geq 0 \Leftrightarrow p_H R_I - (I - A) + (1 - p_H)(1 - y)K' \geq 0$$

En sommant cette contrainte avec la contrainte d'incitation de la question précédente, on obtient :

$$\mathbb{E}S_I + \mathbb{E}S_E \geq \mathbb{E}S_E^{\min} \Leftrightarrow \mathbb{E}W \geq \mathbb{E}S_E^{\min}$$

D'où finalement :

$$p_H R - I + (1 - p_H)(yK + (1-y)K') + p_H K \geq p_H B/\Delta p - A + yK.$$

Question 5 : En supposant :

$$p_H R - I + (1 - p_H)K' + p_H K > p_H B/\Delta p - A > p_H R - I$$

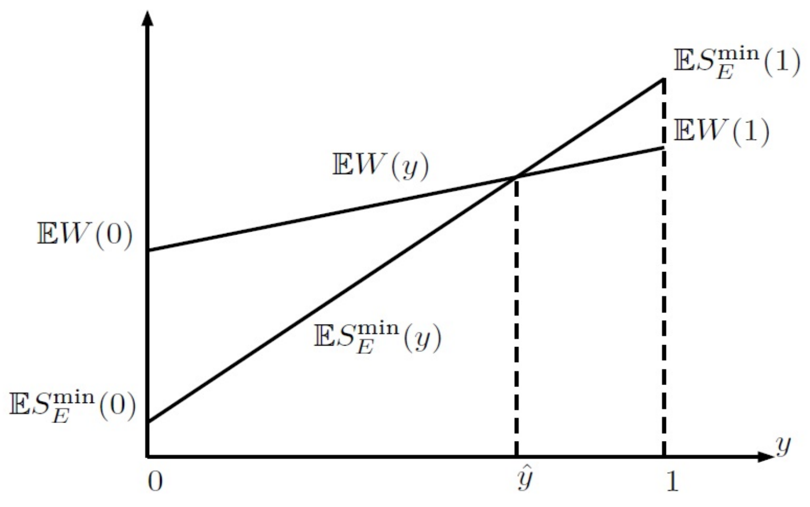
Représenter $\mathbb{E}W$ et $\mathbb{E}S_E^{\min}$ en fonction de y sur un même graphique.

$\mathbb{E}W(y)$ et $\mathbb{E}S_E^{\min}(y)$ sont des droites croissantes.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}W(0) &= p_H R - I + (1 - p_H)K' + p_H K \\
\mathbb{E}S_E^{\min}(0) &= \frac{p_H B}{\Delta} p - A \\
\mathbb{E}W(1) &= p_H R - I + K \\
\mathbb{E}S_E^{\min}(1) &= \frac{p_H B}{\Delta} p - A + K
\end{aligned}$$

D'après l'inéquation de l'énoncé, on en déduit $\mathbb{E}W(0) \geq \mathbb{E}S_E^{\min}(0)$ et $\mathbb{E}W(1) \leq \mathbb{E}S_E^{\min}(1)$. Ces droites ont donc une unique intersection, $\hat{y}$ qui maximise le surplus sous contraintes de participation et d'incitation.

Plus y est petit et plus l'actif promis est important. Cela permet de financer plus facilement le projet mais réduit également le surplus total.



Question 6 : Interpréter les deux inégalités ci-dessus et expliquer en quoi le fait de promettre une fraction de l'actif aux investisseurs en cas d'échec du projet aide à son financement.

L'inégalité de droite dit qu'on ne peut pas financer le projet sans promettre de collatéral car le surplus total est inférieur à ce qui doit être laissé à l'entrepreneur pour qu'il fasse l'effort.

L'inégalité de gauche dit qu'on peut financer le projet en promettant l'intégralité des actifs aux investisseurs en cas d'échec ($y = 0$). Cela fait baisser le surplus total, mais fait baisser $\mathbb{E}S_E^{\min}$ encore plus.