

# TD Aléa moral - Énoncé

Microéconomie, deuxième année, ENSAE

## 1 Aléa moral et aversion au risque

Un principal fait appel à un agent pour un projet qui peut se révéler un succès ( $q = R$ ) ou un échec ( $q = 0$ ). La probabilité de succès dépend du niveau d'effort  $e$ :  $\mathbb{P}[q = R|e] = p(e)$ . On suppose que  $p(e)$  est strictement croissante et concave en  $e$  et que  $p(0) = 0$ ,  $p'(0) = +\infty$ ,  $p'(\infty) = 0$  et  $p(\infty) = 1$ . Le principal prévoit une rémunération minimale garantie,  $w_0$ , ainsi qu'un bonus en cas de réussite,  $w_1$ . Dès lors, la rémunération perçue peut prendre deux valeurs:  $w = w_0$  ou  $w = w_0 + w_1$ . La fonction d'utilité du principal  $V(q - w)$  est supposée concave ( $V' > 0$ ,  $V'' \leq 0$ ) avec  $V(.) \geq 0$ . L'agent présente la fonction d'utilité suivante:  $u(w) - e$ , avec  $u'(. > 0$ ,  $u''(. \leq 0$ .

On s'intéresse d'abord à la situation de premier rang, c'est-à-dire lorsque  $e$  est observable par le principal. Le principal propose alors un contrat spécifiant  $e$ ,  $w_0$  et  $w_1$ , et l'agent accepte ou refuse.

**Question 1:** Écrire la contrainte de participation de l'agent. En utilisant le lagrangien du programme du principal, montrer que l'optimum est caractérisé par l'égalité des taux marginaux de substitution entre de la richesse dans l'état du monde "succès" et de la richesse dans l'état du monde "échec" pour le principal et l'agent. Interpréter.

**Question 2:** Caractériser le contrat de premier rang (a) lorsque seul le principal est neutre au risque, et (b) lorsque seul l'agent est neutre au risque.

À présent on suppose que le principal ne peut pas observer l'effort de l'agent.

**Question 3:** Montrer que la contrainte d'incitations peut s'écrire simplement au moyen d'une condition du premier ordre.

**Question 4:** Montrer alors que l'égalité des TMS n'est plus vérifiée au second rang. Interpréter.

## 2 Responsabilité limitée et tarifs binômes

Un principal souhaite déléguer une tâche à un agent. Si l'agent fait un effort  $e$ , la production  $q$  sera tirée uniformément sur  $[0; 2e]$ . Le coût de l'effort est  $c(e) = e^2/2$ . On s'intéresse aux contrats linéaires, où la rémunération de l'agent est sous la forme  $\alpha q + \beta$ . Le principal et l'agent sont supposés neutres au risque.

**Question 1:** Si le principal peut observer l'effort de l'agent, quel est le contrat optimal pour le principal?

**Question 2:** On suppose que l'effort n'est plus observable. Pour  $\alpha$  et  $\beta$  donnés, quel est l'effort choisi par l'agent?

**Question 3:** Quel est alors le contrat optimal pour le principal? Est-ce efficace?

**Question 4:** Supposons que l'agent a une richesse initiale  $W \geq 0$ . L'agent ne peut donc pas payer au principal un montant supérieur à  $W$ . Calculer le contrat linéaire optimal pour le principal. Commenter le rôle de  $W$ .

## 3 Offre publique d'achat et aléa moral

On considère une entreprise-cible dont l'actionnariat est dispersé (il y a un continuum d'actionnaires, neutres au risque)<sup>1</sup>. Un acquéreur potentiel, neutre au risque, est présent. La valeur actuelle de la firme est normalisée à 0. Si l'acquéreur potentiel obtient le contrôle de l'entreprise, il perçoit un gain privé  $Z$ , et peut également exercer un effort  $a$ , au coût  $\frac{ka^2}{2}$ , qui permet d'augmenter la valeur de l'entreprise à  $aV_R$ .

Pour obtenir le contrôle de l'entreprise, il faut posséder au moins 50% des actions. L'acquéreur potentiel ne possède aucune action initialement. On suppose également que la direction en place ne fera rien pour empêcher l'acquisition.

L'acquéreur fait une offre publique d'achat, à un prix de  $b$  par action. Cette offre est illimitée et conditionnelle: l'acquéreur s'engage à acheter toutes les actions (en proportion  $s$ ) dont les propriétaires sont prêts à accepter un prix  $b$ , mais uniquement si le nombre d'actions est supérieur à  $\frac{1}{2}$  (on normalise le nombre total d'actions à 1). Étant donnée l'offre, les actionnaires décident de façon non-coopérative s'ils souhaitent vendre leur part. Chaque actionnaire a un impact négligeable sur le résultat de l'OPA.

---

<sup>1</sup>Exercice tiré de *Contract Theory*, de P. Bolton et M. Dewatripont

**Question 1:** Dans le cas où  $s > \frac{1}{2}$ , calculer les profits de l'acquéreur, des actionnaires vendeurs et des actionnaires non-vendeurs. Quel est l'effort de premier rang,  $a^{FB}$ , qui maximise le surplus total ?

**Question 2:** Si l'acquéreur arrive à obtenir une part  $s \geq 1/2$  de l'entreprise, quel effort choisit-il ? En déduire la valeur de l'entreprise après l'achat.

**Question 3:** En déduire le prix minimum auquel les actionnaires acceptent de vendre leur actions.

**Question 4:** Déterminer l'offre optimale  $b^*$  de l'acquéreur. En déduire sous quelle condition (sur  $Z$ ) le rachat de l'entreprise-cible a lieu.

## 4 Financement de projet et aléa moral : collateral

Un entrepreneur a un projet qui requiert un investissement  $I$ . Il dispose initialement d'une richesse  $A < I$  et doit donc emprunter  $I - A$  pour financer son projet.

Le projet rapporte un revenu net  $R$  s'il réussit et zéro s'il échoue. La probabilité de succès est  $p_H$  si l'entrepreneur exerce un effort et  $p_L < p_H$  s'il tire au flanc. Tirer au flanc rapporte un bénéfice privé  $B$  à l'entrepreneur. Un contrat de prêt stipule le partage du revenu  $(R_E; R_I)$  en cas de succès du projet. On suppose :

$$p_H R - I > 0 > p_L R - I + B.$$

**Question 0 :** Commenter s'interprète cette inégalité ?

L'entrepreneur et les investisseurs sont neutres vis-à-vis du risque, mais l'entrepreneur est protégé par la responsabilité limitée, ce qui implique qu'en cas d'échec du projet les deux parties reçoivent un revenu nul. Le facteur d'actualisation est normalisé à zéro.

On suppose également que l'actif utilisé dans la production (machines, brevets, bureaux, etc.) a une valeur résiduelle : une fois utilisé ou non dans la production, ils gardent une utilité  $K$  pour l'entrepreneur et  $K' < K$  pour les investisseurs.

En plus du partage du revenu  $(R_E; R_I)$  en cas de succès du projet, le contrat stipule la fraction  $y$  de l'actif que l'entrepreneur garde en cas d'échec, la fraction complémentaire,  $1 - y$ , allant aux investisseurs. Enfin, en cas de réussite du projet l'entrepreneur conserve la totalité de la valeur résiduelle.

**Question 1 :** Commenter l'hypothèse  $K' < K$ .

**Question 2 :** En supposant que l'entrepreneur exerce l'effort, écrire l'espérance de revenu net de l'entrepreneur et des investisseurs,  $\mathbb{E}S_E$  et  $\mathbb{E}S_I$ , ainsi que le surplus total espéré,  $\mathbb{E}W$  (valeur nette présente du projet). Comment le surplus espéré varie-t-il avec  $y$ ?

**Question 3 :** Ecrire la contrainte d'incitation de l'entrepreneur. Ecrire la valeur minimale du revenu net espéré qui doit lui être laissé pour qu'il exerce l'effort. On notera  $\mathbb{E}S_E^{\min}$  cette valeur; comment varie-t-elle avec  $y$ ?

**Question 4 :** Écrire la contrainte de participation des investisseurs. Montrer qu'elle implique  $\mathbb{E}W \geq \mathbb{E}S_E^{\min}$ .

**Question 5 :** En supposant :

$$p_H R - I + (1 - p_H)K' + p_H K > p_H B / \Delta p - A > p_H R - I$$

Représenter  $\mathbb{E}W$  et  $\mathbb{E}S_E^{\min}$  en fonction de  $y$  sur un même graphique.

**Question 6 :** Interpréter les deux inégalités ci-dessus et expliquer en quoi le fait de promettre une fraction de l'actif aux investisseurs en cas d'échec du projet aide à son financement.