



Introduction aux processus

Deuxième année

2023-2024

Ecrit. Deux heures. Pas de calculatrice. Seul document autorisé : une feuille manuscrite remplie par l'étudiant.e

Nicolas Chopin

Justifiez toutes vos réponses. Les quatre exercices sont indépendants.

1 Chaîne de Markov sur \mathbb{N} (5 points)

Soit $p \in]0, 1/2[$ et $q = 1/2 - p$. On considère une chaîne de Markov sur \mathbb{N} de matrice de transition P telle que :

- $P(i, i + 1) = p$ pour tout $i \geq 0$;
- $P(i, i - 1) = 1/2$ pour tout $i > 0$;
- $P(i, i) = q$ pour tout $i > 0$;
- $P(0, 0) = 1 - p$.

1. Montrer que cette chaîne est irréductible.
2. Donner les équations vérifiées par une éventuelle loi invariante π pour cette chaîne de Markov.
3. Montrer que $\pi_i = c\alpha^i$ vérifie ces équations, pour des valeurs $c > 0$, et $\alpha \in [0, 1]$ que vous déterminerez.
4. Déduire de la question précédente le caractère récurrent positif de la chaîne. Que peut-on dire dans le cas $p = 1/2$?

2 Mouvement brownien (2 points)

1. Donner la loi de $W_{t+h} - W_t$ pour (W_t) mouvement brownien, pour $h, t > 0$, et expliquer pourquoi (informellement, et brièvement) la réalisation d'un mouvement brownien ne peut pas être dérivable.

3 Martingales (8 points)

On admettra le résultat suivant : si $X \sim N(0, \sigma^2)$, alors $\mathbb{E}(e^X) = \exp(\sigma^2/2)$.

Soit X_1, X_2, \dots une suite de variables aléatoires IID (indépendantes et identiquement distribuées) de loi $N(0, \sigma^2)$, soit $S_0 = 0$, $S_t = X_1 + \dots + X_t$ pour $t \geq 1$, et soit

$$M_t = \exp \left\{ S_t - \frac{t\sigma^2}{2} \right\}$$

pour $t \geq 0$.

1. Montrer que (M_t) est une martingale (pour une filtration que l'on précisera).
2. Déterminer $\mathbb{E}[M_t]$ et $E[M_t^2]$ (pour tout $t \geq 0$).
3. Montrer que (M_t) converge p.s. vers une limite M_∞ .
4. Déterminer la loi de M_∞ .
5. En déduire que (M_t) n'est pas bornée dans \mathcal{L}_2 .

4 Chaîne de Markov dans $\{0, 1\}^d$ (8 points)

Soit $E_d = \{0, 1\}^d$, l'espace des “mots binaires” de longueur d , $d \geq 2$, $\psi : E_d \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction arbitraire,

$$\pi(x) = \psi(x)/Z$$

pour $x = (x_1, \dots, x_d) \in E_d$, et $Z > 0$ constante choisie de manière à ce que π soit une densité de probabilité sur E_d ; soit $Z = \sum_{x \in E_d} \psi(x)$.

1. Pour X variable de loi π , montrer que la loi conditionnelle de la composante X_i sachant $X_j = x_j$ pour tout $j \neq i$ est une loi de Bernoulli dont on précisera le paramètre. (Vous pouvez faire les calculs pour $d = 2$ pour simplifier les notations, puis déduire la formule générale pour tout d sans justification supplémentaire.)

2. Soit P_i ($i = 1, \dots, d$) la matrice de transition qui correspond à la chaîne de Markov suivante (dans E_d) : si $X_t = x$, alors X_{t+1} est le vecteur obtenu en prenant x , et en remplaçant sa i -ème composante par un tirage selon la loi conditionnelle de la question précédente.

Montrer que π est la loi invariante de P_i (pour tout $i = 1, \dots, d$). (A nouveau, on pourra présenter les calculs dans le cas $d = 2$ pour simplifier les notations.) Quelle est alors la loi invariante de $P = P_1 \times \dots \times P_d$?

3. On suppose $\psi(x) > 0$ pour tout $x \in E_d$. Montrer que P est irréductible. Peut-on en déduire qu'une chaîne de Markov de matrice de transition P est récurrente positive ?
4. Donner un contre-exemple (cas où P n'est pas irréductible) si on ne suppose pas que $\psi(x) > 0$ pour tout $x \in E_d$.

5. Pour $d = 2$, montrer que P n'est pas réversible en général.

Indication : calculer la probabilité de passer de l'état $(0, 0)$ à l'état $(1, 1)$, par exemple, et montrer que $\psi(1, 0) = \psi(0, 1)$ est une condition nécessaire pour que P soit réversible.

6. (bonus, pour celles et ceux qui ont fait tout le reste de l'examen)

Quel est le lien, à votre avis, entre cet exercice et l'algorithme de Metropolis-Hastings vu en cours ?