TD9 : MÉTHODE BAYÉSIENNE : MOYENNE A POSTERIORI

Exercice 1. Soient $Y_1, \ldots, Y_n$ des variables aléatoires i.i.d. de loi de Poisson de moyenne $\theta^* > 0$, c'est-à-dire, $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{P}(\theta^*)$.

1. On considère d'abord la mesure a priori π_0 égale à la mesure de Lebesgue sur $]0, +\infty[$. Trouver la densité de loi a poseriori, π_n, et vérifier que la loi a posteriori est une loi gamma.
2. On rappelle que l'espérance d'une v.a. ξ de loi gamma de paramètres (p, a) est égale à ap. Calculer l'estimateur bayésien
$$\widehat{\theta}_n^{\mathrm{B}} = \int_0^\infty \theta\, \pi_n(\theta)\, d\theta.$$
3. Vérifier que
$$\sqrt{n}\,\big(\widehat{\theta}_n^{\mathrm{B}} - \bar{X}_n\big) \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} 0.$$
4. Calculer l'information de Fisher dans ce modèle.
5. On admet que le modèle de Poisson est régulier, montrer que $\widehat{\theta}_n^{\mathrm{B}}$ est asymptotiquement normal et déterminer la variance limite.
6. Vérifier que $\{\mathrm{Gamma}(p, a) : p > 0, a > 0\}$ est une famille conjuguée pour le modèle de Poisson.

Exercice 2. Nous avons observé des variables aléatoires iid de loi uniforme sur l'intervalle $[\theta^*, \theta^* + 1]$, mais la valeur de θ^* ne nous a pas été dévoilée. Nous décidons d'utiliser l'estimateur bayésien utilisant la mesure de Lebesgue comme mesure a priori.

1. Trouver la forme explicite de l'estimateur bayésien $\widehat{\theta}_n^{\mathrm{B}}$.
2. L'estimateur $\widehat{\theta}_n^{\mathrm{B}}$ est-il sans biais ?
3. Peut-on affirmer que la famille $\{\mathcal{N}(\mu, 1) : \mu \in \mathbb{R}\}$ est conjuguée pour le modèle $\{\mathcal{U}([\theta, \theta + 1]) : \theta \in \mathbb{R}\}$?
4. (facultatif) Prouver que la suite $\{n(\widehat{\theta}_n^{\mathrm{B}} - \theta^*)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi.