Autour du modèle avec apprentissage par la pratique (Romer 1986)

Exercice 1 : Politiques fiscales optimales dans le modèle avec apprentissage par la pratique

Cet exercice cherche à déterminer si une politique fiscale adaptée permet à l'équilibre décentralisé de coïncider avec l'allocation socialement optimale du planificateur.

Le secteur productif est en concurrence pure et parfaite. Chaque petite entreprise i utilise une technologie de production à rendements constants, $F(K_{i,t}, A_t N_{i,t})$, croissante et concave en chacun de ses arguments. Pour chaque entreprise i, $N_{i,t}$ est la demande de travail, dont le salaire réel est w_t, et $K_{i,t}$ la demande de capital, dont le coût réel d'usage est z_t. On note $K_t = \sum_i K_{i,t}$ et $N_t = \sum_i N_{i,t}$. L'efficacité du travail dans chaque entreprise vérifie $A_t = \frac{K_t}{L_t}$. Le bien produit est utilisé pour la consommation et l'investissement.

La population, L_t, croît au taux n et fournit une unité de travail par personne. A la date t, les ménages possèdent une richesse totale B_t et consomment C_t. Les ménages peuvent détenir deux types d'actifs : prêts aux autres ménages (le taux d'intérêt réel est r_t) ou titres de propriété sur le capital (le taux de rendement réel est $z_t - \delta$, où δ est le taux de dépréciation du capital). On note avec des minuscules les variables par tête, par exemple $b_t = B_t/L_t$. A la date 0, la fonction d'utilité intertemporelle du ménage représentatif est

$$U_0 = \int_0^{+\infty} e^{-\rho t} L_t u(c_t) dt,$$

avec $u(c) = \begin{cases} \frac{c^{1-\theta}-1}{1-\theta} & \text{si} \quad \theta \geq 0,\ \theta \neq 1, \\ \ln(c) & \text{si} \quad \theta = 1. \end{cases}$

On suppose $\rho > n > 0$.

1 Subvention à l'investissement

Dans cette section, à chaque date t, le gouvernement :

— Donne une subvention aux entreprises pour les inciter à investir : lorsqu'une entreprise produit $F(K_{i,t}, A_t N_{i,t})$ unités de bien à partir de $K_{i,t}$ unité de capital et $N_{i,t}$ unité de travail, elle reçoit $\tau z_t K_{i,t}$ unités de *biens qui s'ajoutent à sa production*, avec $\tau \geq 0$.

— Finance cette subvention par un impôt forfaitaire D_t sur les ménages.

Question 1 Ecrire la contrainte budgétaire instantanée du gouvernement. Reformuler en termes de grandeurs par tête.

Le budget du gouvernement étant équilibré à chaque date, on a

$$D_t = \tau z_t K_t \quad \text{ou encore} \quad d_t \equiv \frac{D_t}{L_t} = \tau z_t k_t \quad \text{où} \quad k_t \equiv \frac{K_t}{L_t}$$

Question 2 Ecrire la contrainte budgétaire instantanée d'un ménage et son programme. L'impôt forfaitaire est considéré comme donné par chaque ménage car il ne dépend pas de ses choix individuels. Donner l'équation d'Euler.

La contrainte budgétaire instantanée s'écrit

$$\dot{B}_t = w_t N_t + r_t B_t - C_t - D_t$$

et en supposant $N_t = L_t$ (équilibre sur le marché du travail)

$$\frac{\dot{B}_t}{B_t}\frac{B_t}{L_t} = w_t + r_t\frac{B_t}{L_t} - \frac{C_t}{L_t} - \frac{D_t}{L_t}$$

Comme $b_t = \dfrac{B_t}{L_t}$ on a donc $B_t = \dfrac{\dot{b}_t}{b_t} + \dfrac{\dot{L}_t}{L_t} = \dfrac{\dot{b}_t}{b_t} + n$, d'où

$$(b_t + n)\, b_t = w_t + r_t b_t - c_t - d_t$$

$$\dot{b}_t = w_t + (r_t - n)b_t - c_t - d_t$$

Le programme des ménages est similaire à celui du chapitre 2 (Slide 22) avec la contrainte budgétaire instantanée modifiée et où les ménages considèrent d_t comme donné en plus de $(w_t)_{t\geq 0}$, $(r_t)_{t\geq 0}$ et b_0 :

$$\begin{array}{rl} \max\limits_{(c_t)_{t\geq 0},(b_t)_{t>0}} & \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-(\rho-n)t}\frac{c_t^{\theta-1}-1}{1-\theta}dt \\ s.t & \forall t \geq 0, c_t \geq 0 \\ & \forall t \geq 0, \dot{b}_t = w_t + (r_t - n)b_t - c_t - d_t \\ & \lim_{t\to+\infty} b_t e^{-\int_0^t (r_\tau - n)d\tau} \geq 0 \end{array}$$

(Rappel) $\{(c_t)_{t\geq 0}, (b_t)_{t>0}\}$ est une solution au problème d'optimisation du ménage si et seulement s'il existe $(\lambda_t)_{t\geq 0}$ tel que , pour l'Hamiltonien suivant :

$$H(c_t, b_t, \lambda_t, t) \equiv e^{-(\rho-n)t}u(c_t) + \lambda_t[(r_t - n)b_t + w_t - c_t]$$

on a

$$\begin{cases} \forall t \geq 0, & c_t \geq 0 \text{ et } \lambda_t \geq 0 \\ \forall t \geq 0, & \partial H/\partial c_t = 0 \\ \forall t \geq 0, & \partial H/\partial b_t = -\dot{\lambda}_t \\ \forall t \geq 0, & \dot{b}_t = w_t + (r_t - n)b_t - c_t - d_t \\ & \lim_{t\to+\infty} b_t \lambda_t^{-(\rho-n)t} = 0 \\ & \lim_{t\to+\infty} b_t e^{-\int_0^t (r_\tau - n)d\tau} \geq 0 \end{cases}$$

La condition d'Euler n'est pas modifiée (démonstration possible pour s'entraîner à résoudre le programme du consommateur)

$$\frac{\dot{c}_t}{c_t} = \frac{r_t - \rho}{\theta}$$

Question 3 Ecrire le profit d'une entreprise i et son programme. Résoudre ce programme et en déduire que $\frac{K_{i,t}}{N_{i,t}}$ ne dépend pas de i et vaut $\frac{K_t}{N_t}$.

Le profit d'une entreprise s'écrit

$$(F(K_{i,t}, A_t N_{i,t}) + \tau z_t K_{i,t}) - z_t K_{i,t} - w_t N_{i,t} = F(K_{i,t}, A_t N_{i,t}) - (1-\tau)z_t K_{i,t} - w_t N_{i,t}$$

Et son programme en considérant A_t, z_t et w_t comme donnés :

$$\max_{K_{i,t},N_{i,t}} F(K_{i,t}, A_t N_{i,t}) - (1-\tau)z_t K_{i,t} - w_t N_{i,t}$$

Les conditions du premier ordre sont donc :

$$\begin{array}{rclcl} \frac{\partial K_{i,t}}{\partial F}(K_{i,t}, A_t N_{i,t}) & = & F_1(K_{i,t}, A_t N_{i,t}) & = & (1-\tau)z_t \\ \frac{\partial N_{i,t}}{\partial F}(K_{i,t}, A_t N_{i,t}) & = & A_t F_2(K_{i,t}, A_t N_{i,t}) & = & w_t \end{array}$$

On peut montrer par exemple à partir de la première condition :

$$(1-\tau)z_t = \frac{\partial K_{i,t}}{\partial F}(K_{i,t}, A_t N_{i,t}) = \frac{\partial K_{i,t}}{\partial \left[A_t N_{i,t} F(\frac{K_{i,t}}{A_t N_{i,t}}, 1)\right] = F_1(\frac{K_{i,t}}{A_t N_{i,t}}, 1)}$$

$\frac{K_{i,t}}{N_{i,t}}$ ne dépend pas de i, donc $\frac{K_{i,t}}{N_{i,t}} = \frac{K_t}{N_t}$.

(*Démonstration*) Soit une fonction g telle que $\frac{K_{i,t}}{N_{i,t}} = g(t)$ car le ratio ne dépend pas de i. Par exemple pour le capital total on a alors :

$K_t = \sum_i K_{i,t} = \sum_i g(t) N_{i,t} = g(t)\sum_i N_{i,t} = g(t)N_t \Leftrightarrow \frac{K_t}{N_t} = g(t)$ donc $\frac{K_{i,t}}{N_{i,t}} = \frac{K_t}{N_t}$

On note par la suite $f(x) \equiv F(x,1)$. K_0 et L_0 sont donnés.

Question 4 Réécrire les conditions du premier ordre du programme des entreprises à l'aide de f.

On note $f(x) \equiv F(x,1)$. En remarquant que $F(K_{i,t}, A_t N_{i,t}) = A_t N_{i,t} f(\frac{K_{i,t}}{A_t N_{i,t}})$, on a donc, en utilisant $\frac{K_{i,t}}{N_{i,t}} = \frac{K_t}{N_t}$, $A_t = \frac{K_t}{L_t} \equiv k_t$ et $N_t = L_t$:

$$\frac{\partial K_{i,t}}{\partial F}(K_{i,t}, A_t N_{i,t}) = \frac{\partial K_{i,t}}{\partial \left[A_t N_{i,t} f(\frac{K_{i,t}}{A_t N_{i,t}})\right] = f'(\frac{K_{i,t}}{A_t N_{i,t}}) = f'(1) \text{ car } \frac{K_{i,t}}{A_t N_{i,t}} = \frac{L_t K_t}{K_t L_t} = 1}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial N_{i,t}}{\partial F}(K_{i,t}, A_t N_{i,t}) = \frac{\partial N_{i,t}}{\partial \left[A_t N_{i,t} f(\frac{K_{i,t}}{A_t N_{i,t}})\right]} &= A_t f(\tfrac{K_{i,t}}{A_t N_{i,t}}) + \left[A_t N_{i,t}(-\tfrac{A_t K_{i,t}}{(A_t N_{i,t})^2}) f'(\tfrac{K_{i,t}}{A_t N_{i,t}})\right] \\ &= A_t \left[f(\tfrac{K_{i,t}}{A_t N_{i,t}}) - \tfrac{K_{i,t}}{A_t N_{i,t}} f'(\tfrac{K_{i,t}}{A_t N_{i,t}})\right] \\ &= k_t[f(1) - f'(1)]\end{aligned}$$

On a maintenant les conditions du premier ordre

$$\begin{aligned} z_t(1-\tau) &= f'(1) \\ w_t &= [f(1) - f'(1)]k_t \end{aligned}$$

Question 5 Déterminer les quatre conditions d'équilibre sur k_t et c_t : une équation différentielle en k_t, une en c_t, une condition initiale et une condition terminale sur k_t.

En injectant cette première condition dans l'équation d'Euler, sachant que

$r_t = z_t - \delta$ (équilibre sur le marché des fonds prêtables) $\Rightarrow r_t = \dfrac{f'(1)}{1-\tau} - \delta$, on trouve

$$\dot{c}_t = \frac{\frac{f'(1)}{1-\tau} - (\delta + \rho)}{\theta} c_t$$

En utilisant $b_t = k_t$, $r_t = \frac{f'(1)}{1-\tau} - \delta$, $w_t = [f(1) - f'(1)]k_t$ et $d_t = \tau z_t k_t = \frac{f'(1)}{1-\tau}\tau k_t$, on réécrit la contrainte budgétaire instantanée

$$\dot{b}_t = w_t + (r_t - n)b_t - c_t - d_t$$

$$\dot{k}_t = [f(1) - f'(1)]k_t + \left(\frac{f'(1)}{1-\tau} - \delta - n\right)k_t - c_t - \frac{\tau f'(1)}{1-\tau}k_t$$

$$\dot{k}_t = \left[f(1) - f'(1) + \frac{f'(1)}{1-\tau} - (\delta + n) - \frac{\tau f'(1)}{1-\tau}\right]k_t - c_t$$

$$\dot{k}_t = \left[f(1) - (\delta + n) - f'(1) + \frac{(1-\tau)f'(1)}{1-\tau}\right]k_t - c_t$$

c'est-à-dire

$$\dot{k}_t = [f(1) - (\delta + n)]\,k_t - c_t$$

La condition initiale pour k_t est

$$k_0 = \frac{K_0}{L_0}$$

et à partir de la condition de transversalité qui peut s'exprimer à partir de la résolution du programme du consommateur :

$$\lim_{t \to +\infty} b_t e^{-\int_0^t (r_\tau - n) d\tau} = 0$$

d'où la condition terminale pour k_t

$$\lim_{t \to +\infty} k_t e^{-\left[\frac{f'(1)}{1-\tau} - (n+\delta)\right]t} = 0.$$

On rappelle les quatre conditions d'équilibre sur k_t et c_t du programme du planificateur :

$$\frac{\dot{c}_t}{c_t} = \frac{f(1) - (\delta + \rho)}{\theta} \qquad \dot{k}_t = [f(1) - (\delta + n)]k_t - c_t$$

$$k_0 = \frac{K_0}{L_0} \qquad \lim_{t \to +\infty} e^{-[f(1)-(n+\delta)]t} k_t = 0$$

Question 6 En dérivant $F(1, x) = xf\left(\frac{1}{x}\right)$ par rapport à x, montrer que $f(1) > f'(1)$.

Remarquons que

$$F(1, x) = xF(\frac{1}{x}, 1) = xf(\frac{1}{x})$$

On sait que $F_2(1, x) > 0$ pour tout x, donc

$$\begin{array}{rcll} F_2(1, x) & = & \frac{\partial x}{\partial\left[xf(\frac{1}{x})\right]} & > 0 \\ & = & f(\frac{1}{x}) - \frac{1}{x}f'(\frac{1}{x}) & > 0 \end{array}$$

Pour $x = 1$

$$f(1) - f'(1) > 0 \quad \text{donc} \quad f(1) > f'(1)$$

Question 7 Comparer les taux de croissance de la consommation par tête de l'économie décentralisée sans politique fiscale ($\tau = 0$) et du planificateur. Interpréter. Indiquer s'il est possible d'atteindre l'allocation socialement optimale dans un cadre décentralisé avec une politique fiscale. Le cas échéant, donner la valeur de τ. Commenter.

Si $\tau = 0$, dans le cas de l'économie décentralisée (équilibre concurentiel)

$$\frac{\dot{c}_t}{c_t} = \frac{f'(1) - (\delta + \rho)}{\theta},$$

alors que le cas du planificateur (cf. cours)

$$\frac{\dot{c}_t}{c_t} = \frac{f(1) - (\delta + \rho)}{\theta},$$

Or $f(1) > f'(1)$, donc l'équilibre concurrentiel n'est pas socialement optimal : la croissance de y est trop faible car les entreprises n'investissent pas assez à cause de l'externalité.
On veut

$$f(1) = \frac{f'(1)}{1-\tau} \Leftrightarrow \tau = 1 - \frac{f'(1)}{f(1)} = \frac{f(1) - f'(1)}{f(1)}$$

En choisissant $\tau = \frac{f(1)-f'(1)}{f(1)} > 0$, on retrouve les quatre mêmes équations que dans le cas du planificateur. Cette valeur de τ permet donc d'atteindre l'optimum social. Le transfert permet d'égaliser le rendement privé du capital à son rendement social.

2 Taxes sur les revenus des actifs et du travail

Dans cette section, à chaque date t, le gouvernement :

— Taxe au taux τ_r (lorsque $\tau_r > 0$) ou subventionne au taux $-\tau_r$ (lorsque $\tau_r < 0$) les revenus des actifs.
— Taxe au taux τ_w (lorsque $\tau_w > 0$) ou subventionne au taux $-\tau_w$ (lorsque $\tau_w < 0$) les revenus du travail.

Question 8 Ecrire la contrainte budgétaire instantanée du ménage représentatif, puis obtenir sa contrainte budgétaire intertemporelle et sa condition de solvabilité.

En reprenant la contrainte budgétaire instantanée du ménage représentatif de la question 2, et tenant compte du nouveau système de taxation au lieu du prélèvement forfaitaire D_t sur les ménages, on a

$$\dot{b}_t = (1-\tau_w)w_t + [(1-\tau_r)r_t - n]b_t - c_t$$

En actualisant à la date 0 aux taux de rendement des actifs $(1-\tau_r)r_t - n$ et en intégrant entre 0 et T :

$$\int_0^T \{\dot{b}_t - [(1-\tau_r)r_t - n]b_t - c_t]b_t\}e^{-\int_0^t[(1-\tau_r)r_s-n]ds}dt = \int_0^T [(1-\tau_w)w - c]e^{-\int_0^t[(1-\tau_r)r_\tau-n]d\tau}dt$$

$$b_T e^{-\int_0^T[(1-\tau_r)r_s-n]ds} - b_0 = \int_0^T [(1-\tau_w)w - c]e^{-\int_0^t[(1-\tau_r)r_\tau-n]d\tau}dt$$

La condition de solvabilité (également appelée condition de Ponzi) impose que les agents n'aient pas de dettes (en valeur actualisée) à la fin des temps :

$$\lim_{t\to+\infty} b_t e^{-\int_0^t[(1-\tau_r)r_s-n]ds} \geq 0.$$

En utilisant cette condition et l'égalité précédente avec $T \to +\infty$, on obtient la contrainte budgétaire intertemporelle :

$$\int_0^{+\infty} c_t e^{-\int_0^t[(1-\tau_r)r_s-n]ds}dt \leq b_0 + (1-\tau_w)\int_0^{+\infty} w_t e^{-\int_0^t[(1-\tau_r)r_s-n]ds}dt.$$

Question 9 En quoi le programme de maximisation du ménage représentatif diffère-t-il de celui étudié à la question 2 ? En déduire l'équation d'Euler exprimant $\frac{\dot{c}_t}{c_t}$ en fonction de r_t et de paramètres constants du modèle. Interpréter.

Le programme de maximisation du ménage représentatif diffère de celui de la question 2 : les revenus des actifs et du travail sont remplacés par les revenus correspondants nets des taxations dans la contrainte budgétaire instantanée et la contrainte de solvabilité. L'équation d'Euler est ainsi modifiée en substituant le rendement des actifs par leur rendement net de taxation :

$$\frac{\dot{c}_t}{c_t} = \frac{1}{\theta}[(1-\tau_r)r_t - \rho] \qquad \text{(équation d'Euler)}$$

La croissance de la consommation par tête est d'autant plus importante que la propension à épargner est importante. Celle-ci est déterminée par l'écart entre le taux d'intérêt net de la taxation des actifs $(1-\tau_r)r_t$ et le taux de préférence pour le présent ρ. La réaction à cet écart est d'autant plus forte que l'élasticité de substitution intertemporelle $\frac{1}{\theta}$ est élevée, c'est-à-dire-que la propension du ménage à lisser sa consommation est faible (i.e. à accepter des écarts plus importants de consommation).

Question 10 La politique fiscale modifie-t-elle les conditions du premier ordre du programme des entreprises ? Si oui, comment ? En déduire $\frac{\dot{c}_t}{c_t}$ en fonction de paramètres constants du modèle.

La taxation des revenus des actifs et du travail affecte seulement les revenus des ménages, et n'affectent pas les coûts du capital et du travail que les entreprises considèrent comme donnés. Les conditions du premier ordre du programme des entreprises sont identiques à celles de la question 4 dans le cas particulier où $\tau = 0$:

$$r_t + \delta = f'(1) \qquad \text{et} \qquad w_t = [f(1) - f'(1)]k_t$$

L'équation d'Euler se réécrit

$$\frac{\dot{c}_t}{c_t} = \frac{1}{\theta}[(1-\tau_r)(f'(1)-\delta) - \rho].$$

Question 11 On suppose que le budget du gouvernement est équilibré à tout instant. Ecrire la condition d'équilibre sur le marché des actifs. Quelle valeur (τ_r^*, τ_w^*) le gouvernement doit-il choisir pour (τ_r, τ_w) afin que le taux de croissance de la consommation par tête soit égal à celui que choisirait un planificateur bienveillant ? Interpréter.

Le budget du gouvernement est équilibré à tout instant :

$$\tau_r r_t B_t + \tau_w w_t N_t = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \tau_r r_t b_t + \tau_w w_t = 0$$

La condition d'équilibre sur le marché des actifs s'écrit

$$B_t = K_t \quad \Leftrightarrow \quad b_t = k_t$$

On en déduit

$$\frac{\tau_w}{\tau_r} = -\frac{r_t k_t}{w_t} = \frac{f'(1) - \delta}{f'(1) - f(1)} < 0 \qquad \text{en supposant } r_t = f'(1) - \delta > 0.$$

Le taux de croissance de la consommation par tête est égal à celui que choisirait un planificateur bienveillant pour (τ_r^*, τ_w^*) tel que

$$(1 - \tau_r^*)(f'(1) - \delta) = f(1) - \delta \qquad \text{soit} \qquad \tau_r^* = \frac{f'(1) - f(1)}{f'(1) - \delta} < 0 \qquad \text{et} \qquad \tau_w^* = 1.$$

L'autorité fiscale peut ainsi subventionner les revenus des actifs, en finançant cette subvention par une taxation totale des revenus du travail. Une telle politique fiscale permet d'égaliser le rendement privé de l'épargne des ménages au rendement social de l'investissement. La taxation des revenus du travail est ici équivalente à une taxe forfaitaire qui ne distord pas le choix des ménages, car l'arbitrage entre travail et loisir est absent dans la spécification de leur utilité.