复变函数试题（2020年6月8日下午, 共10题，每题10分）

以下记C为复数集合, R为实数集合, N为正整数集合（不包含0）.

1. 求出$\max_{|z|\le r}|f(z)|$, 这里$f(z)=\alpha z^n+\beta,\ r>0,\ n\in N,\ \alpha,\beta\in C,\ \alpha\neq 0$. 并给出$|f(z)|$取最大值时$z$的表达式（用$\alpha,\ \beta,\ n,\ r$ 的解析表达式）及这时$f(z)$的具体值.

2. 设$z=x+iy,\ x,\ y\in R$, 给出$\sin(x+iy)$的实部及虚部的表达式并由此证明：对于任何复数$A+iB,\ A,\ B\in R$, 方程 $\sin(x+iy)=A+iB$ 有无穷多解.

3. 设C_r是圆周：$|z|=r>0$, 函数$f(z)$在复平面处处可导. 用$f(z)$关于C_r的闭曲线积分公式给出$f(z)$在原点的n阶导数的公式(Cauchy高阶导数公式)，这里$n\in N$. 并由此证明：(1) 若令$M(r)=\max_{|z|=r}|f(z)|$, 则$|f^{(n)}(0)|\le\frac{n!M(r)}{r^n}$. (2) 若存在常数$M>0,n\in N$, 使$|f(z)|\le M\cdot\left(\sum_{k=0}^n|z|^k\right),\forall z\in C$, 则$f(z)$是一个次数不超过$n$的多项式.

4. 求复积分$I_{m,n}=\oint_{|z|=1}\frac{1-\cos 6z^m}{z^n}dz$, 这里$m,\ n\in N$.

5. 求复积分$I=\oint_{|z|=2}\frac{z^3e^{\frac{2}{z}}}{1+z}dz$.

6. (1) 证明 $\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a+b\sin\theta}=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a+b\cos\theta}$, 这里$a>b\ge 0$.

 (2) 求实积分 $I=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a+b\sin\theta}$, 这里$a>b\ge 0$.

7. 求实积分 $I=\int_0^{+\infty}\frac{4x\sin kx dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$, 这里 $a,\ b,\ k$ 是正数.

8. 求出将区域$D_1=\{z:|z-A|>A,\ |z-B|<B\}$映到单位圆盘$|w|<1$的一个单值解析映射，这里 $0<A<B$.

9. 求出将区域$D_2=\{z=re^{i\theta}:0<\theta<\frac{\pi}{4},\ \ 0<r<3\}$映到单位圆盘$|w|<1$的一个单值解析映射.

10. 求出将圆盘$|z-z_0|<r$映到圆盘$|w-w_0|<R$的分式线性映射的一般形式，并使$w(z_1)=w_0$, 这里$r>0,\ R>0$ 且$|z_1-z_0|<r$. 并由此证明以下准不变式：

$$\frac{R|dw|}{R^2-|w-w_0|^2}=\frac{r|dz|}{r^2-|z-z_0|^2},$$

这里$dw,\ dz$ 表示复变量$w,\ z$的微分.