第5讲　二端口网络
(Two-port Network)

二端口网络的参数和方程

根据给定电路求二端口参数

二端口网络的等效电路

根据给定二端口参数求等效电路

本讲重难点

- 二端口网络用R/G/T三种参数描述的定义
- 互易和对称二端口网络对应的R/G/T参数条件

Why Two-port?

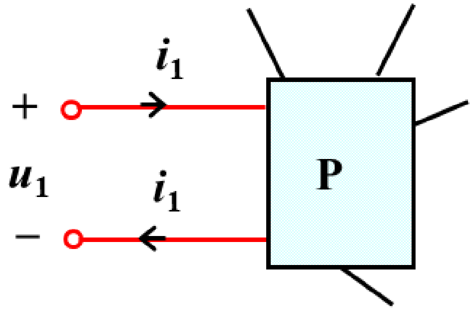
电磁场
(感兴趣内部***EB***)
→
电路元件
(感兴趣接线端***ui***)
→
功能子电路
(感兴趣端口***ui***)
↓
板卡
(感兴趣接口***ui***)
←
计算机
(感兴趣接口***ui***)
←
Internet
(感兴趣网线中***ui***表征的信息)

$\boxed{\text{抽象的力量}}$

1. 二端口的定义

(1) 端口 (port)

端口由两个接线端构成，且满足如下条件：从一个接线端流入的电流等于从另一个接线端流出的电流。 端口条件

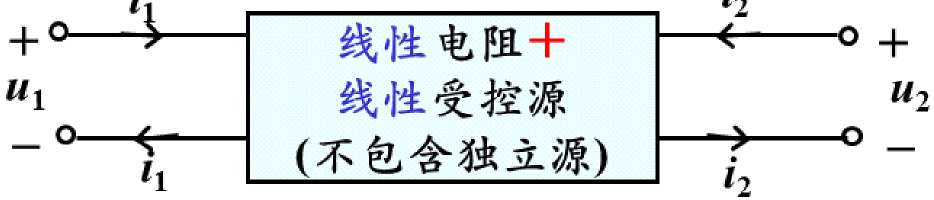


(2) 二端口 （two-port） 当一个电路与外部电路通过两个端口连接时称此电路为二端口网络。

Franz Breisig 1920提出

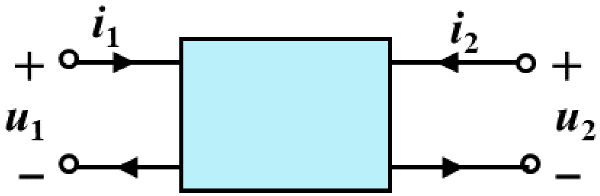
≠线性四端网络

本讲讨论线性二端口



注意 参考方向：u上+下−，i从u的+端流入。

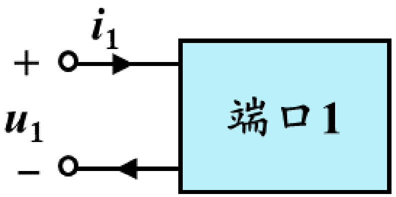
2 二端口的参数和方程

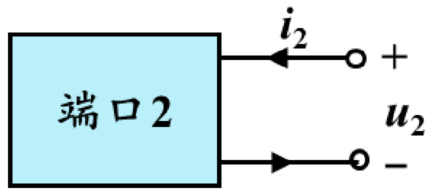


端口物理量**4个**　　i_1　i_2　u_1　u_2

如何描述二端口网络的电压电流关系?

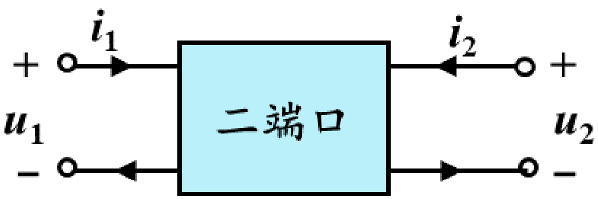
回忆一端口网络的电压电流关系





$$u_1 = f_1(i_1) \qquad u_2 = f_2(i_2)$$

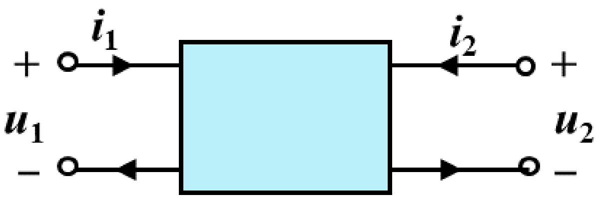
或 $i_1 = g_1(u_1)$　　或 $i_2 = g_2(u_2)$



应该用两个电压电流关系方程来描述二端口网络

即：用两个物理量来表示另外两个物理量

单选题 1分



端口物理量4个

i_1 i_2 u_1 u_2

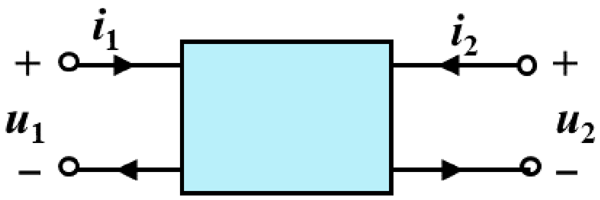
可能有几种用两个量描述另外两个量的端口关系方程?

A 1

B 3

C 6

D 8



端口物理量4个

$i_1 \quad i_2 \quad u_1 \quad u_2$

共6种端口关系方程

用		来表示	
u_1	u_2	i_1	i_2
i_1	i_2	u_1	u_2
i_2	u_2	i_1	u_1
i_1	u_2	i_2	u_1
i_1	u_1	i_2	u_2
i_2	u_1	i_1	u_2

再次强调：

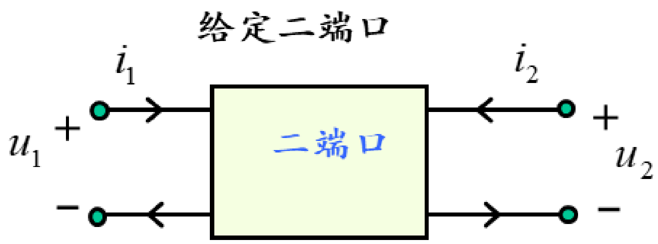
本课程的二端口中没有独立源

(1) 用电压表示电流：G参数和方程

$$\begin{cases} i_1 = G_{11}u_1 + G_{12}u_2 \\ i_2 = G_{21}u_1 + G_{22}u_2 \end{cases}$$

矩阵形式 $$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

令 $$G = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix}$$

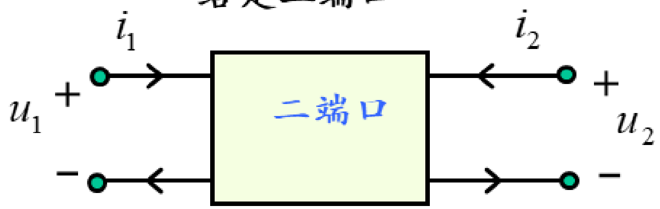


$$\begin{cases} i_1 = G_{11}u_1 + G_{12}u_2 \\ i_2 = G_{21}u_1 + G_{22}u_2 \end{cases}$$

对于某一黑箱二端口，如何获得其G参数?

此处可以有弹幕/投稿

给定二端口



$$\begin{cases} i_1 = G_{11}u_1 + G_{12}u_2 \\ i_2 = G_{21}u_1 + G_{22}u_2 \end{cases}$$

对于某一黑箱二端口，如何获得其G参数?

G参数的实验测定

此处可以有弹幕/投稿

类比一端口网络端口电导的求法

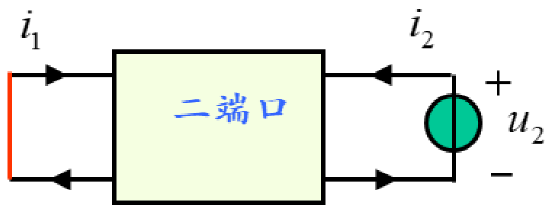
$$G_{11} = \frac{i_1}{u_1}\bigg|_{u_2=0} \quad 自电导$$

$$G_{21} = \frac{i_2}{u_1}\bigg|_{u_2=0} \quad 转移电导$$

加压求流

$$G_{12} = \frac{i_1}{u_2}\bigg|_{u_1=0} \quad 转移电导$$

$$G_{22} = \frac{i_2}{u_2}\bigg|_{u_1=0} \quad 自电导$$

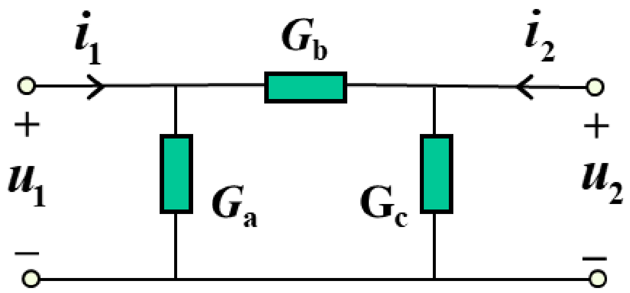


称G为短路电导参数矩阵

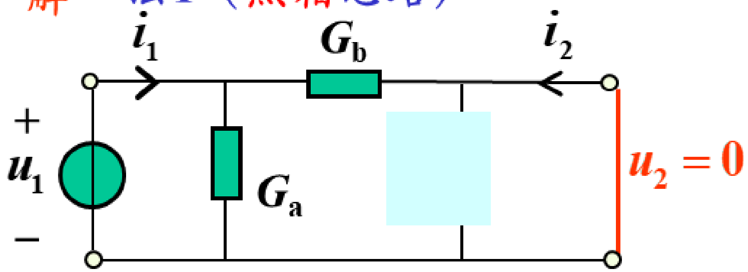
能这样做的前提是端口能够被短路!

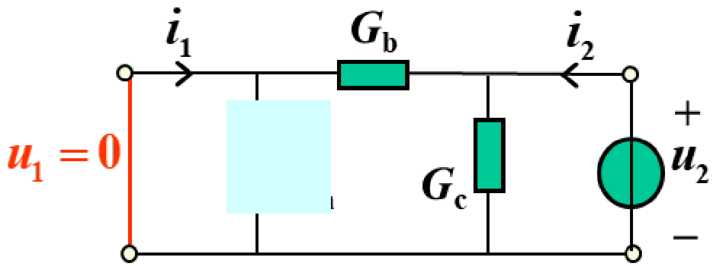
例1 求G参数。

$$\begin{cases} i_1 = G_{11}u_1 + G_{12}u_2 \\ i_2 = G_{21}u_1 + G_{22}u_2 \end{cases}$$



解　法1（黑箱思路）





$$G_{11} = \frac{i_1}{u_1}\bigg|_{u_2=0} = G_a + G_b$$

$$G_{21} = \frac{i_2}{u_1}\bigg|_{u_2=0} = -G_b$$

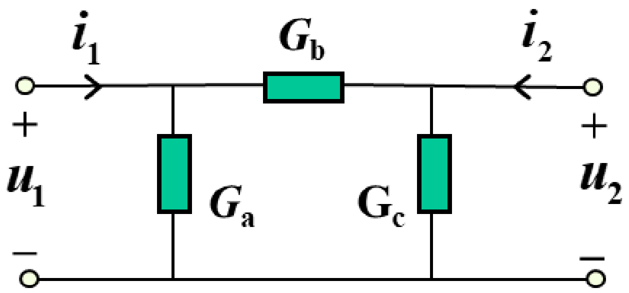
$$G_{12} = \frac{i_1}{u_2}\bigg|_{u_1=0} = -G_b$$

$$G_{22} = \frac{i_2}{u_2}\bigg|_{u_1=0} = G_b + G_c$$

$$\boxed{G_{12} = G_{21} = -G_b}$$

例1 求G参数。

$$\begin{cases} i_1 = G_{11}u_1 + G_{12}u_2 \\ i_2 = G_{21}u_1 + G_{22}u_2 \end{cases}$$



解

法2 对白箱二端口，可直接求端口电压电流关系

$$i_1 = u_1G_a + (u_1 - u_2)G_b$$

$$i_2 = u_2G_c + (u_2 - u_1)G_b$$

$$G_{11} = G_a + G_b$$

$$G_{21} = -G_b$$

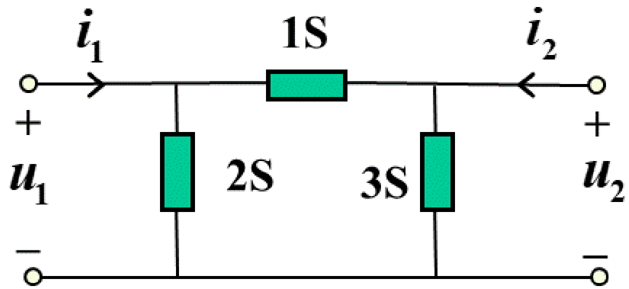
$$G_{12} = -G_b$$

$$G_{22} = G_b + G_c$$

$$G = \begin{pmatrix} G_a + G_b & -G_b \\ -G_b & G_b + G_c \end{pmatrix}$$

单选题 1分

该二端口网络的G_{21}=___S



$$G=\begin{pmatrix} G_a+G_b & -G_b \\ -G_b & G_b+G_c \end{pmatrix}$$

A 1

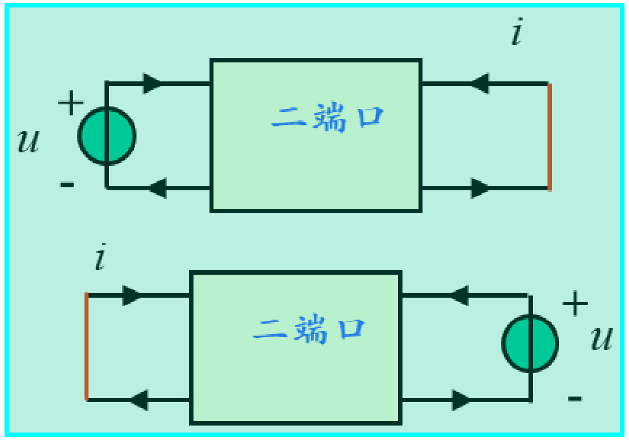
B −1

C 3

D 4

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

互易二端口　某激励无论加在哪侧，在**对侧**产生的响应都一样



$$i = G_{21}u$$

$$i = G_{12}u$$

$$G_{12} = G_{21}$$

互易二端口网络**四个参数中只有三个是独立的**

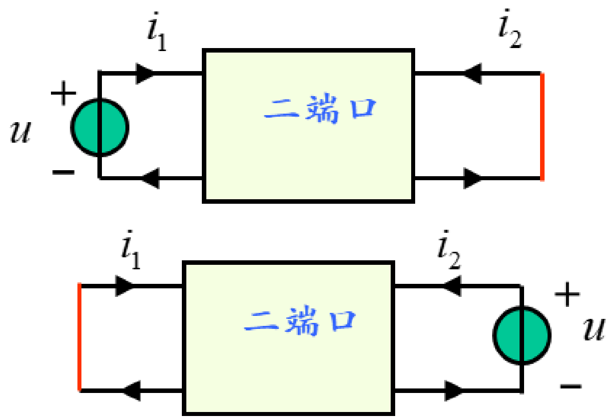
由线性电阻组成的二端口

互易定理

互易二端口

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

对称二端口 两个端口外特性(己侧/对侧)完全一样 → $G_{12}=G_{21}$ $G_{11}=G_{22}$



$$i_2 = G_{21}u$$

$$\left.\begin{aligned} i_1 &= G_{11}u \\ i_2 &= G_{22}u \end{aligned}\right\} \; G_{11}=G_{22}$$

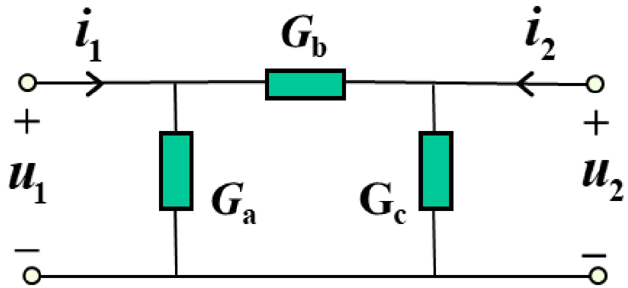
$$i_1 = G_{12}u$$

$i_2 = G_{21}u$, $i_1 = G_{12}u$ $\}$ $G_{12}=G_{21}$

对称二端口只有两个参数是独立的。

电阻二端口：显然互易

$$G=\begin{bmatrix} G_a+G_b & -G_b \\ -G_b & G_b+G_c \end{bmatrix}$$



若 $G_a=G_c$

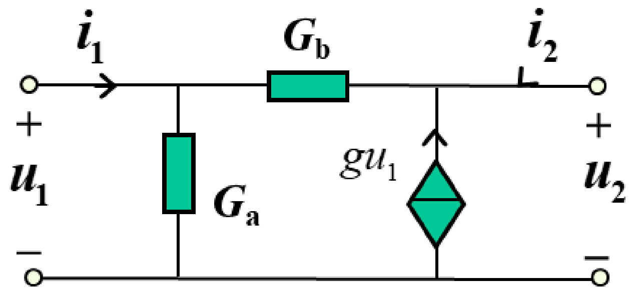
有 $G_{12}=G_{21}$，又 $G_{11}=G_{22}$，为对称二端口。 结构对称

结构对称的二端口

对称二端口

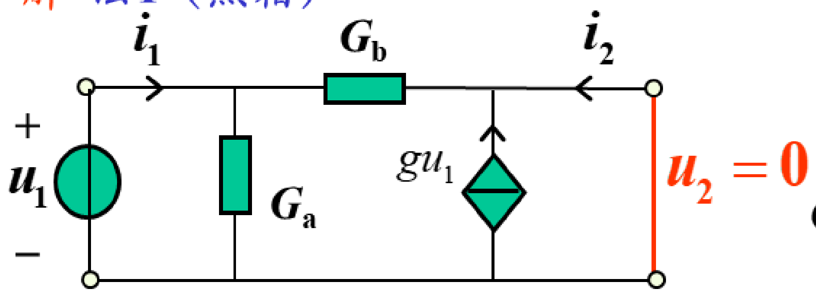
（电气对称）

例2 求所示电路的G参数



$$\begin{cases} i_1 = G_{11}u_1 + G_{12}u_2 \\ i_2 = G_{21}u_1 + G_{22}u_2 \end{cases}$$

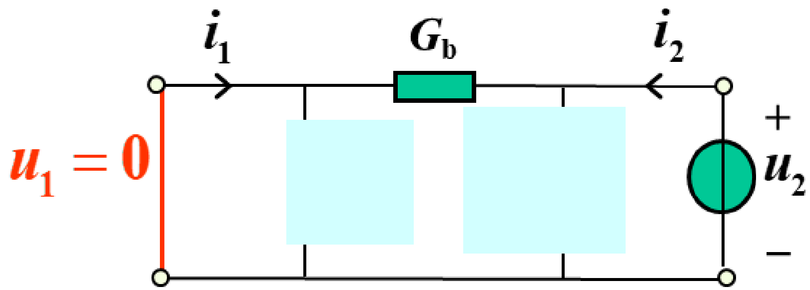
解 法1（黑箱）



$$G_{11} = \left.\frac{i_1}{u_1}\right|_{u_2=0} = G_a + G_b$$

$$G_{21} = \left.\frac{i_2}{u_1}\right|_{u_2=0} = -G_b - g$$

非互易



$$G_{12} = \left.\frac{i_1}{u_2}\right|_{u_1=0} = -G_b$$

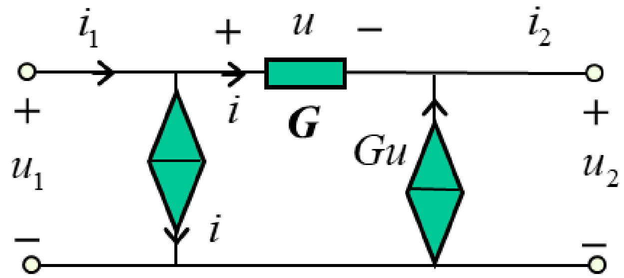
$$G_{22} = \left.\frac{i_2}{u_2}\right|_{u_1=0} = G_b$$

法2（白箱） 复习时自行练习

单选题 1分

对该含受控源二端口的描述正确的是

红包



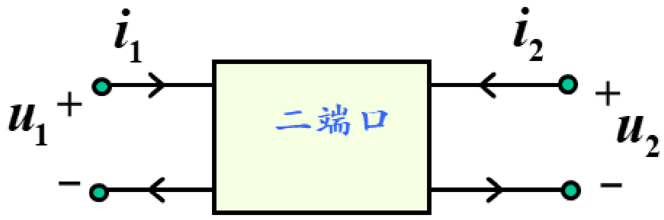
A 非互易

B 对称

C 互易非对称

19

(2)用电流表示电压：R参数和方程



由G参数方程 $\begin{cases} i_1 = G_{11}u_1 + G_{12}u_2 \\ i_2 = G_{21}u_1 + G_{22}u_2 \end{cases}$ $\xrightarrow{\text{解出}}$ u_1, u_2

即

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{G_{22}}{\Delta} i_1 + \dfrac{-G_{12}}{\Delta} i_2 = R_{11}i_1 + R_{12}i_2 \\ u_2 = \dfrac{-G_{21}}{\Delta} i_1 + \dfrac{G_{11}}{\Delta} i_2 = R_{21}i_1 + R_{22}i_2 \end{cases}$$

其中 $\Delta = G_{11}G_{22} - G_{12}G_{21} \neq 0$ 前提：G非奇异

其矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix}$$

*R*参数的实验测定（黑箱）

其矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix}$$

*R*参数的实验测定（黑箱）

$$R_{11} = \left.\frac{u_1}{i_1}\right|_{i_2=0} \qquad R_{12} = \left.\frac{u_1}{i_2}\right|_{i_1=0}$$

$$R_{21} = \left.\frac{u_2}{i_1}\right|_{i_2=0} \qquad R_{22} = \left.\frac{u_2}{i_2}\right|_{i_1=0}$$

称*R*为开路电阻参数矩阵

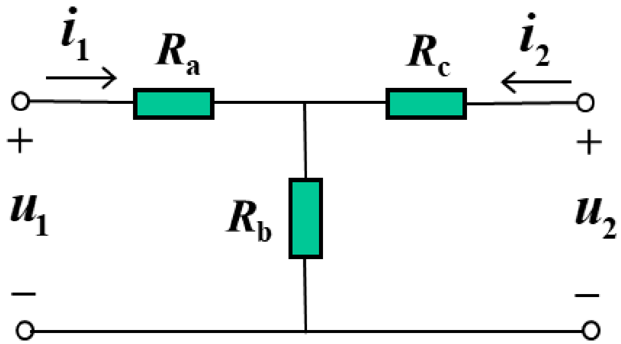
能这样做的前提是端口能够被开路！

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{G_{22}}{\Delta} i_1 + \dfrac{-G_{12}}{\Delta} i_2 = R_{11} i_1 + R_{12} i_2 \\ u_2 = \dfrac{-G_{21}}{\Delta} i_1 + \dfrac{G_{11}}{\Delta} i_2 = R_{21} i_1 + R_{22} i_2 \end{cases}$$

互易二端口 $G_{12} = G_{21} \rightarrow \boxed{R_{12} = R_{21}}$

对称二端口 $G_{12}=G_{21}$, $G_{11}=G_{22} \rightarrow \boxed{R_{11} = R_{22}}$ $\boxed{R_{12} = R_{21}}$

例　求所示电路的R参数



$$u_1 = R_{11}i_1 + R_{12}i_2$$
$$u_2 = R_{21}i_1 + R_{22}i_2$$

法2（白箱）

法1（黑箱）

端口电压电流关系

实验测定。自行完成

$$u_1 = i_1R_a + (i_1 + i_2)R_b$$

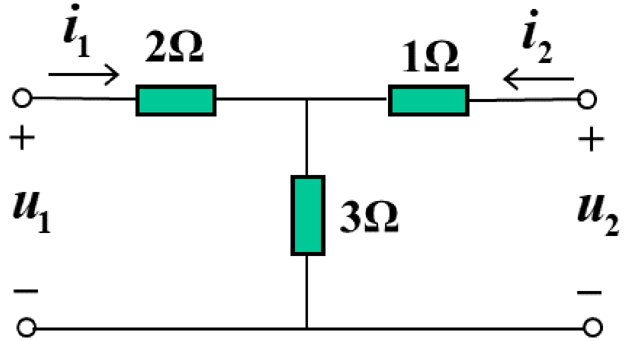
$$R = \begin{pmatrix} R_a + R_b & R_b \\ R_b & R_b + R_c \end{pmatrix}$$

$$u_2 = i_2R_c + (i_1 + i_2)R_b$$

互易二端口

单选题 1分

图示二端口的R_{11}=_____Ω



$$R=\begin{pmatrix} R_a+R_b & R_b \\ R_b & R_b+R_c \end{pmatrix}$$

A 2

B 1

C 3

D 5

(3)用输出表示输入： T参数和方程 $i_1 = G_{11}u_1 + G_{12}u_2$ (1)

如何用u_2和i_2来表示u_1和i_1？ $i_2 = G_{21}u_1 + G_{22}u_2$ (2)

由(2)得

$$u_1 = -\frac{G_{22}}{G_{21}}u_2 + \frac{1}{G_{21}}i_2 \quad (3)$$

将(3)代入(1)得

$$i_1 = \left(G_{12} - \frac{G_{11}G_{22}}{G_{21}}\right)u_2 + \frac{G_{11}}{G_{21}}i_2$$

令

$$T_{11} = -\frac{G_{22}}{G_{21}} \quad T_{12} = \frac{-1}{G_{21}} \quad T_{21} = \frac{G_{12}G_{21} - G_{11}G_{22}}{G_{21}} \quad T_{22} = -\frac{G_{11}}{G_{21}}$$

即

$$u_1 = T_{11}u_2 - T_{12}i_2$$
$$i_1 = T_{21}u_2 - T_{22}i_2$$

(注意负号)

$$T = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} u_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} u_2 \\ -i_2 \end{bmatrix}$$

称为传输参数(T)矩阵

如何考虑T参数的互易和对称条件？　基本思路：回归G参数

$$u_1 = T_{11}u_2 - T_{12}i_2$$

$$i_1 = T_{21}u_2 - T_{22}i_2$$

$$i_2 = \underbrace{-\frac{1}{T_{12}}}_{G_{21}}u_1 + \underbrace{\frac{T_{11}}{T_{12}}}_{G_{22}}u_2$$

$$= T_{21}u_2 + \frac{T_{22}}{T_{12}}u_1 - \frac{T_{11}T_{22}}{T_{12}}u_2$$

$$i_1 = \underbrace{\frac{T_{22}}{T_{12}}}_{G_{11}}u_1 + \underbrace{\frac{T_{12}T_{21} - T_{11}T_{22}}{T_{12}}}_{G_{12}}u_2$$

互易二端口　$T_{11}T_{22} - T_{12}T_{21} = 1$

对称二端口　$T_{11}T_{22} - T_{12}T_{21} = 1$　　$T_{11} = T_{22}$

该怎么做?

T 参数的实验测定（黑箱）

此处可以有弹幕/投稿

$$u_1 = T_{11}u_2 - T_{12}i_2$$
$$i_1 = T_{21}u_2 - T_{22}i_2$$

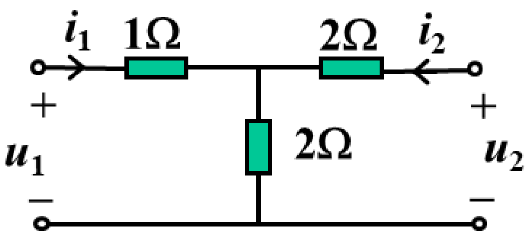
$$\left.\begin{aligned} T_{11} &= \left.\frac{u_1}{u_2}\right|_{i_2=0} \\ T_{21} &= \left.\frac{i_1}{u_2}\right|_{i_2=0} \end{aligned}\right\} \text{开路参数}$$

$$\left.\begin{aligned} T_{12} &= \left.\frac{u_1}{-i_2}\right|_{u_2=0} \\ T_{22} &= \left.\frac{i_1}{-i_2}\right|_{u_2=0} \end{aligned}\right\} \text{短路参数}$$

能这样做的前提是端口2能够被开路和短路!

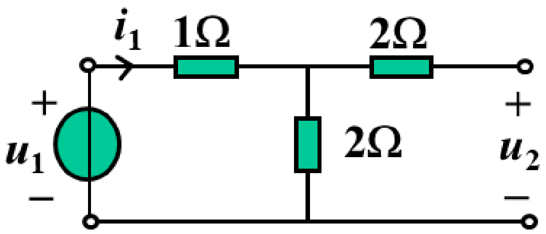
例

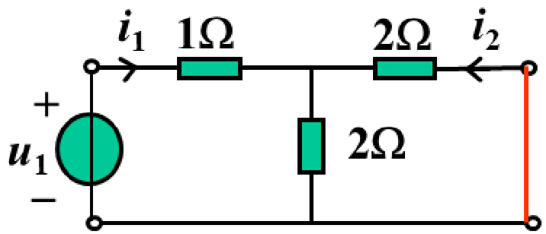
求T参数



$$u_1 = T_{11}u_2 - T_{12}i_2$$
$$i_1 = T_{21}u_2 - T_{22}i_2$$

法1（黑箱）





$$T_{11} = \left.\frac{u_1}{u_2}\right|_{i_2=0} = \frac{1+2}{2} = 1.5$$

$$T_{12} = \left.\frac{u_1}{-i_2}\right|_{u_2=0} = \frac{i_1[1+(2//2)]}{0.5i_1} = 4\,\Omega$$

$$T_{21} = \left.\frac{i_1}{u_2}\right|_{i_2=0} = 0.5\,\mathrm{S}$$

$$T_{22} = \left.\frac{i_1}{-i_2}\right|_{u_2=0} = \frac{i_1}{0.5i_1} = 2$$

法2　先写出G或R参数，再解出T参数

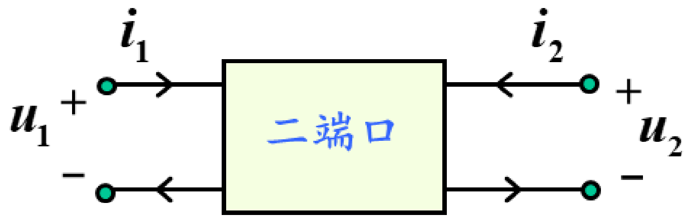
法3（白箱）　根据KCL、KVL列方程并整理

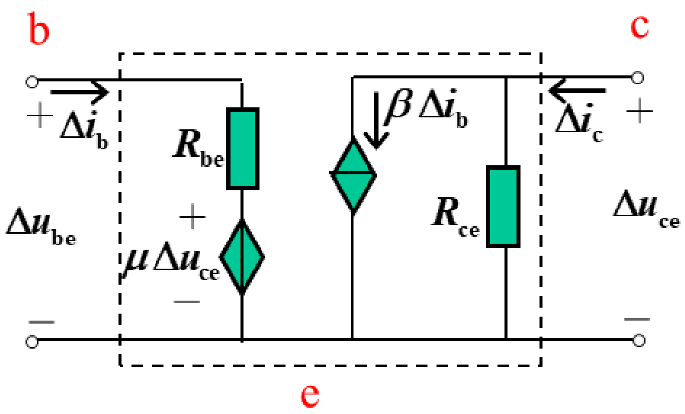
(4) H 参数和方程

H 参数也称为混合参数，常用于双极型晶体管等效电路。

H 参数方程

$$u_1 = H_{11}i_1 + H_{12}u_2$$
$$i_2 = H_{21}i_1 + H_{22}u_2$$



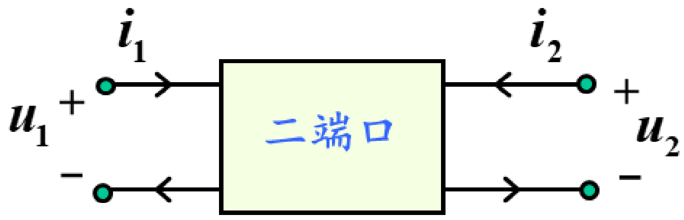


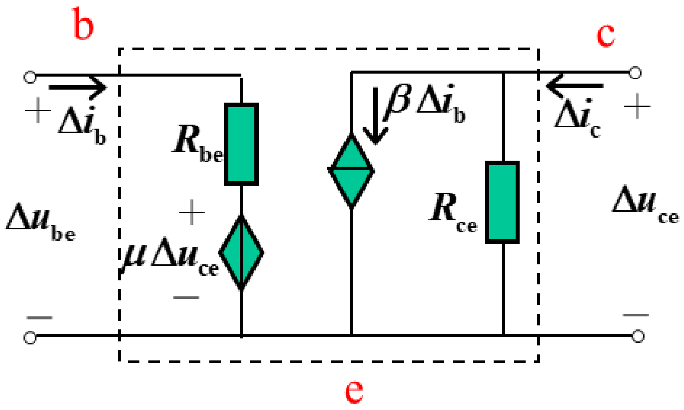
(4) H 参数和方程

H 参数也称为混合参数，常用于双极型晶体管等效电路。

H 参数方程

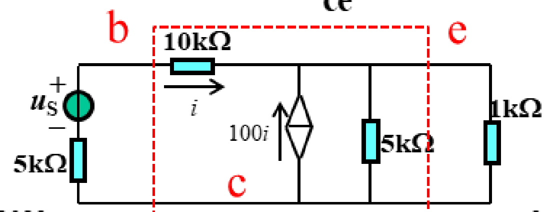
$$u_1 = H_{11}i_1 + H_{12}u_2$$
$$i_2 = H_{21}i_1 + H_{22}u_2$$





$$\Delta u_{be} = R_{be}\Delta i_b + \mu\Delta u_{ce}$$

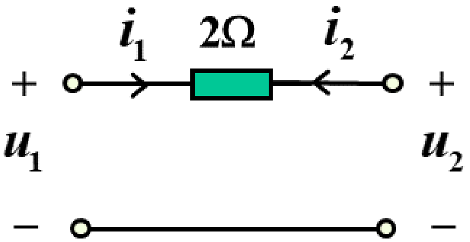
$$\Delta i_c = \beta\Delta i_b + \frac{\Delta u_{ce}}{R_{ce}}$$



为什么用这么多参数表示?

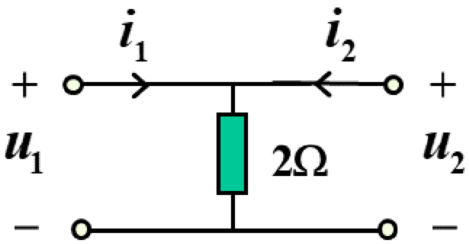
（1）为描述电路方便，测量方便(如H)。

（2）有些电路只存在某几种参数。



$$G=\begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 0.5 \end{bmatrix}\mathrm{S}$$

***R*参数 不存在**

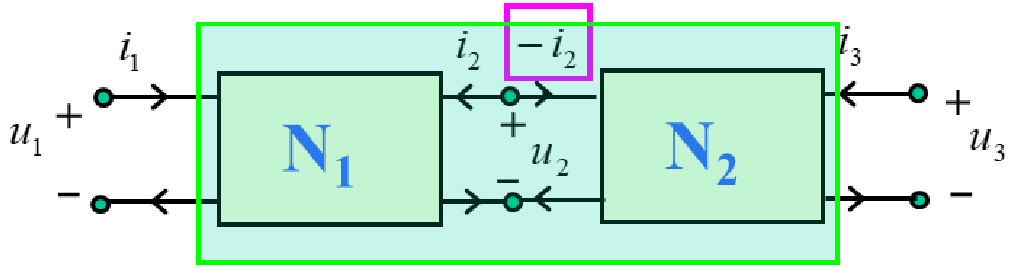


$$R=\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\Omega$$

***G* 参数不存在**

（3）有些电路不能端口短路/开路（黑箱法）。

为什么T参数会有这么怪怪的定义 $\begin{bmatrix} u_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} u_2 \\ -i_2 \end{bmatrix}$



$$\begin{bmatrix} u_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = T_1 \begin{bmatrix} u_2 \\ -i_2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} u_2 \\ -i_2 \end{bmatrix} = T_2 \begin{bmatrix} u_3 \\ -i_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = T_1 T_2 \begin{bmatrix} u_3 \\ -i_3 \end{bmatrix}$$

级联

T参数的定义方式，

确保级联对外的T参数容易获取

3　二端口的等效电路

◆ 两个二端口网络等效:
是指对外电路而言，端口的电压、电流关系相同。

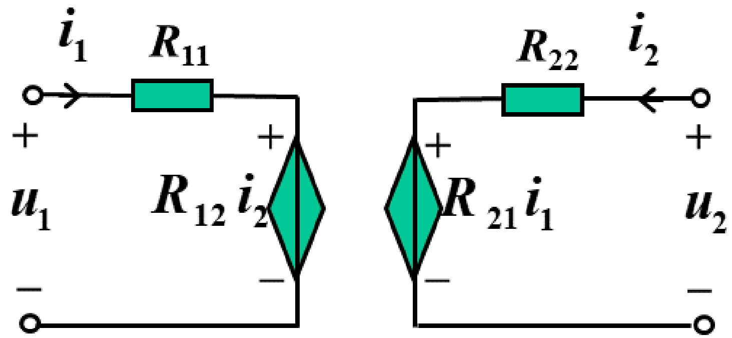
◆ 求等效电路即根据给定的参数方程确定电路结构和参数。

反向工程:

测量端口电压—电流关系 → 构造电路满足端口电压—电流关系

(1) 由R参数方程画等效电路

$$u_1 = R_{11}i_1 + R_{12}i_2$$
$$u_2 = R_{21}i_1 + R_{22}i_2$$



如果只用一个受控源

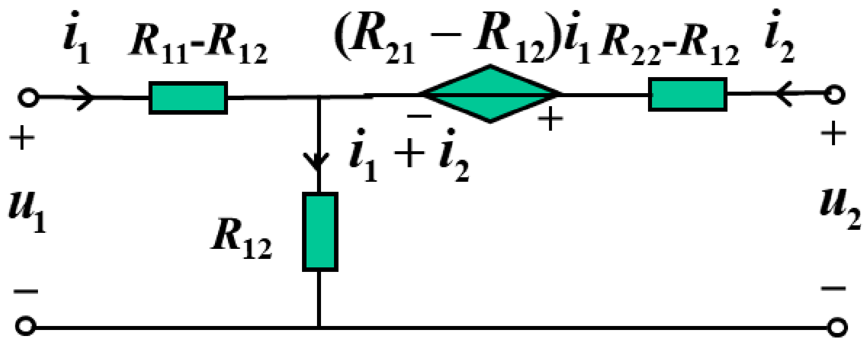
$$u_1 = R_{11}i_1 + R_{12}i_2$$

$$u_2 = R_{21}i_1 + R_{22}i_2$$

原方程改写为

$$u_1 = R_{11}i_1 + R_{12}i_2 + R_{12}i_1 - R_{12}i_1$$

$$u_2 = R_{21}i_1 + R_{22}i_2 + R_{12}i_1 - R_{12}i_1 + R_{12}i_2 - R_{12}i_2$$



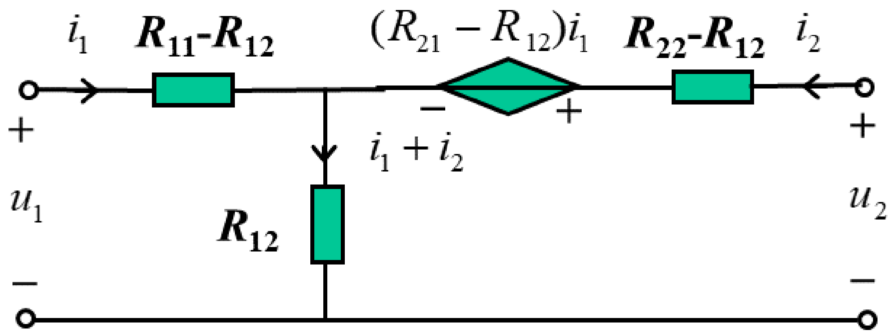
电路综合

同一个参数方程，可以画出结构不同的等效电路。

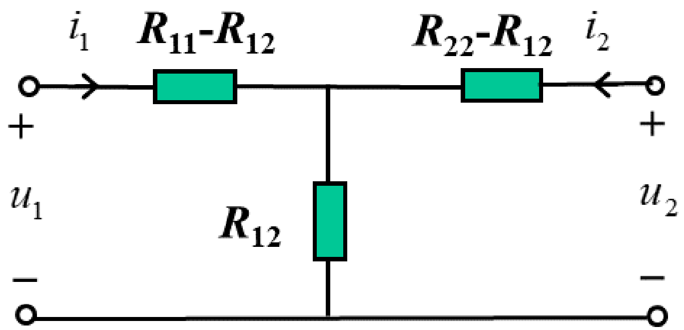
等效电路不唯一。

能不用受控源吗？为什么

此处可以有弹幕



互易网络 R_{12}=R_{21}



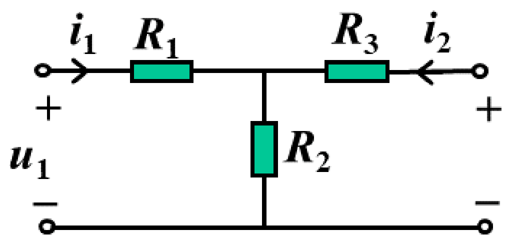
网络对称（R_{11}=R_{22}）则等效电路也对称

单选题 1分

二端口R参数矩阵为

$$R=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}\Omega$$

其中的R_3=______Ω



A 1

B 2

C 3

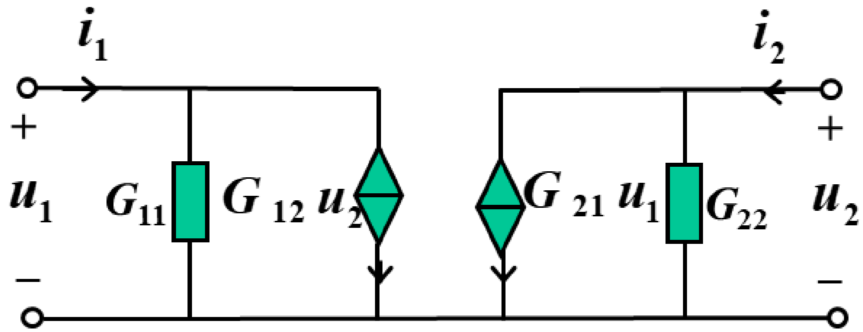
D 4

$$R=\begin{pmatrix}R_1+R_2 & R_2\\ R_2 & R_2+R_3\end{pmatrix}$$

38

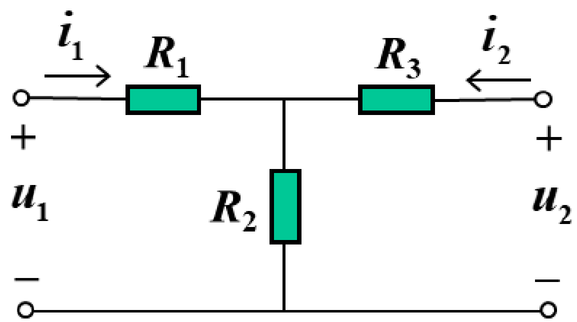
(2) 由G参数方程画等效电路（2个受控源）

$$\begin{cases} i_1 = G_{11}u_1 + G_{12}u_2 \\ i_2 = G_{21}u_1 + G_{22}u_2 \end{cases}$$



(3) T参数的等效电路？教材例2.7.6

若二端口互易



$$R_2 = \frac{1}{T_{21}}$$

$$R_1 = \frac{T_{11}-1}{T_{21}} \qquad R_3 = \frac{T_{22}-1}{T_{21}}$$

记住这个有时候能占便宜