第六章

6.3. 已知：$A=5cm=0.05m$.

求：相(x,φ)，振动表达式，相量图

解：设 $x=A\cos\varphi$ 为振动曲线方程，则有

(1) $x_a=A=0.05m$. $x_b=\frac{A}{2}=0.025m$ $x_c=0$. $x_d=-\frac{A}{2}=-0.025m$ $x_e=-\frac{A}{2}=-0.025m$

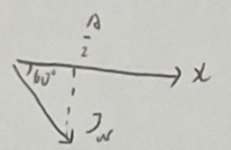
$\varphi_a=0$ $\varphi_b=\frac{\pi}{3}$ $\varphi_c=\frac{\pi}{2}$ $\varphi_d=\frac{2}{3}\pi$ $\varphi_e=\frac{4}{3}\pi$

(2) 当$t=0$时，$x=\frac{A}{2}$，此时 $\varphi=\arccos\frac{x}{A}=\arccos\frac{1}{2}=\pm\frac{\pi}{3}$，$\varphi=-\frac{\pi}{3}$

半周期 $\frac{T}{2}=1.2s \Rightarrow T=2.4s \Rightarrow w=\frac{2\pi}{T}=\frac{5\pi}{6}$

故振动表达式：$x=A\cos(wt-\varphi)=0.05\cos(\frac{5\pi}{6}t-\frac{\pi}{3})$

(3)



6.6. 已知：$A_1=A_2=A_3$ $v_1=v_2=v$ $(w_1=w_2=w_3)$.

求：振动表达式x_2，相位差$\varphi_2-\varphi_1$，$t=0$时，$x_1=-\frac{A}{2}$，求 x-t 曲线及相量图

解：(1) 当振子一的相为$\frac{\pi}{2}$时，振子二的相为0，

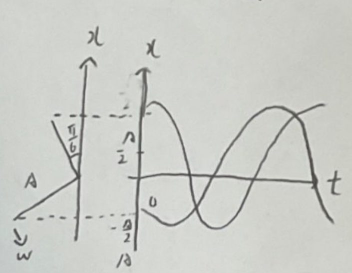
$\varphi_2-\varphi_1=0-\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi}{2}$

因此 $\varphi_2=\varphi-\frac{\pi}{2}$，振动表达式：$x_2=A\cos(wt+\varphi-\frac{\pi}{2})$

(2) 由$t=0$，$x_1=-\frac{A}{2}$，$v<0$ 知$\varphi_1=\frac{2}{3}\pi$

$x_1=A\cos(wt+\frac{2}{3}\pi)$ $x_2=A\cos(wt+\frac{\pi}{6})$

(3) x-t 曲线、相量图：



6.8. 已知：$k=25N/m$. $E_k=0.2J$，$E_p=0.6J$

求：振幅A，位移x'使得$E_k=E_p$，位移$\frac{A}{2}$时势能大小E_p'

解：(1) $A=\sqrt{\frac{2E}{K}}=\sqrt{\frac{2(E_k+E_p)}{k}}=\sqrt{\frac{2(0.2+0.6)}{25}}=0.253m$.

(2) 当 $E_k=E_p$时，$E_p=\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}E=\frac{1}{4}kA^2 \Rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}A=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\times0.253=\pm0.179m$.

(3) $E_p'=\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}k(\frac{A}{2})^2=\frac{1}{4}(\frac{1}{2}kA^2)=\frac{1}{4}(E_p+E_k)=\frac{1}{4}(0.2+0.6)=0.2J$.

6.9. 已知：m, k, b.

求：动力学方程，振幅为 A 时总能量

解：平衡位置时 $mg=kb$.

以平衡位置为原点，向下为正方向，有 $m\frac{d^2x}{dt^2}=mg-k(x+b) \Rightarrow m\frac{d^2x}{dt^2}=-kx$

以同一点为弹性势能原点，则 $E_{p_1}=\frac{1}{2}k(x+b)^2-\frac{1}{2}kb^2=\frac{1}{2}kx^2+kbx$

$E_{p_2}=-mgx$

总能量 $E=E_k+E_p=E_k+E_{p_1}+E_{p_2}=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2+kbx-mgx$

$=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2$

当 $x=A$ 时，$v=0$，故

$E=\frac{1}{2}mA^2$

6.11 已知：k_1, k_2, m

求：周期 T.

解：串联后劲度系数 $k=\frac{1}{\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_1}}=\frac{k_1k_2}{k_1+k_2}$

故 $T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}=2\pi\sqrt{\frac{m(k_1+k_2)}{k_1k_2}}$

6.15. 已知：$\nu=2Hz$，$\mu=0.5$

求：振幅大小 A_{max}，$A=5cm$ 时 ν_{max}.

解：要使物体不动，则 $\mu mg=ma=mA\omega^2=mA(2\pi\nu)^2 \Rightarrow A=\frac{\mu g}{(2\pi\nu)^2}=\frac{0.5\times9.8}{(2\pi\times2)^2}=0.31\times10^{-2}m$.

要使物体保持接触，则 $mg=ma=mA\omega^2=mA(2\pi\nu)^2 \Rightarrow \nu=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{A}}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{9.8}{0.05}}=2.23Hz$

6.24. 已知：$x_1=0.04\cos(2t+\frac{\pi}{6})$，$x_2=0.03\cos(2t-\frac{\pi}{6})$

求：合运动表达式

解：$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}=\sqrt{0.04^2+0.03^2+2\times0.04\times0.03\times\cos(-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{6})}=0.0608m$

$\varphi=\arctan\left(\frac{A_1\sin\varphi_1+A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1+A_2\cos\varphi_2}\right)=\arctan\left(\frac{0.04\sin\frac{\pi}{6}+0.03\sin-\frac{\pi}{6}}{0.04\cos\frac{\pi}{6}+0.03\cos\frac{\pi}{6}}\right)=0.0823\,rad$.

合运动表达式：$x=0.0608\cos(2t+0.0823)$

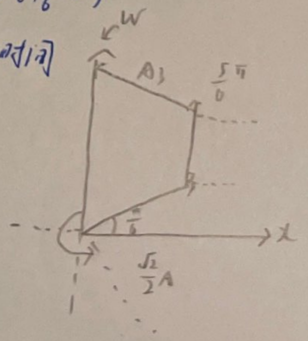
6.25. 已知：$x_1=0.08\cos(314t+\frac{\pi}{6})$，$x_2=0.08\cos(314t+\frac{\pi}{2})$，$x_3=0.08\cos(314t+\frac{5}{6}\pi)$

求：(1) 合振动角频率 w，振幅 A，初相 φ，表达式 (2) 到 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}A$ 的最少时间

解：$w=314s^{-1}$，$A=A_1\sin\frac{\pi}{6}+A_2+A_3\sin\frac{\pi}{6}$

$=0.08\times(\frac{1}{2}+1+\frac{1}{2})=0.16m$.

$\varphi=\frac{\pi}{2}$，$x=0.16(314t+\frac{\pi}{2})$



到达 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}A$，转过了 $\frac{5}{4}\pi$，此时 $t=\frac{\frac{5}{4}\pi}{w}=\frac{\frac{5}{4}\pi}{314}=0.0125s$

6.27. 已知 $\nu_x = 2.7\times10^4 Hz$

求: ν_y

解: $\nu_x:\nu_y=3:2$.

故 $\nu_y = \frac{2}{3}\nu_x = \frac{2}{3}\times 2.7\times10^4 = 1.8\times10^4 Hz$.