第 一 章

随机事件与概率

(Part 2)

第四节：条件概率

一、条件概率

例：考虑有两小孩的家庭$\Omega=\{bb,bg,gb,gg\}$(等可能)

事件$A=$“至少有一女孩”$=\{bg,gb,gg\}, P(A)=3/4$

$B=$“至少有一男孩”$=\{bb,bg,gb\}, P(B)=3/4$

无条件概率

设事先知道“至少有一男孩”（即B发生了），

则在此条件下，“至少有一女孩”发生的概率是多少？

B发生的条件下，样本空间改变为 $\Omega_B=\{bb,bg,gb\}$,

观察到B发生后，A发生的条件概率为：$P(A|B)=2/3.$

注意到：(1) $P(A|B)\neq P(A).$

变化了

$$(2)\ P(A|B)=\frac{2}{3}=\frac{2/4}{3/4}=\frac{P(AB)}{P(B)}.$$

例：同时抛掷两枚骰子，则样本空间为

(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

A ＝“点数之和为8”，则 P(A) ＝ 5/36.　　无条件概率

B ＝“第一枚骰子出现3点”

在“第一枚骰子出现3点”(B发生）的条件下，

A发生(即点数之和为8)的概率 P(A|B)=1/6.　　变化了

注意到：(1) $P(A|B) \neq P(A)$.

$$(2)\ P(A|B) = \frac{1}{6} = \frac{1/36}{6/36} = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

一、条件概率

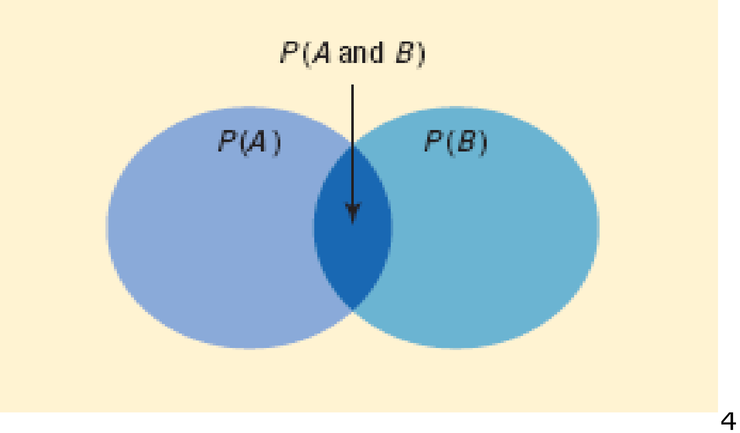
对一般古典概型

设n_A, n_B, n_{AB}分别为A, B, AB中所含样本点数，

n为样本点总数，直观地

$$P(A|B)=\frac{n_{AB}}{n_B}=\frac{n_{AB}/n}{n_B/n}=\frac{P(AB)}{P(B)}.$$

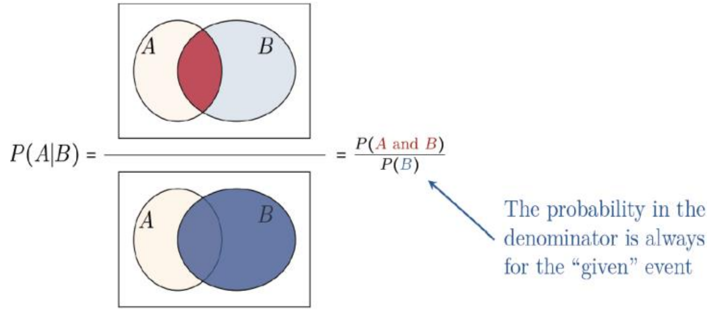
条件概率的频率解释：
P(A|B) is the fraction of times that A occurs, restricting attention to the trials where B occurs.



一、条件概率

定义： 设 A，B是两事件，P(B)> 0, 称

$$P(A|B) := \frac{P(AB)}{P(B)}$$

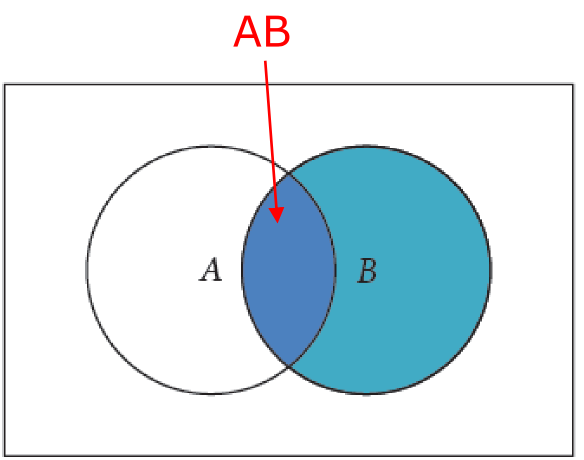


为"**B发生的条件下，A发生的条件概率**"。

事件B已经发生，新样本空间是B.

考虑出现在B中，并导致A发生的样本点组成的事件(即AB).

条件概率就是AB在B中所占比例。



It measures the **relative size of A inside B.**

Remark：Why thinking conditionally?

- Probability is a language for expressing our degrees of belief or uncertainties about events.
- Whenever we observe new evidence, we acquire information that may affect our uncertainties. Conditional probability is the probability of an event when new evidence is observed.
- New observation that is consistent with existing belief could make us more sure of that belief, while a surprising observation could throw that belief into question.
- NEW INFORMATION CHANGES SAMPLE SPACE.

Remark: Why thinking conditionally?

- How should we update our beliefs in light of the evidence we observe?

  CP addresses this fundamental question.
  Conditioning is the soul of statistics.

- CP allows us to demonstrate how to incorporate evidence into our understanding of world in a logical, coherent manner, how information changes our beliefs.

- All probabilities are conditional; whether or not it's written explicitly, there is always background knowledge built into every probability.

定理：条件概率P(·|B)是概率，即若设P(B)>0, 则

(1) 非负性：$P(A|B)\ge 0$;

B固定

(2) 正则性：$P(\Omega|B)=1$;

(3) 可列可加性：若可列个事件$A_1,\cdots,A_k,\cdots$两两互不相容，

则 $$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n \mid B\right)=\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n \mid B);$$

分配律

证： (3) $$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n \mid B\right)=\frac{P((\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)B)}{P(B)}=\frac{P(\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_nB))}{P(B)}=$$

$$=\frac{\sum_{n=1}^{\infty}P(A_nB)}{P(B)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{P(A_nB)}{P(B)}=\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n \mid B).$$

条件概率的性质

类似于概率，条件概率P（·|B）是定义在 σ域F上的集合函数，由以下三条基本性质可推导其它性质：

(1) 非负性； (2) 正则性； (3) 可列可加性；

$\Rightarrow$

$P(\Phi \mid B) =$ 0；

$P(\overline{A} \mid B) = 1 - P(A \mid B);$

$P(A_1 \cup A_2 \mid B) = P(A_1 \mid B) + P(A_2 \mid B) - P(A_1 A_2 \mid B);$

……

特别当$B = \Omega$时，条件概率转化为无条件概率。

CP is probability, all probabilities are CP.

条件概率的计算

方法1：先算 P(B)，P(AB)，再用定义（公式）

P(A|B) = P(AB)/P(B).

方法2：在新的变化后的样本空间 $\Omega_B = B$ 中计算.

例：盒中 5 件产品，3 正品 2 次品，不放回抽样两次。

设B=“第一次取得正品”，设A=“第二次取得正品”，求P(A|B).

解1：**P(B)=3/5，P(AB)=3*2/(5*4) = 3/10,**

P(A|B)=P(AB)/P(B) = 1/2.

解2：在新的变化后的样本空间 $\Omega_B = B$ 中计算。

当 B 发生后，剩 4 件产品，2 正品，

所以 P(A|B) = 2/4 = 1/2.

二、乘法公式（Multiplication Rule)

目标：求若干个事件同时发生的概率，如 P(AB)

定理:(1)若$P(B)>0$,则$P(AB)=P(B)P(A|B)$.

如果P(A) > 0,
则P(AB) = P(A)P(B| A)

(2)若$P(A_1\cdots A_{n-1})>0$,则

$$P(A_1\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1\cdots A_{n-1}).(*)$$

证:(1) 由条件概率定义$P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$，即得 (1).

(2) 首先，由$P(A_1)\geq P(A_1A_2)\geq\cdots\geq P(A_1\cdots A_{n-1})>0$知

所涉及的条件概率均有意义。由条件概率定义,(*)右边等于

$$P(A_1)\frac{P(A_1A_2)}{P(A_1)}\frac{P(A_1A_2A_3)}{P(A_1A_2)}\cdots\frac{P(A_1\cdots A_n)}{P(A_1\cdots A_{n-1})}=P(A_1\cdots A_n).$$

亦可由数学归纳法证明。

Remarks

$$P(A|B) := \frac{P(AB)}{P(B)}$$ 条件概率定义

$$\Rightarrow P(AB) = P(B)P(A|B)$$ 此条件概率在新样本空间中计算

- At first sight this theorem may not seem useful: it is the definition of CP, just written differently. It seems circular to use P(A|B) to help find P(AB) when P(A|B) was defined in terms of P(AB).
- But the theorem is in fact very useful, since it is often possible to find the CP without going back to the definition, and the theorem can help us more easily to find P(AB).

Remarks

Conditioning can help to make computations easier, but it matters how it is applied.

- To compute $P(AB)$, we may condition on B to get

$$P(AB) = P(A|B) \cdot P(B) \;; \quad (P(B)>0)$$

- Or we may condition on A and get

$$P(AB) = P(B|A) \cdot P(A) \;. \quad (P(A)>0)$$

Both ways are valid, but often *one* of $P(A|B)$ and $P(B|A)$ is easy and the other is not.

例：Polya 模型

盒中有 b 个黑球，r 个红球，每次随机取一球，观察其颜色后放回，并加入 c 个同色球和 d 个异色球。

特例：

（1） $c=-1, d=0,$ 对应不放回抽样。

（2） $c=0, d=0,$ 对应放回抽样。

（3） $c>0, d=0,$ 对应传染病模型

（每抽一球后会增加下一次取到同色球的概率）。

（4） $c=0, d>0,$ 对应安全模型

(事故发生了，安全工作抓紧，再发生事故的概率减小)。

冰山现象：发现的病例就像露出的冰山，海面之下还有更大的冰山

例：Polya 模型

盒中有b个黑球, r个红球, 每次随机取一球, 观察其颜色后放回,

并加入 c 个同色球和 d 个异色球。这样进行了 3 次。

求取出的三球中有两个红球、**一个黑球**的概率。

解：设 $B_i=$ "第 i 次取出的为黑球"

$R_i=$ "第 i 次取出的为红球"，$\overline{R_i}=B_i$.

$$P(\text{黑红红})=P(B_1R_2R_3)$$

$$=P(B_1)P(R_2\mid B_1)P(R_3\mid B_1R_2)$$

$$=\frac{b}{b+r}\,\frac{r+d}{b+r+c+d}\,\frac{r+d+c}{b+r+2c+2d}$$

（在新的样本空间中计算）.

b, r	开始
b+**c**, **r +d**	B1后
b+c+**d**, **r+d+c**	B1R2后

同样可求：$P(R_1B_2R_3),P(R_1R_2B_3)$.

一般与红、黑被抽取次序有关。

三、全概率公式 (Law of Total Probability)

直观的例：

$$全校通过率=\sum_{n}(系n的权重)\cdot(系n的通过率)$$

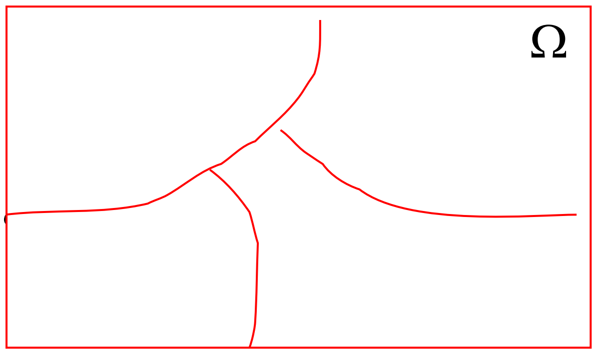
样本空间的划分：

设Ω为样本空间，$B_1,\cdots,B_n$为一事件组，满足：

(1) $B_1\cup B_2\cup\cdots\cup B_n=\Omega$;

(2) $B_i\cap B_j=\Phi\quad(i\neq j)$(两两互不相容)

则称$B_1,\cdots,B_n$为样本空间Ω的一个划分.

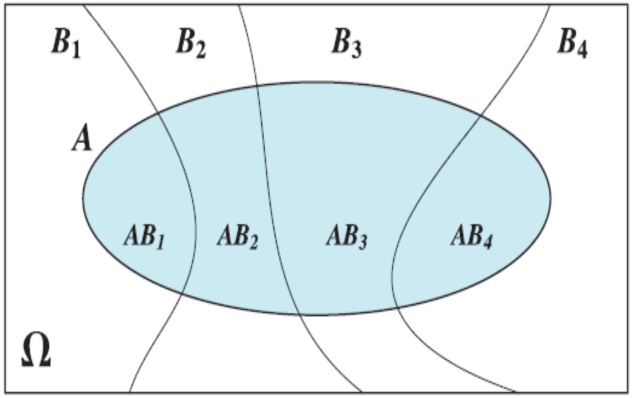


定理（全概率公式）

设$B_1,\cdots,B_n$为样本空间Ω的一个划分，且$P(B_i)>0$,
则对任一事件A,有

A 发生的概率是
条件概率的加权平均

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)\,P(A\,|\,B_i).$$



证：由$\bigcup_{i=1}^{n}B_i=\boldsymbol{\Omega},\ B_i\cap B_j=\boldsymbol{\Phi}$有

$$A=A\boldsymbol{\Omega}=A\left(\bigcup_{i=1}^{n}B_i\right)=\bigcup_{i=1}^{n}(AB_i)\ (\text{互不相容})$$

则由可加性$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(AB_i)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A\,|\,B_i).$

乘法公式

例

- 在 n 张彩票中有一张奖券，
  求第二人摸到奖券的概率？第三人呢？第 m 人呢？

- 在 n 张彩票中有 k 张奖券，
  求第 m 人摸到奖券的概率？

例：在n张彩票中有一张奖券，
求第二人摸到奖券的概率？第三人呢？

解：设A_i ="第i人摸到奖券",$i=1,2,3,\cdots$　显然，$P(A_1)=1/n$.

由全概率公式($A_1,\overline{A_1}$ 构成样本空间的一个划分):

$$P(A_2)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)+P(\overline{A_1})P(A_2\mid \overline{A_1})$$

$$=\frac{1}{n}\cdot 0+\frac{n-1}{n}\frac{1}{n-1}=\frac{1}{n}.$$

下求$P(A_3)$. 因$A_1,A_2,\overline{A_1}\,\overline{A_2}$构成样本空间的一个划分，互不相容

$$P(A_3)=P(A_1)P(A_3\mid A_1)+P(A_2)P(A_3\mid A_2)+P(\overline{A_1}\,\overline{A_2})P(A_3\mid \overline{A_1}\,\overline{A_2})$$

$$=0+0+\frac{(n-1)(n-2)}{n(n-1)}\frac{1}{n-2}=\frac{1}{n}.$$

例：在 n 张彩票中有一张奖券，求第 m 人摸到奖券的概率？

推广：求$P(A_m)$.

设 $B = A_1 \cup \cdots \cup A_{m-1}$,

则 $B, \overline{B}$ 构成样本空间的一个划分，

$$P(A_m) = P(B)P(A_m \mid B) + P(\overline{B})P(A_m \mid \overline{B})$$

$$= 0 + \frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{n(n-1)\cdots(n-m+2)} \frac{1}{n-m+1}$$

$$= \frac{1}{n}.$$

例：在n张彩票中有k张奖券，求第m人摸到奖券的概率？

显然，$P(A_1)=k/n$. 归纳假设$P(A_{m-1})=k/n$(对任意n,k)

注意到，$A_1,\overline{A_1}$构成样本空间的一个划分。　　规律性假设

在A_1 (或$\overline{A_1}$)发生的条件下，可将原来的第m次摸奖看成新条件下的第$m-1$次摸奖，

由归纳假设：$P(A_m \mid A_1)=\dfrac{k-1}{n-1}$，$P(A_m \mid \overline{A_1})=\dfrac{k}{n-1}$。

由全概率公式：

$$P(A_m)=P(A_1)P(A_m \mid A_1)+P(\overline{A_1})P(A_m \mid \overline{A_1})$$

$$=\frac{k}{n}\frac{k-1}{n-1}+\frac{n-k}{n}\frac{k}{n-1}=\frac{k}{n}$$

例：Polya 模型（续）

盒中有b个黑球，r个红球，每次随机取一球，观察其颜色后放回，并加入 c 个同色球. 记 Bn = {第n次抽取得黑球}，n = 1, 2, … 证明：P(Bn) = b/(b + r).

设B_n表示在第n次摸球时摸出黑球。显然，$P(B_1)=b/(b+r)$.

归纳假设$P(B_{n-1})=b/(b+r)$(对任意b,r).

注意到，$B_1,\overline{B_1}$构成样本空间的一个划分。在B_1 (或$\overline{B_1}$)发生的条件下，可将原来的第n次摸球看成新条件下的第$n-1$次摸球，

由归纳假设：$P(B_n\mid B_1)=\dfrac{b+c}{b+r+c}$，$P(B_n\mid \overline{B_1})=\dfrac{b}{b+r+c}$。

由全概率公式：$P(B_n)=P(B_1)P(B_n\mid B_1)+P(\overline{B_1})P(B_n\mid \overline{B_1})$

$$=\frac{b}{b+r}\,\frac{b+c}{b+r+c}+\frac{r}{b+r}\,\frac{b}{b+r+c}=\frac{b}{b+r}.$$

例：敏感性问题调查

如何设计对敏感问题的社会调查？

比如：

如何调查“看过黄色录像”
（吸毒、偷税漏税、赌博、考试作弊、…）
的人的比率？

例：敏感性问题调查

如何估计“敏感性问题”的人的比率？

随机化应答方案

问题A：生日是否在7月1日之前？

问题B：是否看过黄色录像？

答卷

YES ☐　　NO ☐

袋中有红、白球，红球比率为 r(如r=0.5)

摸到白球，回答问题 A;

摸到红球，回答问题 B。

共有答卷 n 张，其中 k 张回答“YES”。

如何估计“敏感性问题”的人的比率 p ？

回答No 总是安全的?

例：敏感性问题调查

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A \mid B_i)$$

设所求概率为 p，由全概率公式：

P(YES) = P(白球) P(YES|白球) + P(红球) P(YES|红球)

= (1-r)*0.5 + r*p

摸到白球，
回答生日问题

用频率 k/n 代替 概率 P(YES)：

$$k/n = (1-r) * 0.5 + r*p$$

得 $p = [\, k/n - (1-r) * 0.5] / r$.

把数据 k，n，r 代入即可。

如：n=150，k=60，r=0.5，则所求概率为 0.3.

四、Bayes（贝叶斯）公式

- We know CP in one direction but want to find it in the other direction.
- For example, you may know the probability that a medical test gives a positive result, conditional on having the disease:

$$P(\text{Positive}|\text{Disease}).$$

- What is of most interest is the CP that you have the disease, given that the test result is positive:

$$P(\text{Disease}|\text{Positive}).$$

- **Reversing the order of conditioning …**

四、Bayes(贝叶斯)公式

- You know:　　　　　　P(positive|disease)

  You want to know:　P(disease|positive)

- One of the most amazing things we can do with CP is reversing the condition to calculate the probability.

- We can use $P(A \mid B)$ to arrive at $P(B \mid A)$.

Thomas Bayes
(1702~1761)

英国数学家，做过神父。研究数学的目的是证明上帝的存在。1742年成为英国皇家学会会员（当时没有记录表明他发表过任何学术论文）。贝叶斯在数学方面主要研究概率论，创立了贝叶斯统计理论，对现代概率论和数理统计有重要作用。贝叶斯的成果《An Essay towards solving a Problem ...》在1763年由Price整理发表。

一、几个例子
例1：“正向概率”与“逆概问题”

- **正向概率：** 假设袋子里面有N个白球，M个黑球，随机摸出一球，摸出黑球的概率是多大？--- M/(N+M)
- **逆概问题(反问题)：** 事先并不知道袋子里面黑、白球的比例，随机摸出一些球，观察它们的颜色。我们可以对袋子里面的黑球、白球的比例作出什么样的推测？
- **现实世界：** 我们的观察能力是有局限的，所观察到的只是事物的表面(从袋子里取出的球的颜色)，而并不能直接看到袋子里面实际的情况。我们需要提供一个“猜测”。
- **方法：** 算出并比较各种猜测的可能性的大小，
  再推测最靠谱（可能性最大）的猜测是什么。

例2：“正向概率”与“逆概问题”

- **正向概率:**

学校里有 60% 的男生，40% 的女生。男生总穿长裤Pants，女生则一半穿长裤，一半穿裙子。随机选取一个学生，则 Ta 穿长裤的概率有多大?

$$P(Pants) = P(Boy)\,P(Pants|Boy) + P(Girl)\,P(Pants|Girl)$$
$$= 0.6*1 + 0.4*0.5 = 0.8.$$

- **逆概问题(反问题):**

假设你夜间走在校园中，迎面走来一个穿长裤的学生（你高度近视，只看得见Ta穿的是长裤，而无法确定其性别）。
你能够推断出Ta是男生的概率是多大吗？

逆概问题（续）：

思想：所有穿长裤的学生中，男生所占比例

假设学校学生总数 N.

穿长裤的男生数：N * P(B) * P(Pants|B) =：N1

穿长裤的女生数：N * P(G) * P(Pants|G) =：N2

穿长裤的学生总数：上述两者之和 N1 + N2

穿长裤的学生中，男生所占比例：N1/(N1 + N2).

所求概率：

$$P(B|Pants) = \frac{P(B) * P(Pants|B)}{[P(B) * P(Pants|B) + P(G) * P(Pants|G)]}$$

本质上就是贝叶斯公式，看似平凡，背后却隐含着深刻的原理

难怪Laplace说：**概率论只是把常识用数学公式表达了出来.**

二、Bayes公式

设B1,…,Bn代表各种疾病（原因,先验概率P(B1),…,P(Bn)）

A 代表“症状”；　　　　（结果）

医学教科书告知：P(A|B1)，…，P(A|Bn).

问题:

给定“症状”A，如何通过这一信息，诊断出是何种疾病？

即求 P(Bi|A)？

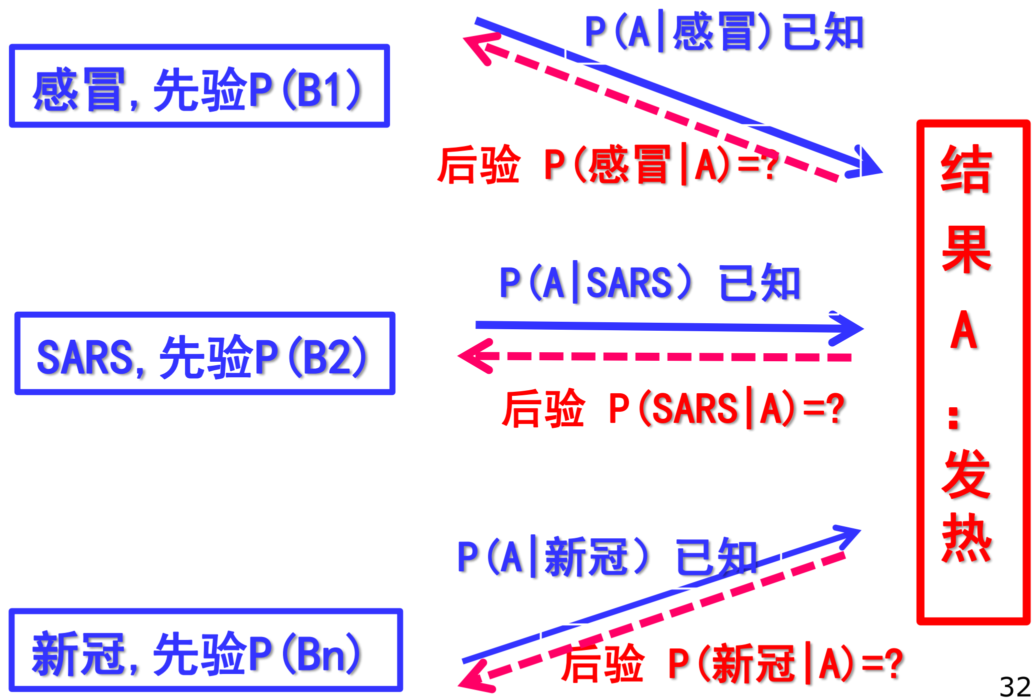
二、Bayes公式

- 先验概率：P(B1)，P(B2)，…　　　（初始认知）
- 新 信 息：事件 A 发生了　　　　（数据）
- 已知条件概率：P(A|B1),…,P(A|Bn)（似然 有初始认识的条件下，数据的规律 ）

问题：

如何通过“A发生”这一信息，对先验概率（初始认知）进行修正，得到新的认识 ---“后验概率”

P(B1|A)，P(B2|A),…



定理：设$B_1,\cdots,B_n$为样本空间Ω的一个划分，

即$\bigcup_{i=1}^{n} B_i = \Omega, B_i \cap B_j = \Phi\ (i \neq j)$

设$P(B_i) > 0$，且有一事件A，$P(A) > 0$，则

$$\underline{P(B_i \mid A)} = \frac{P(B_i)P(A \mid B_i)}{\sum_{j=1}^{n} \underline{P(B_j)}\, P(A \mid B_j)}. \qquad = \frac{P(A|B_i)\,P(B_i)}{P(A)}$$

后验概率

先验概率

证：$P(B_i \mid A) = \dfrac{P(AB_i)}{P(A)}$ （条件概率）

$$= \frac{P(B_i)P(A \mid B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(B_j)\, P(A \mid B_j)} \qquad \frac{\leftarrow \text{乘法公式}}{\leftarrow \text{全概率公式}}$$

注：分子是分母中的一项，分母是所有分子类型项的和。

“简单”隐含“深刻”

- 表面上，

$$\mathrm{P}(A\mathrm{B_i}) = P(\mathrm{B_i}|A)P(A) = P(A|\mathrm{B_i})P(\mathrm{B_i})$$

$$\Downarrow$$

$$P(\mathrm{B_i}|A) = \frac{P(A|\mathrm{B_i})P(\mathrm{B_i})}{P(A)}$$

但实际上隐含着深刻的道理：学习的过程。

如何学习？

$$\underbrace{P(\text{belief} \mid \text{data})}_{\text{The posterior probability}} = \frac{\overbrace{P(\text{data} \mid \text{belief})}^{\text{Likelihood}}\,\overbrace{P(\text{belief})}^{\text{Prior probabillity}}}{\underbrace{P(\text{data})}_{\text{Normalizes our probabilities}}}$$

Remark: Three Parts

- *Prior prob*： strength of our initial belief before we see the data.

  初始认知

- *Likelihood*: prob of data given our beliefs about data, *P*(data | belief) --- how likely the data is given our belief.

  在初始认知的条件下数据的规律

- *Posterior prob*： how much observed data changes our beliefs. We improve prob as more information becomes available.

  基于数据达到的新的认知

--- This is the learning process.

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)\,P(B_i)}{P(A)}$$

Remarks

① $B_1, \ldots, B_n$ 可以看作是导致结果 A 发生的原因。

② 称$P(B_j)$为先验概率（初始认知）--- 各种原因发生的可能性，一般是以往经验的总结。

③ 现在产生了事件A（数据），该信息将有助于探讨事件发生的原因。

④ 后验概率$P(B_j|A)$是在事件A发生的条件下，某个原因B_j发生的概率 – 试验之后对各种原因发生的可能性的新认识。

⑤ 形成Bayes学派。Bayes统计学被广泛用于机器学习(Machine Learning).

三、Bayes 公式应用

例1：假阳性之谜

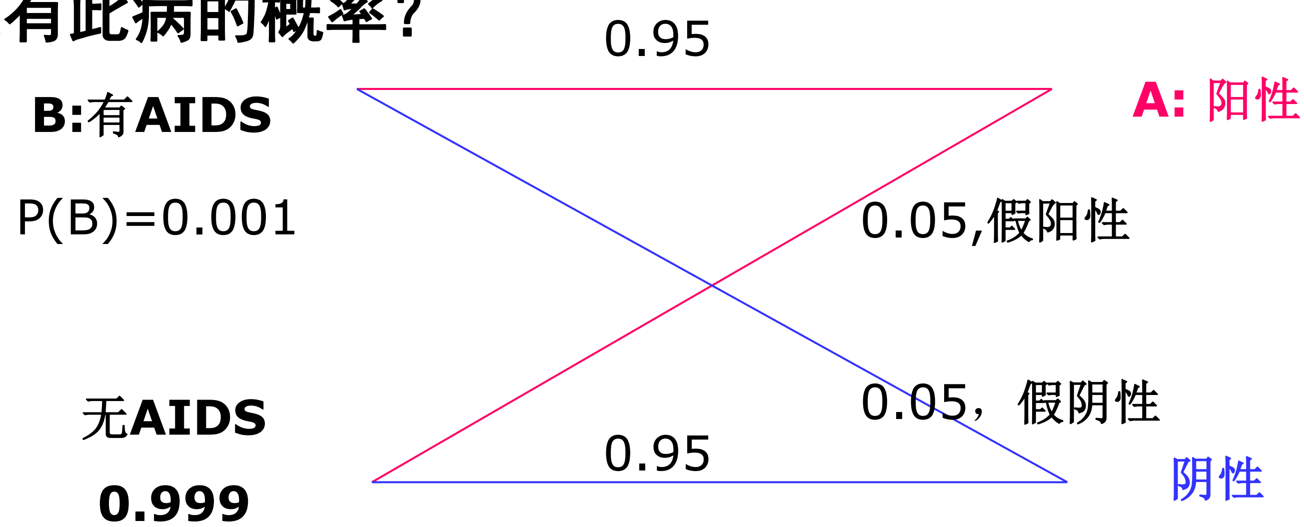
某国人有 AIDS 的概率为 0.001（先验概率），

该病的检出率为 95%（有该病，检查结果为阳性的概率）

没有该病，检查结果为阴性的概率为 95%，

设某人做了血液检测，结果为阳性。

问他确实患有此病的概率？



例1：假阳性之谜

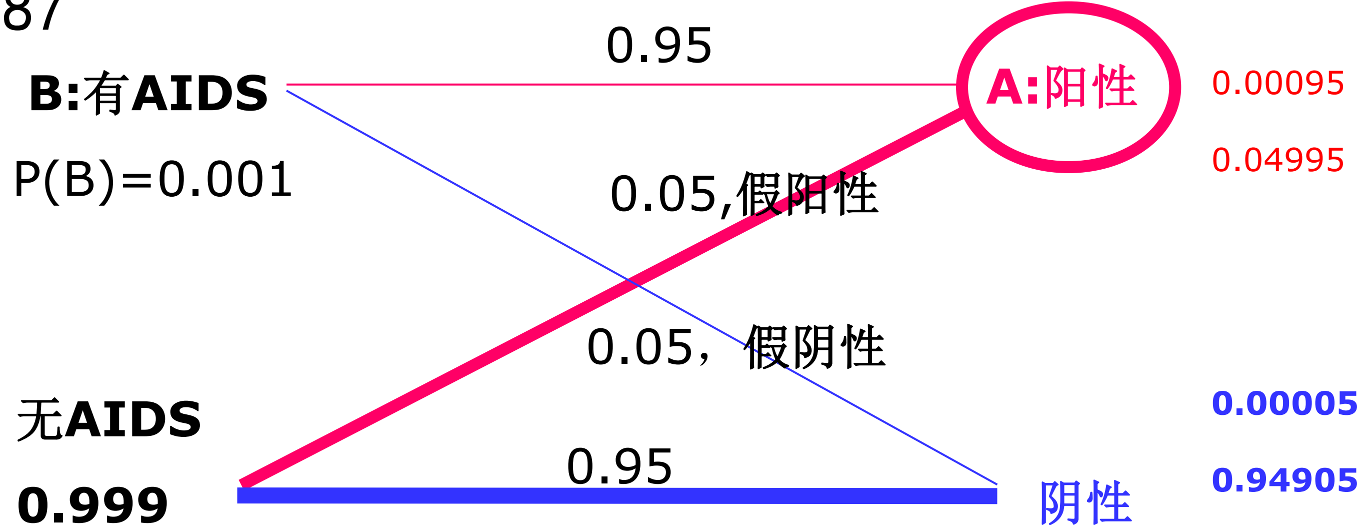
- **直观1：**他确实患有此病的概率为 0.95　（**80%的人持此观点**）
- **直观2：**“结果为阳性”来自两部分人：“确有病”B和“非B”

所求概率应该是检查结果为阳性的人中，来自B的比例，即

“真阳性”/“总阳性” = “真阳性”/(“真阳性+假阳性”)

= N*0.001*0.95/(N*0.001*0.95+ N*0.999*0.05)

= 0.0187



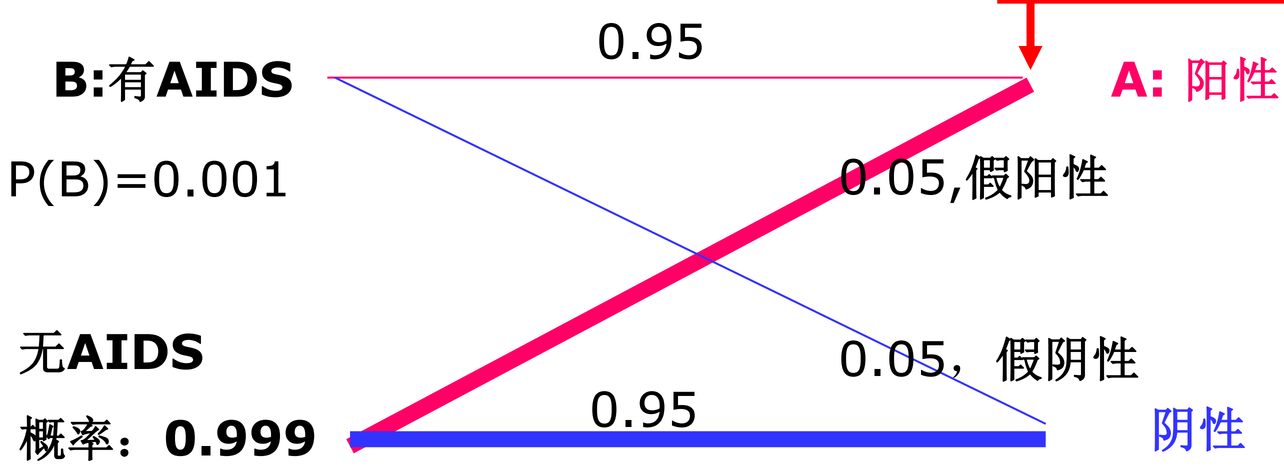
例1：假阳性之谜

解：设A=“检验结果为阳性”，B=“有AIDS”，要求P(B|A)

$$\overset{\text{后验}}{P(B|A)}=\frac{\overset{\text{先验}}{P(B)}\overset{\text{似然}}{P(A|B)}}{P(B)P(A|B)+P(\overline{B})P(A|\overline{B})}$$

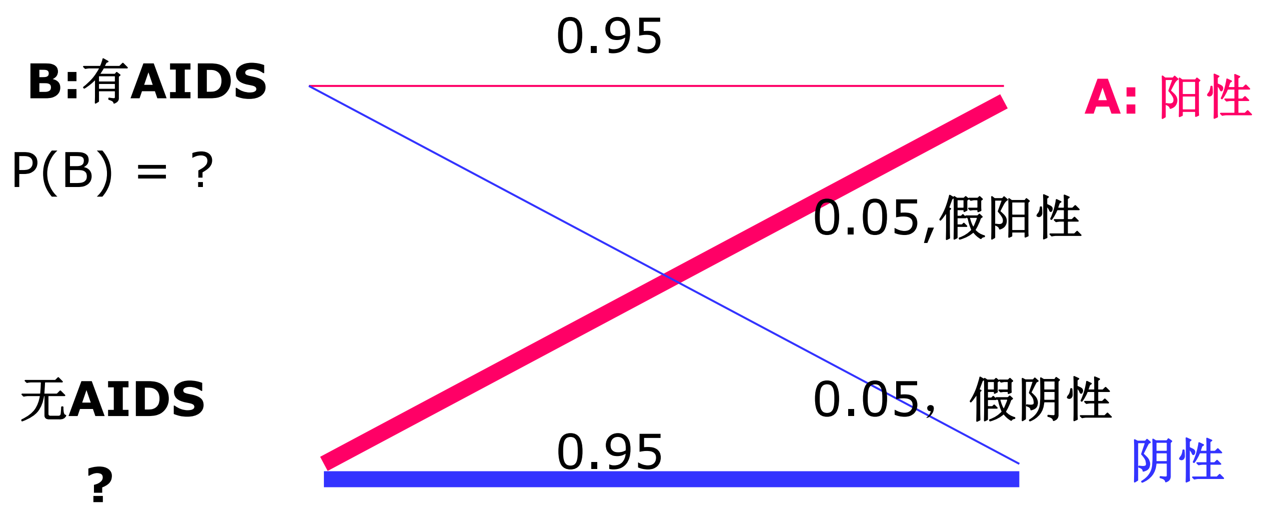
$$=\frac{0.001\times0.95}{0.001\times0.95+0.999\times0.05}=0.0187$$

这个概率较小，因大量结果为阳性的人来自“无AIDS”（基数很大）



例1：假阳性之谜

问题：如果第二次检测结果仍为“阳性”，
则他确实患有此病的概率是多少？

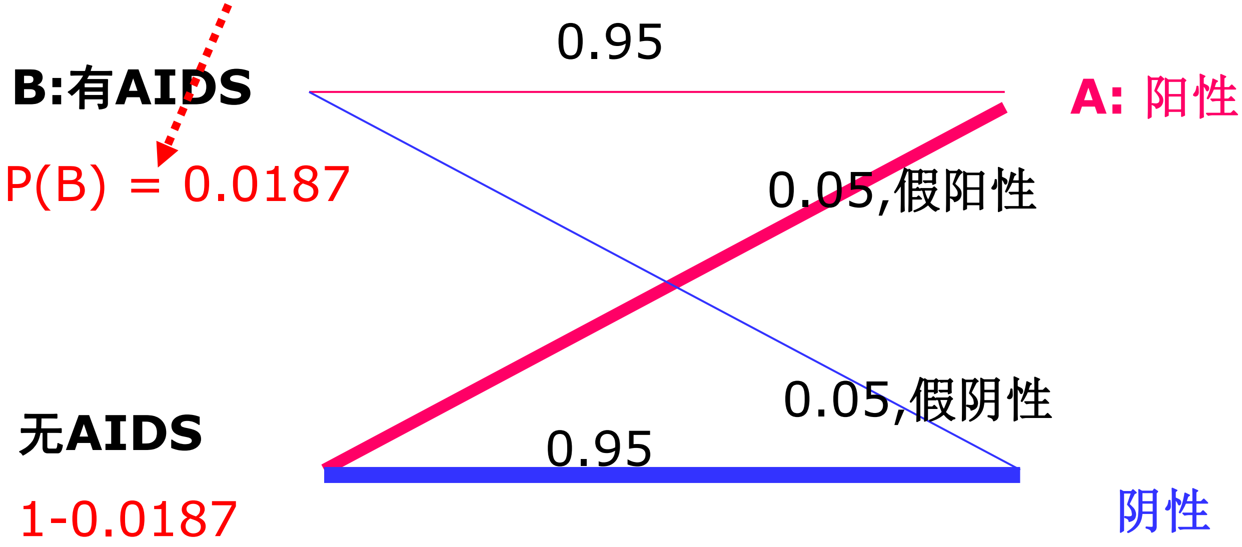


问题：如果第二次检测结果仍为“阳性”，则他确实患有此病的概率是多少？

答：相当于先验概率为 0. 0187， 代入计算得：0. 265.

同理，如果第三次检测结果仍为“阳性”，

则相当于先验 概率为0. 265，代人计算得：0. 873.



Question: 假阴性！

钻石公主号 – 全球最豪华邮轮之一。2020.1.20 邮轮从日本横滨出发,搭载2666名乘客及1045名船员，总人数3700余人，涉及50多个国家和地区。

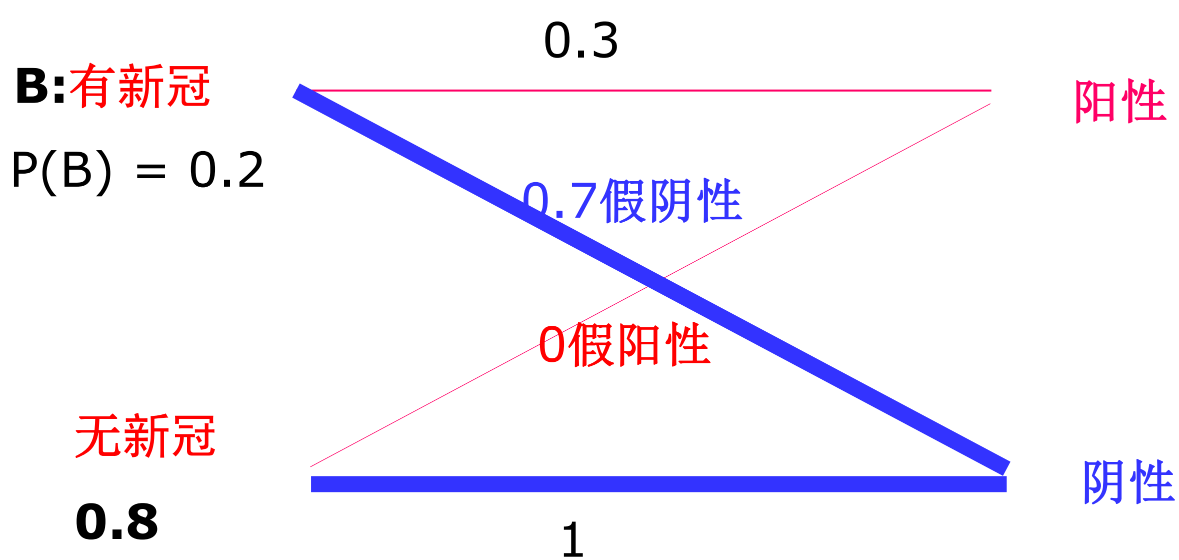
悲剧：
截至2020年2月19日,钻石公主号上游客新冠确诊超700人，感染率超过20%.

Question: 假阴性！

假设钻石公主号上乘客“新冠肺炎”感染率为20%. 问：

1. 一个核酸检测为阴性的乘客，感染新冠肺炎的概率有多大？
2. 一个连续2次、3次 … 核酸检测为阴性的乘客，感染新冠肺炎的概率有多大？

Please try!



例2：狼来了的故事

小孩每天到山上放羊，山里有狼出没。

第一天，他在山上喊："狼来了"。村民闻声而去，发现没狼。

第二天，仍是如此。

第三天，狼真来了，可无论小孩怎么叫喊，没人前来救他。

问题：小孩的可信度是如何下降的？

例2：狼来了的故事

设 B = “小孩可信”， 设先验概率 P(B) = 0.8,

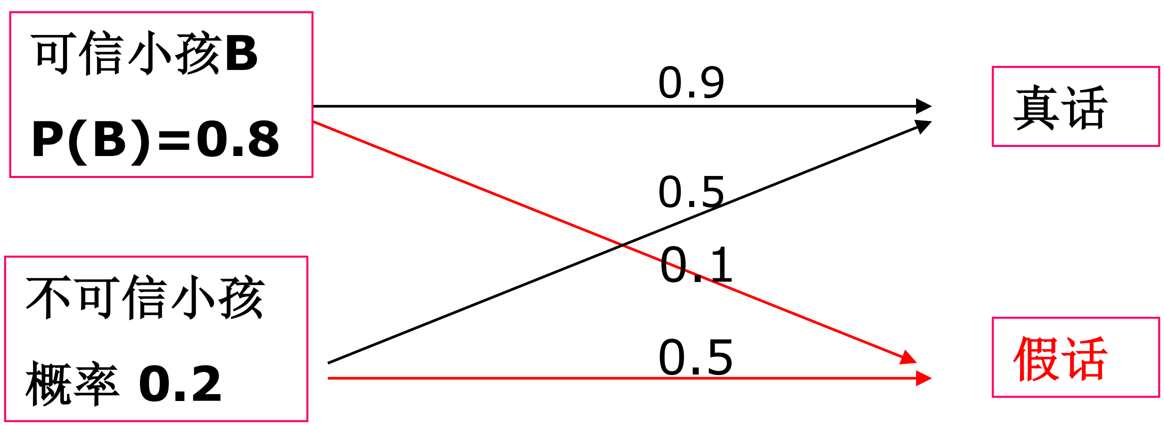
A = “小孩说谎”（信息），

求：后验概率 $P(B|A) = ?$

设 $P(A|B)=0.1$（可信（B）的小孩说谎的可能性）

$P(A|\overline{B})=0.5$（不可信的小孩说谎的可能性）

似然



设 B = “小孩可信”， 先验 P(B) = 0.8,

A = “小孩说谎” ， 求：后验概率 P(B|A) = ?

设 P(A|B) =0.1 （可信（B）的小孩说谎的可能性）

$P(A|\overline{B})=0.5$ （不可信的小孩说谎的可能性）

$$P(B|A)=\frac{P(B)P(A|B)}{P(B)P(A|B)+P(\overline{B})P(A|\overline{B})}$$

$$=\frac{0.8\times 0.1}{0.8\times 0.1+0.2\times 0.5}=0.444$$

即说谎一次后，小孩的可信度由0.8下降为0.444. 变坏很容易！

一般，在上述假设下，连续说谎时可信度的变化为：

0.8 → 0.444 → 0.138 → 0.031 → 0.00636

（过程可逆吗？）

重建信任有多难？

设 B =“小孩可信”，设先验概率 P(B)=0.00636,

A =“小孩讲真话”（信息），则后验概率：P(B|A) = ？

设 P(A|B) = 0.9（可信（B）的小孩讲真话的可能性）

$P(A|\overline{B})=0.5$ （不可信的小孩讲真话的可能性）

$$P(B|A)=\frac{P(B)P(A|B)}{P(B)P(A|B)+P(\overline{B})P(A|\overline{B})}$$

$$=\frac{0.00636\times 0.9}{0.00636\times 0.9+(1-0.00636)\times 0.5}=0.0114$$

即讲真话一次后，小孩的可信度由0.00636上升为0.0114.

继续下去，连续讲真话时可信度变化为：

0.00636 → 0.0114 → 0.0203 → 0.0360 → 0.0630 → 0.108 → 0.179 → 0.282 → 0.414 → 0.559 → 0.696 → 0.804.

重建信任有多难？

- 人而无信，不知其可也。 --- 孔子
- 失足，你可以马上恢复站立；
  失信，你也许永难挽回。 --- 富兰克林

例4：电视游戏 --- 三门问题

A,B,C 三扇门，其中只有一扇门后有奖品（汽车）。你选择某门。主持人打开另两扇门中无奖品的一扇空门，展示门后没有奖品。此时，主持人给你改变决定的机会。

问：你是坚持原来的选择，还是改选另一扇门?

例4：电视游戏 --- 三门问题

直观1： 无所谓。

在剩下未开启的两扇门后有汽车的概率都是1/2，

因此，不需要改变。

直观2：

（1）若坚持，得奖概率为 1/3.

（2）若改选，

- 如果奖品在原选定的门（概率为1/3），你失去获奖机会；
- 如果奖品不在原选定的门（概率为2/3），因主持人已打开另两扇门中无奖品的门，你改选后，必定获奖，所以获奖 概率为2/3.

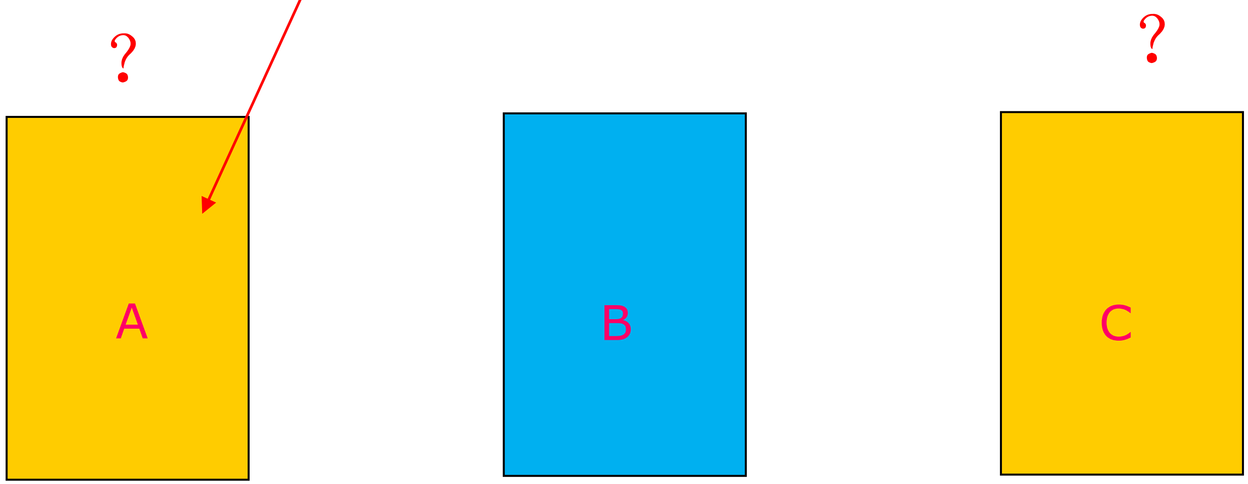
例4：电视游戏 --- 三门问题

设A ＝“汽车在A门后”， B ＝“汽车在B门后”，…

假设原来的选择为A门。

设 B* ＝“主持人打开B门，没有汽车”。

比较 $P(A|B^*)$ 和 $P(C|B^*)$.



例4：电视游戏 --- 三门问题

初始认知

注意到： P(A)=P(B) =P(C)=1/3,

P(B∗|A)=1/2, P(B∗|B)=0, P(B∗|C)=1

在初始认知的条件下数据的规律

汽车在A后面，随意打开B，C中一个；

汽车在B后面，主持人不会打开B；

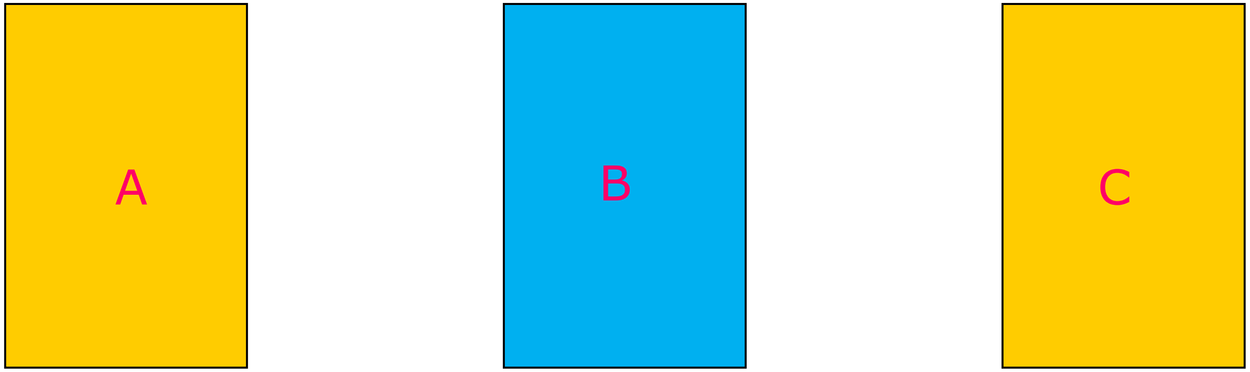
汽车在C后面，主持人必打开B；

$$P(C\mid B^*)=\frac{P(B^*\mid C)P(C)}{P(B^*\mid A)P(A)+P(B^*\mid B)P(B)+P(B^*\mid C)P(C)}$$

后验概率

$$=\frac{1\times 1/3}{1/2\times 1/3+0\times 1/3+1\times 1/3}=2/3.$$

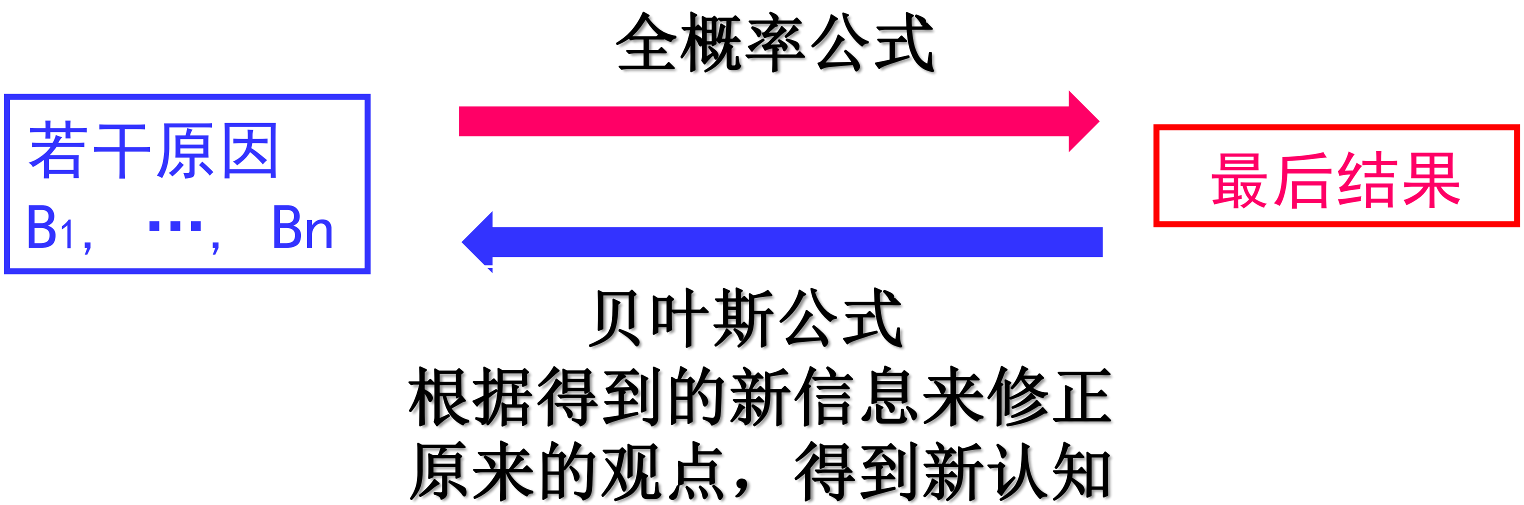
通过有效信息改进预测结果



Remarks

几个公式的比较：

- 乘法公式是求“几个事件同时发生”的概率；
- 全概率公式是求“最后结果”（复杂事件）的概率；
- 贝叶斯公式是已知“最后结果”，求“原因”的概率。



第五节：独立性

例：口袋中有 a 个黑球，b 个白球，随机**放回**摸球。

求：(1) 在已知第1次摸得黑球的条件下，第2次摸出黑球的概率；

(2) 第2次摸出黑球的概率。

两概率一样吗？

解：记$A=$"第1次摸得黑球"，$B=$"第2次摸得黑球".

$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{a^2/(a+b)^2}{a/(a+b)}=\frac{a}{a+b}.$$

$$P(B\mid \overline{A})=\frac{P(\overline{A}B)}{P(\overline{A})}=\frac{ba/(a+b)^2}{b/(a+b)}=\frac{a}{a+b}.$$

$$P(B)=P(AB)+P(\overline{A}B)=\frac{a^2}{(a+b)^2}+\frac{ab}{(a+b)^2}=\frac{a}{a+b}.$$

也可直接得

$$\Rightarrow P(B\mid A)=P(B\mid \overline{A})=P(B).$$

与直观相符

事件A发生与否，对事件B发生的概率没有影响。

一、两个事件的独立性

直观：

一个事件B的发生**不影响**另外一事件A的发生的**可能性**，即：

(*) $$P(A|B) = P(A). \qquad (P(B)>0)$$

因为

$$P(A|B) = P(AB)/P(B),$$

从而有

(**) $$P(AB) = P(A|B)P(B) = P(A)P(B).$$

注意到，(**)对 $P(B)=0$ 时仍然成立，且关于A，B对称。

定义

对任意两个事件A, B, 如果

(**) $P(AB) = P(A)P(B)$.

则称事件 A, B **相互独立 (independent)**,
否则称为**不独立(dependent)**.

例：抛甲、乙两硬币。样本空间={HH, HT, TH, TT}.

A = "甲正" ={HH, HT}， B = "乙正" ={HH, TH}, AB={HH}

$P(AB)=1/4$, $P(A)P(B)=1/2*1/2 = 1/4$.

所以 $P(AB)= P(A)P(B)$.

或者：$P(B|A) = P(AB)/P(B) = 1/2 = P(B)$,

所以，A, B独立

与直观相符：A的结果对B发生的概率没有影响。

Remarks

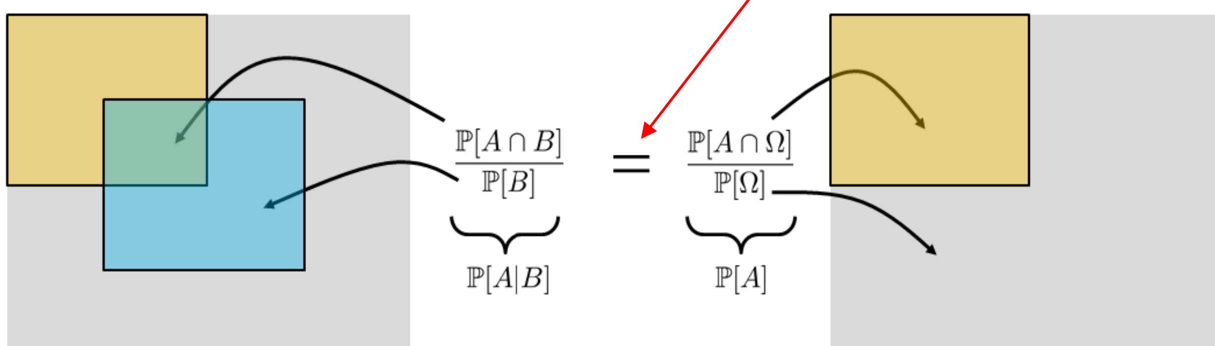
$P(AB) = P(A)P(B)$

1. 必然事件及不可能事件与任何事件相互独立。

2. 当P(B)>0时， “A, B独立”等价于 $P(A|B) = P(A)$.

$$A, B\text{独立} \Leftrightarrow P(AB) = P(A)P(B)$$

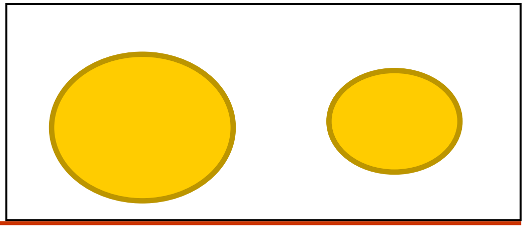
$$\Leftrightarrow P(AB)/P(B) = P(A) \Leftrightarrow P(A|B) = P(A).$$



同理，当P(A)>0时， “A, B独立”等价于 $P(B|A) = P(B)$.

3. 当P(B)=0时，条件概率 $P(A|B)$ 无意义，但独立性有定义.

Remarks



4. 若P(A)>0, P(B)>0, 则“A, B相互独立”与“A, B互不相容”不能同时成立。

证：若A, B独立，即$P(AB)=P(A)P(B)>0$

从而$AB \neq \Phi$, 即A, B相容(即：“相互独立”必“相容”)。

反之，若A, B互不相容，则$AB=\Phi \Rightarrow P(AB)=0$,

而 $P(A)P(B)>0$,

从而 $P(AB) \neq P(A)P(B)$, 即 A, B 不相互独立。

Independence is completely different from disjointness.

A, B互不相容时，它们不能同时发生。若B发生，则A必定不会发生，从而P(A|B)=0；反之亦然。从而，“互不相容”必导致 dependent.

Remark：Independent vs Disjoint

- Can A and B be both independent and disjoint?
  - Only in a very special case:
    if $P(A) = 0$ or $P(B) = 0$.

- If A and B both have positive probabilities, they cannot be both independent and disjoint.

例：

- 抛两骰子，令 A = “第一个点数为4”，
  E = “点数之和为6”；

问1：A 与 E 是否相互独立？

- 抛两骰子，令 A = “第一个点数为4”，
  F = “点数之和为7”；

问2：A 与 F 是否相互独立？

例：抛两骰子，令A=“第一个点数为4”，E=“点数之和为6”；
问1：A 与 E 是否相互独立？

解：$P(A) = 1/6$;

$E = \{(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)\}$

$P(E) = 5/36$, $P(AE) = 1/36$,

$P(AE) \neq P(A)P(E)$，从而 A 与 E 不独立。

直观：“点数之和为6”依赖于“第一个骰子的点数”；

- 若“第一个骰子的点数为4”（或1, 2, 3, 5），则有机会得到“点数之和为6”（E）；
- 若“第一个骰子的点数为6”，则没有任何机会得到“点数之和为6”（E）；

即：A 事件的发生与否，会影响到 E 事件的发生。

例： 抛两骰子，令A=“第一个点数为4”，F=“点数之和为7”；

问2： A 与 F 是否相互独立？

解： $P(A) = 1/6$;

$F = \{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2),(6,1)\}$

$P(F) = 6/36 = 1/6,$

$P(A F) = 1/36,$

$P(A F) = P(A) P(F)$，从而 A 与 F 独立。

直观：

不论“第一个骰子的点数为几”（1, 2, 3, 4, 5, 6，设为X），均有同等机会得到“点数之和为7”

（因第二次有同等机会得到 7-X 点，即 6, 5, 4, 3, 2, 1点，使得点数之和为7）.

问题： G =“点数之和为8”，A 与 G 是否相互独立？

例：不放回摸球

口袋中有 a 个黑球，b 个白球，随机不放回摸球。

求：1) 在已知第1次摸得黑球的条件下，第2次摸出黑球的概率；

2) 第2次摸出黑球的概率。

解：记$A=$"第1次摸得黑球"，$B=$"第2次摸得黑球".

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{a(a-1)/[(a+b)(a+b-1)]}{a/(a+b)}=\frac{a-1}{a+b-1}.$$

也可从新样本空间直接得到

$$P(B)=P(AB)+P(\bar{A}B)=\frac{a(a-1)}{(a+b)(a+b-1)}+\frac{ba}{(a+b)(a+b-1)}=\frac{a}{a+b}.$$

也可直接得到

$\Rightarrow P(B|A)\neq P(B)$.（<）即事件$B$与事件$A$不相互独立。

但$P(A)=P(B)=\dfrac{a}{a+b}$，抽签与次序无关。

定理：

若A与B相互独立，则A与$\overline{B}$, $\overline{A}$与B, $\overline{A}$与$\overline{B}$相互独立。

证：只证A与$\overline{B}$相互独立，即$P(A\overline{B}) = P(A)P(\overline{B})$.

由于$A = A\Omega = A(B \cup \overline{B}) = AB \cup A\overline{B}$, 互不相容

$$\Rightarrow P(A) = P(AB) + P(A\overline{B})$$

$$\Rightarrow P(A\overline{B}) = P(A) - P(AB)$$

$$= P(A) - P(A)P(B)$$

$$= P(A)[1 - P(B)]$$

$$= P(A)P(\overline{B}),$$

If A provides no information about whether B occurred, then it also provides no information about whether $\overline{B}$ occurred.

所以A与$\overline{B}$相互独立。

二、多个事件的独立性

定义：

设A，B，C为三个事件， 如果

$$\left.\begin{aligned} P(AB) &= P(A)\,P(B), \\ P(BC) &= P(B)\,P(C), \\ P(AC) &= P(A)\,P(C), \end{aligned}\right| \rightarrow \text{两两独立}$$

$$P(ABC) = P(A)\,P(B)\,P(C), \qquad (*)$$

则称 A，B，C 三个事件相互独立。

推广：

设$A_1,\cdots,A_n$是n个事件$(n\geq 2)$. 如果对

任意$1\leq i_1<i_2<\cdots<i_k, k=2,3,\ldots,n,$ 都有

$$P(A_{i_1}\cdots A_{i_k})=P(A_{i_1})\cdots P(A_{i_k}),\text{（*）}$$

则称$A_1,A_2,\cdots,A_n$相互独立。

注：

1.（*）中的等式数:

$$C_n^2+C_n^3+\cdots+C_n^n=2^n-C_n^1-C_n^0=2^n-n-1.$$

2. $A_1,\cdots,A_n$相互独立$\Leftrightarrow$其中任意$(n-1)$个事件独立，

且$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n)$.

3. 无穷多个事件相互独立：其中任意有限个事件相互独立。

注记:

一组事件相互独立，则必两两独立。但，反之不一定。

例:设有4张卡片,红、白、黑各一张,最后一张为红白黑三色。从中任取一张,令A = “卡片带红色”,B = “卡片带白色”,C = “卡片带黑色”。

则 $P(A) = P(B) = P(C) = 2/4 = 1/2$,

$P(AB) = P(BC) = P(AC) = 1/4$,

从而，A, B, C 两两独立。

但是，$1/4 = P(ABC) \neq P(A)P(B)P(C) = 1/8$,

从而，A,B,C 不相互独立。

Pairwise Independence Does Not Imply Independence.

注记：

等式 P(ABC)=P(A)P(B)P(C) 成立时，不能推得"两两独立"。

例：设有8张卡片，第1,2,3,4 张带红色，第1,2,3,5 张带白色。第1,6,7,8带黑色。从中任取一张，令A = "卡片带红色"，B = "卡片带白色"，C = "卡片带黑色".

则 $P(A) = P(B) = P(C) = 4/8 = 1/2$,

$P(ABC) = 1/8 = P(A)P(B)P(C)$ （第1卡片）

但 $P(AB)=3/8 \neq P(A)P(B)=1/4$ （第1,2,3卡片）

A, B, C 三个事件相互独立要求四个等式同时成立。

Equality P(ABC)=P(A)P(B)P(C) is not enough for independence

注记：

1. 若A_1，A_2，…，A_n 相互独立，则将其中任意k个事件（$k \le n$）换成其对立事件，所得n个事件相互独立。

   特别地，n个事件 $\overline{A_1}, \overline{A_2}, \cdots, \overline{A_n}$ 相互独立。

2. 设$A_1, \cdots, A_n$相互独立。

   则对任意$1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k, k = 2, 3, \ldots, n$,都有

   $$P(A_{i_1}^* \cdots A_{i_k}^*) = P(A_{i_1}^*) \cdots P(A_{i_k}^*), \quad (*)$$

   其中，A_i^*表示 A_i或其对立事件。

3. 实际应用中，往往根据经验来判断两个事件的独立性。

   例如：返回抽样、甲乙两人分别工作、重复试验等。

例： 甲、乙、丙三人独立射击同一目标，命中率分别为 1/2，1/3，1/4. 问目标被击中的概率？

解1：记A ＝“甲命中”，B ＝“乙命中”，C ＝“丙命中”

则“目标被击中”＝ $A\cup B\cup C$ ， 有

$$P(A\cup B\cup C)=$$

$$=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC)$$ (加法公式)

$$=P(A)+P(B)+P(C)-P(A)P(B)-P(B)P(C)-P(A)P(C)$$

$$+P(A)P(B)P(C)$$

独立

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{4}.$$

解2: $P(A\cup B\cup C)=1-P(\overline{A\cup B\cup C})=1-P(\overline{A}\ \overline{B}\,\overline{C})$

$$=1-P(\overline{A})P(\overline{B})P(\overline{C})=1-(1-1/2)\times(1-1/3)\times(1-1/4)=\frac{3}{4}.$$

例： 甲、乙两射手轮流对同一目标进行射击，命中目标的概率分别为 α 和 β. 甲先射，先击中者得胜. 求甲得胜的概率。

解1: 记A_i ="第i次射击命中目标'，$i=1,2,\ldots$

因甲先射击，所以

$$\text{“甲获胜”} = A_1 \cup \overline{A}_1\overline{A}_2 A_3 \cup \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4 A_5 \cup \cdots$$

$$\Rightarrow P(\text{“甲获胜”}) =$$

加法公式，独立性

$$= \alpha + (1-\alpha)(1-\beta)\alpha + (1-\alpha)^2(1-\beta)^2\alpha + \cdots$$

$$= \alpha\sum_{k=0}^{\infty}(1-\alpha)^k(1-\beta)^k = \frac{\alpha}{1-(1-\alpha)(1-\beta)}.$$

注记：如果$\alpha=\beta$, 则$P(\text{“甲获胜”}) = \dfrac{1}{2-\alpha} > \dfrac{1}{2}$.

如$\alpha = 1/2, \beta = 1/2$, 则$P(\text{“甲获胜”}) = 2/3$.

上例（续）：

解2: 记$\mathbf{A}_i$ ="第i次射击命中目标'，$i=1,2,\ldots$

则$\mathbf{A}_1$，$\overline{\mathbf{A}}_1\mathbf{A}_2$，$\overline{\mathbf{A}}_1\overline{\mathbf{A}}_2$ 构成样本空间的一个划分。

（首步分析法）

$$\mathbf{P}(\text{甲胜})=P(\mathbf{A}_1)P(\text{甲胜}\mid\mathbf{A}_1)+P(\overline{\mathbf{A}}_1\mathbf{A}_2)\,\mathbf{P}(\text{甲胜}\mid\overline{\mathbf{A}}_1\mathbf{A}_2)$$

$$+P(\overline{\mathbf{A}}_1\overline{\mathbf{A}}_2)\,\mathbf{P}(\text{甲胜}\mid\overline{\mathbf{A}}_1\overline{\mathbf{A}}_2)$$

$$=\alpha+0+(\mathbf{1}-\alpha)(1-\beta)\,\mathbf{P}(\text{甲胜})$$

回到初始状态

解得

$$\mathbf{P}(\text{甲胜})=\frac{\alpha}{1-(\mathbf{1}-\alpha)(1-\beta)}.$$

三、独立性的应用

求 $A_1,\cdots,A_n$ 中至少有一个发生的概率 $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)$.

(1) 加法公式（一般情形）

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_i P(A_i)-\sum_{i<j} P(A_iA_j)+\cdots.$$

(2) $A_1,\cdots,A_n$ 互不相容时，

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_i P(A_i). \qquad \text{(可加性)}$$

(3) $A_1,\cdots,A_n$ 相互独立时，

都不发生

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=1-P\left(\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}\right)=1-P\left(\overline{A_1}\right)\cdots P\left(\overline{A_n}\right)$$

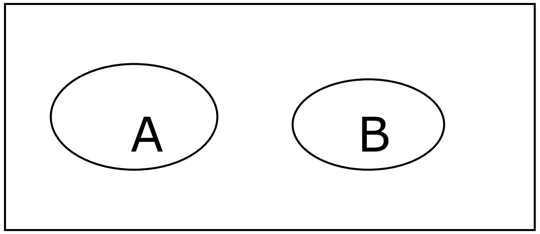
至少有一个发生

$$=1-[1-P(A_1)]\cdots[1-P(A_n)]$$

注记：

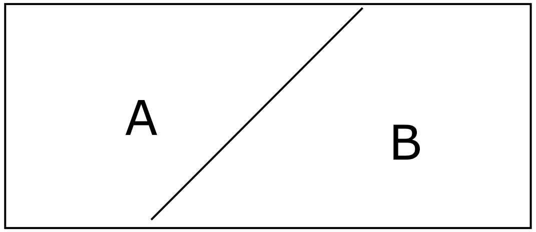
- **互不相容：**

  不能同时发生，但可同时不发生。



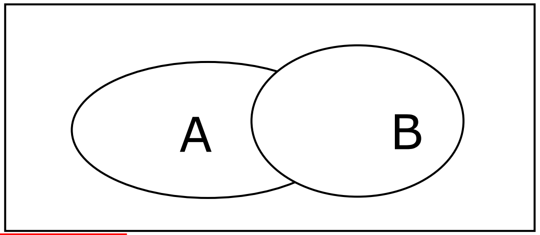
- **互逆（对立）**

  不能同时发生，亦不能同时不发生。



- **相互独立**

  一事件的发生与否并不影响另一事件发生的概率。



如果**A,B**独立，且**P(A)>0, P(B)>0,** 则**A**与**B**有非空交集：**P(AB)>0**，且 **P(AB)=P(A) P(B).**

例：小概率原则（多行不义必自毙）

某事件A发生的概率为$\varepsilon > 0$,则不论ε多么小，当不断地

独立重复做试验时，A迟早会发生的概率为1.

至少发生一次

证：记A_k ="在第k次试验中A发生", $k = 1,2,\ldots$

在n次试验中，A从未发生的概率为 $(1-\varepsilon)^n$.

从而，A至少发生一次的概率为

$$P(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) = 1 - P(\bigcap_{k=1}^{n} \overline{A_k}) = 1 - (1-\varepsilon)^n.$$

当n足够大时，这个概率接近1.

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} P(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) = 1.$$ 从而$P(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = 1$(见下方)

注：设$S_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$,则$S_n$为单调增事件列，极限为$\lim_{n\to\infty} S_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$.

$$\text{有 } P(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = P(\lim_{n\to\infty} S_n) = \lim_{n\to\infty} P(S_n) = \lim_{n\to\infty} P(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) = 1.$$

概率的连续性

例：彩票

彩票每周开奖一次，每次中奖机会 $\varepsilon=10^{-5}$.

你每周买一张彩票，坚持 10 年（每年 52 周），

则从未中奖的概率为多少？

解：设A_k ="第k周中奖"，$P(A_k)=\boldsymbol{\varepsilon}$.

n次开奖，从未中奖的概率为 $P(\bigcap_{k=1}^{n}\overline{A_k})=(1-\boldsymbol{\varepsilon})^n$.

10年：$(1-\boldsymbol{\varepsilon})^{520}=0.9948$.

100年：$(1-\boldsymbol{\varepsilon})^{5200}=0.94933$.

彩票中大奖是个梦！

1000年：$(1-\boldsymbol{\varepsilon})^{52000}=0.59452$.

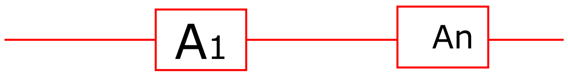
10000年：$(1-\boldsymbol{\varepsilon})^{520000}=0.00552$.

总有人梦想成真！

例：系统的可靠性

- 系统的可靠性 = 系统正常工作的概率
- n个元件的系统，元件是否正常工作是**相互独立的**

➢ **串联系统**

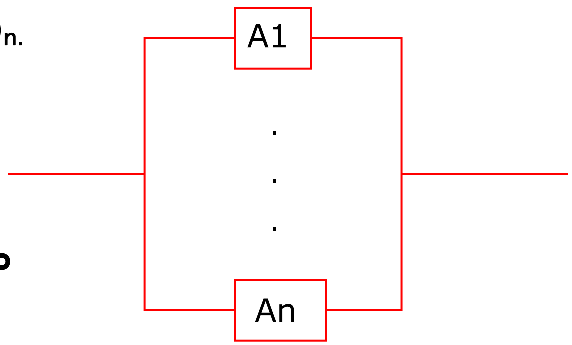


特点：只要一个元件失效，系统就失效。

记 A_k = “第 k 个元件正常”，$P(A_k) = p_k$.

P(系统正常) = $P(A_1 \cdots A_n) = p_1 \cdots p_n$.

➢ **并联系统**



特点：只要一个元件正常，系统就正常。

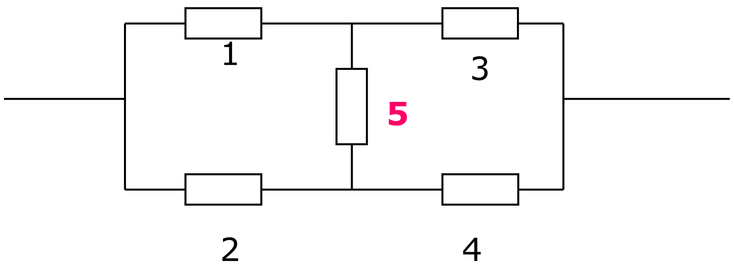
$$P(\text{系统正常}) = P(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = 1 - P(\overline{A_1} \cdots \overline{A_n})$$

$$= 1 - P(\overline{A_1}) \cdots P(\overline{A_n}) = 1 - (1 - p_1) \cdots (1 - p_n).$$

例：复杂系统的可靠性

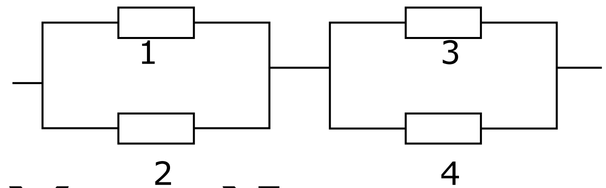
图中所示系，各元件的可靠性分别为 p_1， …， p_5.

求系统的可靠性。



解：

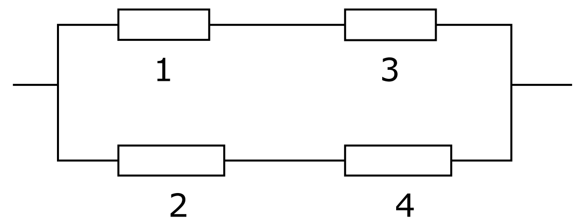
- 若元件 5 正常，则系统变为：



此时系统可靠性为

$$[1-(1-p_1)(1-p_2)][1-(1-p_3)(1-p_4)] =: F1$$

- 若元件 5 不正常，则系统变为：



此时系统可靠性为

$$1-(1-p_1p_3)(1-p_2p_4) =: F2$$

- 根据全概率公式：

P(系统正常)= P(元件5正常) P(系统正常|元件5正常) +

+ P(元件5不正常)P(系统正常|元件5不正常)

$$= p_5 F1 + (1-p_5)F2.$$

四、试验的独立性

- 设有两个试验 E_1 和 E_2，设试验 E_1 的任一结果（事件）与试验 E_2 的任一结果（事件）都是相互独立的事件，则称这**两个试验相互独立。**
- 设有多个试验 $E_1 \cdots E_n$，设试验 E_1 的任一结果(事件)，… 试验 E_n 的任一结果(事件)，都是相互独立的事件，则称这 **n个试验相互独立**。
- 如果这 n 个试验是相同的，则称为 n 重独立重复试验。
- 如果每次试验的结果只有两个：A 或 $\overline{A}$，则称为 **n 重 Bernoulli 试验**。
- 在 n 重 Bernoulli 试验中，**成功的次数 X** 有何规律？

(next chapter)

End of Chapter 1