第三章 恒定磁场

作业：习题3、12

习题3可以直接利用圆环电流产生的磁密结果。

习题12要注意安倍环路定律右端是交链的电流，即电流要为闭合回路时或具有管状等通量性时安倍环路定律的等式才成立。

提要：恒定电流产生的磁场。

磁场满足的方程组为：

式1：$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}$ $\quad \oint_l \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = i$

式2：$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$ $\quad \oiint_s \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0$

式3：$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}$

可设磁通密度$\boldsymbol{B}$等于矢量磁位$\boldsymbol{A}$的旋度：

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A} \qquad \nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0$$

$\boldsymbol{A}$满足泊松方程：

$$\nabla^2 \boldsymbol{A} = -\mu \boldsymbol{J}$$

一定要注意：式1成立是有条件的，即电流必须具有管状等通量性，即 $\nabla \cdot \boldsymbol{J} = 0$。

磁场能量对应什么电路参数？ 电感。

强调：作为恒定磁场的场源的电流必须闭合的概念

$\oint_l \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = i$ 成立的条件是电流具有管状等通量性，不能断。

故 $\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}$ 成立的条件是$\boldsymbol{J}$的散度等于零，即 $\nabla \cdot \boldsymbol{J} = 0$

- 本章讨论的问题、所有解的形式或表达式都需要电流闭合，否则方程及其解答都不成立。实际中恒定电流都闭合。
- 如要求解一段电流的恒定磁场，该模型是错误的！只能说是先分析一个闭合回路电流中一段电流对磁场的贡献才有意义。
- 虽然看上去求磁通密度$\boldsymbol{B}$的毕奥-萨伐尔定律的表达式和求矢量磁位$\boldsymbol{A}$的积分式是一段电流的场之表达式，但其适用的条件是：该段电流一定是一个闭合回路电流的一部分。

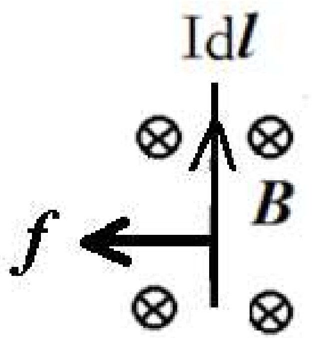
第1节 磁通密度*B*的定义及其自由空间中的解：毕奥—萨伐尔定律

1. 磁通密度*B*的定义

恒定磁场的源为恒定的电流密度$\boldsymbol{J}$(A/m²)，其为一个矢量源。

一点的磁通密度$\boldsymbol{B}$(表示磁场的量)之大小定义为位于该点的单位电流元$I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$所受的磁场力$\boldsymbol{f}$，且 $\boldsymbol{f}=I\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{B}$或$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{f}\times\mathrm{d}\boldsymbol{l}I$。

$\boldsymbol{B}$的量纲：Wb/m²，常用单位：T，特斯拉。



2. 自由空间中$\boldsymbol{J}$产生的恒定磁场的边值问题

$$\begin{cases}\nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{J}\\ \nabla\cdot\boldsymbol{B}=0\\ \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n}|_\infty=0\end{cases}$$

真空中的磁导率(电感系数)：$\mu_0=4\pi\times10^{-7}$ 单位：亨/米[H/m]

3. 边值问题的积分形式解

$$\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_V \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')\times\nabla'\frac{1}{R}\mathrm{d}V'=\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_V \frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')\times\boldsymbol{R}^0}{R^2}\mathrm{d}V' \quad \boldsymbol{R}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'$$

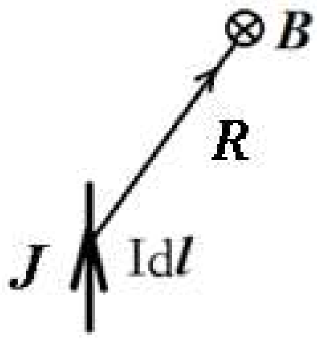
称为毕奥—萨伐尔定律

可将上式代入磁场方程组的两个方程中验证其确为其解。

其来源于闭区域边值问题的积分形式解：

$$\boldsymbol{B}=\frac{\mu}{4\pi}\iiint_V \boldsymbol{J}\times\nabla'\frac{1}{R}\mathrm{d}V'-\frac{\mu}{4\pi}[\oiint_S \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{B}\nabla'\frac{1}{R}\mathrm{d}S'+\oiint_S(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{B})\times\nabla'\frac{1}{R}\mathrm{d}S']$$

线电流 I产生的磁感应强度为：$\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_l \frac{I\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{R}^0}{R^2}$



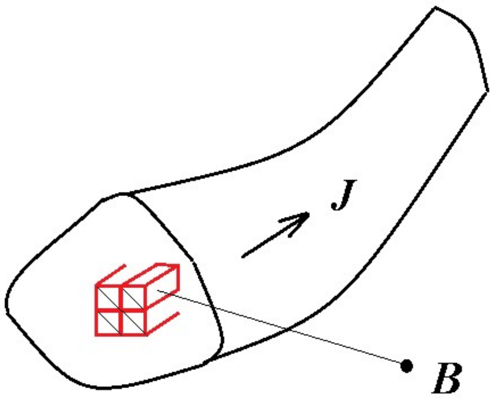
- 类似的有面电流的积分形式。
- 线性媒质中源产生的场符合叠加定理。
- 对非无限大线性均匀媒质空间，毕奥—萨伐尔定律无效。

洛仑兹力：电流元$I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$所受的磁场力为：$\mathrm{d}\boldsymbol{f}=I\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{B}$

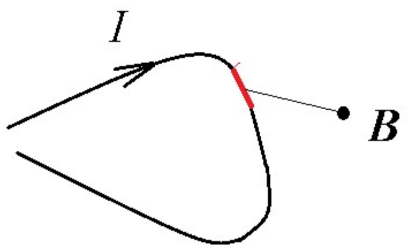
无限大均匀空间中已知电流求其磁场可由毕奥-萨伐尔定律积分求解。这就是一个求定积分问题，容易解决。

自学大学物理例17.1也是电磁场教材例3-1一段导线(理论模型)的$\boldsymbol{B}$和大物例17.2也是电磁场例3-2一个圆环电流$\boldsymbol{B}$的求法。

扩充内容：任意分布的电流密度或弯曲的线电流产生的$\boldsymbol{B}$可通过离散积分或数值积分的方法求解。



对已知体电流密度问题，将体分离成若干小体积（如长方体或三棱柱等），将每个小体视为一段线电流，该电流产生的$\boldsymbol{B}$有表达式。将各小体电流产生的$\boldsymbol{B}$叠加即可。实际上，这是将积分区域离散后的求定积分的数值积分方法。



对已知线电流问题，划分成若干小段，将每段视为一段线电流，叠加求解。

$$\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_l \frac{I\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{R}^0}{R^2}$$

第2节 自由空间中磁场一般方程的积分形式：
磁通连续性定理、安培环路定律

磁通的定义：$\Phi = \iint_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 单位：韦伯[Wb]

所以$\boldsymbol{B}$称为磁通密度。注意上式中矢量点积分的含义。

思考题：对无限长直载流导线，以下哪个面上的磁通不为零？
(1) 导线截面、 (2) 与导线同轴或不同轴的圆柱面(对闭合面为零)、
(3) 过轴线的任意无限大平面、 (4)以轴线为边的半无限大平面。

答：第(4)为该导线$\boldsymbol{B}$的总通量或总磁通。其它均为零。

利用高斯公式，由 $\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$ 可得：$\oiint_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0$

通过任意闭合面的磁通量一定为零，称为磁通连续性定理。
磁场为无散场；无磁荷存在；磁力线是闭合的曲线。

由斯托克斯公式可从 $\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{J}$ 得场的线积分与电流的关系，即：真空中的安培环路定律

$$\oint_l \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \mu_0 \sum_{k=1}^{n} I_k = \mu_0 \iint_S \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \qquad \text{条件：} \nabla \cdot \boldsymbol{J} = 0$$

$\boldsymbol{B}$的闭合环路线积分等于闭合环路所交链的闭合电流之和乘真空磁导率，环路方向与电流方向成右手螺旋关系时电流取正，否则取负号。“交链”是指两个闭合的回路“嵌套”。

安培环路定律与磁通连续性定理构成恒定磁场的积分方程组：

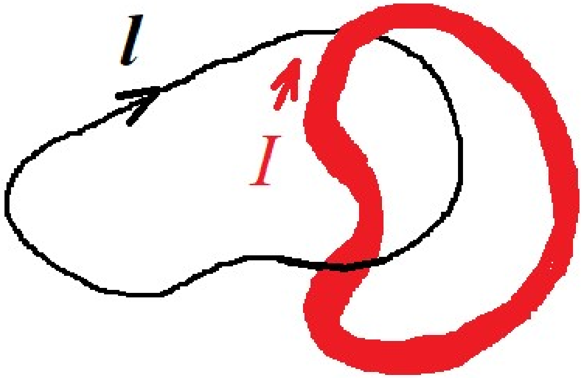
$$\begin{cases} \oint_l \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \mu_0 \sum_{k=1}^{n} I_k \\ \oiint_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0 \end{cases}$$

磁力线方程： $\boldsymbol{B} \times \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0$

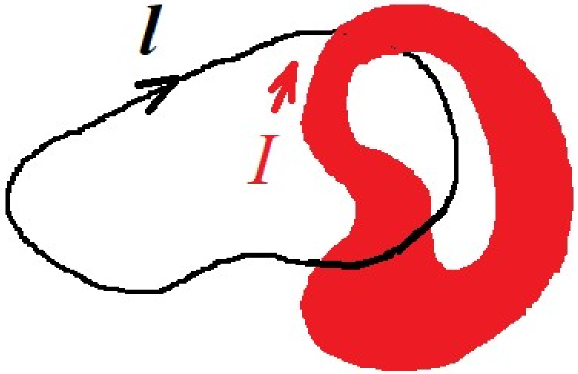
其每点的切线与该点的$\boldsymbol{B}$的方向相同。
磁力线是闭合的曲线，必与电流回路交链，
不与电流区域交链的磁力线一定是错的！

$$\oint_l \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \mu_0 \sum_{k=1}^{n} I_k$$

等于闭合环路所交链的闭合电流之和乘真空磁导率。



安培环路定律成立



对此安培环路定律也成立(不受电流区域不规则的影响，只要电流闭合就行)

将方程右端的电流写为kI (k<1)，
则安培环路定律成立，即 $\oint_l \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \mu_0 k I$

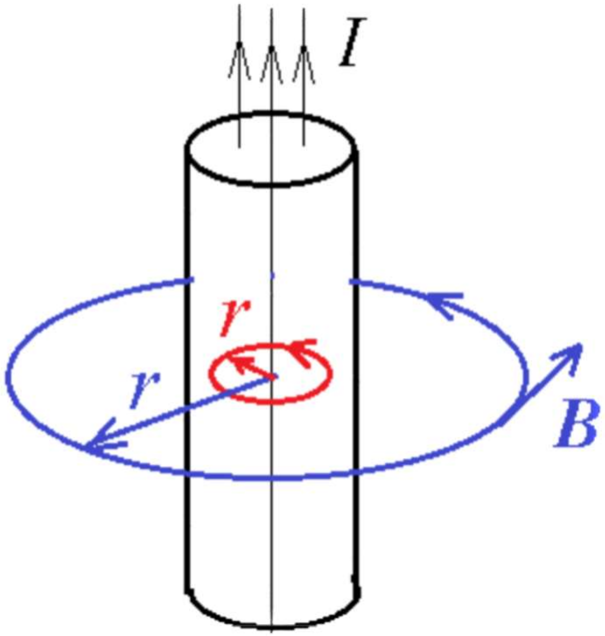
习题**3-12**求地下的磁场应利用此概念。

教材例3-4：真空中半径为R的无限长直圆柱铜导线（铜的磁导率约等于真空磁导率），带有恒定电流 I，求导线内外的磁通密度。无限长导线意味着在无限远处闭合，为闭合回路。

解:(1）画磁力线分析磁场分布，为圆形磁力线；$\boldsymbol{B}$无散得到满足。

（2）用安培环路定律求解。取安培环路$\boldsymbol{l}$，其部分曲线要么为磁力线、要么与磁力线垂直、要么$\boldsymbol{B}$为零；

（3）求安培环路积分得$\boldsymbol{B}$。



i）在导线内取半径为r的圆环磁力线作为安培环路，则有：

$$\oint_L \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = B_\alpha \oint_L \mathrm{d}l = 2\pi r B_\alpha = \mu_0 \frac{r^2\pi}{R^2\pi} I$$

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 r I}{2\pi R^2}\boldsymbol{e}_\alpha$$

ii）在导线外取半径为r的圆环磁力线,有：

$$\oint_L \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 2\pi r B_\alpha = \mu_0 I \qquad \boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\boldsymbol{e}_\alpha$$

教材例3-5：求无限长螺线管线圈各区域的磁通密度。
其内外半径分别为R_1和R_2，单位高度上的匝数为N，电流I。

解：画磁力线，场分布关于螺线管轴心对称。在螺线管内磁力线为一根根无限长、平行于轴线的直线，$\boldsymbol{B}$分布与z和α无关，仅是r的函数，实际上为一维问题。$\boldsymbol{B}$无散得到满足。

1）磁力线延伸至无限远处，在无限远处闭合，没有磁力线从螺线管附近外部空间返回，故线圈外$r>R_2$的区域磁密为零。
外部$\boldsymbol{B}$为零是无限长螺线管的场分布要点。如何选择安培环路？
选择一条边位于螺线管外部（$\boldsymbol{B}$=0）、对边分别位于导线区域和空心区的矩形作为安培环路，有：

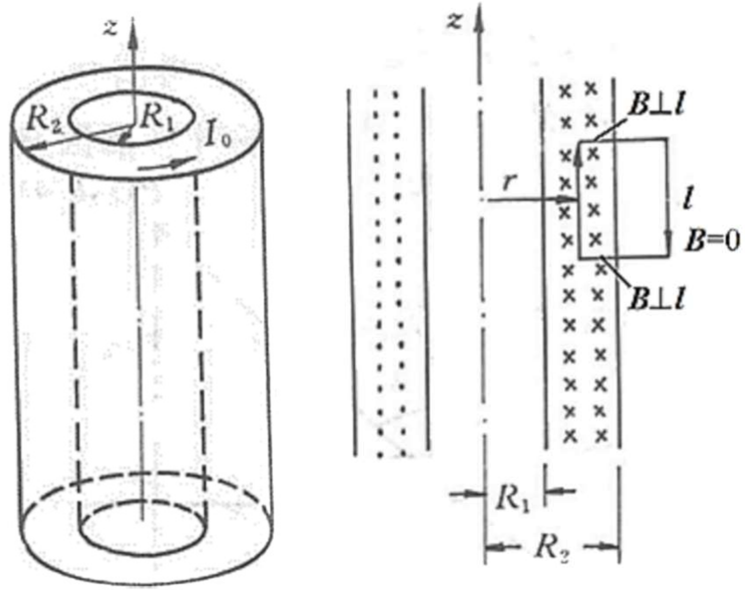
2) $R_1 \le r \le R_2$

$$\oint_l \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{l} = B_z l = \mu_0 NIl \frac{R_2 - r}{R_2 - R_1}$$

$$B_z = \mu_0 \frac{NI}{R_2 - R_1}(R_2 - r)$$

3) $0 \le r < R_1$，$\oint_l \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{l} = B_z l = \mu_0 NIl$

$B_z = \mu_0 NI$ 内部场均匀



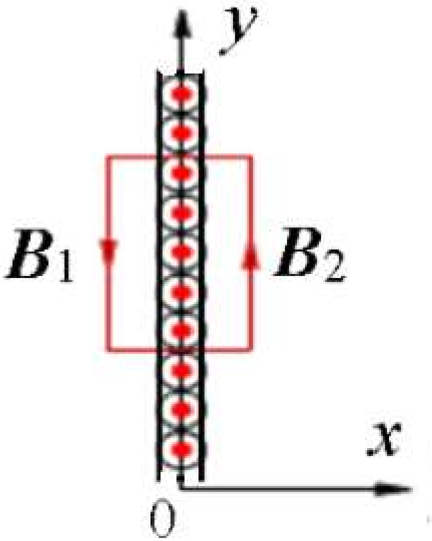
例： 求无限大截流薄导体板产生的磁通密度$\boldsymbol{B}$。已知单位长（下图y方向上）的电流密度为K，电流方向为z轴方向。

解：画磁力线，两侧磁力线为平行于导体板的无限长直线，$\boldsymbol{B}$无散。

用安倍环路定律求场。x不同的位置处$\boldsymbol{B}$相同，即板两侧$\boldsymbol{B}$是均匀分布的，且两侧方向相反大小相同。

取矩形安培环路如图所示，上下两个边与$\boldsymbol{B}$垂直，积分为零，竖边长为L，故有：

$$\oint_L \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = B_1L + B_2L = \mu_0 KL$$



应用：$|B_1| = |B_2| = B$ 得：

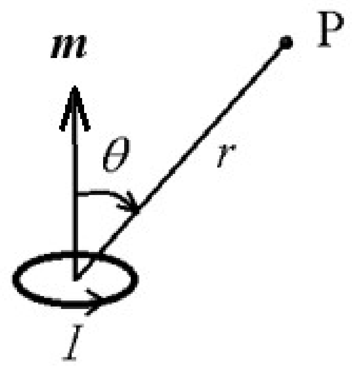
$$\boldsymbol{B} = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 K}{2}\boldsymbol{j} & x > 0 \\ -\dfrac{\mu_0 K}{2}\boldsymbol{j} & x < 0 \end{cases}$$

也可认为$\boldsymbol{y}$轴上场为零进行求解

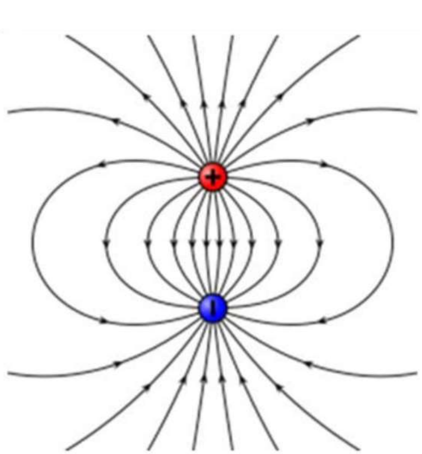
第3节 磁偶极子

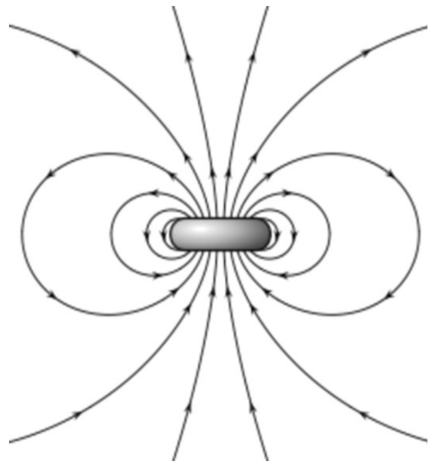
- 称小圆环电流为磁偶极子，定义磁偶极矩$\boldsymbol{m}=I\boldsymbol{S}$，$I$为电流，$\boldsymbol{S}$为圆环的面积，$\boldsymbol{m}$ 的方向为$\boldsymbol{S}$的法向且与I成右手螺旋关系。
- 磁偶极子在远处产生的磁场的近似表达式：（教材式3-28)

$$\boldsymbol{B}_{\mathrm{P}}=\frac{\mu_0 m}{4\pi r^3}(2\cos\theta\boldsymbol{e}_r+\sin\theta\boldsymbol{e}_\theta)$$



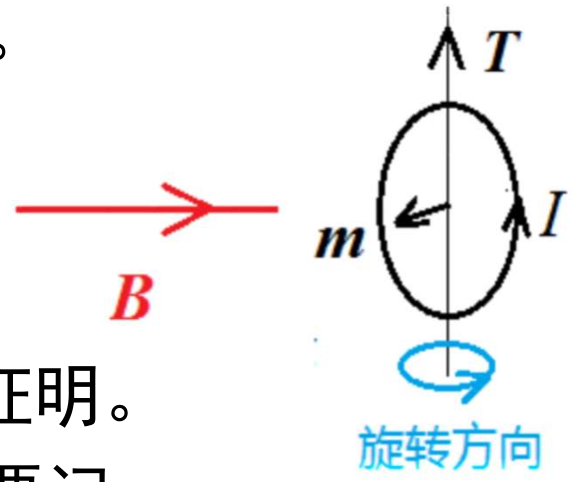
- 该式与电偶极子产生的电场表达式完全相同。
- 这就是为何将小电流环称为磁偶极子的原因。
- 实际上，该电流源并没有“偶”的现象存在。
- 然而，假如有磁荷存在，磁荷构成的偶极子产生的磁场在远处则与该小电流环的磁场相同。
- 这种电偶极子与电流环磁偶极子的场之表达式相同形式的现象，在天线中的意义为：可以靠电偶极子形式作为天线，也可以靠小电流环形式作为天线，两者在发射电磁波的功能和效果上相同。





- 对于一个圆环电流，如外场在圆环区域内是均匀的，则圆环不会受到移动的力，只会受到一个旋转的力矩，就像直流电动机一样，旋转到磁偶极矩$\boldsymbol{m}$与外场$\boldsymbol{B}$的方向一致时停止（用电流受力的左手定则可得此结论）。
- 另外一种说法是：电流环旋转的趋势是其产生的磁场与外磁场的方向趋于一致，达到两方向一致时停止。
- $\boldsymbol{m}$与$\boldsymbol{B}$的方向相反时电流环受力矩也为零，但不是稳定点，一个小的扰动就会远离该状态。
- 磁偶极子所受的旋转力矩大小为：

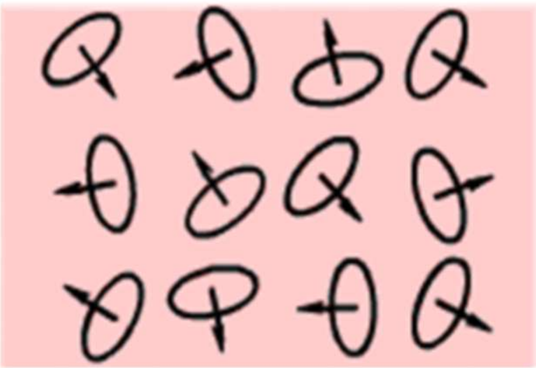
$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{m} \times \boldsymbol{B}$$



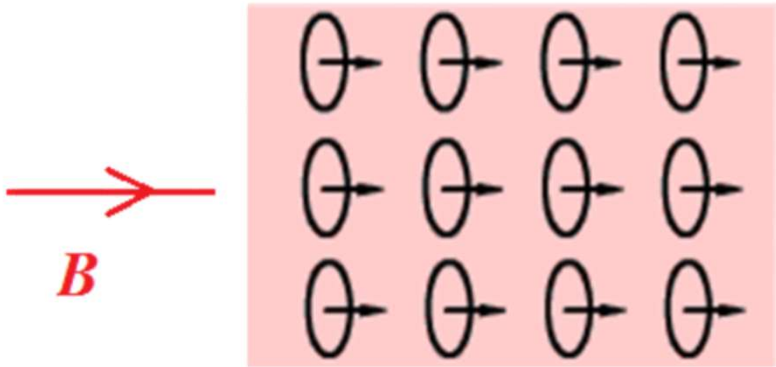
该表达式由教材例3-24用虚位移法证明。
磁偶极子磁场的表达式与推导不需要记。

第4节 磁媒质的磁化、磁场强度*H*的定义

- 磁媒质的磁化是指材料在外磁场的作用下产生磁偶极子，呈现出磁场场源的现象；会受到磁场力，为铁被磁铁吸的原理。
- 其本质是外磁场使得杂乱无章的分子等效磁偶极子进行顺序排列，对外呈现等效磁化电流的特性。
- 当偶极子都排列成与磁场方向平行时，再增加外磁场磁化程度不再变化，此时称为完全磁化。外场很大才达到完全磁化。
- 磁媒质磁化后会使得其内部的磁密增大。



磁化前的分子环流



完全磁化后的分子环流

将单位体积内被磁化产生的磁偶极矩定义为磁化强度：

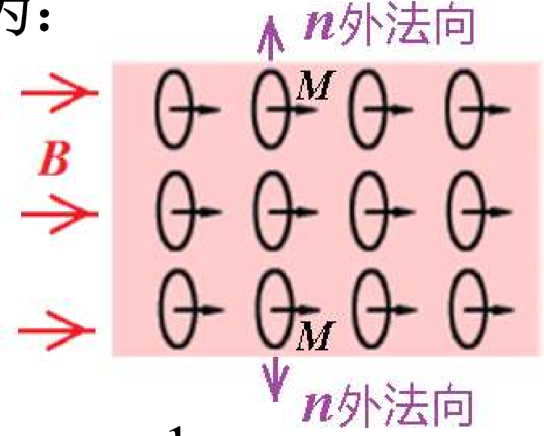
$$\boldsymbol{M}=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\sum \boldsymbol{m}}{\Delta V}$$

$\boldsymbol{m}$的单位A m²，$\boldsymbol{M}$的单位A/m

- 各向同性磁媒质中任意点的$\boldsymbol{M}$与$\boldsymbol{B}$方向相同，
- 对线性材料两者成正比，可表示为：$\boldsymbol{M}=\xi\boldsymbol{B}$；
- 易知，ξ的量纲与$1/\mu_0$相同，$\nu_0=1/\mu_0$称为磁阻率。
- 可设$\boldsymbol{M}=\nu_0\eta\boldsymbol{B}$。但一般不用磁阻率而用磁导率表示媒质特性，见下下页。
- 对非线性材料应表示为任意函数关系：$\boldsymbol{M}=M(B)$。
- 磁化后的媒质对外场有影响，媒质磁化后可视为场源。
- 磁化强度$\boldsymbol{M}$表示该源的大小。
- 可将该磁偶极子源转化为等效体电流密度和面电流密度。

利用磁偶极子的矢量磁位$\boldsymbol{A}$可推出（待讲磁位时再推导），
连续媒质被磁化后可由等效磁化体电流在真空中产生的场来替代或描述媒质对场的影响，等效磁化体电流密度为：

$$\boldsymbol{J}_m = \nabla \times \boldsymbol{M}$$



不连续媒质面上存在等效磁化面电流密度：

$$\boldsymbol{K}_m = \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{n}$$ $\boldsymbol{n}$为媒质表面外法向。

基于用磁化电流替代媒质的方法，
在连续媒质内各点，$\boldsymbol{B}$的安培环路定理为：

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0(\boldsymbol{J} + \boldsymbol{J}_m) = \mu_0(\boldsymbol{J} + \nabla \times \boldsymbol{M})$$

得：$\nabla \times (\dfrac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B} - \boldsymbol{M}) = \boldsymbol{J}$

定义磁场强度为：$\boxed{\boldsymbol{H} = \dfrac{\boldsymbol{B}}{\mu_0} - \boldsymbol{M}}$

用磁场强度表示的安培环路定律为：

$$\boxed{\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}} \qquad \boxed{\oint_L \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \sum I}$$

$\boldsymbol{H}$的单位：A/m

$\boldsymbol{H}$的环路积分或旋度与磁化电流无关，仅与自由电流有关。

因为存在磁媒质或为了描述媒质才引进了$\boldsymbol{M}$与$\boldsymbol{H}$，且有：

$$\boldsymbol{B}=\mu_0(\boldsymbol{H}+\boldsymbol{M})$$

只要知道了媒质的磁特性，则以上三个量就只有两个独立，
或者说，$\boldsymbol{M}$可由媒质特性与$\boldsymbol{B}$表示，或$\boldsymbol{M}$可由媒质特性与$\boldsymbol{H}$表示。
通常是采用后者，定义：$\boldsymbol{M}=\chi_m\boldsymbol{H}$ 。

χ_m称为磁化率，无量纲，表征磁媒质材料的磁化特性。
χ_m越大表示在一定场强下该材料的磁化程度越大，对空气为零。
因此有： $\boldsymbol{B}=\mu_0(\boldsymbol{H}+\boldsymbol{M})=\mu_0(1+\chi_m)\boldsymbol{H}=\mu_0\mu_r\boldsymbol{H}=\mu\boldsymbol{H}$

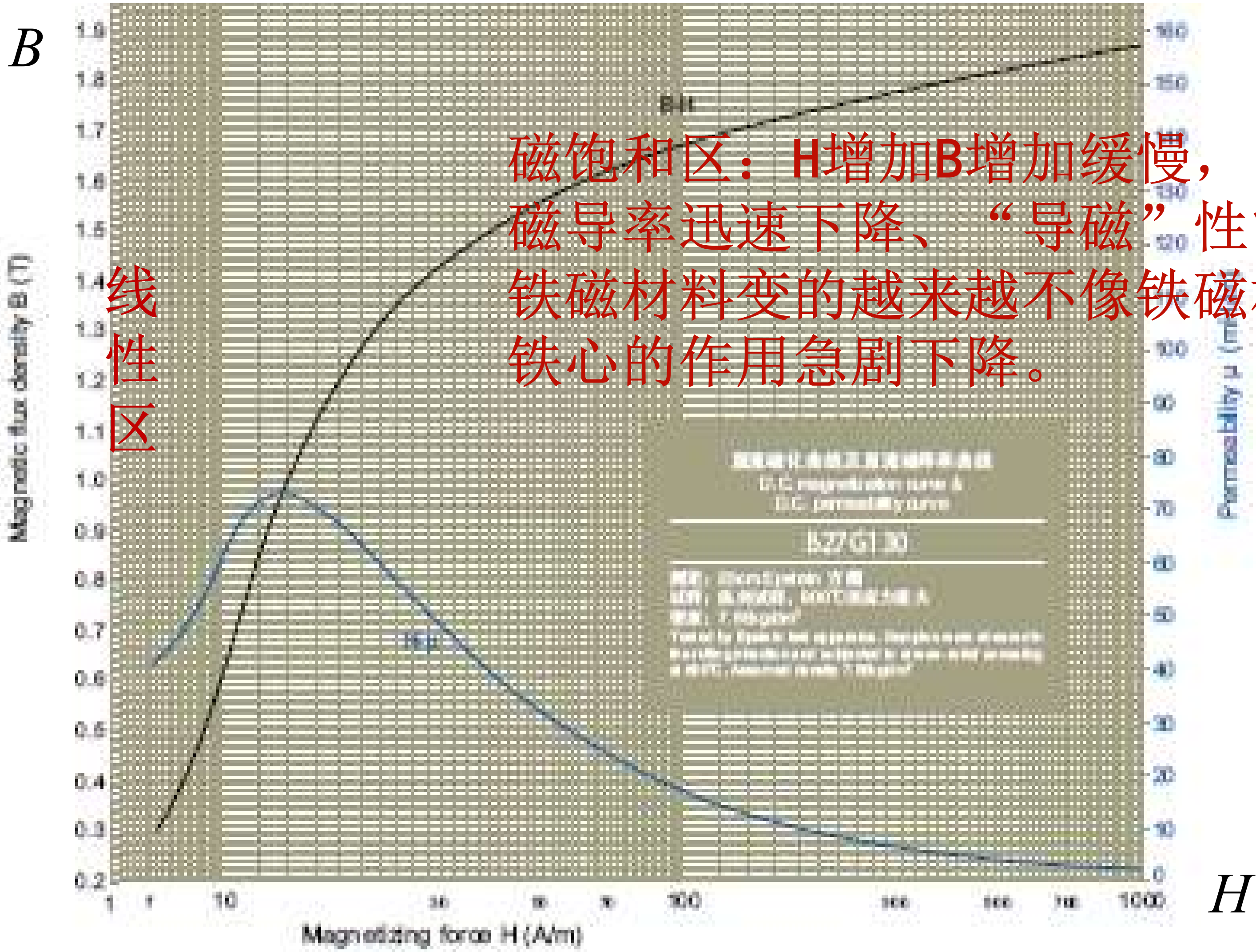
$\mu_r=1+\chi_m$称为相对磁导率，无量纲。磁导率$\mu=\mu_0\mu_r=\mu_0(1+\chi_m)$，
单位亨/米，μ也是电感率，叫电感率更好，因真空中的线圈有电感，
且真空中$\mu_r=1$，μ_r有值; 但$\chi_m=0$。

线性材料的特性或成分关系式为： $\boxed{\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}}$ 磁导率定义：$\mu=\dfrac{\boldsymbol{B}}{\boldsymbol{H}}$

一般铁磁材料的相对磁导率μ_r为几千到上万，但严重非线性。
变压器等铁心所采用的硅钢片的μ_r会上万，其越大越好。
对非线性材料应表示为任意函数关系：$\boldsymbol{B}=B(H)$。

硅钢片的*B-H*磁化曲线与磁导率随材料内*H*的变化曲线。

一个工作点的静态磁导率为：$\mu=B/H$。



正常设计的设备铁心中的磁通密度一般不会大于2T。

磁化曲线只是对铁磁材料特性的近似，对于作为导磁磁路的铁心性能分析，利用磁化曲线足以。

但分析剩磁、损耗、频率特性时要用其本质：磁滞回线簇：