

第13讲 用卷积积分求(任意阶电路)

在任意激励下动态电路的响应

纸笔计算器

1 单位冲激响应

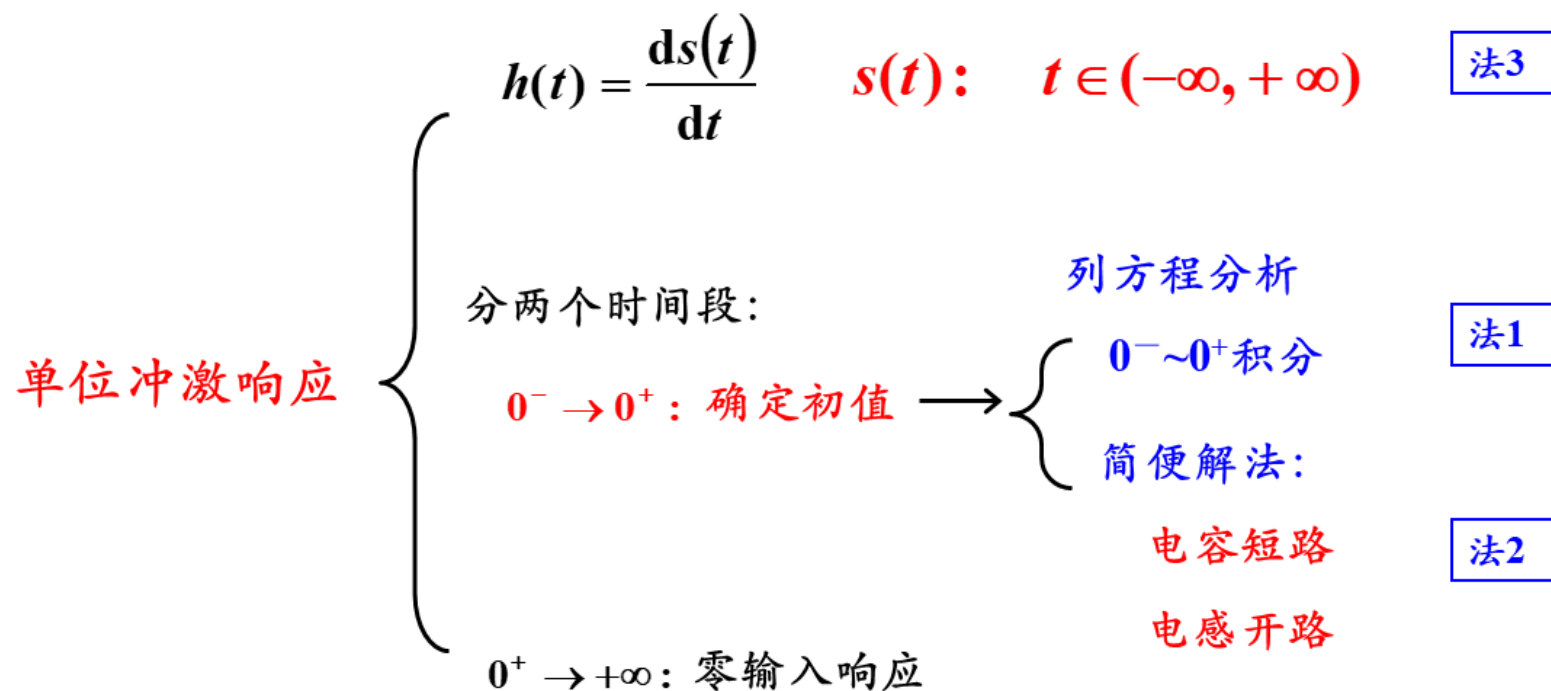
2 卷积积分概念的引入

3 卷积积分的定义和性质

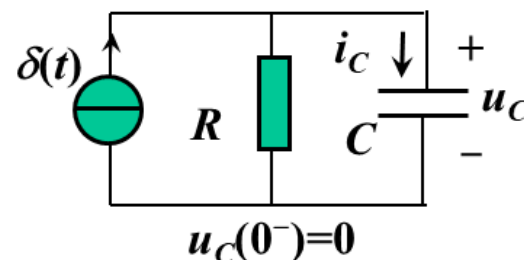
4 用卷积积分求零状态响应

5 卷积积分的图解法

1 单位冲激响应



方法1 列写方程, 把冲激源的作用表现在方程里
从 $0^- \sim 0^+$ 范围求积分



1. t 在 $0^- \rightarrow 0^+$ 间

$$C \frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{R} = \delta(t)$$

u_C 不可能是冲激函数, 否则KCL不成立

$$\int_{0^-}^{0^+} C \frac{du_C}{dt} dt + \int_{0^-}^{0^+} \frac{u_C}{R} dt = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t) dt$$

$\searrow \quad \searrow \quad \searrow$
 $=0 \quad \quad \quad =1$

法1步骤($0^- \sim 0^+$ 部分):
(1) 列写 $0^- \sim 0^+$ 的方程
(2) $0^- \sim 0^+$ 积分求 $u_C(0^+)$
(3) 微分关系求 i_C

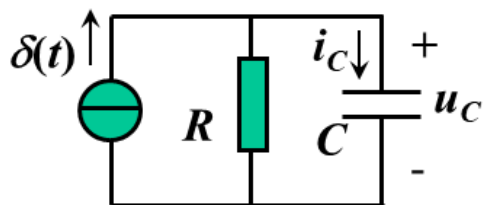
$$C[u_C(0^+) - u_C(0^-)] = 1$$

注意: 对高阶, 不是太好分析

$$u_C(0^+) = \frac{1}{C} \neq u_C(0^-)$$

电容中的冲激电流使电容电压发生跳变

$$i_C = C \frac{du_C}{dt} = \delta(t)$$



另一个思路 ($0^- \sim 0^+$ u_C 是否有跳变) :

$$u_C(0^+) = u_C(0^-) + \frac{1}{C} \int_{0^-}^{0^+} i_C(\tau) d\tau$$

求 $u_C(0^+)$ 的关键是: $0^- \sim 0^+$ 中 i_C 有没有冲激

u_C 如果有跳变
是由于冲激电流引起的

电路体系中不会有冲激电容电压

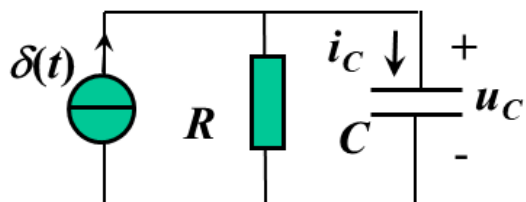


方法2 $\delta(t)$ 作用的那个瞬间, 用替代定理, 将 C 视作某个有限值电压源,
然后用叠加定理的思想, 看 C 上是否有冲激电流

$0^- \sim 0^+$ 时有限值 u_C 产生有限值 i_C , 对 $u_C(0^+)$ 无影响



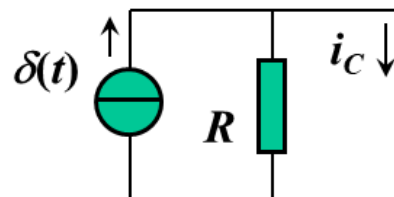
方法2 $\delta(t)$ 作用的那个瞬间, 将 C 视作 0 值电压源 (短路), 看其上是否有冲激电流



法2: $\delta(t)$ 作用的那个瞬间, C 视作0值电压源

$$u_C(0^-)=0$$

1. t 在 $0^- \rightarrow 0^+$ 间



$$i_C(0)=\delta(t)$$

$$u_C(0^+) = u_C(0^-) + \frac{1}{C} \int_{0^-}^{0^+} i_C dt = 0 + \frac{1}{C} \int_{0^-}^{0^+} \delta(t) dt = \frac{1}{C}$$

不等

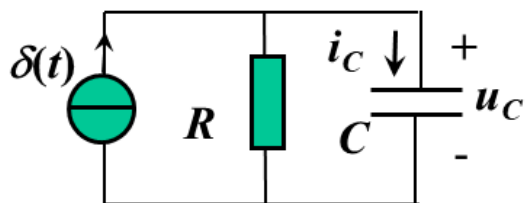
$$u_C(0^-)=0$$

法2步骤:

- (1) 画 $\delta(t)$ 作用时电路(C 短路)
- (2) 求 i_C
- (3) 积分关系求 u_C

电容电压
发生跳变

外加冲激源引起的跳变



$$u_c(0^-)=0$$

t 在 $0^- \rightarrow 0^+$ 间

不一定非得在 $\delta(t)$ 作用的那个瞬间
C 视作 0 值电压源

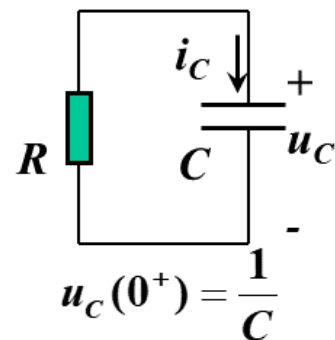
任意有限值电压源，求得的结果
都一样

2. $t > 0^+$ 零输入响应 (RC 放电)

$$u_C(t) = \frac{1}{C} e^{-\frac{t}{RC}} \quad t \geq 0^+$$

$$i_C(t) = -\frac{u_C}{R} = -\frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} \quad t \geq 0^+$$

$$\begin{cases} u_C(t) = \frac{1}{C} e^{-\frac{t}{RC}} \varepsilon(t) \\ i_C(t) = \delta(t) - \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} \varepsilon(t) \end{cases}$$



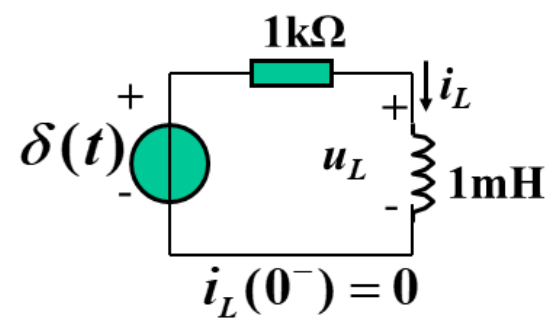
求响应 $u_C(t)$ 、 $i_C(t)$

单选题 1分

$i_L(0^+) = \underline{\hspace{1cm}} \text{A}$

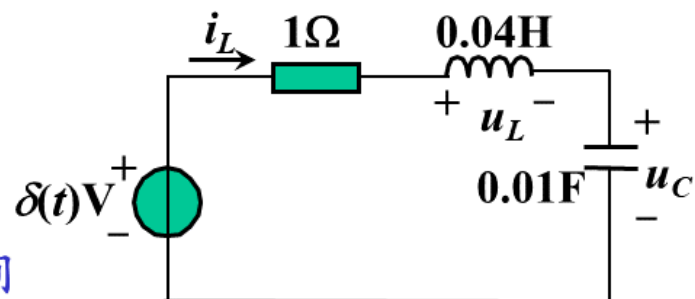
注意单位

- ☐ A 0
- ☐ B 1
- ☐ C 100
- ☒ D 1000

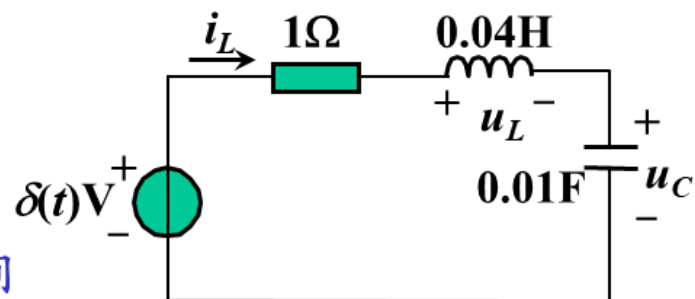


例：二阶单位冲激响应
求图示电路中电压 u_C 。

法2第1步 t 在 $0^- \rightarrow 0^+$ 间



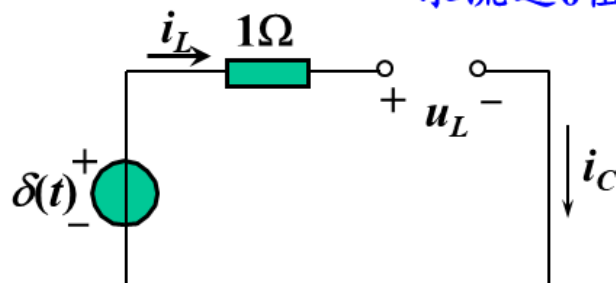
例：二阶单位冲激响应
求图示电路中电压 u_C 。



法2第1步 t 在 $0^- \rightarrow 0^+$ 间

在 $0^- \sim 0^+$ 期间 C 为 0 值电压源, L 为 0 值电流源

求流过 0 值电压源电流和 0 值电流源上电压



$$i_C = 0$$

$$u_L = \delta(t) \text{ V}$$

$$u_C(0^+) = u_C(0^-) + \frac{1}{C} \int_{0^-}^{0^+} i_C dt = 0$$

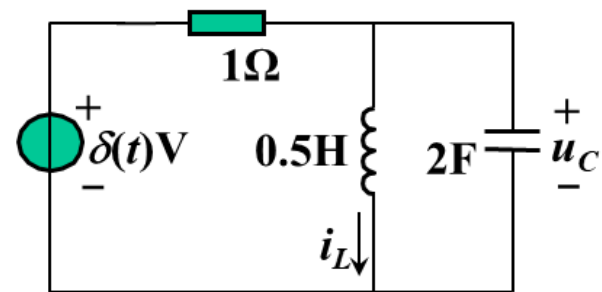
$$i_L(0^+) = i_L(0^-) + \frac{1}{L} \int_{0^-}^{0^+} u_L dt = 25 \text{ A}$$

第2步 $t > 0^+$ 求二阶电路的零输入响应(略)

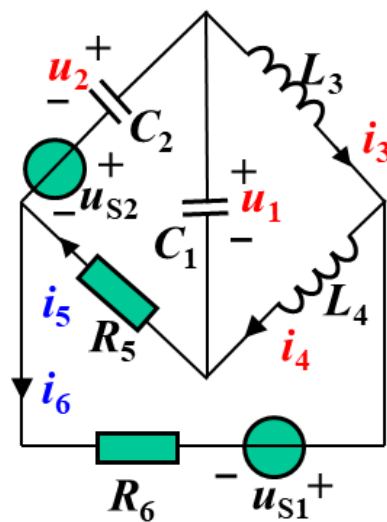
单选题 1分

题图所示电路中, $i_L(0^+) =$ A
“红包”

- A 0
- B 0.5
- C 2**
- D ∞



至此，任意阶电路的单位冲激响应都可以求出



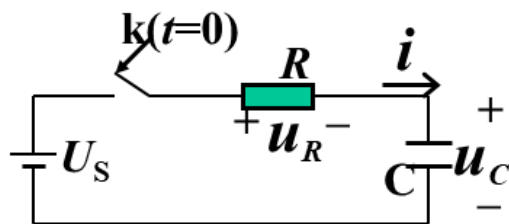
为什么要研究单位冲激响应？

- 求任意激励作用下动态电路零状态响应的需要。
——卷积积分
- 获取系统自身性质的需要。
 - 自动控制原理、信号与系统、数字信号处理等课程

2 卷积积分概念的引入

复习

激励—响应线性关系



$u_C(0^-)=0$ 零状态

$$u_C = U_s(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad t \geq 0$$

激励

$$U_s$$

$$2U_s$$

$$U_{s1} + U_{s2}$$

响应

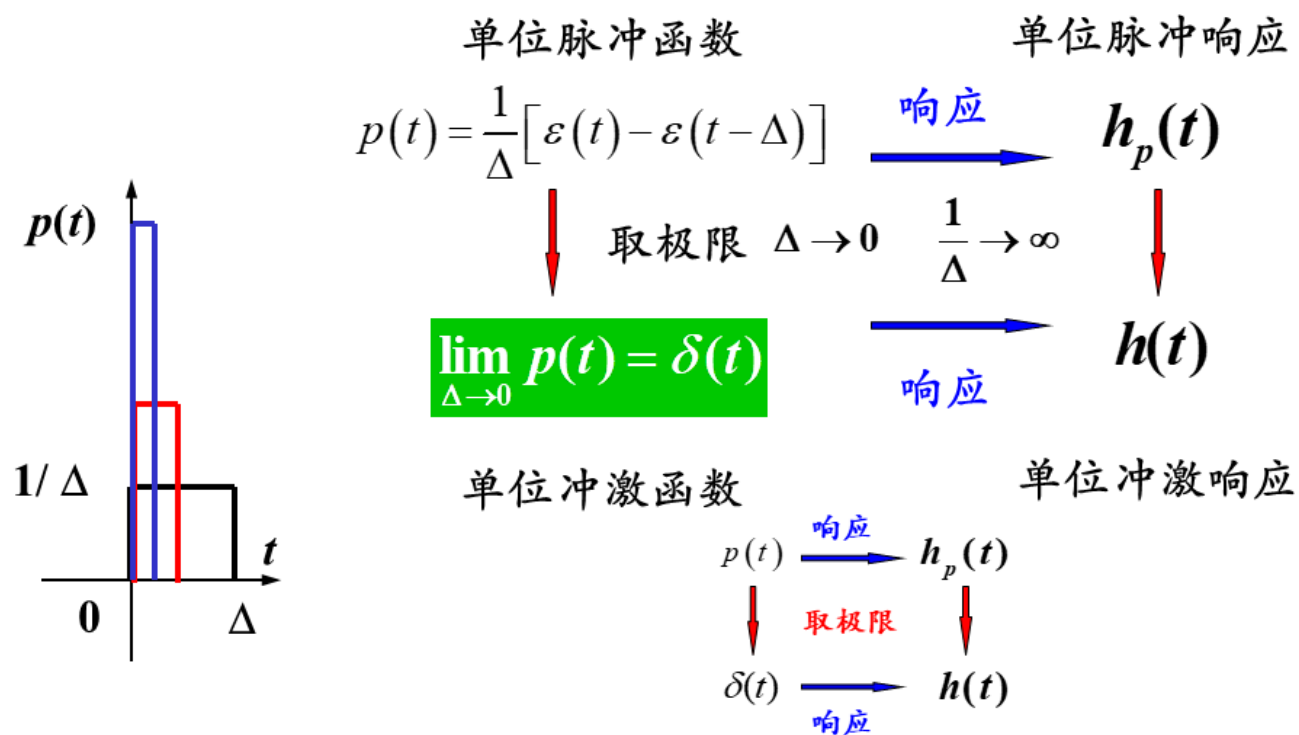
$$u_C = U_s(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad t \geq 0$$

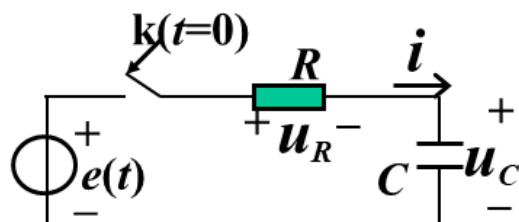
$$u_C = 2U_s(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad t \geq 0$$

$$u_C = (U_{s1} + U_{s2})(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad t \geq 0$$

利用这个性质求任意激励下电路的ZSR

复习一下表达式



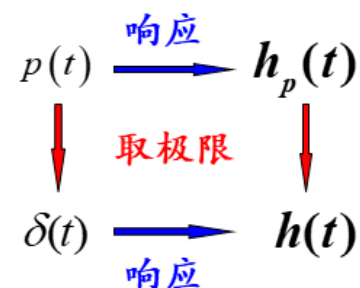


求任意激励 $e(t)$ 下电路的ZSR

基本观点:

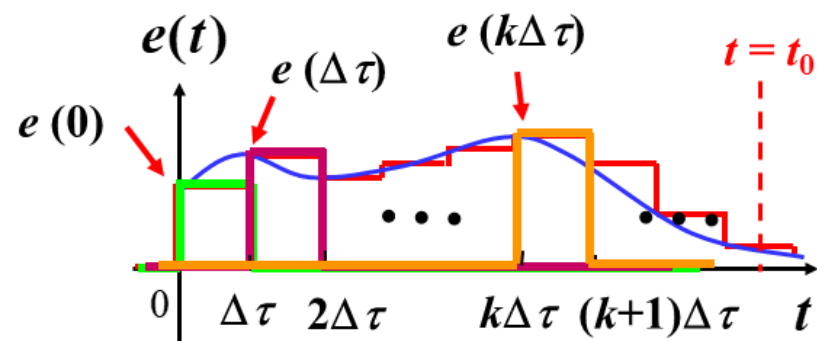
电路零状态，而且激励从0时刻施加，因此某一 $t=t_0$ 时刻观察到的响应，应为 $0 \sim t_0$ 时间内所有激励产生的在 t_0 时刻响应之和（因为激励-响应是线性关系）

接下来，我们分别用叠加的思想来分别处理激励和响应，从而可以求任意 t_0 时刻的响应



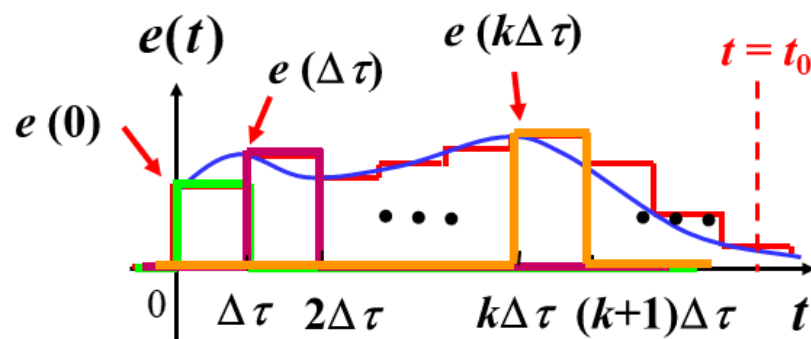
处理激励

$0 < t < t_0$ 时段时间上分割
任意激励 \longrightarrow 若干脉冲函数(延时)之和



处理激励

$0 < t < t_0$ 时段时间上分割
任意激励 \longrightarrow 若干脉冲函数(延时)之和



$$e(t) \approx e(0)[\varepsilon(t) - \varepsilon(t - \Delta\tau)] + e(\Delta\tau)[\varepsilon(t - \Delta\tau) - \varepsilon(t - 2\Delta\tau)] \\ \dots + e(k\Delta\tau)[\varepsilon(t - k\Delta\tau) - \varepsilon(t - (k+1)\Delta\tau)] + \dots$$

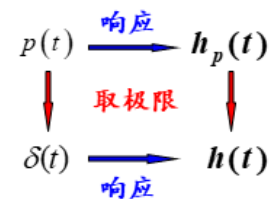
在 $0 < t < t_0$ 时段将激励 $e(t)$ 看成一系列 (N 个) 宽度为 $\Delta\tau$, 高度为 $e(k\Delta\tau)$ 矩形脉冲的和。

处理激励

$$\begin{aligned} e(t) &\approx e(0)[\varepsilon(t) - \varepsilon(t - \Delta\tau)] + e(\Delta\tau)[\varepsilon(t - \Delta\tau) - \varepsilon(t - 2\Delta\tau)] \\ &\quad \cdots + e(k\Delta\tau)[\varepsilon(t - k\Delta\tau) - \varepsilon(t - (k+1)\Delta\tau)] + \cdots \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{N-1} e(k\Delta\tau)[\varepsilon(t - k\Delta\tau) - \varepsilon(t - (k+1)\Delta\tau)] \end{aligned}$$

建立这个表达式和单位脉冲函数之间的关系

怎么做?
此处可以有弹幕/投稿



处理激励

$$\begin{aligned}
 e(t) &\approx e(0)[\varepsilon(t) - \varepsilon(t - \Delta\tau)] + e(\Delta\tau)[\varepsilon(t - \Delta\tau) - \varepsilon(t - 2\Delta\tau)] \\
 &\quad \cdots + e(k\Delta\tau)[\varepsilon(t - k\Delta\tau) - \varepsilon(t - (k+1)\Delta\tau)] + \cdots \\
 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{N-1} e(k\Delta\tau) [\varepsilon(t - k\Delta\tau) - \varepsilon(t - (k+1)\Delta\tau)]
 \end{aligned}$$

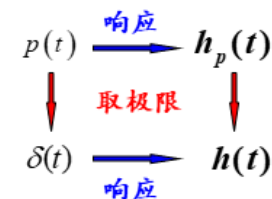
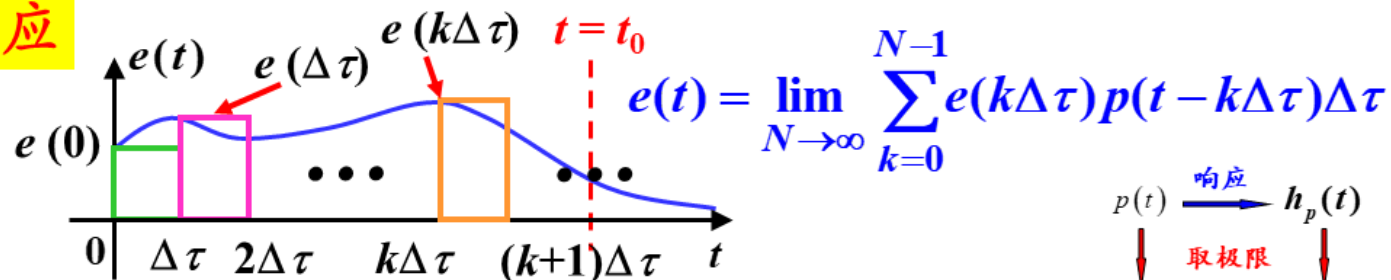
建立这个表达式和单位脉冲函数之间的关系

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{N-1} e(k\Delta\tau) \frac{1}{\Delta\tau} [\varepsilon(t - k\Delta\tau) - \varepsilon(t - (k+1)\Delta\tau)] \Delta\tau \\
 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{N-1} e(k\Delta\tau) p(t - k\Delta\tau) \Delta\tau \quad 0 < t < t_0
 \end{aligned}$$

单位脉冲函数的延时

$$\begin{array}{ccc}
 p(t) & \xrightarrow{\text{响应}} & h_p(t) \\
 \downarrow \text{取极限} & & \downarrow \\
 \delta(t) & \xrightarrow{\text{响应}} & h(t)
 \end{array}$$

处理响应



若单位脉冲函数 $p(t)$ 的响应为 $h_p(t)$

第1个矩形脉冲 $e(0)p(t)\Delta\tau \rightarrow e(0)h_p(t)\Delta\tau$

⋮

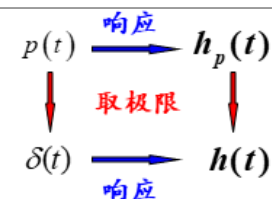
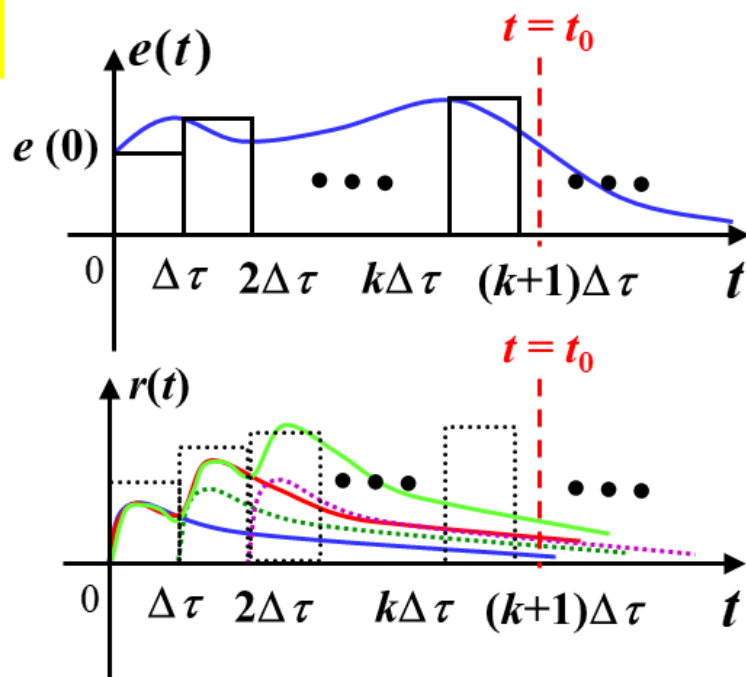
第 k 个矩形脉冲

$e(k\Delta\tau)p(t-k\Delta\tau)\Delta\tau \rightarrow e(k\Delta\tau)h_p(t-k\Delta\tau)\Delta\tau$

齐性
非时变性

所有的响应长得全一样，只
不过开始时间和幅值有差别

处理响应



$k\Delta\tau$: 脉冲作用时刻

t_0 : 观察响应时刻

假设在 t_0 时刻以前有 N 个脉冲的作用

t_0 时刻观察到的响应应为 $0 \sim t_0$ 时间内所有激励产生的在 t_0 时刻响应之和

响应

$$r(t_0) = \left(\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{N-1} e(k\Delta\tau) h_p(t - k\Delta\tau) \Delta\tau \right) \Big|_{t=t_0}$$

可加性

处理响应

响应

$$r(t_0) = \left(\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{N-1} e(k\Delta\tau) h_p(t - k\Delta\tau) \Delta\tau \right) \Big|_{t=t_0}$$

积分

单位脉冲响应

$p(t) \xrightarrow{\text{响应}} h_p(t)$
 $\downarrow \text{取极限}$
 $\delta(t) \xrightarrow{\text{响应}} h(t)$

$h(t-\tau)$
 单位冲激响应

当 $N \rightarrow \infty$ 时, $\Delta\tau \rightarrow d\tau$, $k\Delta\tau \rightarrow \tau$, $\Sigma \rightarrow \int$

$$r(t_0) = \left(\int_0^{t_0} e(\tau) h(t - \tau) d\tau \right) \Big|_{t=t_0}$$

t 参变量

τ 积分变量

由 t_0 的任意性, 得 $r(t) = \int_0^t e(\tau) h(t - \tau) d\tau = e(t) * h(t)$

在单位冲激响应 $h(t)$ 帮助下, 可求任意激励 $e(t)$ 作用下电路的零状态响应

3 卷积积分的定义和性质

卷积积分定义 设 $f_1(t)$, $f_2(t)$ $t < 0$ 均为零

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau$$

t 参变量

τ 积分变量

未来在信号与系统课程中, 会学习
 $f_1(t)$, $f_2(t)$ $t < 0$ 时有值情况下的卷积积分

电路中,
把 $t < 0$ 时激励的作用效果认为是初值, 而把初值被放到 ZIR 里
并且 $h(t)$ 本身在 $t < 0$ 时没有值。所以只讨论 $f_1(t)$, $f_2(t)$ $t < 0$ 均为零

性质1 $f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t)$

$$\begin{array}{l} \text{令 } \xi = t - \tau \\ \tau : 0 \quad t \\ \xi : t \quad 0 \end{array}$$

证明 $f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau$

$$= \int_t^0 f_1(t - \xi) f_2(\xi) (-d\xi)$$

$$= \int_0^t f_1(t - \xi) f_2(\xi) d\xi = f_2(t) * f_1(t)$$

性质2 $[f_1(t) * f_2(t)] * f_3(t) = f_1(t) * [f_2(t) * f_3(t)]$


性质3

$$f_1(t) * [f_2(t) + f_3(t)] = f_1(t) * f_2(t) + f_1(t) * f_3(t)$$

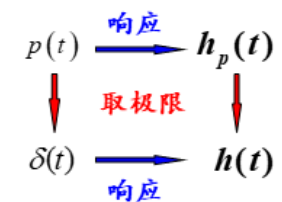
性质4 $f(t) * \delta(t) = \delta(t) * f(t) = \int_{0^-}^t \delta(\tau) f(t - \tau) d\tau = f(t)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t) dt = f(0)$$

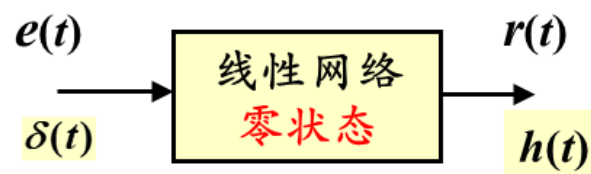
$$e(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{N-1} e(k\Delta\tau) p(t - k\Delta\tau) \Delta\tau$$

当 $N \rightarrow \infty$ 时, $\Delta\tau \rightarrow d\tau, k\Delta\tau \rightarrow \tau, \Sigma \rightarrow \int$ 

$$e(t) = \int_0^t e(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = e(t) * \delta(t)$$



4 用卷积积分求零状态响应



$$r(t) = e(t) * h(t)$$

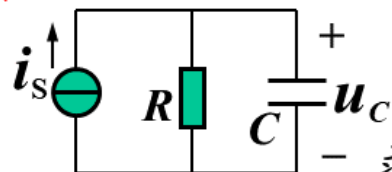
$$\text{即 } r(t) = \int_0^t e(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

单位冲激响应+卷积积分

可求任意激励作用下电路的零状态响应

例

已知： $R=0.5\ \Omega$, $C=1\ \text{F}$, $u_C(0^-)=0$

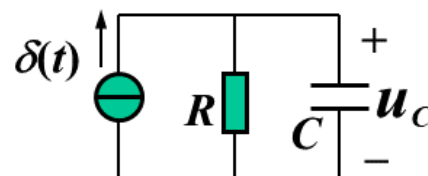


$$i_s = 2e^{-t}\varepsilon(t)\ \text{A}$$

求： 电容电压 $u_C(t)$ 。

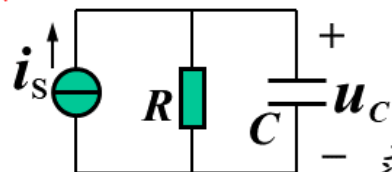
解 先求该电路的单位冲激响应 $h(t)$

设 $i_s = \delta(t)\ \text{A}$



例

已知： $R=0.5\ \Omega$, $C=1\ \text{F}$, $u_C(0^-)=0$

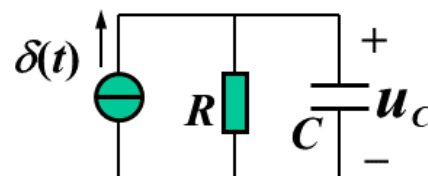


$$i_s = 2e^{-t}\varepsilon(t)\text{A}$$

求： 电容电压 $u_C(t)$ 。

解 先求该电路的单位冲激响应 $h(t)$

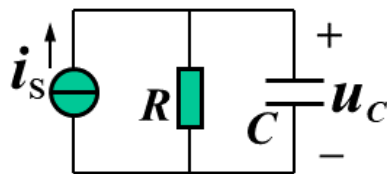
$$\text{设 } i_s = \delta(t)\text{ A}$$



$$u_C(0^+) = \frac{1}{C}\text{V} = 1\text{V} \quad u_C(\infty) = 0$$

$$\tau = RC = 0.5 \times 1 = 0.5\text{ s}$$

$$\therefore h(t) = e^{-2t}\varepsilon(t)\text{V}$$



$i_s = \delta(t)$ A 作用下的单位冲激响应为

$$h(t) = e^{-2t} \varepsilon(t) \text{ V}$$

用卷积积分计算 $i_s = 2e^{-t} \varepsilon(t)$ A 作用下的响应 $u_c(t)$

$$\begin{aligned}
 u_c(t) &= i_s(t) * h(t) = \int_0^t i_s(\tau) h(t-\tau) d\tau &= h(t) * i_s(t) = \int_0^t h(\tau) i_s(t-\tau) d\tau \\
 &= \int_0^t 2e^{-\tau} \times e^{-2(t-\tau)} d\tau &= \int_0^t e^{-2\tau} \times 2e^{-(t-\tau)} d\tau \\
 &= 2e^{-2t} \int_0^t e^{\tau} d\tau = 2e^{-2t} (e^t - 1) &= 2e^{-t} \int_0^t e^{-\tau} d\tau \\
 &= 2e^{-t} - 2e^{-2t} \text{ V} \quad t > 0 &= 2e^{-t} (1 - e^{-t})
 \end{aligned}$$

5 卷积积分的图解法

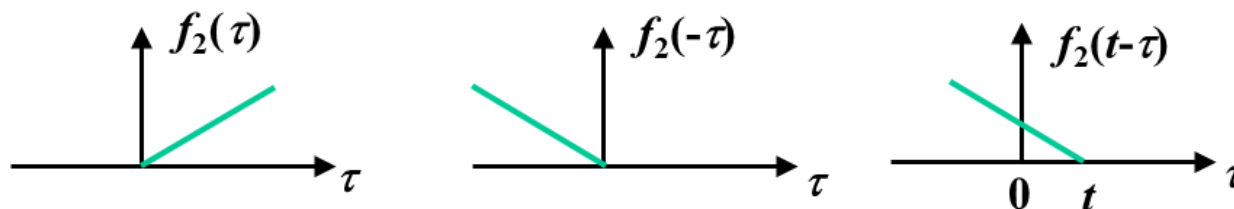
例 已知 $f_1(t) = 2[\varepsilon(t) - \varepsilon(t-1)]$ $f_2(t) = e^{-t}\varepsilon(t)$

求 $f_1(t) * f_2(t)$ 和刚才不一样之处在哪?

解 $f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t \underbrace{f_1(\tau)f_2(t-\tau)}_{\text{被积函数}} d\tau$ —— 积分变量 参变量(可视为常量)

图解说明 $f_2(t-\tau)$

困难在于: $f_1(\tau)$ 和 $f_2(t-\tau)$ 对不同 τ 的表达式是什么?



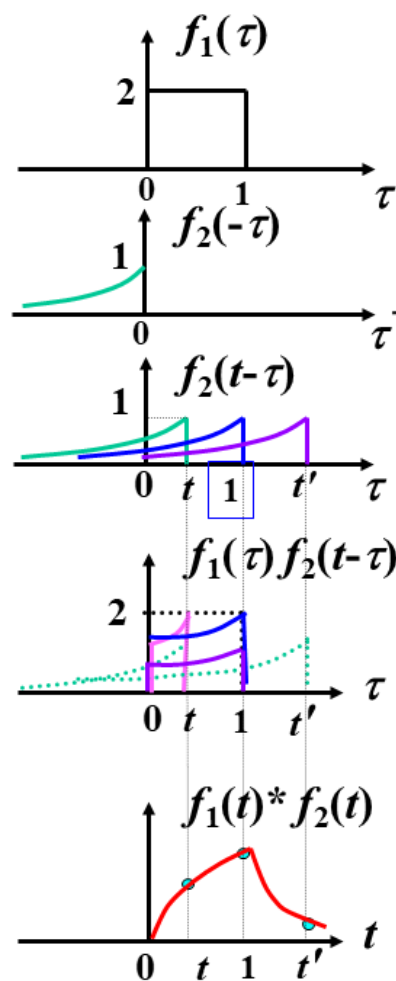
卷 f_2

卷

移

乘

积



$$f_1(t) = 2[\varepsilon(t) - \varepsilon(t-1)]$$

$$f_2(t) = e^{-t} \varepsilon(t)$$

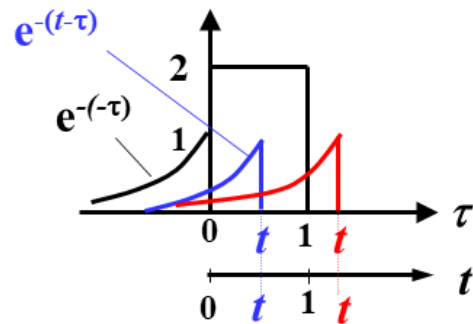
$$f_1(t) * f_2(t)$$

$$= \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$$

卷积的几何解释：

$f_2(t)$ 反褶的图形 $f_2(-\tau)$ 在移动过程中 $f_2(t-\tau)$ 不断与 $f_1(\tau)$ 相乘得到的非零图形的面积。

$$f_1(t) * f_2(t) = 2[\varepsilon(t) - \varepsilon(t-1)] * e^{-t}$$



$$t < 0 \quad f(t) = 0$$

$$0 \leq t \leq 1 \quad f(t) = \int_0^t 2e^{-(t-\tau)} d\tau = 2 - 2e^{-t}$$

$$t \geq 1 \quad f(t) = \int_0^1 2e^{-(t-\tau)} d\tau = 2e^{-(t-1)} - 2e^{-t}$$

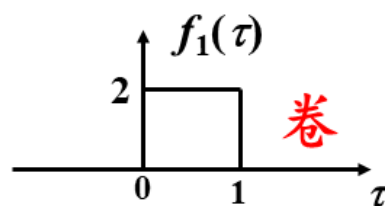
卷 f_1

$$f_1(t) = 2[\varepsilon(t) - \varepsilon(t-1)]$$

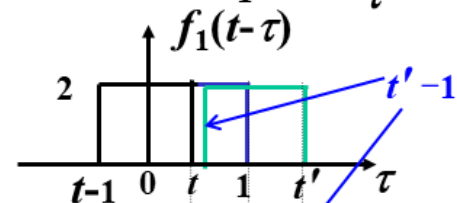
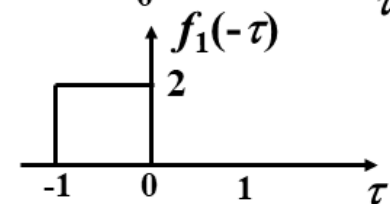
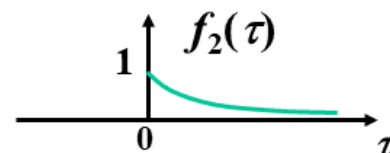
$$f_2(t) = e^{-t} \varepsilon(t)$$

$$f_2(t) * f_1(t)$$

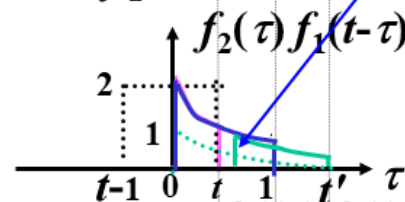
$$= \int_0^t f_2(\tau) f_1(t-\tau) d\tau$$



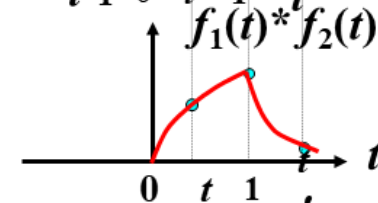
卷



乘



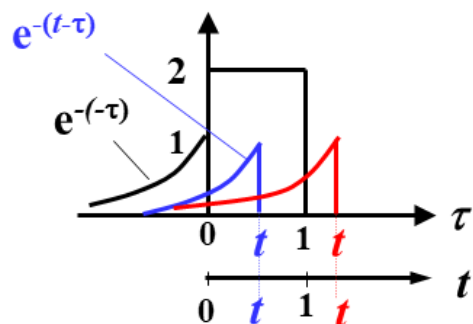
积



由图解过程确定时段划分(t 轴)和积分上下限(τ 轴, 考虑 t 坐标)

卷 f_2

$$f_1(t) * f_2(t) = 2[\varepsilon(t) - \varepsilon(t-1)] * e^{-t}$$

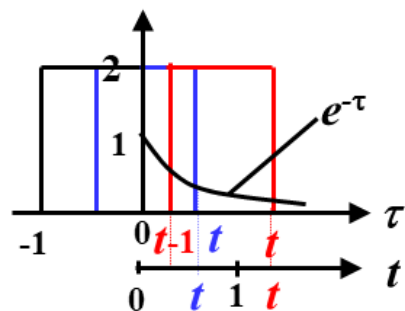


$$t < 0 \quad f(t) = 0$$

$$0 \leq t \leq 1 \quad f(t) = \int_0^t 2e^{-(t-\tau)} d\tau = 2 - 2e^{-t}$$

$$t \geq 1 \quad f(t) = \int_0^1 2e^{-(t-\tau)} d\tau = 2e^{-(t-1)} - 2e^{-t}$$

卷 f_1



$$t < 0 \quad f(t) = 0$$

$$0 \leq t \leq 1 \quad f(t) = \int_0^t 2e^{-\tau} d\tau = 2 - 2e^{-t}$$

$$t \geq 1 \quad f(t) = \int_{t-1}^t 2e^{-\tau} d\tau = 2e^{-(t-1)} - 2e^{-t}$$

单选题 1分

$f(1)=$ _____.

- ☐ A 0
- ☒ B 1.26
- ☐ C 2

$$t < 0 \quad f(t) = 0$$

$$0 \leq t \leq 1 \quad f(t) = \int_0^t 2e^{-(t-\tau)} d\tau = 2 - 2e^{-t}$$

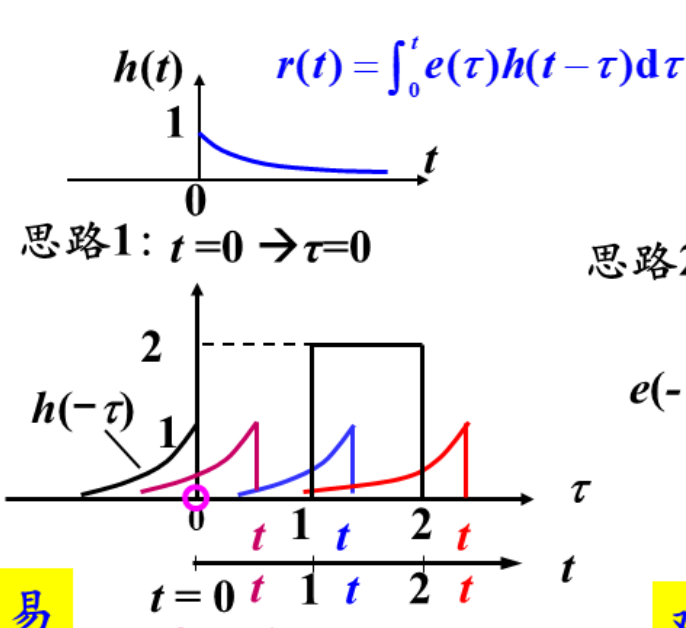
$$t \geq 1 \quad f(t) = \int_0^1 2e^{-(t-\tau)} d\tau = 2e^{-(t-1)} - 2e^{-t}$$

$$e^{-1} = 0.368$$

关键：t=0时f(t-τ)在τ轴的什么位置？

这个怎么办？

从而确定t与τ的关系。



易

难

$$\begin{aligned}
 &0 < t < 1 & 1 < t < 2 & t > 2 \\
 &\int_1^t 2e^{-(t-\tau)} d\tau & \int_1^2 2e^{-(t-\tau)} d\tau & \int_0^{t-1} 2e^{-\tau} d\tau & \int_{t-2}^{t-1} 2e^{-\tau} d\tau \\
 &= 2(1 - e^{1-t}) & = 9.34e^{-t} & = 2(1 - e^{1-t}) & = 9.34e^{-t}
 \end{aligned}$$

(任意阶电路在)任意激励下 响应的推荐求法

- 零输入响应 (ZIR)
 - L10-L12
- 单位冲激响应
 - L12/L13
- 零状态响应 (卷积)
 - L13
- 全响应 ($FR=ZIR+ZSR$)
 - 在R5有更多强调