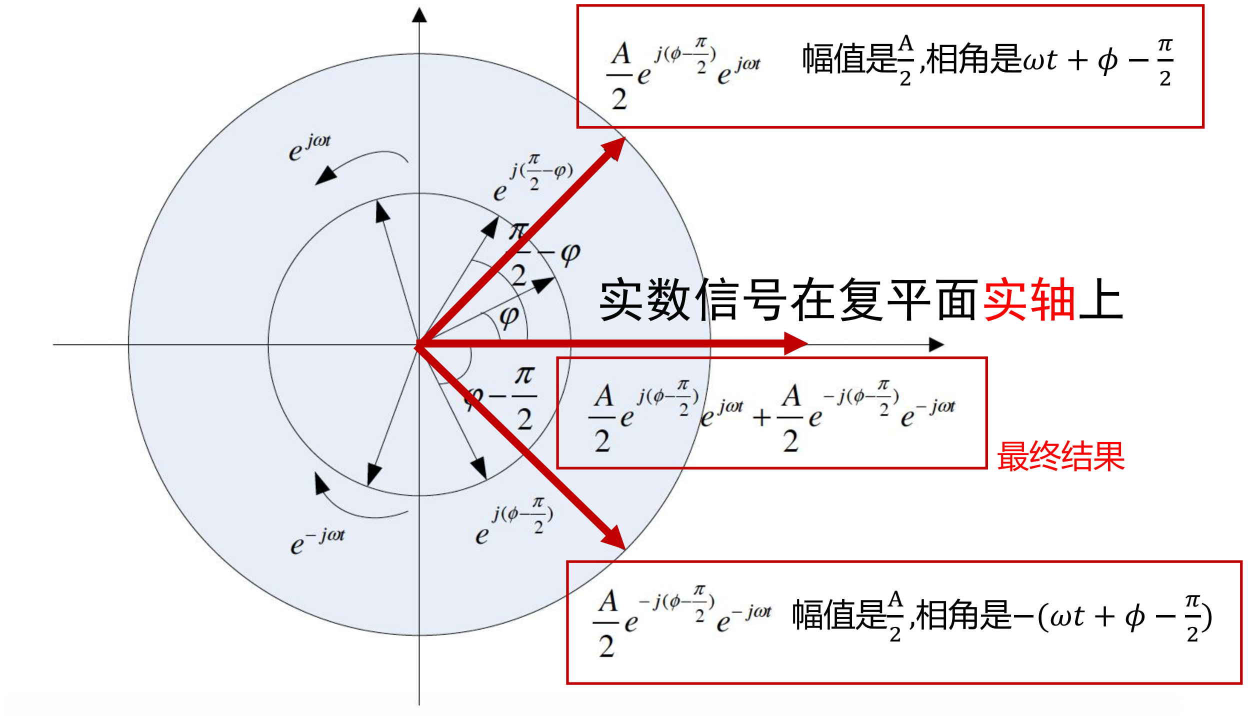
清華大學 Tsinghua University

信号与系统课后习题解答

1.9 按照欧拉公式，把正弦信号$A\sin(\omega t+\phi)$分解为两个复指数信号的叠加，在复平面上画出他们的关系

解答：关注3个红色箭头，分别是分解的复指数信号和最终结果

$$A\sin(\omega t+\phi)=A\frac{e^{j(\omega t+\phi)}-e^{-j(\omega t+\phi)}}{2j}=\frac{A}{2}e^{j(\phi-\frac{\pi}{2})}e^{j\omega t}+\frac{A}{2}e^{-j(\phi-\frac{\pi}{2})}e^{-j\omega t}$$



注：

（1）正弦信号是实信号，将正弦信号写成复指数信号的叠加，叠加后信号是**实数**，部分同学和相量产生了混淆。

（2）复指数形式的信号（幅值+相角形式），复数形式的幅值部分应为**正实数**，若存在虚数则应通过$e^{j\frac{\pi}{2}}=j$，$e^{-j\frac{\pi}{2}}=-j$消除虚数部分。

举例而言：

$$\frac{A}{j}e^{j\theta}\text{相角是}\boldsymbol{\theta}-\frac{\pi}{2}$$

1.11（4） $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)u(t-2t_0)dt$

解答：根据冲激函数的抽样特性

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)f(t)dt=f(t_0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)u(t-2t_0)dt=u(t_0-2t_0)=u(-t_0)=\begin{cases}\mathbf{1} & \boldsymbol{t_0\le 0}\\ 0 & t_0>0\end{cases}$$

错误答案：

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)u(t-2t_0)dt=0$$

注：

在未注明t_0的正负性质之前，不要想当然的认为t_0一定为正数

解答： $(1)\frac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t}+3r(t)=2\frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t}$

其次特征方程：$\lambda+3=0$

齐次解： $\lambda=-3$

$$n=1=m$$

可以得知通解形式为：

$$h(t)=A\delta(t)+Be^{-3t}u(t)$$

令$r(t)=h(t)$，$e(t)=\delta(t)$代入方程可得：

$A\delta'(t)-3Be^{-3t}u(t)+Be^{-3t}\delta(t)+3A\delta(t)+3Be^{-3t}u(t)$

$=A\delta'(t)+(B+3A)\delta(t)=2\delta'(t)$

$$\begin{cases}A=2\\3A+B=0\end{cases}\rightarrow\begin{cases}A=2\\B=-6\end{cases}$$

$\therefore h(t)=2\delta(t)-6e^{-3t}u(t)$

注1：如何判断单位冲激响应h(t)中含有的奇异项类型和种类

(1) 当 $n>m$ 时，$h(t)$不能有 $\delta(t)$及其各阶导数，此时解的形式为

$$h(t)=(\text{齐次解形式})u(t). \tag{2.36}$$

(2) 当 $n=m$ 时，$h(t)$必须有 $\delta(t)$，但不能有其各阶导数，此时解的形式为

$$h(t)=A\delta(t)+(\text{齐次解形式})u(t). \tag{2.37}$$

(3) 当 $n<m$ 时，$h(t)$必须有 $\delta^{(m-n)}(t)$，还可能包含低于此阶数的冲激函数导数，此时解的形式为

$$h(t)=A_{m-n}\delta^{(m-n)}(t)+\cdots+A_1\delta'(t)+A_0\delta(t)+(\text{齐次解形式})u(t). \tag{2.38}$$

在以上 $h(t)$的解的形式中，"齐次解形式"的系数是待定的，$\delta(t)$及其各阶导数的系数也是待定的．把 $h(t)$的解的形式代入微分方程(2.35)，求方程两边系数平衡，即可确定所有待定系数，求得系统单位冲激响应 $h(t)$.

注2：

部分同学理解错了单位冲激响应，求成了0-到0+的初始状态跳变

单位冲激响应的求解就是激励是单位冲激信号的线性时不变微分方程求解，结果是关于t的函数，可以使用求解突变状态+正常响应的2步法求解、也可以是直接确定响应函数形式待定系数求解。

请同学们务必熟练。

解答： $(2)\ \frac{d^2r(t)}{dt^2}+\frac{dr(t)}{dt}+r(t)=\frac{de(t)}{dt}+e(t)$

其次方程：$\lambda^2+\lambda+1=0$

其次解：$\lambda_{1,2}=\frac{-1\pm j\sqrt{3}}{2}$

$n=2>m=1$

激励形式：

$$h(t)=\left[Ae^{\left(-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)t}+Be^{\left(-\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)t}\right]u(t)$$

或：

$$h(t)=\left[e^{-\frac{1}{2}t}\left(A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)+B\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right)\right]u(t)$$

以三角函数形式为例，令$r(t)=h(t)$，$e(t)=\delta(t)$

$$r(t)=\left[e^{-\frac{1}{2}t}\left(A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)+B\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right)\right]u(t)=f(t)u(t)$$

$$r'(t)=f(t)\delta(t)+f'(t)u(t)=f(0)\delta(t)+f'(t)u(t)$$

$$r''(t)=f(0)\delta'(t)+f'(t)\delta(t)+f''(t)u(t)$$

$$r(t)=\left[e^{-\frac{1}{2}t}\left(A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)+B\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right)\right]u(t)=f(t)u(t)$$

$$r'(t)=f(t)\delta(t)+f'(t)u(t)=f(0)\delta(t)+f'(t)u(t)$$

$$r''(t)=f(0)\delta'^{(t)}+f'(0)\delta(t)+f''(t)u(t)$$

因此：

$$f(0)\delta'(t)=\delta'(t)$$

$$[f'(0)+f(0)]\delta(t)=\delta(t)$$

$$[f(t)+f'(t)+f''(t)]u(t)=u(t)\ (\text{通解}f(t)\text{必然满足为}0)$$

所以只需要考虑$f(0)$和$f'(0)$：

$$f(0)=A=1$$

$$f'(0)+f(0)=A+\left(-\frac{1}{2}A+\frac{\sqrt{3}}{2}B\right)=1$$

得到：$A=1, B=\frac{\sqrt{3}}{3}$

$$\therefore h(t)=e^{-\frac{1}{2}}\left(\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)+\frac{\sqrt{3}}{3}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right)$$

2.5 已知系统$h(t) = e^{-t}u(t)$，激励$e(t) = u(t)$，求系统的零状态响应$r(t)$

清华大学 Tsinghua University

解答：根据零状态响应和单位冲激响应的关系

$$r(t)=e(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)u(\tau)u(t-\tau)d\tau$$

因为：$u(\tau)u(t-\tau) = 1$，$0 \le \tau \le t$

所以在$t < 0$的时候

$$r(t) = 0$$

当$t > 0$的时候：

$$r(t)=e(t)*h(t)=\int_{0}^{t}e^{-\tau}d\tau=(1-e^{-t})$$

在整个时间段上为：

$$r(t)=e(t)*h(t)=(1-e^{-t})u(t)$$

注：

$$u(\tau) = 1，\tau \ge 0$$

$$u(t-\tau) = 1，\tau \le t$$

$$u(\tau)u(t-\tau) = 1，0 \le \tau \le t$$

部分同学忘记$t < 0$的情况下$u(\tau)u(t-\tau)$始终为0, 导致最后的结果漏了$u(t)$

函数有$u(t-t_0)$的情况下，**一定注意函数不为0的范围**

2.7 已知线性时不变系统对激励e(t)零状态响应为 $r_{zs}(t)=\int_{-\infty}^{t}e^{-(t-\tau)}e(\tau-2)d\tau$ ，求系统的单位冲激响应$h(t)$

解答：单位冲激响应h(t)的激励为单位冲激信号： $\delta(t)$

代入系统：

$$r(t)=\int_{-\infty}^{t}e^{-(t-\tau)}\delta(\tau-2)d\tau$$

由筛分特性可以直接得到的结果，但是要注意到积分范围是$[-\infty,t]$：

所以当$t\le 2$的时候，$r(t)=0$

当$t\ge 2$时候， $r(t)=e^{-(t-2)}$

所以最后单位冲激响应为：

$$r(t)=e(t)*h(t)=e^{-(t-2)}u(t-2)$$

注：

$$u(\tau)=1，\tau\ge 0$$

$$u(t-\tau)=1，\tau\le t$$

$$u(\tau)u(t-\tau)=1，0\le\tau\le t$$

部分同学忘记$t<0$的情况下$u(\tau)u(t-\tau)$始终为0, 导致最后的结果漏了$u(t)$

函数有$u(t-t_0)$的情况下，**一定注意函数不为0的范围**

3.7 已知 $e_d(n)=0.8^n[u_d(n-1)-u_d(n-4)]$ $h_d(n)=0.5^n[u_d(n)-u_d(n-6)]$ ，用图表法求他们的卷积和

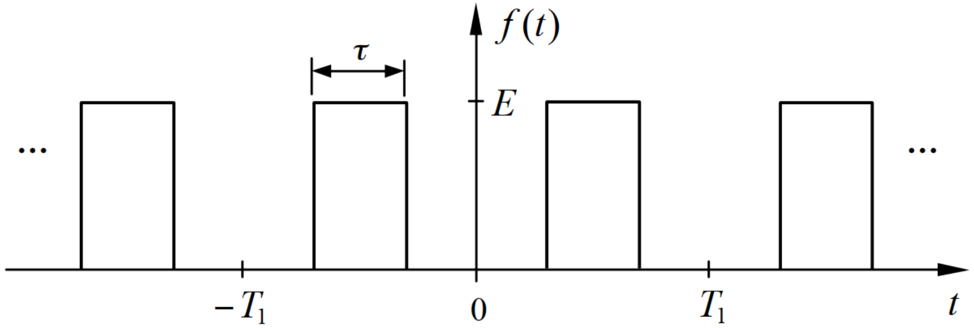
解答：

序号	n=1	n=2	n=3	n=4	n=5	n=6	n=7	n=8	n=9
$e_d(1)\delta(n-1)$ 产生响应	$e_d(1)h_d(0)$ 0.8	$e_d(1)h_d(1)$ 0.4	$e_d(1)h_d(2)$ 0.2	$e_d(1)h_d(3)$ 0.1	$e_d(1)h_d(4)$ 0.05	$e_d(1)h_d(5)$ 0.025	0	0	0
$e_d(2)\delta(n-2)$ 产生响应	0	$e_d(2)h_d(0)$ 0.64	$e_d(2)h_d(1)$ 0.32	$e_d(2)h_d(2)$ 0.16	$e_d(2)h_d(3)$ 0.08	$e_d(2)h_d(4)$ 0.04	$e_d(2)h_d(5)$ 0.02	0	0
$e_d(3)\delta(n-3)$ 产生响应	0	0	$e_d(3)h_d(0)$ 0.512	$e_d(3)h_d(1)$ 0.256	$e_d(3)h_d(2)$ 0.128	$e_d(3)h_d(3)$ 0.064	$e_d(3)h_d(4)$ 0.032	$e_d(3)h_d(5)$ 0.016	0
$e_d(n)$ 产生的响应	0.8	1.04	1.032	0.516	0.258	0.129	0.052	0.016	0

注：

卷积和是一个函数f(n)，不是一个数，不应该把他们相加

4－1 求题图 **4－1** 所示周期方波信号的傅立叶级数，画出其幅值谱和相位谱。当脉冲宽度τ 趋于信号周期T_1时，分析频谱的变化。



此周期信号在一个周期内（$0<t<T_1$）的表达式为 $f(t)=E[u(t-(\frac{T_1}{2}-\frac{\tau}{2}))-u(t-(\frac{T_1}{2}+\frac{\tau}{2}))]$

把周期矩形信号展开成三角形式的傅里叶级数

$$f(t)=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}[a_k\cos(k\omega t)+b_k\sin(k\omega t)]$$

其中直流分量 $a_0=\frac{1}{T_1}\int_0^{T_1}f(t)dt=\frac{1}{T_1}\int_{\frac{T_1}{2}-\frac{\tau}{2}}^{\frac{T_1}{2}+\frac{\tau}{2}}Edt=\frac{E\tau}{T_1}$

余弦分量的幅度为

$$a_k=\frac{1}{T_1}\int_0^{T_1}f(t)\cos(k\omega t)dt=\frac{2}{T_1}\int_{\frac{T_1}{2}-\frac{\tau}{2}}^{\frac{T_1}{2}+\frac{\tau}{2}}E\cos(k\omega t)dt=\frac{2E}{T_1}\frac{\sin(k\pi+\frac{k\omega\tau}{2})-\sin(k\pi-\frac{k\omega\tau}{2})}{k\omega}$$

$$=\frac{2E}{T_1}\frac{2\sin(\frac{k\omega\tau}{2})(-1)^k}{k\omega}=\frac{2E\tau}{T_1}\frac{\sin(\frac{k\omega\tau}{2})(-1)^k}{k\omega\tau/2}=\frac{2E\tau}{T_1}(-1)^k Sa(\frac{k\omega\tau}{2})$$

正弦分量的幅度为

$$b_k=\frac{1}{T_1}\int_0^{T_1}f(t)\sin(k\omega t)dt=\frac{1}{T_1}\int_{\frac{T_1}{2}-\frac{\tau}{2}}^{\frac{T_1}{2}+\frac{\tau}{2}}E\sin(k\omega t)dt=\frac{E}{T_1}\frac{\cos(k\pi+\frac{k\omega\tau}{2})-\cos(k\pi-\frac{k\omega\tau}{2})}{k\omega}=0$$

其实根据 $f(t)$ 的图像，其为偶函数，所以他就没有正弦分量。必然 $b_k=0$ 。所以三角形式的傅里叶级数为

$$f(t)=\boxed{\frac{E\tau}{T_1}}+\sum_{k=1}^{\infty}[\boxed{\frac{2E}{T_1}}\frac{2\sin(\frac{k\omega\tau}{2})(-1)^k}{k\omega}\cos(k\omega t)]$$

三角函数形式的傅里叶级数$k=0$和$k\geq 1$的系数有倍数差2

所以幅值谱为 $|F_k(\omega)|=\left|\frac{2E\tau}{T_1}(-1)^k Sa(\frac{k\pi\tau}{T_1})\right|$

相位谱为：$F(\omega)$ 正的时候相位为 0，$F(\omega)$ 负的时候，相位为 $\pm\pi$ 。

当脉冲宽度 τ 趋于信号周期 T_1 时，幅度谱越窄，直流分量越来越大，基波和谐波的幅值趋近于 **0**，若 τ 等于信号周期 T_1 时，成为直流，所以幅值谱就只在 $\omega=0$ 处有值为 **E**。

若将 $f(t)$ 展开成指数形式的傅里叶级数，

$$F_k=\frac{1}{T_1}\int_0^{T_1}f(t)e^{-jk\omega t}dt=\frac{1}{T_1}\int_{\frac{T_1}{2}-\frac{\tau}{2}}^{\frac{T_1}{2}+\frac{\tau}{2}}Ee^{-jk\omega t}dt=\frac{E}{T_1}e^{-jk\pi}\frac{e^{-j\frac{k\omega\tau}{2}}-e^{j\frac{k\omega\tau}{2}}}{-jk\omega}=\frac{2E}{T_1k\omega}e^{-jk\pi}\frac{e^{j\frac{k\omega\tau}{2}}-e^{-j\frac{k\omega\tau}{2}}}{2j}$$

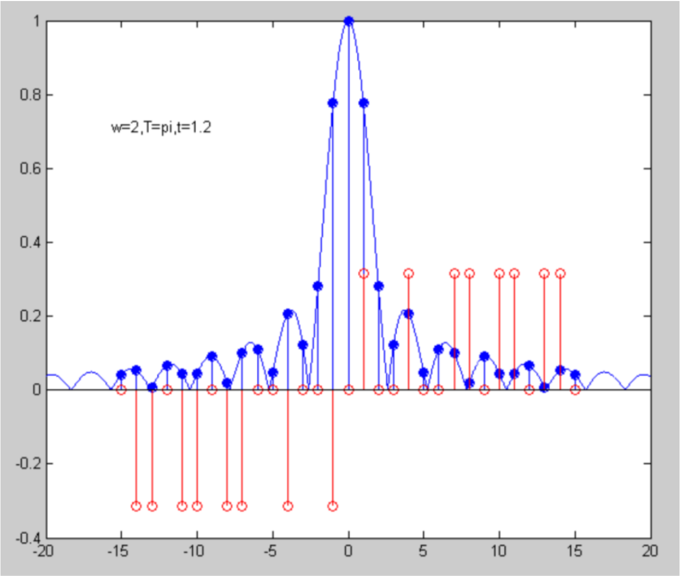
$$=\frac{2E}{T_1k\omega}e^{-jk\pi}\sin(\frac{k\omega\tau}{2})=\frac{E\tau}{T_1}e^{-jk\pi}\frac{\sin(\frac{k\omega\tau}{2})}{k\omega\tau/2}=\boxed{\frac{E\tau}{T_1}}e^{-jk\pi}Sa(\frac{k\omega\tau}{2})=\frac{E\tau}{T_1}e^{-jk\pi}Sa(\frac{k\pi\tau}{T_1})$$

注：

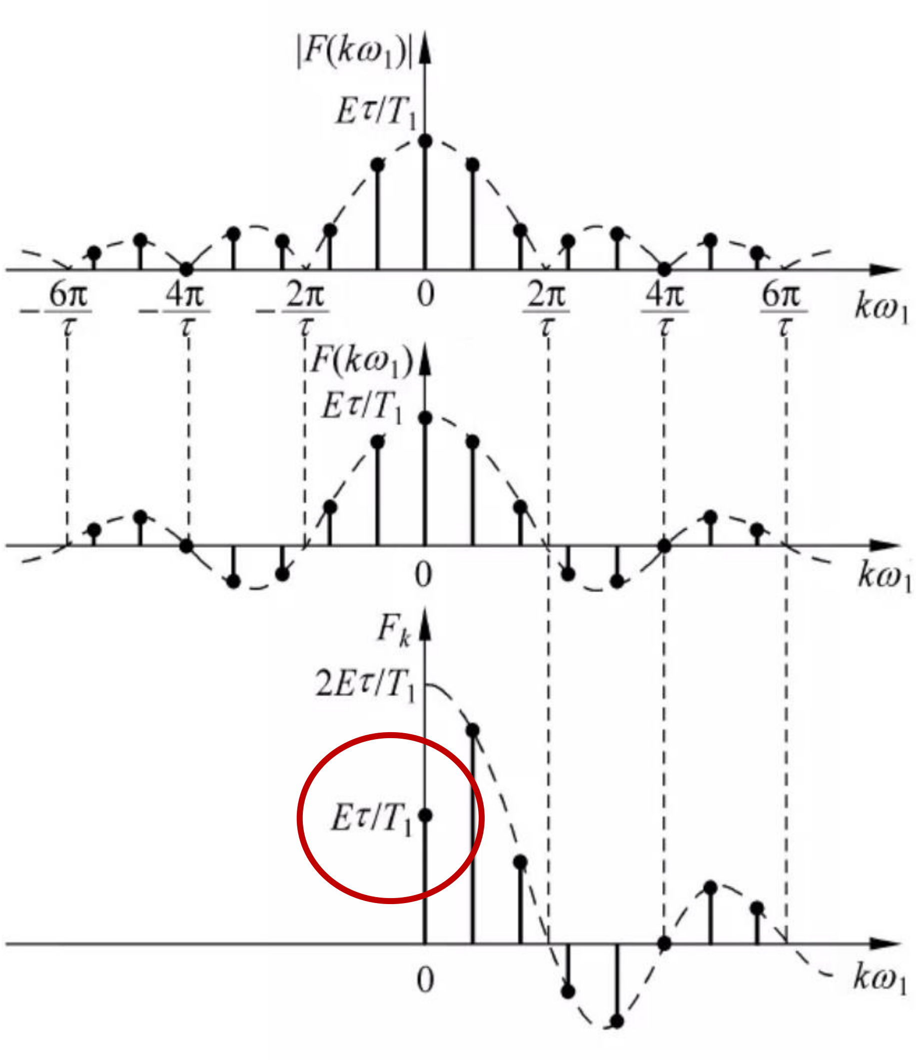
（1）三角函数形式的傅里叶级数$k=0$和$k\geq 1$的系数有倍数差2

（2）三角函数形式的傅里叶级数和复指数形式傅里叶级数$k\geq 1$的系数有倍数差2

复指数函数形式频谱



三角函数形式频谱



注：

（1）三角函数形式的傅里叶级数 $k=0$ 和 $k\geq 1$ 的系数有倍数差2

（2）三角函数形式的傅里叶级数和复指数形式傅里叶级数 $k\geq 1$ 的系数有倍数差2

4—3 $f(t)$ 为周期信号，周期为 T_1，已知 $f(t)$ 在四分之一周期区间 $(0,T_1/4)$ 的波形如题图 **4—2** 所示，其他各四分之一周期的波形是已知四分之一周期波形的重复，但可能有水平和垂直翻转。画出 $f(t)$ 一个完整周期区间 $(-T_1/2, T_2/2)$ 的波形，使其满足以下条件

（**1**）$f(t)$ 是偶函数，只含偶次谐波（此题中的偶次谐波和奇次谐波均相对于 T_1 为周期的基波而言）；

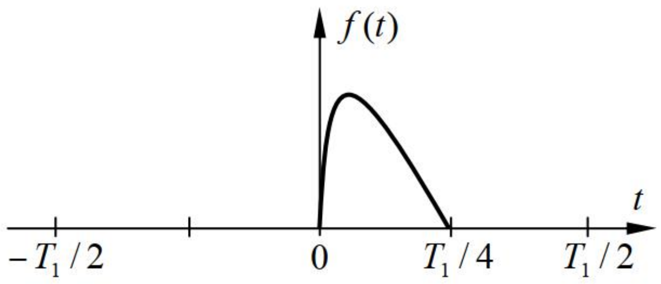
（**2**）$f(t)$ 是偶函数，只含奇次谐波；

（**3**）$f(t)$ 是偶函数，含有偶次和奇次谐波；

（**4**）$f(t)$ 是奇函数，只含偶次谐波；

（**5**）$f(t)$ 是奇函数，只含奇次谐波；

（**6**）$f(t)$ 是奇函数，含有偶次和奇次谐波。



题图 **4—2**

1.奇数次谐波的傅里叶级数(1,3,5,7,…次谐波公式):

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^{T/2}\left(f\left(t+\frac{T}{2}\right) - f(t)\right)\sin(k\omega t)\,dt$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^{T/2}\left(f\left(t+\frac{T}{2}\right) - f(t)\right)\cos(k\omega t)\,dt$$

系数为0(偶谐函数)要求： $f\left(t+\frac{T}{2}\right) - f(t) = \mathrm{C}$

2.偶数次谐波的傅里叶级数(2,4,6,…次谐波公式）：

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^{T/2}\left(f\left(t+\frac{T}{2}\right) + f(t)\right)\sin(k\omega t)\,dt$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^{T/2}\left(f\left(t+\frac{T}{2}\right) + f(t)\right)\cos(k\omega t)\,dt$$

系数为0 (奇谐函数)要求： $f\left(t+\frac{T}{2}\right) + f(t) = \mathrm{C}$

奇数次三角函数特征:

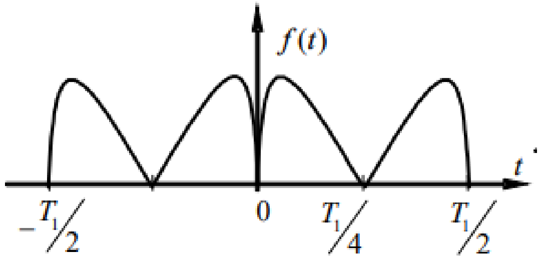
$$\sin\left(k\omega\left(t+\frac{T}{2}\right)\right) = -\sin\left(k\omega\left(t+\frac{T}{2}\right)\right)$$

偶数次三角函数特征:

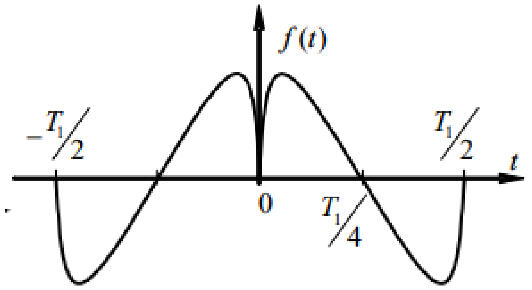
$$\sin\left(k\omega\left(t+\frac{T}{2}\right)\right) = \sin\left(k\omega\left(t+\frac{T}{2}\right)\right)$$

函数类型	函数特征	频率分量
奇函数	$f(t) = -f(-t)$	正弦分量
偶函数	$f(t) = f(-t)$	余弦和直流分量
奇谐函数	$f(t) + f\left(t+\frac{T}{2}\right) = C$	奇次谐波
偶谐函数	$f(t) - f\left(t+\frac{T}{2}\right) = C$	偶次谐波

（1）是偶函数，只含偶次谐波

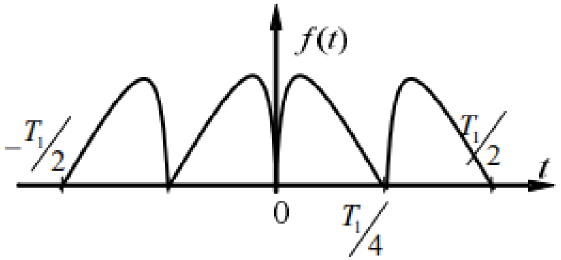


（2）是偶函数，又是奇谐函数

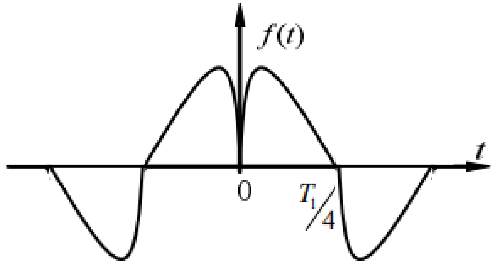


（3）是偶函数，含有偶次和奇次谐波。

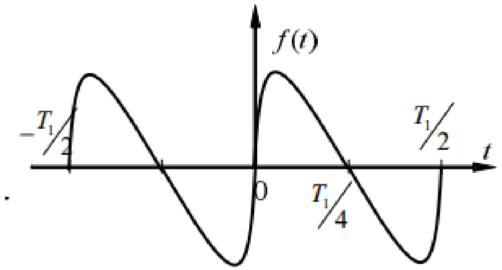
情况(1)



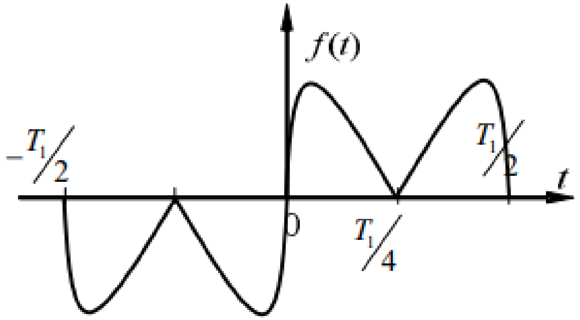
情况(2)



（4）是奇函数，只含偶次谐波；

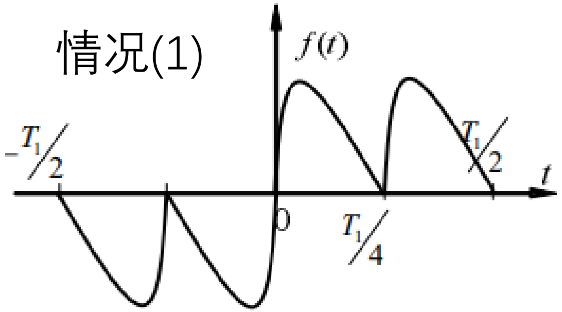


（5）是奇函数，只含奇次谐波；

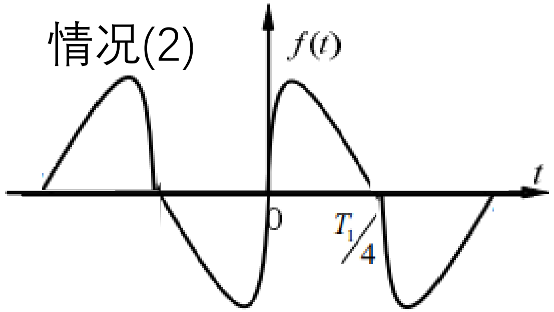


（6）是奇函数，含有偶次和奇次谐波。

情况(1)



情况(2)



5－6　已知周期方波信号 $g_p(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}[u(t+1-4k)-u(t-1-4k)]$ 和余弦信号 $q_p(t)=\cos 5\pi t$，试画出信号 $f_p(t)=g_p(t)q_p(t)$ 的频谱。

清華大學 Tsinghua University

解：首先求解周期方波信号和余弦信号的傅里叶变换

$$g_p(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(u(t-1-4k)-u(t+1-4k))$$

周期延拓就是和周期脉冲做卷积

$$\boxed{g_p(t)=g_f(t)*S(t)}$$

$$g_f(t)=u(t-1)-u(t+1),\qquad S(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-4k)$$

$F\left(g_f(t)\right)=2Sa(\omega)$—可以套公式，也可以直接算

$$F\left(S(t)\right)=\omega_1\sum_{-\infty}^{\infty}\delta(\omega-k\omega_1)=\frac{\pi}{2}\sum_{-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega-\frac{k\pi}{2}\right)$$

因此：

$$F\left(g_p(t)\right)=F\left(g_f(t)\right)F\left(S(t)\right)=\pi\sum_{-\infty}^{\infty}Sa(\omega)\delta\left(\omega-\frac{k\pi}{2}\right)=\pi\sum_{-\infty}^{\infty}Sa\left(\frac{k\pi}{2}\right)\delta\left(\omega-\frac{k\pi}{2}\right)$$

三角信号的傅里叶变换为：

$$F\left(q_p(t)\right)=\pi[\delta(\omega-5\pi)+\delta(\omega+5\pi)]$$

根据频域卷积特性，所以 $f_p(t)=g_p(t)q_p(t)$ 的频谱为：

$$F\left(f_p(t)\right)=\frac{1}{2\pi}F\left(q_p(t)\right)*F\left(g_p(t)\right)$$

$$=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}Sa\left(\frac{k\pi}{2}\right)[\delta\left(\omega-\frac{k\pi}{2}-5\pi\right)+\delta\left(\omega-\frac{k\pi}{2}+5\pi\right)]$$

注：

部分同学在计算周期方波信号信号的级数出现问题，主要是周期冲激函数的傅里叶变换计算不下去。

$$S(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-4k)$$

部分同学使用时移性质推导得到频谱是 $\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{4k\omega j}$

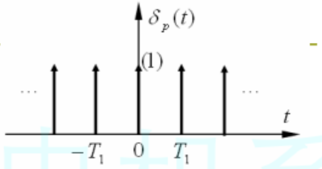
但是得到余弦函数相加后推导不下去；

建议还是按照课件基于级数和傅里叶变换的关系（或者直接套结果）：

例1　求下图所示周期冲激信号 $\delta_p(t)=\sum_{i=-\infty}^{\infty}\delta(t-iT_1)$ 的傅立叶变换

解：周期冲激信号的傅立叶级数为

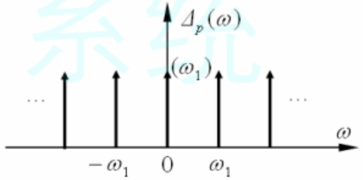
$$\Lambda_{gp}(k\omega_1)=\frac{1}{T_1}\int_{-T_1/2}^{T_1/2}\delta_p(t)e^{-jk\omega_1 t}dt=\frac{1}{T_1}$$



根据周期信号傅立叶变换和傅立叶级数的关系，周期冲激序列的傅立叶变换为

$$\Lambda_p(\omega)=2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\Lambda_{gp}(k\omega_1)\delta(\omega-k\omega_1)$$

$$=\omega_1\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-k\omega_1)$$

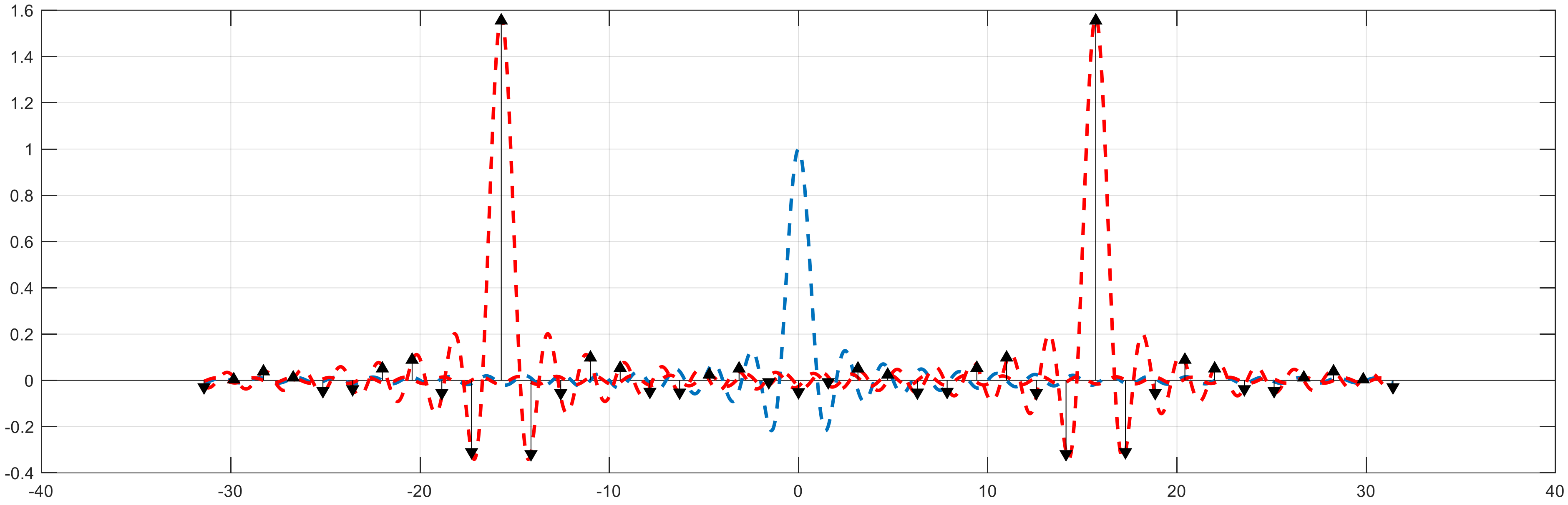


5－6　已知周期方波信号 $g_p(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}[u(t+1-4k)-u(t-1-4k)]$ 和余弦信号 $q_p(t)=\cos 5\pi t$，试画出信号 $f_p(t)=g_p(t)q_p(t)$ 的频谱。

解：相应的频谱图

和冲激信号$\delta(\omega-\omega_0)$做卷积就是对信号做频移，整体右移ω_0（这个性质非常常见且很好用，请各位同学多加留意）

Sa(w)函数衰减的是比较快的，在一个周期内就已经很小了，所以左右平移5pi的函数基本上是不互相干扰的叠加



注：

这类计算频谱的题，了解典型函数的傅里叶级数，傅里叶变换乘积、卷积等性质后能大大提高计算效率：

比如：方波信号的傅里叶变换$E\tau Sa(\frac{\omega\tau}{2})$，余弦函数$\cos(\omega_0 t)$的傅里叶变换为$\pi[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]$，周期冲激$\omega_1\sum_{-\infty}^{\infty}\delta(\omega-k\omega_1)$

第六周补充题　2: (2) $\mathrm{F}(\omega) = \mathrm{Im}\left(e^{-j3\omega}\frac{1}{j\omega+2}\right)$的傅立叶反变换

清華大學 Tsinghua University

解法1：当$f(t)$是实函数时，其奇分量的傅立叶变换等于$f(t)$傅立叶变换的虚数部分，所以：

$$j * \mathrm{Im}\big(F(\omega)\big) = F\left(\frac{f(t)-f(-t)}{2}\right)$$

因为

$$\mathrm{FT}[e^{-2t}u(t)] = \frac{1}{j\omega+2},$$

根据傅立叶变换的时移特性：

$$\mathrm{FT}\left[e^{-2(t-3)}u(t-3)\right] = e^{-j3\omega}\frac{1}{j\omega+2}$$

取函数的奇分量再除以j：

$$\mathrm{F}(\omega) = \frac{1}{2\mathrm{j}}[e^{-2t+6}u(t-3) - e^{2t+6}u(-t-3)]$$

解法2：因为$Im(z) = \frac{z-z^*}{2j}$

$$\mathrm{Im}\left(e^{-j3\omega}\frac{1}{j\omega+2}\right) = \frac{1}{2j}\left(e^{-j3\omega}\frac{1}{j\omega+2} - e^{j3\omega}\frac{1}{-j\omega+2}\right)$$

分别对各项分别求傅里叶变换得到相同结果

注1：

Im(z)是复数虚部的值，是一个实函数，部分同学漏掉了j

注2：

有一部分同学计算$\frac{1}{j\omega+2}$错误, 认为$\mathrm{FT}[\mathrm{sgn}(t)] = \frac{1}{j\omega}$,

所以根据“时移特性”推导得到

$$\cancel{f(t) = \mathrm{e}^{j*2jt}\,\mathrm{sgn}(t) = e^{-2t}\,\mathrm{sgn}(t)}$$

这个函数不满足迪利克雷条件

傅里叶变换频移性质尽量不要用于虚轴方向的移动

第六周补充题　3: (2) $F(\omega)=\frac{3}{j\omega+2}+\frac{4}{j\omega-2}$的傅立叶反变换

解：因为

$$F(\omega)=\frac{3}{j\omega+2}-\frac{4}{-j\omega+2}$$

右边指数信号　　　　左边指数信号

所以

$$f(t)=3e^{-2t}u(t)-4e^{2t}u(-t)$$

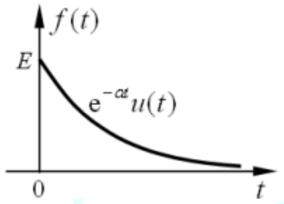
2. 单边指数信号

单边指数信号的波形如图所示，其表达式为

$$f(t)=Ee^{-\alpha t}u(t)\qquad \alpha>0$$

其中α为衰减因子。其傅立叶变换为

$$\boxed{F(\omega)=\int_0^{\infty}Ee^{-\alpha t}e^{-j\omega t}\mathrm{d}t=\frac{E}{\alpha+j\omega}}$$



注：

除了和上一道补充题相同的错误，

部分同学把左边指数信号当成右边指数信号

但是需要注意到

$$e^{2t}u(t)$$

不满足狄利克雷条件，没有傅里叶变换

清華大學
Tsinghua University

谢 谢 ！