

## 第7节 通过导体薄筒的磁扩散过程

作业：习题18

（低频时变磁场的屏蔽原理，视为磁准静态场即涡流问题）

对一个导体构成的环路，

1) 若外部磁场跳变，从零跳变到 $H_0$ ，则环内磁场 $H_{in}$ 不会跳变。因为若 $H_{in}$ 跳变则磁通跳变，感应电动势会无限大，这是不可能的。因此，环内磁场会有一个上升的过程，此过程好像是环外磁场向内部扩散，称为磁扩散过程。

若导体环包围的区域变为导体板也有此磁扩散过程。

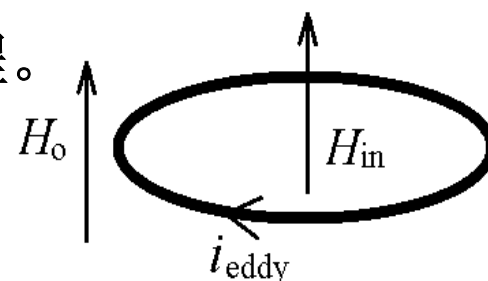
实际上，用扩散一词容易产生物理概念性错误。

因为这不是像电磁波那样场的传播与辐射，

而是导体的去磁作用或产生的涡流由小到大的过度过程。

2) 若 $H_0$ 是正弦函数，不跳变，则导体内也会产生电流起到去磁作用，使得 $H_{in}$ 小于 $H_0$ ，导体环起到磁屏蔽作用。

这就是导体涡流产生附加场，抵消原场的磁屏蔽现象。



为了能够解析求解，将导体环变为无限长的薄圆柱壳。

例：  $t=0$  时外部磁场从零跳变到  $H_0$ ，求  $t>0$ ，  $H_{in}$  和  $E_{in}$  及  $E_{out}$  的变化过程。

解： 磁场仅有  $k$  分量，处处相等。

对于这种场均匀分布问题，不需通过微分方程求解，只需用积分方程。

1) 如磁场  $H_{in}$  已知，可利用 **电磁感应定律** 求出感应电动势与感应电流。

2) 如感应电流已知，可用 **安培环路定律** 求出电流的磁场及总磁场。

现在是两者都未知，对这种耦合问题，要考虑 Maxwell 方程组：

$$\checkmark \oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$$

$$\checkmark \oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\checkmark \oiint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

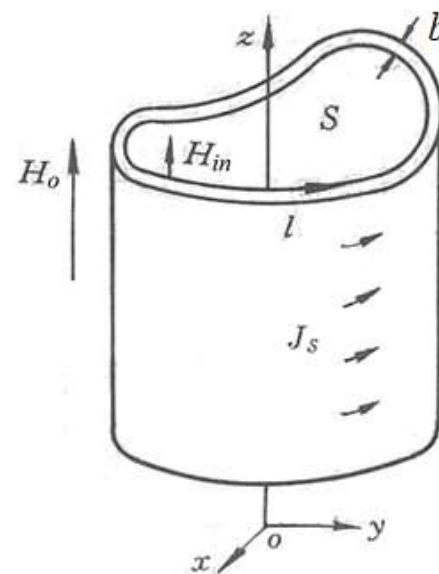
$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \rho dV = q$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

$$\checkmark \oiint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = - \iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \frac{\partial q}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = - \frac{\partial \rho}{\partial t}$$



## 利用两个环路定律

围绕导体壳做一矩形回路列写安培环路定律方程：

（设矩形纵向边长为1）

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \quad H_{in} - H_o = Jb \quad (1)$$

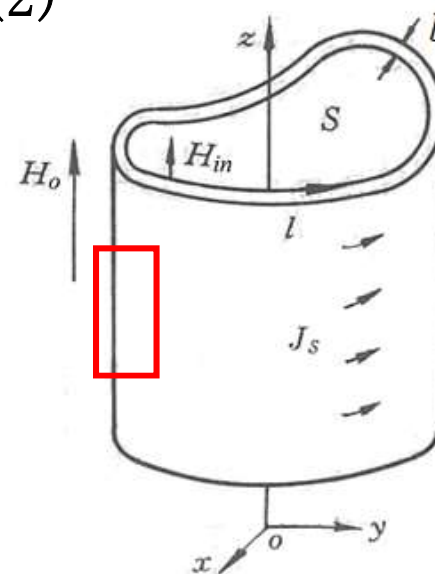
取传导电流线回路列出电磁感应定律方程（并认为各点 $J$ 和 $E$ 相等）：

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \mathbf{B}_{in} \cdot d\mathbf{S} \quad El = -\mu_0 \frac{\partial H_{in}}{\partial t} S \quad (2)$$

另外还已知导体的成分方程：  $J = \sigma E$  (3)

由方程(1)-(3)可以得到 $H_{in}$ 满足的方程，也可以得到 $J$ 或 $E$ 所满足的方程。现在以先求 $H_{in}$ 为例，有：

$$H_{in} - H_o = -\sigma\mu_0 \frac{bS}{l} \frac{\partial H_{in}}{\partial t}$$



$$H_{in} - H_o = -\sigma\mu_0 \frac{bS}{l} \frac{\partial H_{in}}{\partial t} \quad \sigma\mu_0 \frac{bS}{l} \frac{\partial H_{in}}{\partial t} + H_{in} = H_o$$

$$\tau_m \frac{\partial H_{in}}{\partial t} + H_{in} = H_o$$

此为磁场变化

上面微分方程的解为：  $H_{in}(t) = H_o(1 - e^{-t/\tau_m})$  过程的解答。

由式(1)与上式得导体中单位高度的电流（称为电流线密度）为：

$$J_s(t) = Jb = H_{in} - H_o(t) = -H_o e^{-t/\tau_m}$$

下面求筒内外电场强度  $E_{in}$  及  $E_{out}$  的变化过程

设无限长圆柱导体壳的半径为  $a$ 。先求内部距轴线  $r$  处的电场。  
利用上页方程(2)，即基于磁流的感应电场安培环路定律求解。

在圆柱坐标系下，已知  $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$ ， $\mathbf{E} = E\mathbf{e}_\alpha$ 。设圆柱壳的轴线为  $z$  轴。

利用 磁流安培环路定律  $\oint_l \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \mathbf{B}_{in} \cdot d\mathbf{S}$  得：

$$E_{\alpha\_in} = -\frac{1}{2\pi r} \frac{\partial B_{z\_in}}{\partial t} \pi r^2 = -\frac{1}{2} \frac{\partial B_{z\_in}}{\partial t} r \quad \text{另：} E_{\alpha\_out} = -\frac{a^2}{2} \frac{\partial B_{z\_in}}{\partial t} \frac{1}{r}$$

由上面得到的时域方程

$$\tau_m \frac{\partial H_{in}}{\partial t} + H_{in} = H_o$$

可得：若 $H_o$ 为正弦函数，则其稳态下的相量方程为：

$$j\omega\tau_m \dot{H}_{in} + \dot{H}_{in} = \dot{H}_o \quad \text{解的得：} \quad \dot{H}_{in} = \frac{1}{1+j\omega\tau_m} \dot{H}_o$$

$$\frac{\dot{H}_{in}}{\dot{H}_o} = \frac{1}{1+j\omega\tau_m}$$

可见 $H_{in}$ 与 $H_o$ 为同频率的函数， $H_{in}$ 一定小于 $H_o$ ，  
这说明与磁场平行的导体壳圆柱起到了对外磁场的屏蔽作用。

若导体壳为铜材料，厚度为1mm，筒的内半径为4cm，磁场频率为500Hz，则内外磁场的比值（屏蔽情况）为：

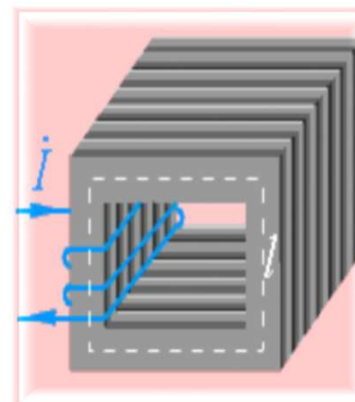
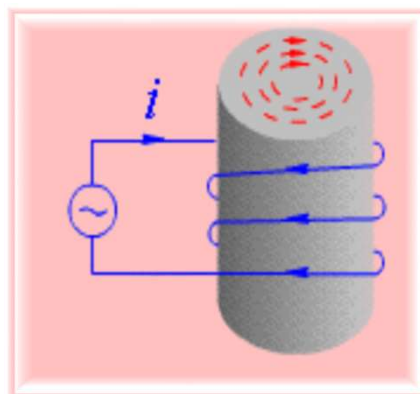
$$\frac{\dot{H}_{in}}{\dot{H}_o} = \frac{1}{1+j\omega\tau_m} = \frac{1}{1+j2\pi 500 \times 1.458 \times 10^{-3}} = 0.213e^{-j77.7^\circ}$$

## 6章第9节 涡流分布计算

**补充作业:** 给出一维涡流分布问题  
磁场强度相量的边值问题形式。

**涡流实际应用:** 磁悬浮、线圈炮电磁发射、电磁屏蔽、电磁炉、感应电机;

**反应用:** 叠片铁心、  
导体开缝阻断减小涡流。



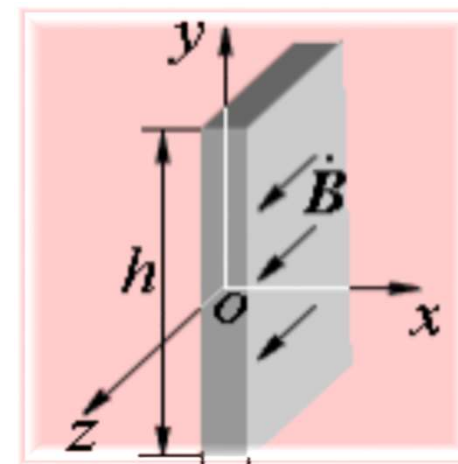
铁心叠片以  
减小涡流

叠片铁心中的涡流及其损耗，可采用线圈产生的均匀时变磁场中的薄导体板模型近似计算。

已知外磁场，求薄导体平板模型中的涡流。

因为给出的激励是磁场，故先计算导体内的  
总磁场（含涡流产生的磁场），

再对磁场强度求旋度计算涡流： $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_c$



涡流问题两场耦合，导体区域场量的边值问题求解：

$$\checkmark \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (1) \quad \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (5)$$

$$\checkmark \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2) \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (6)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3) \quad i = \iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \quad (7)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (4) \quad \text{加边界条件与界面条件} \quad (8)$$

为解一个方程组，首先应“合并”方程整理出一个函数所满足的方程。现推导磁场强度满足的方程。

将(1)两边取旋度，并利用恒等式：  $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{H}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{H}) - \nabla^2 \mathbf{H}$

$$\text{有：} -\nabla^2 \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{J} = \sigma \nabla \times \mathbf{E} = \sigma \left( -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) = \mu \sigma \left( -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right)$$

$$\text{得：} (\nabla^2 - \mu \sigma \frac{\partial}{\partial t}) \mathbf{H} = 0 \quad (\text{为扩散方程，解涡流分布问题的一般方程})$$

对正弦稳态问题，相量方程为：  $(\nabla^2 - j\omega\mu\sigma) \dot{\mathbf{H}} = 0$   $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$  自动满足

类似可得  $\mathbf{E}$  满足同样的方程。

加上边界条件形成边值问题。



**例1(实为6章第9节内容):** 已知外加正弦磁场  $\dot{H}_0$ 。  
忽略端部效应, 近似为一维问题: 认为磁力线平行于z轴, 且 $H$ 仅为 $x$ 的函数。求导体内的涡流密度分布。

**解:** 因给出了激励磁场, 所以先求**导体内**的磁场。

对正弦稳态问题,  $H$ 的**边值问题为** (沿 $x$ 轴):

$$\frac{d^2 \dot{H}_z(x)}{dx^2} - j\omega\mu\sigma \dot{H}_z(x) = 0$$

**边界条件为:**

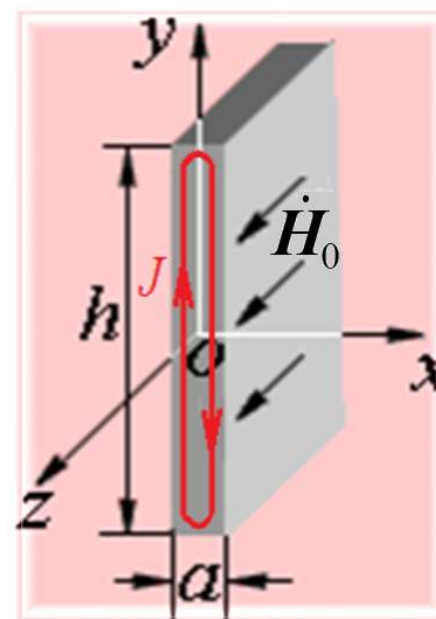
因导体外的磁场为 $\dot{H}_0$ , 界面 $H$ 切向连续, 则有

$$\dot{H}_z(a/2) = \dot{H}_z(-a/2) = \dot{H}_0$$

上述条件的原因: 涡流分布关于 $yoz$ 平面对称, 且在坐标面的两侧电流密度的方向相反, 所以对导体外和导体边界的磁场贡献为零。

上面方程的解必为 $x$ 的指数形式, 即通解为:

$$\dot{H}_z(x) = \dot{C}_1 e^{-\Gamma x} + \dot{C}_2 e^{\Gamma x} \quad \Gamma = \sqrt{j\omega\mu\sigma} \quad \text{下面确定常数}$$





利用边界条件  $\dot{H}_z(a/2)=\dot{H}_z(-a/2)=\dot{H}_0$  有:

$$\dot{C}_1 e^{-\frac{a}{2}\Gamma} + \dot{C}_2 e^{\frac{a}{2}\Gamma} = \dot{C}_1 e^{\frac{a}{2}\Gamma} + \dot{C}_2 e^{-\frac{a}{2}\Gamma} = \dot{H}_0 \quad \text{得: } \dot{C}_1 = \dot{C}_2, \text{ 设为 } \dot{C}$$

从而有:  $\dot{H}_z(x) = \dot{C}e^{-\Gamma x} + \dot{C}e^{\Gamma x} = 2\dot{C}\text{ch}(\Gamma x)$  双曲余弦函数

$$\text{再利用边界条件 } \dot{H}_z(a/2) = \dot{H}_0 \text{ 得: } \dot{C} = \frac{\dot{H}_0}{2\text{ch}(\Gamma a/2)}$$

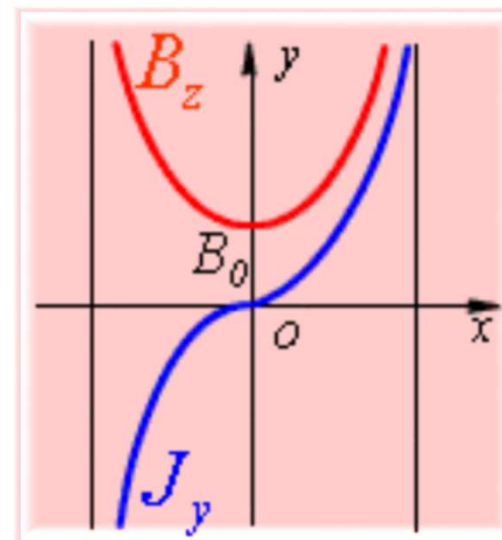
$$\text{最终得: } \dot{H}_z(x) = \frac{\dot{H}_0}{\text{ch}(\Gamma a/2)} \text{ch}(\Gamma x)$$

$$\dot{J}_y(x) = (\nabla \times \dot{H}_z)_y = -\frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x} = -\frac{\Gamma \dot{H}_0}{\text{ch}(\Gamma a/2)} \text{sh}(\Gamma x)$$

图中为有效值分布。

从B的分布可看出去磁效应,

频率越高、板越厚去磁效果越明显。



模值分布曲线

**例2(教材第6章9节的例6-11):**

一长直薄导线，通有电流  $\dot{I}$ ，求电流密度分布（一维问题）。

**解：** $H$ 的边值问题易写出。

在导体区域中有：
$$\frac{d^2 \dot{H}_y}{dx^2} - j\omega\mu\sigma \dot{H}_y = 0$$

边界条件为： $\dot{H}_y|_{x=0} = 0$  和  $\dot{H}_y|_{x=a/2} = \dot{I}/b/2$

（取过y轴和导线外边缘的矩形，包含  $I/2$ ，由安培环路定律得）

通解为：
$$\dot{H}_y(x) = \dot{C}_1 e^{-\Gamma x} + \dot{C}_2 e^{\Gamma x} \quad \Gamma = \sqrt{j\omega\mu\sigma}$$

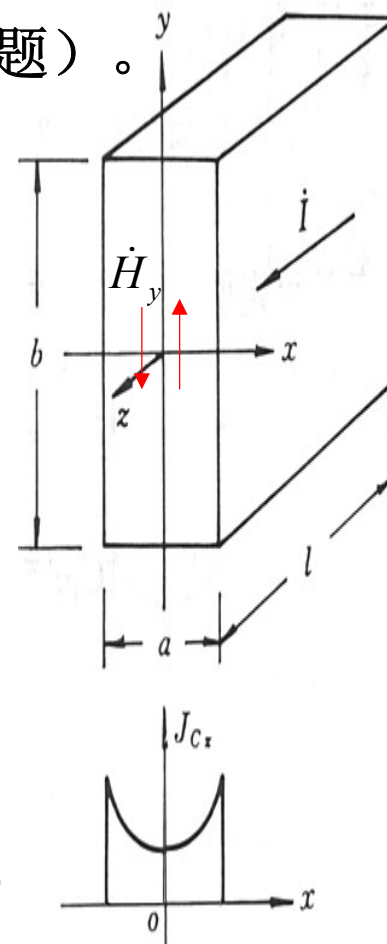
确定常数后有：
$$\dot{H}_y = \frac{\dot{I}}{2b} \frac{1}{\text{sh}(\Gamma a/2)} \text{sh}(\Gamma x)$$

$$\dot{J}_{cz} = (\nabla \times \dot{H}_y)_z = \frac{\partial \dot{H}_y}{\partial x} = \frac{\dot{I}}{2b} \frac{\Gamma}{\text{sh}(\Gamma a/2)} \text{ch}(\Gamma x) = \dot{J}_{cz}(x) \angle \theta(x)$$

导线中通有交流电流时，导线截面中间部位电流密度较小，靠近表面处电流密度较大，这种电流分布称为**集肤效应 (skin effect)**。

**但并不是每个时刻电流都具有集肤效应。**

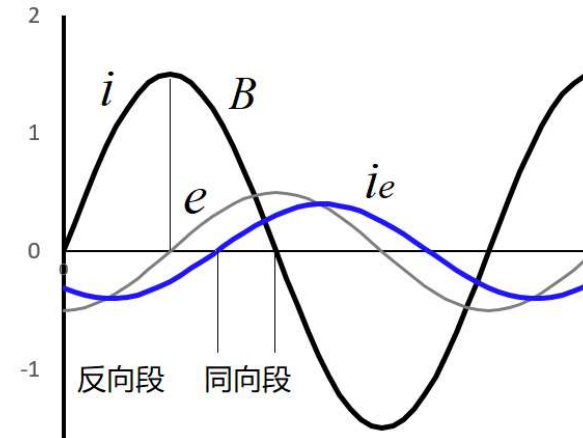
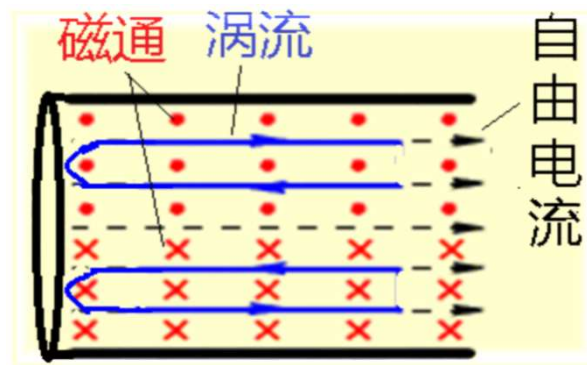
上式和右图为  $J$  在空间上的有效值分布，并不是时域分布。



## 数值上得到了解答。物理上如何理解，对此现象如何解释？

为何电流不均匀分布？均匀分布可否？电场的环路积分等于磁通变化率。

- 载流导线内，可分为或认为存在电压源激励的电流（对应库仑电场）和感应电动势激励的感应电流（对应感应电场）。
- 前者称为自由电流，其按恒定电流场分布，因为由电压约束；其在直导线的截面上均匀分布；感应电流成涡旋状，与磁力线交链。
- 图中给出了磁通与电流的一种方向，此时电流及其磁场增加。
- 在图中情况，靠近轴线处两电流方向相反，靠近表面处方向相同。故此，两电流叠加后，靠近轴线处电流密度较小，靠近表面处电流密度较大，出现集肤现象。



- 此解释全面吗？否！对正弦电流，在某时刻可能是“集中”现象。
- 当总电流仍然向右，但电流下降时，涡流会变向，总电流内大外小。
- 只是从有效值看为集肤效应。有效值 $J_z$ 随坐标 $x$ 的分布是每空间点一个周期内的有效值的分布。实际上没有时刻 $\mathbf{J}(x,t)$ 是这样分布。

### 例3（教材例6-12）：

两长直薄导体传输线，通有电流  $\dot{I}$ ，求电流密度分布。  
近似为一维问题：认为磁力线平行于  $y$  轴，且  $H$  仅为  $x$  的函数。

解：只求解右侧导体中的电流密度。

$H$  所满足的方程为：

$$\frac{d^2 \dot{H}_y}{dx^2} - j\omega\mu\sigma \dot{H}_y = 0$$

边界条件为：在外侧两电流的场抵消

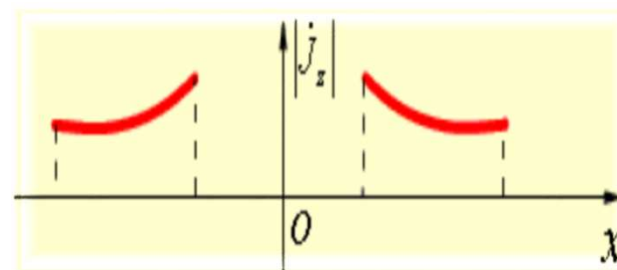
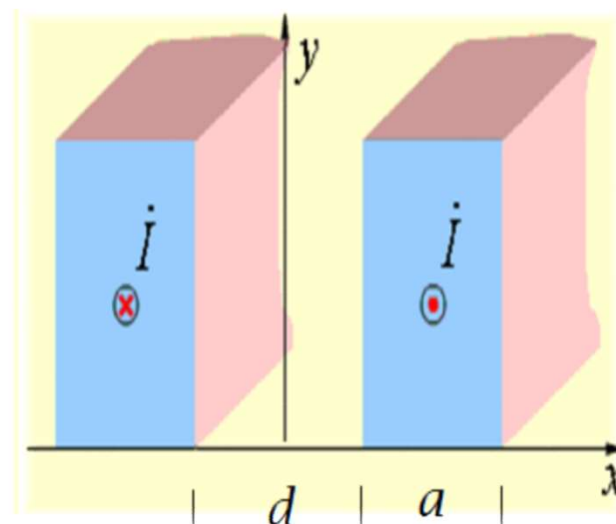
$$\dot{H}_y \Big|_{x=d/2+a} = 0 \quad \text{和} \quad \dot{H}_y \Big|_{x=d/2} = \dot{I}/b$$

（由安培环路定律得）

解得：

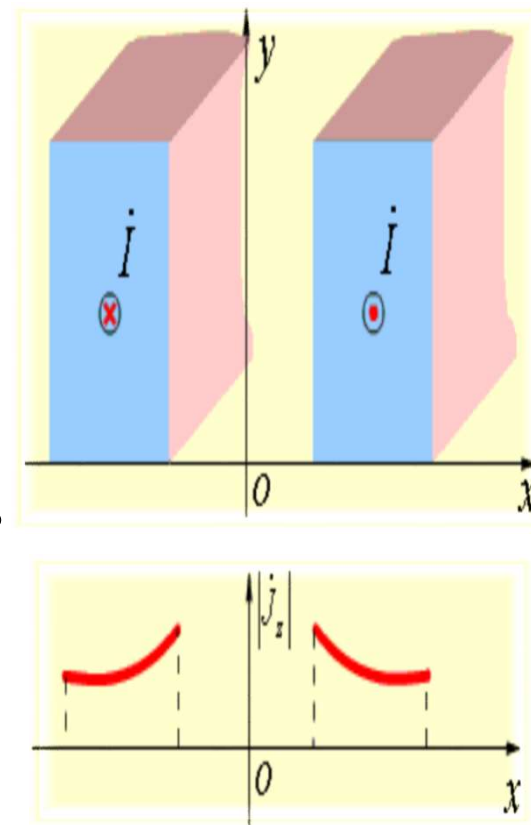
$$\dot{H}_y = \frac{\dot{I}}{b \operatorname{sh}(\Gamma a)} \operatorname{sh}\left[\Gamma\left(\frac{d}{2} + a - x\right)\right]$$

$$\dot{j}_{cz} = \frac{\dot{I}}{b \operatorname{sh}(\Gamma a)} \operatorname{ch}\left[\Gamma\left(\frac{d}{2} + a - x\right)\right]$$



## 对邻近效应的解释

- 导体通有时变电流时，不仅会在自身产生涡流，也会在邻近导体中产生涡流。
- 对于一对传输线，其相互影响的结果是电流在每根导线上的分布不再对称。
- 若施加的为正弦电流，则各点电流密度在一个周期内的最大值呈现两导体内侧的电流密度大于外侧的现象，这种现象称为**邻近效应**。
- 与单根导线情况类似，若在时域中观察每个时刻，在电流上升和一部分电流开始下降的时间段，电流向内侧集中；
- 但在一小段电流下降阶段，会出现向外侧表面集中的现象。时间长短取决于涡流等效回路的阻抗角，或电阻率、磁导率和频率。



## 第8节 传导电磁干扰耦合方式与抑制

补充作业:

- 1) 屏蔽低频磁场的原理?
- 2) 为何用同轴电缆作为输入线可防止外部磁场干扰?

电磁干扰(**EMI**-Electromagnetic Interference)

是指使设备或系统性能降级的电磁影响现象。

电磁兼容(性或能力) (**EMC**-Electromagnetic Compatibility) 指:

系统或设备在所处的电磁环境中能正常工作, 同时不会对其它系统和设备造成电磁干扰。

EMC包括EMI和**EMS**-Electromagnetic Susceptibility (电磁耐受性或能力) 两部分, 即不产生“对外”干扰的特性和耐受“外来”电磁干扰的能力。

电磁骚扰 (**EMD**-Electromagnetic Disturbance) 是指:

任何可能引起设备或系统性能降级或对有生命或无生命物质产生损害作用的电磁现象。

**Disturbance**着眼点是源侧, 发出侧; **Interference**有“Inter”喻义“相互、双方”综合考虑的效果。

电磁干扰要由骚扰源与被干扰对象的耦合方式与途径来构成。



电磁干扰耦合方式分为低频**传导耦合**（骚扰信号沿线传导时的耦合）和**高频电磁波辐射耦合**（像天线发射通过空间能量传播造成的耦合）。传导耦合途径包括：容性耦合、感性耦合与阻性耦合。

## 1. 容性耦合

通过电容效应建立的设备或系统之间的耦合。

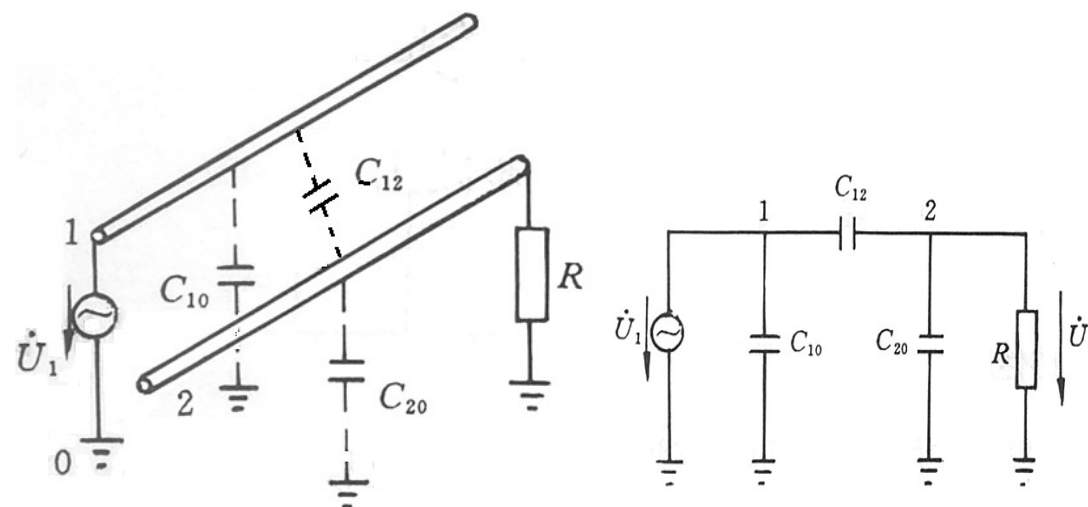
特点：电压性耦合，能耦合高电压，但不一定产生大**干扰**电流。

如高压输电线，设导线1的电压为500kV，则悬空导线2（即图中不接负载电阻时）可能会有200kV，耦合电压很高。

但若接上 $R$ 后，其中的电流会很小，因为 $C_{12}$ 的值小容抗大，即使导线2直接接地电流也很小。从导线2看进去相当于一个大电抗电源。

对负载 $R$ 的干扰主要是考虑绝缘问题，对其工作性能影响一般不大。

抑制容性耦合的原理是静电屏蔽。在干扰源与被干扰物体之间加接地隔离导体。





## 2. 感性耦合

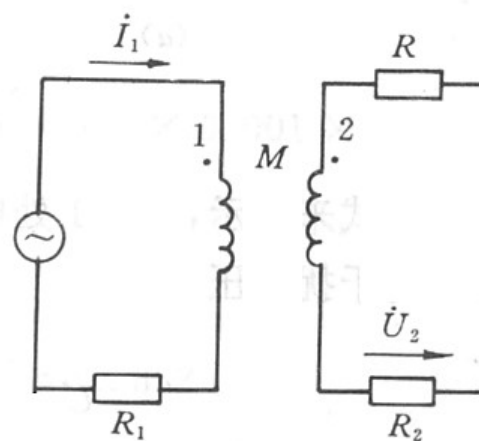
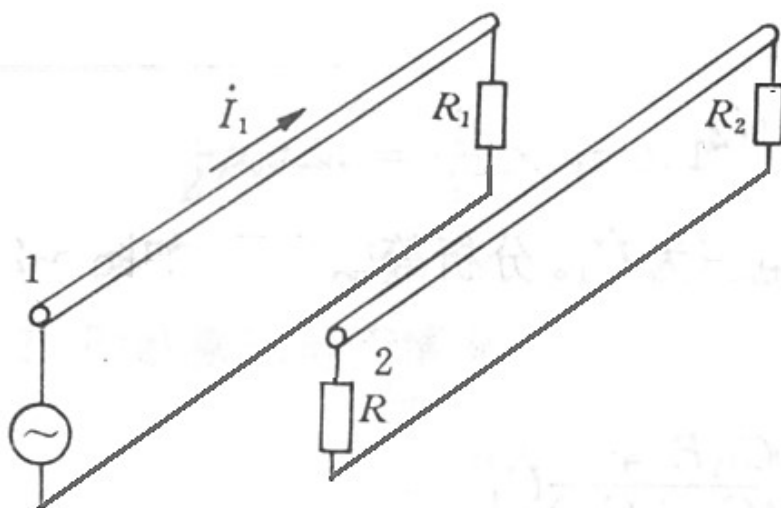
通过互感建立的设备或系统之间的耦合。

特点：耦合大小与被耦合对象的回路大小有关。

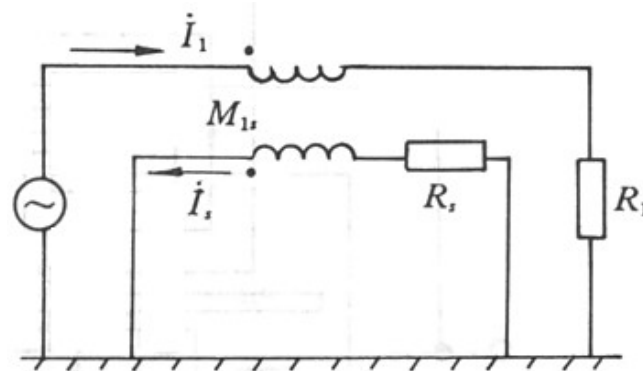
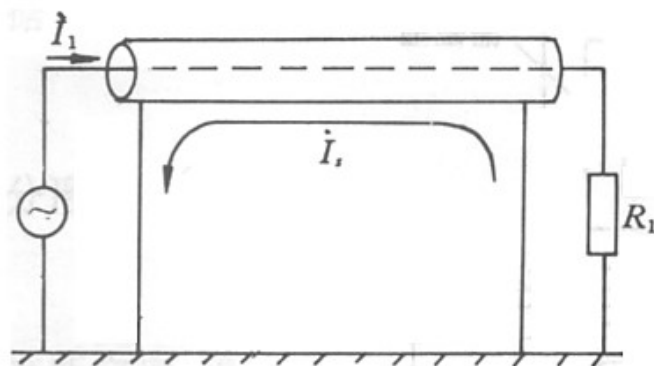
若在导线1中有交流电流，则会在导线2或导线2构成的回路内感应出电动势、电压和电流，构成感性耦合。

若已知两回路的互感，则可以计算出耦合感应电压和电流。

关键问题是计算互感。



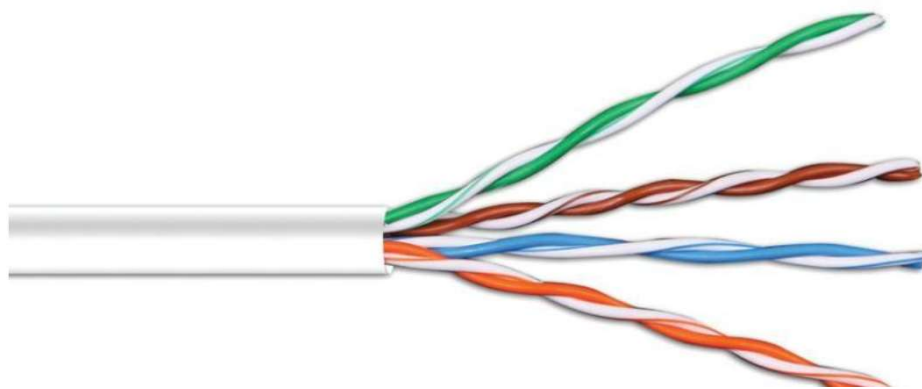
- 抑制感性耦合的原理有二：一是电磁感应定律的感应电流的去磁作用，称为**电（流）屏蔽**，二是磁性材料的导磁作用，称为**磁屏蔽**。
- 实现电屏蔽的方法是放置导体板或闭合导线，使之在原磁场的作用下产生尽量大的反相位的感应电流，利用感应电流的去磁作用实现“屏蔽”。
- 电屏蔽一般用良导体，如铜和铝，它们的磁导率与空气相同，所以没有磁屏蔽效果。磁屏蔽是用高导磁率的板材。
- 从电屏蔽看，要想减小或屏蔽一根导线产生的磁场骚扰，可在导线上套一个导体管，管子必须两端接地或连接成一个较大的回路，目的是回路中要有较大磁通从而产生较大电流。
- 实际上，为了屏蔽磁场，管子可以改为导线，放置于源导线附近并接地即可实现同样的屏蔽效果。
- 单套一个不接地的导体管屏蔽作用很小。
- 这种屏蔽对原电路自身的工作状态会有影响，需要原电路提供额外能量，屏蔽回路有损耗，有时损耗可能还较大。
- 当然可在被干扰的物体或回路处设置电屏蔽或磁屏蔽。



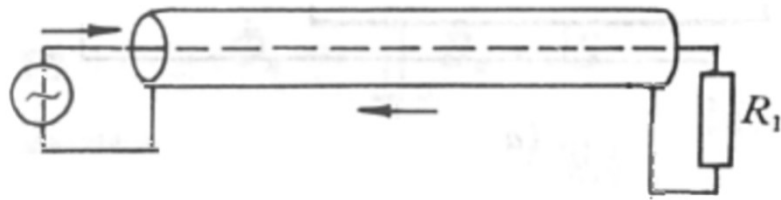
削弱一对电流线的骚扰和一对信号线所受感性耦合干扰的有效方法是将两根线进行“换位”或“绞绕”。前者要密绕，使两电流产生的场抵消；后者不必密绕，原理是螺距间感应电压相互抵消，

即其原理是绞线的两根线形成的绞距的相邻两个“面积”上感应电压大小相等、方向相反，对端口而言感应电压相互抵消。

理论上讲，对被干扰的一对线，若骚扰场均匀，只要在线路中间交换一次位置（两个端部相对旋转 $180^\circ$ 即类似“8”字形）便可以将感应电压减小到零。对不均匀的骚扰场，需旋转多次做成绞线。



- 用同轴电缆作为传输线不会对外产生骚扰，因为其外皮与芯线的反向电流的作用中心重合，对外产生的磁场完全抵消，与外面回路不形成互感。
- 同轴电缆作为传输线也几乎不会受到外磁场的干扰，即不会给其负载带来感性耦合影响，根据互感 $M_{12}=M_{21}$ 以及上面得到的电缆与外面的回路不形成互感的结论可知，外面的磁场不会对同轴电缆回路构成干扰。



### 3. 阻性耦合

通过电阻耦合的典型问题是接地极注入到大地的电流所引起的大地电位升而造成的干扰，以及类似问题。

屏蔽方法是阻断电流流入敏感区域，或将电流引到其它不敏感的区域。