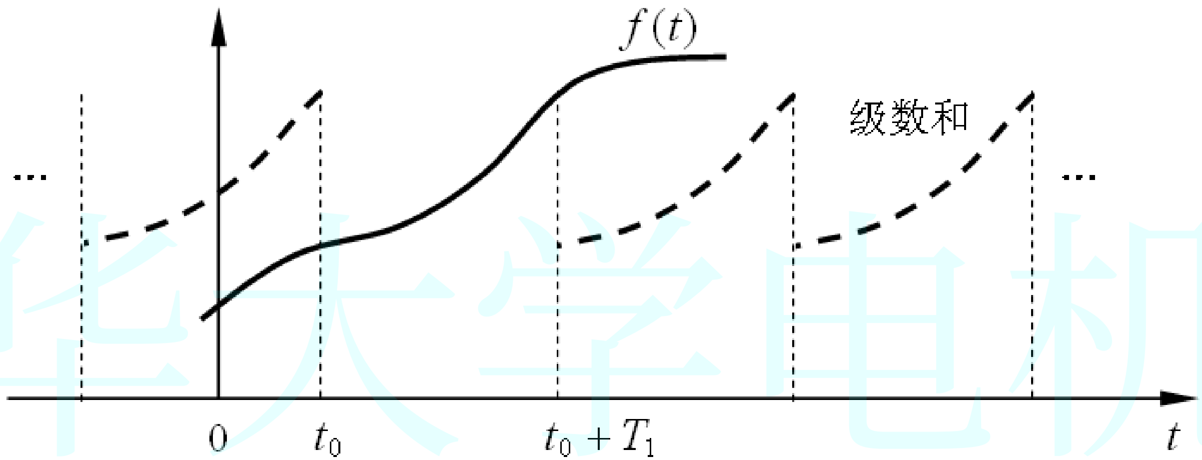
第5章

连续信号的傅里叶变换

主要内容

- 非周期信号的傅立叶变换。
- 傅里叶变换的性质
- 周期信号的傅立叶变换。
- 脉冲抽样信号的傅立叶变换，抽样定理。

- 如果$f(t)$本身是一个非周期信号，$f(t)$在(t_0, t_0+T_1)区间内与“级数和”相等，在区间外不再相等。



问题：如果信号$f(t)$的区间外的取值怎么处理？

$$f(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}F(k\omega_1)\mathrm{e}^{jk\omega_1 t}\qquad t_1<t<t_2$$

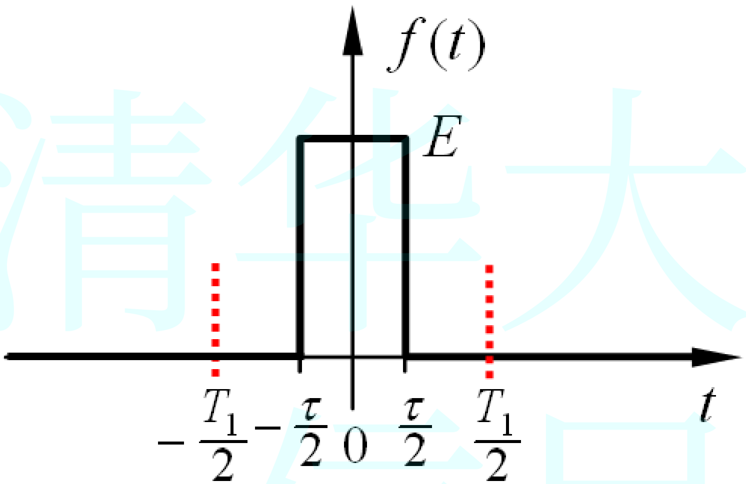
$$F(k\omega_1)=\frac{\langle f(t),\mathrm{e}^{jk\omega_1 t}\rangle}{\langle \mathrm{e}^{jk\omega_1 t},\mathrm{e}^{jk\omega_1 t}\rangle}=\frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2}f(t)\mathrm{e}^{-jk\omega_1 t}\mathrm{d}t\,,\qquad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

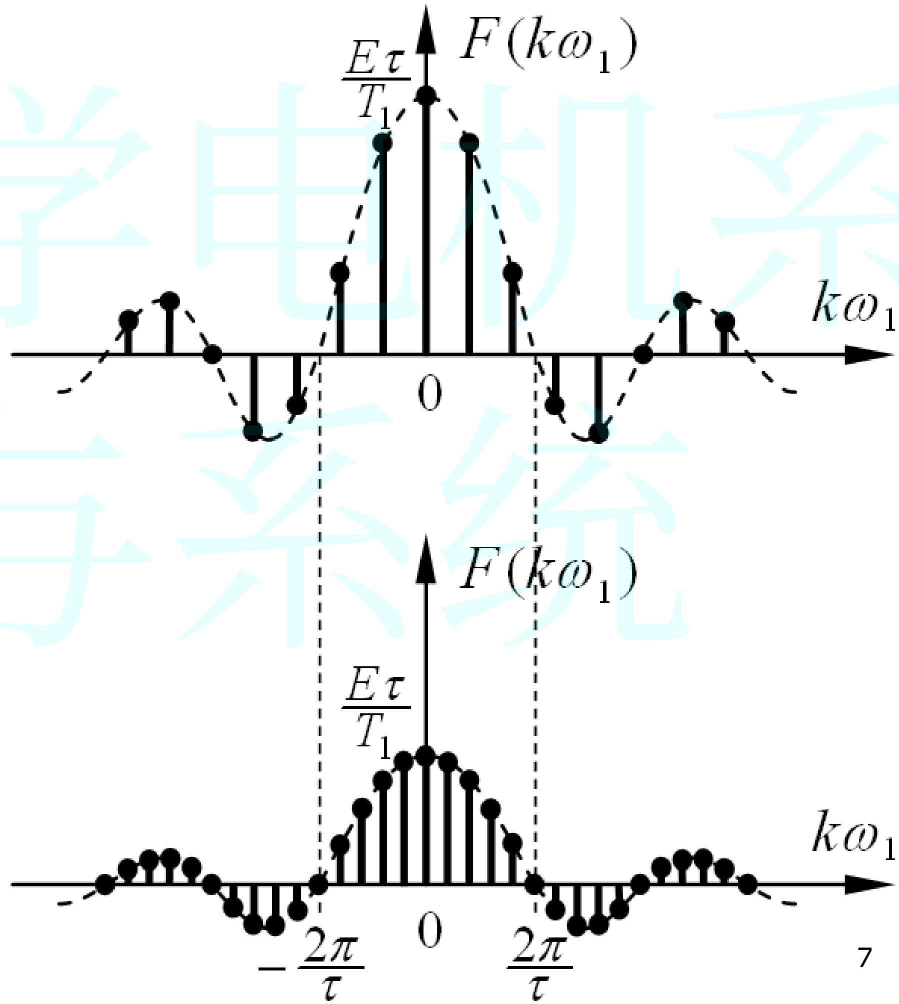
$$\omega_1=\frac{2\pi}{t_2-t_1}$$

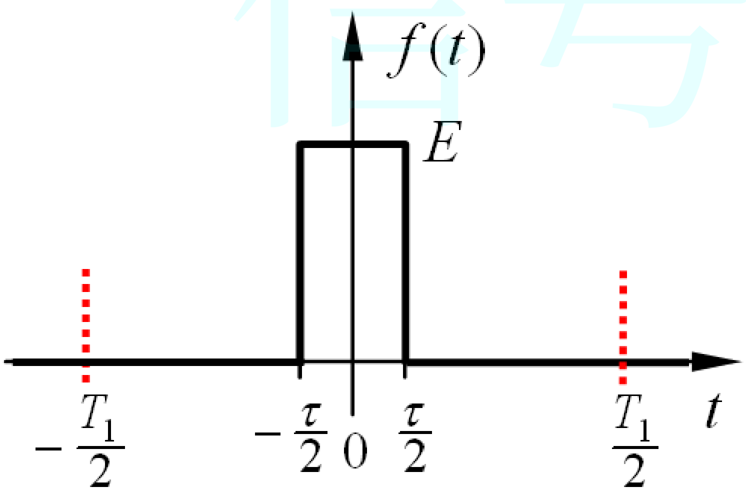
$$\boxed{F(k\omega_1)=\frac{\langle f(t),\mathrm{e}^{jk\omega_1 t}\rangle}{\langle \mathrm{e}^{jk\omega_1 t},\mathrm{e}^{jk\omega_1 t}\rangle}=\frac{E\tau\omega_1}{2\pi}\mathrm{Sa}\left(\frac{k\omega_1\tau}{2}\right)}$$

$$\boxed{\omega_1=\frac{2\pi}{t_2-t_1}}$$

非周期矩形波信号在不同时间区间进行复指数函数正交分解







$$f(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}F(k\omega_1)\mathrm{e}^{jk\omega_1 t} \qquad t_1<t<t_2 \qquad \omega_1=\frac{2\pi}{t_2-t_1}$$

$$F(k\omega_1)=\frac{\langle f(t),\mathrm{e}^{jk\omega_1 t}\rangle}{\langle \mathrm{e}^{jk\omega_1 t},\mathrm{e}^{jk\omega_1 t}\rangle}=\frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2}f(t)\mathrm{e}^{-jk\omega_1 t}\mathrm{d}t\,, \qquad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

\# 为了在$(-\infty,\infty)$区间对$f(t)$进行正交函数分解，取极限$t_1\to-\infty$，$t_2\to\infty$，

此时有$(t_2-t_1)\to\infty$， $\omega_1\to 0$。

狄利克雷条件

因为$f(t)$在$(-\infty,\infty)$区间绝对可积，所以取极限后式中的积分收敛

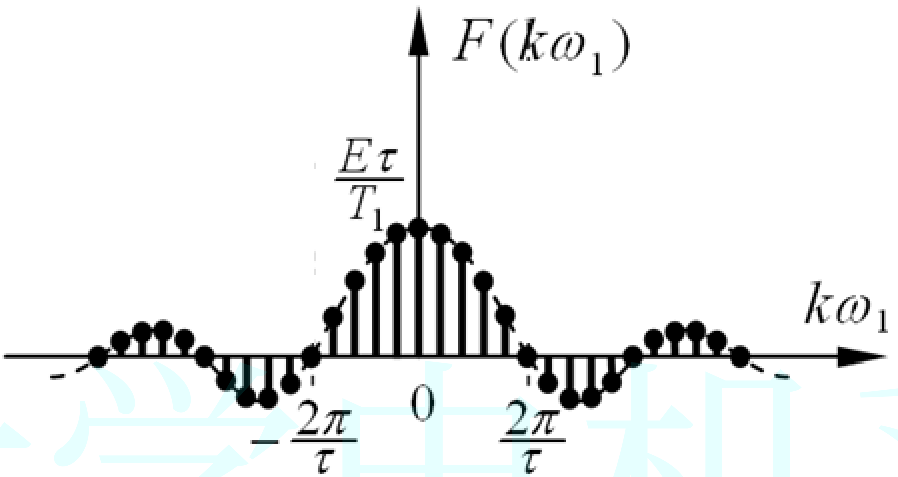
$$\lim_{t_1\to-\infty,t_2\to\infty}\int_{t_1}^{t_2}f(t)\mathrm{e}^{-jk\omega_1 t}\mathrm{d}t=\text{有限值}$$

因此 $$F(k\omega_1)=\frac{\langle f(t),\mathrm{e}^{jk\omega_1 t}\rangle}{\langle \mathrm{e}^{jk\omega_1 t},\mathrm{e}^{jk\omega_1 t}\rangle}=\frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2}f(t)\mathrm{e}^{-jk\omega_1 t}\mathrm{d}t\to 0$$

由此可见:

- 如果非周期信号$f(t)$在$(-\infty,\infty)$区间绝对可积，并对其在$(-\infty,\infty)$区间进行正交分解，则每个频率分量的幅值$|F(k\omega_1)|$都是无穷小或零。

$$\boxed{\omega_1 = \frac{2\pi}{t_2 - t_1}}$$



- 基波分量的周期$T_1 = t_2 - t_1$趋于无穷大，基波频率f_1或基波角频率ω_1趋于无穷小。在频谱图上，ω_1是相邻谱线的间隔，ω_1趋于无穷小意味着频谱图上的谱线趋于无限密集，频谱由离散趋于连续。

频率连续分布、幅值无穷小的无穷多个频率分量相叠加，构成原来的绝对可积信号*f*(*t*)。

$$F(k\omega_1)=\frac{\langle f(t),\mathrm{e}^{jk\omega_1 t}\rangle}{\langle \mathrm{e}^{jk\omega_1 t},\mathrm{e}^{jk\omega_1 t}\rangle}=\frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2} f(t)\mathrm{e}^{-jk\omega_1 t}\mathrm{d}t \to 0$$

信号每一频率分量的傅立叶级数的系数与其占有的频带宽度之比为信号频谱密度

$$\frac{2\pi F(k\omega_1)}{\omega_1}=\int_{t_1}^{t_2} f(t)\mathrm{e}^{-jk\omega_1 t}\mathrm{d}t$$

当 $t_1\to-\infty$，$t_2\to\infty$ 时，有 $\omega_1\to\mathrm{d}\omega$，$k\omega_1\to\omega$。定义信号频谱密度函数为

$$\boxed{\begin{aligned}F(\omega)&=\lim_{t_1\to-\infty,t_2\to\infty}\frac{2\pi F(k\omega_1)}{\omega_1}\\&=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-j\omega t}\mathrm{d}t\end{aligned}}$$

Fourier transform

定义连续非周期信号***f*(*t*)**的傅立叶变换的正变换

$$F(\omega)=\mathscr{F}\left[f(t)\right]=\mathrm{FT}\left[f(t)\right]=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-j\omega t}\mathrm{d}t$$

$$f(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}F(k\omega_1)e^{jk\omega_1 t}\qquad t_1<t<t_2$$

$$F(k\omega_1)=\frac{\langle f(t),e^{jk\omega_1 t}\rangle}{\langle e^{jk\omega_1 t},e^{jk\omega_1 t}\rangle}=\frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2}f(t)e^{-jk\omega_1 t}dt$$

\# 傅立叶逆变换：

在$(-\infty,\infty)$区间有

$$f(t)=\lim_{t_1\to-\infty,t_2\to\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}F(k\omega_1)e^{jk\omega_1 t}$$

$$=\lim_{t_1\to-\infty,t_2\to\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{F(k\omega_1)}{\omega_1}e^{jk\omega_1 t}\omega_1$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$F(\omega)=\lim_{t_1\to-\infty,t_2\to\infty}\frac{2\pi F(k\omega_1)}{\omega_1}$$

由此定义连续非周期信号f(t)的傅里叶变换的逆变换为：

$$f(t)=\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

- 傅立叶变换和傅立叶级数的差别：

（1）傅立叶级数是离散的，在离散频率点$k\omega_1$取值$F(k\omega_1)$；傅立叶变换是连续的，$F(\omega)$在连续频率区间取值。

（2）傅立叶级数给出信号各频率分量的幅值$|F(k\omega_1)|$；傅立叶变换给出信号各频率分量的频谱密度的幅值$|F(\omega)|$。

为什么连续周期信号的傅里叶级数是离散的？

信号幅频特性和相频特性

$f(t)$的傅立叶变换通常为复函数，可表示为

$$F(\omega)=\left|F(\omega)\right|\mathrm{e}^{j\phi(\omega)}$$

- 幅频特性

类似于傅立叶级数，$|F(\omega)|-\omega$ 关系描述了$f(t)$各频率分量的频谱密度的幅值随频率的变化，称为$f(t)$的频谱密度谱，也经常称幅频特性或幅值谱。

注意它和傅立叶级数的幅频特性和幅值谱存在概念的差别。

- 相频特性

$|\varphi(\omega)|-\omega$关系描述了$f(t)$各频率分量的初始相位随频率的变化，称为$f(t)$的相频特性或相位谱。

典型信号的傅立叶变换

1. 矩形脉冲信号

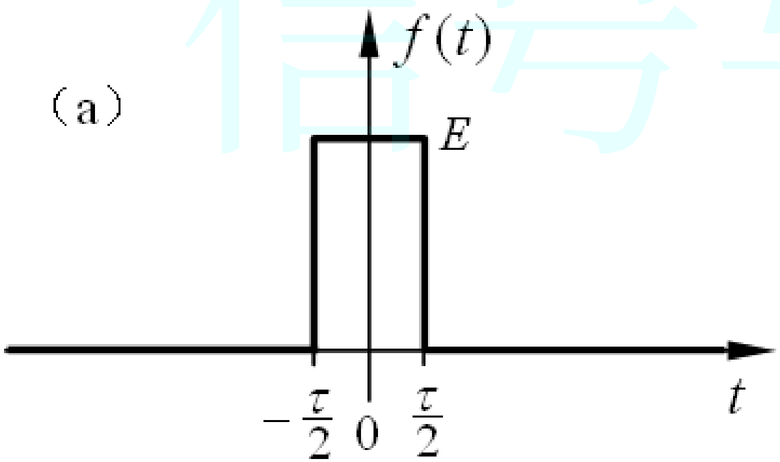
矩形脉冲的波形如图所示，脉冲幅值E，脉冲宽度τ，傅立叶变换为

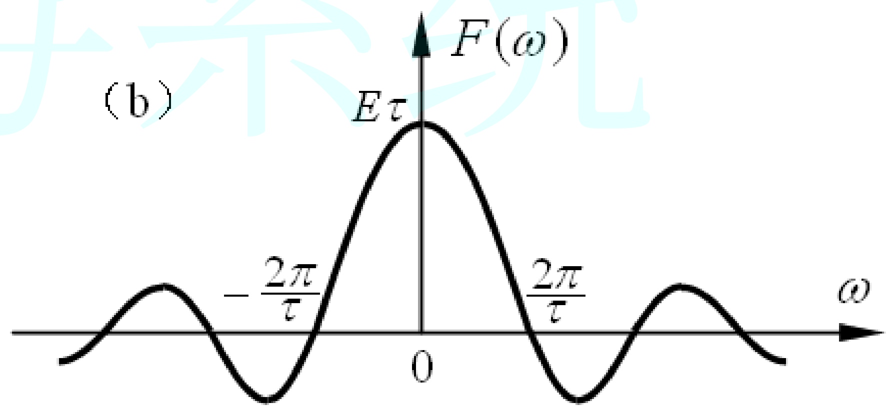
$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-j\omega t}\mathrm{d}t=\int_{-\tau/2}^{\tau/2} E\mathrm{e}^{-j\omega t}\mathrm{d}t=E\tau\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

$F(\omega)$是一个实函数，其频谱图如图中所示。

矩形脉冲信号包含从直流到无穷大频率的连续分布的所有频率分量。

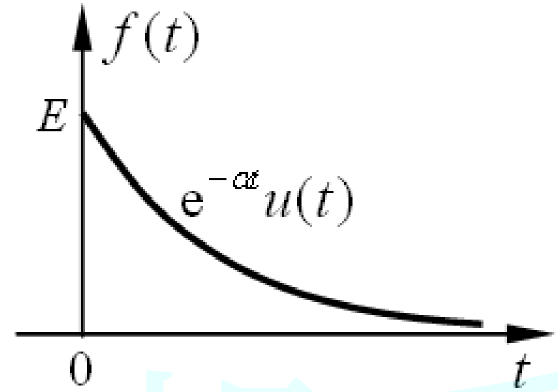
因为此处的矩形脉冲是偶函数，所以其频谱密度函数$F(\omega)$是实函数。





2. 单边指数信号

单边指数信号的波形如图所示，其表达式为



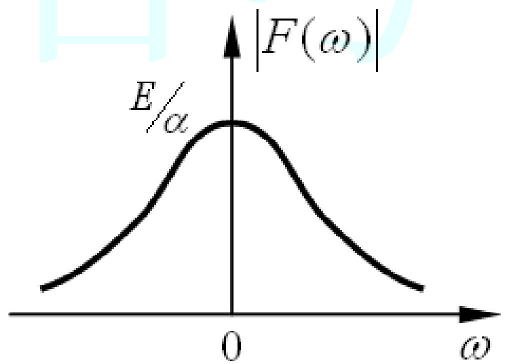
$$f(t) = E\mathrm{e}^{-\alpha t}u(t) \qquad \alpha > 0$$

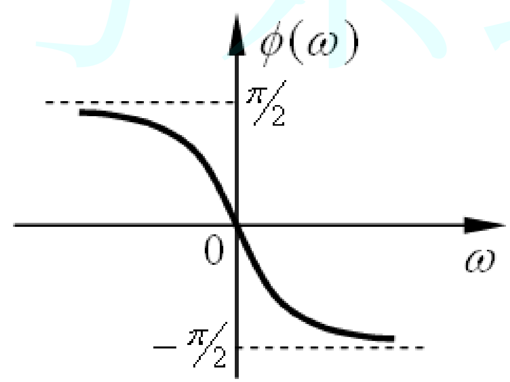
其中 α 为衰减因子。其傅立叶变换为

$$\boxed{F(\omega) = \int_0^{\infty} E\mathrm{e}^{-\alpha t}\mathrm{e}^{-j\omega t}\mathrm{d}t = \frac{E}{\alpha + j\omega}}$$

$F(\omega)$ 是一个复函数，其幅值谱和相位谱分别为

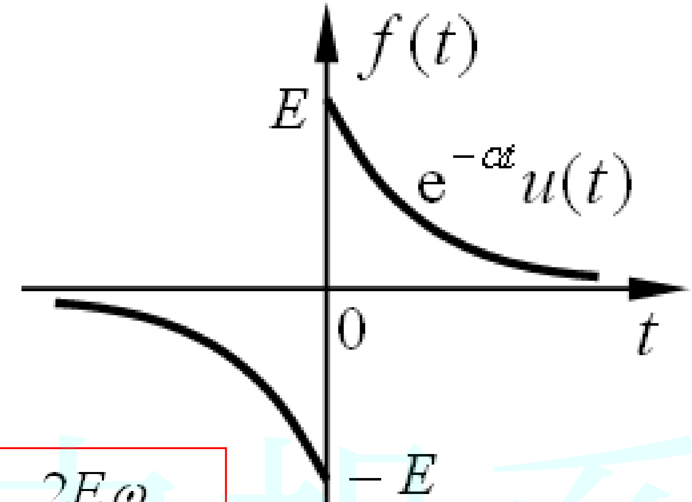
$$|F(\omega)| = \frac{E}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}} \qquad \phi(\omega) = -\arctan\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)$$





3. 双边奇指数信号

双边奇指数信号的波形如图所示，其表达式为



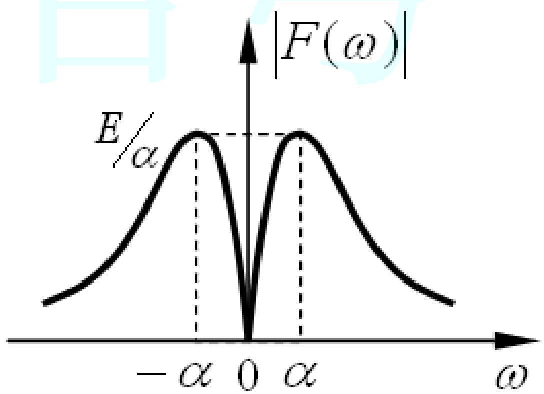
$$f(t)=\begin{cases} E\mathrm{e}^{-\alpha t} & t>0 \\ -E\mathrm{e}^{\alpha t} & t<0 \end{cases}$$

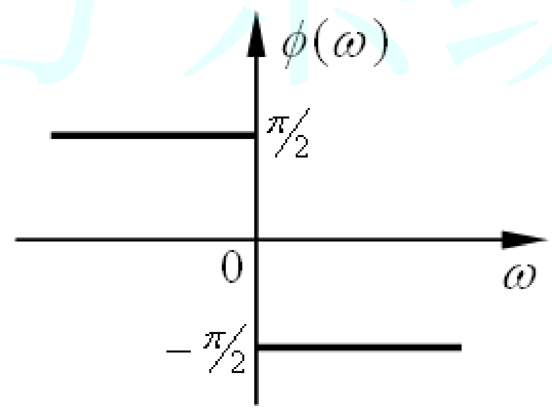
其中 $\alpha>0$ 为衰减因子。其傅立叶变换为

$$\boxed{F(\omega)=\int_{-\infty}^{0}-E\mathrm{e}^{\alpha t}\mathrm{e}^{-j\omega t}\mathrm{d}t+\int_{0}^{\infty}E\mathrm{e}^{-\alpha t}\mathrm{e}^{-j\omega t}\mathrm{d}t=-j\frac{2E\omega}{\alpha^2+\omega^2}}$$

$F(\omega)$ 是纯虚函数，表示只包含正弦分量，其幅值谱和相位谱分别为有

$$|F(\omega)|=\frac{2E|\omega|}{\alpha^2+\omega^2} \qquad \phi(\omega)=\begin{cases} \pi/2 & \omega<0 \\ -\pi/2 & \omega>0 \end{cases}$$

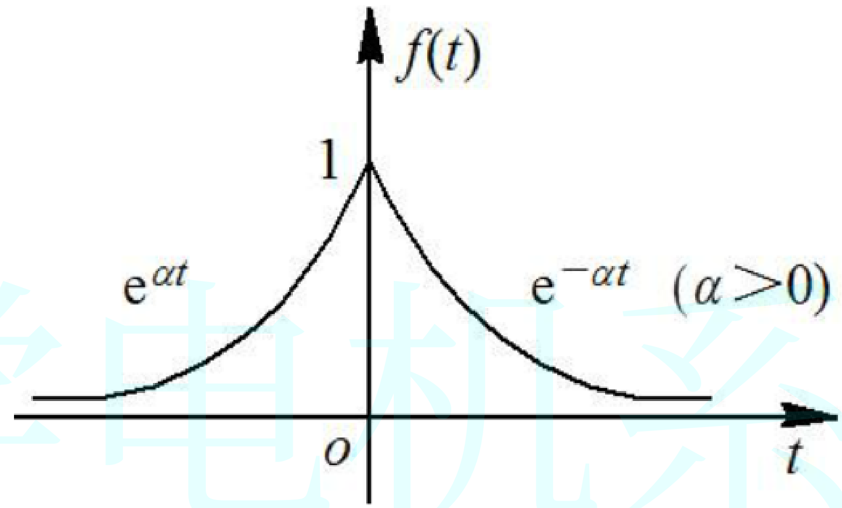




双边指数信号

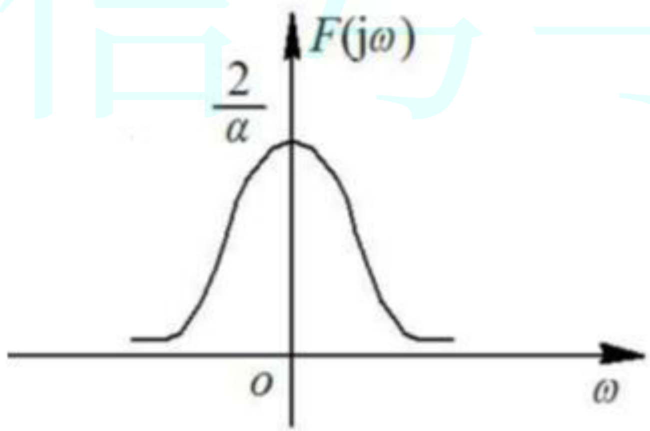
信号表达式：

$$f(t)=e^{-\alpha|t|}\quad(-\infty<t<+\infty)$$



幅频特性

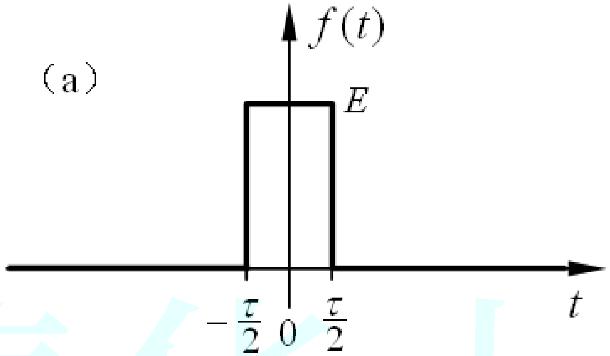
$$F(\omega)=\frac{2\alpha}{\alpha^{2}+\omega^{2}}$$



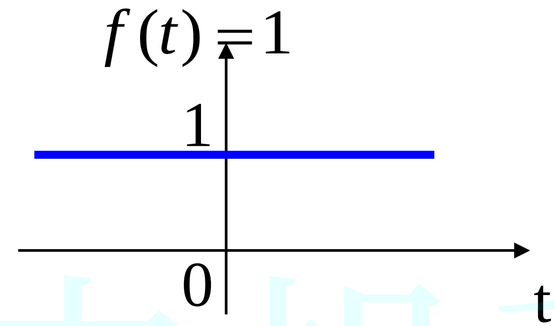
相频特性

$$\varphi(\omega)=0$$

4. 直流信号的傅立叶变换



$\tau \to \infty$



$$F(\omega) = E\tau \mathrm{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

$$\mathscr{F}\left[E\right] = \lim_{\tau\to\infty} E\tau \mathrm{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) = 2\pi E \underline{\lim_{\tau\to\infty} \frac{\tau}{2\pi} \mathrm{Sa}\left(\frac{\tau}{2}\omega\right)}$$

对抽样信号取极限得冲激信号

构造抽样信号 $\frac{k}{\pi}\mathrm{Sa}(kt)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} Sa(t)dt = \pi$$

当 $k \to \infty$ 时，信号波形宽度趋于0；

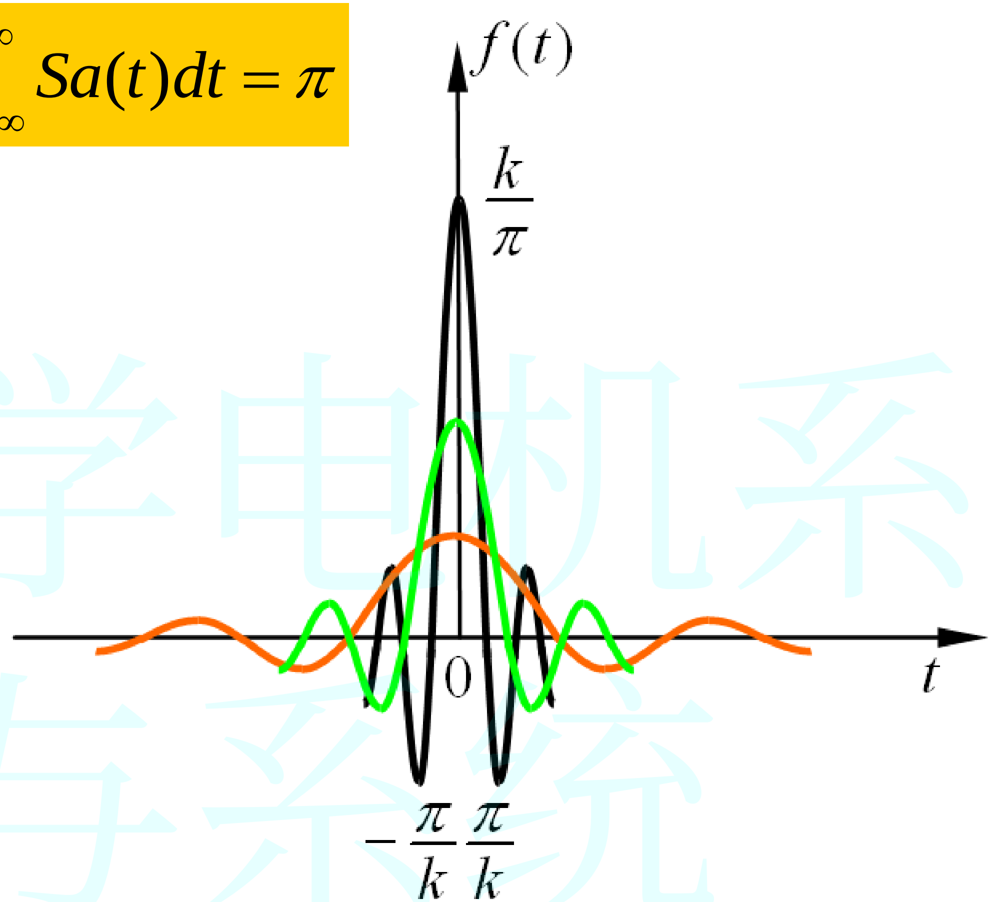
当 $t \to 0$ 时，幅值趋于 ∞；且有

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{k}{\pi}\mathrm{Sa}(kt)\mathrm{d}t = 1$$

因此有

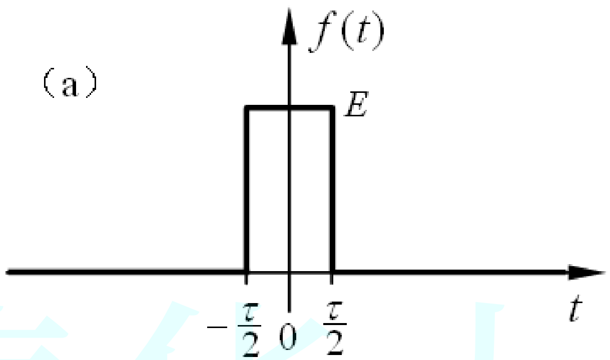
$$\lim_{k\to\infty}\left[\frac{k}{\pi}\mathrm{Sa}(kt)\right] = \delta(t)$$

冲激函数定义

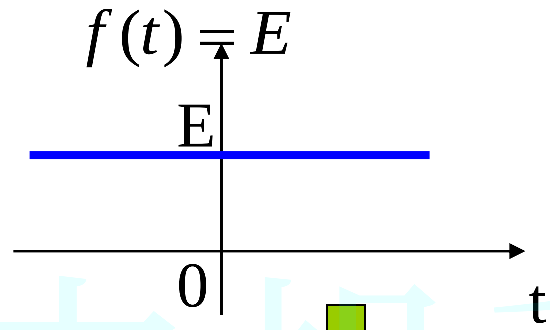


抽样信号取极限逼近单位冲激信号

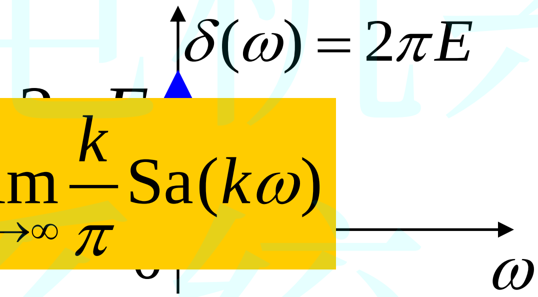
4. 直流信号的傅立叶变换



$\tau \to \infty$



$$F(\omega) = E\tau \mathrm{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$



$$\delta(\omega) = \lim_{k\to\infty} \frac{k}{\pi} \mathrm{Sa}(k\omega)$$

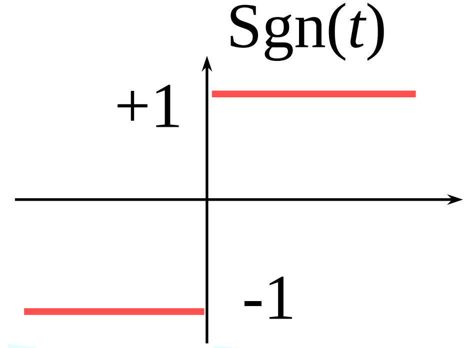
$$\mathscr{F}[E] = \lim_{\tau\to\infty} E\tau \mathrm{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) = 2\pi E \lim_{\tau\to\infty} \frac{\tau}{2\pi} \mathrm{Sa}\left(\frac{\tau}{2}\omega\right) = 2\pi E\delta(\omega)$$

直流信号的傅立叶变换是一个位于ω=0的冲激函数。直流信号只在ω=0的频率点取值，幅值是有限值E，频谱密度幅值是无穷大，所以频谱密度函数可表示为冲激函数。

5. 符号信号的傅立叶变换

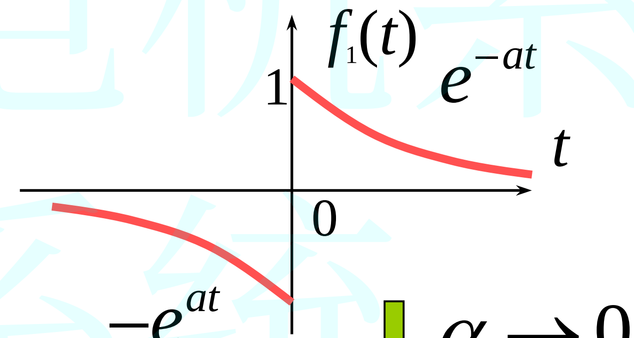
符号信号的定义为

$$\operatorname{sgn}(t)=\begin{cases}1 & t>0\\ -1 & t<0\end{cases}$$

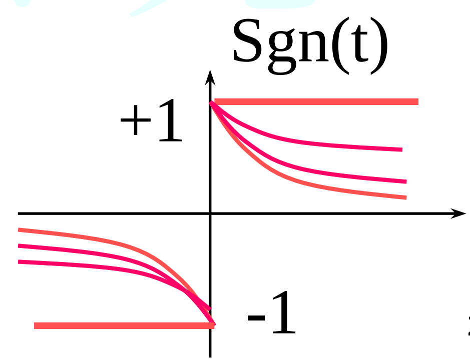


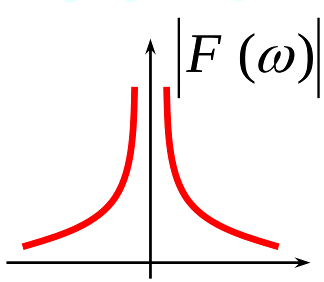
$$\mathscr{F}\left[\operatorname{sgn}(t)\right]=\lim_{\alpha\to 0}\left(-j\frac{2\omega}{\alpha^2+\omega^2}\right)=\frac{2}{j\omega}$$

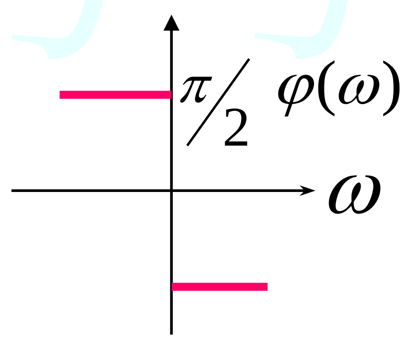
$$F(\omega)=-j\frac{2E\omega}{\alpha^2+\omega^2}$$



$\alpha\to 0$

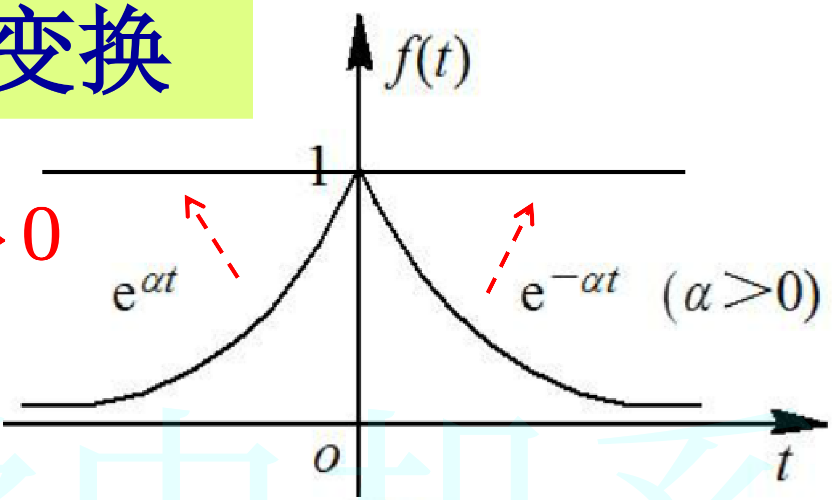






再看直流信号的傅里叶变换

双边指数信号：



$\alpha\rightarrow 0$

$$f(t)=e^{-\alpha|t|}\quad(-\infty<t<+\infty)$$

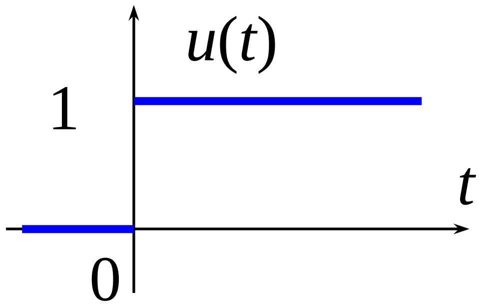
幅频特性

$$F(\omega)=\frac{2\alpha}{\alpha^{2}+}$$

$$\mathscr{F}[1]=\lim_{\alpha\to 0}\frac{2\alpha}{\alpha^{2}+\omega^{2}}=2\pi\delta(\omega)$$

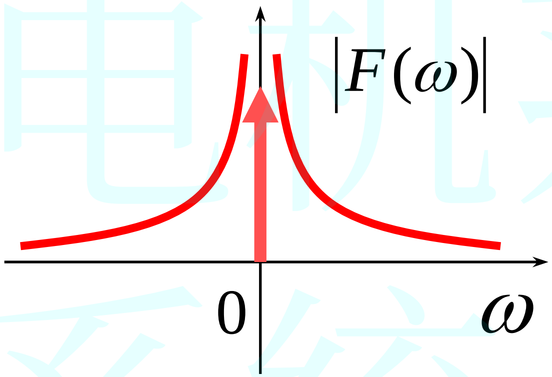
$$\lim_{\alpha\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2\alpha}{\alpha^{2}+\omega^{2}}d\omega=\lim_{\alpha\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2}{1+\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)^{2}}d\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)=\lim_{\alpha\to 0}2\arctan\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)\Bigg|_{-\infty}^{\infty}=2\pi$$

6. 阶跃信号的傅立叶变换



$$u(t)=[1+\mathrm{sgn}(t)]/2$$

$$\mathscr{F}[u(t)]=\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}$$



已知单边指数函数 $f(t)=\mathrm{e}^{-\alpha t}u(t)$ （$\alpha>0$）的傅立叶变换为

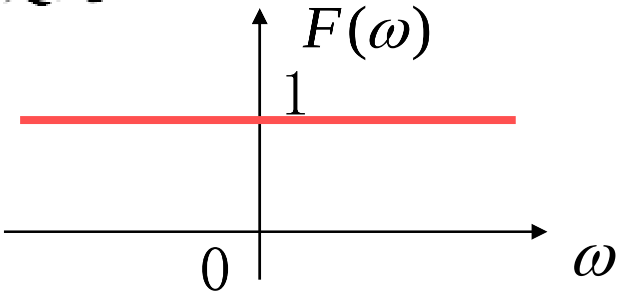
$$F(\omega)=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\alpha t}\mathrm{e}^{-j\omega t}\mathrm{d}t=\frac{1}{\alpha+j\omega}$$

取 $\alpha\to 0$ 的极限，单边指数函数趋于阶跃函数，但傅立叶变换不等，为什么？

7. 冲激信号的傅立叶变换

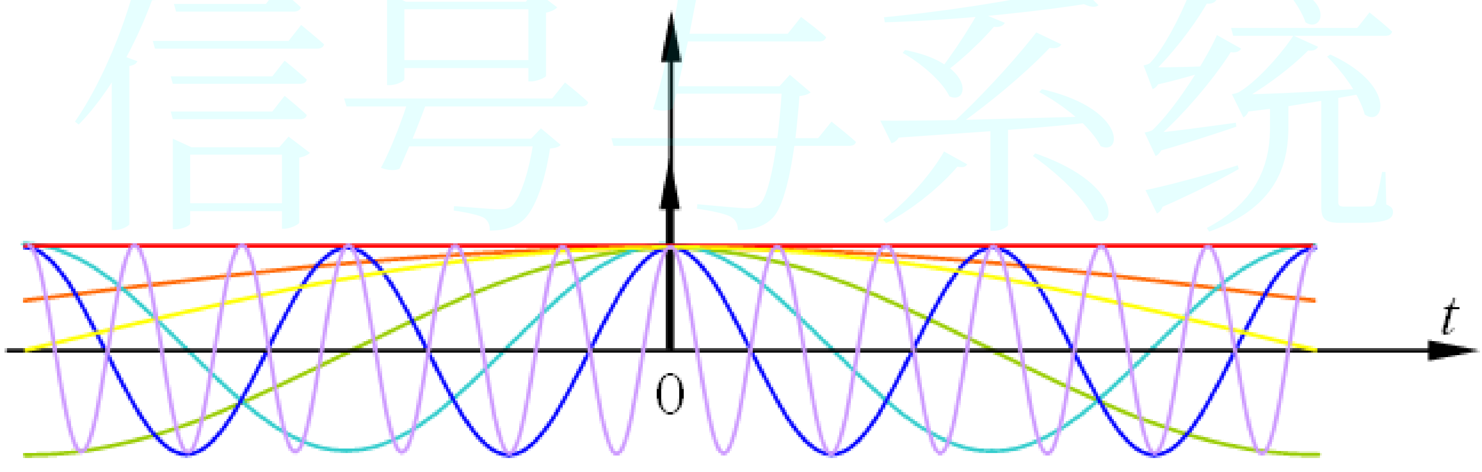
冲激信号$\delta(t)$是绝对可积的，根据傅立叶变换的定义

$$\mathcal{F}[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} \mathrm{d}t = 1$$



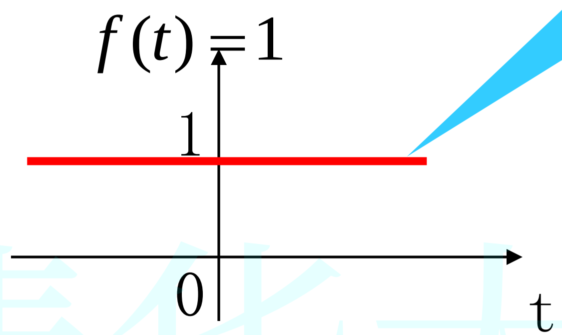
表示冲激信号具有在无穷带宽均匀分布的频谱特性。

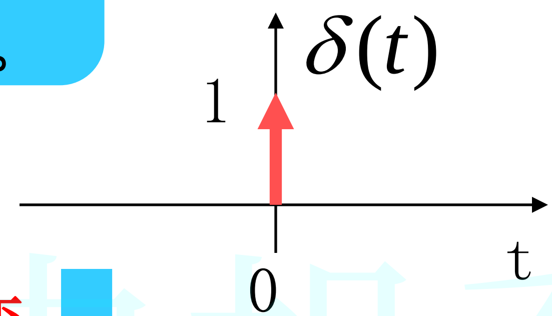
- 频谱密度幅值都是1，幅值都是无穷小
- 每个频率分量都是余弦函数



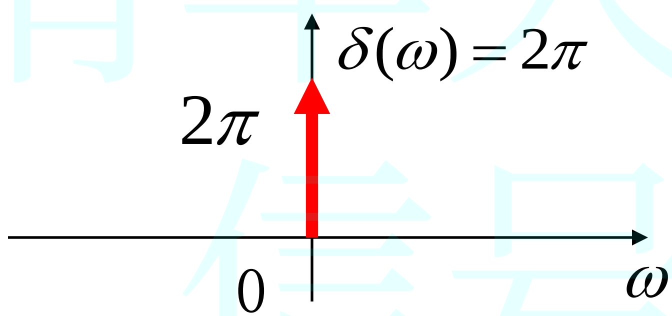
直流信号与冲激信号

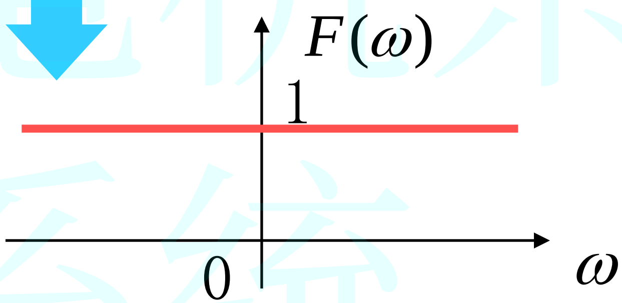
信号本身不是奇异的，但频谱是奇异的。





时域剧变，频宽增宽





注意系数 $1 \leftrightarrow 2\pi$

扩展意义下的傅里叶变换

<u>傅里叶变换的前提：信号满足狄利克雷条件</u>

前面讨论傅立叶变换的定义时，要求信号满足狄利克雷条件，是为了保证傅立叶变换的积分收敛。

对于非绝对可积的信号，其傅立叶变换的积分不收敛，经典意义上的傅立叶变换不存在。

阶跃函数：$f(t) = u(t)$

余弦函数：$f(t) = \cos(t)$

然而，在引入奇异函数后，一些非绝对可积的信号的傅立叶积分可用奇异函数表示。因此，在扩展意义上，这类信号的傅立叶变换存在。

傅里叶变换的性质

1. 线性特性

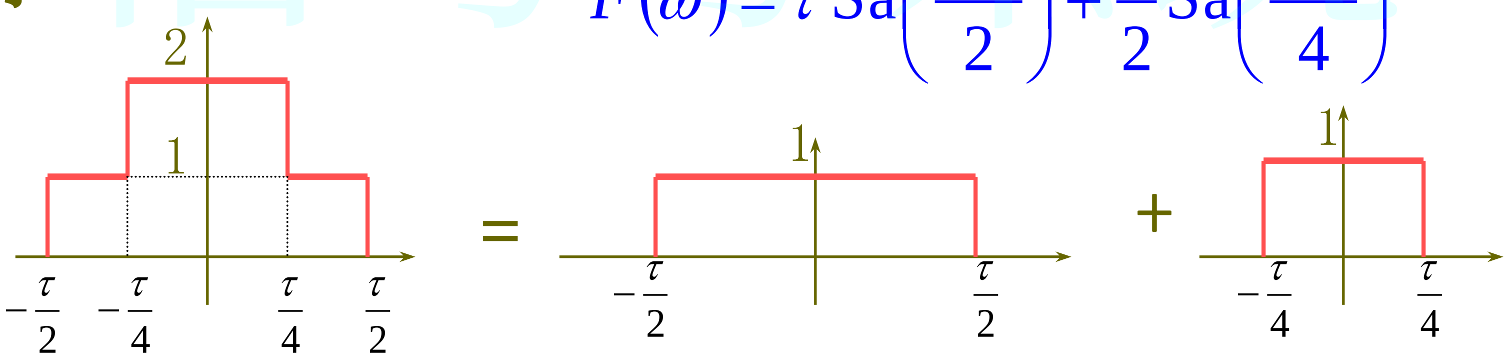
如果 $\mathcal{F}\left[f_i(t)\right]=F_i(\omega)\ (i=1,2,3,\cdots,N)$，则

$$\mathcal{F}\left[\sum_{i=1}^{N}A_i f_i(t)\right]=\sum_{i=1}^{N}A_i F_i(\omega)$$ 其中 A_i 为常数。

- 傅里叶变换是线性变换？

例

$$F(\omega)=\tau\,\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)+\frac{\tau}{2}\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)$$



2. 奇偶虚实特性

当*f*(*t*)是一个实函数时

信号 $f(t)$ 的傅立叶变换可展开为

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t dt - j\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega t dt$$

一般*F*(ω)都是一个复函数：

$$F(\omega)=|F(\omega)|e^{j\phi(\omega)}=R(\omega)+jI(\omega)$$

$$|F(\omega)|=\sqrt{R^2(\omega)+I^2(\omega)} \qquad \phi(\omega)=\arctan[I(\omega)/R(\omega)]$$

➢ 当*f*(*t*)是一个实函数：

$$F(\omega)=|F(\omega)|e^{j\phi(\omega)}=R(\omega)+jI(\omega)$$

$$R(-\omega)=R(\omega) \longleftarrow R(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t\,dt$$

$$I(-\omega)=-I(\omega) \longleftarrow I(\omega)=-\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega t\,dt$$

$$F(-\omega)=F^{*}(\omega)$$

$$|F(-\omega)|=|F(\omega)|$$

$$\phi(-\omega)=-\phi(\omega)$$

$$|F(\omega)|=\sqrt{R^2(\omega)+I^2(\omega)}$$

$$\phi(\omega)=\arctan\left[I(\omega)/R(\omega)\right]$$

这些关系的本质在于，把实函数分解为复分量时，复分量必须共轭成对出现，以保证叠加的结果为实函数。

- **当$f(t)$是一个实偶函数：**

$$I(\omega)=0$$

$$I(\omega)=-\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega t\,\mathrm{d}t$$

$$F(\omega)=R(\omega)$$

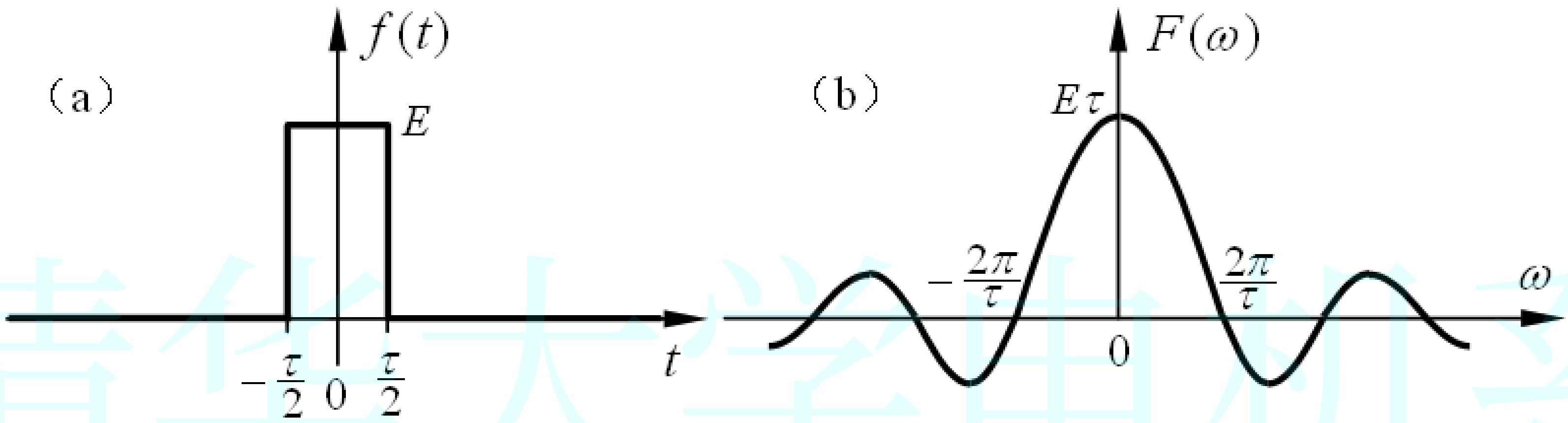
$$R(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t\,\mathrm{d}t$$

$$\phi(\omega)=\begin{cases}0 & F(\omega)>0\\ \pm\pi & F(\omega)<0\end{cases}$$

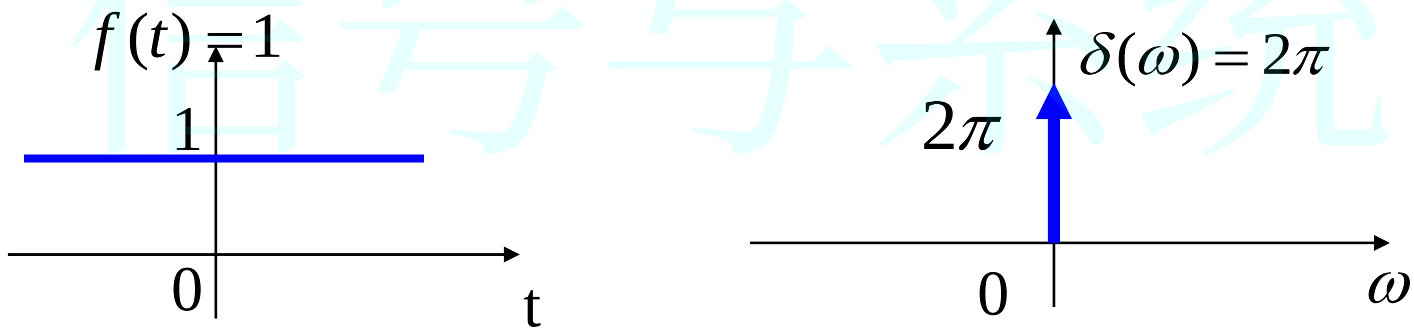
$$F(-\omega)=F(\omega)$$

实偶函数的傅立叶变换$F(\omega)$是实函数，所有频率分量都是偶函数。

例如：



(a)
$f(t)$
E
$-\frac{\tau}{2}$ 0 $\frac{\tau}{2}$
t
(b)
$F(\omega)$
$E\tau$
$-\frac{2\pi}{\tau}$
$\frac{2\pi}{\tau}$
ω
0



$f(t)=1$
1
0
t
$\delta(\omega)=2\pi$
2π
0
ω

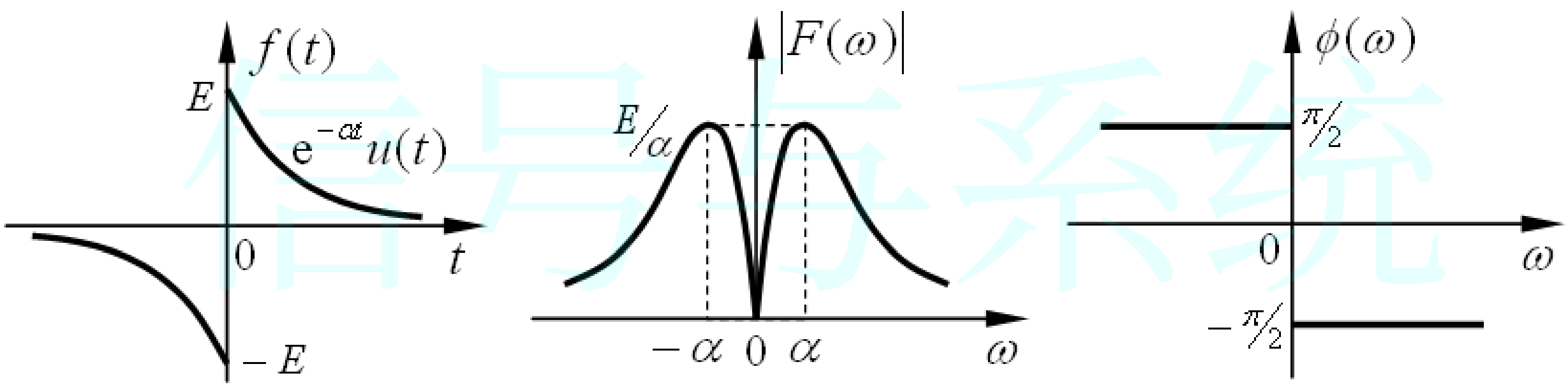
类似地，当 $f(t)$ 是实的奇函数时，有

$$R(\omega)=0 \qquad\qquad F(\omega)=jI(\omega)$$

$$F(-\omega)=-F(\omega) \qquad\qquad \phi(\omega)=\begin{cases}\pi/2 & I(\omega)>0\\ -\pi/2 & I(\omega)<0\end{cases}$$

此关系表明，实奇函数的傅立叶变换 $F(\omega)$ 是纯虚函数，实奇函数的所有分量都是奇函数，即正弦分量。

双边奇指数函数



$$F(\omega)=-j\frac{2E\omega}{\alpha^2+\omega^2}$$

此外，无论 $f(t)$ 是实函数还是复函数，都存在以下关系

$$\mathcal{F}\left[f(-t)\right]=F(-\omega)$$

$$\mathcal{F}\left[f^{*}(t)\right]=F^{*}(-\omega)$$

$$\mathcal{F}\left[f^{*}(-t)\right]=F^{*}(\omega)$$

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-j\omega t}\mathrm{d}t$$

3. 对称特性

傅里叶正变换和逆变换在形式上相似，存在对称特性

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \underline{F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega}$$

有什么用？

如果$\mathscr{F}[f(t)] = F(\omega)$，那么

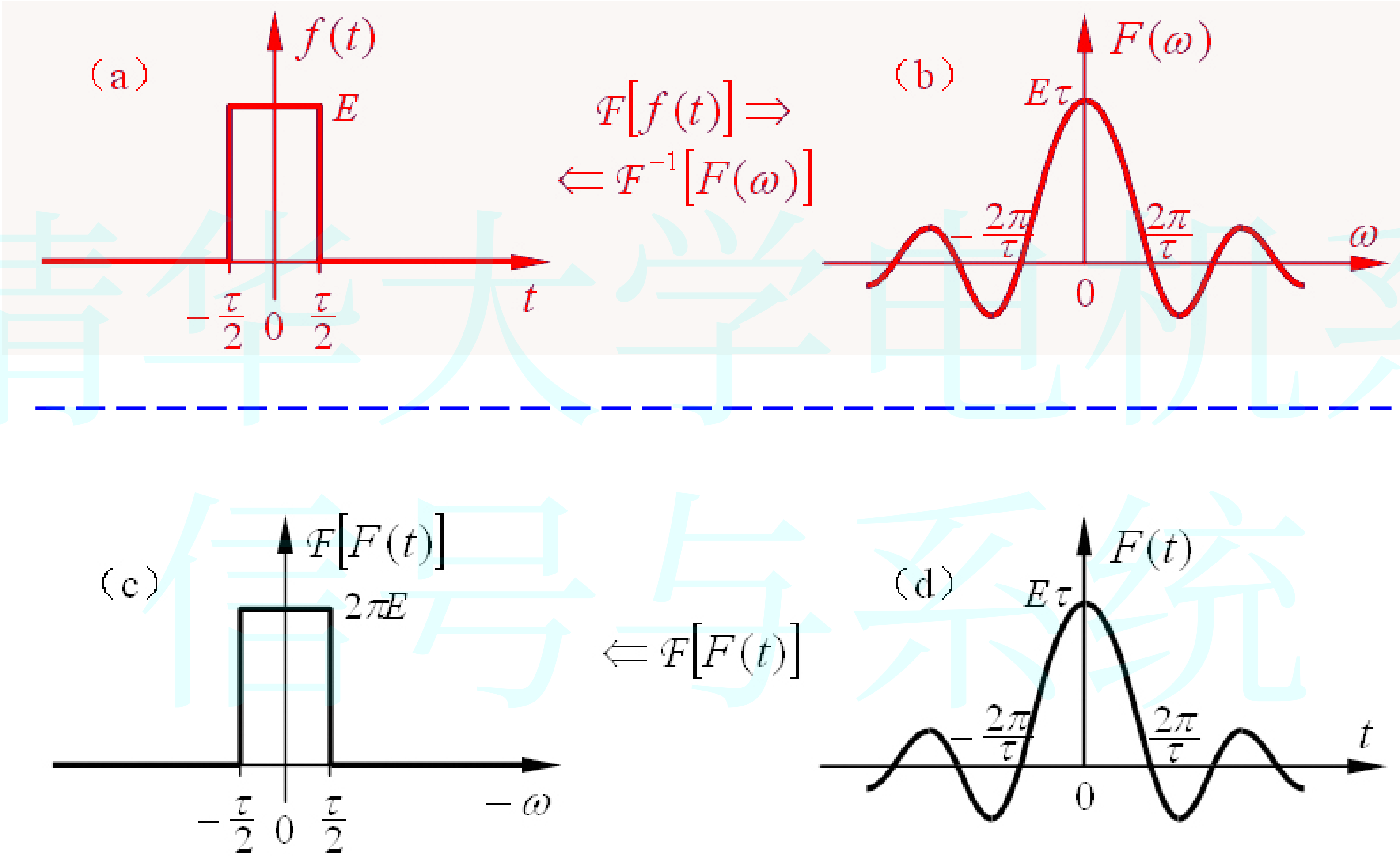
$$\mathscr{F}\left[F(t)\right]=\int_{-\infty}^{\infty} F(t)\mathrm{e}^{-j\omega t}\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{\infty} \underline{F(t)\mathrm{e}^{j(-\omega)t}\mathrm{d}t}$$

$$=2\pi f(-\omega)$$

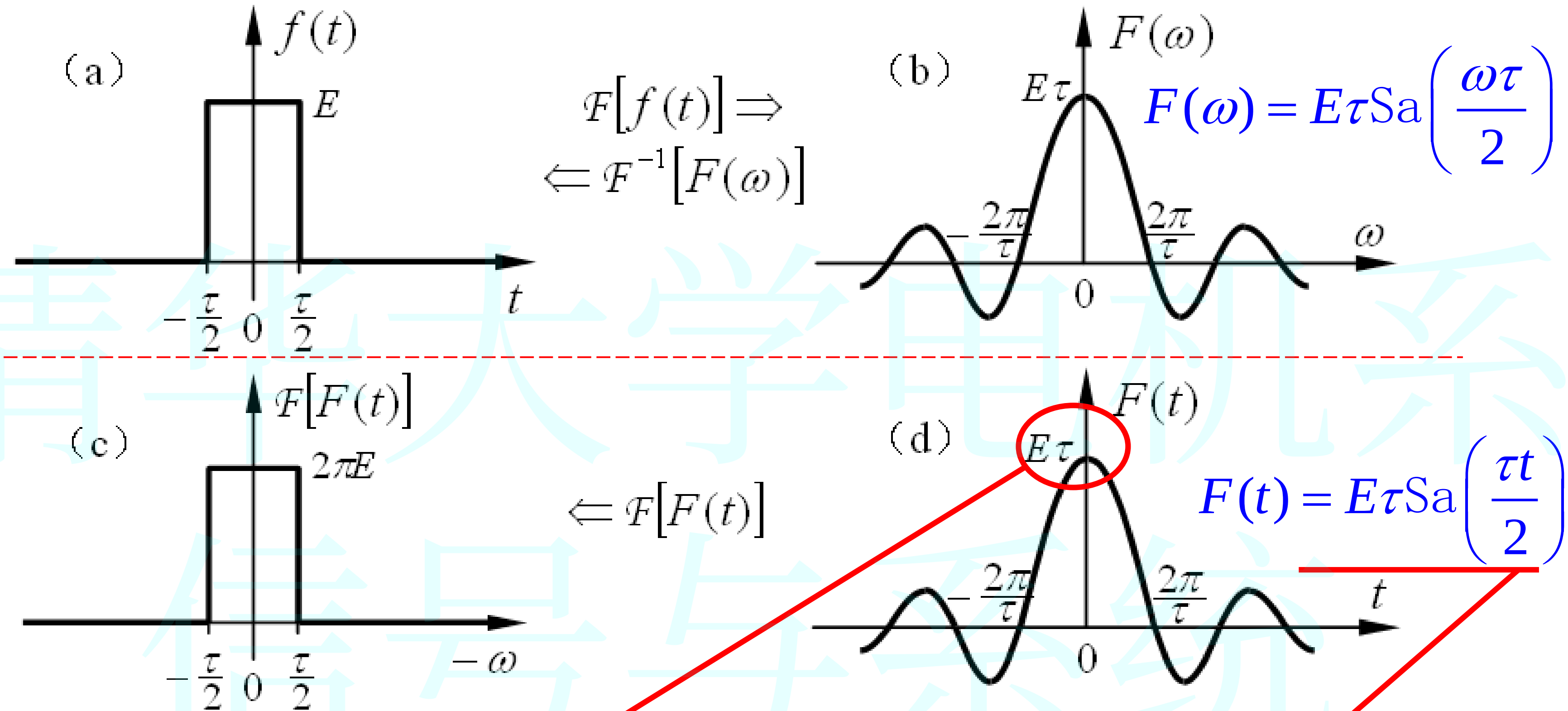
如果$f(t)$是偶函数，那么

$$\mathscr{F}\left[F(t)\right]=2\pi f(\omega)$$

例


(a)
$f(t)$
E
$-\frac{\tau}{2}$ 0 $\frac{\tau}{2}$
t
$\mathcal{F}[f(t)] \Rightarrow$
$\Leftarrow \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)]$
(b)
$F(\omega)$
$E\tau$
$-\frac{2\pi}{\tau}$ $\frac{2\pi}{\tau}$
0
ω
(c)
$\mathcal{F}[F(t)]$
$2\pi E$
$-\frac{\tau}{2}$ 0 $\frac{\tau}{2}$
$-\omega$
$\Leftarrow \mathcal{F}[F(t)]$
(d)
$F(t)$
$E\tau$
$-\frac{2\pi}{\tau}$ $\frac{2\pi}{\tau}$
0
t

例 1　求抽样函数 $F(t)=8\mathrm{Sa}\left(\dfrac{\pi}{6}t\right)$ 的傅立叶变换 $\mathcal{F}[F(t)]$。



解：

$$E\tau=8 \qquad \tau=\frac{\pi}{3} \leftarrow \frac{\tau}{2}=\frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow E=\frac{24}{\pi} \Rightarrow$$

矩形脉冲高度$2\pi E$=48，宽度 $\tau=\dfrac{\pi}{3}$

4. 尺度特性

如果 $\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$，有

$$\mathcal{F}[f(at)] = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

证明

令 $at = x$

$$a > 0 \quad \mathrm{FT}[f(at)] = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\omega\frac{x}{a}} dx = \frac{1}{a} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

$$a < 0 \quad FT[f(at)] = \frac{-1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\omega\frac{x}{a}} dx = \frac{-1}{a} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

几种情况讨论：

$$\mathcal{F}[f(at)]=\frac{1}{|a|}F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

$a=-1$，时域波形**反褶** $\Rightarrow$ 频谱**反褶**， $f(-t)\Rightarrow F(-\omega)$

$|a|>1$，时域波形**压缩** $\Rightarrow$ 频谱**展宽**，幅值变小

$|a|<1$，时域波形**扩宽** $\Rightarrow$ 频谱**压缩**，幅值增大

物理解释

时域波形**压缩 a倍** $\Rightarrow$ 时域波形随时间变化加快a倍；

$\Rightarrow$频率分量增加a倍 $\Rightarrow$ **频带展宽a倍**

能量守恒 $\Rightarrow$ 频谱幅值下降

时域压缩，频域扩展；
时域扩展，频域压缩。

从信号传输角度讨论

波形在 t 轴上压缩 $\Rightarrow$ 传输速度加快 $\Rightarrow$ 要求系统带宽↑

信号传输速度与系统带宽是一对矛盾

5. 时移特性

如果 $\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$，有

$$\mathcal{F}[f(t \pm t_0)] = F(\omega)\mathrm{e}^{\pm j\omega t_0}$$

证明 $$\mathcal{F}[f(t \pm t_0)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t \pm t_0)\mathrm{e}^{-j\omega t}\mathrm{d}t$$

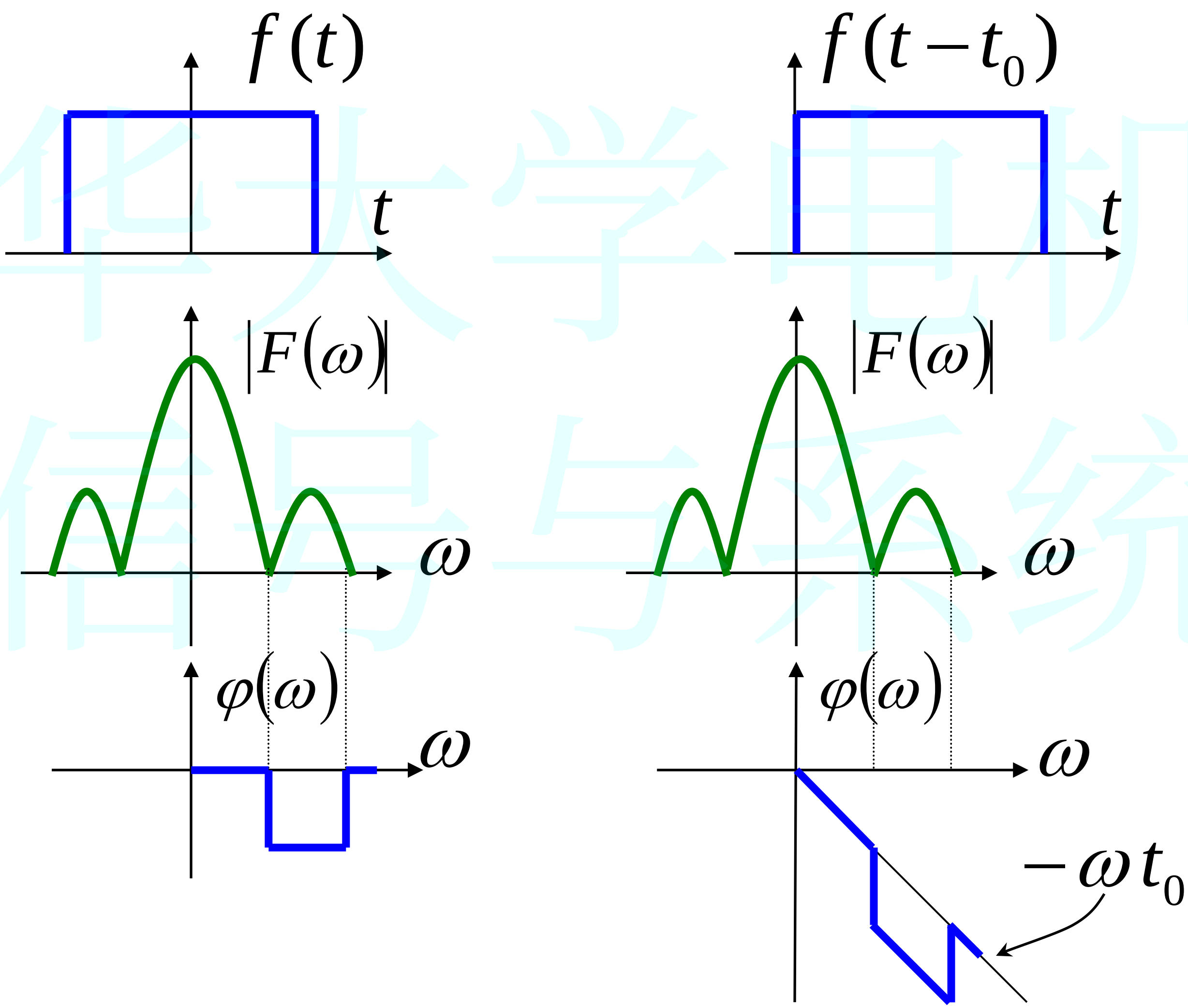
令 $x = t \pm t_0$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f(t \pm t_0)] &= \mathcal{F}[f(x)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-j\omega(x \mp t_0)}\mathrm{d}x \\ &= e^{\pm j\omega t_0}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-j\omega x}\mathrm{d}x \\ &= F(\omega)\mathrm{e}^{\pm j\omega t_0}\end{aligned}$$

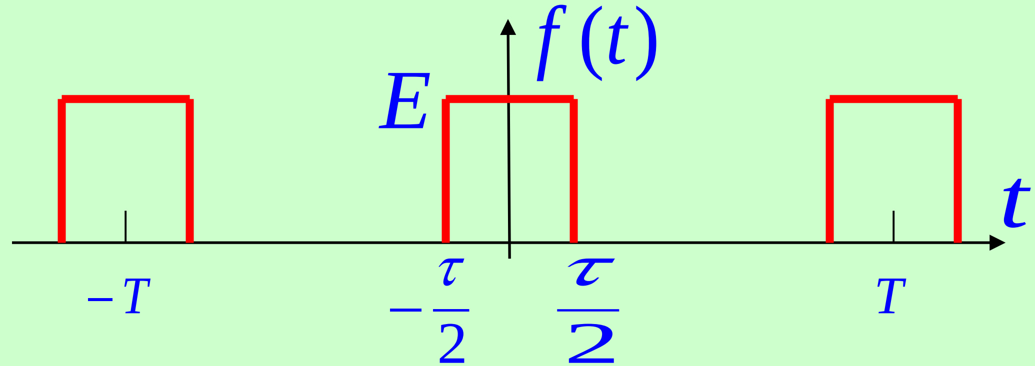
时移特性表明，信号移位 $(\pm t_0)$ 时，其幅值谱不变，相位谱产生附加变化 $(\pm\omega t_0)$。物理意义：当信号 $f(t)$ 移位 $(\pm t_0)$ 时，其每个频率分量都移位 $(\pm t_0)$。频率为 ω 的频率分量移位 $(\pm t_0)$ 时间，其幅值不变，初始相位改变了 $(\pm\omega t_0)$

时域信号**平移** $\Rightarrow$

（幅度谱不变，附加一个与频率成**线性关系**的相移）



例　三个相同方波脉冲，间隔$T=3\tau$，求$F(\omega)$.



[解]　(1) 先求出一个方波$f_0(t)$频谱$F_0(\omega)$

(2) 用时移性质求$F_1(\omega)$、$F_2(\omega)$

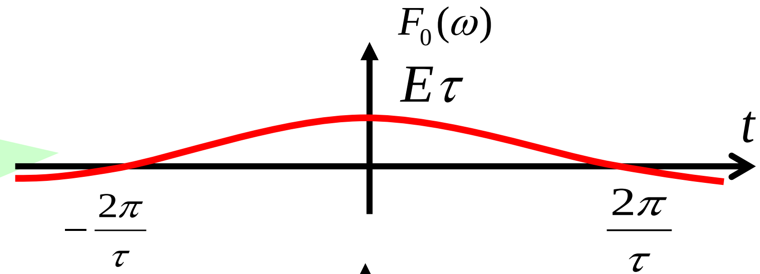
(3) 结果加起来

$$f_0(t)=\begin{cases} E & |t|<\frac{\tau}{2} \\ 0 & |t|>\frac{\tau}{2} \end{cases} \Rightarrow F_0(\omega)=E\tau\,\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

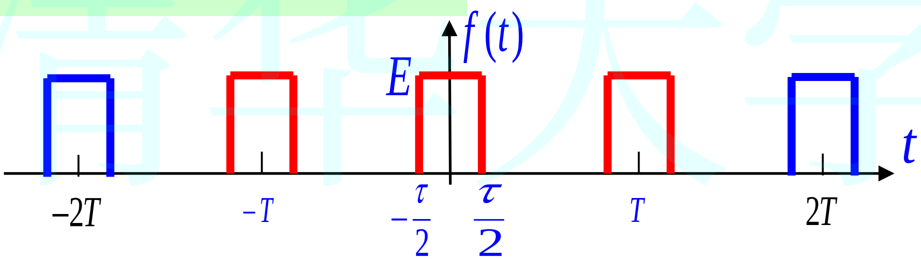
$$f(t)=f_0(t)+f_0(t+T)+f_0(t-T)$$

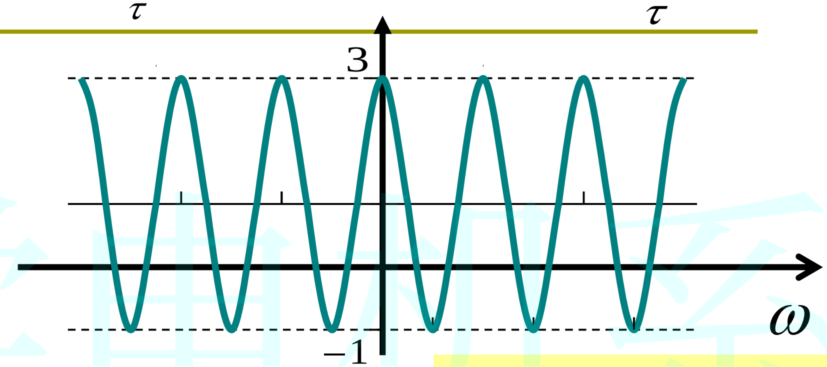
$$F(\omega)=F_0(\omega)\left(1+e^{j\omega T}+e^{-j\omega T}\right)=F_0(\omega)(1+2\cos\omega T)$$

包络线
形状不变



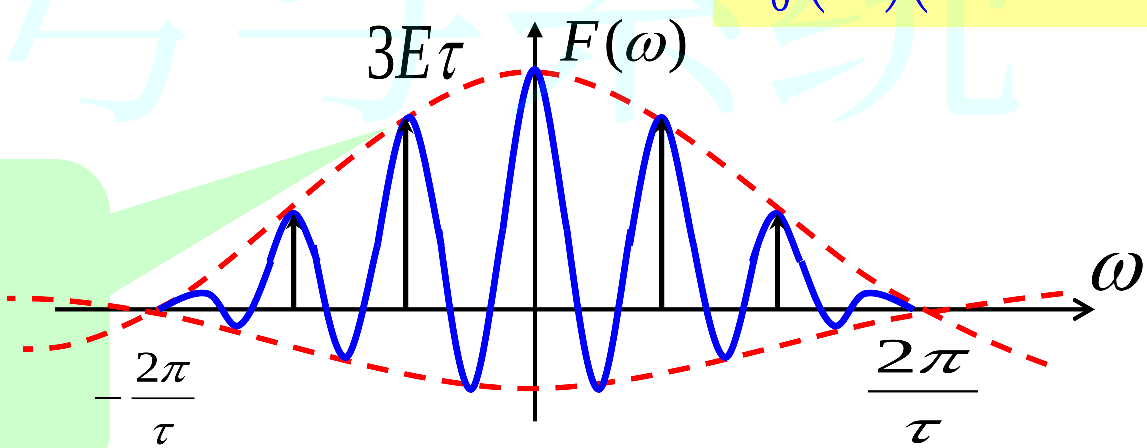
非周期⇔周期
连续⇔离散





$1+2\cos\omega T$

$F_0(\omega)(1+2\cos\omega T+2\cos 2\omega T)$ ← $F_0(\omega)(1+2\cos\omega T)$



当脉冲数增加时，
频率分量集中在
$k\cdot\frac{2\pi}{T}$ 频率点上。

已知 $f(t) \Leftrightarrow F(\omega)$，求 $\mathrm{FT}[f(at \pm b)]$

4. 尺度特性

如果 $\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$，有

$$\mathcal{F}[f(at)] = \frac{1}{|a|} F(\frac{\omega}{a})$$

5. 时移特性

如果 $\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$，有

$$\mathcal{F}[f(t \pm t_0)] = F(\omega) \mathrm{e}^{\pm j \omega t_0}$$

例　　已知 $f(t) \Leftrightarrow F(\omega)$，求 $\text{FT}[f(at \pm b)]$

特别地　$a=1$，　时移

$a=-1$，反褶

$|a| \neq 1$，尺度

带有尺度变换的时移特性

[解]

法一

先位移 $\text{FT}\left[f(t \pm b)\right] = F(\omega) \cdot e^{\pm j\omega \cdot b}$

再尺度 $\text{FT}\left[f(at \pm b)\right] = \dfrac{1}{|a|} F\left(\dfrac{\omega}{a}\right) \cdot e^{\pm j\frac{\omega}{a} \cdot b}$

法二　先尺度 $\text{FT}\left[f(at)\right] = \dfrac{1}{|a|} F\left(\dfrac{\omega}{a}\right)$

a作用于t

再位移 $\text{FT}\left[f\left(a(t \pm \dfrac{b}{a})\right)\right] = \dfrac{1}{|a|} F\left(\dfrac{\omega}{a}\right) \cdot e^{\pm j\omega \cdot \frac{b}{a}}$

6. 频移特性

如果 $\mathcal{F}[f(t)]=F(\omega)$，有

$$\mathcal{F}\left[f(t)\mathrm{e}^{\pm j\omega_0 t}\right]=F(\omega\mp\omega_0)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{j\omega_0 t}e^{-j\omega t}dt$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j(\omega-\omega_0)t}dt=F(\omega-\omega_0)$$

频移特性的本质是频谱搬移。$f(t)$ 乘以 $\mathrm{e}^{\pm j\omega_0 t}$，其每个频率分量 $\mathrm{e}^{\pm j\omega t}$ 都乘以 $\mathrm{e}^{\pm j\omega_0 t}$，产生 $(\pm\omega_0)$ 的频率改变，相当于 $F(\omega)$ 平移 $(\mp\omega_0)$。

例 2 求 $\cos\omega_0 t$ 和 $\sin\omega_0 t$ 的傅立叶变换。

解：已知 $\mathcal{F}[1]=2\pi\delta(\omega)$，则

$$\mathcal{F}[\cos\omega_0 t]=F\left[\frac{(\mathrm{e}^{j\omega_0 t}+\mathrm{e}^{-j\omega_0 t})}{2}\right]=\pi[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]$$

$$\mathcal{F}[\sin\omega_0 t]=F\left[\frac{(\mathrm{e}^{j\omega_0 t}-\mathrm{e}^{-j\omega_0 t})}{j2}\right]=-j\pi[\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)]$$

三角信号的傅立叶积分不收敛，引入冲激函数后其傅立叶变换存在。

例 3　求 $\cos\omega_1 t\cos\omega_2 t$ 的傅立叶变换。

解:

$$\mathcal{F}\left[\cos\omega_1 t\cos\omega_2 t\right]=\mathcal{F}\left[\frac{(\mathrm{e}^{j\omega_1 t}+\mathrm{e}^{-j\omega_1 t})}{2}\frac{(\mathrm{e}^{j\omega_2 t}+\mathrm{e}^{-j\omega_2 t})}{2}\right]$$

$$=\frac{1}{4}\mathcal{F}\left[\mathrm{e}^{j(\omega_1+\omega_2)t}+\mathrm{e}^{j(\omega_1-\omega_2)t}+\mathrm{e}^{-j(\omega_1-\omega_2)t}+\mathrm{e}^{-j(\omega_1+\omega_2)t}\right]$$

$$=\frac{\pi}{2}\left[\delta(\omega-\omega_1-\omega_2)+\delta(\omega-\omega_1+\omega_2)+\delta(\omega+\omega_1-\omega_2)+\delta(\omega+\omega_1+\omega_2)\right]$$

或

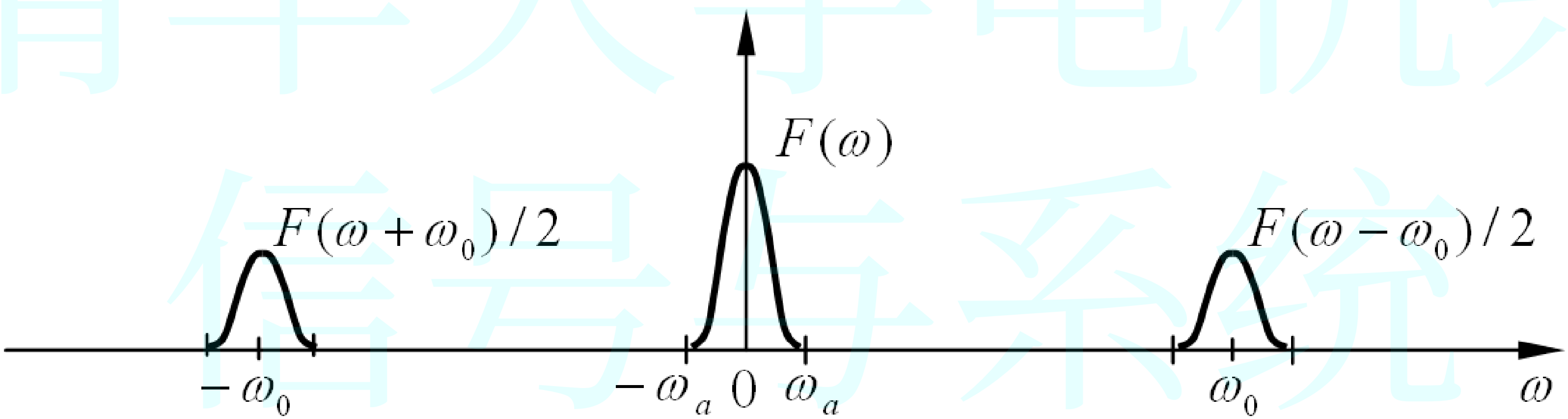
$$\mathcal{F}\left[\cos\omega_1 t\cos\omega_2 t\right]=\frac{1}{2}\mathcal{F}\left[\cos(\omega_1+\omega_2)t+\cos(\omega_1-\omega_2)t\right]$$

$$=\frac{\pi}{2}\left[\delta(\omega-\omega_1-\omega_2)+\delta(\omega+\omega_1+\omega_2)+\delta(\omega-\omega_1+\omega_2)+\delta(\omega+\omega_1-\omega_2)\right]$$

频率为 ω_1 和 ω_2 的两个三角信号相乘，得到的是频率为 $\omega_1+\omega_2$ 和 $\omega_1-\omega_2$ 的两种频率的信号。

例 4　已知 $\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$，求 $f(t)\cos\omega_0 t$ 的傅立叶变换。

解：$\mathcal{F}[f(t)\cos\omega_0 t] = \mathcal{F}\left[f(t)\dfrac{(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})}{2}\right] = \dfrac{1}{2}[F(\omega-\omega_0) + F(\omega+\omega_0)]$



问题

- GSM900M： 890MHz－915MHz(上行) 935MHz－960MHz(下行)
- CDMA800M：825MHz－835MHz(上行) 870MHz－880MHz(下行)
- DCS1800M： 1850MHz－1910MHz(上行） 1930MHz－1990MHz(下行）
- PCS1900M： 1850MHz－1910MHz(上行） 1930MHz－1990MHz(下行）

- **为什么我们使用手机通讯的传输信号频率这么高？**

- **人的声音频率范围：**
- 声音作为一种波，频率在20 Hz~20 kHz之间的声音是可以被人耳识别的。

调制解调技术

- 背景
  - 天线尺寸为辐射信号波长的十分之一或更大，信号才能有效地被接收
  - 语音信号的范围：20Hz --- 20kHz
  - $c = \lambda * f$，所以频率越高，信号波长就越短

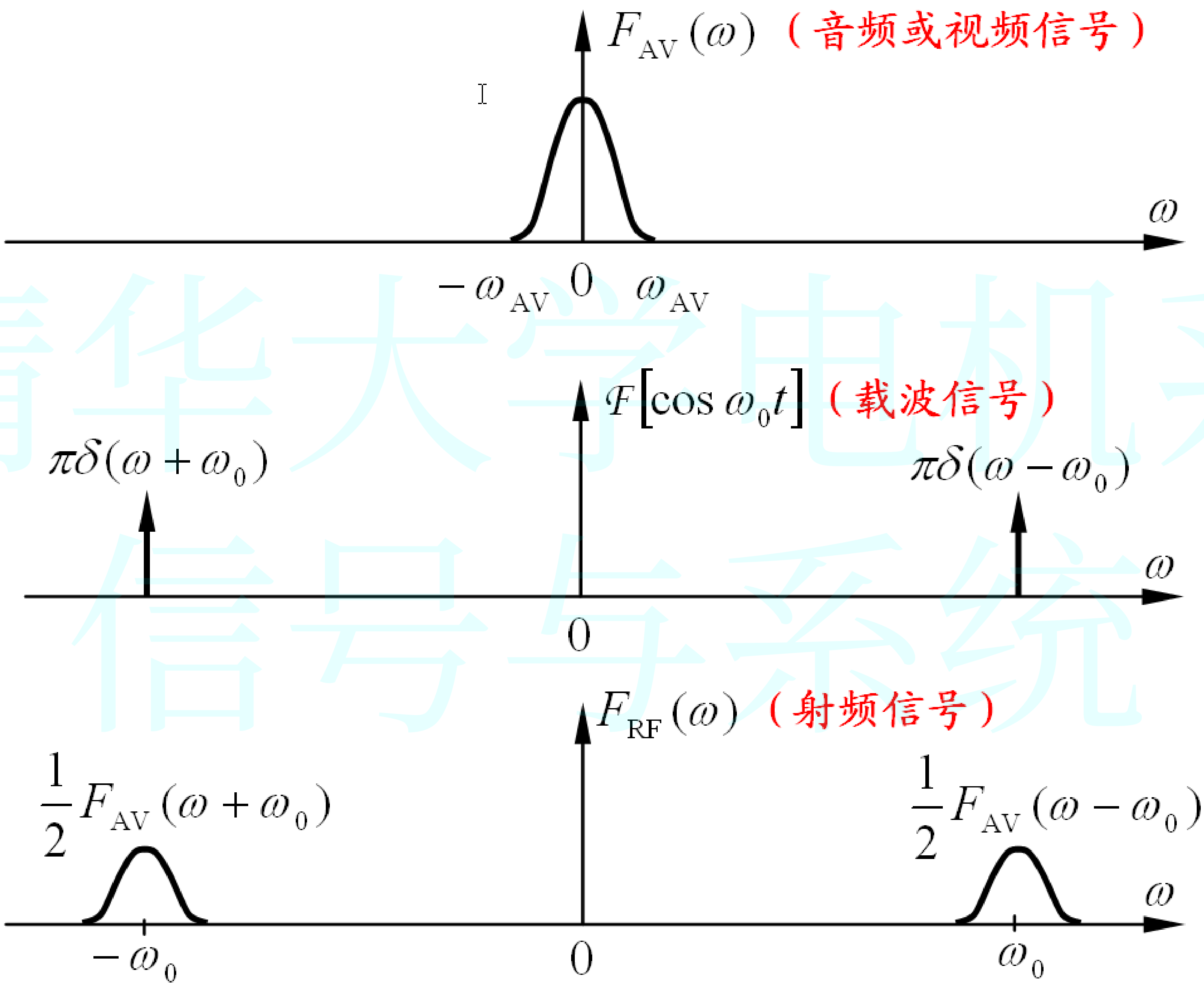
$\lambda \approx 15$公里

手机信号800M-2000M

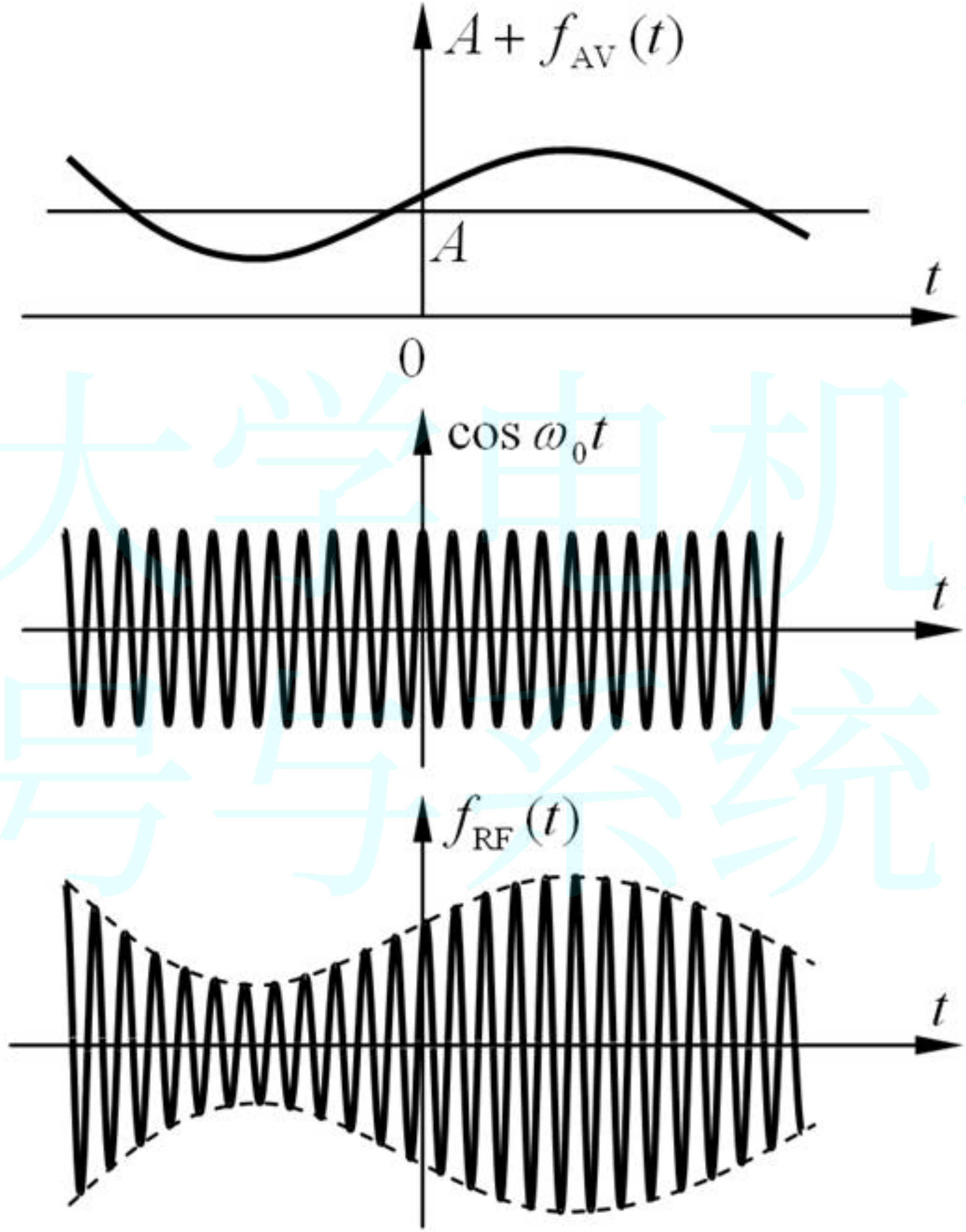
大致波长 0.15m

天线 0.15/4 =0.0375m

调制解调技术（频域）


$F_{AV}(\omega)$ （音频或视频信号）
ω
$-\omega_{AV}$ 0 ω_{AV}
$\mathcal{F}[\cos\omega_0 t]$ （载波信号）
$\pi\delta(\omega+\omega_0)$
$\pi\delta(\omega-\omega_0)$
ω
0
$F_{RF}(\omega)$ （射频信号）
$\frac{1}{2}F_{AV}(\omega+\omega_0)$
$\frac{1}{2}F_{AV}(\omega-\omega_0)$
ω
$-\omega_0$ 0 ω_0

调制解调技术（时域）



7. 时域微分特性

如果 $\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$，有

$$\mathcal{F}\left[\frac{\mathrm{d}^n f(t)}{\mathrm{d}t^n}\right] = (j\omega)^n F(\omega)$$

当 $n = 1$ 时，有

$$\mathcal{F}\left[\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\right] = j\omega F(\omega)$$

证：

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\mathrm{e}^{j\omega t}\mathrm{d}\omega$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{df(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} [j\omega F(\omega)]\mathrm{e}^{j\omega t}\mathrm{d}\omega$$

$$\Downarrow$$

$$FT\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = j\omega F(\omega)$$

对$f(t)$的求导相当于对其每个频率分量进行求导。对每个频率分量求导一次，增加一个$j\omega$因子，即相位左移$\pi/2$，幅值变化ω倍。

例5 已知单位阶跃信号的傅里叶变换，根据时域微分特性求单位冲激信号的傅立叶变换。

解：

$$\mathcal{F}[\delta(t)] = \mathcal{F}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(t)\right] = j\omega\mathcal{F}[u(t)] = j\omega\left[\underbrace{\pi\delta(\omega)}_{\text{直流分量}} + \frac{1}{j\omega}\right] = j\omega\pi\delta(\omega) + 1 = 1$$

注意：

利用时域微分特性，由微分后信号的傅立叶变换求微分前信号的傅立叶变换，有可能出现错误。

例如，已知

$$\mathcal{F}[\delta(t)]=\mathcal{F}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(t)\right]=j\omega\mathcal{F}[u(t)]=1$$

如果由冲激信号的傅立叶变换求阶跃信号的傅立叶变换，则有

$$\mathcal{F}[u(t)]=\frac{1}{j\omega}$$

结果显然是错误的。

这是因为信号微分时丢失了直流项，微分后信号不能反映微分前信号的直流分量。

8. 频域微分特性

如果 $\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$，有

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{\mathrm{d}^n F(\omega)}{\mathrm{d}\omega^n}\right] = (-jt)^n f(t)$$

当 $n=1$ 时，有

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{\mathrm{d}F(\omega)}{\mathrm{d}\omega}\right] = (-jt) f(t)$$

或

$$\mathcal{F}[(-jt) f(t)] = \frac{\mathrm{d}F(\omega)}{\mathrm{d}\omega}$$

例6 求傅立叶变换FT[t]。

解：

已知 $\mathcal{F}[1] = 2\pi\delta(\omega)$ 即认为 $f(t)=1$

$$\mathcal{F}[-jt] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}[2\pi\delta(\omega)] = 2\pi\delta'(\omega) \Rightarrow \mathcal{F}[t] = j2\pi\delta'(\omega)$$

9. 时域积分特性

如果 $\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$，有

$$\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\mathrm{d}\tau\right] = \frac{F(\omega)}{j\omega} + \pi F(0)\delta(\omega)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)u(t-\tau)d\tau$$

证明：

$$\mathrm{FT}\left[\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau\right] = \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\underline{\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau}\right]e^{-j\omega t}dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\left[\underline{\int_{-\infty}^{+\infty} u(t-\tau)e^{-j\omega t}dt}\right]d\tau$$

交换积分次序

此项为 $\mathrm{FT}[u(t-\tau)]$

已知 $\mathrm{FT}\left[u\left(t-\tau\right)\right]=\left(\dfrac{1}{j\omega}+\pi\,\delta\left(\omega\right)\right)\cdot e^{-j\omega\tau}$

所以 $\mathrm{FT}\left[\int_{-\infty}^{t} f\left(\tau\right)d\tau\right]=\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\tau\right)\left[\dfrac{1}{j\omega}+\pi\,\delta\left(\omega\right)\right]e^{-j\omega\tau}d\tau$

$$=\frac{1}{j\omega}\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\tau\right)e^{-j\omega\tau}d\tau+\pi\delta\left(\omega\right)\int_{-\infty}^{\infty} f\left(\tau\right)e^{-j\omega\tau}d\tau$$

$$=\frac{1}{j\omega}F\left(\omega\right)+\pi\,\delta\left(\omega\right)F\left(0\right)$$ 证毕

若$F(0)=0$，即 $f(t)$ 的积分为零，则

$$\mathrm{FT}\left[\int_{-\infty}^{t} f\left(\tau\right)d\tau\right]=\frac{F\left(\omega\right)}{j\omega}$$

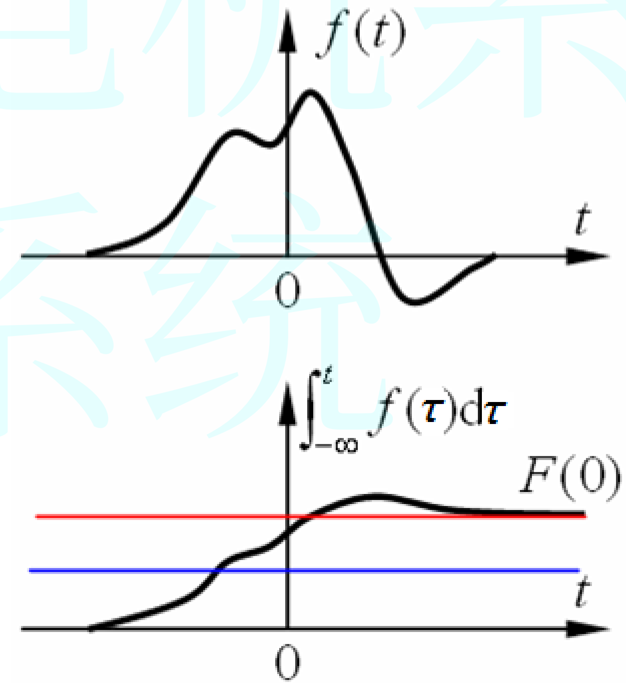
$$\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\mathrm{d}\tau\right]=\frac{F(\omega)}{j\omega}+\pi F(0)\delta(\omega)$$

- 式中右边第一项和微分特性是对称的。
- 式中右边第二项表示一个直流分量，是由于对$f(t)$积分产生的

$$\lim_{t\to-\infty}\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\mathrm{d}\tau=0 \qquad \lim_{t\to+\infty}\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\mathrm{d}\tau=F(0)$$

所以 $\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\mathrm{d}\tau$ 的直流分量为F(0)/2

其傅立叶变换为 $\pi F(0)\delta(\omega)$



$$D=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f_1(t)\mathrm{d}t$$

命题：设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$，则

$$\boxed{\overline{f}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x f(t)dt}{x}=A}$$

证： 据已知条件可知，$f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上是有界的. $\forall\varepsilon>0$，

因 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$，故存在 X，当 $x>X$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$. 又有

$$\left|\frac{\int_0^x f(t)dt}{x}-A\right|=\left|\frac{\int_0^x [f(t)-A]dt}{x}\right|\le\frac{\int_0^X |f(t)-A|dt}{x}+\frac{\int_X^x |f(t)-A|dt}{x}.$$

因为对固定的X，$\int_0^X |f(t)-A|dt$ 为有界量，故当$x\to+\infty$时，

上式右端的第一项趋于零，而对第二项有

$$\frac{\int_X^x |f(t)-A|dt}{x} \le \frac{\varepsilon(x-X)}{x} < \varepsilon$$

，这说明当$x\to+\infty$时，

$$\frac{\int_X^x |f(t)-A|dt}{x}$$

也趋于零。所以有

$$\lim_{x\to+\infty}\left|\frac{\int_0^x f(t)dt}{x}-A\right|=0 \qquad \text{即}\ \overline{f}=A$$

$$\lim_{t\to-\infty}\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\mathrm{d}\tau=0 \qquad \lim_{t\to+\infty}\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\mathrm{d}\tau=F(0)$$

$$D=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f_1(t)\mathrm{d}t$$

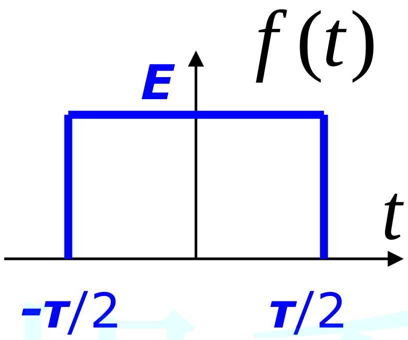
例7 利用时域积分特性求阶跃信号的傅立叶变换。

解：已知$\mathcal{F}[\delta(t)] = F(\omega) = 1$，根据时域积分特性，有

$$\mathcal{F}[u(t)] = \mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{t} \delta(t)\mathrm{d}t\right] = \frac{F(\omega)}{j\omega} + \pi F(0)\delta(\omega) = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$$

$\delta(t)$的积分为$u(t)$，其直流分量为$1/2$，直流分量对应的傅立叶变换为$\pi\delta(\omega)$。

例8 利用时域积分特性求矩形波信号的傅立叶变换。



解：已知矩形波信号

$$g(t)=E\left[u(t+\tau/2)-u(t-\tau/2)\right]$$

有

$$\frac{\mathrm{d}g(t)}{\mathrm{d}t}=E\left[\delta(t+\tau/2)-\delta(t-\tau/2)\right]$$

$$\mathcal{F}\left[\frac{\mathrm{d}g(t)}{\mathrm{d}t}\right]=E(\mathrm{e}^{j\omega\tau/2}-\mathrm{e}^{-j\omega\tau/2})$$

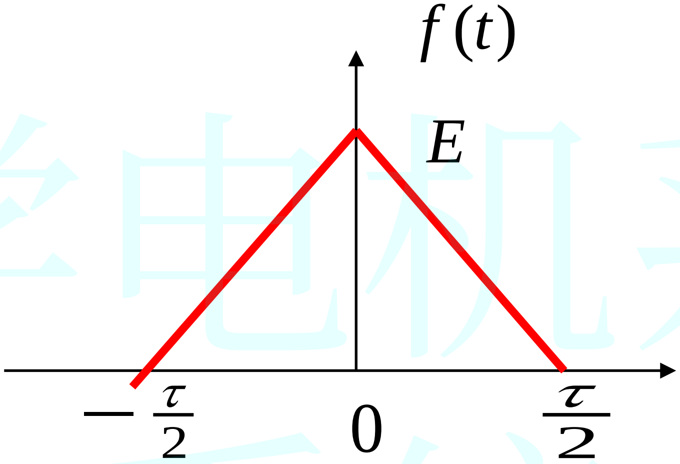
0

$$\mathcal{F}\left[g(t)\right]=\frac{1}{j\omega}\mathcal{F}\left[\frac{\mathrm{d}g(t)}{\mathrm{d}t}\right]+\pi\mathcal{F}\left[\frac{\mathrm{d}g(t)}{\mathrm{d}t}\right]_{\omega=0}\delta(\omega)$$

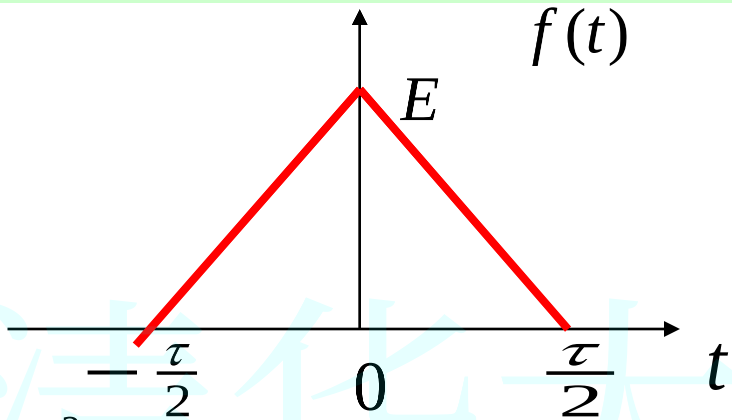
$$\Rightarrow\quad \mathcal{F}\left[g(t)\right]=\frac{E}{j\omega}(\mathrm{e}^{j\omega\tau/2}-\mathrm{e}^{-j\omega\tau/2})=E\,\tau\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

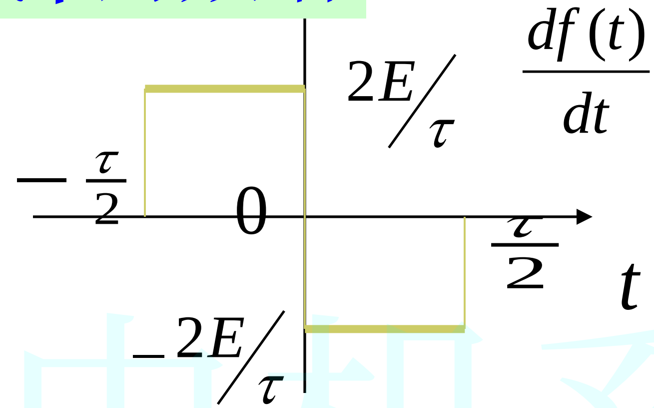
利用FT的微分性质求三角脉冲的频谱

$$f(t)=\begin{cases} E\left(1-\frac{2}{\tau}|t|\right) & |t|<\frac{\tau}{2} \\ 0 & |t|>\frac{\tau}{2} \end{cases}$$



利用FT的微分性质求三角脉冲的频谱

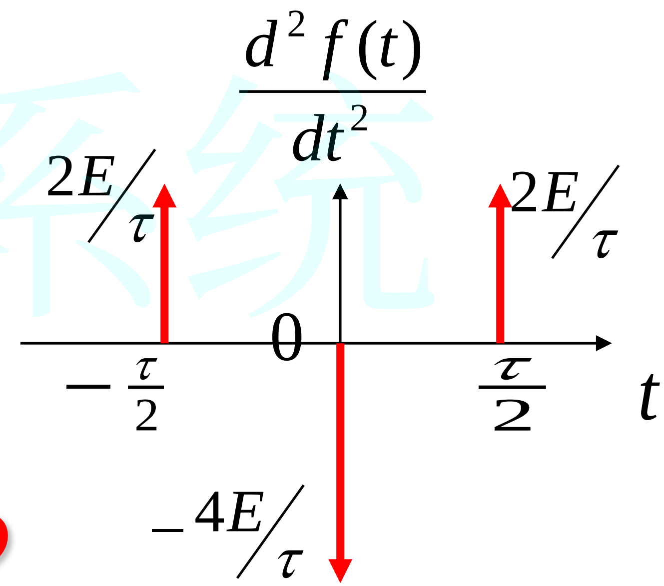




$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2}=\frac{2E}{\tau}\left[\delta(t+\tfrac{\tau}{2})+\delta(t-\tfrac{\tau}{2})-2\delta(t)\right]$$

$$(j\omega)^2F(\omega)=\frac{2E}{\tau}(e^{j\omega\frac{\tau}{2}}+e^{-j\omega\frac{\tau}{2}}-2)$$

$$=-\frac{8E}{\tau}\sin^2\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)=-\frac{\omega^2E\tau}{2}Sa^2(\frac{\omega\tau}{4})$$



$$\boxed{F(\omega)=\frac{E\tau}{2}Sa^2(\frac{\omega\tau}{4})}$$?

利用FT的积分性质求三角脉冲的频谱

$$\frac{df(t)}{dt} \Longleftrightarrow F_1(\omega) \qquad \frac{d^2 f(t)}{dt^2} = \frac{2E}{\tau}\left[\delta(t+\tfrac{\tau}{2}) + \delta(t-\tfrac{\tau}{2}) - 2\delta(t)\right]$$

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} \Longleftrightarrow F_2(\omega)$$

$$F_2(\omega) = -\frac{\omega^2 E\tau}{2} Sa^2(\frac{\omega\tau}{4})$$

由积分性质

$$F_1(\omega) = \frac{1}{j\omega}\left[-\frac{\omega^2 E\tau}{2} Sa^2(\frac{\omega\tau}{4})\right] + \pi F_2(0)\delta(\omega)$$

再由积分性质

$$F(\omega) = \frac{1}{(j\omega)^2}\left[-\frac{\omega^2 E\tau}{2} Sa^2(\frac{\omega\tau}{4})\right] + \pi F_1(0)\delta(\omega)$$

$$= \frac{E\tau}{2} Sa^2(\frac{\omega\tau}{4})$$

[例]利用FT的积分性质求 $\mathrm{FT}\left[\mathrm{Sgn}(t)\right]$

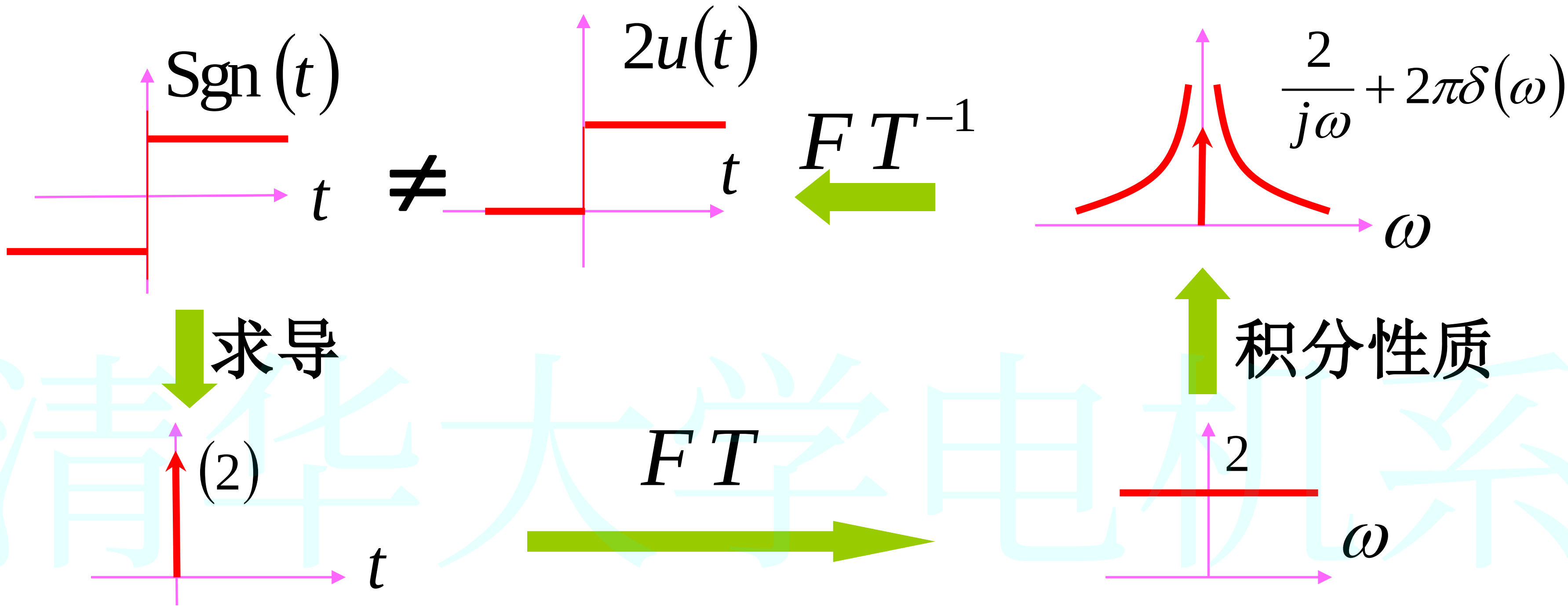
[解] 对Sgn(t)求导，

$$\frac{d}{dt}\mathrm{Sgn}(t)=2\delta(t)\overset{\mathrm{FT}}{\Rightarrow}2$$

结果为2u(t)的FT，而非Sgn(t)的FT？

再利用积分性质

$$\mathrm{FT}\left[\int_{-\infty}^{t}2\delta(\tau)d\tau\right]=\frac{F(\omega)}{j\omega}+\pi F(0)\delta(\omega)=\frac{2}{j\omega}+2\pi\delta(\omega)$$



$$f(t) \overset{?}{=} \int_{-\infty}^{t} f'(\tau)\,d\tau$$

因为 $\int_{-\infty}^{t} f'(\tau)\,d\tau = f(t) - f(-\infty)$

时域**有限**信号，此项为零；

时域**无限**信号，要讨论此项。

所以 $f(t) = \int_{-\infty}^{t} f'(\tau)\,d\tau + f(-\infty)$

本例 $\operatorname{Sgn}(t)=\int_{-\infty}^{t}2\delta(\tau)d\tau+(-1)$ $\left[\operatorname{Sgn}(t)\big|_{t=-\infty}=-1\right]$

应用修正后的公式

$$\left[\int_{-\infty}^{t}2\delta(\tau)d\tau+(-1)\right]=\mathrm{FT}\left[\int_{-\infty}^{t}2\delta(\tau)d\tau\right]-2\pi\delta(\omega)$$

$$=2\left[\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)\cdot 1\right]-2\pi\delta(\omega)=\frac{2}{j\omega}$$

应用积分性质时，要注意两点

- 积分不完全是微分的逆运算；要考察$f(-\infty)$；
- $F(0)$项常被忽略。 $F(0)$的考虑方法：

$\begin{cases}\text{时域波形积分后有无直流分量}\\ \text{直接看}F(0)=0\text{？}\quad F(\omega)\text{为积分前的时域函数的FT}\end{cases}$

10. 时域卷积特性

如果信号 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 的傅立叶变换分别是

$$\mathcal{F}\left[f_1(t)\right]=F_1(\omega)\text{，}\quad \mathcal{F}\left[f_2(t)\right]=F_2(\omega)$$

则有

$$\mathcal{F}\left[f_1(t)*f_2(t)\right]=F_1(\omega)F_2(\omega)$$

此特性可简单地表述为**时域相卷，频域相乘。**

证明：

$$\mathcal{F}\left[f_1(t)*f_2(t)\right]=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{e}^{-j\omega t}\mathrm{d}t$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\tau)\left[\int_{-\infty}^{\infty}f_2(t-\tau)\mathrm{e}^{-j\omega t}\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\tau)F_2(\omega)\mathrm{e}^{-j\omega\tau}\mathrm{d}\tau$$

$$=F_2(\omega)\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\tau)\mathrm{e}^{-j\omega\tau}\mathrm{d}\tau$$

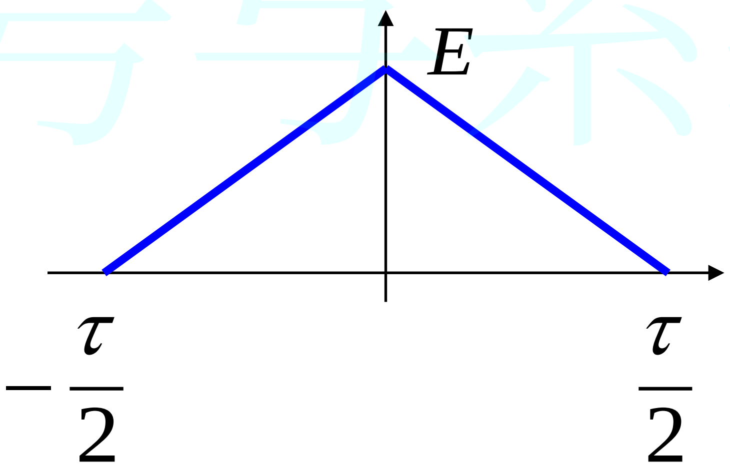
$$=F_1(\omega)F_2(\omega)$$

系统的单位冲激响应为 $h(t)$
激励为 $e(t)$ → 系统零状态响应为 $r(t)$

$r(t) = e(t) * h(t)$ → $R(\omega) = \mathcal{F}[r(t)]$

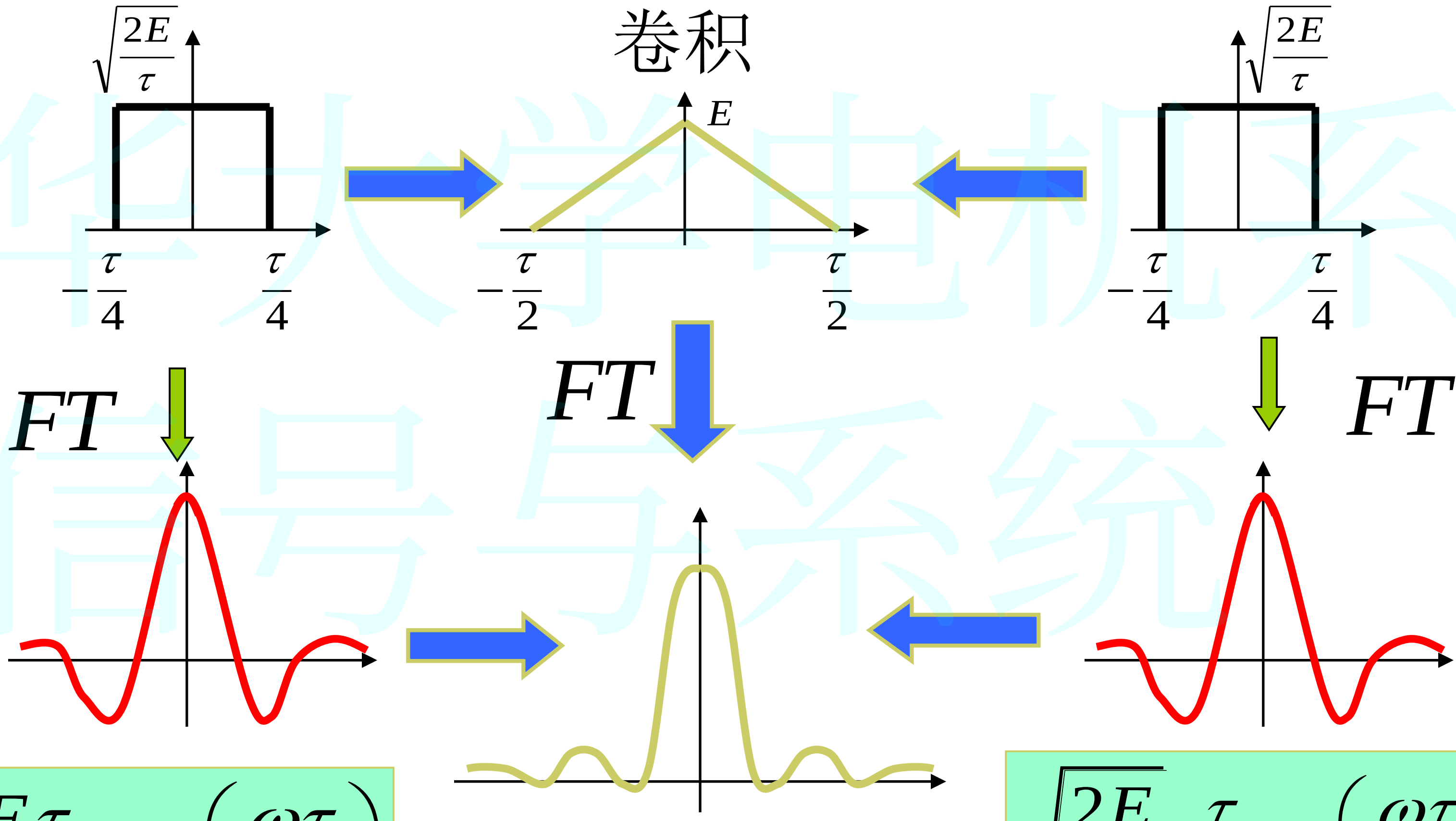
$$\boxed{\begin{aligned}\mathcal{F}[h(t)] &= H(\omega)\\ \mathcal{F}[e(t)] &= E(\omega)\end{aligned}}$$ → $R(\omega) = E(\omega)H(\omega)$

例：求三角脉冲的频谱



例：求三角脉冲的频谱

三角脉冲可看成两个同样矩形脉冲的卷积



$$F(\omega)=\frac{E\tau}{2}Sa^2\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)$$

$$\sqrt{\frac{2E}{\tau}}\cdot\frac{\tau}{2}Sa\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)$$

11. 频域卷积特性

如果信号 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 的傅立叶变换分别是

$$\mathcal{F}[f_1(t)] = F_1(\omega), \quad \mathcal{F}[f_2(t)] = F_2(\omega)$$

则有

$$\mathcal{F}[f_1(t) f_2(t)] = \frac{1}{2\pi} F_1(\omega) * F_2(\omega)$$

此特性可简单地表述为**时域相乘，频域相卷**。

例10　已知矩形波信号 $g(t) = u(t+\tau) - u(t-\tau)$ 和余弦信号 $q(t) = A\cos\omega_0 t$

有 $G(\omega) = 2\tau \mathrm{Sa}(\omega\tau)$ 和 $Q(\omega) = \pi A[\delta(\omega+\omega_0) + \delta(\omega-\omega_0)]$

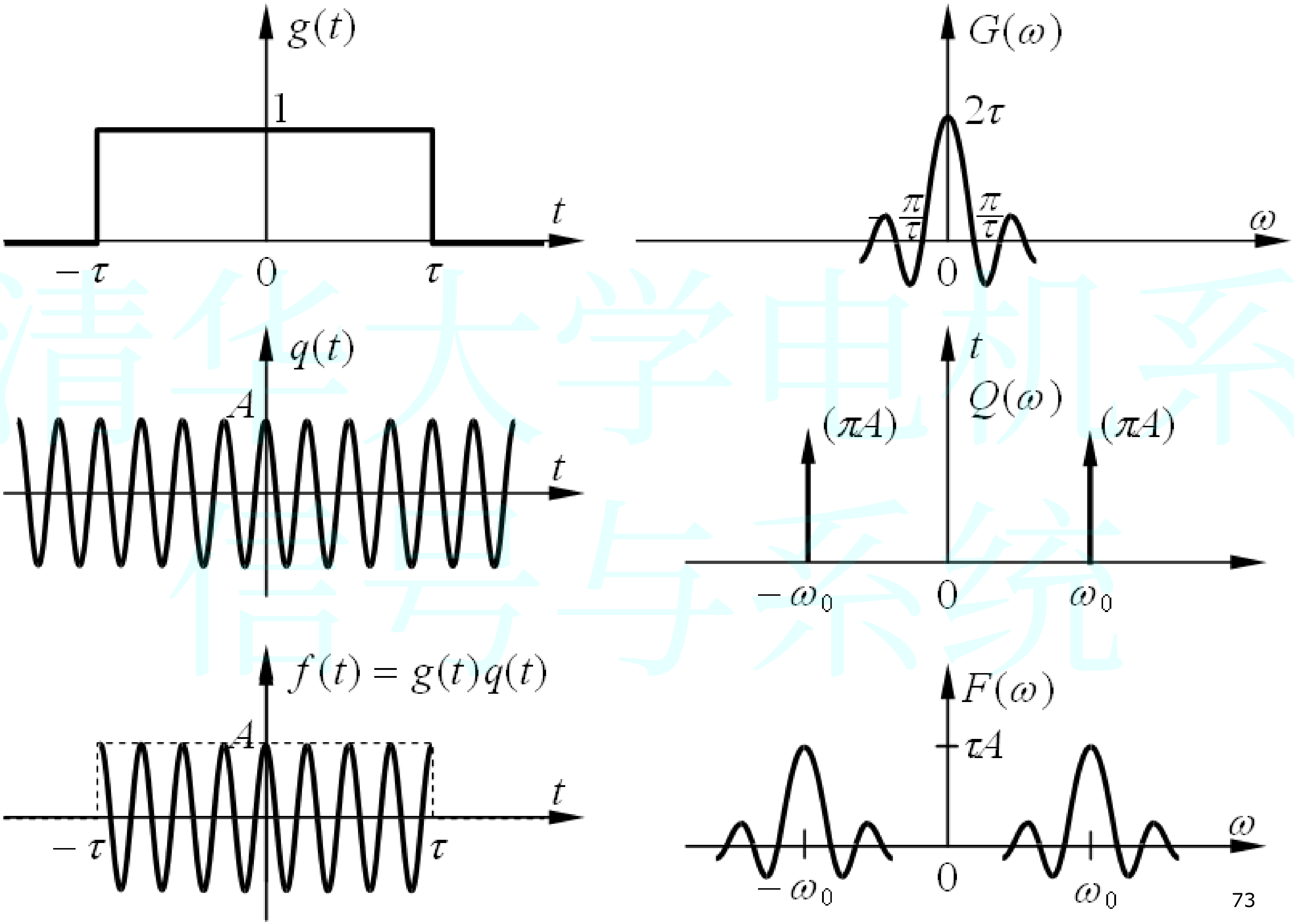
求 $f(t) = g(t)q(t)$ 的傅立叶变换 $F(\omega)$。

解：根据频域卷积特性，有

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} G(\omega) * Q(\omega)$$

$$= \tau A \mathrm{Sa}(\omega\tau) * [\delta(\omega+\omega_0) + \delta(\omega-\omega_0)]$$

$$\boxed{= \tau A \mathrm{Sa}[(\omega+\omega_0)\tau] + \tau A \mathrm{Sa}[(\omega-\omega_0)\tau]}$$


g(t)
1
t
− τ
0
τ
G(ω)
2τ
π/τ
ω
q(t)
A
t
Q(ω)
(πA)
− ω0
ω0
f(t) = g(t)q(t)
F(ω)
τA

周期信号的傅里叶变换

FT存在的充分条件：

• 对于每个周期而言 $\left\{\begin{array}{l}\text{有限个间断点；}\\ \text{有限个极值点。}\end{array}\right.$

一般实际信号均可满足

• 绝对可积 $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|dt < \infty$

周期信号不满足绝对可积条件

引入冲激信号后，冲激的积分是有意义的

在以上意义下，周期信号的傅立叶变换是存在的。

例： $F[\cos\omega_0 t] = \pi[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]$

一般意义下的周期信号的傅里叶变换

为了区别非周期信号，在此以下标p表示周期信号。

给定周期信号$f_p(t)$，周期T_1，角频率ω_1， $f_p(t)$可展开为傅立叶级数

$$f_p(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}F_{gp}(k\omega_1)\mathrm{e}^{jk\omega_1 t}$$

对上式取傅里叶变换，有

$$\mathscr{F}\left[f_p(t)\right]=\mathscr{F}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty}F_{gp}(k\omega_1)\mathrm{e}^{jk\omega_1 t}\right]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}F_{gp}(k\omega_1)\mathscr{F}\left[\mathrm{e}^{jk\omega_1 t}\right]$$

$$\boxed{\mathscr{F}\left[\mathrm{e}^{jk\omega_1 t}\right]=2\pi\delta(\omega-k\omega_1)}$$

$$F_p(\omega)=\mathscr{F}\left[f_p(t)\right]=2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}F_{gp}(k\omega_1)\delta(\omega-k\omega_1)$$

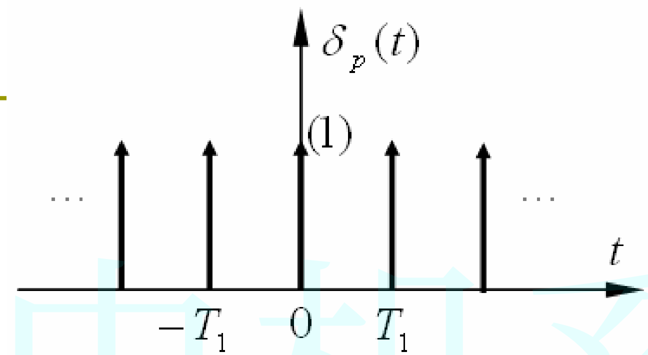
$$F_p(\omega)=\mathscr{F}\left[f_p(t)\right]=2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}F_{gp}(k\omega_1)\delta(\omega-k\omega_1)$$

- 周期函数的傅里叶变换是一个冲激序列
- 各冲激脉冲的位置在频率点$k\omega_1$处
- 各冲激脉冲的强度是相应频率点傅里叶级数系数的2π倍。
- 大小不是有限值，而是无穷小频带内有无穷大的频谱密度值

$$\boxed{F(\omega)=\lim_{t_1\to-\infty,t_2\to\infty}\frac{2\pi F(k\omega_1)}{\omega_1}}$$

例1 求下图所示周期冲激信号 $\delta_p(t)=\sum_{i=-\infty}^{\infty}\delta(t-iT_1)$ 的傅立叶变换

解：周期冲激信号的傅立叶级数为

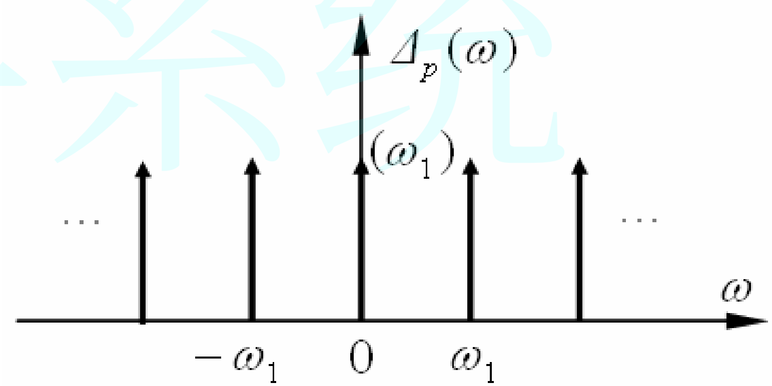


$$\Delta_{gp}(k\omega_1)=\frac{1}{T_1}\int_{-T_1/2}^{T_1/2}\delta_p(t)\mathrm{e}^{-jk\omega_1 t}\mathrm{d}t=\frac{1}{T_1}$$

根据周期信号傅立叶变换和傅立叶级数的关系，周期冲激序列的傅立叶变换为

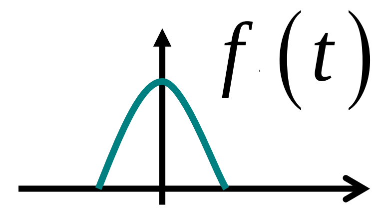
$$\Delta_p(\omega)=2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\Delta_{gp}(k\omega_1)\delta(\omega-k\omega_1)$$

$$=\omega_1\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-k\omega_1)$$



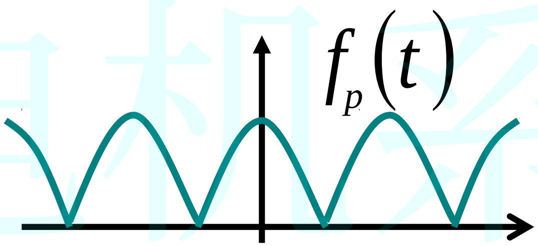
□ 非周期信号傅里叶变换及其延拓周期信号的傅里叶级数的关系

已知非周期信号$f(t)$，其傅里叶变换$F(\omega)$存在。



以T_1为周期对$f(t)$进行周期延拓，得周期信号$f_p(t)$。

$$f_p(t)=\sum_{i=-\infty}^{\infty} f(t-iT_1)$$

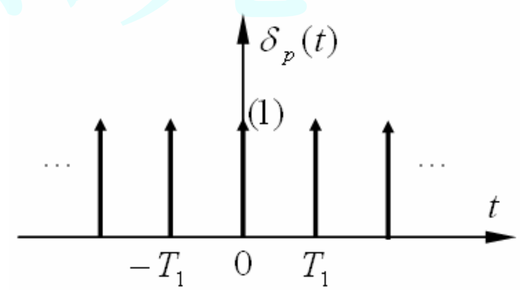


第二章内容，信号与冲激函数的卷积

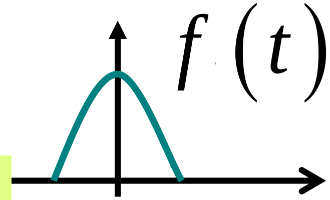
$$f(t)*\delta(t-t_0)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\delta(t-t_0-\tau)d\tau=f(t-t_0)$$

$$f_p(t)=\sum_{i=-\infty}^{\infty} f(t-iT_1)=\sum_{i=-\infty}^{\infty} f(t)*\delta(t-iT_1)$$

$$=f(t)*\sum_{i=-\infty}^{\infty}\delta(t-iT_1)$$

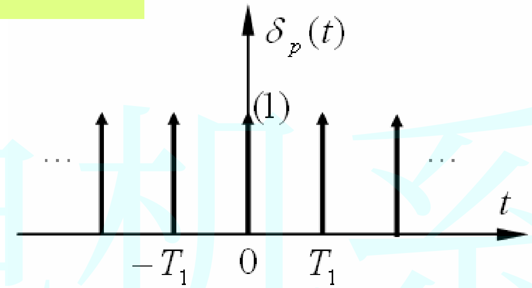


$$f_p(t)=\sum_{i=-\infty}^{\infty} f(t-iT_1)=f(t)*\sum_{i=-\infty}^{\infty}\delta(t-iT_1)$$



$f_p(t)$的FT与其单脉冲$f_0(t)$的FT的关系

$$F_p(\omega)=F(\omega)\Delta_p(\omega)$$

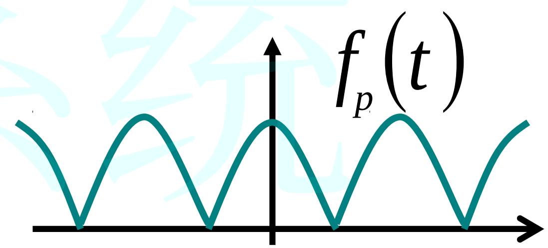


$$\Delta_p(\omega)=\omega_1\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-k\omega_1)$$

$$=F(\omega)\omega_1\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-k\omega_1)$$

$$=\omega_1\sum_{k=-\infty}^{\infty}F(\omega)\Big|_{\omega=k\omega_1}\delta(\omega-k\omega_1)$$

$$\boxed{F_p(\omega)=2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}F_{gp}(k\omega_1)\delta(\omega-k\omega_1)}$$

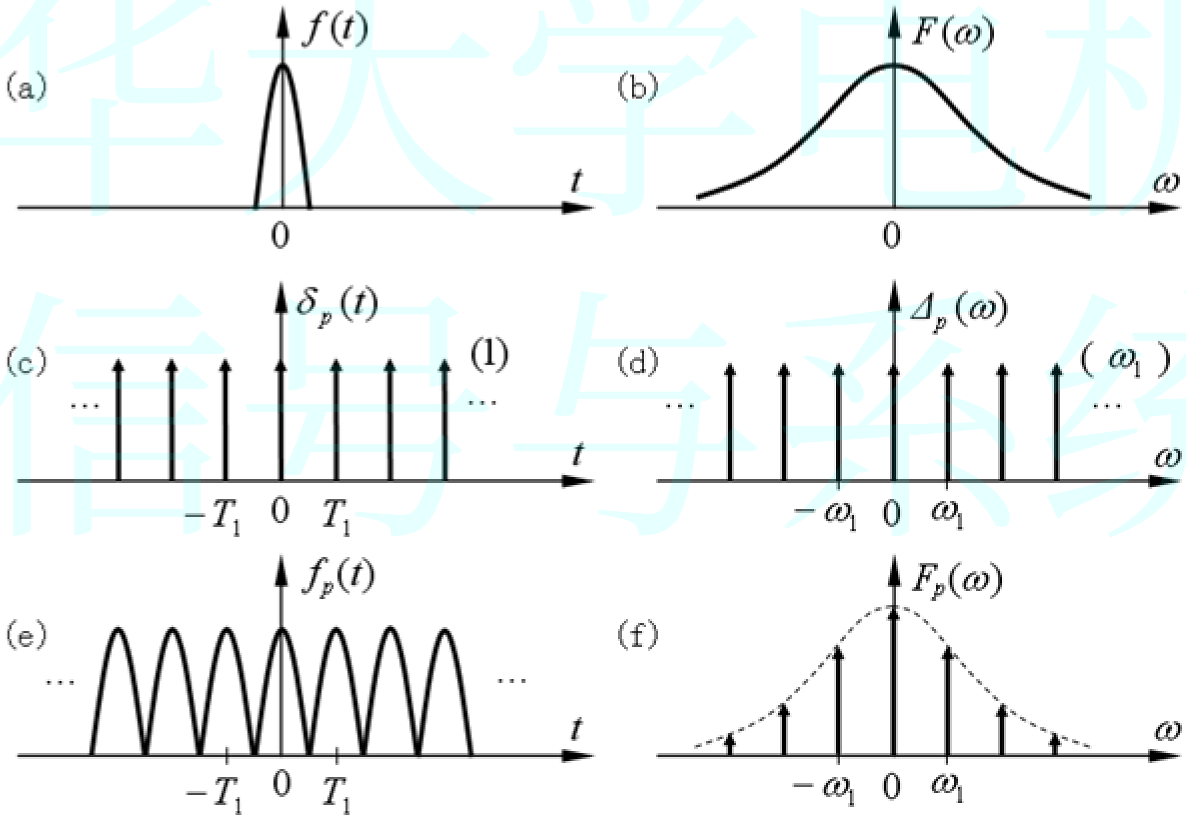


$\Rightarrow$ $2\pi F_{gp}(k\omega_1)=\omega_1 F(\omega)\Big|_{\omega=k\omega_1}$ $\Rightarrow$ $F_{gp}(k\omega_1)=\dfrac{1}{T_1}F(\omega)\Big|_{\omega=k\omega_1}$

$$F_{gp}(k\omega_1)=\frac{1}{T_1}F(\omega)\Big|_{\omega=k\omega_1}$$

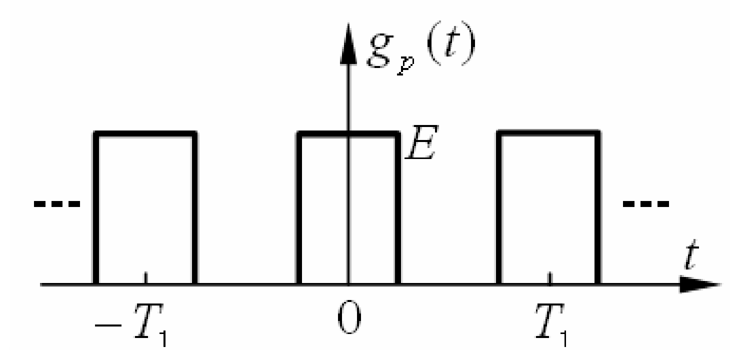
$$F_p(\omega)=2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}F_{gp}(k\omega_1)\delta(\omega-k\omega_1)$$

$$F_p(\omega)=\omega_1\sum_{k=-\infty}^{\infty}F(\omega)\Big|_{\omega=k\omega_1}\delta(\omega-k\omega_1)$$



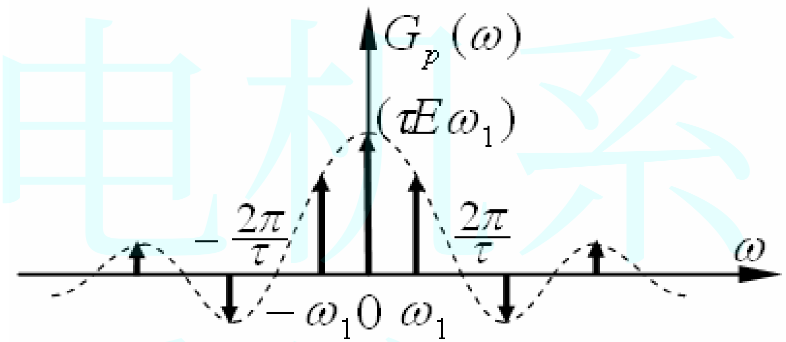
例2 求周期矩形波信号的傅立叶变换。

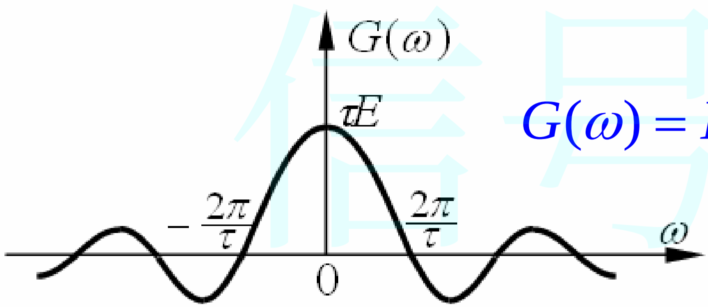
解： 周期矩形波信号可看作是非周期矩形波信号的周期延拓。



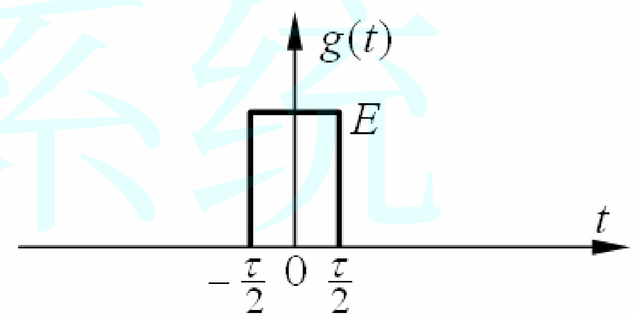
$$G_p(\omega)=\omega_1\sum_{k=-\infty}^{\infty}G(\omega)\delta(\omega-k\omega_1)$$

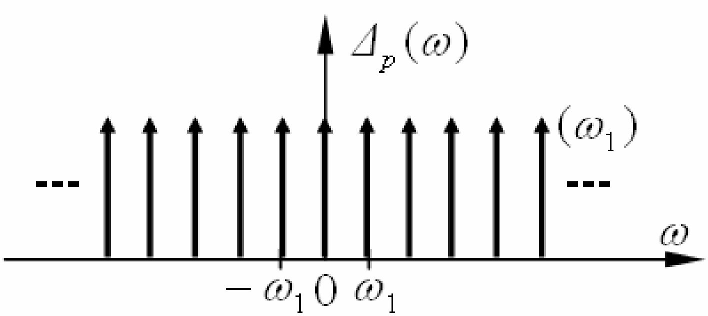
$$=E\tau\omega_1\sum_{k=-\infty}^{\infty}\mathrm{Sa}\left(\frac{k\omega_1\tau}{2}\right)\delta(\omega-k\omega_1)$$

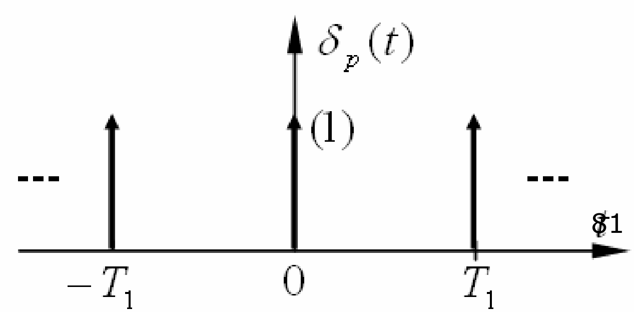




$$G(\omega)=E\tau\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$







$$F_0(\omega) = E\tau Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

由单脉冲联想FS的F_k

$$F_k = \frac{1}{T_1} F_0(\omega)\Big|_{\omega=k\omega_1} = \frac{E\tau}{T_1} Sa\left(\frac{k\omega_1\tau}{2}\right)$$

FS

$$f_p(t) = \frac{E\tau}{T_1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} Sa\left(\frac{k\omega\tau_1}{2}\right) . e^{jk\omega_1\tau}$$

FT

$$F_p(\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k(k\omega_1)\delta(\omega - k\omega_1) = \omega_1 \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_0(\omega)\Big|_{\omega=k\omega_1} \delta(\omega - k\omega_1)$$

小结—单脉冲和周期信号的傅立叶变换的比较

- 单脉冲的频谱$F_0(\omega)$ 是连续谱，它的大小是有限值；
- 周期信号的谱$F_p(\omega)$是离散谱，含谱密度概念，它的大小用冲激表示；
- $F_0(\omega)$是$F_p(\omega)$的包络的 $1/\omega_1$。

$$F_p(\omega)=\omega_1\sum_{k=-\infty}^{\infty}F_0\left(k\omega_1\right)\delta(\omega-k\omega_1)$$

信号抽样

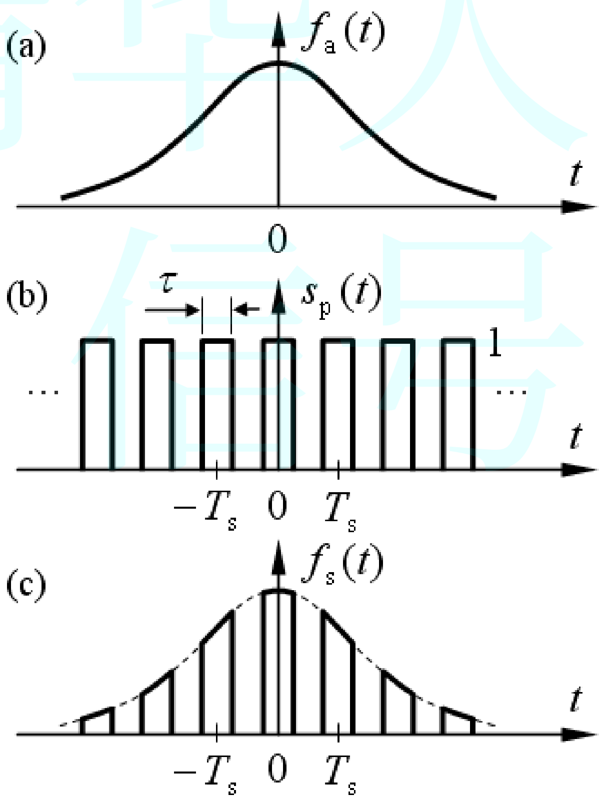
- 抽样的概念：
  - 从连续时域信号$f(t)$或从连续频域信号$F(\omega)$中，每隔一定间隔抽取一个样本值，通常为等间隔抽样。
- 分类：
  - 脉冲抽样
    - 矩形脉冲抽样
    - 冲激脉冲抽样
  - 数值抽样

脉冲抽样

时域脉冲抽样

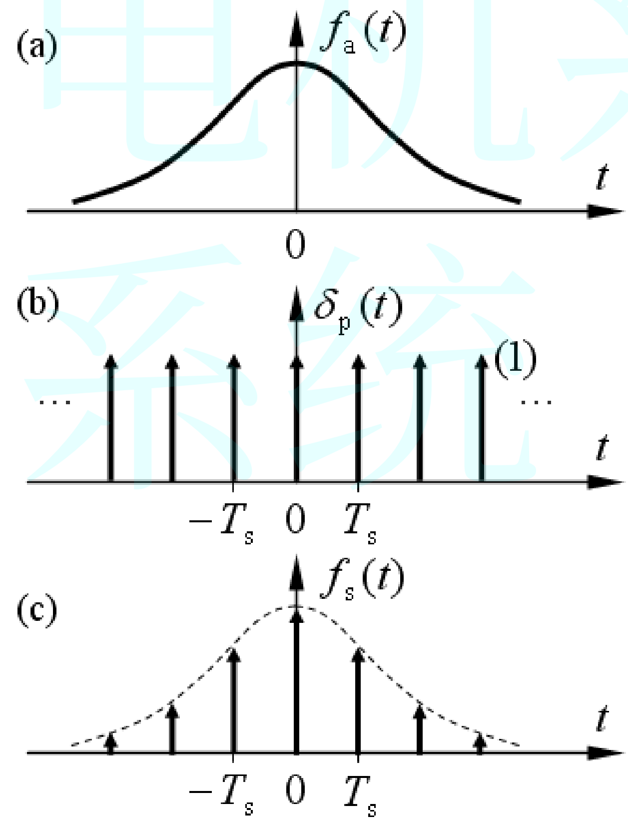
矩形脉冲抽样

$$f_s(t) = f_a(t)s_p(t)$$



冲激脉冲抽样

$$f_s(t) = f_a(t)\delta_p(t)$$



■ 频域脉冲抽样

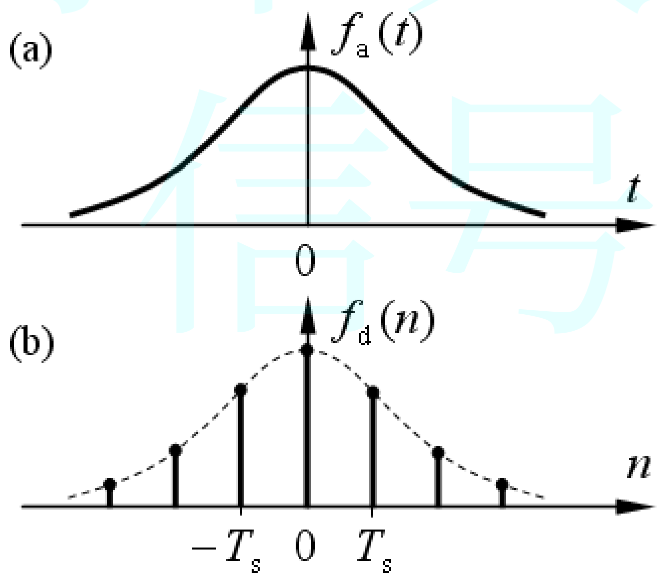
频域脉冲抽样是用一个频域的周期脉冲信号$S_p(\omega)$和被抽样频域信号$F(\omega)$相乘，得到频域脉冲抽样信号$F_s(\omega) = F(\omega)\, S_p(\omega)$

抽样用的周期脉冲信号有矩形脉冲序列和冲激脉冲序列等等。

数值抽样

时域数值抽样

$$f_{\mathrm{d}}(n) = f_{\mathrm{a}}(nT_{\mathrm{s}})$$



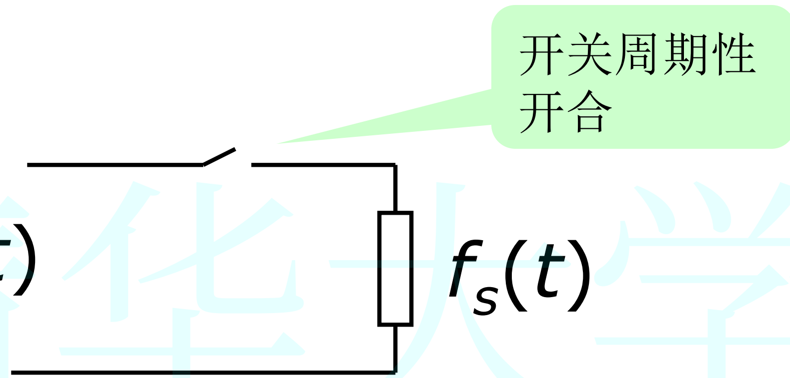
频域数值抽样

以ω_1频率间隔抽取连续频域信号 $F(\omega)$的数值，得离散频域信号

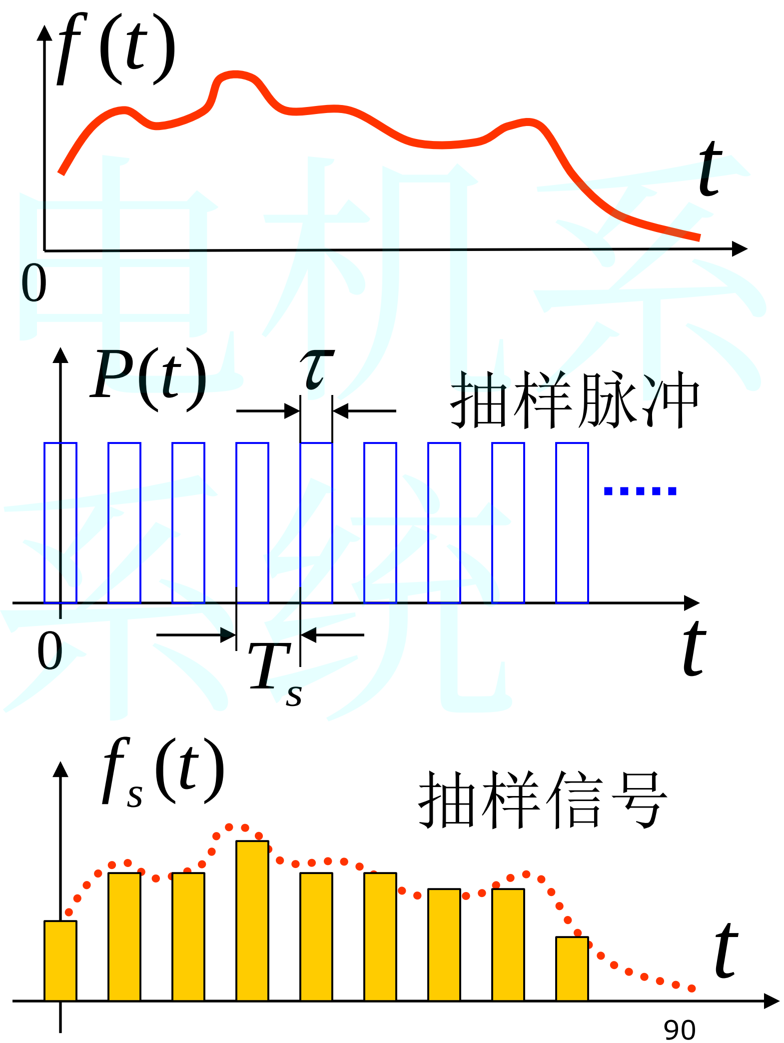
$$F_d(k) = F(\omega)\big|_{\omega = k\omega_1}$$

本节主要学习信号时域和频域的脉冲抽样，观察信号时域脉冲抽样后其频域的变化，以及信号频域脉冲抽样后其时域的变化。

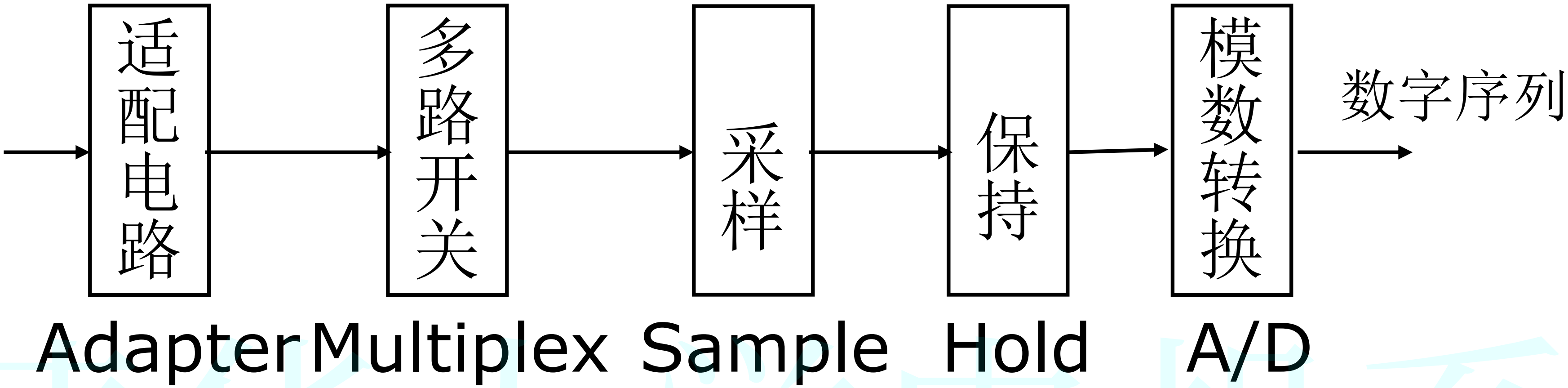
信号抽样的实现



抽样的实现



从连续信号 *f*(*t*) 中，每隔一定时间抽取*f*(*t*)的数值（样本值），可得到一系列抽样数值，构成序列 $f_s(t)$，此过程称为抽样。



实现框图

<u>信号转换为数字量的优点：</u>

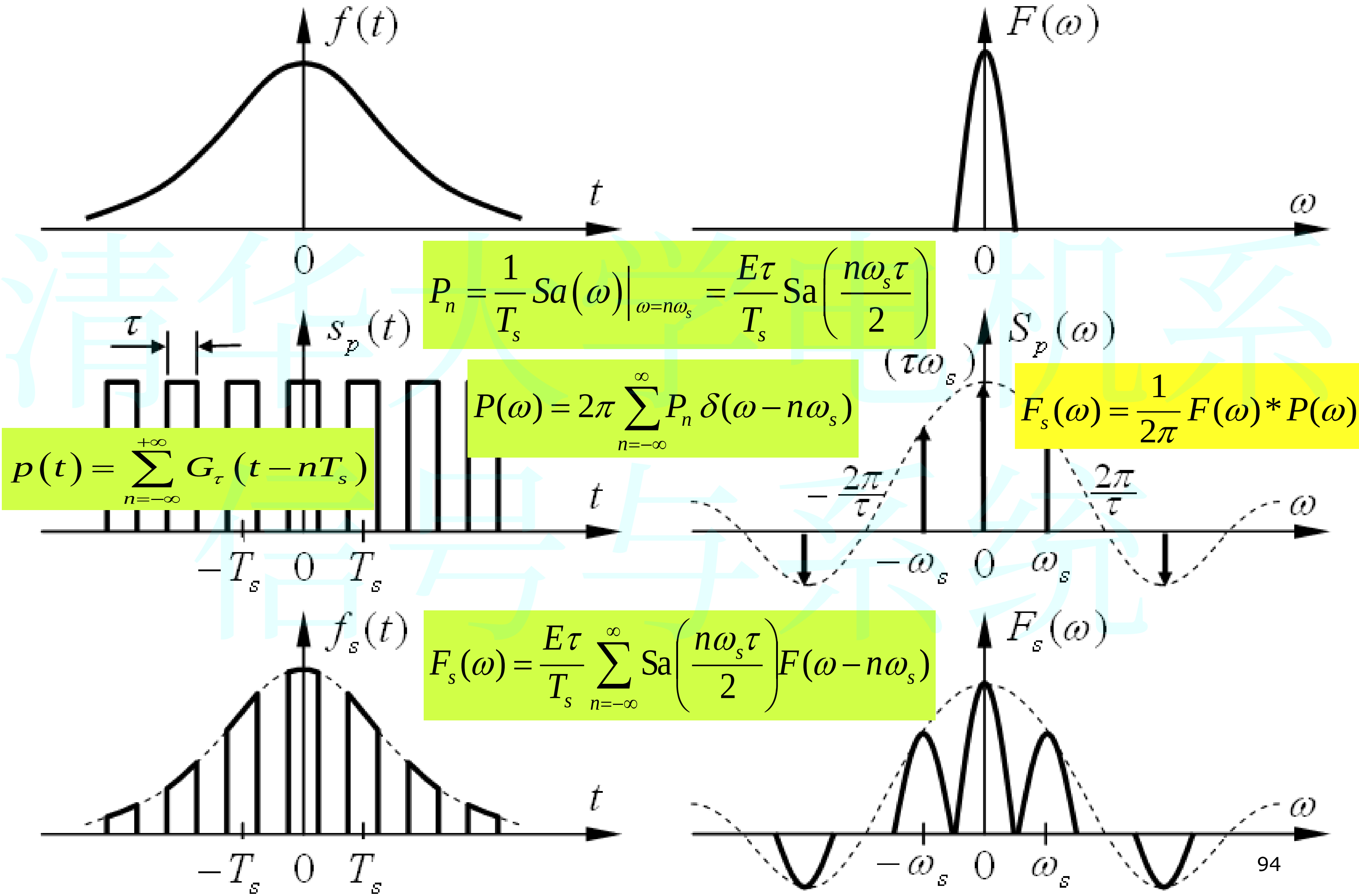
抗干扰，便于处理(运算，加密)，廉价，方便.

<u>问题：</u>

(1) $f_s(t)$是否保留了$f(t)$的全部信息？要保留全部信息需满足什么条件？

(2) $f_s(t)$的FT与 $f(t)$ 的关系如何？

1. 时域矩形脉冲序列抽样（时域抽样，频域重复）



$$P_n = \frac{1}{T_s} Sa(\omega)\Big|_{\omega = n\omega_s} = \frac{E\tau}{T_s} \mathrm{Sa}\left(\frac{n\omega_s\tau}{2}\right)$$

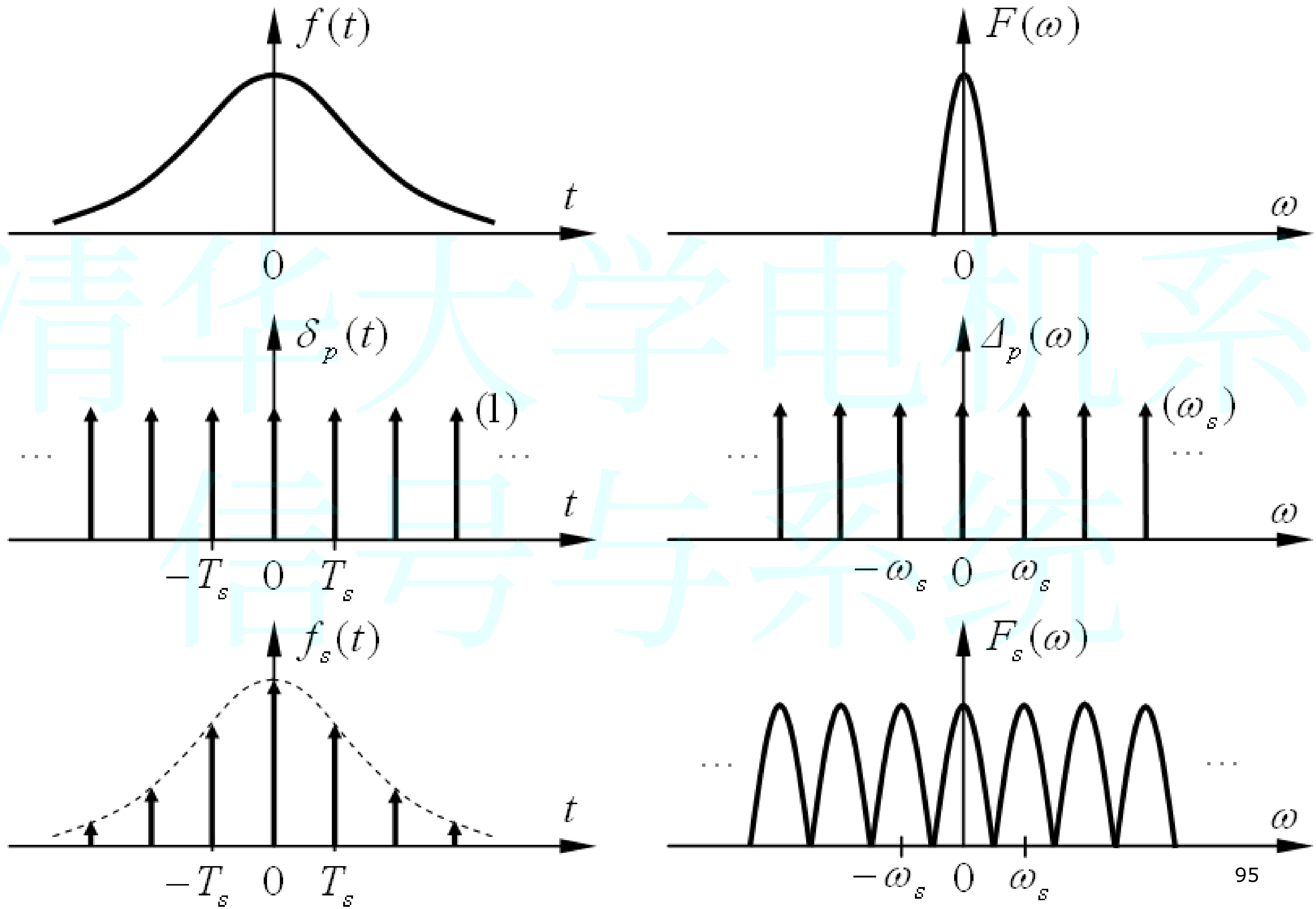
$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} G_\tau(t - nT_s)$$

$$P(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n \delta(\omega - n\omega_s)$$

$$F_s(\omega) = \frac{1}{2\pi} F(\omega) * P(\omega)$$

$$F_s(\omega) = \frac{E\tau}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{Sa}\left(\frac{n\omega_s\tau}{2}\right) F(\omega - n\omega_s)$$

2. 时域冲激脉冲序列抽样（时域抽样，频域重复）



冲激抽样

$$p(t)=\delta_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s)$$

$$P(\omega)=2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}P_n\,\delta(\omega-n\omega_s)$$

$$P_n=\frac{1}{T_s}$$

$$F_s(\omega)=\frac{1}{2\pi}F(\omega)*P(\omega)$$

$$F_s(\omega)=\frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}F(\omega-n\omega_s)$$

比较

矩形脉冲抽样

$$p(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}G_\tau(t-nT_s)$$

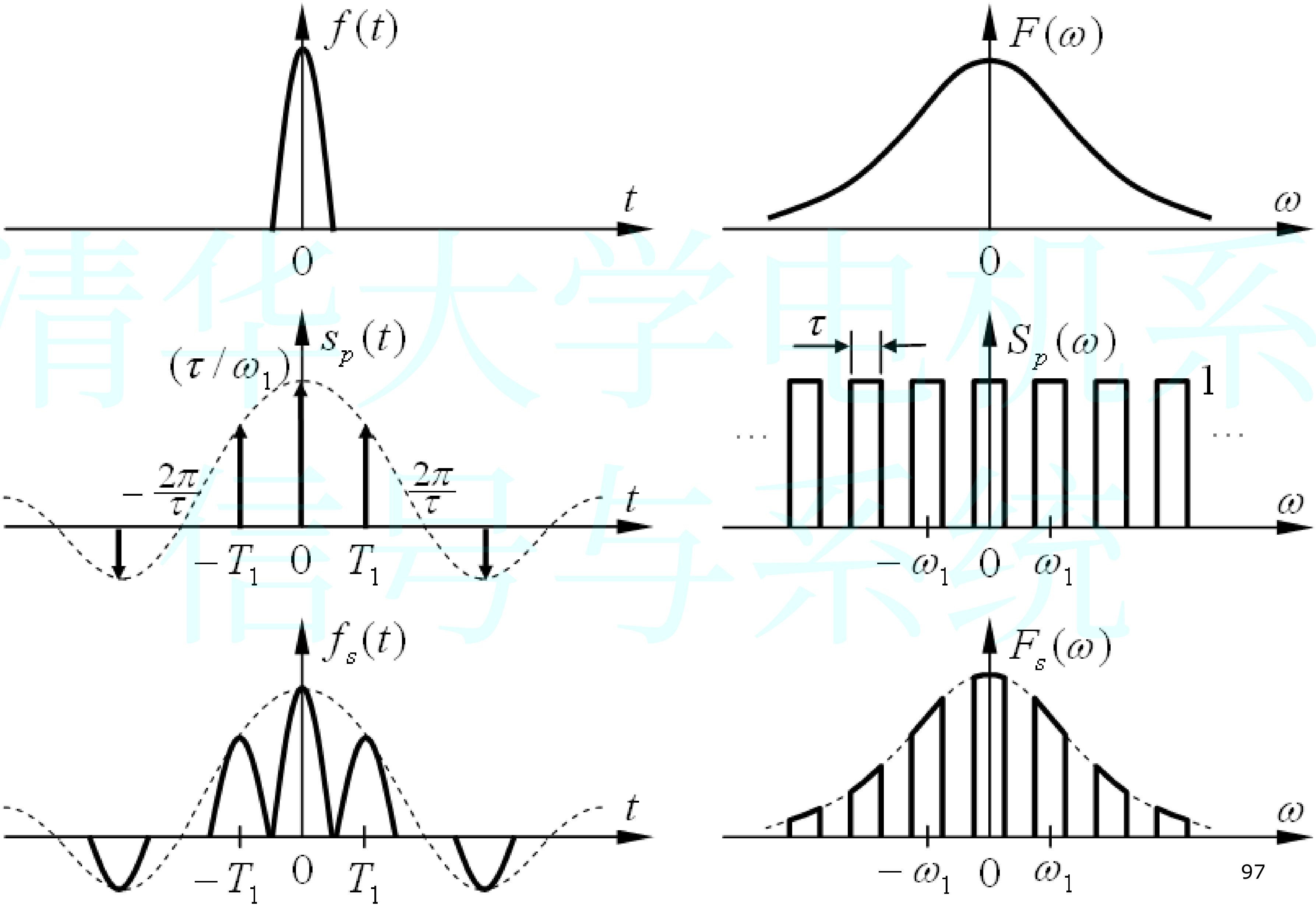
$$P(\omega)=2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}P_n\,\delta(\omega-n\omega_s)$$

$$P_n=\frac{E\tau}{T_s}\mathrm{Sa}\left(\frac{n\omega_s\tau}{2}\right)$$

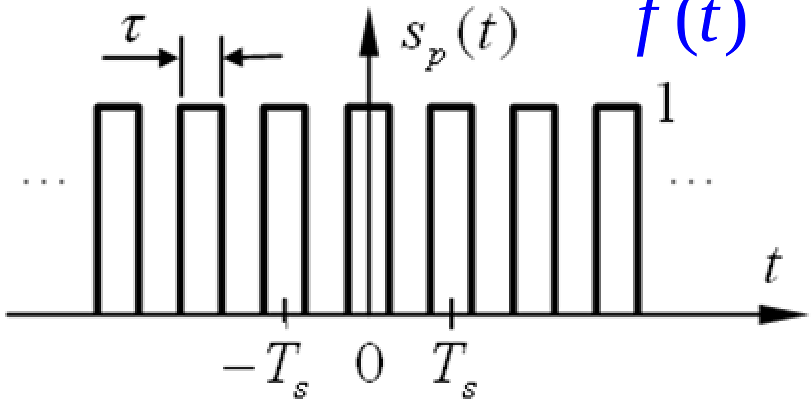
$$F_s(\omega)=\frac{1}{2\pi}F(\omega)*P(\omega)$$

$$F_s(\omega)=\frac{E\tau}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{Sa}\left(\frac{n\omega_s\tau}{2}\right)F(\omega-n\omega_s)$$

3. 频域矩形脉冲抽样（频域抽样，时域重复）

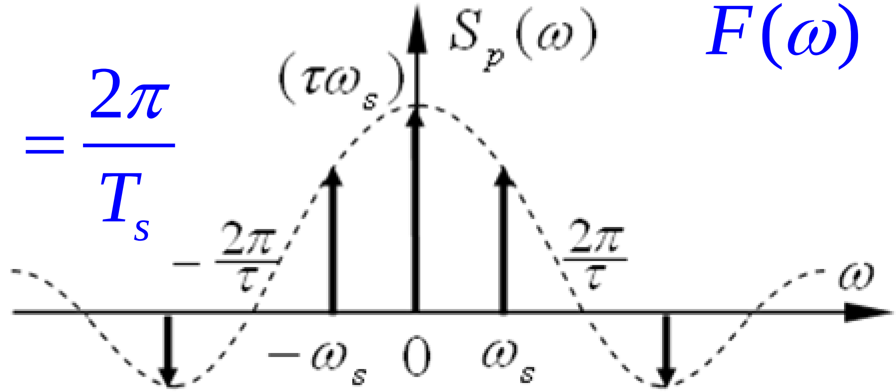


$f(t)$

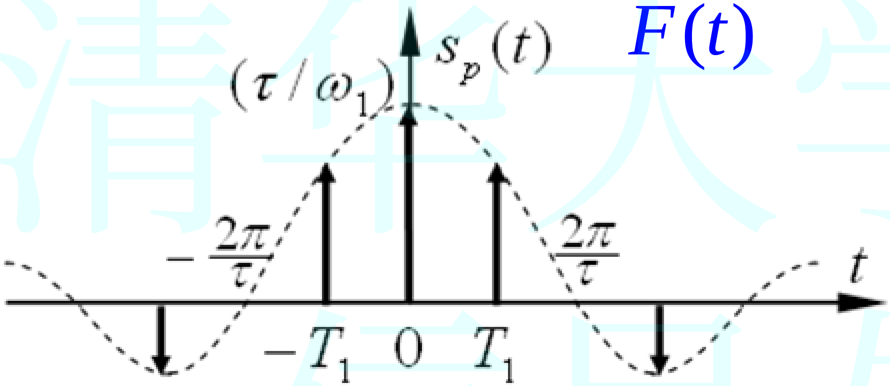


$F(\omega)$

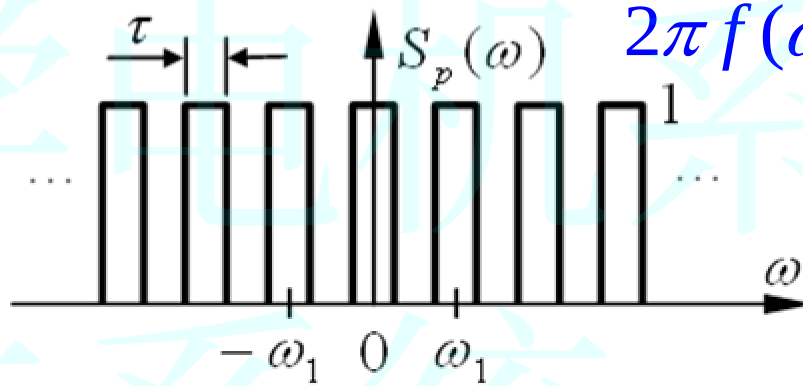
$$\omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$$



$F(t)$



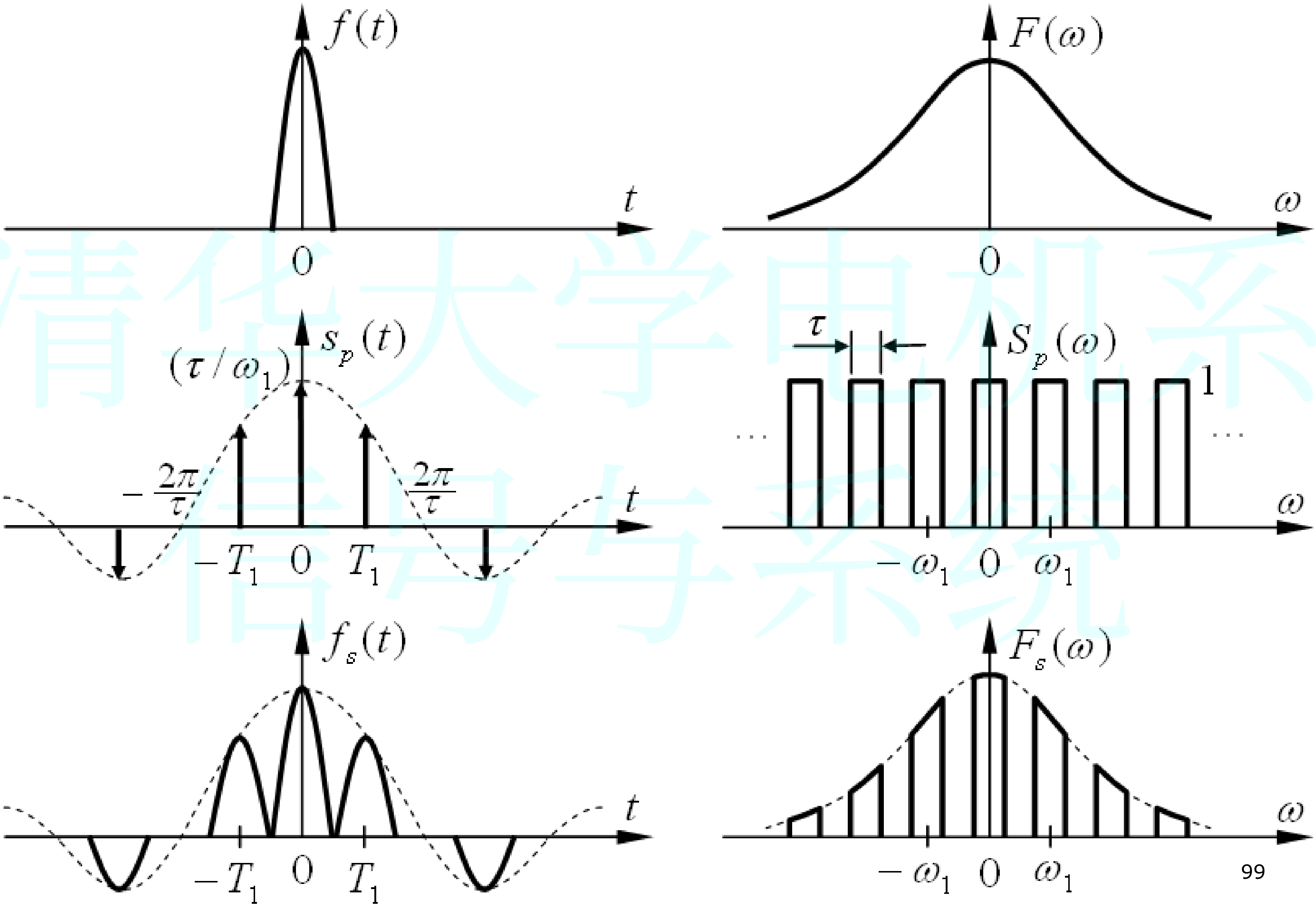
$2\pi f(\omega)$



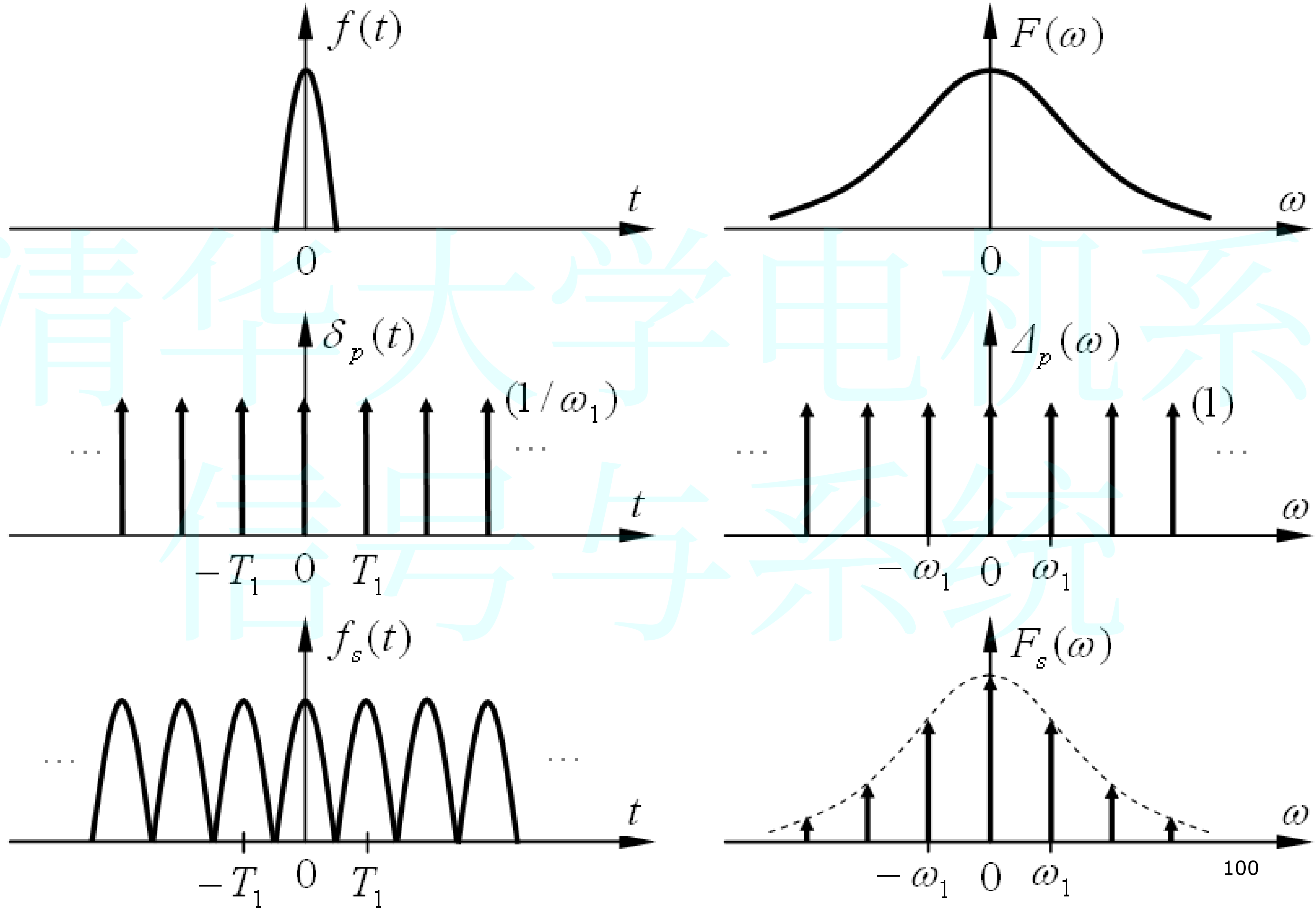
$$\frac{2\pi}{\omega_1} = T_1$$

$$\frac{\tau\omega_s}{2\pi} \rightarrow \frac{\tau T_1}{2\pi} = \tau / \omega_1$$

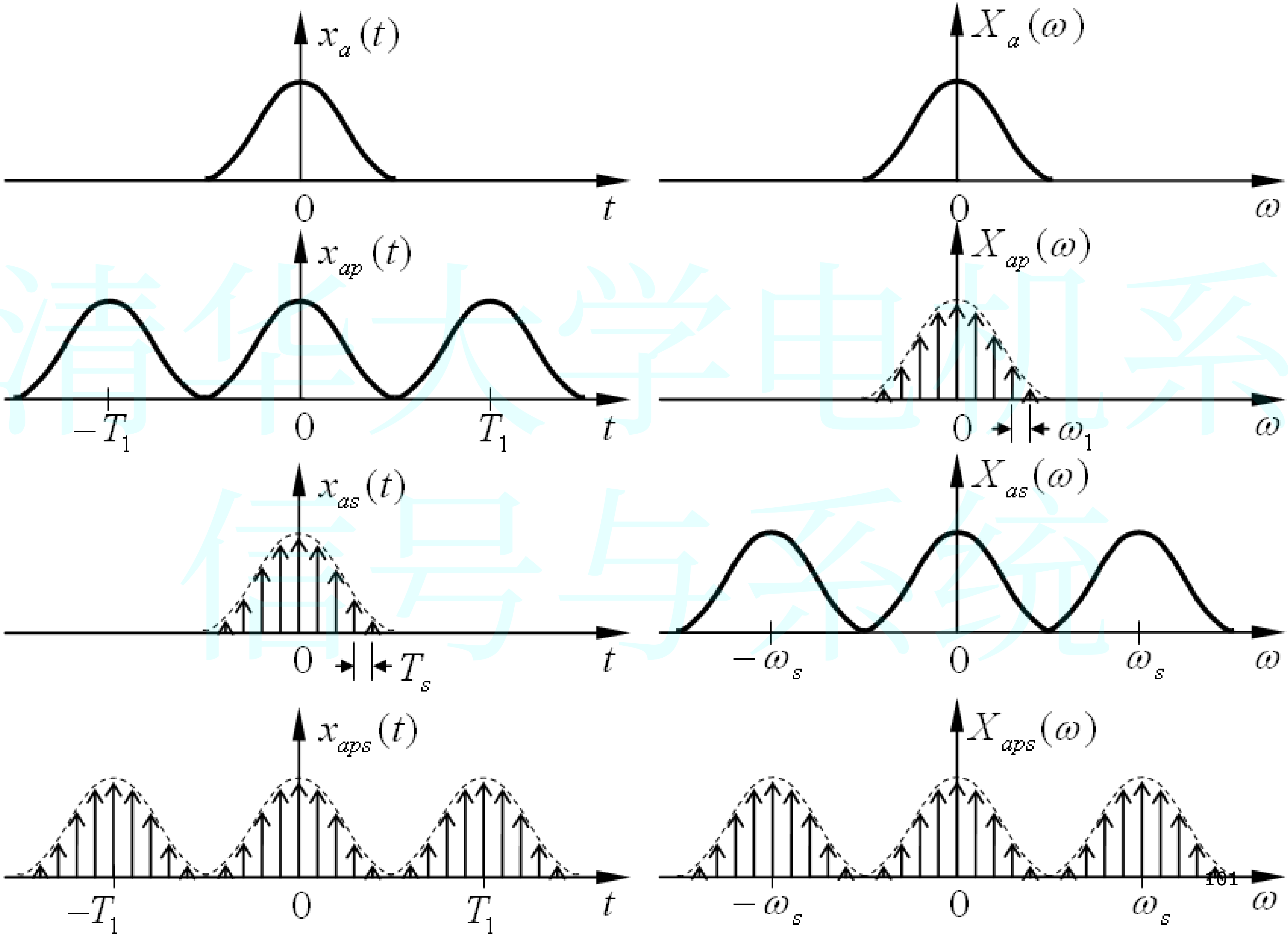
3. 频域矩形脉冲抽样（频域抽样，时域重复）



4. 频域冲激脉冲抽样（频域抽样，时域重复）



时域和频域的对称：时域重复，频域离散；时域离散，频域重复。反之亦然

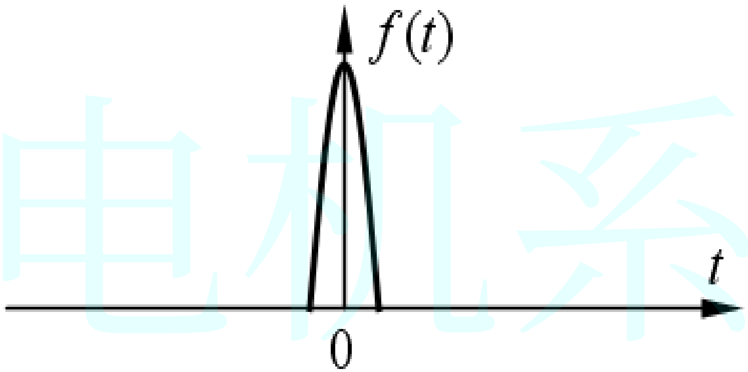


抽样定理

1. 时间有限和频率有限

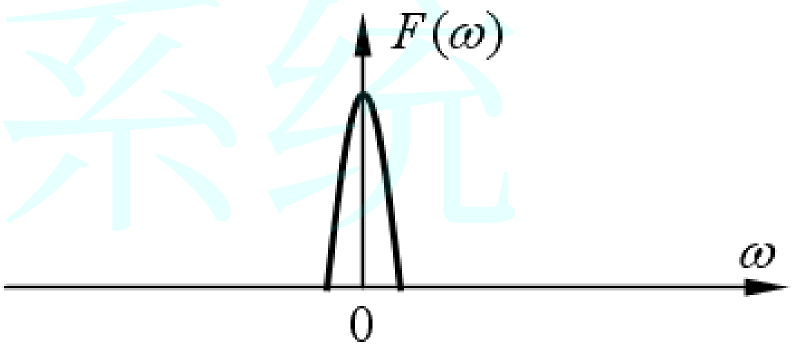
- 时间有限信号

  信号$f(t)$只在有限长时间区间$(-t_m, t_m)$内取非零值，此区间外有$f(t)=0$



- 频率有限信号

  信号$F(\omega)$只在有限长频率区间$(-\omega_m, \omega_m)$内取非零值，此区间外有$F(\omega)=0$

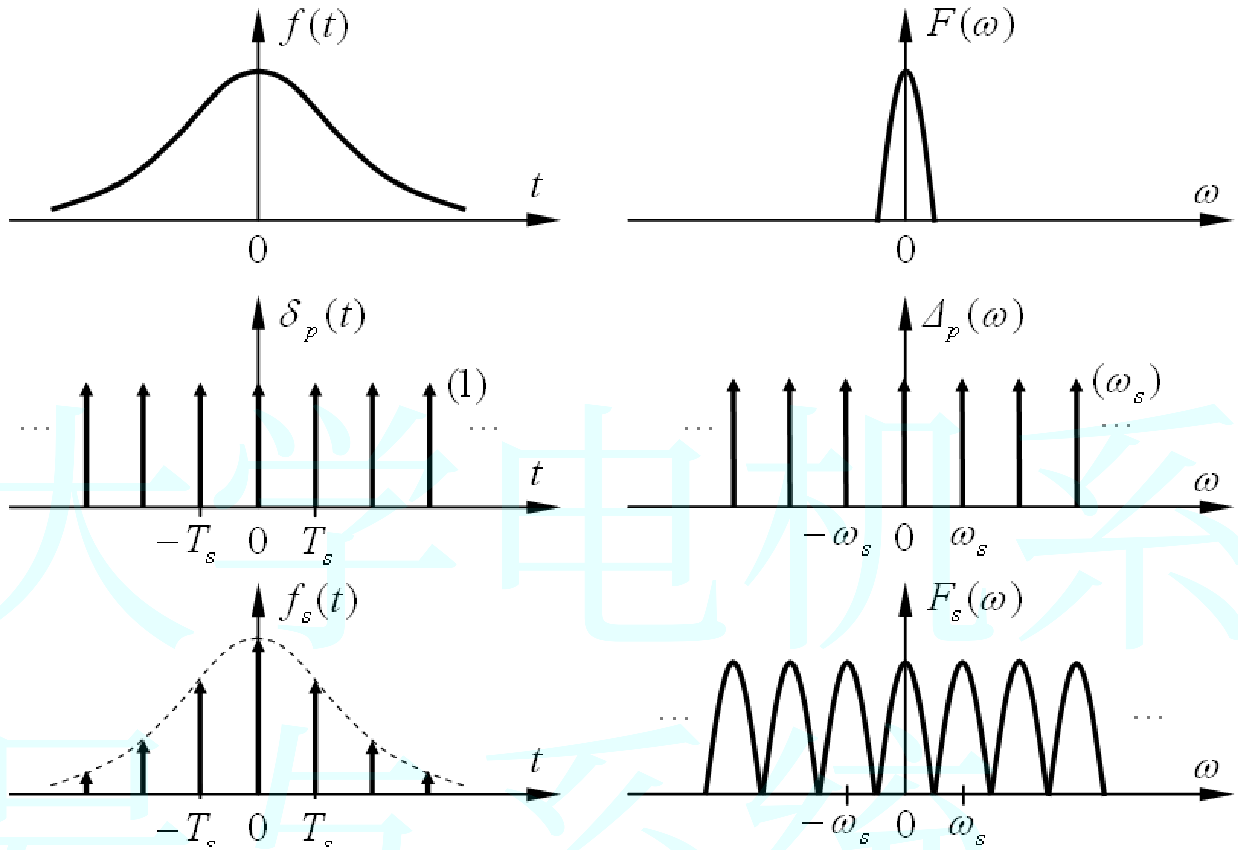


非周期方波信号

抽样信号

一个信号如果时间有限，它一定频率无限；如果它频率有限，则一定时间无限。

2. 时域抽样定理



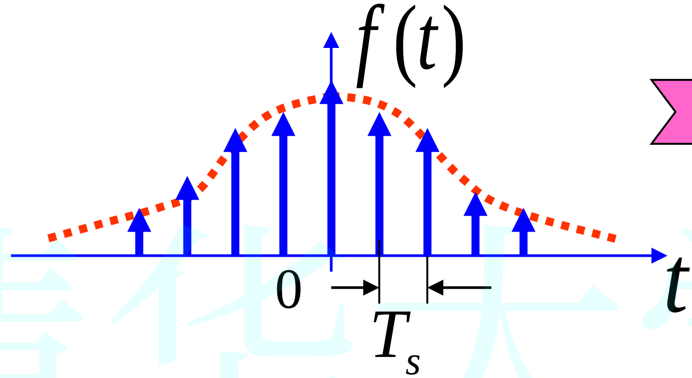
如何才能在抽样以后保证信号保留原始信号的所有信息，不发生失真？

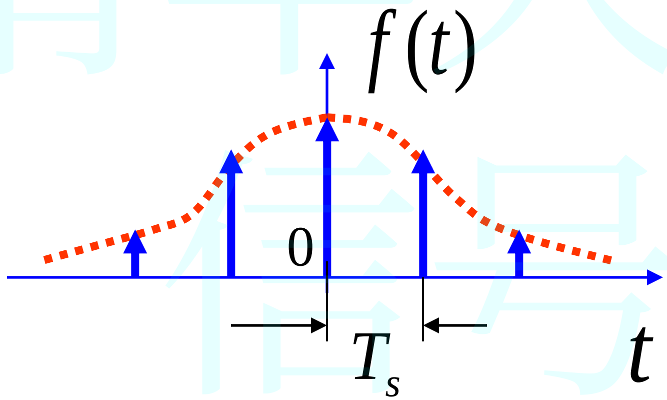
抽样后包含的原始信号的频谱信息不失真！

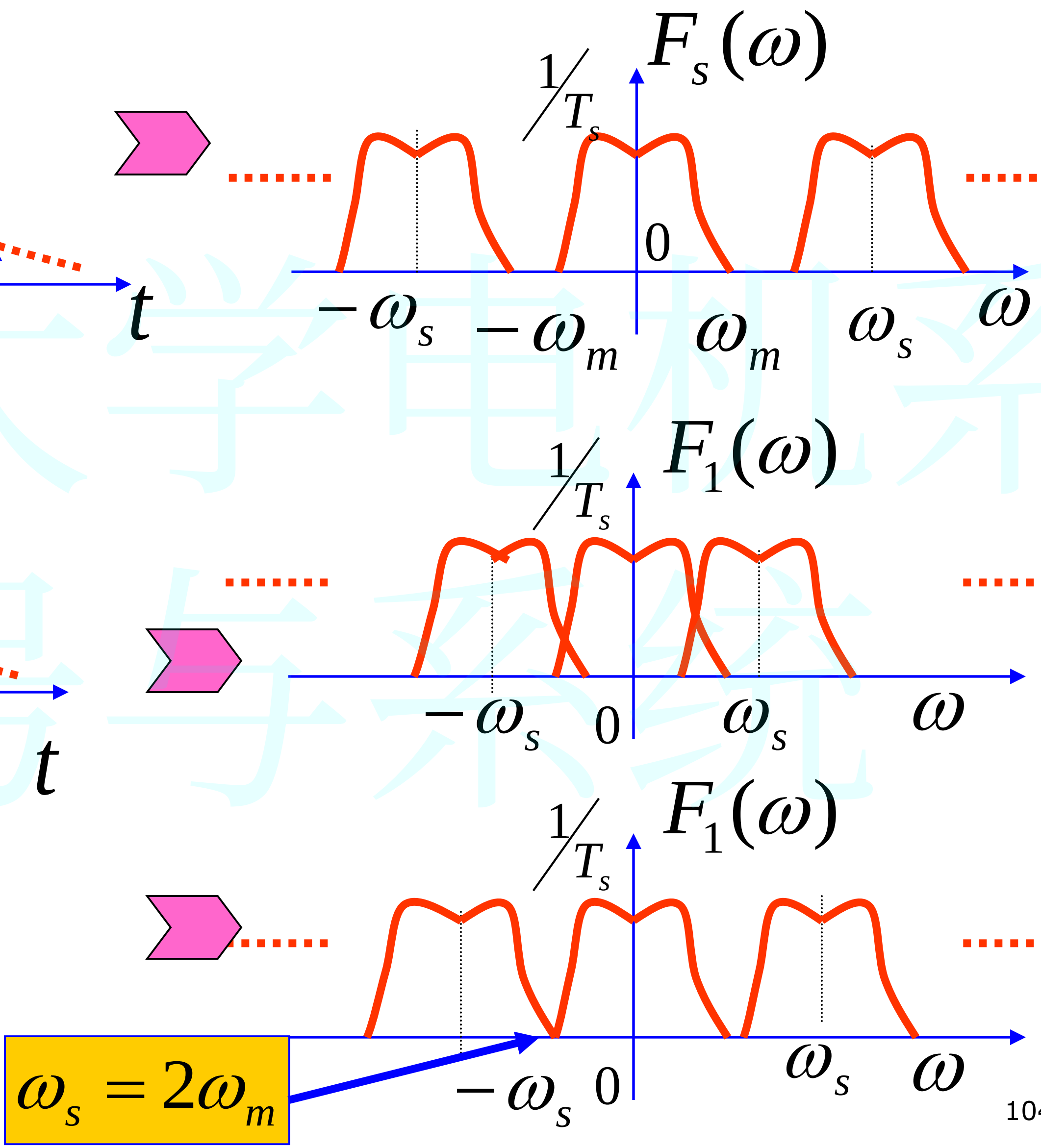
抽样后包含的一系列重复的频谱波形不发生混叠。

要求采样频率ω_s足够大，让重复的频谱波形分得足够开

产生频率混叠现象

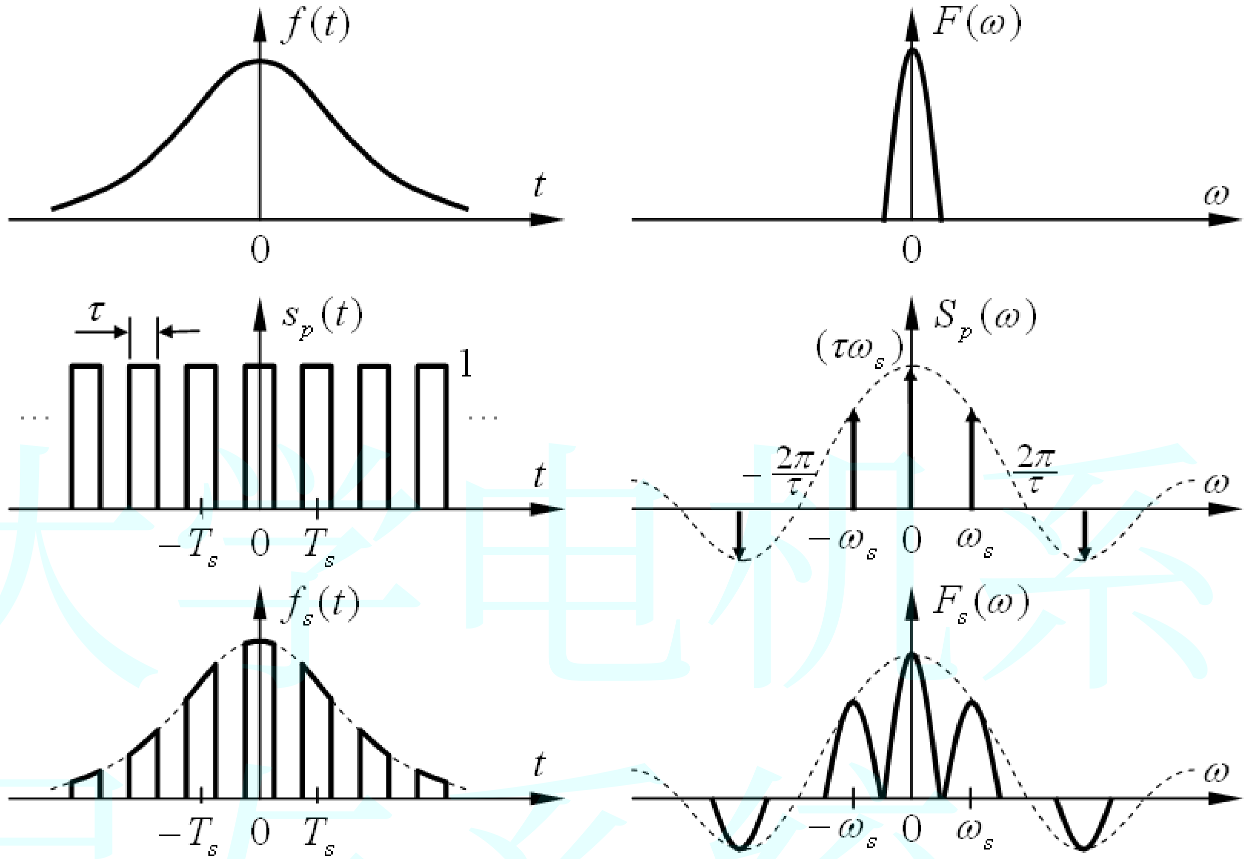






$$\omega_s \geq 2\omega_m$$

矩形脉冲抽样：



- **时域抽样定理：**

如果信号$f(t)$频率有限，频谱只占据$(-\omega_m, \omega_m)$频率区间，则它可以用等间隔的时域抽样信号$f_s(t)$唯一地表示，只要时域抽样间隔$T_s=2\pi/\omega_s$足够小，满足$2\pi/T_s \geq 2\omega_m$，即$\omega_s \geq 2\omega_m$。

时域抽样定理的物理意义：

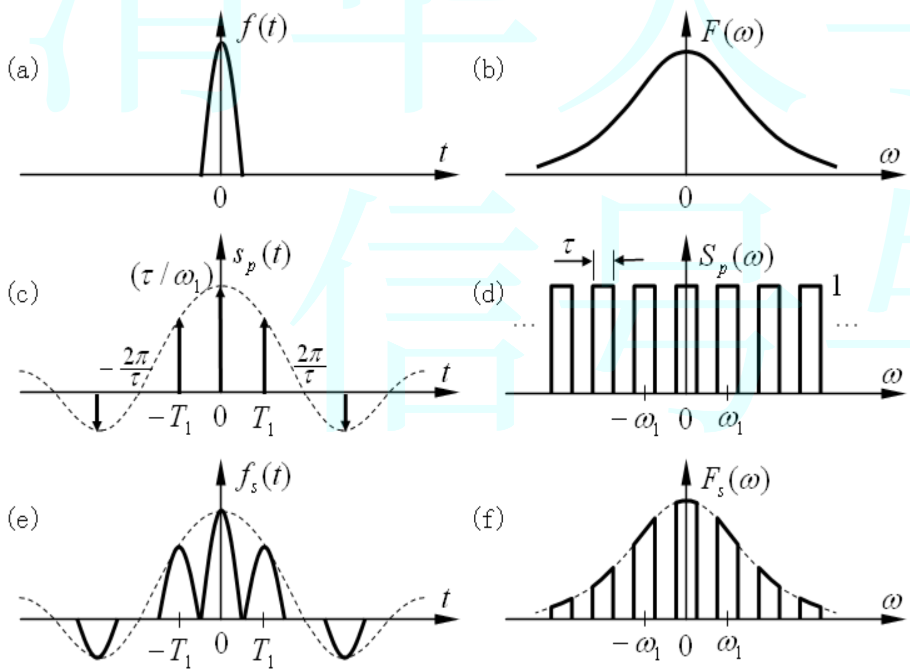
一个随时间变化的信号，其最大变化速度决定了信号所包含的最高频率分量，要使得抽样信号能够不失真地反映原信号的变化，必须保证对其最高频率分量的有效抽样。要满足对最高频率分量的有效抽样，必须在其一个周期内至少抽样两点。

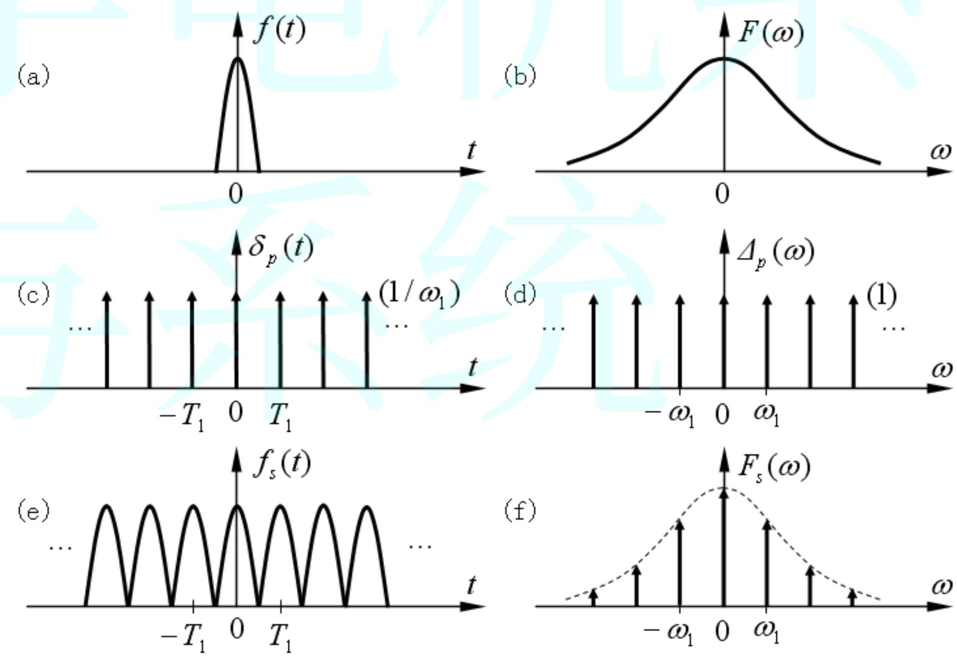
这一重要而著名的采样定理曾在数学文献中以不同的形式应用了很多年，直到1949年Shannon有关论文发表以后，才明确地出现在通信理论中。

然而，Nyquist(1928)就指出过，如果对某一带宽的有限时间连续信号（模拟信号）进行抽样，且在抽样率达到一定数值时，根据这些抽样值可以在接收端准确地恢复原信号。为不使原波形产生“半波损失”，采样率至少应为信号最高频率的两倍。

2. 频域抽样定理

如果信号 $f(t)$ 时间有限，波形只占据 $(-t_m, t_m)$ 时间区间，其傅立叶变换为 $F(\omega)$，则该信号可以用等间隔的频域抽样信号 $F_s(\omega)$ 唯一地表示，只要频域抽样间隔 $\omega_1 = 2\pi / T_1$ 足够小，满足 $(2\pi / \omega_s) \geq 2t_m$，即 $T_1 \geq 2t_m$。

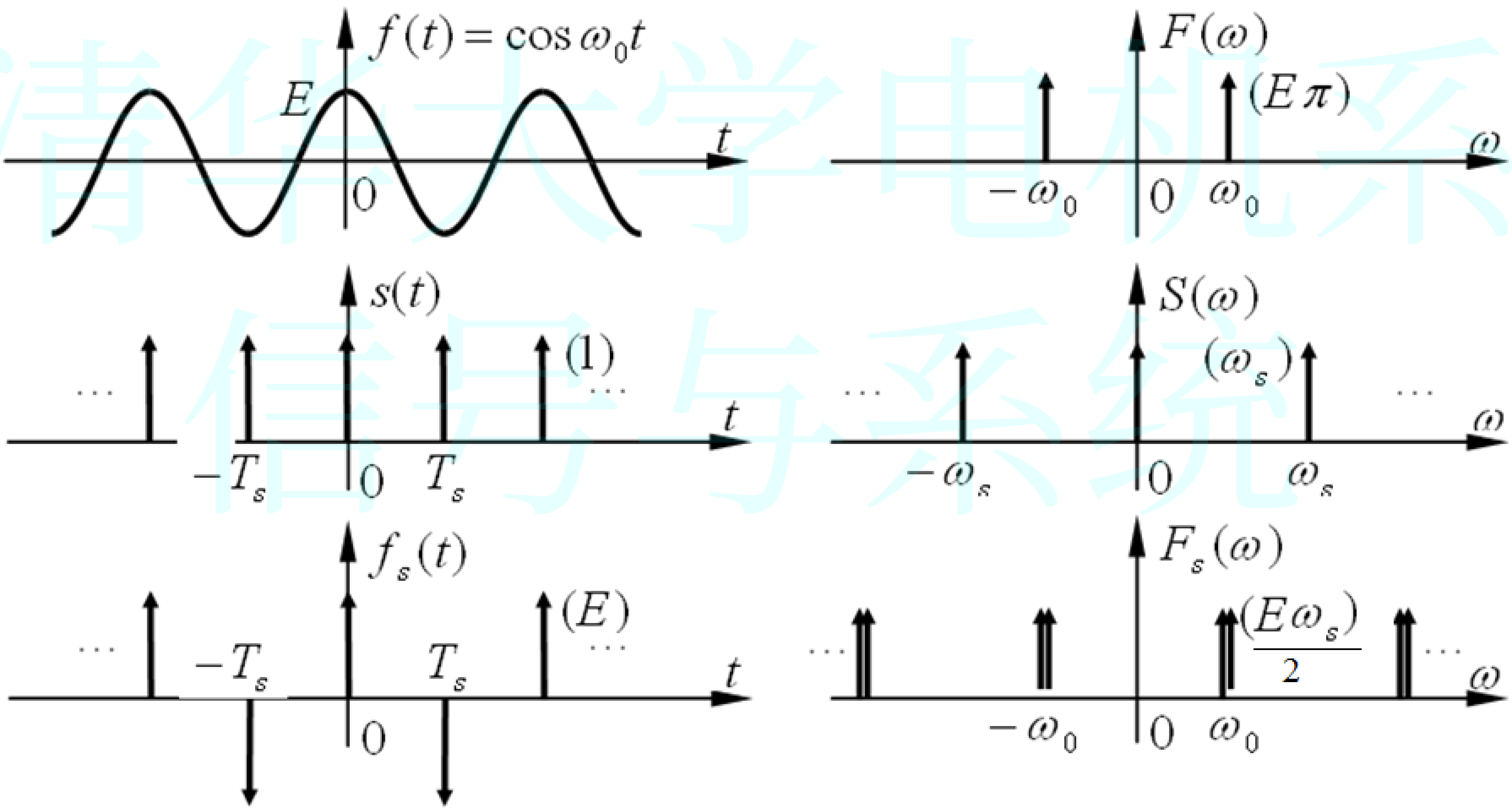




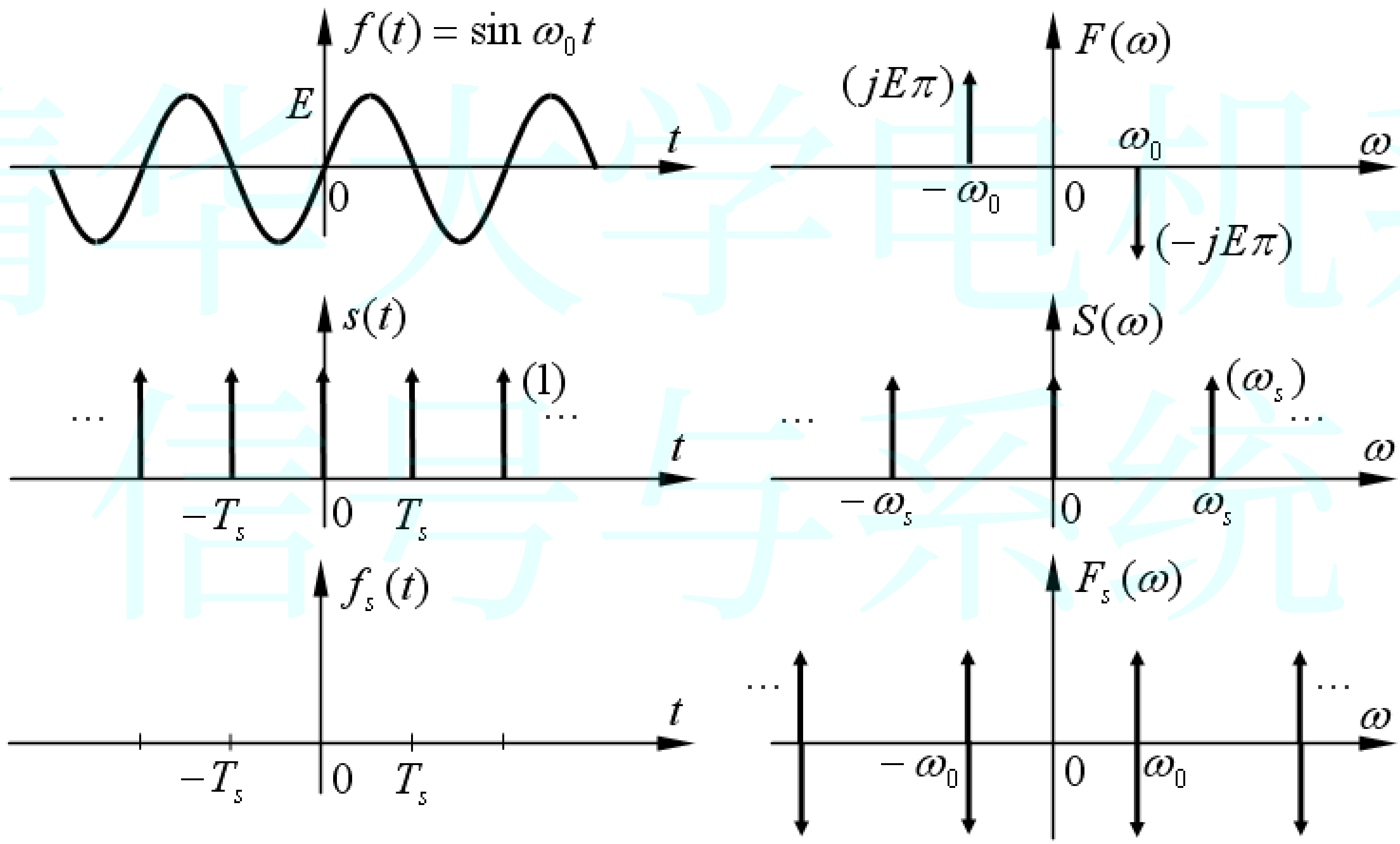
抽样定理给出了避免混叠的条件。在时域抽样时，当$\omega_s = 2\omega_m$时，为临界混叠的状态，重复频谱的边沿相连。在频域抽样时，当$T_1 = 2t_m$时，也为临界混叠的状态。

三角信号的抽样

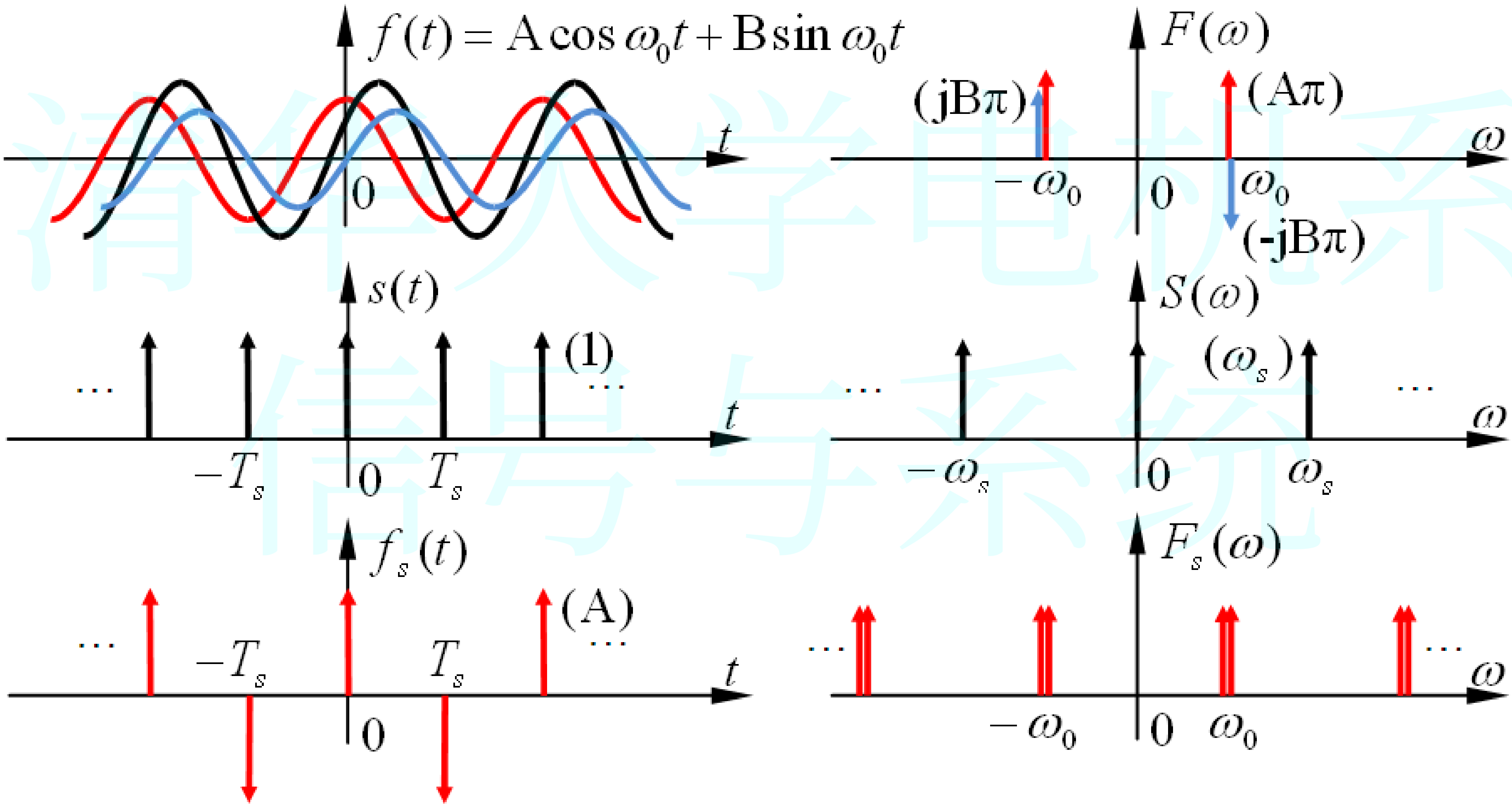
抽样定理给出了避免混叠的条件。在对时域三角信号抽样时，需要注意临界混叠的情况。如图所示是对余弦信号 $\cos\omega_0 t$ 进行冲激抽样， $\omega_s = 2\omega_0$ 为抽样定理的临界条件。



如图所示是以$\omega_s = 2\omega_0$的临界抽样频率对正弦信号$\sin\omega_0 t$进行冲激抽样。在时域，抽样结果全部是零；在频域，频谱发生了混叠，冲激函数相互抵消，结果为零，丢失了原信号的所有信息。

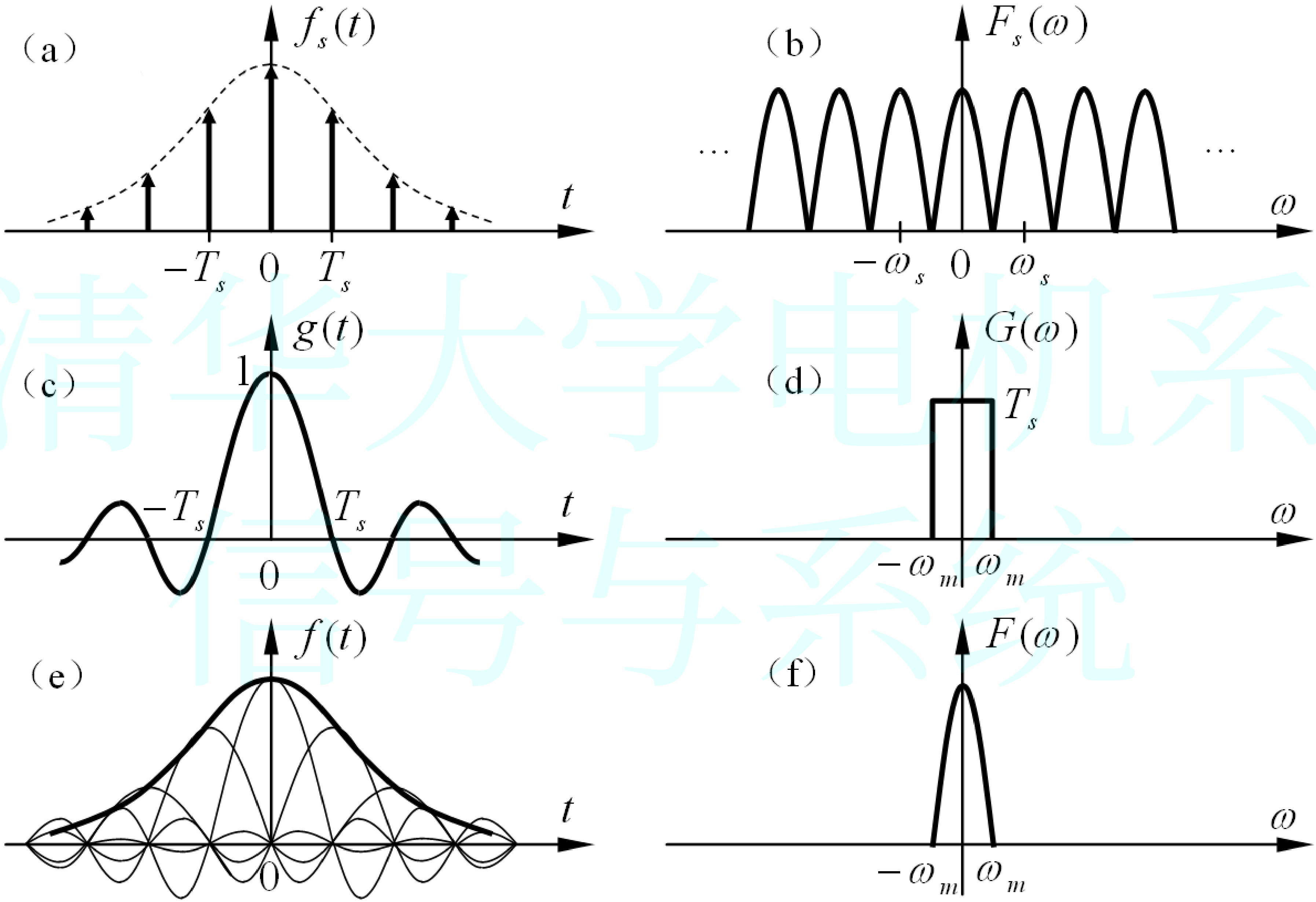


由此可见，对于任意三角信号$\cos(\omega_0 t+\phi)=A\cos\omega_0 t+B\sin\omega_0 t$，如果以$\omega_s=2\omega_0$的抽样频率进行抽样，将出现频谱混叠，此时只能完整保留$\cos\omega_0 t$分量的信息，而$\sin\omega_0 t$分量的信息将丢失。



时域信号的恢复

对频率有限信号进行等间隔抽样，只要满足抽样定理，抽样信号就完整地保留原信号的所有信息，由抽样信号可以不失真地恢复原信号。下图显示了由抽样信号恢复原信号的过程



(a)
$f_s(t)$
$-T_s$
0
T_s
t
(b)
$F_s(\omega)$
…
$-\omega_s$
0
ω_s
ω
(c)
$g(t)$
1
$-T_s$
T_s
0
t
(d)
$G(\omega)$
T_s
$-\omega_m$
ω_m
ω
(e)
$f(t)$
0
t
(f)
$F(\omega)$
$-\omega_m$
ω_m
ω

频域窗函数$G(\omega)$是一个理想低通滤波器，它使得$(-\omega_m,\omega_m)$频率区间内的频率分量得以保留，使该区间以外的频率分量被抑制。可见，对脉冲抽样信号进行适当的低通滤波，即可恢复原信号。

- 时域对$f(t)$抽样等效于频域对$F(\omega)$重复　时域抽样间隔不大于 $2\pi/(2\omega_m)$。
- 频域对$F(\omega)$抽样等效于时域对$f(t)$重复　频域抽样间隔不大于 $2\pi/(2t_m)$。
- 满足抽样定理，则不会产生混叠。