一个三角函数的积分

求实积分 (I) $\qquad I_1=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a+b\cos\theta}, \qquad$ 这里a, b 是实数，且$a>|b|\geq 0$ (6分），

(II) $\qquad I_2=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{A^2\cos^2\theta+B^2\sin^2\theta}, \qquad$ 这里$A>0$, $B>0$. （4分）.

解. (I) 令$z=e^{i\theta}$, $\theta\in[0,\,2\pi]$. 则$dz=ie^{i\theta}d\theta=izd\theta$, $\quad d\theta=\frac{dz}{iz}$,

$$\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}=\frac{z+z^{-1}}{2}=\frac{z^2+1}{2z}.$$

将以上表达式代入积分I_1中，可得当$b\neq 0$时，

$$\begin{aligned}
I_1 &= \tfrac{2}{i}\oint_{|z|=1}\tfrac{dz}{bz^2+2az+b}\\
&= \tfrac{2}{bi}\oint_{|z|=1}\tfrac{dz}{z^2+\frac{2az}{b}+1}\\
&= \tfrac{2}{bi}Res\left[\tfrac{1}{z^2+\frac{2az}{b}+1},z_1\right]\cdot(2\pi i)\\
&= \tfrac{2}{bi}\tfrac{1}{2z_1+\frac{2a}{b}}\cdot(2\pi i)\\
&= \tfrac{2\pi}{b(z_1+\frac{a}{b})}\\
&= \tfrac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}.
\end{aligned}$$

这里$z_1=-\frac{a}{b}+\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}$ 是二次方程$z^2+\frac{2az}{b}+1=0$ 在单位圆$|z|=1$内的唯一复根：$|z_1|<1$.

当$b=0$ 时，易得$I_1=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a}=\frac{2\pi}{a}$. 故不论$b$是否等于0, 均有$I_1=\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$.

(II) 由$\cos^2\theta=\frac{1+\cos 2\theta}{2}$, $\quad\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=\frac{1-\cos 2\theta}{2}$. 将以上表达式代入到$I_2$中，再利用(I)的结果，可得

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_0^{2\pi}\tfrac{2d\theta}{(A^2+B^2)+(A^2-B^2)\cos 2\theta}\\
&= \int_0^{2\pi}\tfrac{d(2\theta)}{(A^2+B^2)+(A^2-B^2)\cos 2\theta}\\
&= \int_0^{4\pi}\tfrac{dt}{(A^2+B^2)+(A^2-B^2)\cos t}\qquad(t=2\theta),\\
&= 2\int_0^{2\pi}\tfrac{dt}{(A^2+B^2)+(A^2-B^2)\cos t}\\
&= \tfrac{4\pi}{\sqrt{(A^2+B^2)^2-(A^2-B^2)^2}}\\
&= \tfrac{4\pi}{\sqrt{4A^2B^2}}\\
&= \tfrac{2\pi}{AB}.
\end{aligned}$$