第四章

连续周期信号的傅里叶级数

三角函数形式的傅里叶级数

任何满足狄利克雷条件的周期函数，周期为T_1，可以展开成由正弦函数和余弦函数组成的三角级数，即傅里叶级数。

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos k\omega_1 t + b_k \sin k\omega_1 t)$$

$$= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos(k\omega_1 t + \phi_k) \qquad t_0 < t < t_0 + T$$

其中 $\omega_1 = 2\pi / T_1$

$$a_0 = \frac{1}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t)\mathrm{d}t$$

$$a_k = \frac{2}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t)\cos k\omega_1 t\mathrm{d}t$$

$$b_k = \frac{2}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t)\sin k\omega_1 t\mathrm{d}t$$

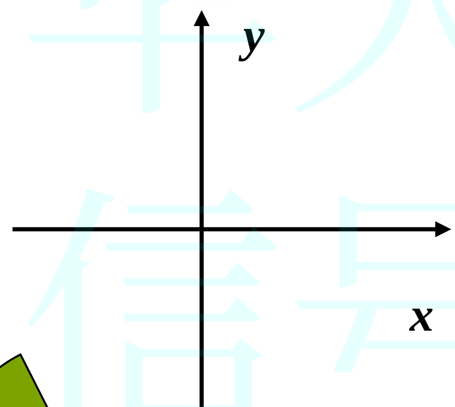
$$c_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \qquad \phi_k = \arctan(-b_k / a_k)$$

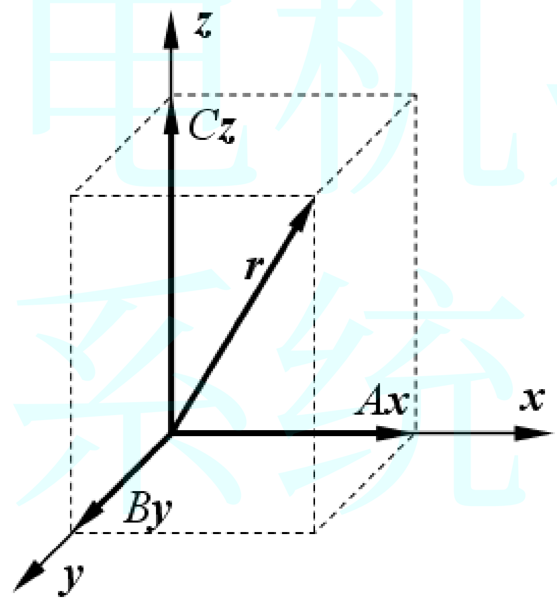
主要内容

- 正交函数集；信号正交分解；函数内积等概念。
- 三角函数形式的傅里叶级数和复指数形式的傅里叶级数；它们之间的关系。
- 连续信号傅里叶级数的特点。

1 正交的概念

- 所谓正交，即垂直、互不包含，由向量空间的概念引伸而来。

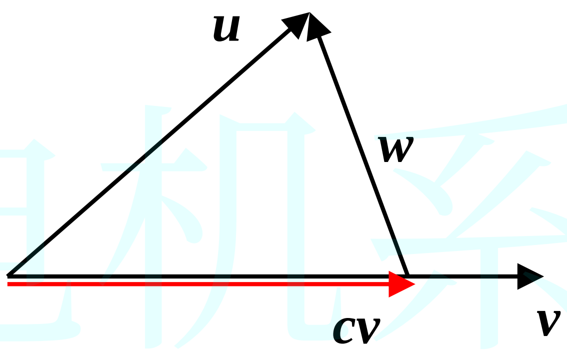




正交向量空间的概念

二维向量的投影、内积和正交

图中所示是二维向量空间中的两个向量u和v，如果用v方向上的一个向量cv来近似地表示u，即



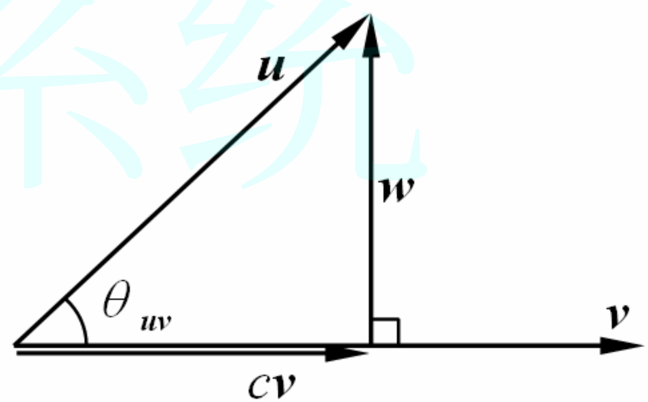
$$u \approx cv$$

其中c为常数，则产生的误差向量为

$$w = u - cv$$

什么时候w最小？

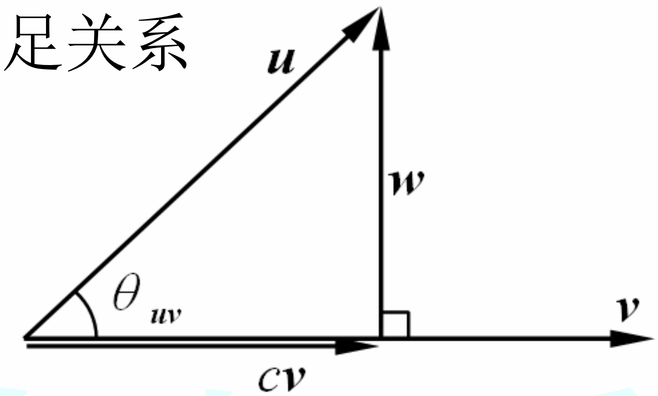
当w和v垂直时，称cv是u在v上的投影，也称cv是u在v方向上的分量。



向量投影

可以推得，误差向量w最小时，系数c满足关系

$$c=\frac{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|\cos\theta_{uv}}{|\boldsymbol{v}|^2}$$



向量投影

另一方面，根据向量内积的定义

$$\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle=|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|\cos\theta_{uv} \qquad \langle\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}\rangle=|\boldsymbol{v}||\boldsymbol{v}|\cos\theta_{vv}=|\boldsymbol{v}|^2$$

c可表示为： $$c=\frac{\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle}{\langle\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}\rangle} \qquad \boxed{c=0}$$

当u和v垂直时， $$\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle=|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|\cos\theta_{uv}=0$$

u和v垂直时，它们的内积为零， u在v上的投影为零，亦即u不包含在v方向上的分量，此时称u和v正交。

三维向量的投影、内积和正交

图中x， y， z是三维向量空间中三个相互垂直（正交）的向量，其中任一向量在其他两个向量上的投影等于零，或者说任一向量不包含其他两个向量方向上的分量。

x， y， z相互正交，它们的内积满足关系

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = |\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}|\cos\theta_{xy} = 0$$

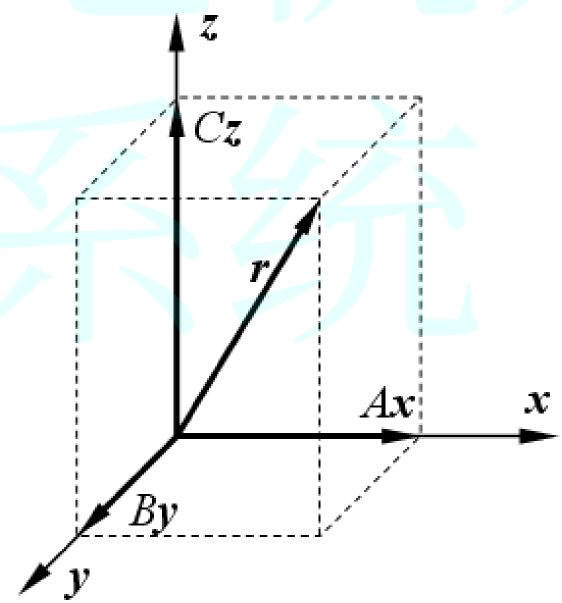
$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z} \rangle = |\boldsymbol{x}||\boldsymbol{z}|\cos\theta_{xz} = 0$$

$$\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle = |\boldsymbol{y}||\boldsymbol{z}|\cos\theta_{yz} = 0$$

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = |\boldsymbol{x}||\boldsymbol{x}|\cos\theta_{xx} = |\boldsymbol{x}|^2$$

$$\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} \rangle = |\boldsymbol{y}||\boldsymbol{y}|\cos\theta_{yy} = |\boldsymbol{y}|^2$$

$$\langle \boldsymbol{z}, \boldsymbol{z} \rangle = |\boldsymbol{z}||\boldsymbol{z}|\cos\theta_{zz} = |\boldsymbol{z}|^2$$

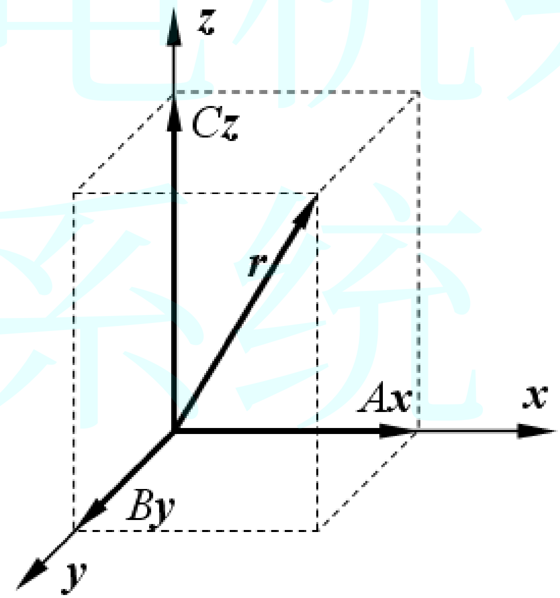


完备正交向量集

在三维向量空间中，线性无关向量的最大个数是3，即能够相互正交的向量个数最多是3，因此称 x， y， z 是三维向量空间中的完备正交向量集。

如果$|x|=1$，$|y|=1$，$|z|=1$

则 x， y， z 为规范化的完备正交向量集。



向量在正交空间的分解

设r是三维向量空间中的任一向量，它可以表示为完备正交向量集各元素 x， y， z的线性组合

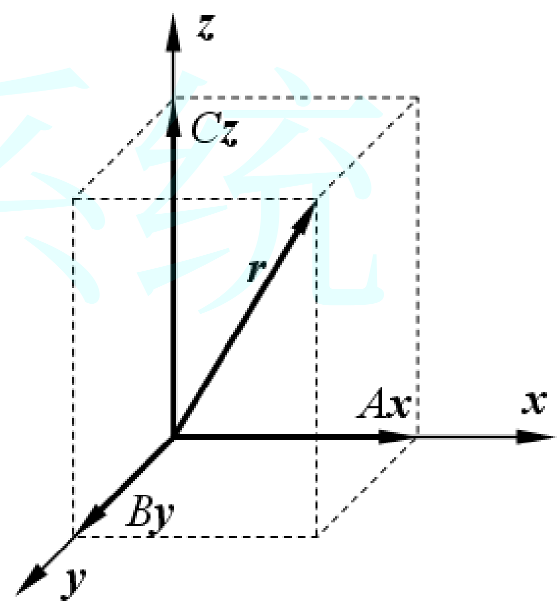
$$\boldsymbol{r} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{y} + C\boldsymbol{z}$$

其中Ax，By，Cz分别是 在 x， y， z上的投影

$$A = \frac{\langle \boldsymbol{r}, \boldsymbol{x} \rangle}{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle}, \quad B = \frac{\langle \boldsymbol{r}, \boldsymbol{y} \rangle}{\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} \rangle}, \quad C = \frac{\langle \boldsymbol{r}, \boldsymbol{z} \rangle}{\langle \boldsymbol{z}, \boldsymbol{z} \rangle}$$

因为是正交分解，存在以下关系

$$|\boldsymbol{r}|^2 = |A\boldsymbol{x}|^2 + |B\boldsymbol{y}|^2 + |C\boldsymbol{z}|^2$$



2 正交函数空间

- 函数空间的概念：
  - 向量空间　　一组向量（元素）张成
  - 函数空间　　一组函数构成

设在(t_1,t_2)区间有一组函数$\varphi_1(t)$，$\varphi_2(t)$，…，$\varphi_N(t)$，这组函数可构成一个函数空间，每个函数都是函数空间中的一个元素。

问题：对于一函数空间的任意两个元素$\varphi_i(t)$和$\varphi_j(t)$，在(t_1,t_2)区间，用$c\varphi_j(t)$近似表示$\varphi_i(t)$，即$\varphi_i(t) \approx c\varphi_j(t)$。如何表示误差最小？

如果是向量空间，显然是投影的时候，误差最小。在函数空间又如何呢？

$\varphi_i(t) \approx c\varphi_j(t)$ 产生的误差：$\varphi_i(t) - c\varphi_j(t)$ 。定义差函数的均方误差为

$$\varepsilon^2 = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2}\left[\phi_i(t) - c\phi_j(t)\right]^2 \mathrm{d}t$$

选择 c 使均方误差 ε^2 最小　令 $\dfrac{\mathrm{d}\varepsilon^2}{\mathrm{d}c} = 0$，求得

$$c = \frac{\int_{t_1}^{t_2}\phi_i(t)\phi_j(t)\mathrm{d}t}{\int_{t_1}^{t_2}\phi_j^{\ 2}(t)\mathrm{d}t}$$

$$\boxed{c = \frac{\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle}{\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle}}$$

比照向量空间的概念，称 $c\varphi_j(t)$ 为 $\varphi_i(t)$ 在 $\varphi_j(t)$ 方向上的投影；或称 $c\varphi_j(t)$ 为 $\varphi_i(t)$ 在 $\varphi_j(t)$ 方向上的分量。

函数内积

定义函数空间两个元素在(t_1,t_2)区间的内积为

$$\langle \phi_i(t), \phi_j(t) \rangle = \int_{t_1}^{t_2} \phi_i(t)\phi_j(t)\mathrm{d}t$$

当$\phi_1(t)$，$\phi_2(t)$，$\cdots\phi_N(t)$为一组复函数时，定义函数内积

$$\langle \phi_i(t), \phi_j(t) \rangle = \int_{t_1}^{t_2} \phi_i(t)\phi_j^*(t)\mathrm{d}t$$

其中$\phi_j^*(t)$是$\phi_j(t)$的共轭。

□ 函数正交

$$c=\frac{\int_{t_1}^{t_2}\phi_i(t)\phi_j(t)\mathrm{d}t}{\int_{t_1}^{t_2}\phi_j^{\,2}(t)\mathrm{d}t}$$

函数内积

$$\langle\phi_i(t),\phi_j(t)\rangle=\int_{t_1}^{t_2}\phi_i(t)\phi_j(t)\mathrm{d}t$$

$$c=\frac{\int_{t_1}^{t_2}\phi_i(t)\phi_j(t)\mathrm{d}t}{\int_{t_1}^{t_2}\phi_j^{\,2}(t)\mathrm{d}t}=\frac{\langle\phi_i(t),\phi_j(t)\rangle}{\langle\phi_j(t),\phi_j(t)\rangle}$$

当$<\varphi_i(t),\varphi_j(t)> = 0$时，则$c = 0$，称$\varphi_i(t)$和$\varphi_j(t)$正交，或相互的投影为零。

函数内积的本质是描述两个函数的相似程度。

正交函数空间

- 如果函数集$\phi_1(t)$，$\phi_2(t)$，…$\phi_N(t)$在给定(t_1,t_2)区间满足

$$\langle \phi_i(t),\phi_j(t)\rangle = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ K_i & i = j \end{cases} \qquad i,j = 1,2,3,\cdots,N$$

则称为正交函数集。

- 如果在$\phi_i(t)$ $(i=1,2,\cdots,N)$之外不存在非零函数$\phi_{N+1}(t)$，满足

$$\langle \phi_i(t),\phi_{N+1}(t)\rangle = 0 \qquad i=1,2,\cdots,N$$

则称为完备正交函数集。

- 如果有

$$\langle \phi_i(t),\phi_i(t)\rangle = K_i = 1 \qquad i=1,2,\cdots,N$$

则称为规范化完备正交函数集。

注意：

- 函数的正交性有时间区间的限制，一组函数在给定的(t_1,t_2)区间内相互正交，改变这个区间就会失去正交性。
- 完备正交函数集可能包含无穷个分量，即$N=\infty$。

信号在正交函数空间的分解

如果信号 $f(t)$ 在 (t_1, t_2) 区间满足狄利克雷条件：（1）如果存在间断点，间断点的个数是有限个；（2）信号极大值和极小值的个数是有限个；（3）信号绝对可积

$$\int_{t_1}^{t_2} \left| f(t) \right| \mathrm{d}t < \infty$$

则 $f(t)$ 可表示为完备正交函数集各分量 $\phi_i(t)$ $(i = 1, 2, \cdots, N)$ 的线性组合

$$\begin{aligned} f(t) &= c_1\phi_1(t) + c_2\phi_2(t) + \cdots + c_N\phi_N(t) \\ &= \sum_{i=1}^{N} c_i \phi_i(t) \end{aligned}$$

其中 $c_i\phi_i(t)$ 是 $f(t)$ 在 $\phi_i(t)$ 方向的投影，有

$$c_i = \frac{\langle f(t), \phi_i(t) \rangle}{\langle \phi_i(t), \phi_i(t) \rangle} \qquad i = 1, 2, \cdots, N$$

这就是信号 $f(t)$ 正交分解的概念。

帕塞瓦尔定理

在完备正交分解情况下，信号能量满足以下关系

$$\int_{t_1}^{t_2} f^2(t)\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{N} c_i^2 \int_{t_1}^{t_2} \phi_i^2(t)\mathrm{d}t$$

当 $f(t)$ 为复函数时，有

$$\int_{t_1}^{t_2} \left|f(t)\right|^2 \mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} f(t) f^*(t)\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{N} c_i^2 \int_{t_1}^{t_2} \phi_i(t)\phi_i^*(t)\mathrm{d}t$$

以上两式显示，一个信号的能量等于此信号的完备正交函数分解的各分量能量的总和。此为信号正交分解的能量守恒关系，称为帕塞瓦尔定理。

比较正交向量空间的情况

$$|\boldsymbol{r}|^2 = |A\boldsymbol{x}|^2 + |B\boldsymbol{y}|^2 + |C\boldsymbol{z}|^2$$

完备正交三角函数集

考察三角函数集

$$1,\ \cos\omega_1 t,\ \sin\omega_1 t,\ \cos 2\omega_1 t,\ \sin 2\omega_1 t,\ \ldots,\ \cos k\omega_1 t,\ \sin k\omega_1 t,\ \ldots$$

其中 ω_1 为基本角频率，$T_1 = 2\pi/\omega_1$ 为基本周期，此函数集各元素在 (t_0, t_0+T_1) 区间满足关系

$$\langle 1,1\rangle = \int_{t_0}^{t_0+T_1} 1\,\mathrm{d}t = T_1$$

$$\langle 1,\cos k\omega_1 t\rangle = \int_{t_0}^{t_0+T_1} \cos k\omega_1 t\,\mathrm{d}t = 0 \qquad k = 1,2,3,\cdots$$

$$\langle 1,\sin k\omega_1 t\rangle = \int_{t_0}^{t_0+T_1} \sin k\omega_1 t\,\mathrm{d}t = 0 \qquad k = 1,2,3,\cdots$$

$$\langle \cos k_1\omega_1 t, \sin k_2\omega_1 t\rangle = \int_{t_0}^{t_0+T_1} \cos k_1\omega_1 t \sin k_2\omega_1 t\,\mathrm{d}t$$

$$= 0 \qquad k_1, k_2 = 1,2,3,\cdots$$

· 积化和差公式:

$\sin\alpha \cdot \cos\beta = (1/2)[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$

$\cos\alpha \cdot \sin\beta = (1/2)[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$

$$\langle \cos k_1\omega_1 t, \cos k_2\omega_1 t\rangle = \int_{t_0}^{t_0+T_1} \cos k_1\omega_1 t \cos k_2\omega_1 t \mathrm{d}t$$

$$= \begin{cases} 0 & k_1 \neq k_2 \\ T_1/2 & k_1 = k_2 \end{cases} \qquad k_1, k_2 = 1,2,3,\cdots$$

$$\langle \sin k_1\omega_1 t, \sin k_2\omega_1 t\rangle = \int_{t_0}^{t_0+T_1} \sin k_1\omega_1 t \sin k_2\omega_1 t \mathrm{d}t$$

$$= \begin{cases} 0 & k_1 \neq k_2 \\ T_1/2 & k_1 = k_2 \end{cases} \qquad k_1, k_2 = 1,2,3,\cdots$$

此三角函数集在基本周期区间(t_0, t_0+T_1)是正交函数集，可以证明它是完备正交函数集。

· 积化和差公式：

$\sin\alpha \cdot \cos\beta = (1/2)[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$

$\cos\alpha \cdot \sin\beta = (1/2)[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$

$\cos\alpha \cdot \cos\beta = (1/2)[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$

$\sin\alpha \cdot \sin\beta = -(1/2)[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$

完备正交复指数函数集

考察复指数函数集

$$\cdots,\ e^{-jk\omega_1 t},\ \cdots,\ e^{-j2\omega_1 t},\ e^{-j\omega_1 t},\ 1,\ e^{j\omega_1 t},\ e^{j2\omega_1 t},\ \cdots,\ e^{jk\omega_1 t},\ \cdots$$

其中 ω_1 为基本角频率， $T_1 = 2\pi/\omega_1$ 为基本周期，此函数集各元素在区间 (t_0, t_0+T_1) 满足关系

$$\langle e^{jk_1\omega_1 t}, e^{jk_2\omega_1 t}\rangle = \int_{t_0}^{t_0+T_1} e^{jk_1\omega_1 t}(e^{jk_2\omega_1 t})^* \mathrm{d}t$$

$$= \begin{cases} 0 & k_1 \neq k_2 \\ T_1 & k_1 = k_2 \end{cases} \qquad k_1, k_2 = \cdots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\cdots$$

此复指数函数集在基本周期区间 (t_0, t_0+T_1) 也是正交函数集，并且也是完备正交函数集。

三角函数形式的傅里叶级数

给定信号 $f(t)$，设它在 (t_0, t_0+T_1) 区间满足狄利克雷条件，则在 (t_0, t_0+T_1) 区间 $f(t)$ 可以表示为完备正交三角函数集各分量的线性组合

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos k\omega_1 t + b_k \sin k\omega_1 t)$$

$$= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos(k\omega_1 t + \phi_k) \qquad t_0 < t < t_0 + T$$

其中 $\omega_1 = 2\pi / T_1$

$$a_0 = \frac{\langle f(t), 1\rangle}{\langle 1, 1\rangle} = \frac{1}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t)\mathrm{d}t$$

$$a_k = \frac{\langle f(t), \cos k\omega_1 t\rangle}{\langle \cos k\omega_1 t, \cos k\omega_1 t\rangle} = \frac{2}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t)\cos k\omega_1 t\mathrm{d}t$$

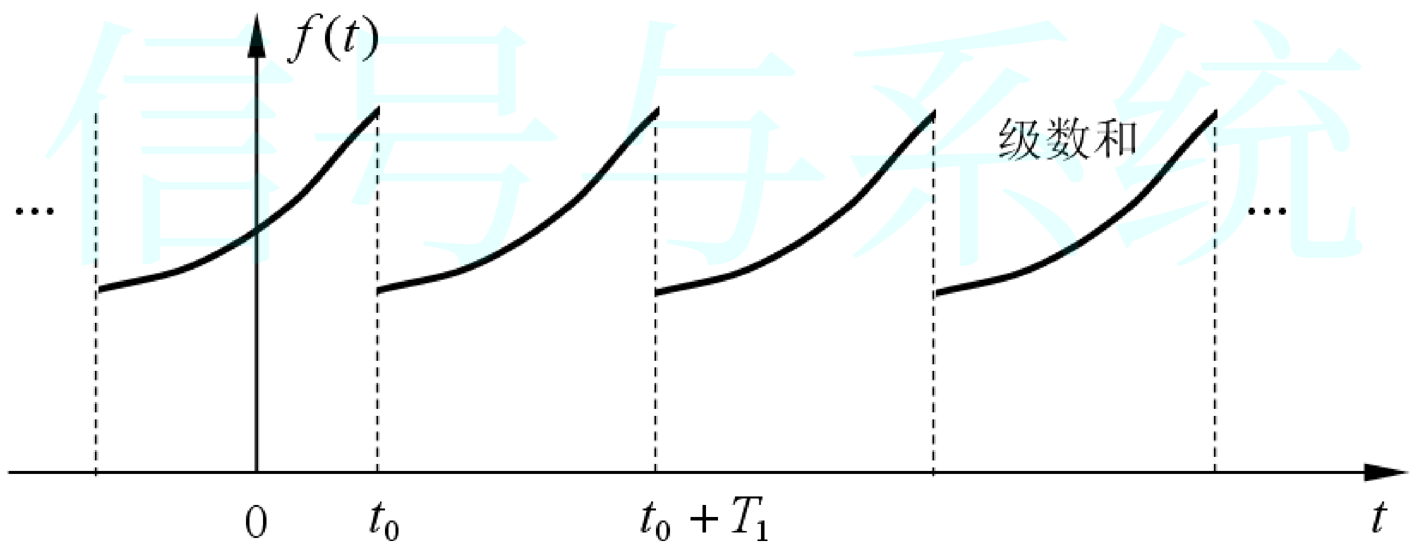
$$b_k = \frac{\langle f(t), \sin k\omega_1 t\rangle}{\langle \sin k\omega_1 t, \sin k\omega_1 t\rangle} = \frac{2}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t)\sin k\omega_1 t\mathrm{d}t$$

$$c_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \qquad \phi_k = \arctan(-b_k / a_k)$$

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos k\omega_1 t + b_k \sin k\omega_1 t)$$

$$= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos(k\omega_1 t + \phi_k) \qquad t_0 < t < t_0 + T$$

- 此式右边为三角函数的"级数和"，任意两项三角函数的周期之比是有理数，所以"级数和"依然是一个周期函数，周期为T_1。

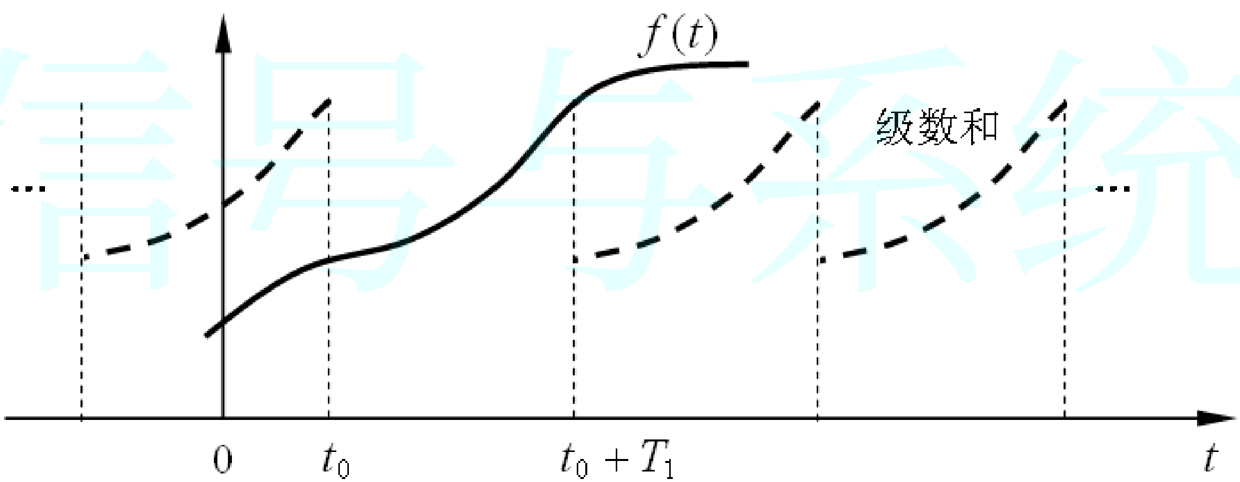


$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos k\omega_1 t + b_k \sin k\omega_1 t)$$

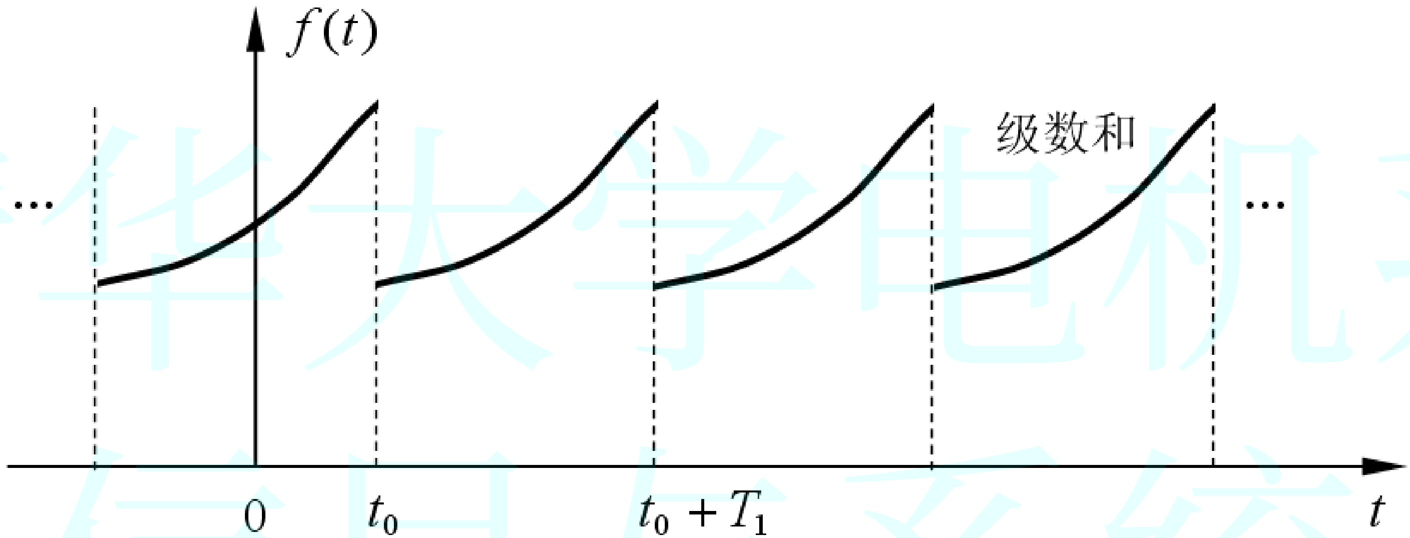
$$= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos(k\omega_1 t + \phi_k) \qquad t_0 < t < t_0 + T$$

式中 $f(t)$ 可以是一个周期信号，也可以是一个非周期信号。

- 如果 $f(t)$ 是非周期信号，上式只在 $(t_0, t_0 + T_1)$ 区间成立，$f(t)$ 和“级数和”相等。



➢ 如果 $f(t)$ 本身是一个周期信号，周期为 T_1，那么 “级数和” 与 $f(t)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 区间相等。



由此得：周期信号 $f(t)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 区间可以表示为三角函数的级数和，即周期信号的三角函数形式的傅立叶级数。

复指数函数形式的傅立叶级数

给定周期信号 $f(t)$，如果它在一个周期内满足狄利克雷条件，则可以表示为完备复指数函数集各分量的线性组合

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(k\omega_1)\mathrm{e}^{jk\omega_1 t}$$

其中 $\omega_1 = 2\pi / T_1$

$$F(k\omega_1) = \frac{\langle f(t), e^{jk\omega_1 t} \rangle}{\langle e^{jk\omega_1 t}, e^{jk\omega_1 t} \rangle} \qquad k = \cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots$$

$$= \frac{1}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t)\mathrm{e}^{-jk\omega_1 t}\mathrm{d}t$$

$F(k\omega_1)$ 为周期信号 $f(t)$ 的傅立叶级数的系数，是角频率 $k\omega_1$ 的函数。

通常 $F(k\omega_1)$ 是复函数，可表示为

$$F(k\omega_1)=\left|F(k\omega_1)\right|e^{j\phi(k\omega_1)}$$

- $F(k\omega_1)$ 的模 $\left|F(k\omega_1)\right|$ 表示 $k\omega_1$ 频率分量的幅值；
- $F(k\omega_1)$ 的辐角 $\phi(k\omega_1)$ 表示 $k\omega_1$ 频率分量的初始相位。

在复指数形式傅立叶级数中，除了直流分量外（$k=0$），其他频率分量成对出现，即 $F(k\omega_1)$ 和 $F(-k\omega_1)$，这两个分量表示同一个频率。

两种形式傅立叶级数的关系

复指数函数形式的傅立叶级数可表示为

$$F(k\omega_1)=\frac{1}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t)\mathrm{e}^{-jk\omega_1 t}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t)\cos k\omega_1 t\mathrm{d}t - j\frac{1}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t)\sin k\omega_1 t\mathrm{d}t$$

- 利用欧拉公式，可以由一种形式的傅立叶级数推导出另一种
- **复指数形式傅立叶级数和三角函数形式傅立叶级数本质是相同的**

三角函数形式

$$a_0=\frac{\langle f(t),1\rangle}{\langle 1,1\rangle}=\frac{1}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t)\mathrm{d}t$$

$$a_k=\frac{2}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t)\cos k\omega_1 t\mathrm{d}t$$

$$b_k=\frac{2}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t)\sin k\omega_1 t\mathrm{d}t$$

$$f(t)=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos k\omega_1 t+b_k\sin k\omega_1 t)$$

复指数形式

$$F(0)=\frac{\langle f(t),1\rangle}{\langle 1,1\rangle}=\frac{1}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t)\mathrm{d}t$$

$$=a_0$$

$$F(k\omega_1)=\frac{1}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t)\cos k\omega_1 t\mathrm{d}t$$

$$-\mathrm{j}\frac{1}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t)\sin k\omega_1 t\mathrm{d}t$$

$$=\frac{a_k}{2}-\mathrm{j}\frac{b_k}{2}$$

$$F(-k\omega_1)=\frac{a_k}{2}+\mathrm{j}\frac{b_k}{2}$$

$$f(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}F(k\omega_1)\mathrm{e}^{jk\omega_1 t}=F(0)+\sum_{k=1}^{\infty}\left(F(k\omega_1)\mathrm{e}^{jk\omega_1 t}+F(-k\omega_1)\mathrm{e}^{-jk\omega_1 t}\right)$$

$$=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{a_k-\mathrm{j}b_k}{2}\mathrm{e}^{jk\omega_1 t}+\frac{a_k+\mathrm{j}b_k}{2}\mathrm{e}^{-jk\omega_1 t}\right)$$

三角函数形式傅立叶级数和复指数形式傅立叶级数存在以下系数关系

$$F(0) = a_0 = c_0$$

$$F(k\omega_1) = (a_k - jb_k)/2 \qquad k = 1,2,3,\cdots$$

$$\phi(k\omega_1) = \angle F(k\omega_1) = \phi_k \qquad k = 1,2,3,\cdots$$

$$F(-k\omega_1) = (a_k + jb_k)/2 \qquad k = 1,2,3,\cdots$$

$$\phi(-k\omega_1) = \angle F(-k\omega_1) = -\phi_k \qquad k = 1,2,3,\cdots$$

$$|F(k\omega_1)| = |F(-k\omega_1)| = \frac{\sqrt{a_k^2 + b_k^2}}{2} = c_k / 2 \qquad k = 1, 2, 3, \cdots$$

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos k\omega_1 t + b_k \sin k\omega_1 t)$$

$$= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos(k\omega_1 t + \phi_k)$$

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(k\omega_1)\mathrm{e}^{jk\omega_1 t}$$

周期信号的频谱

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos k\omega_1 t + b_k \sin k\omega_1 t)$$

$$= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos(k\omega_1 t + \phi_k) \qquad t_0 < t < t_0 + T$$

- 傅立叶级数是把一个周期信号分解为不同频率三角信号的叠加
  - 一个周期信号有可能包含有限个频率分量，也有可能包含无穷个频率分量
  - 各频率分量取离散的频率值,称k=0的分量为直流分量，称|k|=1的分量为基波分量，称|k|>1的分量为k次谐波分量，谐波分量的频率是基波频率的整数倍

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos k\omega_1 t + b_k \sin k\omega_1 t)$$

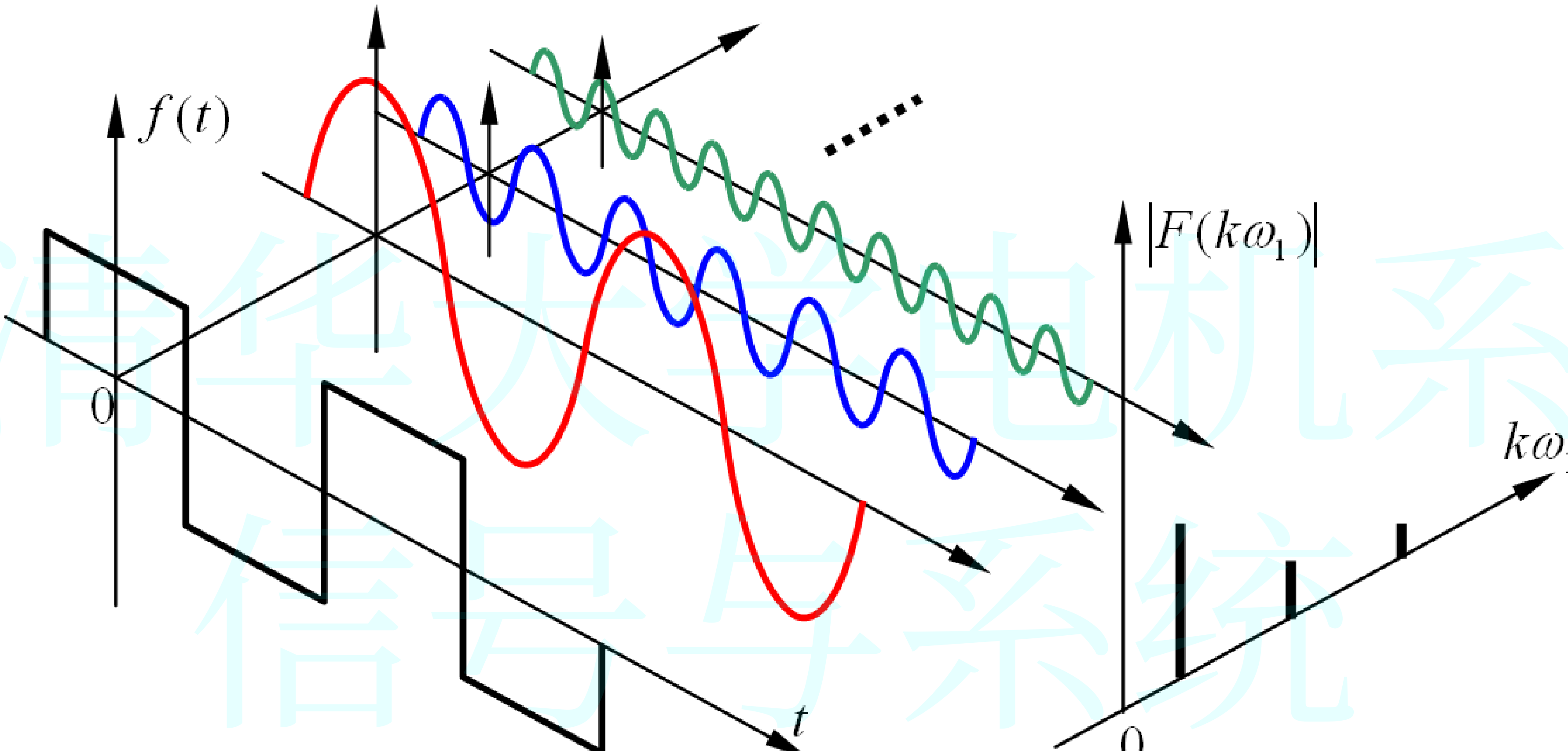
$$= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos(k\omega_1 t + \phi_k) \qquad t_0 < t < t_0 + T$$

- 描述每一个频率分量，需要频率$k\omega_1$、幅值c_k或$|F(k\omega_1)|$、相位φ_k或$\varphi(k\omega_1)$三个参数。

- 幅值谱和相位谱
  - c_k— $k\omega_1$ 或 $|F(k\omega_1)|$ — $k\omega_1$描述了各频率分量的幅值随频率的变化，称为$f(t)$的幅频特性或幅值谱
  - φ_k— $k\omega_1$ 或 $\varphi(k\omega_1)$ — $k\omega_1$描述$f(t)$各频率分量的初始相位随频率的变化，称为$f(t)$的相频特性或相位谱

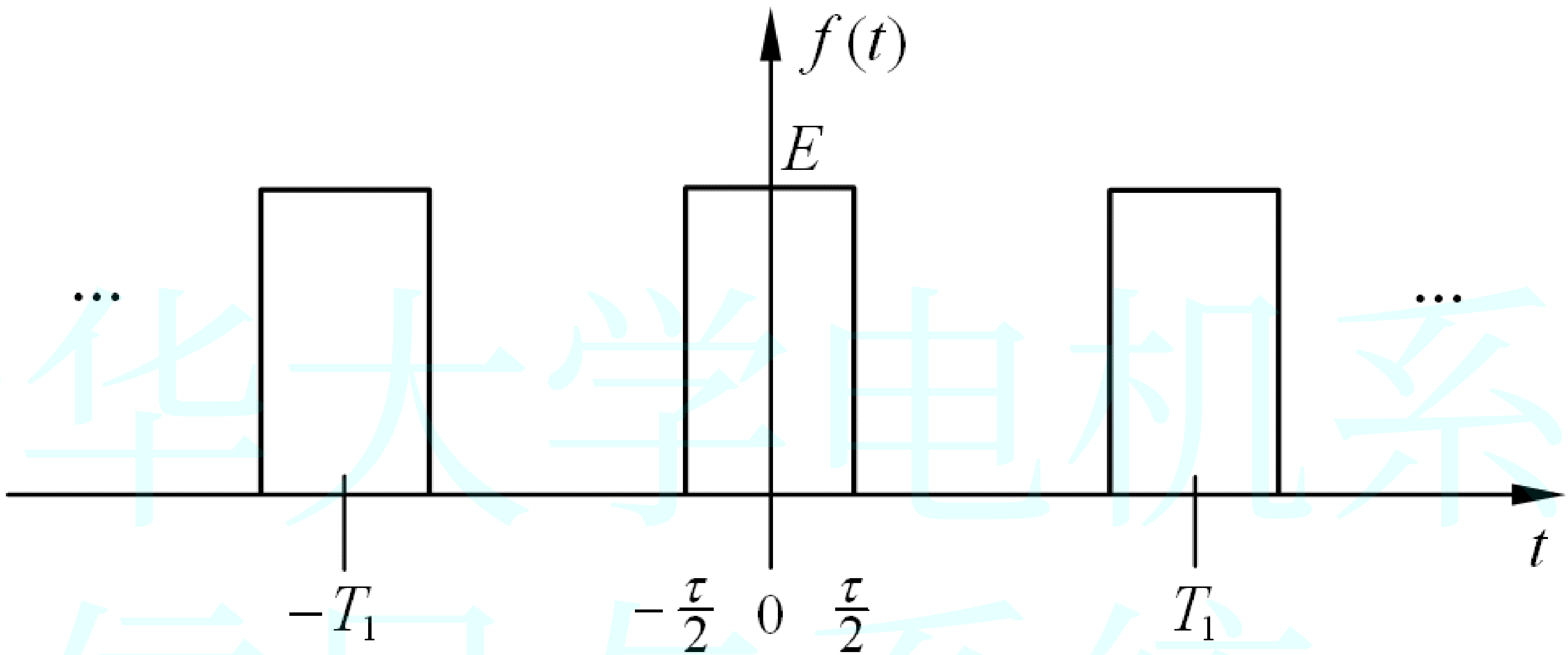
复函数$F(k\omega_1)$同时表示了$f(t)$的幅值谱和相位谱，这是采用复指数函数形式傅立叶级数的方便之处。

频域分析——基于信号频谱特性系统分析信号，傅立叶变换



周期矩形波信号的时域和频域

例1　求图示周期方波信号 $f(t)$ 的复指数函数形式的傅立叶级数。



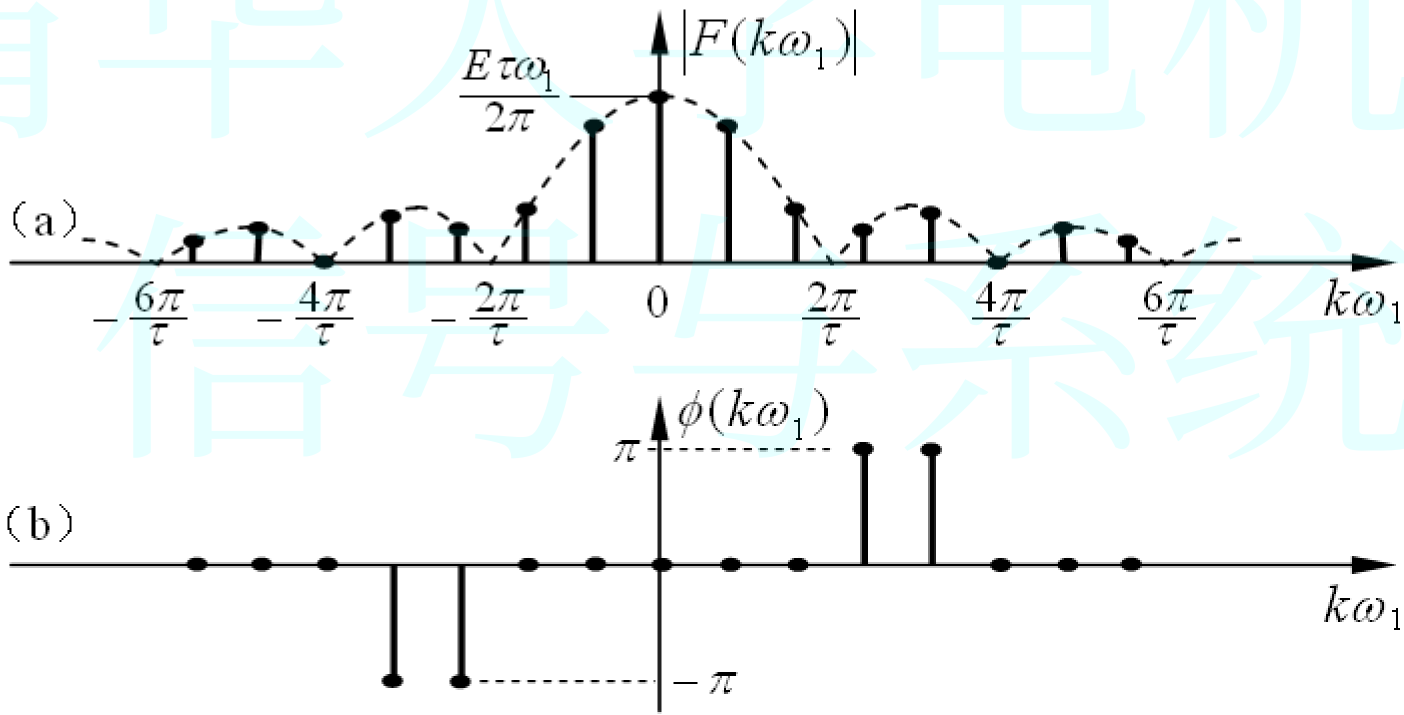
解：　根据傅立叶级数计算公式，有

$$F(k\omega_1) = \frac{1}{T_1}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} E\mathrm{e}^{-jk\omega_1 t}\mathrm{d}t$$

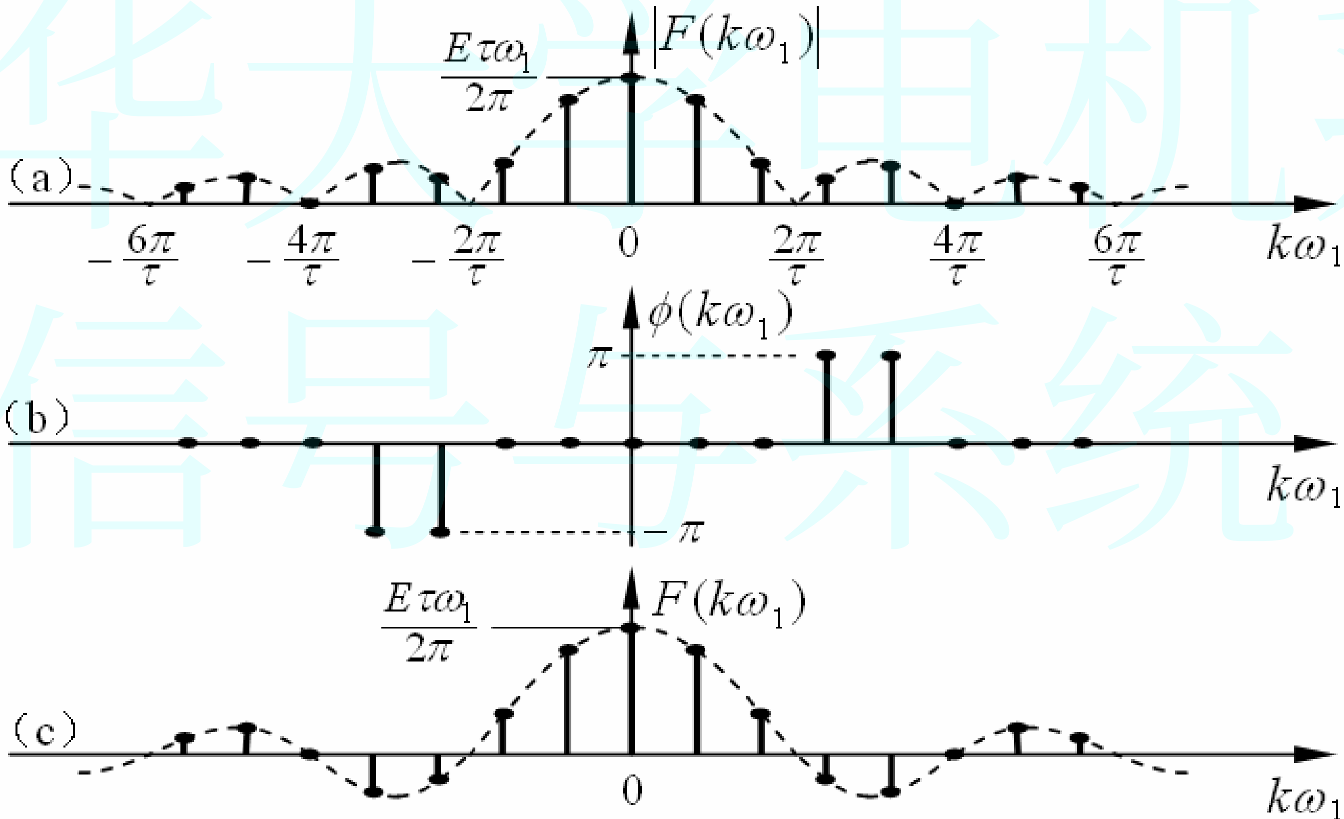
$$= \frac{E\tau\omega_1}{2\pi}\mathrm{Sa}\left(\frac{k\omega_1\tau}{2}\right) \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots$$

$$\left|F(k\omega_1)\right| = \frac{E\tau\omega_1}{2\pi}\left|\mathrm{Sa}\left(\frac{k\omega_1\tau}{2}\right)\right| \qquad k = 0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots$$

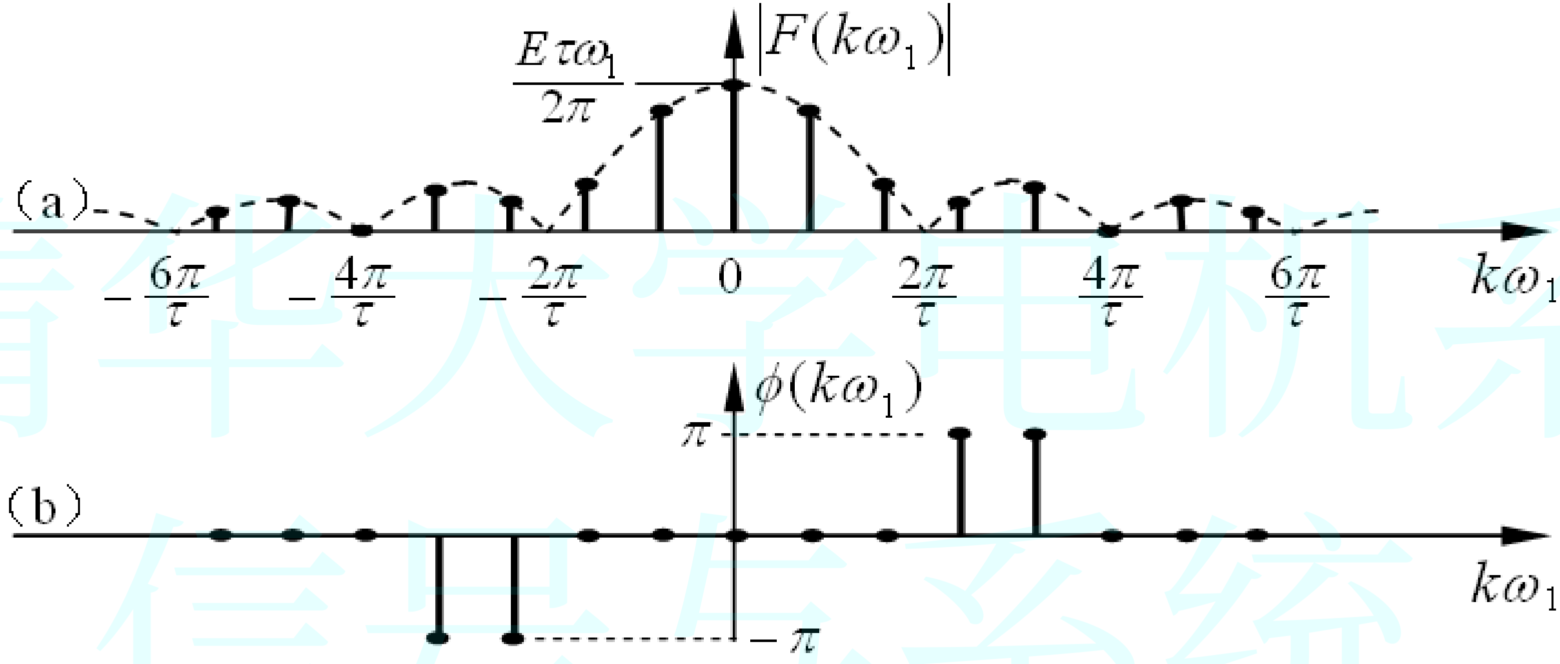
$$\phi(k\omega_1) = \begin{cases} 0 & F(k\omega_1) > 0 \\ \pm\pi & F(k\omega_1) < 0 \end{cases} \qquad k = 0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots$$



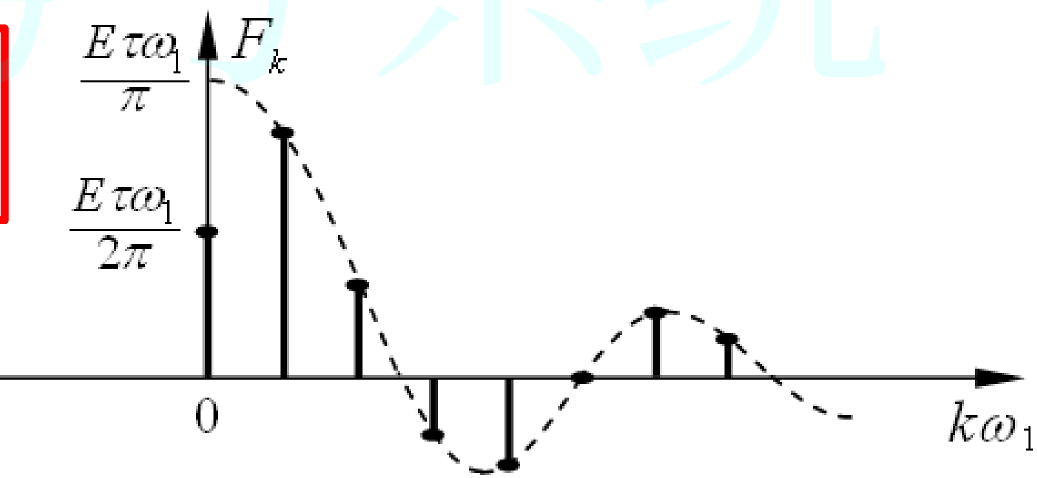
在傅立叶级数$F(k\omega_1)$是实函数的特殊情况下，幅值谱和相位谱可以在同一个图中表示，谱线长度$|F(k\omega_1)|$表示各频率分量幅值，谱线正负表示各频率分量相位，$F(k\omega_1)>0$表示$\phi(k\omega_1)=0$；$F(k\omega_1)<0$表示$\phi(k\omega_1)=\pm\pi$。



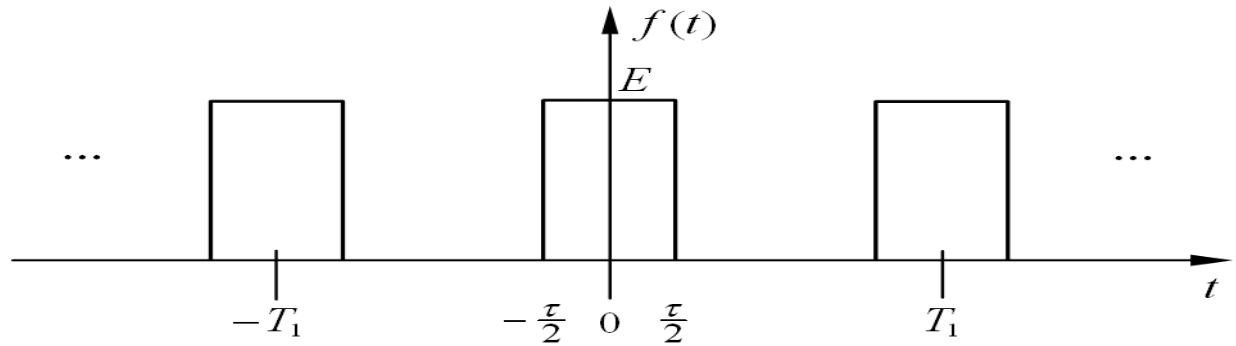
- 在复指数函数形式傅立叶级数的频谱中，负频率代表实际的正频率，因此周期方波信号的实际频谱为下图所示。此也为三角函数形式傅立叶级数的频谱。

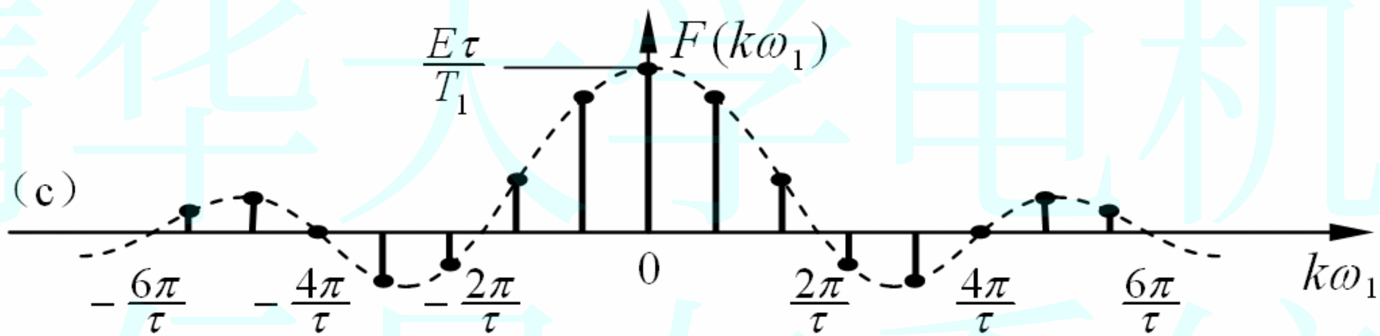


$$|F(k\omega_1)| = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} = c_k / 2$$
$$k = 1,2,3,\cdots$$



周期方波信号时域波形与频谱的关系





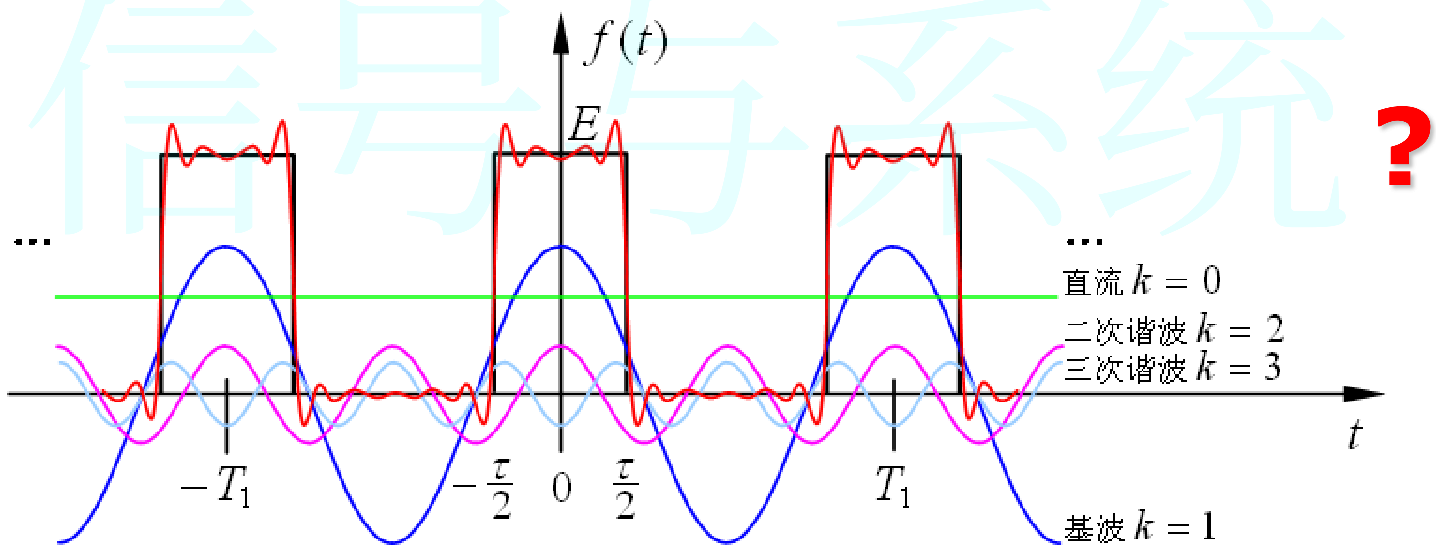
(1) 周期方波信号的脉冲宽度τ减小时，频谱包络线沿频率轴扩展；时域脉冲宽度增加，频域波形压缩。

时域压缩，频域扩展；时域扩展，频域压缩。

(2) 周期方波信号的周期T_1增大时，基波角频率ω_1减小，频谱的离散间隔减小，频谱的幅值也减小；当周期T_1减小时，基波角频率ω_1增大，频谱的离散间隔增大，频谱的幅值也增大

连续周期信号傅立叶级数的特点

- 连续周期信号的傅立叶级数是离散的。
  - 任一周期信号分解为不同频率三角函数的叠加，要保持叠加结果的周期性，各分量的周期之比应为有理数，因此各频率分量的频率处在一些离散点上。



问题：

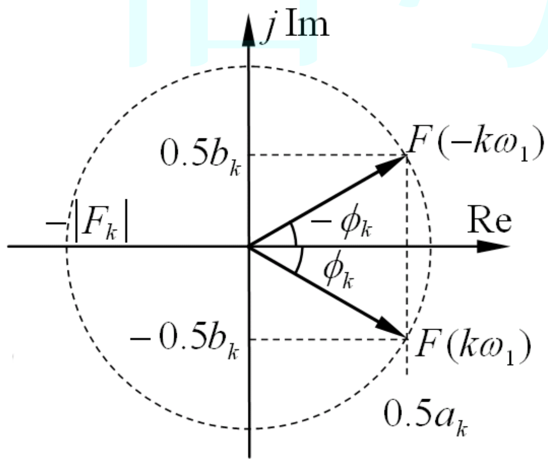
如果$f(t)$是实函数，它的傅立叶级数$F(k\omega_1)$有什么特点？

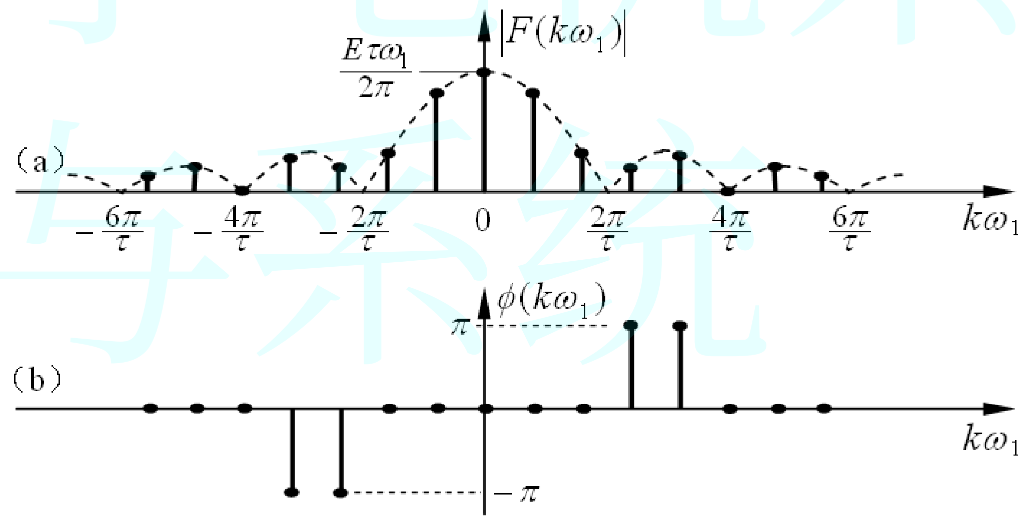
$$F(k\omega_1)=F^*(-k\omega_1)$$

$$\mathrm{Re}[F(k\omega_1)]=\mathrm{Re}[F(-k\omega_1)]$$
$$\mathrm{Im}[F(k\omega_1)]=-\mathrm{Im}[F(-k\omega_1)]$$

$$|F(k\omega_1)|=|F(-k\omega_1)|$$
$$\phi(k\omega_1)=-\phi(-k\omega_1)$$

$$F(k\omega_1)=\frac{a_k}{2}-\mathrm{j}\frac{b_k}{2}$$
$$F(-k\omega_1)=\frac{a_k}{2}+\mathrm{j}\frac{b_k}{2}$$





$$F(k\omega_1)e^{jk\omega_1 t}+F(-k\omega_1)e^{-jk\omega_1 t}$$

- 如果$f(t)$是实偶函数，它的傅立叶级数$F(k\omega_1)$又有什么特点？

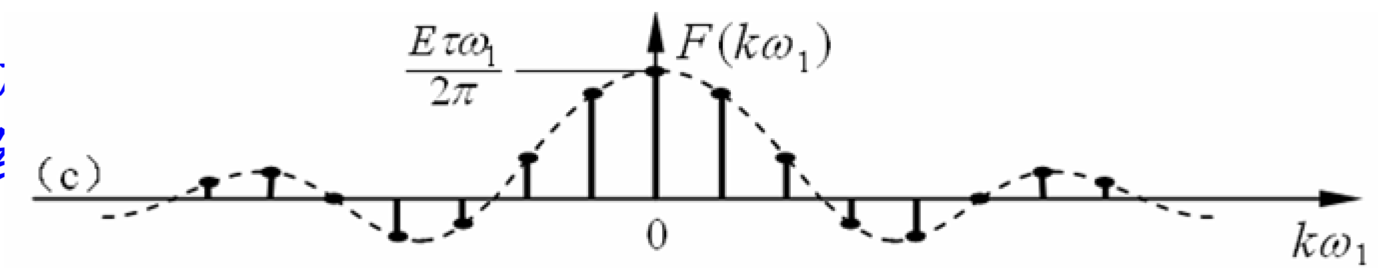
$$F(k\omega_1)=\frac{1}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\omega_1 t}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t)\cos k\omega_1 t\mathrm{d}t-j\underbrace{\frac{1}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t)\sin k\omega_1 t\mathrm{d}t}_{0}$$

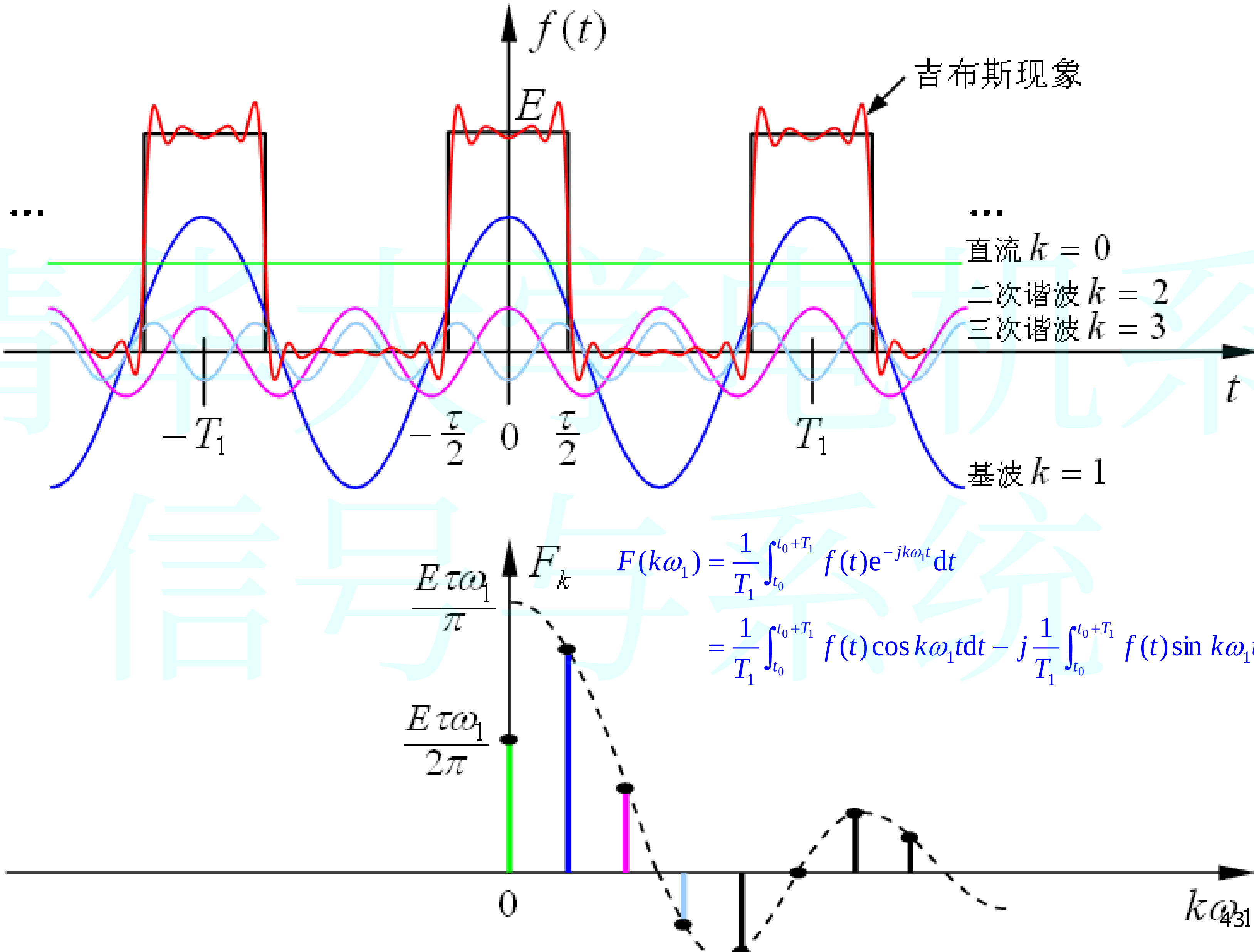
$F(k\omega_1)$是一个实数，$f(t)$的各频率分量的初始相角$\varphi(k\omega_1)$都是0或者π，只有余弦分量。

当$f(t)$是实偶函数时，它的所有分量也必是实偶函数，因此只有余弦分量。

同 … **$F(k\omega_1)$**
将是 …



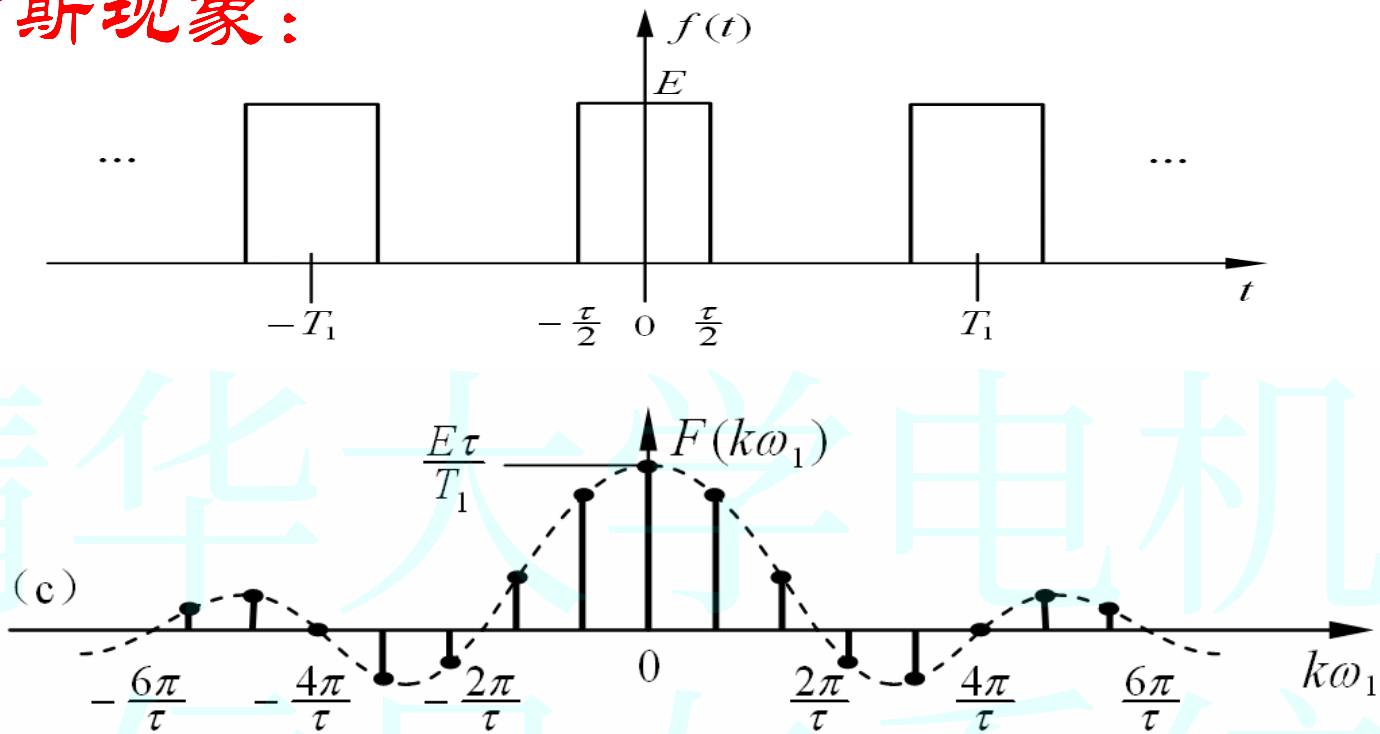
- 周期方波信号的主要频率分量及其叠加



$$F(k\omega_1)=\frac{1}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t)\mathrm{e}^{-jk\omega_1 t}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t)\cos k\omega_1 t\mathrm{d}t-j\frac{1}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t)\sin k\omega_1 t\mathrm{d}t$$

吉布斯现象：



$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega_1 t + b_k \sin k\omega_1 t)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(k\omega_1) \mathrm{e}^{jk\omega_1 t}$$

前面例子中的周期方波信号为偶函数，所以只有余弦分量，其级数和的表达式可化简为：

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos k\omega_1 t + b_k \sin k\omega_1 t)$$

$$b_k = 0$$

$$F(k\omega_1) = \frac{a_k}{2}$$

$$= F(0) + \sum_{k=1}^{\infty} 2F(k\omega_1)\cos k\omega_1 t$$

$$F(k\omega_1) = \frac{E\tau\omega_1}{2\pi}\mathrm{Sa}\left(\frac{k\omega_1\tau}{2}\right)$$

$$= \frac{E\tau\omega_1}{2\pi} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2E}{k\pi}\sin\left(\frac{k\omega_1\tau}{2}\right)\cos k\omega_1 t$$

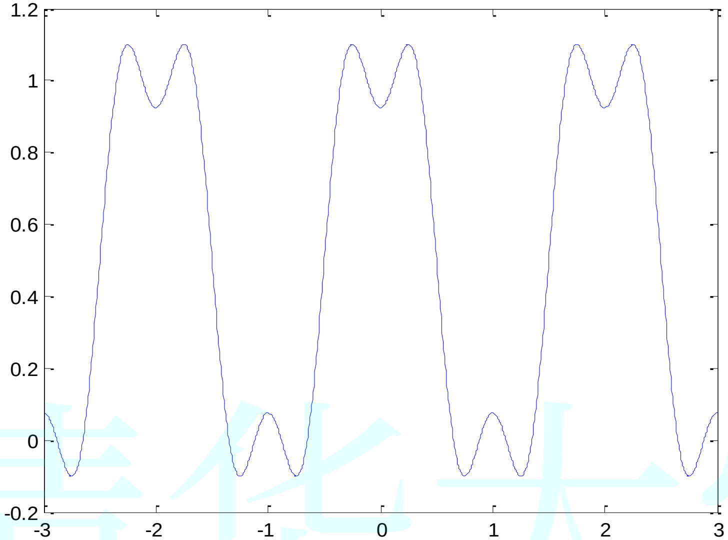
以$E=1$、$\omega_1=\pi$（即$T_1=2$）、$\tau=1$为例

$$f(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{k\pi}\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)\cos k\pi t$$

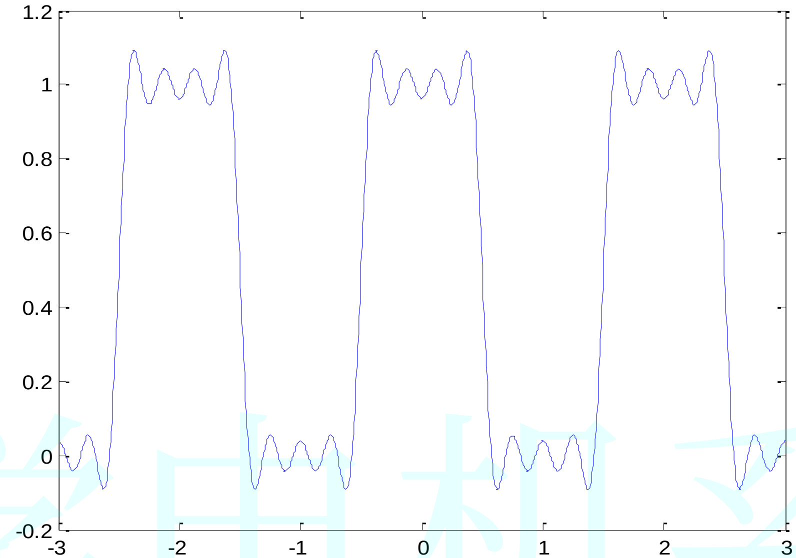
注意到K为偶数时，求和项为0，编程求和时可进一步简化

$$f(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k\pi} \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) \cos k\pi t$$

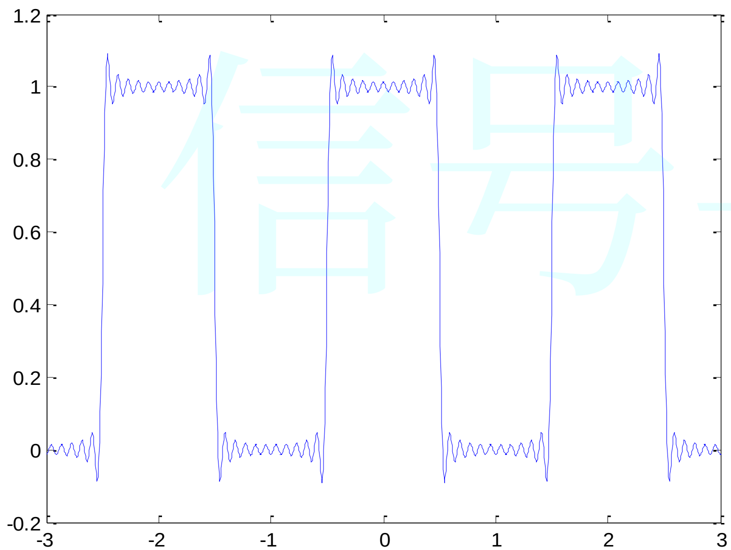
```
t=-3:6/1000:3;
N=3;
a0=0.5;
w0=pi;
xN=a0*ones(1,length(t)); %直流分量
for k = 1:2:N
    xN=xN+2/k/pi*sin(k*pi/2)*cos(k*w0*t);
end
plot(t,xN);
```



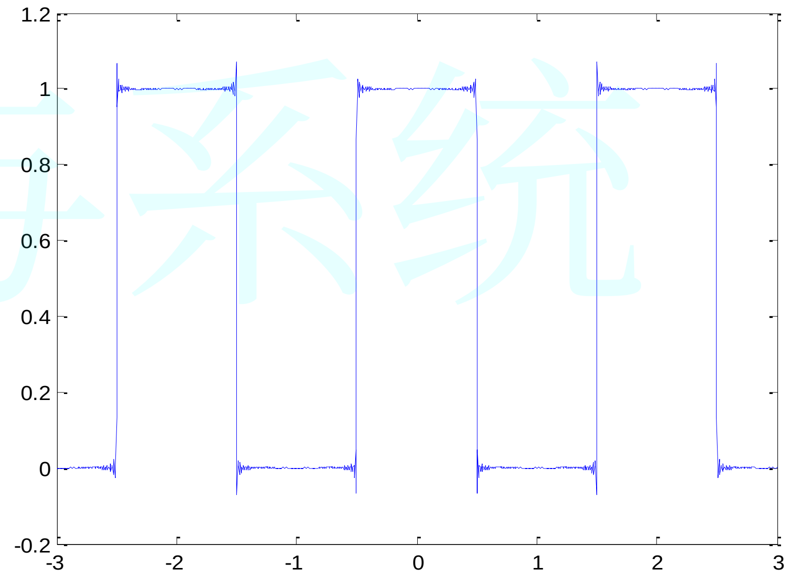
N=3



N=7



N=21



N=200

吉布斯现象

- 在周期方波信号的跳变处，“前有限项级数和”的波形有一个峰起。求和项数越多，峰起越靠近跳变点，峰起的宽度越窄。当求和项数足够大以后，峰起幅值趋于一个常数，约是总跳变值的9%。这种现象称为吉布斯现象。
- 在函数的正交分解中，采用的是均方误差最小的逼近方法，而不是一致收敛逼近

$$\varepsilon^2 = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2}\left[\phi_i(t) - c\phi_j(t)\right]^2 \mathrm{d}t$$