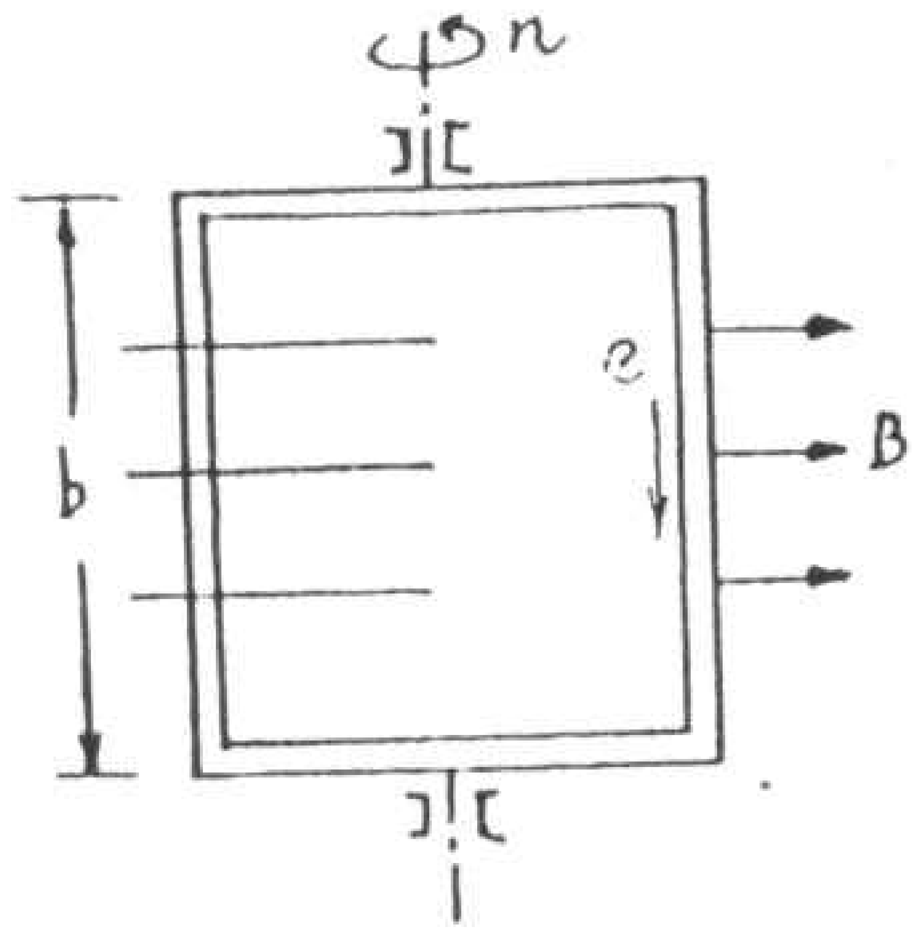
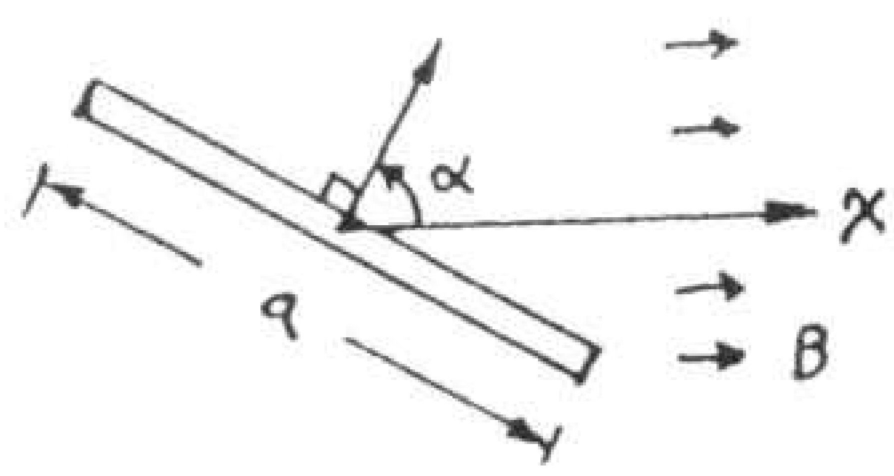
电路原理习题卡片　5-1和5-2

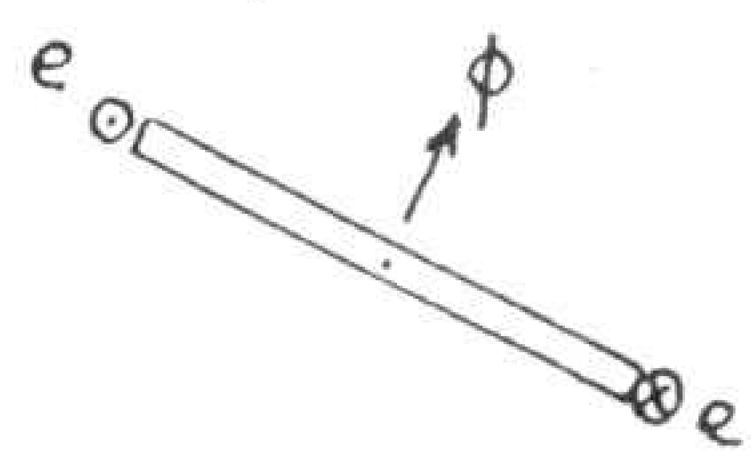
题号　自编《电磁场习题集》，1990，第4-1和第4-2

题文　一长方形线圈在均匀磁场内转动。转轴与磁场方向垂直，如图所示，转速 $n = 3000$ 转/分。线圈匝数 $W = 100$，线圈尺寸为 $a = 2\ cm$，$b = 2.5\ cm$。磁通密度 $B = 0.1$ 韦/米²。计算线圈中的感应电势 e。(用 $e = Blv$ 及 $e = -\frac{d\psi}{dt}$ 两种方法计算)。在图上注明 e、ψ 的参考方向。





解：参考方向，如右图所示。



(1) 用 $e = Blv$

$$e = 2BbW\frac{n}{60}2\pi\frac{a}{2}\sin\alpha = \frac{\pi}{30}Bnab\sin\omega t$$

式中 $\omega = 2\pi f = 2\pi\frac{n}{60} = \frac{\pi}{30}n$

(2) 用 $e = -W\frac{d\phi}{dt}$

$$e = -W\frac{d}{dt}(\phi_m\cos\omega t) = W\phi_m\omega\sin\omega t = WBab\frac{\pi}{30}n\sin\omega t$$

(3) 两者一致，代入数字

$$e = WBab\frac{\pi}{30}n\sin\omega t = 100\times0.1\times2\times10^{-2}\times2.5\times10^{-2}\times\frac{\pi}{30}\times3000\sin\left(\frac{\pi}{30}3000t\right)$$

$$= 1.57\times10^{-2}\sin(100\pi t)\times100\ V$$

$$= 1.57\sin(314t)\quad V$$

另题：

上题中，若B是交变的，$B = 0.1\sin 314t$ T，则结果如何？

解：

$$e = \underbrace{wB(ab)\left(\frac{\pi}{30}n\right)\sin\omega t}_{切割电势} \underbrace{-w\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)_{\alpha=const.}\cdot\cos\omega t}_{变压器电势}$$

或者

$$e = -w\frac{d}{dt}(Bab\cos\omega t) = -w\frac{d}{dt}(0.1\sin\omega t\cdot\cos\omega t\cdot ab)$$

$$= -\overbrace{w}^{100\times}0.1\,ab\,\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\sin 2\omega t\right) = -\overbrace{w}^{100\times}0.1\,ab\omega\cos 2\omega t$$

$$= -\overbrace{w}^{100\times}0.1\times 2\times 10^{-2}\times 2.5\times 10^{-2}\times 314\cos(628t)$$

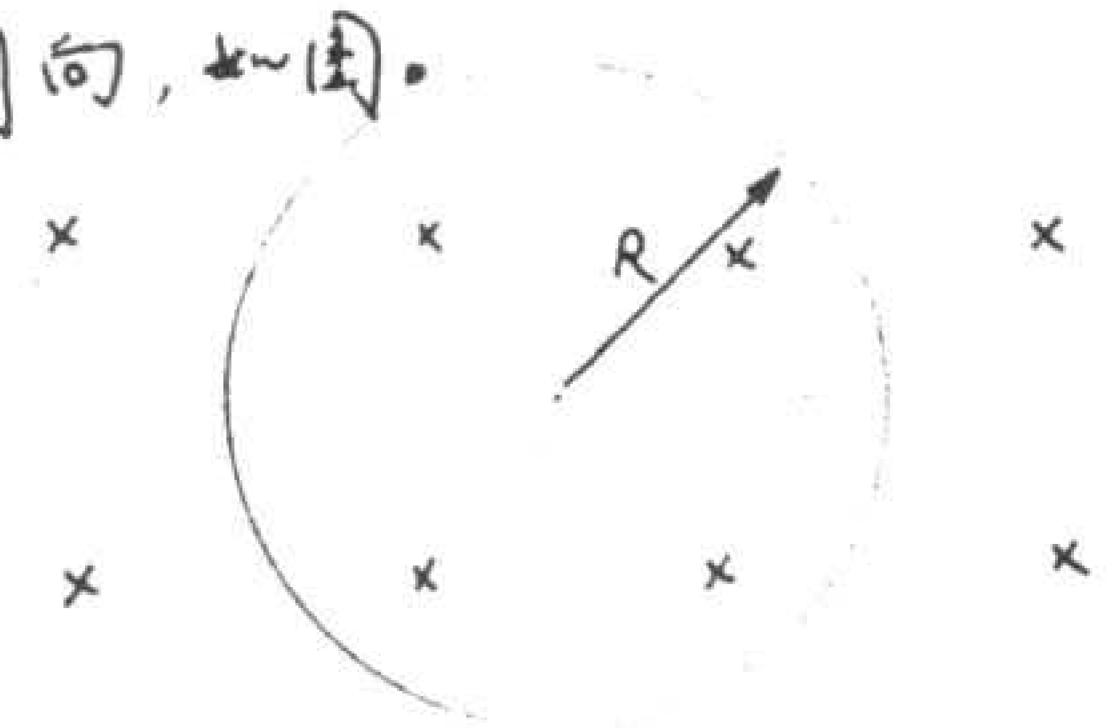
$$= -1.57\times\cancel{10^{-6}}\cos(628t) \quad \mathrm{V}$$

电路原理习题卡片 5-3

题号 自编《电磁场习题集》，4-4

题文 导体薄圆盘置于均匀磁场中，磁场方向与圆盘垂直。已知 $B = B_m \sin\omega t$，盘厚度为 Δ，半径为 R，电导率为 σ。求圆盘中的涡流损耗功率（涡流产生的磁场忽略不计）。

解：涡流方向为周向，如图。



$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{d\phi}{dt}$$

$$2\pi r E = -\frac{d}{dt}(\pi r^2 B_m \sin\omega t)$$

$$E = -\frac{r}{2} B_m \omega\cos\omega t$$

损耗功率 $p(t) = \int_0^R \sigma E^2 \cdot 2\pi r \cdot \Delta \cdot dr$

$$= \int_0^R \sigma\left(\frac{r}{2} B_m \omega\cos\omega t\right)^2 \cdot 2\pi r \cdot \Delta \cdot dr$$

$$= \sigma B_m^2 \frac{\pi}{2}\omega^2\Delta \cdot \cos^2\omega t \int_0^R r^3 dr$$

$$= \sigma B_m^2 \pi\omega^2\Delta \frac{R^4}{8}\cos^2\omega t$$

平均损耗功率

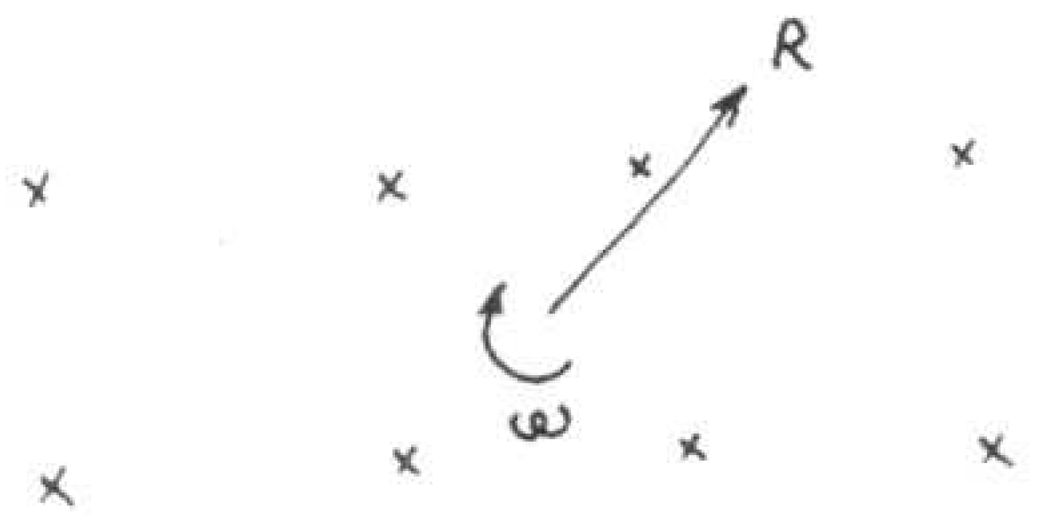
$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)\,dt = \sigma B_m^2 \pi\omega^2\Delta\frac{R^4}{16}$$

题号 自编《电磁场习题集》，4-3

题文 绝缘材料制成的圆盘，半径为R，放在均匀磁场B中。磁场方向与盘垂直。圆盘以ω的角速度绕着它的轴旋转。

(1) 求圆盘上距中心为r的A点处感应电场强度。

(2) 求~~圆盘半径方向~~由圆盘中心至边缘的感应电动势。



(3) 若圆盘为金属材料制成，在圆盘的中心与边缘间经滑环接上一电压表，则电压表的读数是多少？

解：

(1)
$$E_i = v \times B = \omega r B$$

(2)
$$e = \int_0^R E_i \, dr = \int_0^R \omega r B \, dr = \omega B \frac{R^2}{2}$$

(3) 金属圆盘时，电压表读数为 $\omega B \frac{R^2}{2}$

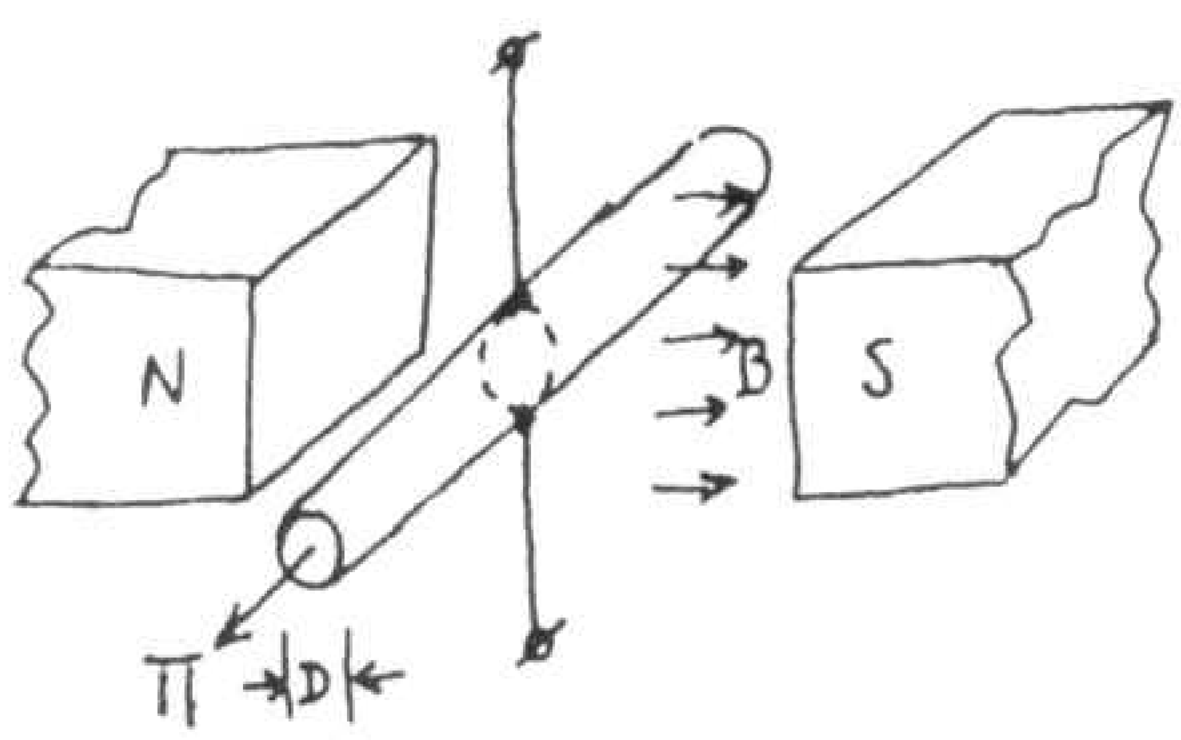
科目________ 分类号________

基本电工教研组

编制者________ **习题卡片** 5-5 日期________

题号 自编

题文 电磁流量计可用来测量~~流径~~圆管中导电液体的平均流量。其结构示意如图所示。流量计中测量导管为非铁磁材料和非导电材料，置于均匀恒定磁场中。导电液体在导管中流动时，切割磁力线而产生恒定电动势，经电极引出。问流量 Π 与电动势 $\mathcal{E}$ 的关系式是什么？



解：流量 Π

$$\Pi = \frac{\pi D^2}{4}\cdot v$$

式中 v 为流速。~~感应~~切割电动势

$$\mathcal{E} = vBD$$

$$\therefore\ \Pi = \frac{\pi D^2}{4}\frac{\mathcal{E}}{BD} = \frac{\pi D}{4B}\mathcal{E}$$

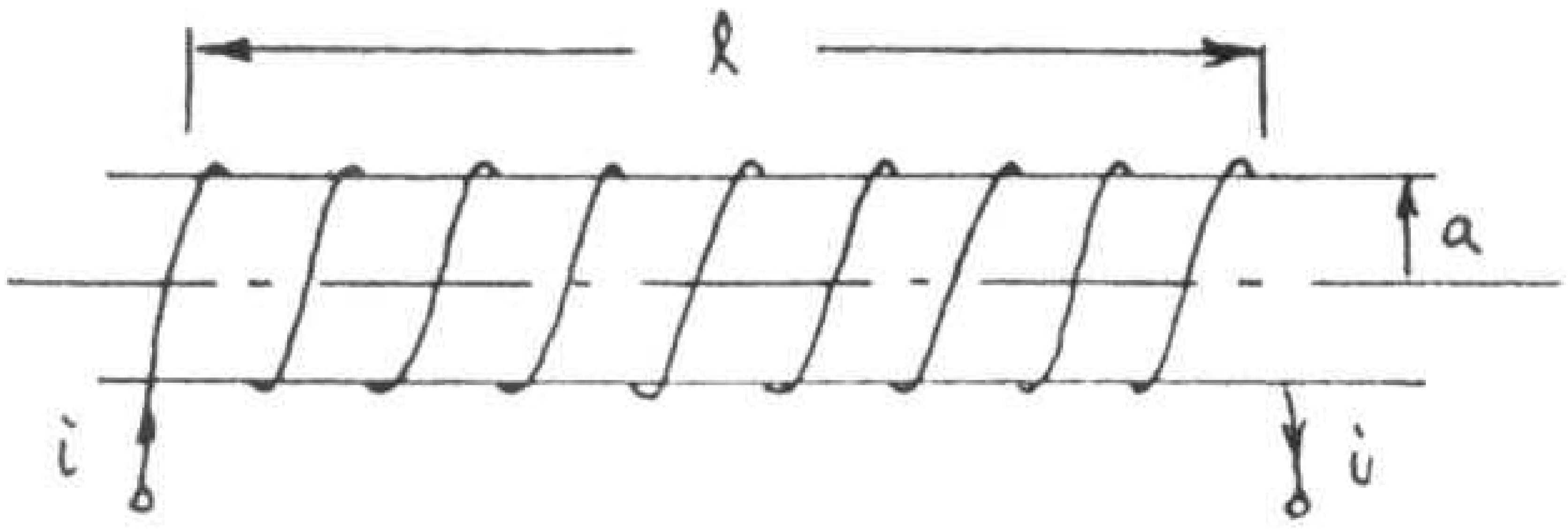
科目________分类号________

基本电工教研组

编制者________ **习题卡片** 5-6 日期________

题号 冯慈璋《电磁场》5-1题，p.317

题文 一均匀绕制的细長螺管线圈，每单位長度中有N_1匝，螺管的半径为a，~~且a<<l~~ 螺管的長度为l，a<<l，如图所示。已知线圈中通有工频电流$i = I_m \sin\omega t$。求螺管线圈内外任意点的感应电场强度。



解：

1. r < a 处为均匀磁场

$$B = \mu_0 N i = \mu_0 N_1 I_m \sin\omega t$$

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

$$2\pi r E = -\pi r^2 \mu_0 N_1 I_m \omega \cos\omega t$$

$$E = -\frac{1}{2} r \mu_0 N_1 I_m \omega \cos\omega t$$

2. r > a 处磁场为0

$$E = -\frac{1}{2}\frac{a^2}{r}\mu_0 N_1 I_m \omega \cos\omega t$$

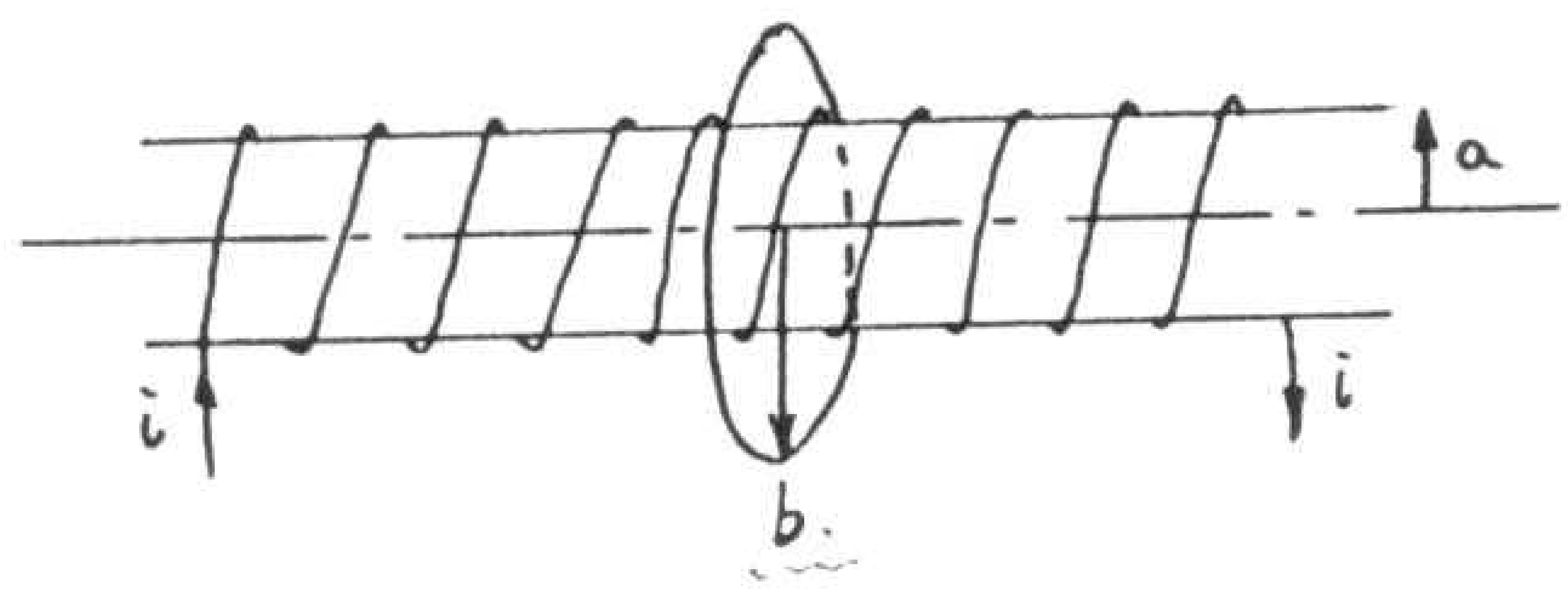
科目________ 分类号________

基本电工教研组

编制者________ **习 题 卡 片** 5-7 日期________

题号 冯慈璋《电磁场》，5-2题，P.317，接5-1题

题文 上题中，若另有单匝闭合导线与螺管线圈同轴放置，其半径为~~R~~ b>a，内阻为R，电感可忽略不计，如图所示。求单匝闭合导线中的感应电流i(t)。



解：

$$i=\frac{e}{R}=\frac{E\cdot 2\pi \cancel{b}}{R}=\frac{-\frac{\mu_0 N a^2\omega}{2b} I_m(\cos\omega t)\, 2\pi b}{R}$$

$$=-\frac{\mu_0\pi N a^2\omega}{R} I_m\cos\omega t$$

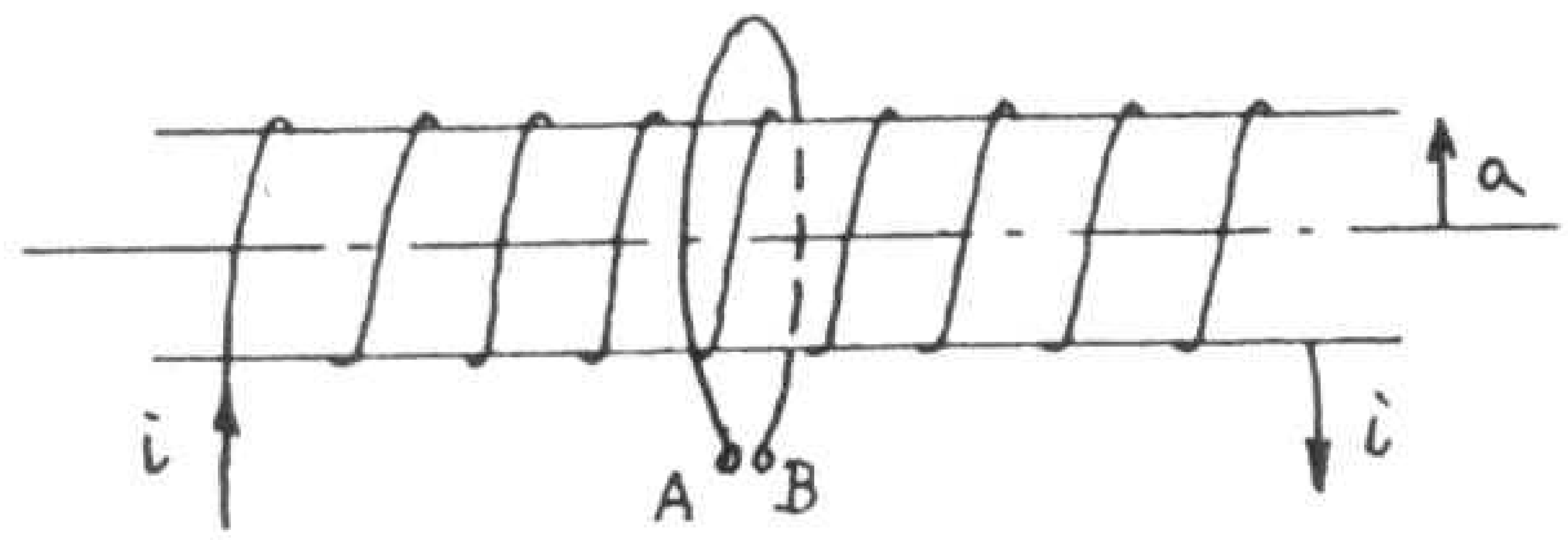
科目________分类号________

基本电工教研组

编制者________ **习 题 卡 片** 5-8 日期________

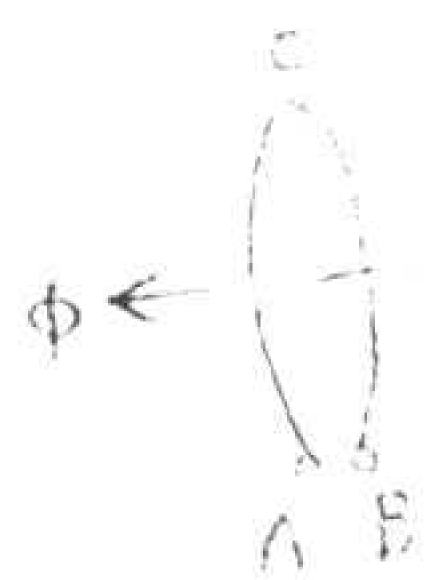
题号 冯慈璋《电磁场》，5-3题，p.317，接5-1和5-2题

题文 若上题中单匝导线不闭合，如图所示。求开口处的电压 $u_{AB}(t)$。



解：

$$u_{ab} = \mu_0 \pi N_1 a^2 \omega I_m \cos\omega t$$



$$\oint_{BACB} \vec{E}\cdot d\vec{l} = \frac{d\Phi}{dt}$$

$$\underbrace{\int_{BA} \vec{E}\cdot d\vec{l}}_{-u_{ab}} + \underbrace{\int_{ACB} \vec{E}\cdot d\vec{l}}_{0} = \frac{d\Phi}{dt}$$

$$u_{ab} = \frac{d\Phi}{dt}$$

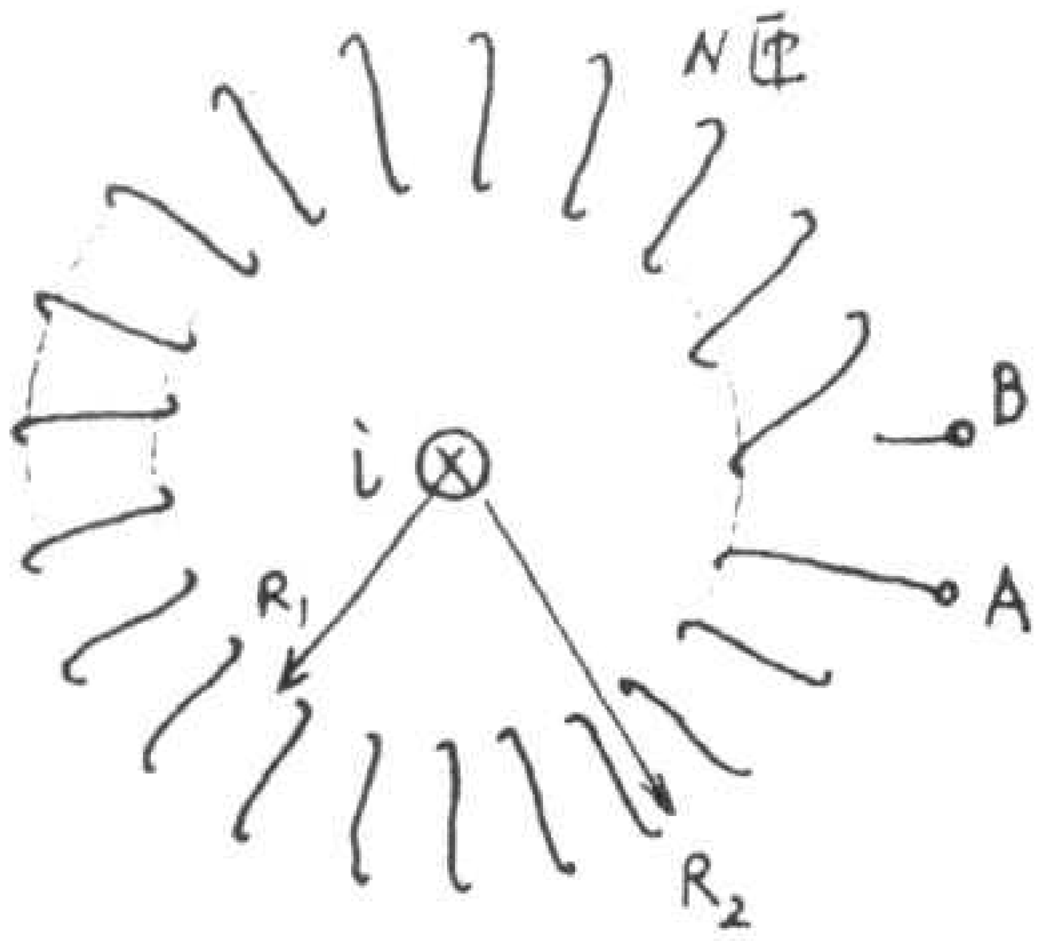
科目________分类号________

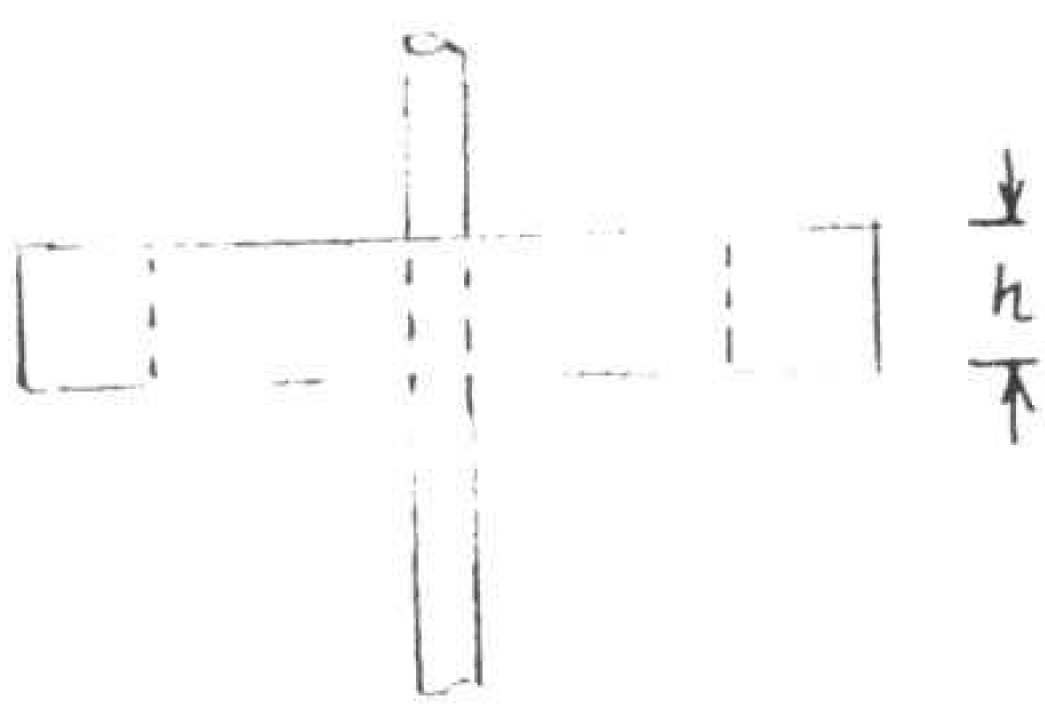
基本电工教研组

编制者________ **习题卡片**5-9 日期________

题号 自编

题文 有一工频电流互感器，其铁心为圆环形，磁导率为μ（薄叠片铁心，忽略铁心涡流）。原边为单根导线，穿过圆环，尺寸如图所示，通以大电流$i=\sqrt{2}I\sin\omega t$。副边匝数为N，由于故障发生断路。问断路处电压U_{AB}将达到多少？若该单根导线的位置偏离了圆环中心，U_{AB}将如何？





解：

$$H=\frac{i}{2\pi r}$$

$$\Phi=\int_{R_1}^{R_2}\mu_0 H\,dr\cdot h=i\frac{\mu h}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

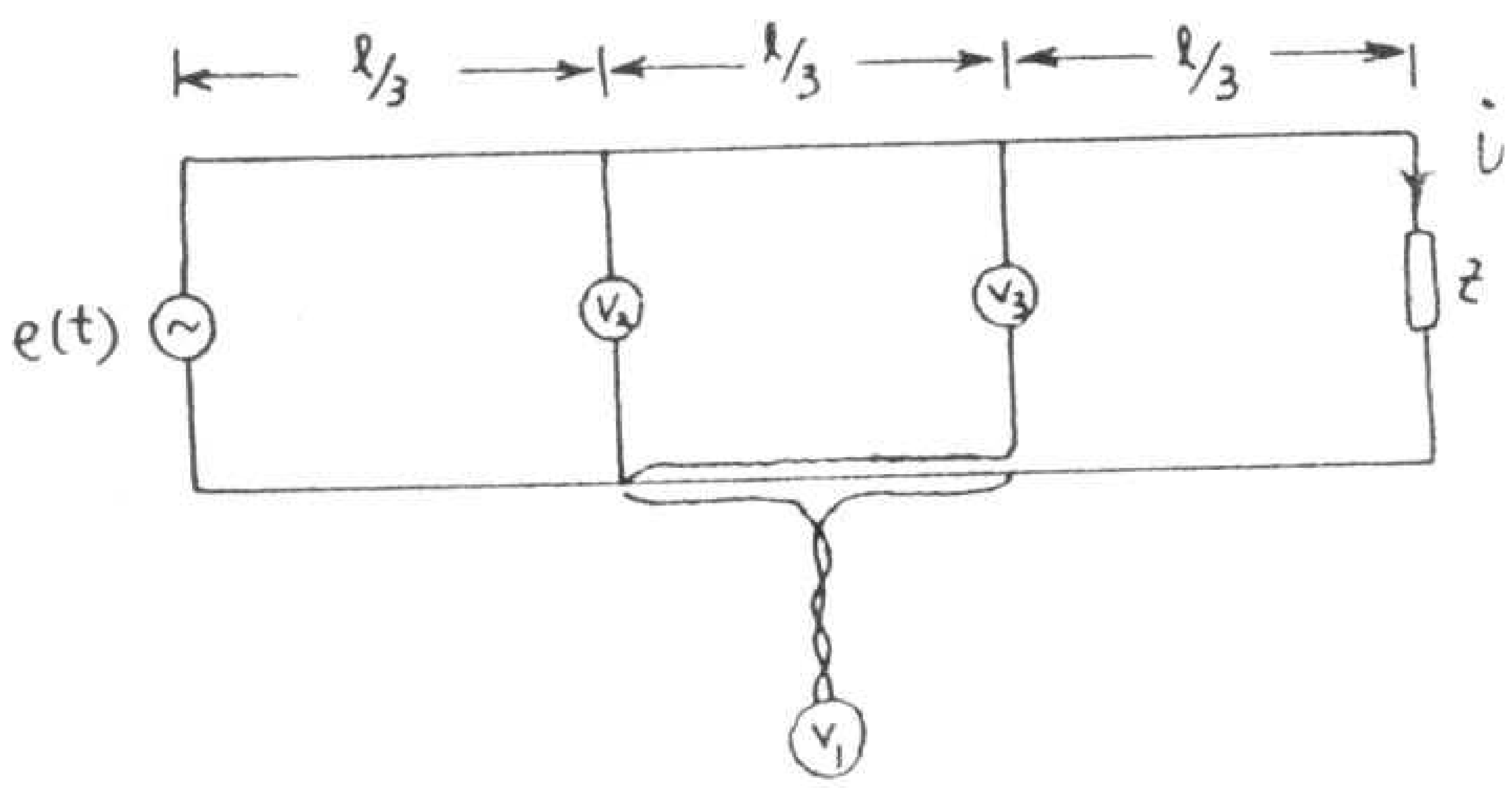
$$M = \frac{W\Phi}{i} = \frac{N\mu h}{2\pi} \ln\frac{R_2}{R_1}$$

$$U_{AB} = \omega M I = \omega I \frac{N\mu h}{2\pi} \ln\frac{R_2}{R_1}$$

当单根导线偏心时，M不变，故U_{AB}不变。

题号 自编《电磁场习题集》，4-6

题文 已知两线短传输线的長度为l，每根导线单位長度的电阻为r_0，两导线单位長度的电感为L_0，电源端电动势$e(t)=E_m\sin\omega t$，终端接一负载 阻抗Z。今接入三个电压表，如图所示。试计算三个电压表读数（电压表读数为有效值）。



解：1. 当电压表引线紧贴导线时，读数为电阻·电流的乘积，

$$V_1 = r_0\frac{l}{3}I$$

式中电流

$$I = \frac{E_m/\sqrt{2}}{|r_0 2l + j\omega L_0 l + Z|}$$

2. 终端电压为$Z\dot{I}$，V_2与终端电压之差为$(r_0\frac{4}{3}l + j\omega L_0\frac{2}{3}l)\dot{I}$

$$V_2 = \left| r_0\frac{4}{3}l + j\omega L_0\frac{2}{3}l + Z \right| I$$

3. V_3与终端电压之差为$(r_0 l + j\omega L_0\frac{l}{3})\dot{I}$

$$V_3 = \left| r_0 l + j\omega L_0\frac{l}{3} + Z \right| I$$

科目________分类号________

基本电工教研组

编制者________ 习题卡片 5-11 日期________

题号 自编《电磁场习题集》，4-8

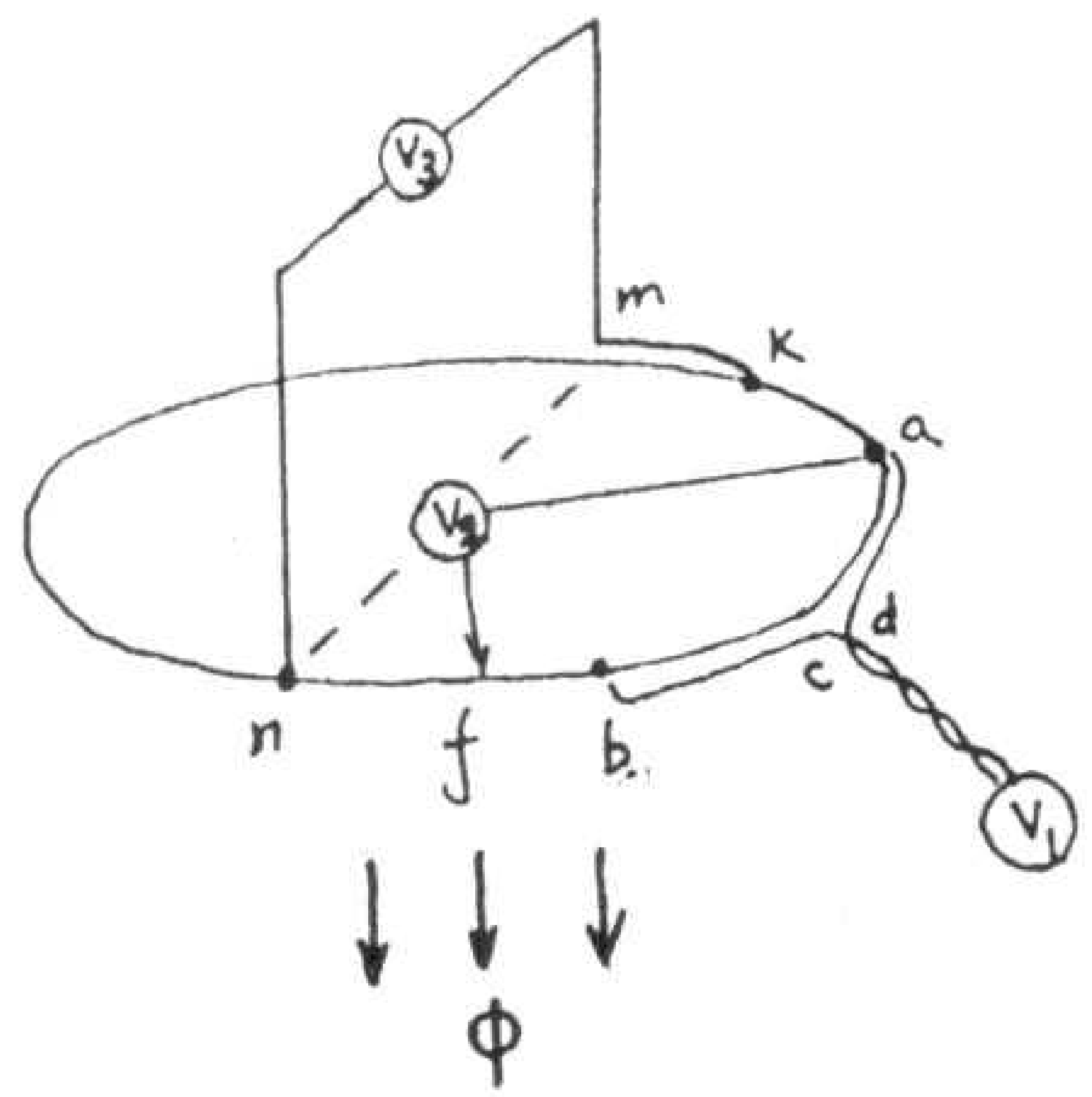
题文 试根据 $e=-\frac{d\Phi}{dt}$ 说明要利用电磁感应定律制造没有换向整流设备的直流发电机是不可能的。

解：从略

题号 自编《电磁场习题集》，4-5

题文 一圆形线圈，磁通穿过线圈并与线圈平面垂直，磁通密度B ~~分布~~ 对于线圈的轴是对称分布的，穿过线圈的磁通 $\Phi = 0.1\sin 314t$ 韦（其中包括了线圈~~中的~~电流产生的磁通）。在线圈的三个不同路径上接了三个电压表。电压表内阻比线圈电阻大得多，接法如图。求各表的读数。

已知圆弧 $\widehat{ab}$、$\widehat{af}$ 和 $\widehat{mk}$ 对应的圆心角分别为 α_1、α_2 和 α_3。



解：

1. V_1，根据电磁感应定律

$$\oint_{adcba} \vec{E}\cdot\vec{dl} = -\frac{d\Phi}{dt} = 0$$

$$\underbrace{\int_{adcb} \vec{E}\cdot\vec{dl}}_{V_1} + \underbrace{\int_{ba} \vec{E}\cdot\vec{dl}}_{-iR_{ab}} = 0 \quad , \quad V_1 = iR_{ab}$$

电流i的参考方向与Φ的参考方向符合右螺旋规则。

$$\oint_{adcbfnka} \vec{E}\cdot\vec{dl} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

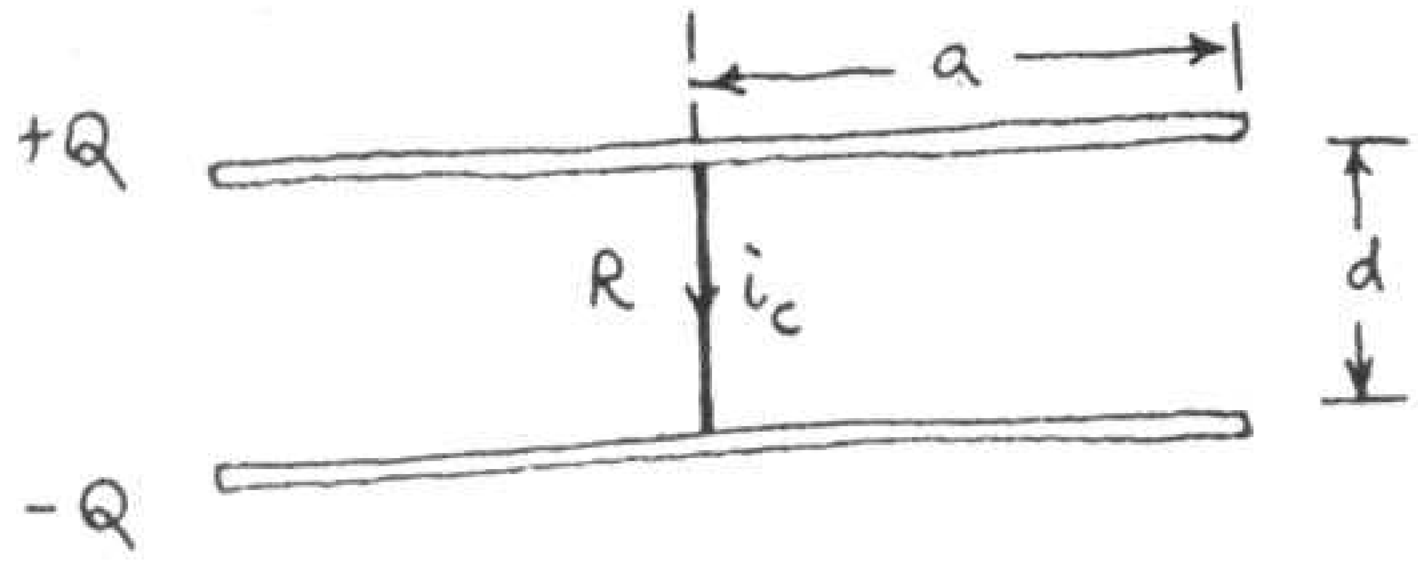
$$iR_{abfnka} = -0.1\times 314\cos 314t \quad , \quad i = \frac{-\frac{d\Phi}{dt}}{R_{abfnka}}$$

$$\therefore\ V_1 = \frac{R_{ab}}{R_{abfnka}}(-31.4\cos 314t) = -\frac{\alpha_1}{2\pi}31.4\cos 314t \text{ 或 } -\frac{\alpha_1}{2\pi}\frac{d\Phi}{dt}$$

电路原理习题卡片5-13

题号 《伯克利物理考题及解答》, Min Chan编, 洪晶等译, 高教社 1983, p.82

题文 一平行板电容器，由两块半径为 a 的圆板构成。两板的间隙 d 很小（$d \ll a$）。两板分别带 $+Q$ 和 $-Q$ 的电荷。在 $t=0$ 时，用电阻为 R 的细直导线把两板的中心联接起来。假定 R 很大，能保证两板间有均匀电场，且~~电~~感应电场的作用可以忽略，Q 的初始值记作 Q_0。试计算两板间的磁场，表示成时间 t 和到中心的径向距离 r 的函数。



解：全电流定律

$$\oint \vec{H}\cdot d\vec{l} = i_c + i_D$$

$$H\,2\pi r = i_c - i_c\frac{\pi r^2}{\pi a^2}$$

$$= \frac{U}{R}\left(1-\frac{\pi r^2}{\pi a^2}\right)$$

$$= \frac{Q}{RC}\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)$$

$$\therefore \quad H = \frac{Q_0}{2\pi r RC}e^{-t/RC}\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)$$

式中 $$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d} = \frac{\varepsilon_0 \pi a^2}{d}$$

③ 按准静态场考虑，并採用相量形式，$\omega\varepsilon_1 \gg \sigma_1$ 且 $\omega\varepsilon_2 \gg \sigma_2$ 均属电场

$$\dot{\delta}_{1n} = \dot{\delta}_{2n}$$

$$\begin{cases} j\omega\varepsilon_1 \dot{E}_{1n} - j\omega\varepsilon_2 \dot{E}_{2n} = 0 \\ \dot{E}_{1n} d_1 + \dot{E}_{2n} d_2 = \dot{U} \end{cases}$$

$$\therefore \quad \dot{E}_{1n} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1 d_2 + \varepsilon_2 d_1} \dot{U}$$

$$\dot{E}_{2n} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1 d_2 + \varepsilon_2 d_1} \dot{U}$$

④ 按准静态场考虑，并採用相量形式，

$\omega\varepsilon_1 \gg \sigma_1$ 区1属电场，$\sigma_2 \gg \omega\varepsilon_2$ 区2属电流场

$$\dot{\delta}_{1n} = \dot{\delta}_{2n}$$

$$j\omega\varepsilon_1 \dot{E}_{1n} = \sigma_2 \dot{E}_{2n}$$

$$\begin{cases} j\omega\varepsilon_1 \dot{E}_{1n} - \sigma_2 \dot{E}_{2n} = 0 \\ \dot{E}_{1n} d_1 + \dot{E}_{2n} d_2 = \dot{U} \end{cases}$$

$$\therefore \quad \dot{E}_{1n} = \frac{\sigma_2}{j\omega\varepsilon_1 d_2 + \sigma_2 d_1} \dot{U}$$

$$\dot{E}_{2n} = \frac{j\omega\varepsilon_1}{j\omega\varepsilon_1 d_2 + \sigma_2 d_1} \dot{U}$$

2. V_2 ,

$$\oint_{fV_2abf} \vec{E}\cdot\vec{dl} = -\frac{\alpha_2}{2\pi}\frac{d\phi}{dt}$$

$$\underbrace{\int_{fV_2a} \vec{E}\cdot\vec{dl}}_{V_2} + \underbrace{\int_{abf} \vec{E}\cdot\vec{dl}}_{iR_{abf}} = -\frac{\alpha_2}{2\pi}\frac{d\phi}{dt}$$

$$V_2 = -iR_{abf} - \frac{\alpha_2}{2\pi}\frac{d\phi}{dt} = \frac{R_{abf}}{R_{abfnka}}\frac{d\phi}{dt} - \frac{\alpha_2}{2\pi}\frac{d\phi}{dt} = 0$$

3. V_3 ,

$$\oint_{nV_3mkabf} \vec{E}\cdot\vec{dl} = -\frac{1}{2}\frac{d\phi}{dt}$$

$$\underbrace{\int_{nV_3mk} \vec{E}\cdot\vec{dl}}_{V_3} + \underbrace{\int_{kabf} \vec{E}\cdot\vec{dl}}_{iR_{kabf}} = -\frac{1}{2}\frac{d\phi}{dt}$$

$$V_3 = -iR_{kabf} - \frac{1}{2}\frac{d\phi}{dt} = \frac{R_{kabf}}{R_{abfnka}}\frac{d\phi}{dt} - \frac{1}{2}\frac{d\phi}{dt}$$

$$= \left[\frac{(\pi - \alpha_3)}{2\pi} - \frac{1}{2}\right]\frac{d\phi}{dt}$$

$$= -\frac{\alpha_3}{2\pi}\frac{d\phi}{dt}$$

$$= -\frac{\alpha_3}{2\pi}\, 31.4\cos 314t \quad \text{V.}$$

电路原理习题卡片 5-14

题号 自编《电磁场讲义》(二)，第5-38页，5-3

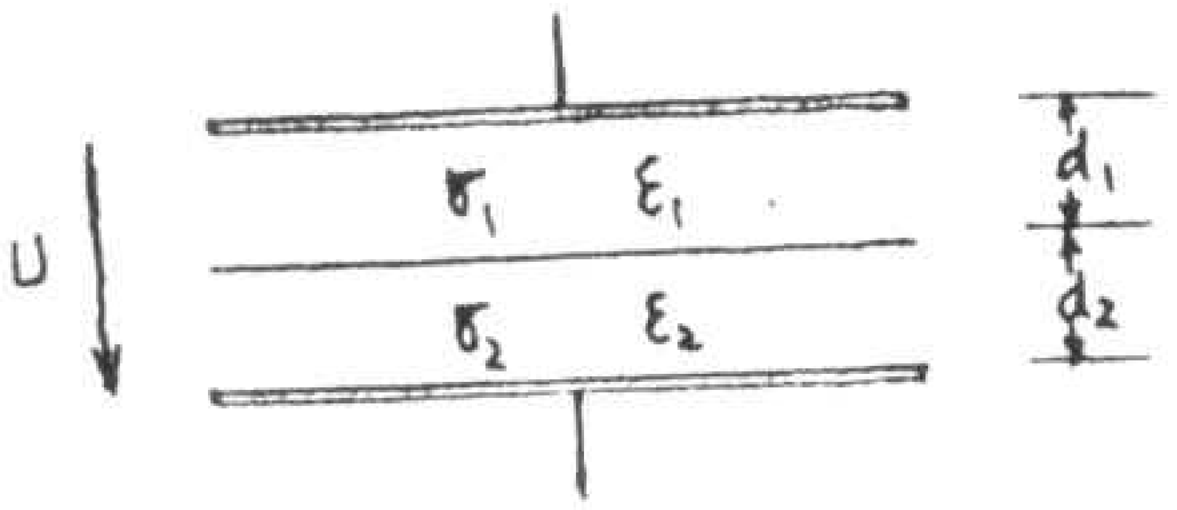
题文 由两层不良介质组成的平板电容器，如图所示。分析两层介质中电场强度，忽略感应电场。极板间电压分四种情况：

① 直流电压稳态；

② 交流电压稳态，角频率 $\omega \ll \frac{\sigma_1}{\varepsilon_1}$，$\omega \ll \frac{\sigma_2}{\varepsilon_2}$；

③ 交流电压稳态，$\omega \gg \frac{\sigma_1}{\varepsilon_1}$，$\omega \gg \frac{\sigma_2}{\varepsilon_2}$；

④ 交流电压稳态，$\frac{\sigma_1}{\varepsilon_1} \ll \omega \ll \frac{\sigma_2}{\varepsilon_2}$。



解：① 按静态场考虑，稳态属恒定电流场

$$\delta_{1n} = \delta_{2n}$$

$$\begin{cases} \sigma_1 E_{1n} - \sigma_2 E_{2n} = 0 \\ E_{1n} d_1 + E_{2n} d_2 = U \end{cases}$$

$$\therefore\ E_{1n} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1 d_2 + \sigma_2 d_1} U, \quad (E_1 = E_{1n})$$

$$E_{2n} = \frac{\sigma_1}{\sigma_1 d_2 + \sigma_2 d_1} U, \quad (E_2 = E_{2n})$$

② 按准静态场考虑，稳态採用相量形式，$\sigma_1 \gg \omega\varepsilon_1$ 且 $\sigma_2 \gg \omega\varepsilon_2$ 均属电流场

$$\dot{\delta}_{1n} = \dot{\delta}_{2n}$$

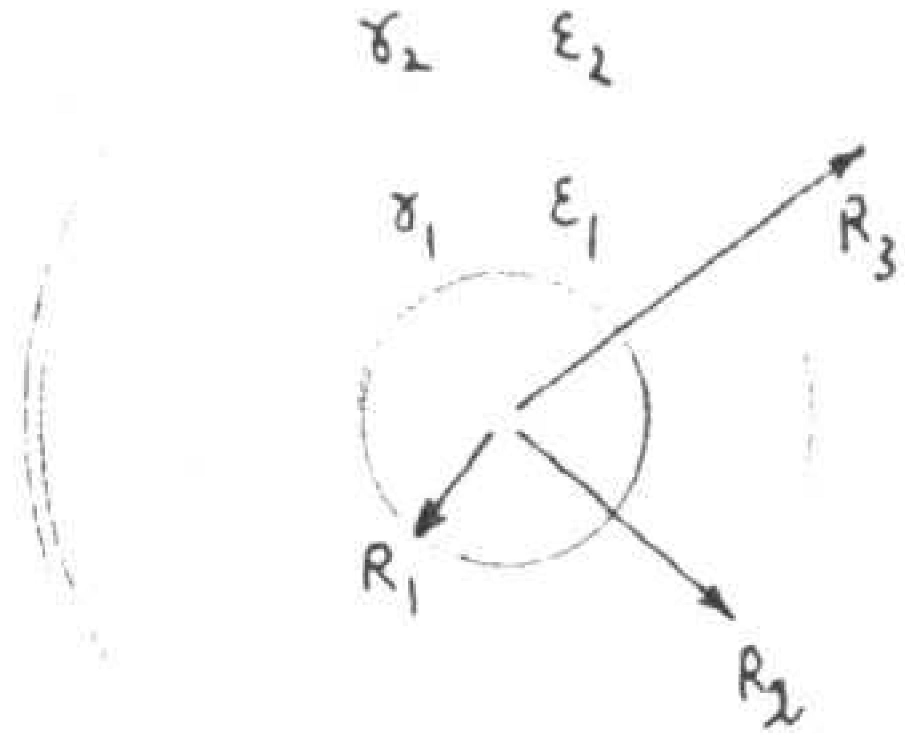
$$\begin{cases} \sigma_1 \dot{E}_{1n} - \sigma_2 \dot{E}_{2n} = 0 \\ \dot{E}_{1n} d_1 + \dot{E}_{2n} d_2 = \dot{U} \end{cases}$$

$$\therefore\ \dot{E}_{1n} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1 d_2 + \sigma_2 d_1} \dot{U}$$

$$\dot{E}_{2n} = \frac{\sigma_1}{\sigma_1 d_2 + \sigma_2 d_1} \dot{U}$$

题号 自编《电磁场讲义》(-),第5-38页,5-2

题文 有一圆柱形电容器,尺寸如图,其中介质有两层。由于介质有漏电,需考虑为导电媒质。电容器原不带电。若 $t=0$ 时,突然接至直流电压源U。分析:① $t=0^+$ 时电场分布;② $t\to\infty$ 时电场分布。



解:① $t=0^+$,介质分界面来不及充电,自由面电荷密度为0,

$$D_{2n}-D_{1n}=\sigma=0\text{,属准静态电场}$$

$$E_1=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_1 r},\qquad E_2=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_2 r}$$

$$\int_{R_1}^{R_2}E_1\,dr+\int_{R_2}^{R_3}E_2\,dr=U,\qquad \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_1}\ln\frac{R_2}{R_1}+\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_2}\ln\frac{R_3}{R_2}=U$$

$$\tau=\frac{U}{\frac{1}{2\pi\varepsilon_1}\ln\frac{R_2}{R_1}+\frac{1}{2\pi\varepsilon_2}\ln\frac{R_3}{R_2}}$$

$$\therefore\quad E_1=\frac{U}{\frac{1}{\varepsilon_1}\ln\frac{R_2}{R_1}+\frac{1}{\varepsilon_2}\ln\frac{R_3}{R_2}}\cdot\frac{1}{\varepsilon_1 r}$$

$$E_2=\frac{U}{\frac{1}{\varepsilon_1}\ln\frac{R_2}{R_1}+\frac{1}{\varepsilon_2}\ln\frac{R_3}{R_2}}\cdot\frac{1}{\varepsilon_2 r}$$

题号 自编《电磁场讲义》(二)，第5-39页，5-5

题文 $y<0$ 下半空间为区域 b，其中充以均匀导电媒质，电导率 γ，介电常数 ε。$y>0$ 上半空间为区域 a，属真空。$t<0$ 时处处无电荷。在 $t=0$ 时，有一点电荷 Q 突然放置在 $(x,y,z)=(0,h,0)$ 处。试证：

① 在 $t=0^+$ 时

$$\varphi_a=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+(y-h)^2+z^2}}-\frac{q_b}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+(y+h)^2+z^2}}$$

$$\varphi_b=\frac{q_a}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+(y-h)^2+z^2}}$$

式中 $q_b=Q\dfrac{\varepsilon/\varepsilon_0-1}{\varepsilon/\varepsilon_0+1}$ 和 $q_a=Q\dfrac{2}{\varepsilon/\varepsilon_0+1}$

② 当 $t\to\infty$ 时

$q_b\to Q$ 和 $\varphi_b\to 0$

③ 当 $t>0$ 期间

$$q_b=Q\left[1-\frac{2}{\varepsilon/\varepsilon_0+1}e^{-t/\tau}\right]$$

$$q_a=Q\left[\frac{2}{\varepsilon/\varepsilon_0+1}\right]e^{-t/\tau}$$

式中 $\tau=\dfrac{\varepsilon+\varepsilon_0}{\gamma}$。

解：① $t=0^+$ 时，介质分界面来不及充电，自由电荷面密度为0，按静电场考虑。结果同 ε_0、ε 两介质静电场镜象法，即

$$q_b=\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon+\varepsilon_0}Q=-q'$$

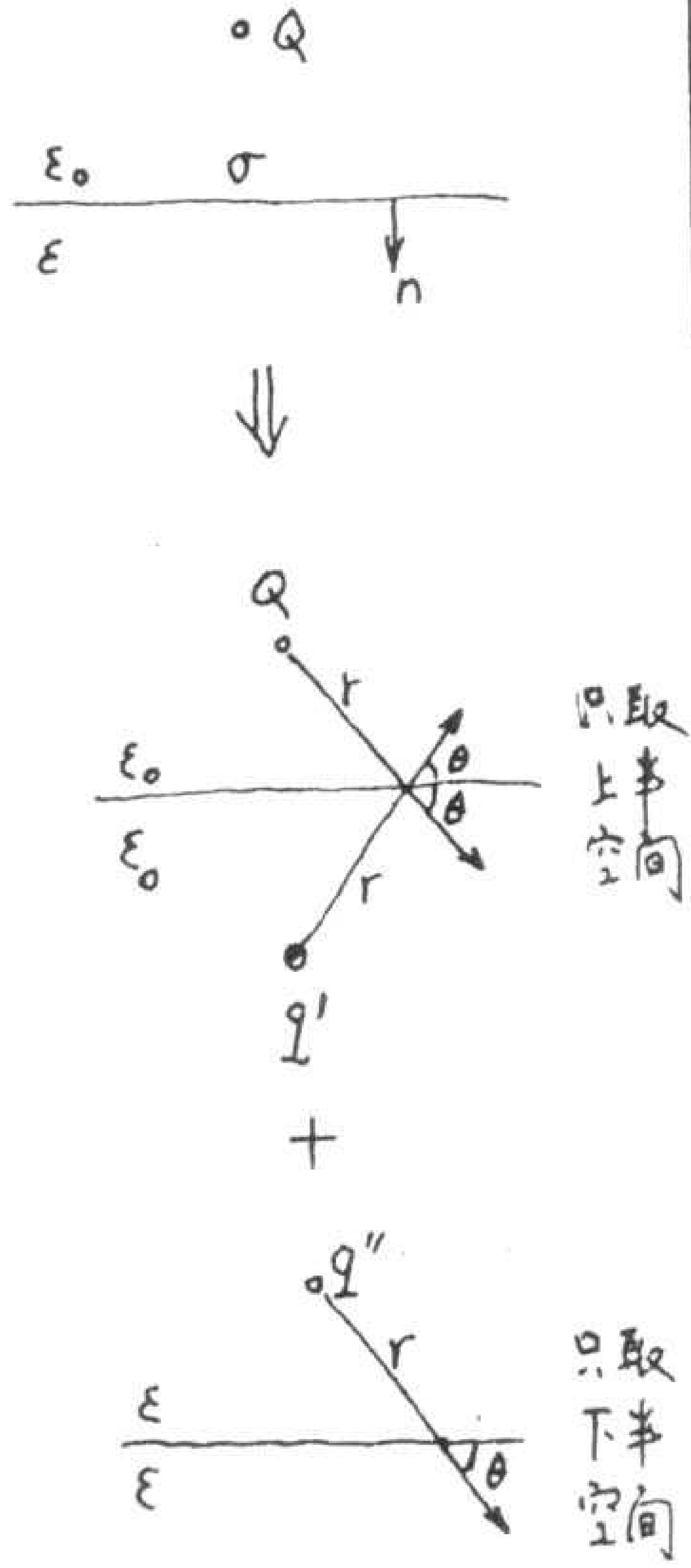
$$q_a=\frac{2\varepsilon_0}{\varepsilon+\varepsilon_0}Q=\frac{2\varepsilon}{\varepsilon+\varepsilon_0}Q\cdot\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}=q''\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}$$

② $t\to\infty$ 时，为 ε_0 介质与导体 b 的静电场。镜象法，即 $q_b\to Q$，

$q_b \to 0$。

③ $t>0$ 期间，为介质 ε_0 与媒质 (ε,γ) 的准静态场。镜象法，

$$E_{1t}=E_{2t}\ ,\quad D_{2n}-D_{1n}=\sigma\ ,\quad \delta_{2n}-\delta_{1n}=-\frac{\partial\sigma}{\partial t}$$



$$\begin{cases}\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\theta+\dfrac{q'}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\theta=\dfrac{q''}{4\pi\varepsilon r^2}\cos\theta\\[2ex] -\dfrac{Q}{4\pi r^2}\sin\theta+\dfrac{q'}{4\pi r^2}\sin\theta+\dfrac{q''}{4\pi r^2}\sin\theta=\sigma\\[2ex] -\dfrac{\overset{0}{\overset{\|}{\gamma}}Q}{4\pi\cancel{\varepsilon_0 r^2}}\sin\theta+\dfrac{\overset{0}{\overset{\|}{\gamma}}q'}{4\pi\cancel{\varepsilon_0 r^2}}\sin\theta+\dfrac{\gamma q''}{4\pi\varepsilon r^2}\sin\theta=-\dfrac{\partial\sigma}{\partial t}\end{cases}$$

消去 σ，

$$\begin{cases}\dfrac{Q+q'}{\varepsilon_0}=\dfrac{q''}{\varepsilon}\\[2ex] \dfrac{\partial q'}{\partial t}+\dfrac{\partial q''}{\partial t}=-\dfrac{\gamma}{\varepsilon}q''\end{cases}$$

消去 q''，

$$(\varepsilon+\varepsilon_0)\frac{\partial q'}{\partial t}+\gamma q'+\gamma Q=0$$

$$\therefore\quad \frac{\partial q'}{\partial t}+\frac{1}{\tau}q'=-\frac{1}{\tau}Q$$

式中 $\quad \tau\equiv\dfrac{\varepsilon+\varepsilon_0}{\gamma}$

$$\therefore\quad q'=-Q+Ae^{-\frac{1}{\tau}t}$$

式中A为待定常数。根据初始条件决定，

$$t=0^+\ ,\quad q'=-\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon+\varepsilon_0}Q$$

$$-\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon+\varepsilon_0}Q=-Q+A\cdot 1\ ,\qquad A=\frac{2\varepsilon_0}{\varepsilon+\varepsilon_0}Q$$

$$\therefore\quad q'=-\left(1-\frac{2\varepsilon_0}{\varepsilon+\varepsilon_0}e^{-\frac{1}{\tau}t}\right)Q$$

$$q''=\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}(Q+q')=\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\frac{2\varepsilon_0}{\varepsilon+\varepsilon_0}e^{-\frac{1}{\tau}t}Q$$

$$\therefore\quad q_b=-q'=\left(1-\frac{2\varepsilon_0}{\varepsilon+\varepsilon_0}e^{-\frac{1}{\tau}t}\right)Q$$

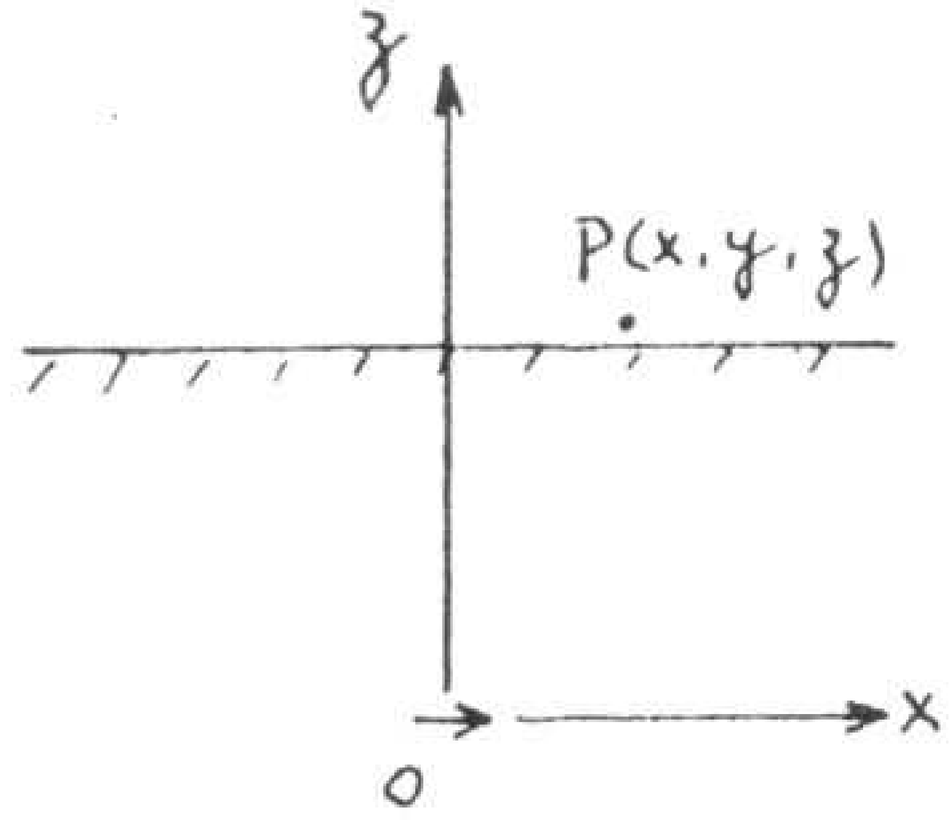
$$q_a=\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}q''=\frac{2\varepsilon_0}{\varepsilon+\varepsilon_0}e^{-\frac{1}{\tau}t}Q$$

证毕。

题号

题文 在测量人体磁场时，为了消除地磁的影响常常测量磁感应强度的皮表外法向分量沿外法向的空间变化率。试计算一位于坐标原点的电流元 $I\Delta l$（如图所示）在P点所产生的 $\frac{\partial B_z}{\partial z}$。

偶极子



解：

$$B_z = \frac{\mu_0 I \Delta\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} \cdot \vec{k}$$

$$= \frac{\mu_0 I \Delta l\, \vec{i} \times (\vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z)}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \cdot \vec{k}$$

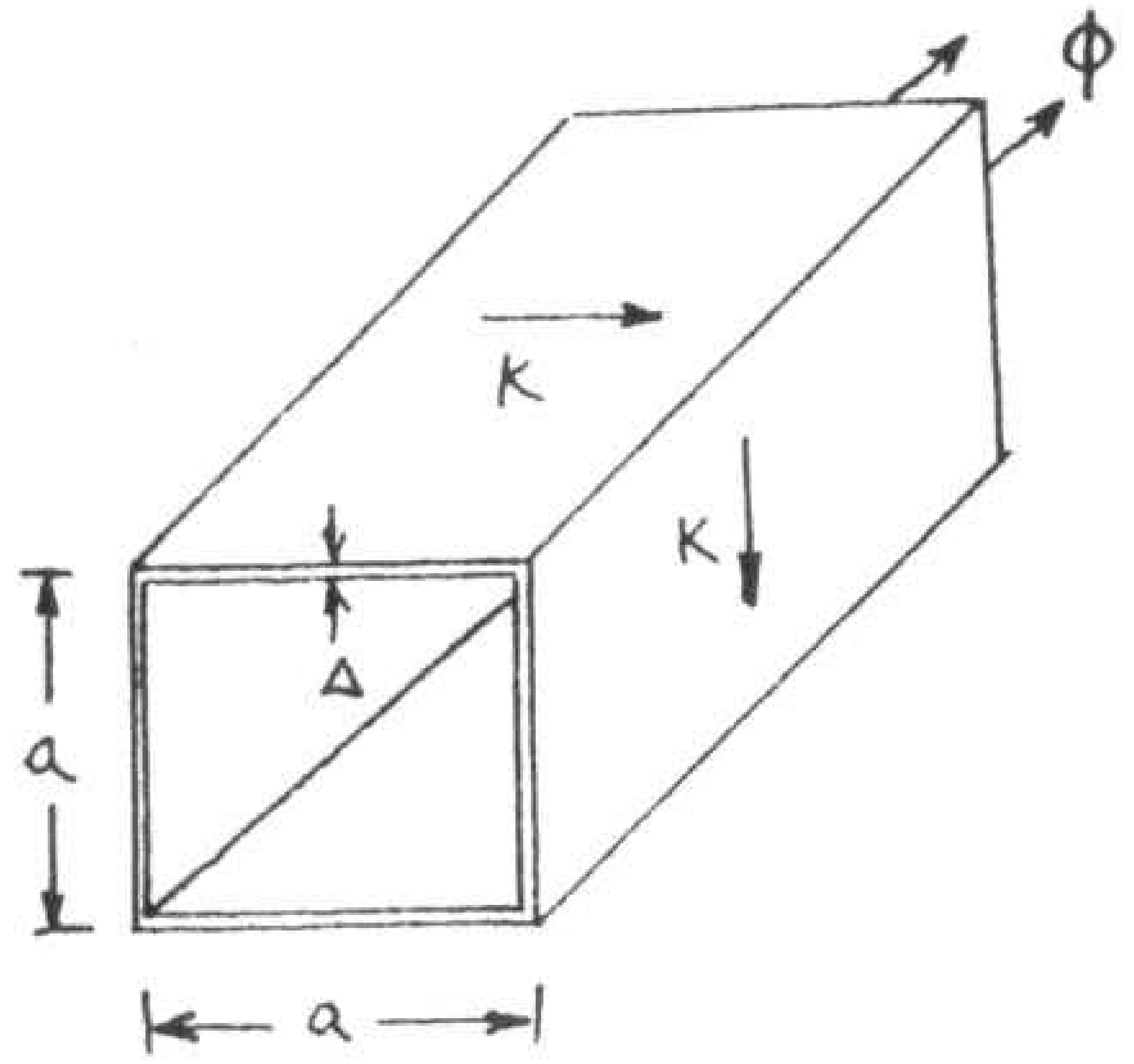
$$= \frac{\mu_0 I \Delta l\, y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial z} = \mu_0 I \Delta l \cdot y \left(-\frac{3}{2}\right) \frac{2z}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

$$= -3\mu_0 I \Delta l \cdot y \cdot z \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

题号 自编《电磁场讲义》，第5-39页，5-5

题文 一薄壁方筒，如图所示。其电导率 γ，磁导率 μ_0，壁厚 Δ，方截面边長 a，筒長很長。在 $t=0$ 时，由于外加磁感(通电突减至零)产生一面电流，其线密度为 K_0。试证 $t>0$ 时 $K(t)=K_0 e^{-t/\tau}$，式中 $\tau=\mu_0\gamma\Delta a/4$。



解：由于方筒壁厚 Δ 很小，忽略磁场对电流分布的影响，认为方筒壁内电流均匀分布。按准静态磁场分析。沿筒取 l，

$$\oint_l \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t}\iint_S \vec{B}\cdot d\vec{S}$$

$$K\oint_l \frac{dl}{\gamma\Delta} = -\frac{\partial}{\partial t}\mu_0 H a^2$$

而筒長很長，即 $H \doteq K$

$$K\frac{4a}{\gamma\Delta} = -\mu_0 a^2\frac{\partial K}{\partial t}$$

$$\frac{\partial K}{\partial t} + \frac{1}{\tau}K = 0$$

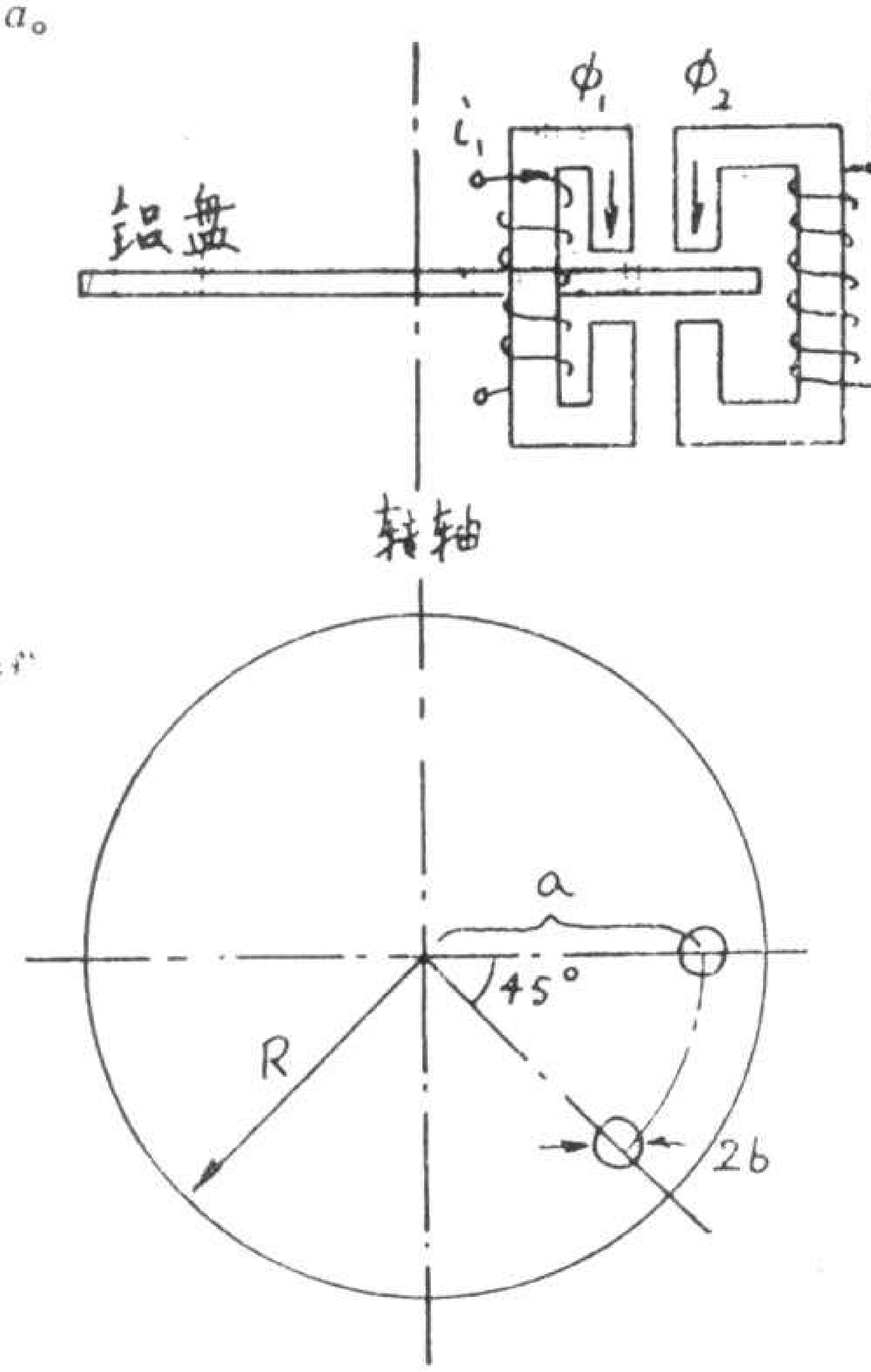
式中 $\tau = \mu_0\gamma\Delta a/4$

解得 $K = K_0 e^{-\frac{1}{\tau}t}$

题号 自编《电磁场习题集》，4-17

题文

4-17. 感应式电度表中有一铝盘。50 赫交流电 i_1、i_2 通过两个电磁铁线圈，产生交变磁通 ϕ_1、ϕ_2。而它们则在盘中感应出涡流使盘转动。今已知 $\phi_1(t)$、$\phi_2(t)$。求铝盘中涡流的分布。$b \ll a$。



题4—17 图

解：镜象法，两个镜象磁通 $-\phi_1$ 和 $-\phi_2$，分别放置在45°轴线上和水平轴线上，位置如下：

$$\begin{cases} h^2 = R^2 + b_0^2 \\ a = h - b_0 \end{cases}$$

式中 h 为圆盘中心至原点距离，b_0为磁通心至原点距离，原点是待求点。

$$h^2 = R^2 + (h-a)^2,$$

$$\therefore \quad h = \frac{R^2+a^2}{2a}, \qquad b_0 = \frac{R^2-a^2}{2a},$$


h
a
b
R

电路原理习题卡片 5-20

题号 自编《电磁场习题集》，4-16

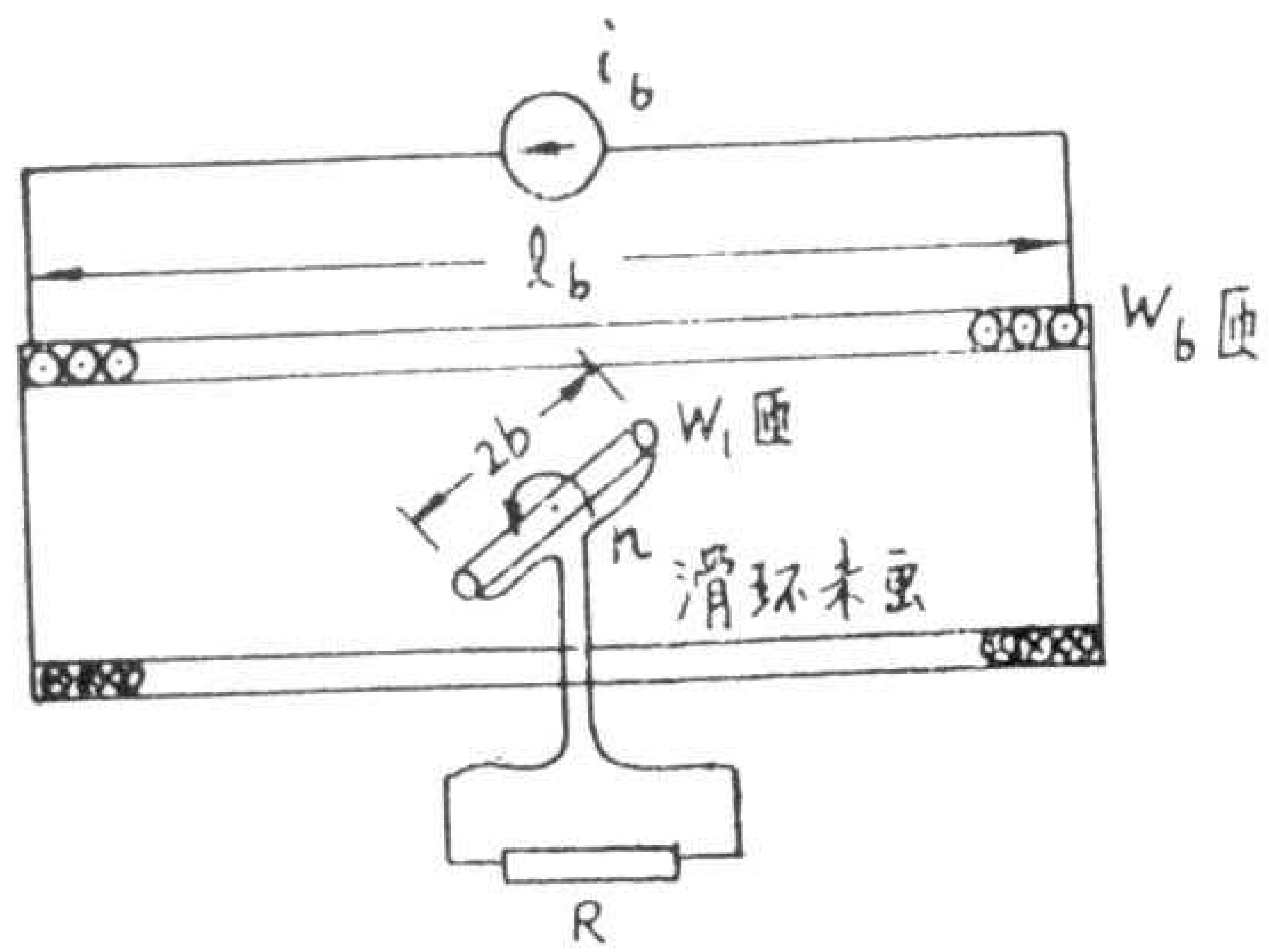
题文 長螺线管W_b接至直流电流源i_b，如图所示。W_b中放置一方形线圈W_1，宽$2b$，長a，自感L_1。由原动机带动着它旋转。转速n保持不变。将出交流电，经滑环接负载电阻R。

1) 计算负载电阻R中电流i_1。

2) 计算W_1与W_b间互感M。

3) 计算由于i_1在W_b中产生的感应电势。

4) 若在W_b中放入三个同轴线圈W_1、W_2、W_3，使它们在空间上互差120°，匝数、尺寸都一样，各接相等的负载电阻R。问此时在W_b中总感应电势如何？



题 4—16 图

解：1) $B \doteq \frac{\mu_0 W_b i_b}{l_b}$

W_1中的磁通

$$\phi = B2ba$$

感应电势

$$e_1 = -\frac{d\psi}{dt} = -W_1B2ba\sin(2\pi nt) = -\frac{\mu_0 W_1 W_b i_b}{l_b}2ba\omega\sin(\omega t)$$

n 转/秒

W_1中电流

$$i_1 = \frac{e_1}{R} = -\frac{\mu_0 W_1 W_b i_b 2ba}{l_b R}\omega\sin(\omega t),$$

$\omega = 2\pi n$

2) 互感

$$M = \frac{W_1 \Phi}{i_b} = \frac{-\mu_0 W_1 W_b 2ba}{l_b} \cos\omega t$$

3) i_1 在 W_b 中产生的互感电势

$$e = -\frac{dMi_1}{dt} = -\left(\frac{\mu_0 W_1 W_b 2ba}{l_b}\right)^2 \omega^2 \frac{i_b}{R} \frac{d}{dt} \overbrace{\sin(\omega t) \cos(\omega t)}^{\cos 2\omega t}$$

4) 三相线圈中电流 i_1、i_2 和 i_3 在 W_b 中合成感应电势为零。