第9节 镜像法

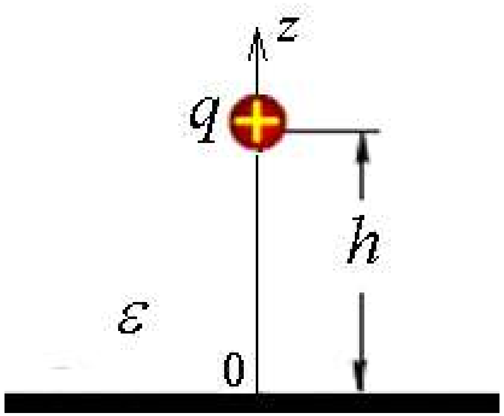
作业：**24**，注：**(c)**可用多个电荷近似

一种求解特定电场模型的技巧方法

选做作业：对于三相架空输电线路，给出近似计算空间电场的方法，仅需给思路。

- 其宗旨是将非自由空间的问题变为自由空间的问题。
- 其理论基础是边值问题的唯一性定理，即边值问题只有一个解。
- 对待求场域V_0，不改变其源与介质，若将该问题扩展成开域模型V_L（V_L包含V_0），只要V_L的解可以满足V_0的边界条件，则可以先解V_L，其中包含区域V_0的那部分解便是原问题的解。
- 如何能使模型V_L满足V_0的边界条件？在V_0之外放置若干简单形状的电荷，称为<u>镜像电荷</u>，“凑”镜像电荷来“凑”出边界条件。所放置的电荷一般是与V_0内的电荷关于边界面呈现镜像关系。
- 求解过程：（1）先列写原问题的边值问题，（2）在模型V_L中设镜像形成镜像模型，（3）检验镜像模型是否满足V_0的边界条件。（4）利用镜像模型求V_0的电位和电场强度。

1. 电荷对大导体平面问题的镜像法



导体上表面感应出面电荷，总量应为$-q$，面电荷密度分布不均匀；
导体的另一侧表面上感应的电荷总量为q，且在表面上均匀分布，由于表面无限大，故电荷密度为零。

先给出边值问题，建立直角坐标系，z轴过q处且指向上方。
设导体表面为参考面，则电场强度的边值问题为：

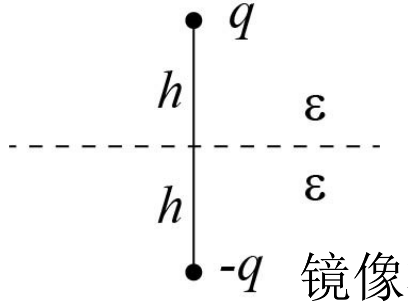
$$\begin{cases} \nabla\cdot\boldsymbol{E}(x,y,z)=q/\varepsilon\ \delta(0,0,z-h) & (z>0) \\ \nabla\times\boldsymbol{E}(x,y,z)=0 & (z>0) \\ \boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}(x,y,0)=0 & (z=0) \end{cases}$$

电位的边值问题为：

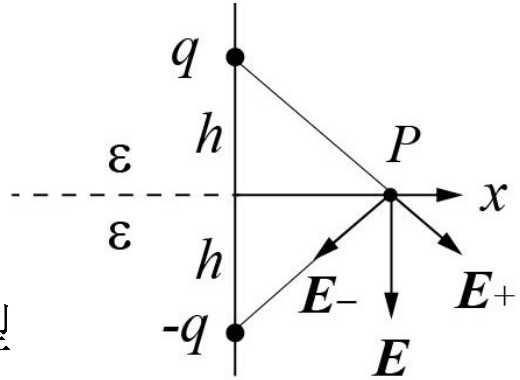
$$\begin{cases} \nabla^2\varphi(x,y,z)=-q/\varepsilon\ \delta(0,0,z-h) & (z>0) \\ \varphi(x,y,0)=0 \end{cases}$$

镜像模型：

以导体上表面为“镜面”，在q的镜像点处放置一个像电荷-q，然后把导体板移走，形成以原介电常数填充的无限大均匀介质空间。证明镜像模型可以满足原问题的边值问题。



镜像模型



原导体表面上，
电场强度切向等于零；
电位等于零。

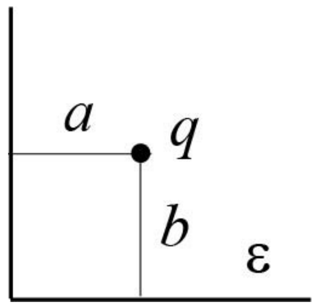
利用该镜像模型计算上半空间的电场便得原问题的解。

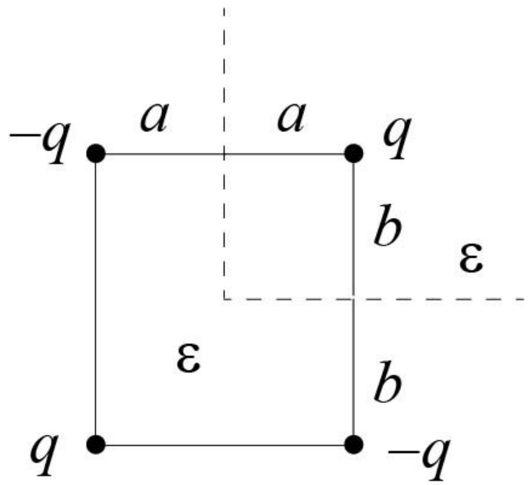
例1：一根无限长直线电荷τ平行于无限大导体平板，求电位与电场强度。

解：镜像模型是在镜像点放置一个-τ。 $\varphi_{\mathrm{P}} = \dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon}\ln\dfrac{R_-}{R_+}$

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{P}} = \boldsymbol{E}_+ + \boldsymbol{E}_- = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon R_+}\boldsymbol{R}_+^0 - \frac{\tau}{2\pi\varepsilon R_-}\boldsymbol{R}_-^0 = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon R_+^2}\boldsymbol{R}_+ - \frac{\tau}{2\pi\varepsilon R_-^2}\boldsymbol{R}_-$$

例：点电荷对两个正交的半无限大导体平面问题

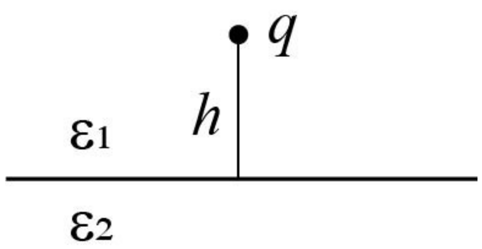




镜像模型

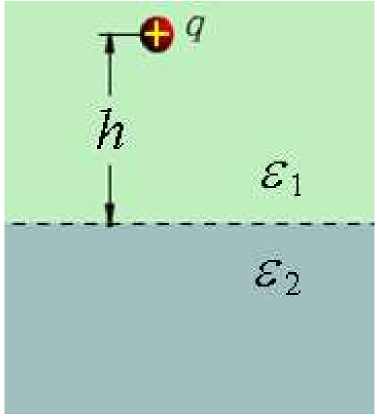
2. 电荷对无限大介质分界面问题的镜像法

原问题：　　　　其边值问题：

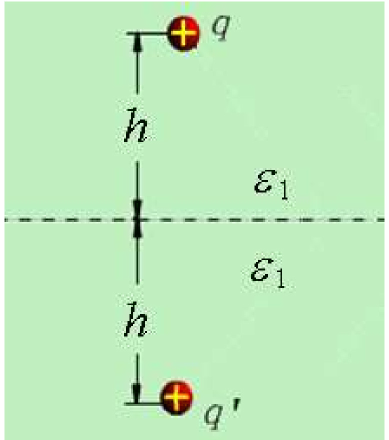


$$
\begin{cases}
\nabla\cdot\boldsymbol{D}_1 = q\delta(0,0,z-h)，\nabla\times\boldsymbol{E}_1 = 0，\boldsymbol{D}_1 = \varepsilon_1\boldsymbol{E}_1 & (z>0) \\
\nabla\cdot\boldsymbol{D}_2 = 0，\qquad \nabla\times\boldsymbol{E}_2 = 0，\boldsymbol{D}_2 = \varepsilon_2\boldsymbol{E}_2 & (z<0) \\
\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}_1 = \boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}_2 & (z=0) \\
\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{D}_1 = \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{D}_2 & (z=0) \\
\boldsymbol{E}_1(\infty)=0，\boldsymbol{E}_2(\infty)=0 & (\text{无限远处})
\end{cases}
$$

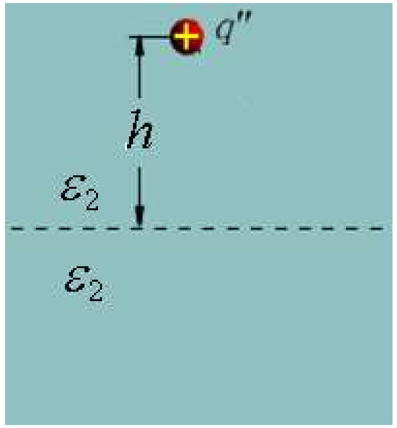
要建立两个镜像模型，分别适用于上半空间和下半空间。



原问题



计算上半平面
整个空间都是ε_1

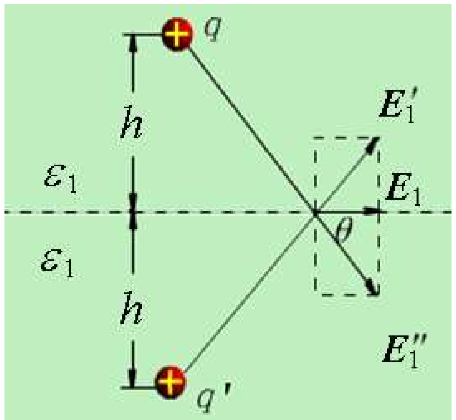


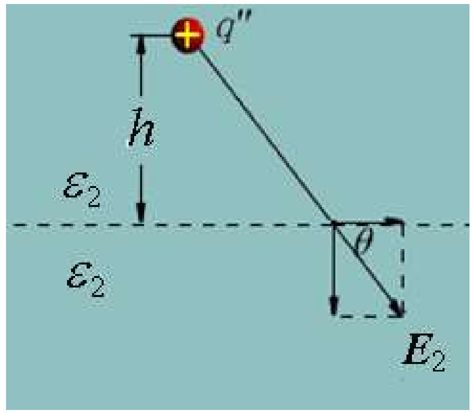
计算下半平面
整个空间都是ε_2

这样可行吗？看看q'和q''能否满足界面条件吧。

$$\begin{cases} E_{1t} = E_{2t} \\ D_{1n} = D_{2n} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_1 r^2}\cos\theta + \dfrac{q'}{4\pi\varepsilon_1 r^2}\cos\theta = \dfrac{q''}{4\pi\varepsilon_2 r^2}\cos\theta \\ \dfrac{q}{4\pi r^2}\sin\theta - \dfrac{q'}{4\pi r^2}\sin\theta = \dfrac{q''}{4\pi r^2}\sin\theta \end{cases}$$





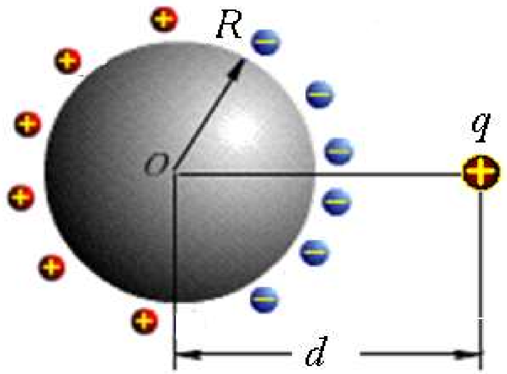
解得： $q' = \dfrac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} q$ $\qquad$ $q'' = \dfrac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} q$

3. 点电荷对导体球问题的镜像法

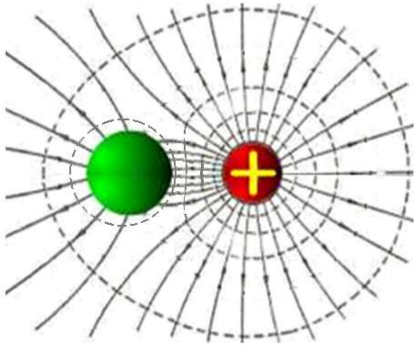
- 两个等量异号点电荷会形成一个无限大平面等位面。
- 可以证明，两个不等量的异号点电荷会形成一个球形等位面。
- 容易理解，这个球形等位面包围绝对值较小的那个点电荷。
- 利用该球等位面特性，可建立点电荷对导体球问题的镜像模型。
- 此类问题包含两种：点电荷在导体球外和点电荷在导体球壳内。

（1）非接地导体球外有点电荷q的问题　（悬浮导体问题）

设坐标原点位于球心，z轴指向q，电场强度与电位的边值问题为：

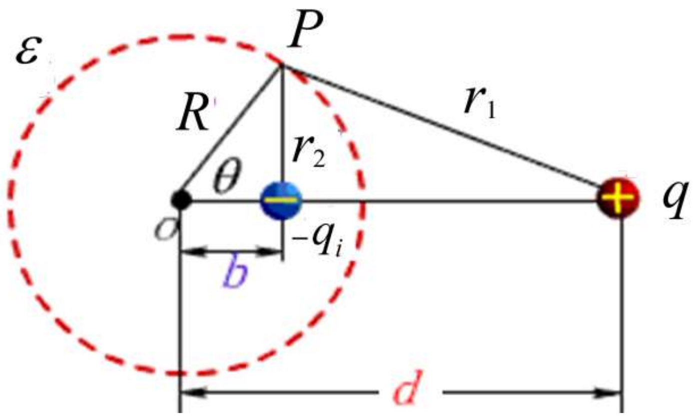


$$\begin{cases} \nabla\cdot\boldsymbol{D}=q\delta(0,0,z-d) & \text{(场域内)} \\ \nabla\times\boldsymbol{E}=0\text{，}\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E} & \text{(场域内)} \\ \boldsymbol{E}(\infty)=0 & \text{(无限远处)} \\ \boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}=0 & (\text{当}x^2+y^2+z^2=R^2) \\ \oint\!\!\oint_S \boldsymbol{D}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=0 & (\text{当}x^2+y^2+z^2=R^2) \end{cases}$$



$$\begin{cases} \nabla^2\varphi(x,y,z)=-q/\varepsilon\ \delta(0,0,z-d) & \text{(场域内)} \\ \varphi(\infty)=0 & \text{(无限远处)} \\ \varphi=U & (\text{当}x^2+y^2+z^2=R^2) \\ -\oint\!\!\oint_{S_4}\varepsilon\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}n}\mathrm{d}S=0 & (\text{当}x^2+y^2+z^2=R^2) \end{cases}$$

先证明q与$-q_i$可产生一个球形零等位面。令P点电位为零：



$$\varphi_p = \frac{q}{4\pi\varepsilon r_1} - \frac{q_i}{4\pi\varepsilon r_2} = 0$$

其中 $r_1^2 = d^2 + R^2 - 2Rd\cos\theta$

$r_2^2 = b^2 + R^2 - 2Rb\cos\theta$

$$[q^2(b^2+R^2) - q_i^2(d^2+R^2)] + 2R(q_i^2 d - q^2 b)\cos\theta = 0$$

$$\begin{cases} q^2(b^2+R^2) - q_i^2(d^2+R^2) = 0 \\ q_i^2 d - q^2 b = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{q_i = \frac{R}{d}q, \quad b = \frac{R^2}{d}}$$

镜像$-q_i$与q可使得导体球表面的电位为零是关键性结论。

在球心再放置电荷q_i，构成镜像模型。

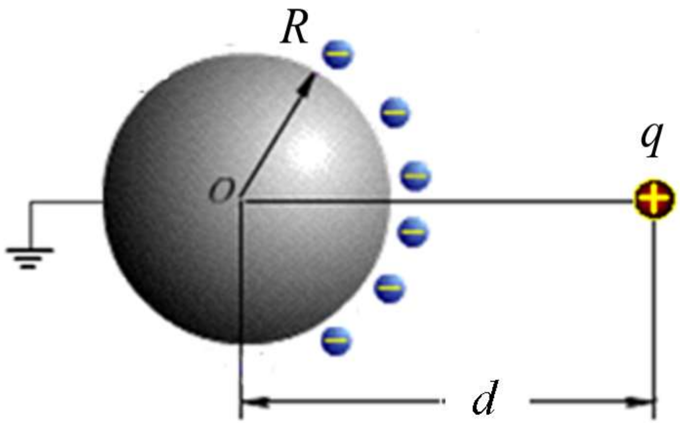
其可以满足球面上电场的齐次切向边界条件与等电位边界条件，并且可以满足原问题的总电荷为零的高斯通量定理约束条件。

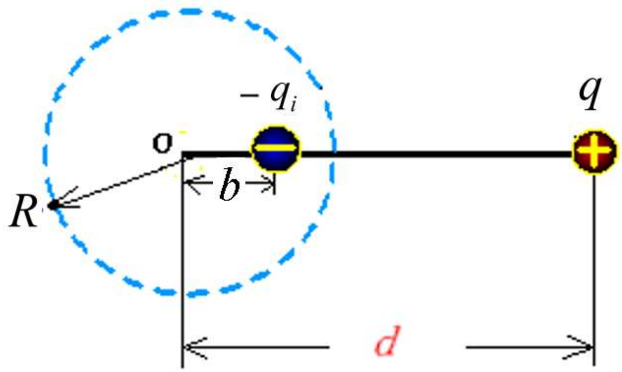
如果在导体上注入电荷Q，则需要将Q放置在球心即可。

（2）接地导体球外有点电荷q的问题

边界条件：$\varphi\big|_{导球面}=0 \qquad \varphi\big|_{无限远处}=0$

- 接地就是与地球或无限远处的无限大“导体”面连接；
- 导体球与地球就构成了一个导体。从边值问题看，因只有一个导体，且电位已知，没有悬浮导体了。
- 因此，只需在球面和无限远处设电位等于零的条件即可，不需要在任何地方施加电通量约束条件。
- 位于b处的镜像$-q_i$与原电荷q可使球面及无限远处电位为零，因此，镜像模型是$-q_i$与q。
- 从场图看，由于导体球与无限远处等电位，故不可能在导体球与无限远处形成电力线，导体球上只有感应的负电荷。
- 从感应电荷看，q在没有接地的导体球背面感应的电荷，现移动到了地球表面（无限远）处，故导体球上没有感应正电荷了。

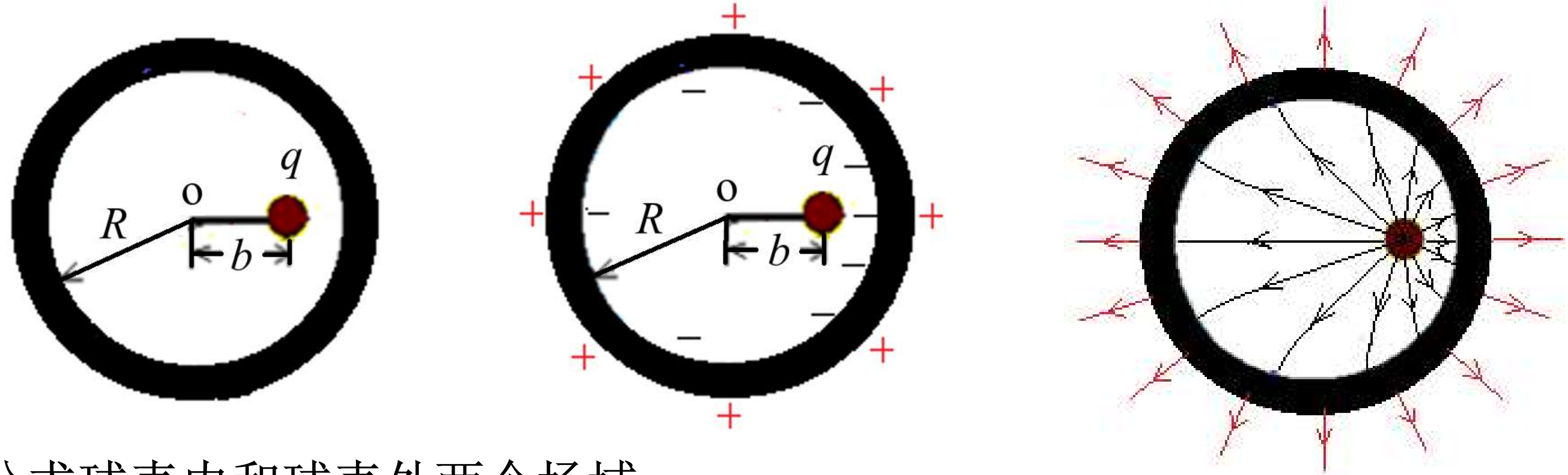




球上只有负电荷。
球内镜像电荷$-q_i$，
可使球面电位为零。

（3）不接地的导体球壳内点电荷的镜像

导体壳内腔空气球体半径为R，外表面半径为R_0，内有一点电荷q。



分求球壳内和球壳外两个场域。

先分析电荷分布：导体内表面感应出点电荷$-q$，非均匀分布，

外表面感应出电荷q，均匀分布。

球面上均匀分布的电荷在球内任一点产生的电场为零。

对球壳内腔体区域，电场仅由点电荷与内表面感应的电荷产生。

为求腔体内的电场，在球外设置镜像电荷q'，替换内表面的电荷效应，

故q'是针对内表面的镜像，而与外表面无关。q'的绝对值应大于q，

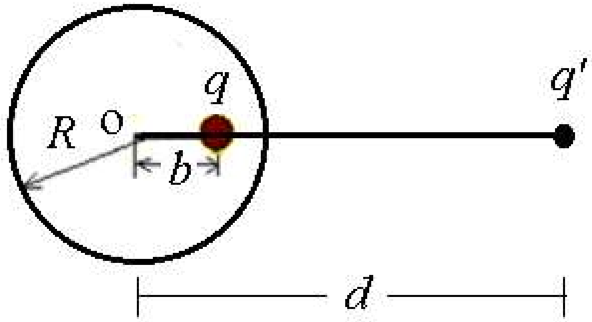
这样会产生零电位球面，q'只是表示球面上感应电荷的场效果，但其量值

并不等于感应电荷。这里没有高斯通量定理边界条件，故q'可不等于q。

若选择球面为参考点该镜像模型就是正确的。

根据前面的结果颠倒一下，可得设置镜像的位置与大小为：

$$
\begin{cases}
d = \dfrac{R^2}{b} \\[2ex]
q' = -\dfrac{R}{b} q
\end{cases}
$$



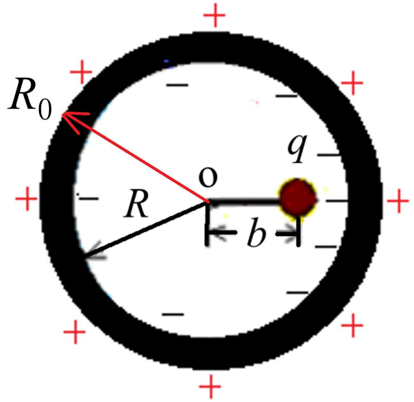
对于球壳外区域，不必用镜像法。

若仍设球壳内表面电位为零，则球壳外表面也为零。

场就等于将q放置在外球壳的球心的场，电位为：

$$
\varphi(r) = \int_r^{R_0} E_r \mathrm{d}r = \int_r^{R_0} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \mathrm{d}r = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\Bigg|_{R_0}^{r}
$$

$$
= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_0}\right)
$$



若设 $\varphi\big|_{r\to\infty} = 0$，则 $\varphi_{球} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_0}$

上面镜像求得的腔体内的电位就不对了，应加上$\varphi_{球}$这个值。

对非同心球面构成的导体壳，求内部场看内球面设镜像，

求外部场等效于电荷放在外球面的球心。

第10节 电轴法

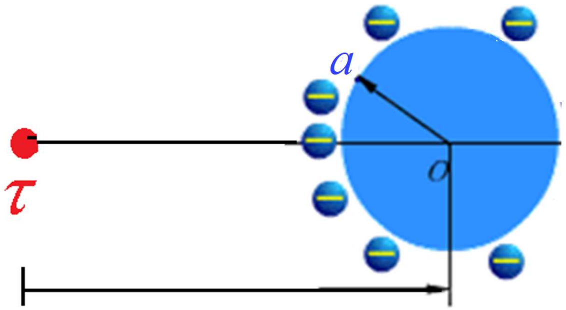
电轴法用来求解长直圆柱导体问题，具体包含以下三类问题：

（1）一根线电荷对一个带等量异号电荷的圆柱导体，

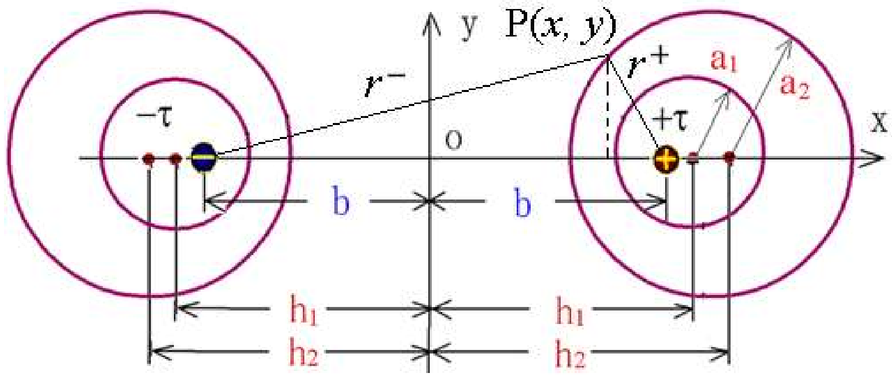
（2）两距离较近的带等量异号电荷长直平行圆柱导体(可不等径)，

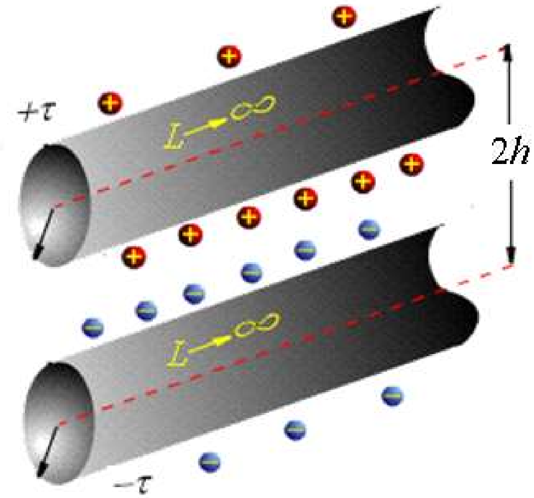
（3）非同轴电缆。

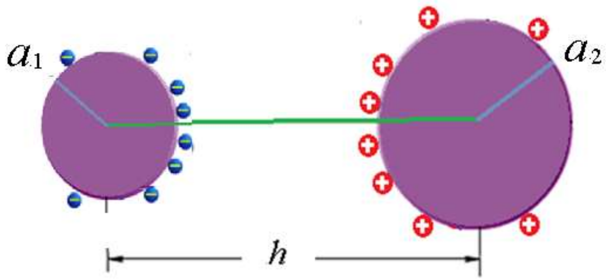
三类问题的边界条件都是导体表面为未知等位，且要加高斯通量定理约束。

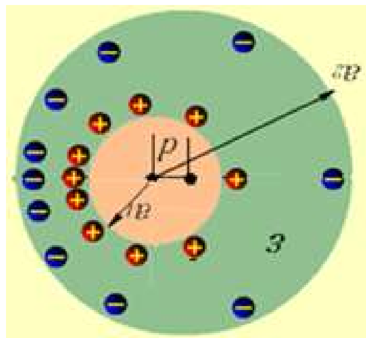


有无限多个圆柱等位面，在对称面上φ=0









证明两平行无限长直等量异号线电荷的等面为一个个圆柱面

选对称面为电位参考点时，等位线方程：$\varphi = \dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon}\ln\dfrac{r^-}{r^+} = \pm C$

先分析+C情况：设 $\dfrac{r^-}{r^+}=K$

可将x>0区域的等位线方程写为：$\dfrac{(r^-)^2}{(r^+)^2} = \dfrac{(x+b)^2+y^2}{(x-b)^2+y^2} = K^2$

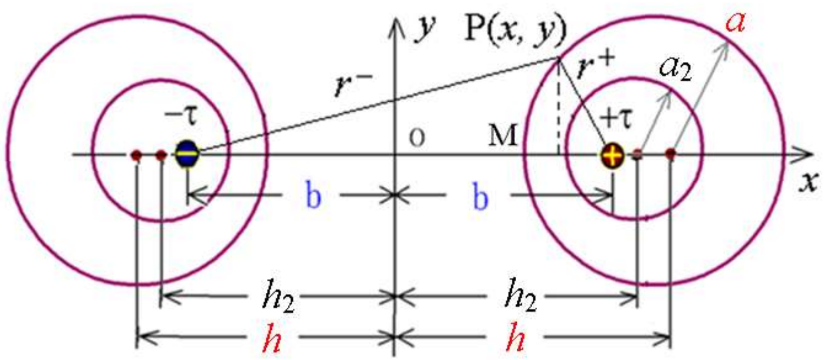
整理可得：$(x-\dfrac{K^2+1}{K^2-1}b)^2 + y^2 = (\dfrac{2bK}{K^2-1})^2$　　$(x-h)^2+y^2=a^2$

此为圆方程

(*y*轴在两电荷中心处)

圆心坐标h为：$h=\dfrac{K^2+1}{K^2-1}b$

圆的半径a为：$a=\left|\dfrac{2bK}{K^2-1}\right|$



对称的有x<0区域的等位线。

每对±C对应左右对称两个圆a_i、h_i。

任意半径的两圆之间有个电位差。

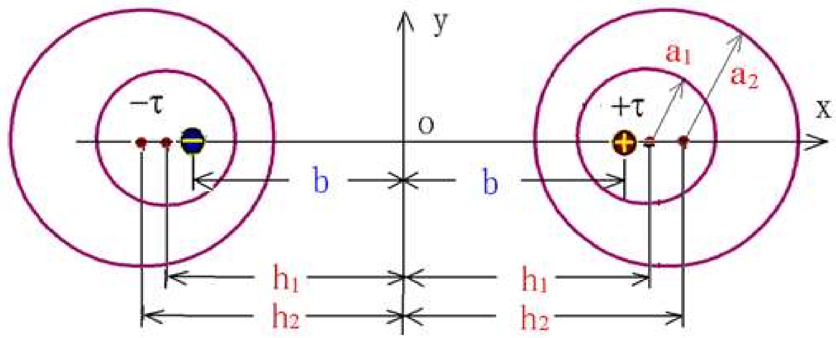
电轴间距2b。

每个圆三量关系：$\boxed{a_i^2+b^2=h_i^2}$

（h最大）

电轴法理论基础

两线电荷产生的圆柱等位面特点：



$2b$是电轴间距（y轴在两电荷中心处）

a_i是一对对等位面半径，有无数个，

每个半径为a_i的等位面之几何轴距y轴的距离为h_i，且有 $a_i^2 + b^2 = h_i^2$。

对任意两个加有电压的圆柱壳之间（有三种组合形式）的电场，可通过两线电荷来模拟等效计算。

线电荷的位置不是圆柱的轴，而是“电轴”，故称为电轴法。

用置于电轴上的等效线电荷来代替圆柱导体面上分布的电荷，从而求得电场的方法称为电轴法。

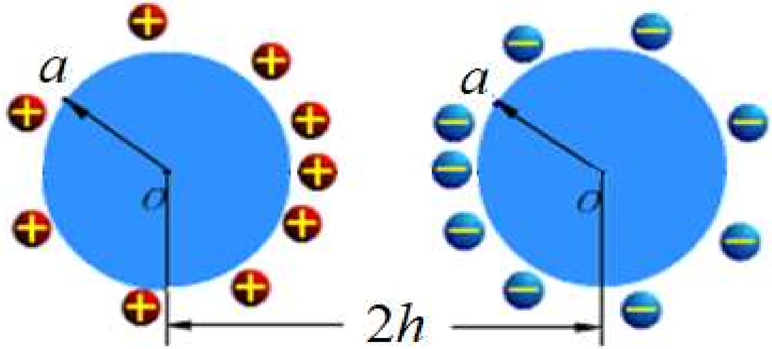
若两导体距离较远时可近似认为几何轴即为电轴。

电轴法的解题关键是找到电荷位置。

首先要建立正确的坐标系，即两电轴的中心处为y轴，且电位为零。

（1）两半径相同的长直平行圆柱导体问题

两半径为a, 轴心距$2h$的平行圆柱导体加有电压U，求空间电场。
虽然已知的是电压，但要先设电荷$\pm\tau$。

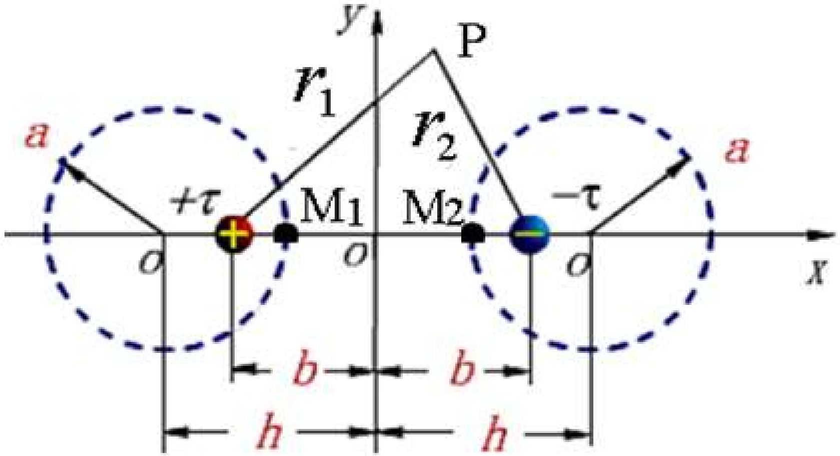


建立坐标系，确定电轴位置

$$b^2 = h^2 - a^2$$

空间任一点P的电场和电位：

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{P}} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r_1}\boldsymbol{e}_{r_1} - \frac{1}{r_2}\boldsymbol{e}_{r_2}\right)$$



$$\varphi_{\text{p-以对称面为参考点}} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{r_2}{r_1}$$

$$\varphi_{\mathrm{M1}} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{b+h-a}{b-(h-a)}$$

$$\varphi_{\mathrm{M2}} = -\varphi_{\mathrm{M1}}$$

$$U=\varphi_{\mathrm{M1}}-\varphi_{\mathrm{M2}}=2\varphi_{\mathrm{M1}}$$

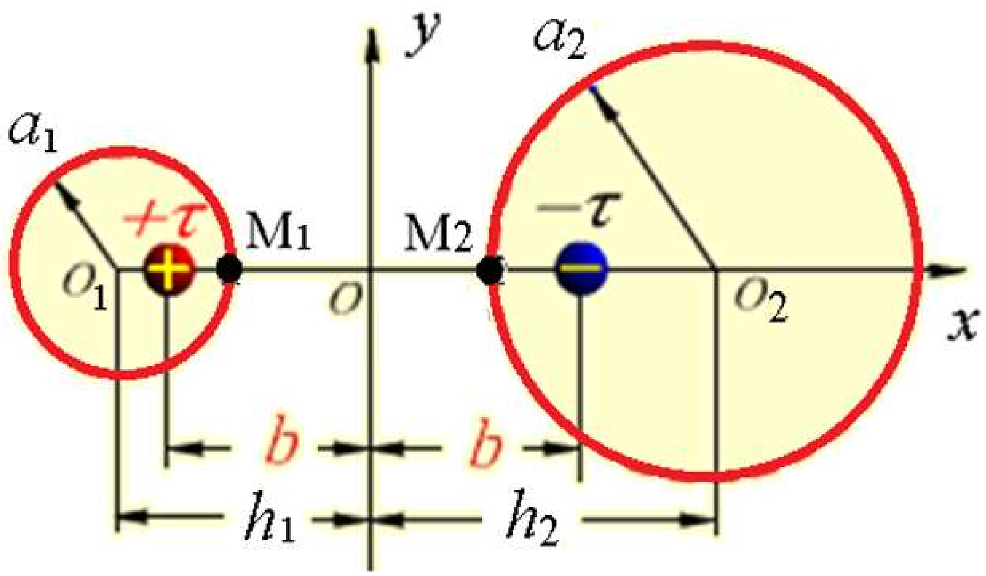
$$U = 2\varphi_{\mathrm{M1}} = \frac{\tau}{\pi\varepsilon}\ln\frac{b+h-a}{b-(h-a)}$$

由此得到用U表示的τ。
代入上面电场的表达式中即可。

（2）两半径不相同的长直平行圆柱导体问题

半径为a_1和a_2, 轴心距为d的两圆柱导体加电压U，求空间电场。

需要确定两个圆a_1和a_2对应的圆心坐标h_1和h_2以及电轴坐标b。



1）画出电轴；

2）确定y轴（电轴中心）；

3）解b、h_1、h_2

$$\begin{cases} b^2 = h_1^2 - a_1^2 \\ b^2 = h_2^2 - a_2^2 \\ d = h_1 + h_2 \end{cases}$$

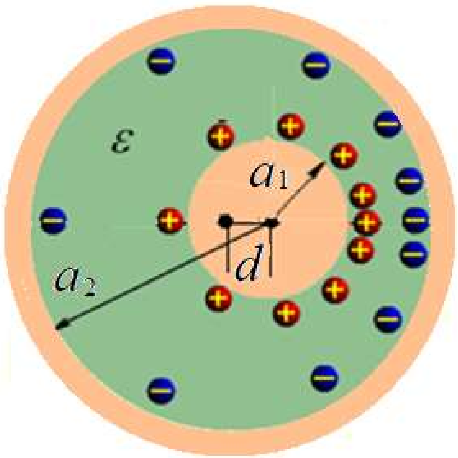
解得：

$$b = \sqrt{h_1^2 - a_1^2}, \quad h_1 = \frac{d^2 + a_1^2 - a_2^2}{2d}, \quad h_2 = \frac{d^2 - a_1^2 + a_2^2}{2d}$$

然后计算M_1与M_2的电位，利用$U=\varphi_{M1}-\varphi_{M2}$得到用$U$表示的$\tau$。

（3）偏心电缆问题

芯线外径与外皮内半径为a_1和a_2, 轴心距为d的偏心电缆，芯线与外皮间加有电压U，求空间电场。



电缆的工作一般为芯线与外皮构成电流回路。需要确定两个圆a_1和a_2对应的h_1和h_2及b。

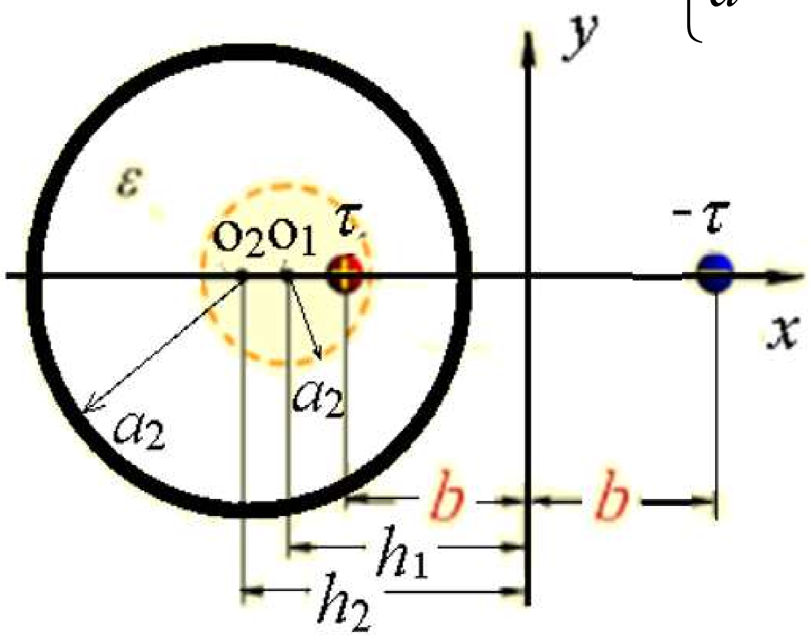
1) 画出电轴；2) 确定y轴；3) 解b、h_1、h_2

$$\begin{cases} b^2 = h_1^2 - a_1^2 \\ b^2 = h_2^2 - a_2^2 \\ d = h_2 - h_1 \end{cases}$$

有此可解得：

$$b = \sqrt{h_1^2 - a_1^2},$$

$$h_1 = \frac{a_2^2 - a_1^2 - d^2}{2d}, \quad h_2 = \frac{d^2 - a_1^2 + a_2^2}{2d}$$



由电荷求电压U，得电压表示的电位与电场强度。

注意：$\varphi_p = \dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon}\ln\dfrac{r^-}{r^+}$ 是以y轴为参考点。若外圆柱壳为参考点，要在该式基础上减 $\varphi_M = \dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon}\ln\dfrac{r_M^-}{r_M^+}$

镜像法（电轴法）小结

- 镜像法（电轴法）的理论基础是边值问题的唯一性定理：满足场域内方程和边界条件的解唯一；
- 镜像法（电轴法）的实质是用虚设的镜像电荷（电轴）替代表面上分布的电荷的效果，使计算场域变为点或线电荷在无限大均匀介质中的解；
- 镜像法（电轴法）的关键是确定镜像电荷（电轴）的个数（根数）、大小及位置；
- 镜像电荷（电轴）只能放在待求场域以外的区域。计算时要注意镜像系统的适用区域。