第6次习题课题目

1. 设总体X服从区间$[0,\theta]$上的均匀分布，其中θ为位置参数。$X_1,...,X_n$是来自总体的样本，$x_1,...,x_n$为相应的样本观测值。
   (1)求θ的矩估计量$\hat{\theta}_1$;
   (2)求θ的MLE $\hat{\theta}_2$;
   (3)讨论$\hat{\theta}_1$及$\hat{\theta}_2$的无偏性;
   (4)求常数C_i，使得$\eta_i = C_i\hat{\theta}_i(i=1,2)$均为无偏估计;
   (5)问η_1与η_2哪个更有效;
   (6)讨论θ_1及θ_2的相合性。

2. 设总体X满足$E(X) = \mu$，$Var(X) < \infty$。$X_1,...,X_n$是来自总体的样本，$x_1,...,x_n$为相应的样本观测值。令$\hat{\mu} = \frac{2}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n} kx_k$。
   证明：$\hat{\mu}$是μ的相合估计。

3. 设总体X具有概率密度：
   $$p(x) = \begin{cases} \frac{x}{\theta^2}e^{-x/\theta} & ,x > 0 \\ 0 & ,x \le 0 \end{cases} \tag{1}$$
   其中$\theta > 0$为未知参数，$X_1,....,X_n$为来自X的样本，$x_1,...,x_n$为相应的样本观测值。
   (1)求θ的MLE $\hat{\theta}$;
   (2)求θ的矩估计量$\tilde{\theta}$;
   (3)讨论$\hat{\theta}$及$\tilde{\theta}$的无偏性。

4. 设$X_1,....,X_n,X_{n+1}$是来自正态总体的样本，$X_1,....,X_n$的样本均值和样本二阶中心距分别为$\bar{X}$和S_n^2，试求$\sqrt{\frac{n-1}{n+1}}\frac{X_{n+1}-\bar{X}}{S_n}$的分布。

5. 设$x_1,...,x_n$是来自正态总体$N(\mu,\sigma^2)$的样本。考虑σ^2 的如下三个估计：

$$\hat{\sigma_1}^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$$
$$\hat{\sigma_2}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$$
$$\hat{\sigma_3}^2=\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$$

(1)哪一个是σ^2的无偏估计？
(2)哪一个的均方误差最小？

6. 设$x_1,...,x_n$是来自正态总体$N(\mu,\sigma^2)$的样本。
(1)如果已知$\sigma=4$，为使得μ的置信水平为$1-\alpha$的置信区间长度不大于给定值L，试问：样本容量n至少需要多少？
(2)如果σ未知，在已知样本容量n，样本均值$\bar{x}$，样本标准差s 的前提下，试以$1-\alpha$把握估计最小的μ的值。

7. 随机选取9发炮弹，测得炮弹口速度样本标准差$s=11m/s$，若炮弹炮口速度服从正态分布，求其方差σ^2的95%置信上限。

8. 设$x_1,...,x_{16}$是来自正态总体$N(\mu,4)$的样本，考虑检验问题：

$$H_0:\mu=6 \quad vs \quad H_1:\mu\neq 6,$$

拒绝域取为$W=\{|\bar{x}-6|\geq c\}$。试求使得检验的显著性水平为$\alpha=0.05$的c，并求此时该检验在$\mu=6.5$处犯第二类错误的概率。

9. 设需要对某正态总体的均值进行假设检验：

$$H_0:\mu=15 \quad vs \quad H_1:\mu\leq 15,$$

已知$\sigma^2=2.5$，取$\alpha=0.05$，若要求当H_1中的$\mu\leq 13$时犯第二类错误的概率不超过0.05，求所需的样本量n。

10. (选做)试求以下各种情况下观测数据的p值。
(1)10次Bernoulli试验中7次成功，检验$H_0:p\leq 1/2 \quad vs \quad H_1:p>1/2$;
(2)$X\sim P(\lambda)$，观测到$X=3$，检验$H_0:\lambda\leq 1 \quad vs \quad H_1:\lambda>1$;
(3)$X_i\sim P(\lambda),i=1,2,3$相互独立，观测到$X_1=3,X_2=5,X_3=1$，检验$H_0:\lambda\leq 1 \quad vs \quad H_1:\lambda>1$。