信号与系统课后习题解答

期中简答题：一个时间有限信号$f(t)$是否可以用它的抽样信号唯一地表示？为什么？

解答：不能；
解析：本题考查的是时域抽样定理，时间有限信号，频率无限，因此不满足时域抽样定理$2f_m \le f_s$。此处的抽样信号指的是时域的抽样信号。

期中简答题：一个信号的傅里叶变换存在，它的双边拉普拉斯变换一定存在。该说法正确吗？为什么？

解答：不正确；
解析：信号与系统课程中考虑的傅里叶变换是拓展意义下的，可能不满足狄利克雷条件。课堂上举过例子，如果信号为$f(t)=1$，其傅里叶变换为$F(\omega)=2\pi\delta(\omega)$，但是其不满足狄利克雷条件，因此没有双边拉氏变换。

期中简答题：一个系统的单位冲激响应为$h(t)=Sa(t-t_0)u(t+1)$，该系统是因果系统吗？为什么？

解答：不是
解析：系统单位冲激响应为$h(t)$，激励为$e(t)$，则系统响应为$r(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e(\tau)h(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{t} e(\tau)h(t-\tau)d\tau+\int_{t}^{\infty} e(\tau)h(t-\tau)d\tau$。若$r(t)$和$t$之后$e(t)$无关，则要求$\int_{t}^{\infty} e(\tau)h(t-\tau)d\tau=0$对于任意$e(t)$恒成立，因此要求$\tau\epsilon[t,\infty]$时，$h(t-\tau)=0$，即要求**单位冲激响应$h(t)$在t<0时恒为0**。而$h(t)=Sa(t-t_0)u(t+1)$显然在[-1,0]之间不恒为0，因此该系统不是因果系统。

期中：某系统框图及该系统的输入$x(t)$的频谱$X(\omega)$如图3所示。$X(\omega)$上限频率为ω_m。

HP的频谱：

$$H_1(\omega)=\begin{cases}k_1 & |\omega|\ge\omega_0\\ 0 & |\omega|<\omega_0\end{cases}$$

LP的频谱：

$$H_2(\omega)=\begin{cases}k_2 & |\omega|\le\omega_m\\ 0 & |\omega|>\omega_m\end{cases}$$

已知$\omega_0>\omega_m$，试求系统输出$y(t)$的频谱$Y(\omega)$（写出用$X(\omega)$表示的表达式，画出$Y(\omega)$的频谱图）

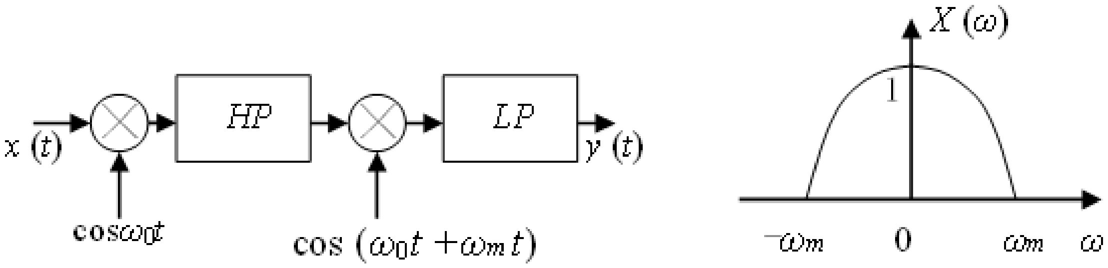


图 3

注：⊗ 表示信号相乘

解答：本题主要考察信号时域相乘性质以及cos(ωt)的卷积性质；
时域相乘，频域相卷，即：

$$F[f_1(t)f_2(t)]=\frac{1}{2\pi}F_1(\omega)*F_2(\omega)$$

同时，cos (ω_0t)的傅里叶变换为

$$F(\cos(\omega_0 t))=\pi(\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0))$$

因为和冲激系统相卷相当于时移，因此，和cos($\omega_0 t$)相乘相当于频域图像分别左移和右移ω_0

期中：某系统框图及该系统的输入$x(t)$的频谱$X(\omega)$如图3所示。$X(\omega)$上限频率为ω_m。

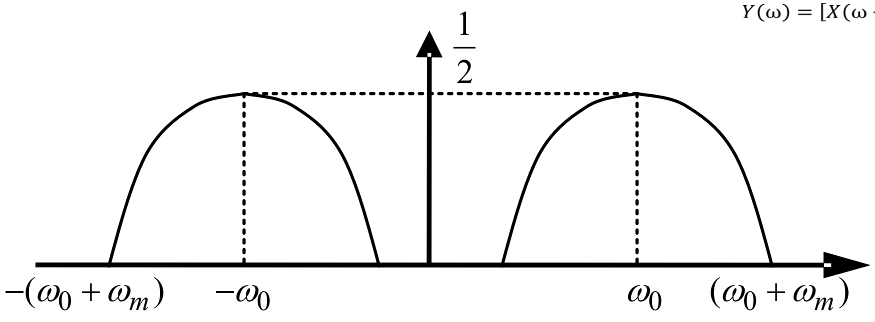
$$H_1(\omega)=\begin{cases} k_1 & |\omega|\ge \omega_0 \\ 0 & |\omega|<\omega_0 \end{cases}$$

$$H_2(\omega)=\begin{cases} k_2 & |\omega|\le \omega_m \\ 0 & |\omega|>\omega_m \end{cases}$$

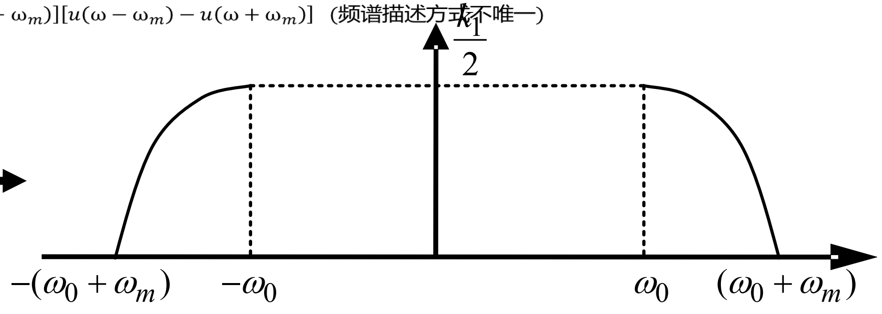
解答：

所以最后的y的频谱为
$Y(\omega)=[X(\omega-\omega_m)+X(\omega+\omega_m)][u(\omega-\omega_m)-u(\omega+\omega_m)]$（频谱描述方式不唯一）

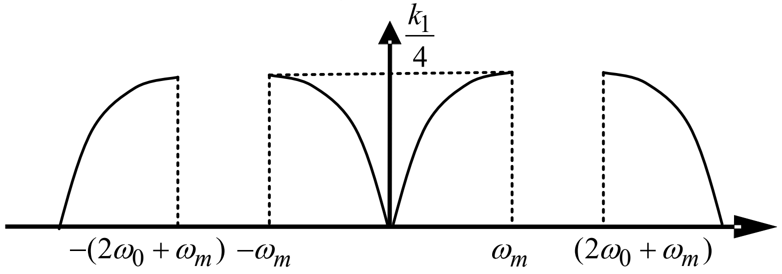
解答：



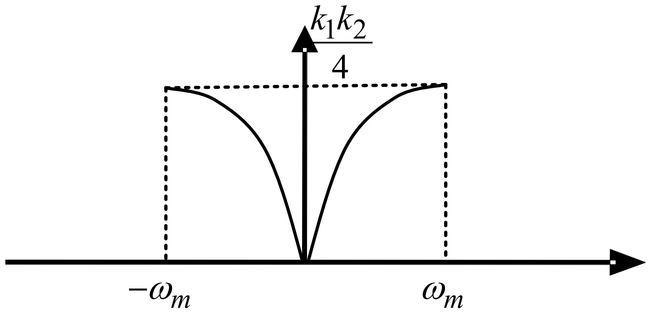
和cos(ω$_0$t)频域卷积



滤波器HP对低频信号做滤除



再和cos[(ω$_0$+ ω$_m$)t]卷积



滤波器LP对低频信号做滤除

所以最后的y的频谱为

$$Y(\omega)=[X(\omega-\omega_m)+X(\omega+\omega_m)][u(\omega-\omega_m)-u(\omega+\omega_m)]$$（频谱描述方式不唯一）

解答：

$$F(s)=\int_s^{+\infty}\frac{1}{\lambda+3}d\lambda-\int_s^{+\infty}\frac{1}{\lambda+5}d\lambda$$

$$=\ln\frac{\lambda+3}{\lambda+5}\bigg|_s^{+\infty}$$

$$=\ln\frac{s+5}{s+s}$$

注：

信号 $\frac{e^{-3t}}{t}$ 乘以衰减因子后依然不满足狄利克雷条件，因此单独的拉普拉斯变换不存在

信号 $\frac{e^{-3t}-e^{-5t}}{t}$ 满足狄利克雷条件，

使用s域积分性质求解

s 域积分特性 $\mathscr{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right]=\int_s^{+\infty}F(s_1)ds_1$

性质	时频域关系式
线性	$\mathscr{L}[af_1(t)+bf_2(t)]=aF_1(s)+bF_2(s)$
时移	$\mathscr{L}[f(t)u(t)]=F(s)$, $\mathscr{L}[f(t-t_0)u(t-t_0)]=F(s)e^{-st0}$
复频移	$\mathscr{L}[f(t)e^{s0t}]=F(s-s_0)$
尺度变换	$\mathscr{L}[f(at)]=\frac{1}{a}F(\frac{s}{a}),\ a>0$
时域微分特性	$\mathscr{L}[\frac{df(t)}{dt}]=sF(s)-f(0^-)$, $\mathscr{L}[\frac{d^2f(t)}{dt^2}]=s^2F(s)-sf(0^-)-sf'(0^-)$
s 域微分特性	$\mathscr{L}[(-t)f(t)]=\frac{dF(s)}{ds}$
时域积分特性	$\mathscr{L}\left[\int_{-\infty}^{t}f(\tau)d\tau\right]=\frac{F(s)}{s}+\frac{f^{-1}(0)}{s}$
s 域积分特性	$\mathscr{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right]=\int_{s}^{+\infty}F(s_1)ds_1$
时域卷积定理	$\mathscr{L}[f(t)*g(t)]=F(s)G(s)$
初值定理	$\lim\limits_{s\to+\infty}s\cdot F(s)=f(0^+)$
终值定理	$\lim\limits_{s\to 0}s\cdot F(s)=f(+\infty)$

7-补充题2 已知稳定的LTI系统的系统函数为 H(s)，求系统的单位阶跃响应 g(t) 的傅里叶变换。

解答：

错误做法：

$$G(s)=U(s)\cdot H(s)=\frac{H(s)}{s}$$

$$\mathcal{F}[G(t)]=G(s)\big|_{\sigma=0}=\frac{H(j\omega)}{j\omega}$$

正确做法：

$$g(t)=h(t)*u(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)u(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{t}h(\tau)u(t-\tau)d\tau$$

$$FT[g(t)]=FT[\int_{-\infty}^{t}h(\tau)d\tau]=\frac{H(j\omega)}{j\omega}+\pi H(0)\delta(\omega)$$

注：

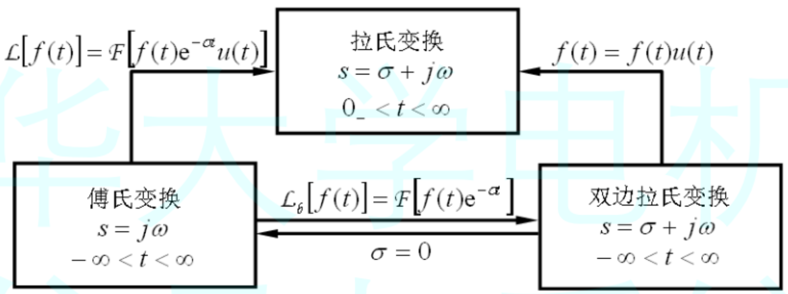
9. 时域积分特性

如果 $\mathcal{F}[f(t)]=F(\omega)$，有

$$\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{t}f(\tau)\mathrm{d}\tau\right]=\frac{F(\omega)}{j\omega}+\pi F(0)\delta(\omega)$$

由信号拉普拉斯变换求傅立叶变换

拉普拉斯变换与傅立叶变换的关系



如果 $f(t)$ 是因果信号，则其傅立叶变换的积分区间减小为 $(0_-,\infty)$，和拉普拉斯变换的积分区间相同，此时如果 $f(t)$ 的傅立叶变换存在，则可由拉普拉斯变换求得。

设 $f(t)$ 的拉普拉斯变换是 $F(s)$，如果 $F(s)$ 的收敛边界在 s 平面虚轴的左边，收敛域包含虚轴，则 $f(t)$ 的傅立叶变换 $F(\omega)$ 存在，可以直接由 $F(s)$ 做变量替换求得，有

$$F(\omega) = F(s)\big|_{s=j\omega}$$

➡ 如果 $F(s)$ 的收敛边界在 s 平面虚轴的右边，收敛域不包含虚轴，则 $f(t)$ 的傅立叶变换不存在。

➡ 如果 $F(s)$ 的收敛边界是 s 平面的虚轴，则 $f(t)$ 经典意义上的傅立叶变换不存在，但扩展意义上的傅立叶变换存在，其中包含冲激函数。设 $F(s)$ 虚轴上有 N 个单极点，则 $F(s)$ 可表示为以下形式

$$F(s)=F_l(s)+\sum_{i=1}^{N}\frac{k_i}{s-j\omega_i}$$

上式的逆变换为： $f(t)=f_l(t)+\sum_{i=1}^{N}k_i e^{\mathrm{j}\omega_i t}u(t)$

$$\mathcal{F}[f(t)]=F_l(s)\big|_{s=\mathrm{j}\omega}+\sum_{i=1}^{N}k_i\left\{\delta(\omega-\omega_i)*\left[\pi\delta(\omega)+\frac{1}{\mathrm{j}\omega}\right]\right\}$$

$$=F_l(s)\big|_{s=\mathrm{j}\omega}+\sum_{i=1}^{N}\frac{k_i}{\mathrm{j}(\omega-\omega_i)}+\sum_{i=1}^{N}k_i\pi\delta(\omega-\omega_i)$$

$$=F(s)\big|_{s=\mathrm{j}\omega}+\pi\sum_{i=1}^{N}k_i\delta(\omega-\omega_i)$$

8-补充题3 已知某系统的系统函数为 $H(s)=\dfrac{13}{(s+1)\left(s^2+4s+5\right)}$ 激励 $x(t)=\cos(2t)u(t)$ 系统的稳态响应。

求：激励 $x(t)=\cos(2t)\,u(t)$ 时系统的稳态响应.

解：$X(s)=\dfrac{s}{s^2+4}$. 则 $R(s)=X(s)H(s)=\dfrac{13s}{(s+1)(s^2+4)(s^2+4s+5)}$

整理得：

$$R(s)=\frac{-1.3}{s+1}+\frac{-0.6s+0.8}{s^2+4}+\frac{1.9s+5.5}{(s+2)^2+1}$$

$$r(t)=LT^{-1}[R(s)]=\left(-1.3e^{-t}-0.6\cos 2t+0.4\sin 2t+1.9e^{-2t}\cos t+1.7e^{-2t}\sin t\right)u(t)$$

取稳态响应，也即去掉指数衰减项.

则 $r_s(t)=-0.6\cos 2t+0.4\sin 2t$.

解法2：利用H(s)对应的频响特性（仅适用于三角函数信号的稳态响应求解）

所有根实部为负，H(s)对应系统稳定

$$H(2j)=\frac{13}{(1+2j)(1+8j)}=\frac{13}{-15+10j}$$

$$H(2j)=-0.6-0.4j=0.2\sqrt{13}e^{-j146.3°}$$

因此：

$$r(t)=-0.6\cos(2t)-0.4\cos(2t+90°)$$
$$=0.2\sqrt{13}\cos(2t-146.3°)$$

7-1 对连续周期信号抽样获得离散周期信号，说明连续信号周期 T_1 、连续信号角频率 ω_1 、离散信号周期 N_1 、离散信号角频率 θ_1 、抽样间隔 T_s 、抽样角频率 ω_s 等参数之间的关系，说明离散周期信号频谱和连续周期信号频谱的关系。

清華大學 Tsinghua University

答：连续信号 T_1 表示该周期信号的基本周期，也是其基波周期。连续信号角频率 $\omega_1=\dfrac{2\pi}{T_1}$，表示该信号的基本角频率，也是基波角频率。离散信号周期 N_1 表示进行数值抽样后得到的离散信号的周期，如果是整周期抽样，则 $N_1=\dfrac{T_1}{T_s}$，其中 T_s 表示抽样周期。离散信号角频率 $\theta_1=\dfrac{2\pi}{N_1}$，表示经过一个抽样间隔信号变化的角度。抽样间隔也就是抽样周期 T_s，抽样角频率 $\omega_s=\dfrac{2\pi}{T_s}$，表示抽样信号的角频率。

已知离散周期信号是通过对连续周期信号抽样得到，则 $x_d(n)=x_a(nT_s)$。假设对 $x_a(t)$ 进行冲激脉冲抽样，得到

$$x_{as}(t)=x_a(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_a(t)\delta(t-nT_s)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_a(nT_s)\delta(t-nT_s)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_d(n)\delta(t-nT_s)$$

$x_{as}(t)$ 其实就相当于把数值抽样得到的离散信号在各个离散点的取值变成冲激强度为原数值抽样离散点取值的冲激串。则 $x_{as}(t)$ 的连续傅里叶级数为

$$\begin{aligned}
X_{as}(k\omega_1)&=CFS[x_{as}(t)]\\
&=\frac{1}{T_1}\int_{T_1}x_{as}(t)e^{-jk\omega_1 t}dt=\frac{1}{T_1}\int_{T_1}[\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_d(n)\delta(t-nT_s)]e^{-jk\omega_1 t}dt\\
&=\frac{1}{T_1}\sum_{n=-\infty}^{\infty}[x_d(n)\int_{T_1}\delta(t-nT_s)e^{-jk\omega_1 t}dt]\\
&=\frac{1}{T_1}\sum_{n=0}^{N_1-1}[x_d(n)e^{-jk\omega_1 nT_s}]=\frac{1}{T_1}\sum_{n=0}^{N_1-1}[x_d(n)e^{-jk\frac{2\pi}{T_1/T_s}n}]\\
&=\frac{1}{T_1}\sum_{n=0}^{N_1-1}[x_d(n)e^{-jk\frac{2\pi}{N_1}n}]\ ,k=0,\pm1,\pm2,\cdots.
\end{aligned}$$

又由于离散傅里叶级数的定义，$X_d(k)=\sum_{n=0}^{N_1-1}x_d(n)e^{-jk\frac{2\pi}{N_1}n}$，所以得到连续周期信号的冲激抽样信号的连续傅里叶级数 $X_{as}(k\omega_1)$ 和连续周期信号的数值抽样的离散傅里叶级数 $X_d(k)$ 的关系为：$X_{as}(k\omega_1)=\dfrac{1}{T_1}X_d(k)$。易知，连续周期信号的冲激抽样信号的连续傅里

7-1 对连续周期信号抽样获得离散周期信号, 说明连续信号周期 T_1 、连续信号角频率 ω_1 、离散信号周期 N_1 、离散信号角频率 θ_1 、抽样间隔 T_s 、抽样角频率 ω_s 等参数之间的关系,说明离散周期信号频谱和连续周期信号频谱的关系。

叶级数 $X_{as}(k\omega_1)$ 是连续周期信号的傅里叶级数的周期延拓，延拓周期为抽样角频率

$\omega_s=\dfrac{2\pi}{T_s}$，即 $X_{as}(k\omega_1)=\dfrac{1}{T_s}\sum_{i=-\infty}^{\infty}X_a(k\omega_1-i\omega_s)$，所以 $\dfrac{1}{T_1}X_d(k)=\dfrac{1}{T_s}\sum_{i=-\infty}^{\infty}X_a(k\omega_1-i\omega_s)$

所以 $X_d(k)=\dfrac{T_1}{T_s}\sum_{i=-\infty}^{\infty}X_a(k\omega_1-i\omega_s)=N_1\sum_{i=-\infty}^{\infty}X_a(k\omega_1-i\omega_s)$，所以得到离散信号 $x_d(n)$ 的离散傅里叶级数 $X_d(k)$ 是连续信号的连续傅里叶级数 $X_a(k\omega_1)$ 的周期延拓，两者相差系数 N_1，即在一个周期内，$X_d(k)=N_1X_a(k\omega_1), X_a(k\omega_1)=\dfrac{1}{N_1}X_d(k)$。

9-补充题 1: 试确定下列周期序列的周期及DFS系数。 $(1) x_d(n)=\sin(\pi n/4)$

$(2) x_d(n)=2\sin(\pi n/4)+\cos(\pi n/3)$

(1) $N_1=\dfrac{2\pi}{\dfrac{\pi}{4}}=8$

$$x_d(n)=\frac{1}{8}\sum_{n=1}^{7}X_d(k)e^{j\frac{n\pi}{4}k}$$

$$x_d(n)=\frac{1}{2j}(e^{j\frac{n\pi}{4}}-e^{-j\frac{n\pi}{4}})$$

$x_d(0)=0,\quad x_d(1)=-j4\quad,\quad x_d(2)=0,\quad x_d(3)=0, x_d(4)=0\quad x_d(5)=0\quad x_d(6)=0\quad x_d(7)=j4$

(2) $\dfrac{2\pi}{\dfrac{\pi}{4}}=8,\quad \dfrac{2\pi}{\dfrac{\pi}{3}}=6$.最小公倍数24

$$x_d(n)=\frac{1}{24}\sum_{n=1}^{23}X_d(k)e^{j\frac{n\pi}{12}k}$$

$$x_d(n)=\frac{1}{j}(e^{j\frac{n\pi}{4}}-e^{-j\frac{n\pi}{4}})+\frac{1}{2}(e^{j\frac{n\pi}{3}}-e^{-j\frac{n\pi}{3}})$$

$x_d(3)=-j24,\quad x_d(4)=12,\quad x_d(20)=12,\quad x_d(2))=j24$其余 $\quad x_d(k)=0$

注：

对于本题的求解，除了直接利用定义计算，还可以根据**离散傅里叶反变换**:

$$x_d(n)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N-1}X_d(k)e^{j\theta kn}$$

将$x_d(n)$写成复指数形式，其复指数形式的系数和$X_d(k)$一一对应

或者根据**离散信号傅里叶级数和其对应连续周期傅里叶级数的关系**

$$X_d(k)=NX_a(k\omega_0)$$

也可以比较方便的求得

谢 谢 ！