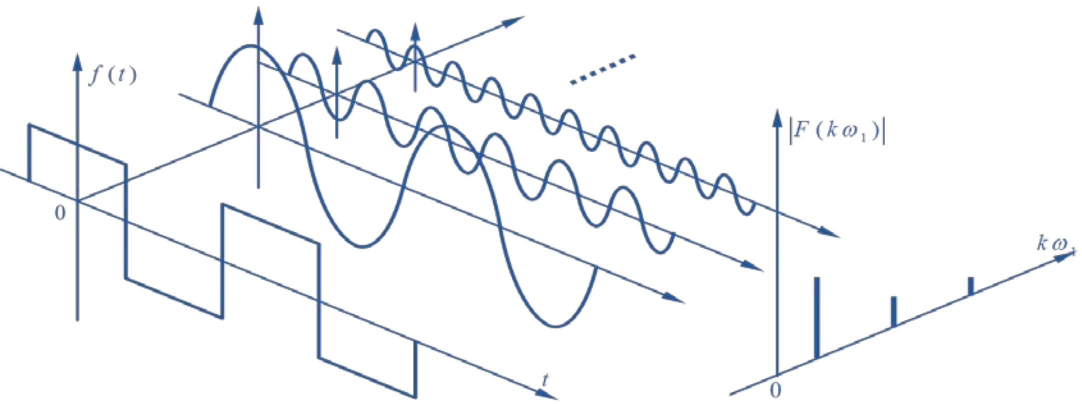
《信号与系统》复习课

陆超

清华大学电机系

2017年春季学期



课程内容

- 基础知识
  - 信号与系统的基本概念
  - 线性时不变连续时间系统的时域分析
  - 线性时不变离散时间系统的时域分析
- 连续信号频域分析
  - 连续周期信号的傅里叶级数
  - 连续信号的傅里叶变换
  - 拉普拉斯变换
- 离散信号频域分析
  - 离散周期信号的傅里叶级数
  - 离散非周期信号的离散时间傅里叶变换
  - Z变换
- 综合应用与设计
  - 离散傅里叶变换和快速傅里叶变换
  - 模拟和数字滤波器设计

重点内容！

各部分内容

基本概念

- 典型信号
- 信号运算
- 系统分类

连续和离散系统时域分析

- 常微分方程和差分方程的求解
- 卷积

连续傅里叶和拉氏变换

- 正交分解
- 周期信号的傅里叶级数
- 傅里叶变换
- 拉普拉斯变换
- 相互关系
- 典型信号变换和基本性质
- 误差分析

各部分内容

离散傅里叶和Z变换

- 正交离散复指数函数的周期性
- 离散周期信号的DFS
- 离散非周期信号的DTFT
- Z变换
- 相互关系
- 基本性质
- 误差分析

拉普拉斯变换和Z变换

- 相互关系
- 解时域方程
- 逆变换
- 系统函数与频率响应特性

DFT和FFT

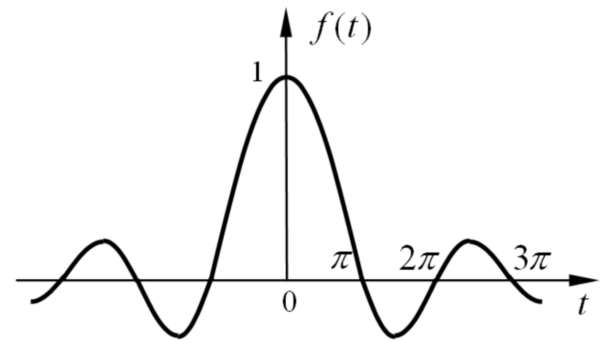
- DFT
- 圆周时移和圆周卷积
- FFT

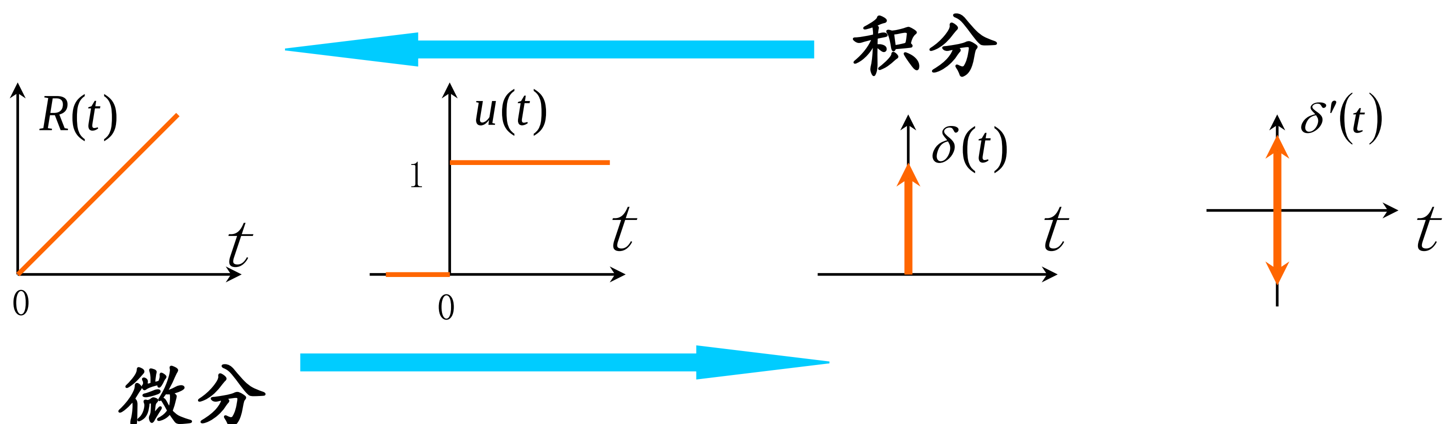
模拟和数字滤波器设计

- 模拟滤波器设计
- 数字滤波器设计

第1章 基本概念

- 典型信号
  - 抽样信号
  - 冲激信号
  - 冲激偶信号
  - 单位冲激和冲激偶信号的性质
  - 三角与复指数信号



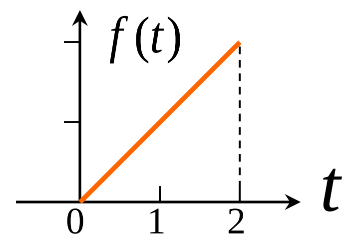


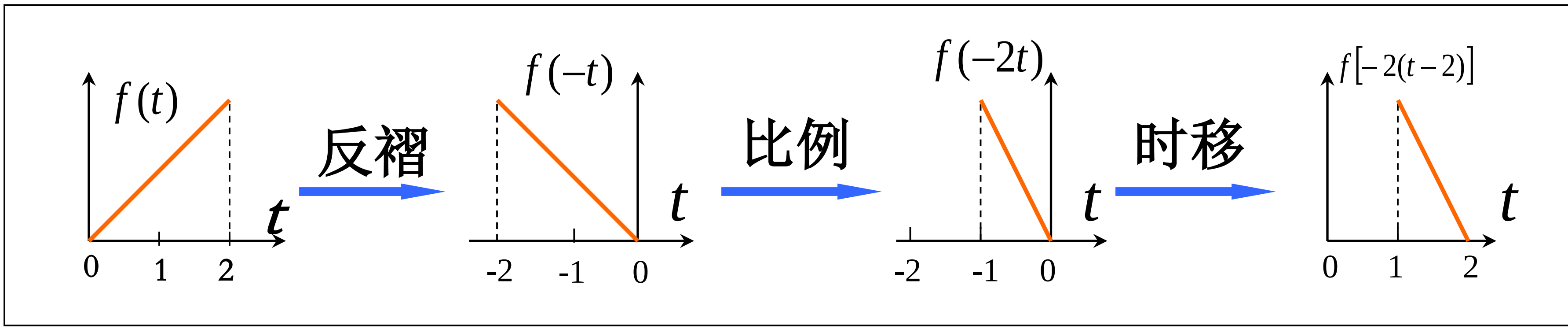
- # 信号运算

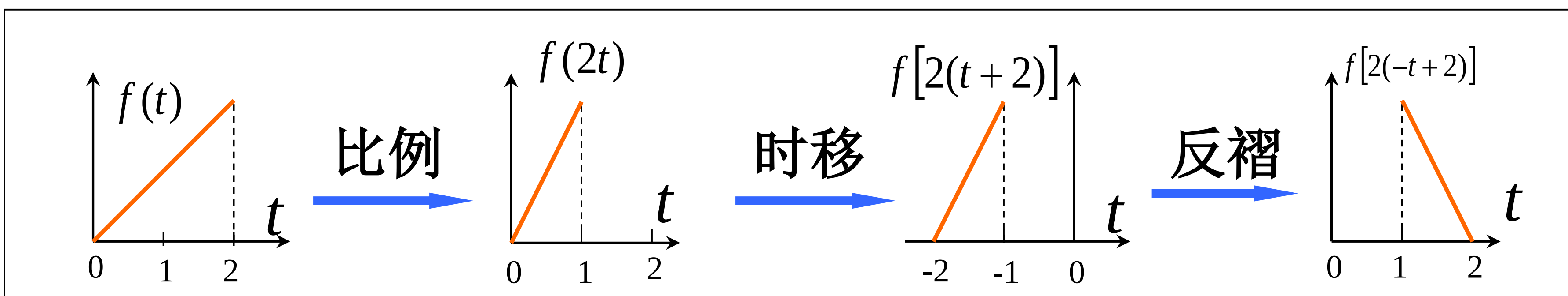
一切变换都是相对于t而言的！
最好按先翻缩再平移的顺序进行！

[例]　试画出$f(4-2t)$的波形

[解]　可有多种运算次序



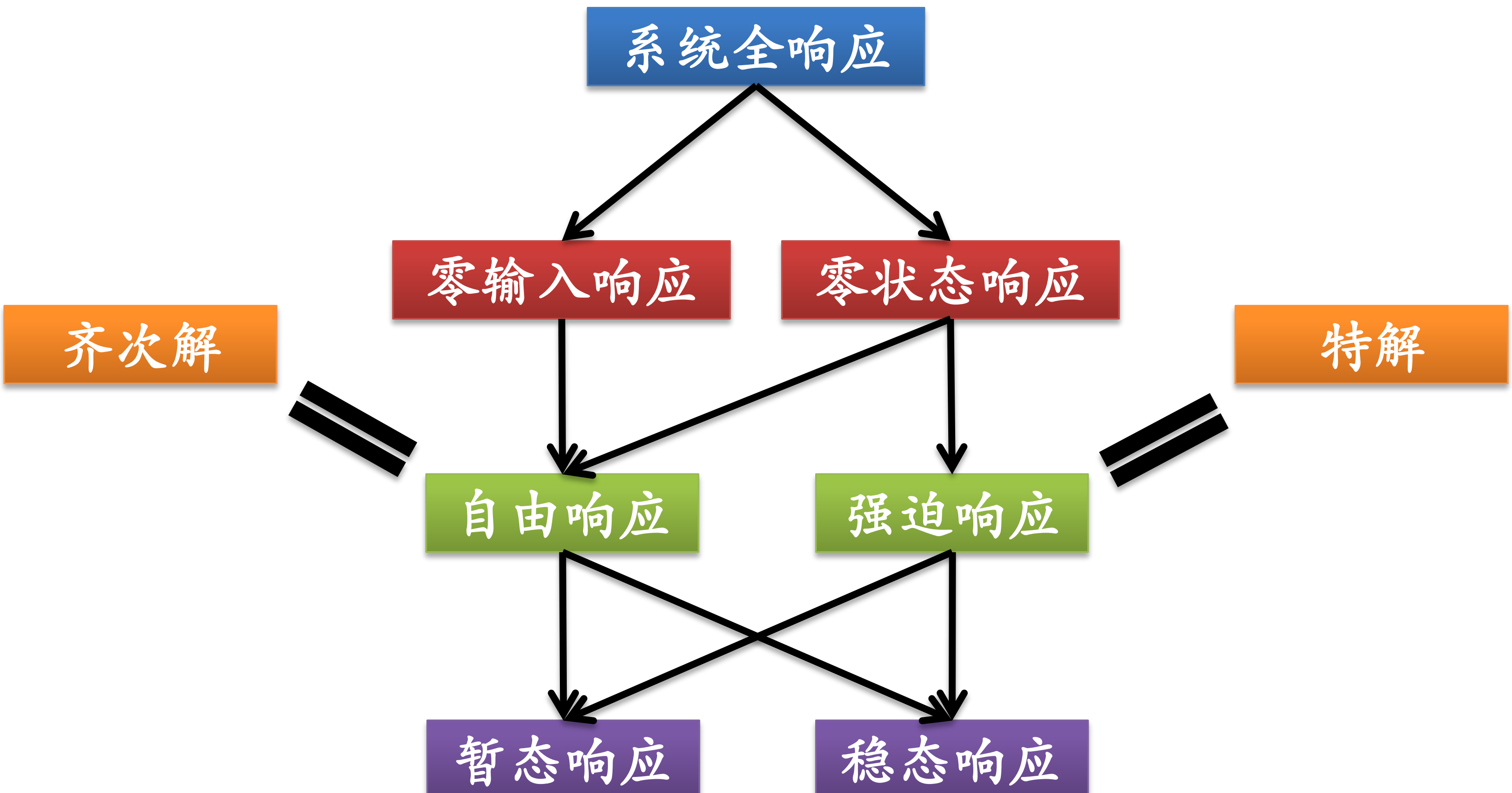




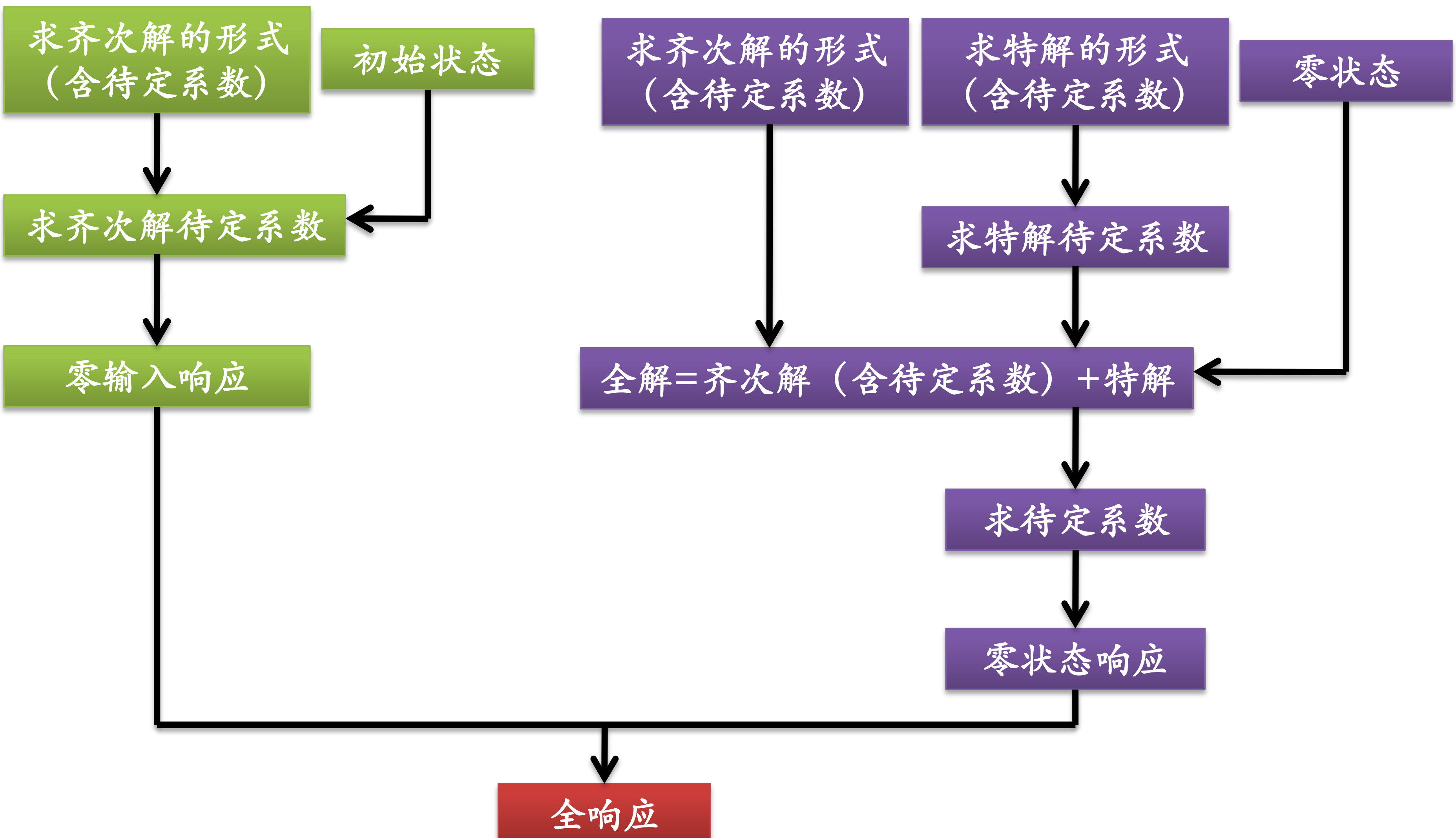
- 系统分类
  - 线性系统和非线性系统
    - 均匀性和叠加性
    - 扩展意义上的线性系统
  - 时不变系统和时变系统
  - 因果系统和非因果系统

第2-3章 连续和离散系统时域分析

- 常微分方程和差分方程的求解



- 常微分方程和差分方程的求解



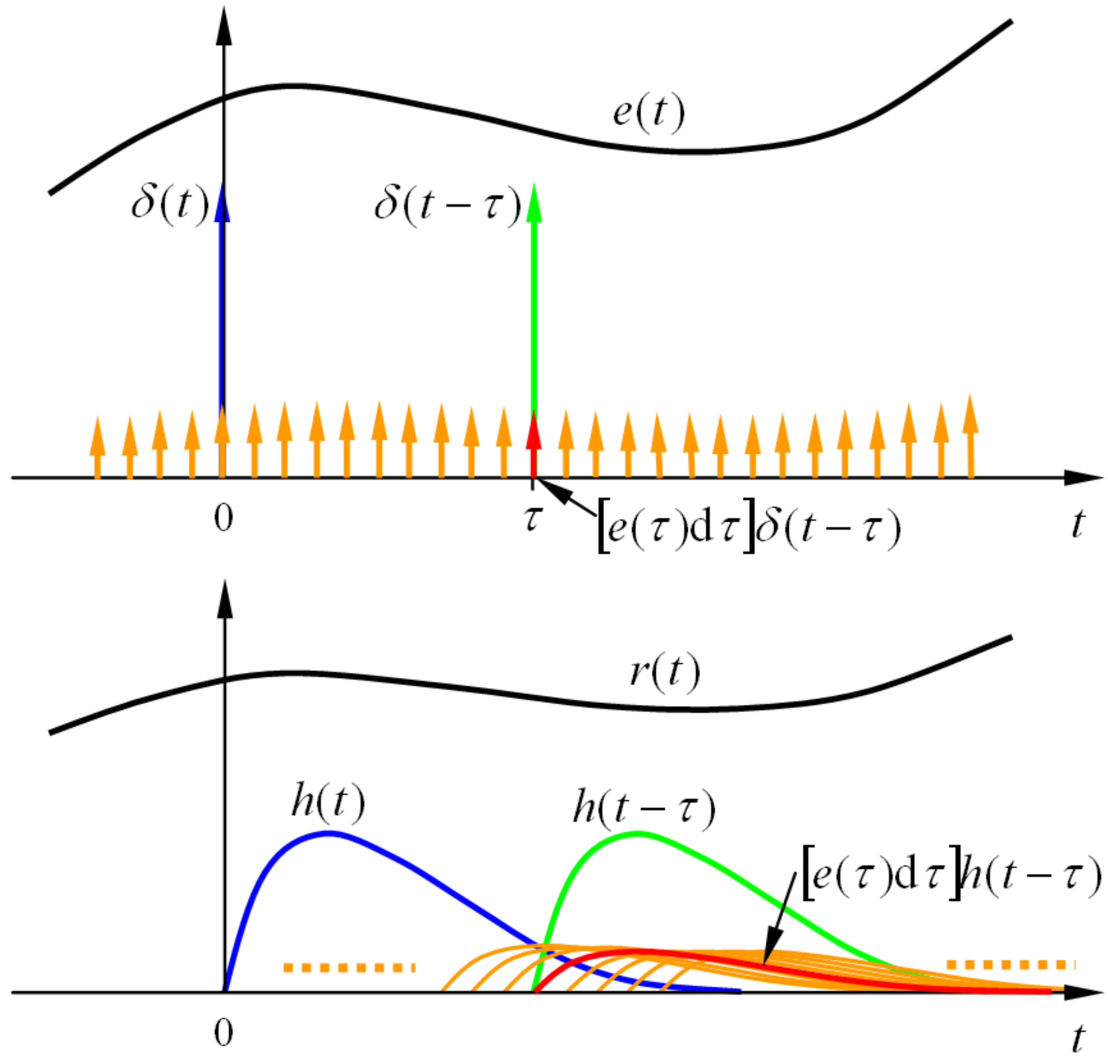
- 卷积
  - 脉冲分量分解
  - 图解法、列表法

$$r(t) = e(t) * h(t)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e(\tau) h(t-\tau) \mathrm{d}\tau$$

$$r_d(n) = e_d(n) * h_d(n)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} e_d(k) h_d(n-k)$$



第4-6章 连续傅里叶和拉氏变换

- 正交分解和完备正交向量集
  - 正交分解与内积

$$c=\frac{\int_{t_1}^{t_2}\varphi_i(t)\varphi_j(t)\mathrm{d}t}{\int_{t_1}^{t_2}\varphi_j^{\ 2}(t)\mathrm{d}t}=\frac{\langle\varphi_i(t),\varphi_j(t)\rangle}{\langle\varphi_j(t),\varphi_j(t)\rangle}$$

  - 三角函数集

$$1,\cos\omega_1 t,\sin\omega_1 t,\cos 2\omega_1 t,\sin 2\omega_1 t,\ldots,\cos k\omega_1 t,\sin k\omega_1 t,\ldots$$

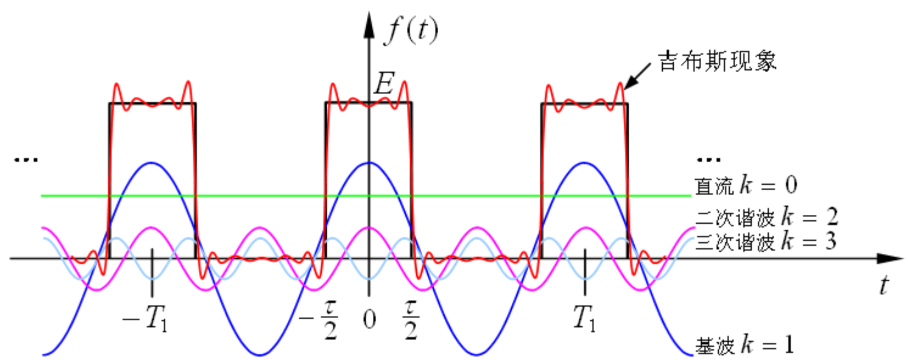
  - 复指数函数集

$$\ldots,\mathrm{e}^{-jk\omega_1 t},\ldots,\mathrm{e}^{-j2\omega_1 t},\mathrm{e}^{-j\omega_1 t},1,\mathrm{e}^{j\omega_1 t},\mathrm{e}^{j2\omega_1 t},\ldots,\mathrm{e}^{jk\omega_1 t},\ldots$$

- # 周期信号的傅里叶级数
  - 三角函数形式和复指数形式

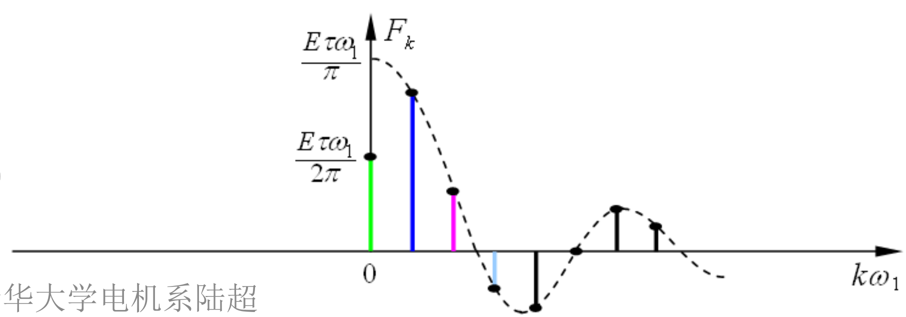
$$F(k\omega_1)=\frac{1}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t)\mathrm{e}^{-jk\omega_1 t}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t)\cos k\omega_1 t\mathrm{d}t-j\frac{1}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t)\sin k\omega_1 t\mathrm{d}t$$



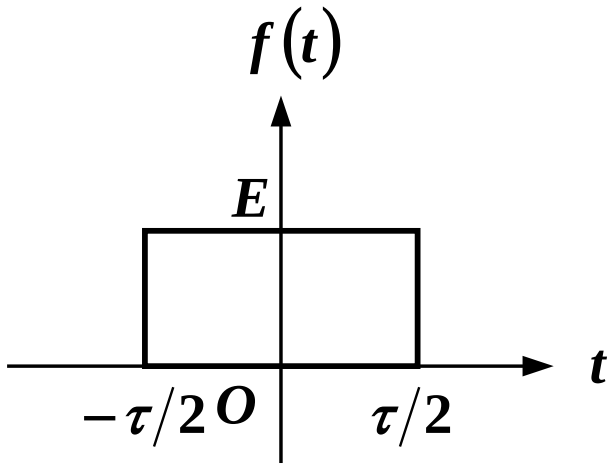
$$|F(k\omega_1)|=\frac{E\tau\omega_1}{2\pi}\left|\mathrm{Sa}\left(\frac{k\omega_1\tau}{2}\right)\right|$$

$$\varphi(k\omega_1)=\begin{cases}0 & F(k\omega_1)>0\\ \pm\pi & F(k\omega_1)<0\end{cases}$$

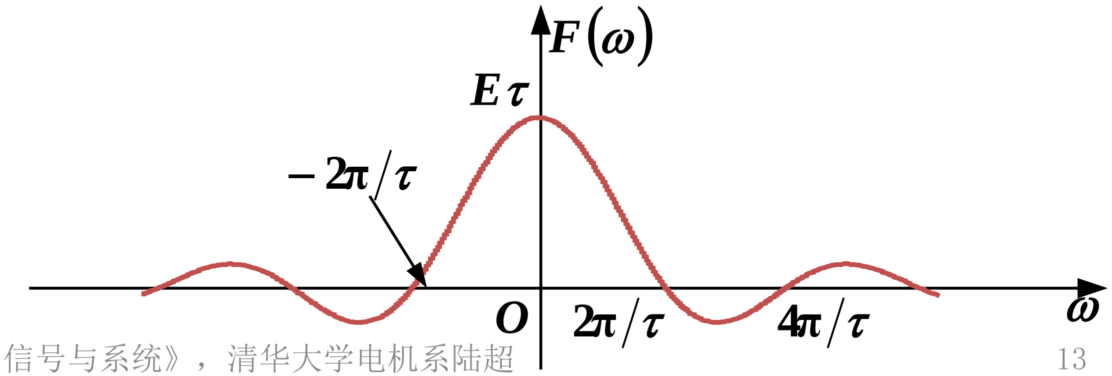


- 傅里叶变换
  - 周期信号到非周期信号：幅值谱到密度谱

$$F(\omega)=\lim_{t_1\to-\infty,t_2\to\infty}\frac{2\pi F(k\omega_1)}{\omega_1}=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t$$



$$F(\omega)=E\tau\,\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$



- 傅里叶级数
- 傅里叶变换

$$F(k\omega_1)=\frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2} f(t)\mathrm{e}^{-jk\omega_1 t}\mathrm{d}t \qquad F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-j\omega t}\mathrm{d}t$$

$$f(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} F(k\omega_1)\mathrm{e}^{jk\omega_1 t} \qquad f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\mathrm{e}^{j\omega t}\mathrm{d}\omega$$

$$f(t)=c_0+\sum_{k=1}^{\infty} c_k\cos(k\omega_1 t+\varphi_k) \qquad f(t)=\int_0^{\infty}\frac{|F(\omega)|}{\pi}\mathrm{d}\omega\cos[\omega t+\phi(\omega)]$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty} F(k\omega_1)\mathrm{e}^{jk\omega_1 t} \qquad =\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F(\omega)}{2\pi}\mathrm{d}\omega\cdot\mathrm{e}^{j\omega t}$$

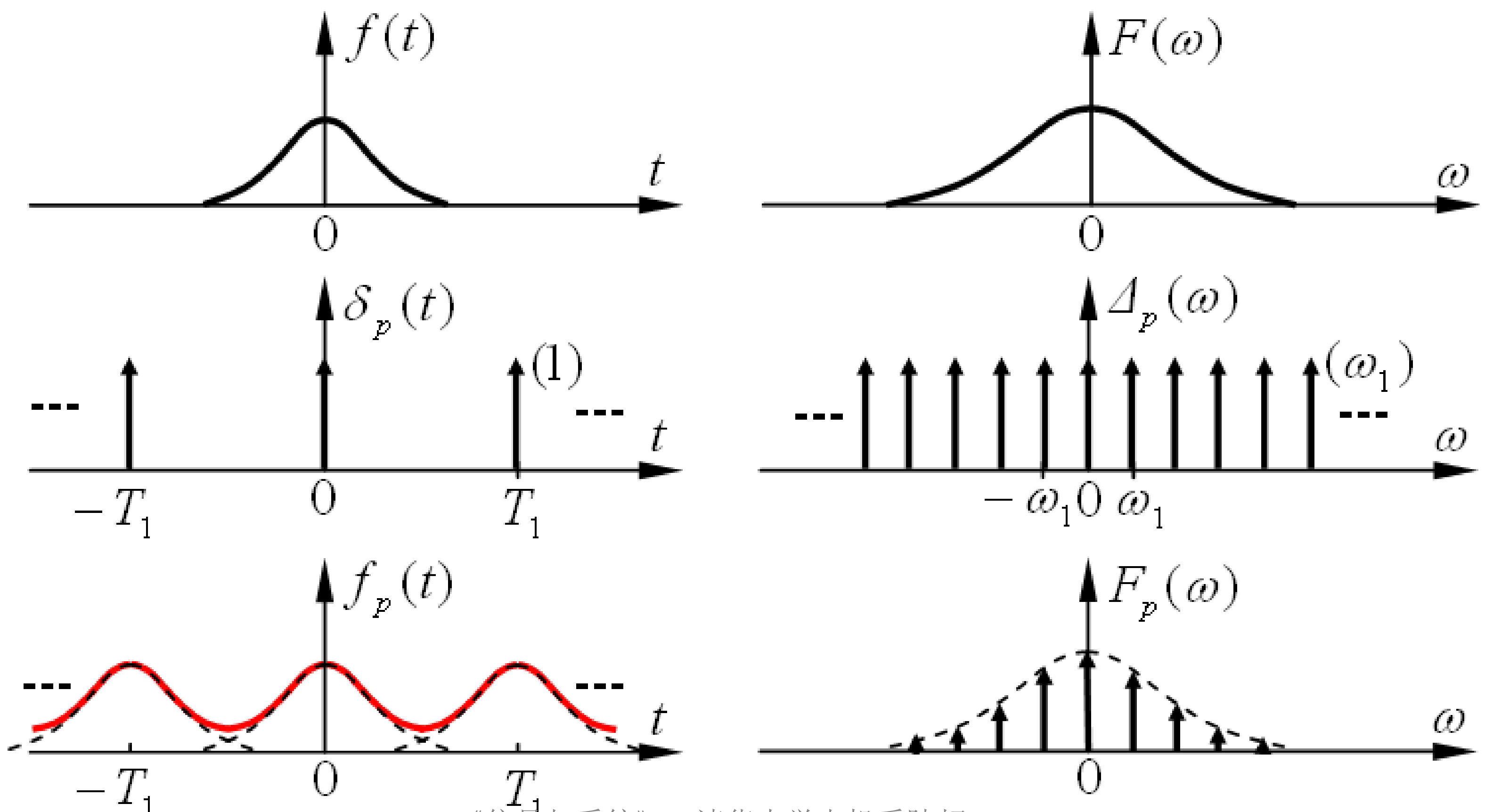
时域周期，频域离散

时域非周期，频域连续

- 延拓周期信号的傅里叶变换

$$F_p(\omega) = F(\omega)\Delta_p(\omega)$$

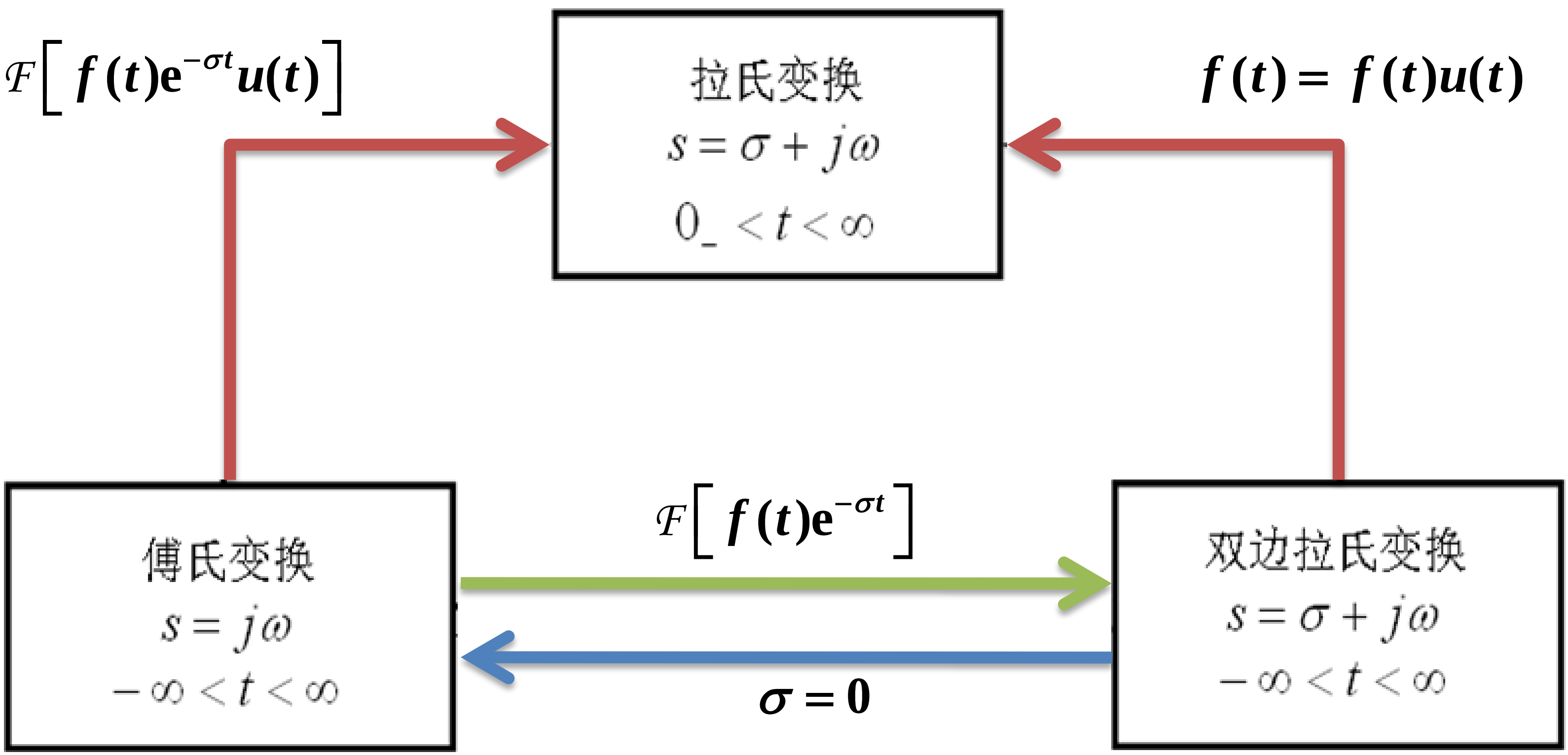
$$= F(\omega)\omega_1 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_1) = \omega_1 \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(\omega)\Big|_{\omega=k\omega_1} \delta(\omega - k\omega_1)$$



- **拉普拉斯变换**

$$\begin{cases} F(s)=L\left[f(t)\right]=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t \\ f(t)=L^{-1}\left[f(t)\right]=\dfrac{1}{2\pi\mathrm{j}}\int_{\sigma-\mathrm{j}\infty}^{\sigma+\mathrm{j}\infty} F(s)\mathrm{e}^{st}\mathrm{d}s \end{cases}$$

$$F(s)=\mathcal{L}\left[f(t)\right]=\int_{0_-}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$



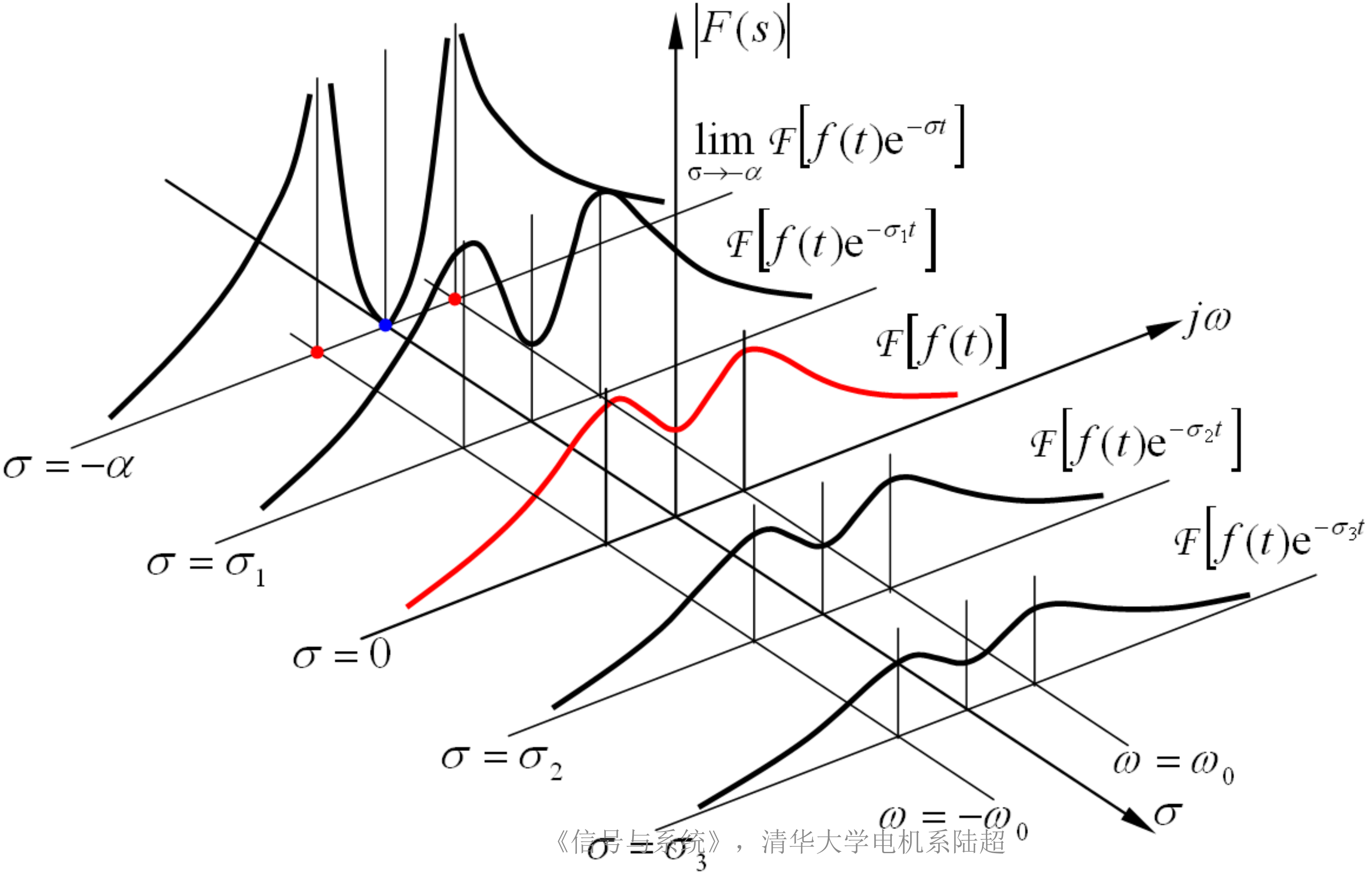
$$F(\omega)=\mathcal{F}\left[f(t)\right]=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-j\omega t}\mathrm{d}t$$

$$F_b(s)=\mathcal{L}_b\left[f(t)\right]=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

$F(s)$的模$|F(s)|$在平面上的变化

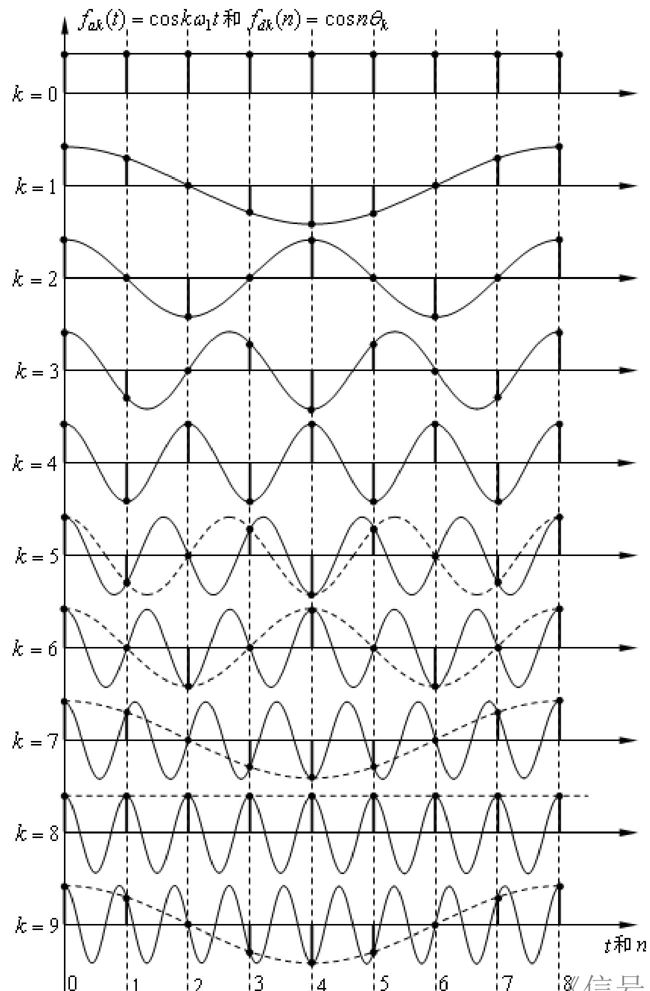
$$F(\omega)=\frac{\alpha+\mathrm{j}\omega}{(\alpha+\mathrm{j}\omega)^2+\omega_0^2}$$

$$F(s)=\frac{(\alpha+\sigma)+\mathrm{j}\omega}{[(\alpha+\sigma)+\mathrm{j}\omega]^2+\omega_0^2}$$



第7-9章 离散傅里叶和Z变换

- 正交离散复指数函数的周期性



$$e^{jn(2m\pi\pm\theta)}=e^{\pm jn\theta}$$

- 完备正交离散函数集：在离散区间$n_0 \leqslant n \leqslant n_0+N-1$内

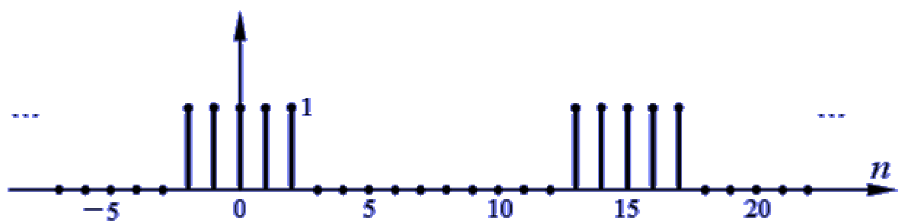
$$\left\langle e^{j\theta_1 k_1 n}, e^{j\theta_1 k_2 n}\right\rangle=\sum_{n=n_0}^{n_0+N_1-1} e^{j\theta_1(k_1-k_2)n}$$

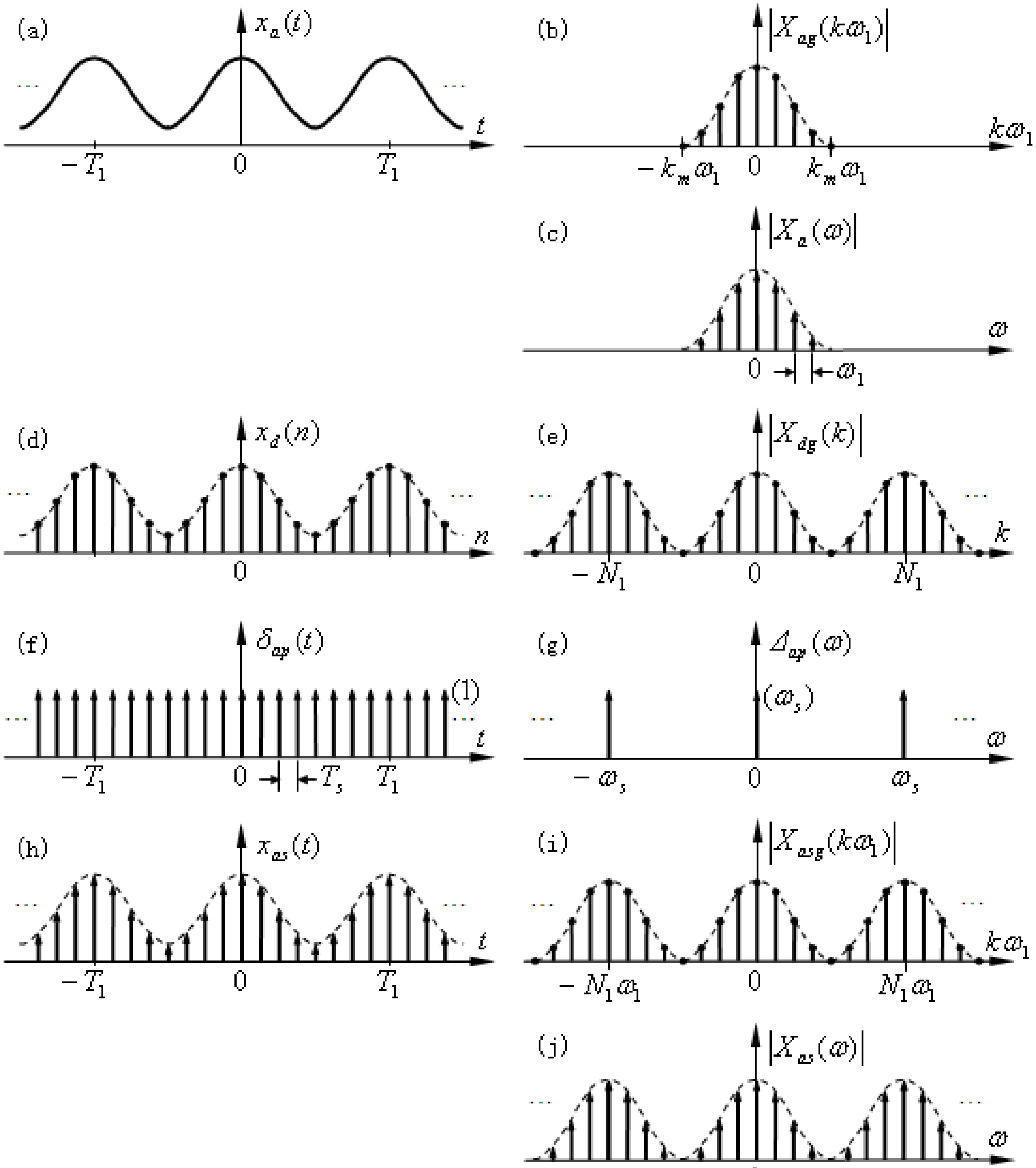
$$=\begin{cases} N_1 & k_1-k_2=mN_1 \\ 0 & k_1-k_2\neq mN_1 \end{cases}$$

- 离散周期信号的DFS

$$X_d(k) = \mathrm{DFS}\left[x_d(n)\right] = \sum_{n=0}^{N_1-1} x_d(n)\mathrm{e}^{-j\theta_1 kn}$$

$$x_d(n) = \mathrm{IDFS}\left[X_d(k)\right] = \frac{1}{N_1}\sum_{k=0}^{N_1-1} X_d(k)\mathrm{e}^{j\theta_1 kn}$$





连续周期信号的傅里叶级数

连续周期信号的傅里叶变换

离散周期信号的傅里叶级数

冲激脉冲序列的傅里叶变换

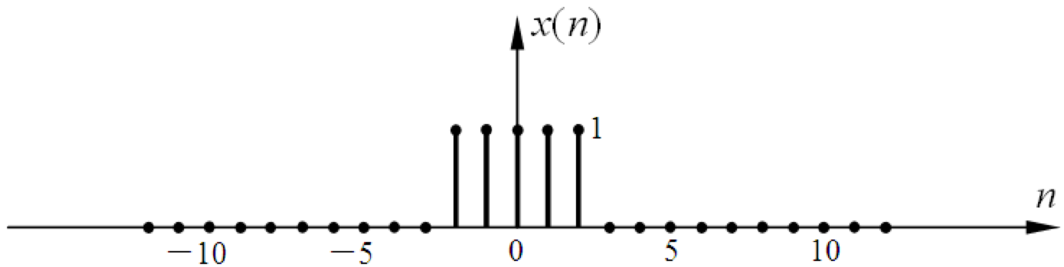
冲激脉冲抽样信号的傅里叶级数

冲激脉冲抽样信号的傅里叶变换

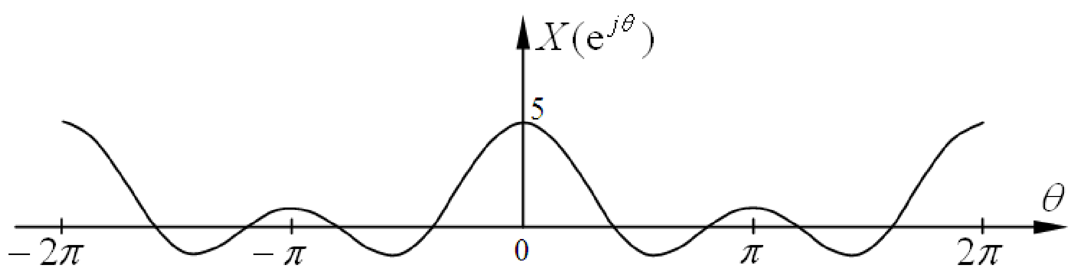
- 离散非周期信号的DTFT

$$X_d(\mathrm{e}^{j\theta}) = \mathrm{DTFT}\left[x_d(n)\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_d(n)\mathrm{e}^{-j\theta n}$$

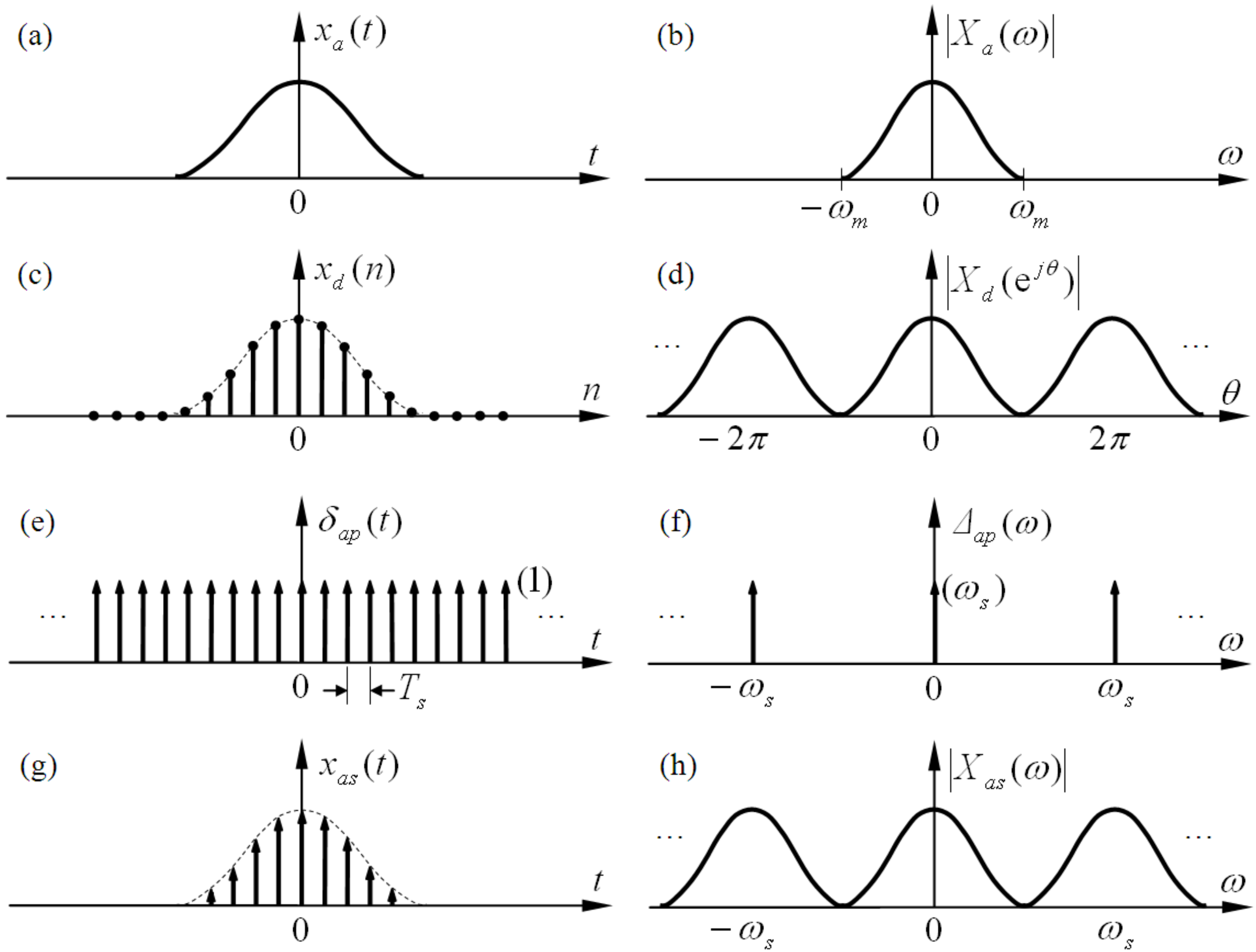
$$x_d(n) = \mathrm{IDTFT}\left[X_d(k)\right] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X_d(\mathrm{e}^{j\theta})\mathrm{e}^{j\theta n}\mathrm{d}\theta$$



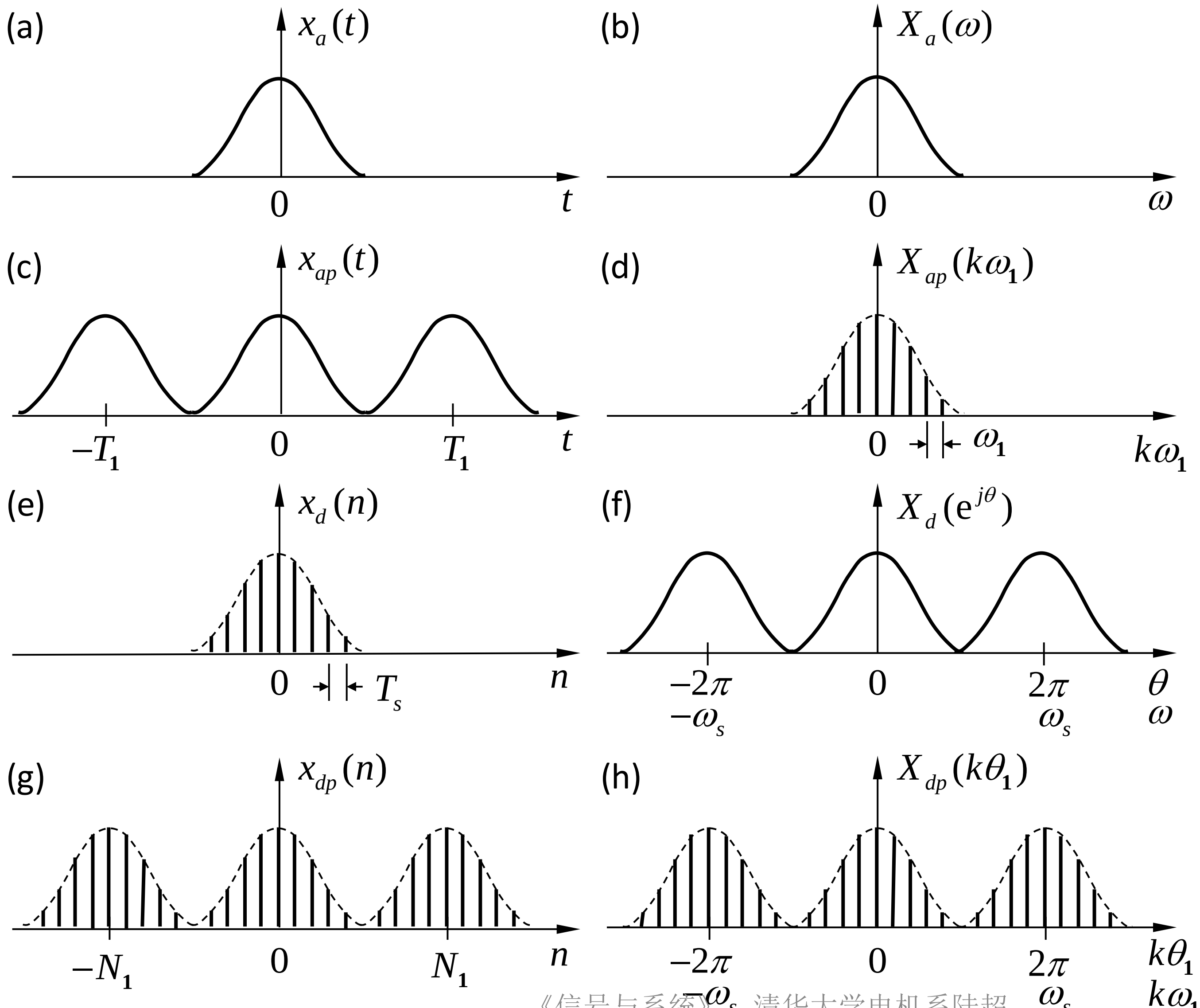
$$X_d(\mathrm{e}^{j\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_d(n)\mathrm{e}^{-j\theta n} = \sum_{n=-2}^{2} \mathrm{e}^{-j\theta n} = 1 + 2\cos\theta + 2\cos 2\theta$$



- **DTFT和连续非周期信号傅里叶变换的关系**



四种形式信号傅立叶分析的比较



时域离散导致频域周期

时域周期导致频域离散

- Z变换

$$X_{db}(\mathrm{e}^{j\theta}) = \mathrm{DTFT}\left[x_d(n)r^{-n}\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_d(n)r^{-n}\mathrm{e}^{-j\theta n}$$

$$x_d(n)r^{-n} = \mathrm{IDTFT}\left[X_{db}(\mathrm{e}^{j\theta})\right] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X_{db}(\mathrm{e}^{j\theta})\mathrm{e}^{j\theta n}\mathrm{d}\theta$$

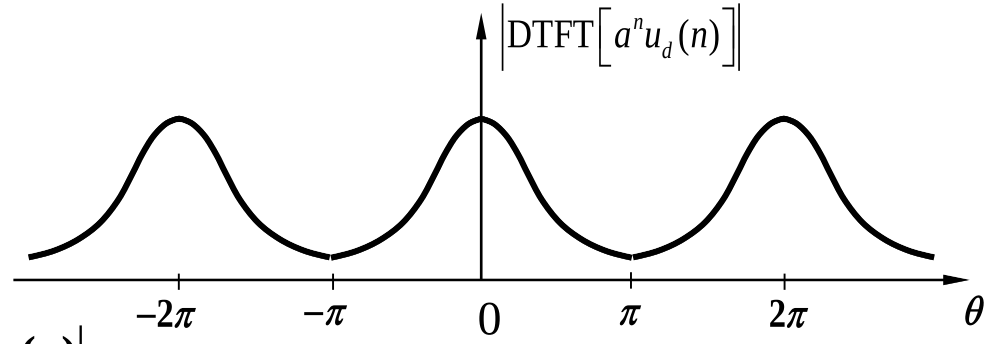
DTFT		Z变换
$z = \mathrm{e}^{j\theta}$	$\mathrm{DTFT}\left[x_d(n)r^{-n}\right] = \mathcal{Z}\left[x_d(n)\right]$ →	$z = r\mathrm{e}^{j\theta}$
$-\infty < n < \infty$	← $\mathcal{Z}\left[x_d(n)\right]_{r=1} = \mathrm{DTFT}\left[x_d(n)\right]$	$-\infty < n < \infty$

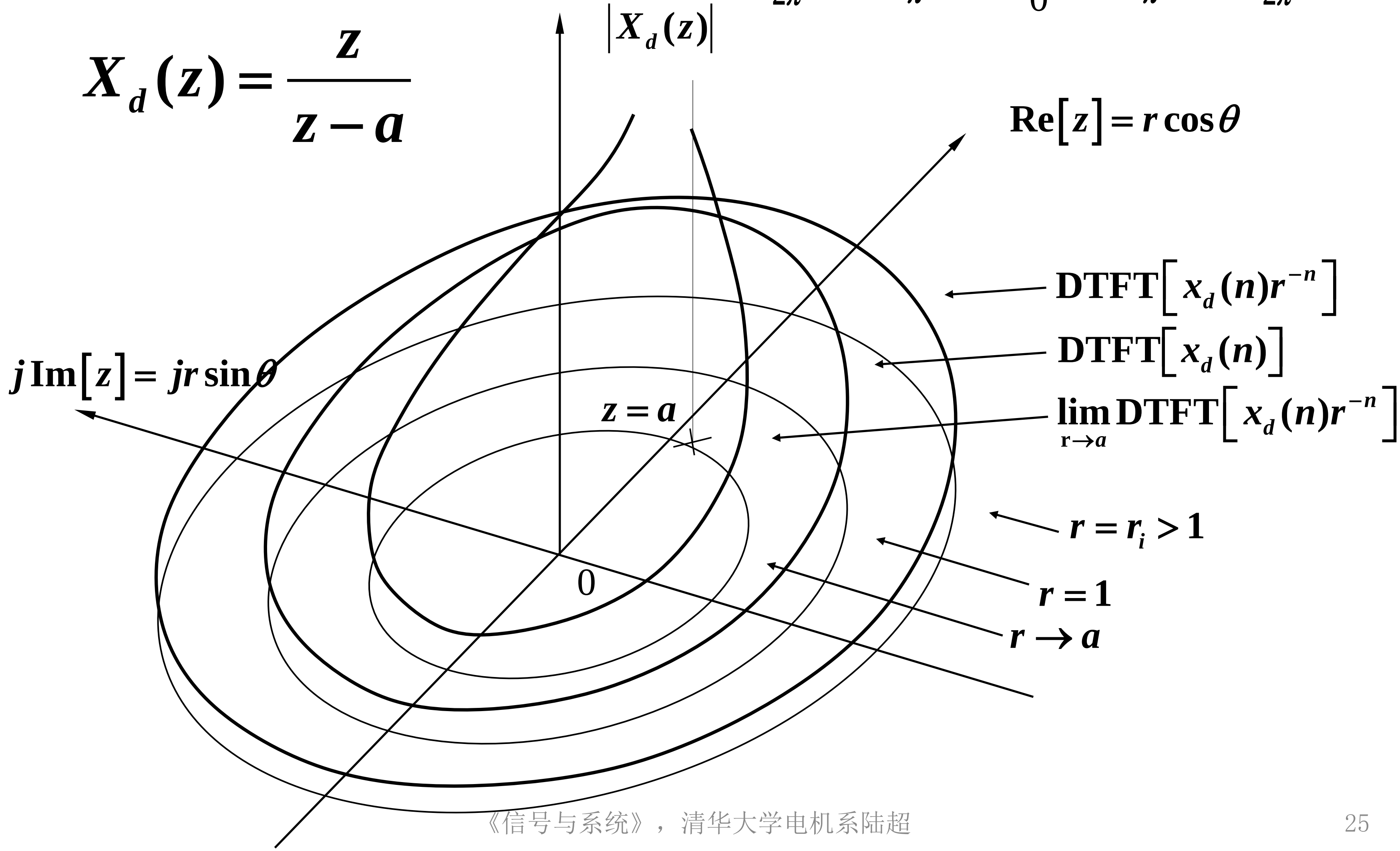
- Z变换的收敛域

- Z变换和DTFT

$$x_d(n) = a^n u_d(n)$$

$$X_d(z) = \frac{z}{z-a}$$





- # 典型信号变换和基本性质

连续傅里叶变换
- 对称特性
- 时域微分特性
- 频域微分特性
- 时域积分特性

拉普拉斯变换
- 时域微分特性
- 频域微分特性
- 时域积分特性
- 初值定理
- 终值定理

DTFT
- 线性加权特性

Z变换
- 线性加权特性
- 指数加权特性
- 初值定理
- 终值定理

相同部分
- 线性特性
- 尺度特性
- 奇偶虚实特性
- 时移特性
- 频移特性
- 时域卷积特性
- 频域卷积特性

拉普拉斯变换和Z变换

利用前面关系计算比较复杂，对于典型形式的连续信号，可采用变量替换的方法。

有连续因果信号：$x_a(t) = \sum_{i=1}^{M} A_i e^{p_i t} u_a(t)$

其拉普拉斯变换：$X_a(s) = \mathcal{L}[x_a(t)] = \sum_{i=1}^{M} \frac{A_i}{s - p_i}$

以T_s 间隔对 $x_a(t)$抽样：

$$x_d(n) = x_a(nT_s)$$

$$= \sum_{i=1}^{M} A_i e^{p_i n T_s} u_a(nT_s)$$

$$= \sum_{i=1}^{M} A_i (e^{p_i T_s})^n u_d(n)$$

$$\xrightarrow{\mathcal{Z}}$$

$$X_d(z) = \mathcal{Z}[x_d(n)]$$

$$= \sum_{i=1}^{M} \frac{A_i z}{z - e^{p_i T_s}}$$

s平面和z平面的映射关系

s 平面：$s=\sigma+j\omega$ 映射关系：$s=(\ln z)/T_s$,$\sigma=(\ln r)/T_s$ $\omega=\theta/T_s$	z 平面：$z=re^{j\theta}\,(r>\mathbf{0})$ 映射关系：$z=e^{sT_s}$, $r=e^{\sigma T_s}$ ，$\theta=\omega T_s$
虚轴，$\sigma=\mathbf{0}$, $s=j\omega$	单位圆，$r=\mathbf{1}$, $z=e^{j\theta}$
左半平面，$\sigma<\mathbf{0}$	单位圆内，$r<\mathbf{1}$
右半平面，$\sigma>\mathbf{0}$	单位圆外，$r>\mathbf{1}$
平行于虚轴的直线，$\sigma=\sigma_{\mathbf{0}}$	圆，$r=r_{\mathbf{0}}$
实轴，$\omega=\mathbf{0}$ ，$s=\sigma$	正实轴，$\theta=\mathbf{0}$, $z=r$
平行于实轴的直线，$\omega=\omega_{\mathbf{0}}$	从原点出发的直线，$\theta=\theta_{\mathbf{0}}$ 。 此为非单值映射，s平面上的不同直线 $\omega=\omega_{\mathbf{0}}\pm\mathbf{2}m\pi/T_s$ 均映射为z平面上的同一直线 $\theta=\theta_{\mathbf{0}}\pm\mathbf{2}m\pi=\theta_{\mathbf{0}}$

- 逆变换
  - 部分分式分解
  - 幂级数展开（Z变换）
- 解时域方程
  - 可分解为零状态和零输入响应
- 单位冲激或抽样响应与系统函数
- 零极点分布
- 频率响应特性

第10章 DFT和FFT

- DFT

$$X_d(k) = \mathrm{DFT}\left[x_d(n)\right] = \sum_{n=0}^{N-1} x_d(n)\mathrm{e}^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$W_N = \mathrm{e}^{-j\frac{2\pi}{N}}$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} x_d(n) W_N^{kn} \qquad k = 0,1,2,\cdots N-1$$

$$x_d(n) = \mathrm{IDFT}\left[X_d(k)\right] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_d(k)\mathrm{e}^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_d(k) W_N^{-kn} \quad k = 0,1,2,\cdots N-1$$

- 圆周时移
  - 周期延拓
  - 线时移
  - 取主值

$$\mathrm{DFT}\left[x_d((n-m))_N G_{dN}(n)\right]=W_N^{mk}X_d(k)$$

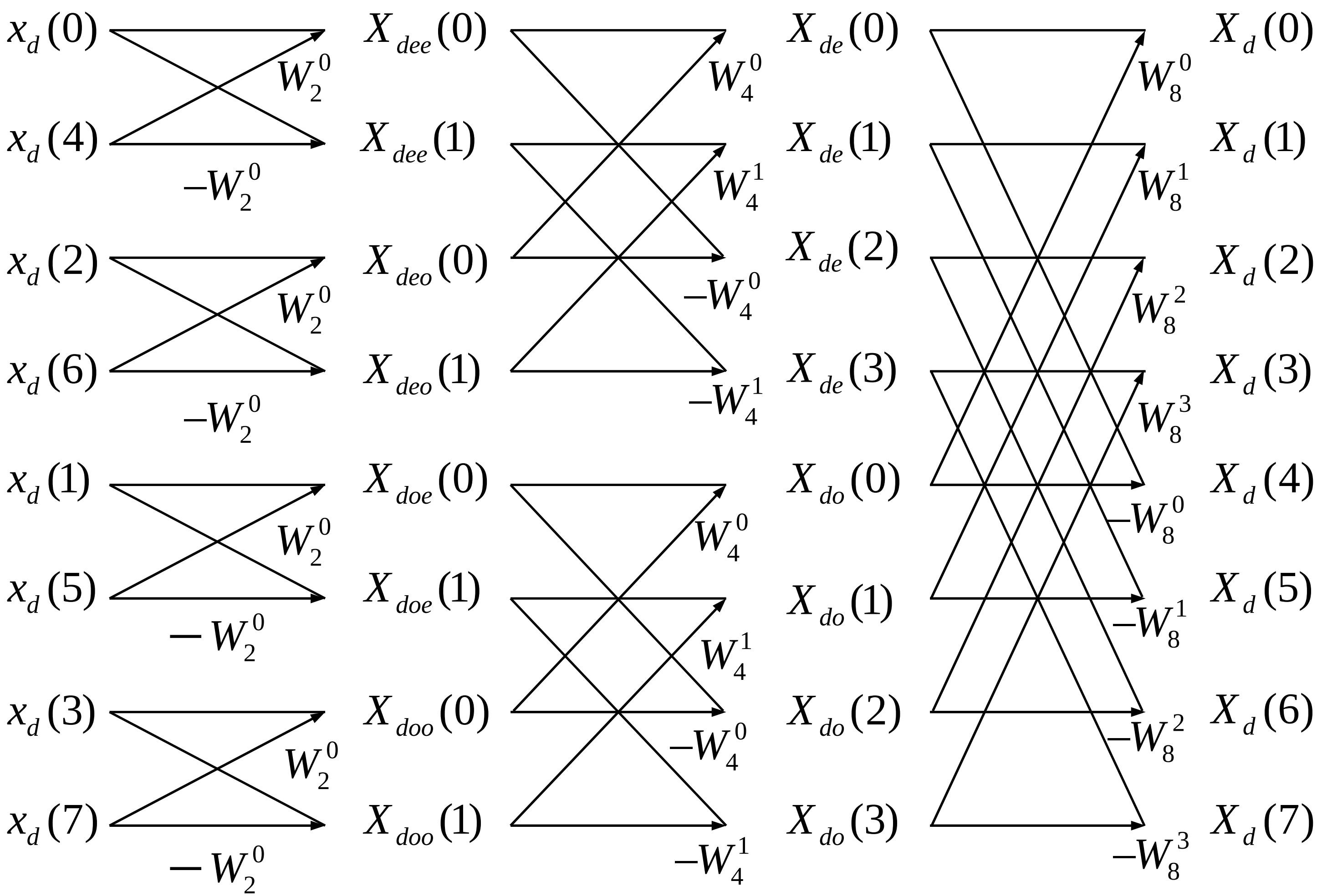
- 圆周卷积
  - 其中一个序列反褶
  - 把反褶后的序列周期延拓
  - 把反褶和延拓后的序列平移
  - 两序列相乘、求和
  - 取不同移位值，相乘、求和

$$x_d(n)\otimes h_d(n)=\sum_{m=0}^{N-1}x_d(m)h_d((n-m))_N G_{dN}(n)$$

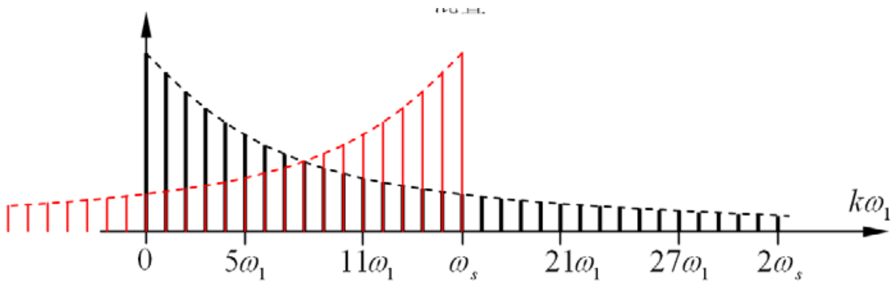
$$=\sum_{m=0}^{N-1}h_d(m)x_d((n-m))_N G_{dN}(n)$$

- 圆周卷积和线卷积

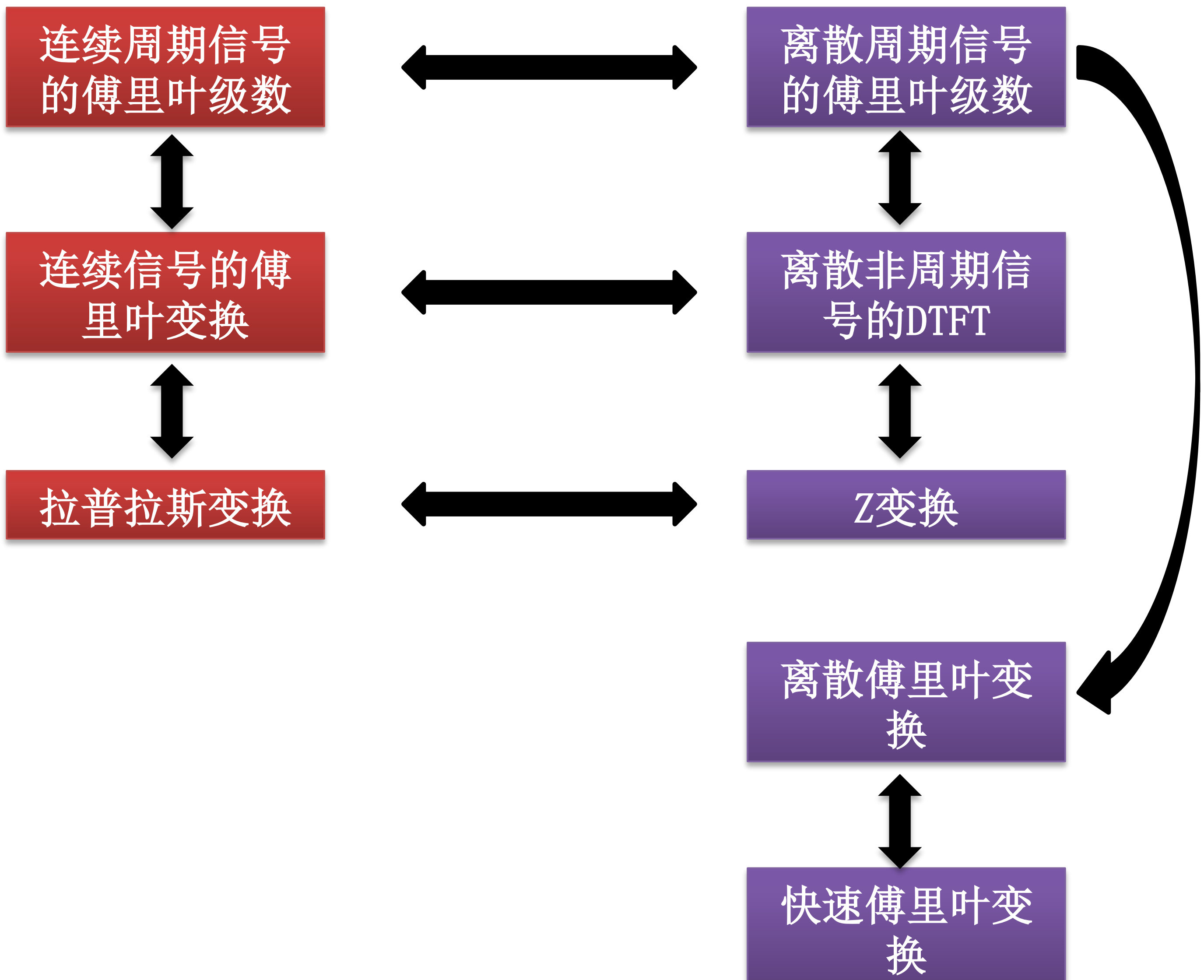
• DFT：利用了旋转因子的周期性和对称性



- 误差分析
  - 混叠误差：
    - 不满足抽样定理
  - 泄漏误差：
    - 非完整周期采样
    - 信号截断（加窗）

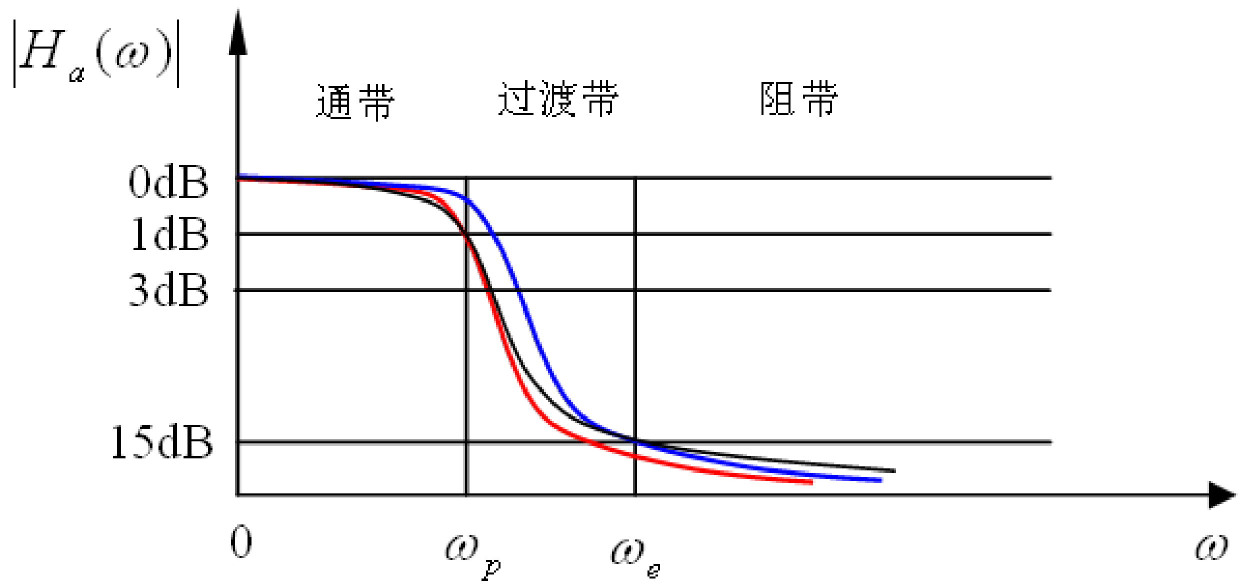


- 本课程所涉及各种频域变换的关系



第11章 模拟和数字滤波器设计

- 模拟滤波器设计
  - 巴特沃兹滤波器的设计：由容差指标确定其阶数和中心频率



- 数字滤波器：
  - 无限冲激响应滤波器IIR
  - 有限冲激响应滤波器FIR

- 模拟数字滤波器变换方法
  - 冲激响应不变法
  - 双线性变换

非常感谢同学们一个学期来的支持和配合！

预祝大家考试顺利！