A

清华大学试题专用纸

考试课程：概率论与数理统计　考试时间：2021 年 6 月 16 日 8：00—10：00

姓名____________学号 **20**__________班级________.

一 填空题（每空 3 分，共 30 分；答案均写在试卷上，注意标清题号）

1. 18 世纪时，提出了一个关于投针的著名概率问题的学者是____________________。

2. 利用快速排序(quicksort)算法对序列“3,2,1”进行排序,则平均比较次数为____________。

3. 设随机变量 $X \sim Ge\left(\frac{1}{3}\right)$，则 $E\left(\left(\frac{4}{3}\right)^X\right) =$____________________。

4, 设随机变量 $X \sim Exp(1)$, $Y \sim b\left(2, \frac{1}{3}\right)$，$X, Y$ 相互独立,则 $P(XY \le 2\ln 2) =$__________。

5. 若 Y_1 服从参数为 $(8, 1/2)$ 的负二项分布，Y_2 服从参数为 $(6, 1/2)$ 的负二项分布，且 Y_1 与 Y_2 的相关系数为 $-1/\sqrt{3}$ ，则 $Var(Y_1) =$____________, $Var(Y_1 + Y_2) =$________________。

6. 从 $1, 2$ 两个数中等可能地随机取 1 个数记为 X ，再从 $1, \cdots, X$ 中等可能地随机取 1 个数记为 Y 。则条件期望 $E(X|Y)$ 为______________，条件方差 $Var(Y|X)$ 为______________。

7. 设总体 $X \sim N(\mu, 0.5^2)$ ，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为简单随机样本，要使 μ 的置信系数 96%的双侧置信区间长度不超过0.4,则样本容量 n 至少要达到________________________。

8. 对参数 p 进行假设检验，$H_0: 0 < p \le \frac{1}{2}$，$H_1: \frac{1}{2} < p \le 1$ ，检验统计量 $X \sim b(4, p)$ ，要实现真实水平为 0.05 的检验，拒绝域应为____________________________。

二. (10 分) 两台车床加工同样的零件，第一台出现不合格品的概率是 0.1，第二台出现不合格品的概率是 0.16，加工出来的零件放在一起，并且已知第一台车床加工的零件数是第二台加工的零件数的 2 倍。

（1）求任取一个零件是合格品的概率；（2）如果取出的零件是合格品，求它是由第二台车床加工的概率。

三. (12 分) 已知随机变量 $X \sim U(0, 2)$,

（1）计算 $Var(X)$ ；　（2）计算 $E\left(\min\left\{X^2, 1\right\}\right)$ ；（3）计算 $Var\left(\min\left\{X^2, 1\right\}\right)$

四. (12 分) 设 X 、Y 为相互独立的随机变量，均服从 $Exp(1)$, $Z = 2X + Y$ ，$W = \frac{Y}{2X + Y}$,

(1) 求联合密度 $p_{Z,W}(z, w)$ ；(2) 求边缘密度 $p_W(w)$ ；(3)求 X 、Z 的协方差。

五．(12 分) 已知 $X_1,X_2,\ldots,X_n$ 为来自于总体 X 的简单随机样本，总体 X 的概率分布函数为

$$F(x)=\begin{cases} e^{\frac{-x^2}{\theta}}, & x\le 0 \\ 1, & x>0 \end{cases}$$ ，其中 $\theta>0$ 为未知参数，

（1）求参数 θ 的矩估计量；　（2）求参数 θ 的最大似然估计量.

六.(8 分) $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 $X\sim N\left(\mu_1,\sigma^2\right)$ 的样本，$Y_1,Y_2,\cdots,Y_m$ 是来自总体 $Y\sim N\left(\mu_2,c\cdot\sigma^2\right)$ 的样本，σ^2 未知。$n=6,m=6,c=0.5$，$\bar{x}=52,\bar{y}=40$，$s_X{}^2=96,s_Y{}^2=52$。求参数 $\mu_1-\mu_2$ 的 90%置信水平的双侧置信区间。

七．(16 分) 设 $X_1,\ldots,X_{50}$ 是来自总体 $N(\mu,2)$ 的样本。对期望进行假设检验，$H_0:\mu\le 0$，$H_1:\mu>0$，

若取拒绝域为 $\left\{\left(x_1,\ldots,x_{50}\right):\bar{x}>0.33\right\}$，

（1）求此检验犯第一类错误的概率的最大值；

（2）若 $\mu=-0.27$，此检验犯错误时是第几类错误，并求犯此类错误的概率；

（3）若 $\mu=0.68$，此检验犯错误时是第几类错误，并求犯此类错误的概率；

（4）求 $\bar{x}=0.2$ 的 p 值。

备注 1. 本考卷的样本均为简单随机样本，样本均值 $\bar{X}=\dfrac{X_1+\cdots+X_n}{n}$，样本方差 $S^2=\dfrac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\left(X_k-\bar{X}\right)^2$

备注 2. 正态总体的样本均值和样本方差相互独立，且 $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$，其中 n 为样本容量

备注 3. 指数分布随机变量 $X\sim Exp(\lambda)$，$F_X(x)=\left(1-e^{-\lambda x}\right)I_{x>0}$，$E(X)=1/\lambda,Var(X)=1/\lambda^2$

备注 4. 参数为 p 的几何分布随机变量的方差为 $\dfrac{1-p}{p^2}$

备注 5. 分布函数和分位数（题目解答要严格按照下面给出数值进行计算）

$\Phi(1.28)=0.9,\quad \Phi(1.44)=0.925,\quad \Phi(1.65)=0.95,\quad \Phi(1.96)=0.975,$

$\Phi(1)=0.84,\quad \Phi(1.25)=0.89,\quad \Phi(1.5)=0.93,\quad \Phi(1.75)=0.96,\quad \Phi(2)=0.98,\quad \Phi(3)=0.999$

$P\left(t(9)>1.38\right)=0.1, P\left(t(10)>1.37\right)=0.1, P\left(t(11)>1.36\right)=0.1, P\left(t(12)>1.35\right)=0.1$

$P\left(t(9)>1.83\right)=0.05, P\left(t(10)>1.80\right)=0.05, P\left(t(11)>1.79\right)=0.05, P\left(t(12)>1.78\right)=0.05$