

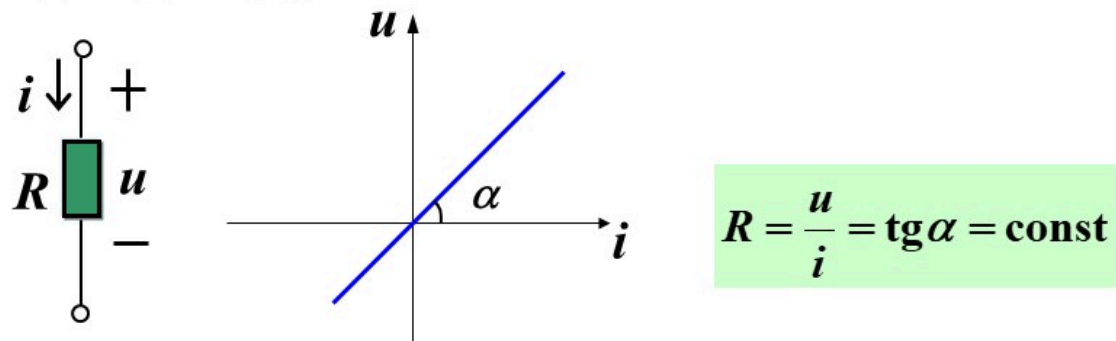
第8讲 非线性电阻电路分析

- 非线性电阻
- 非线性电阻电路的解析解法
- 非线性电阻电路的图形解法
- 非线性电阻电路的分段线性解法
- 非线性电阻电路解的存在性和唯一性



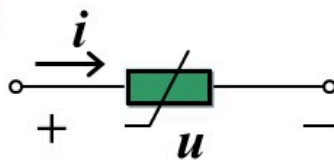
1 非线性电阻

(1) 线性电阻元件



(2) 非线性电阻元件

电路符号



伏安特性

或

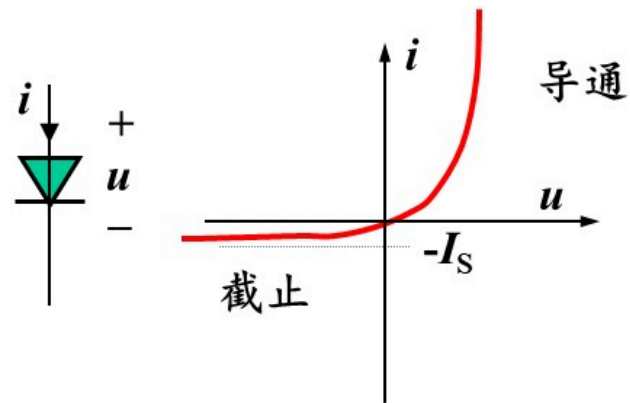
$$u = f(i)$$

过原点

$$i = g(u)$$



例3 整流二极管



伏安特性

$$i = I_S (e^{u/U_{TH}} - 1)$$

$I_S > 0$ 反向饱和电流

对于硅二极管来说，典型值为

$$I_S = 10^{-12} \text{ A} = 1 \text{ pA}, \quad U_{TH} = 0.025 \text{ V} = 25 \text{ mV}$$

(3) 线性电阻和非线性电阻的区别

已预习

例 非线性电阻 $u = f(i) = 50i + 0.5i^3$

$$i_1 = 2\text{A} \quad u_1 = 100 + 0.5 \times 8 = 104\text{V}$$

$$i_2 = 10\text{A} \quad u_2 = 500 + 500 = 1000\text{V} \quad \neq 5 \times 104$$

当 $i = i_1 + i_2$ 时

齐次性不满足

$$\begin{aligned} u &= 50(i_1 + i_2) + 0.5(i_1 + i_2)^3 \\ &= 50i_1 + 0.5i_1^3 + 50i_2 + 0.5i_2^3 + 1.5i_1i_2(i_1 + i_2) \\ &= u_1 + u_2 + 1.5i_1i_2(i_1 + i_2) \\ &\neq u_1 + u_2 \end{aligned}$$

可加性不满足

① 齐次性和可加性不适用于非线性电阻。

例 非线性电阻 $u = f(i) = 50i + 0.5i^3$

$$4 \sin^3 t = 3 \sin t - \sin 3t$$

$$i_3 = 2 \sin 60t \text{ A} \quad u_3 = 50 \times 2 \sin 60t + 0.5 \times 8 \sin^3 60t$$

已预习

$$= 100 \sin 60t + 3 \sin 60t - \sin 180t$$

$$= 103 \sin 60t - \sin 180t \text{ A}$$

出现3倍频

② 非线性电阻能产生与输入信号不同的频率（变频作用）。

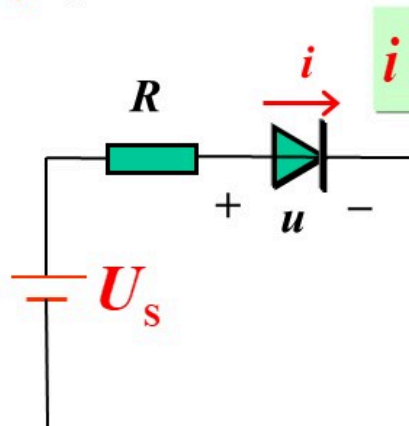
如何看待非线性？

线性元件：分压、分流、滤波等作用。

非线性元件：整流、稳压、放大、振荡、变频、开关等作用。

2 非线性电阻电路的解析解法

例 求电压 u 。



$$i = I_s (e^{u/U_{TH}} - 1)$$

KCL+KVL+元件特性

$$\frac{U_s - u}{R} = I_s (e^{u/U_{TH}} - 1)$$

超越方程

$$\frac{U_s - u}{R} = I_s (e^{u/U_{TH}} - 1) \quad \Rightarrow \quad 10^{-9} \left(e^{\frac{u}{0.025}} - 1 \right) + u - 2 = 0$$

设 $U_s = 2V$, $R = 1k\Omega$, $I_s = 1pA$, $U_{TH} = 25mV$

法1 手算

$$10^{-9} \left(e^{\frac{u}{0.025}} - 1 \right) + u = 2$$

u	左	右
0	0	2
0.3	0.3	2
0.6	27	2
0.5	0.985	2
0.53	2.14	2
0.525	1.844	2
0.527	1.956	2
0.528	2.015	2

法2 MATLAB

```
function f=diode(x)
f=10^(-9)*(exp(x/0.025)-1)+x-2;
```

```
>> a = fzero(@diode,-0.2)
a = 0.5278
```

trial and error

Principles of Electric Circuits Lecture 8 Tsinghua University 2023

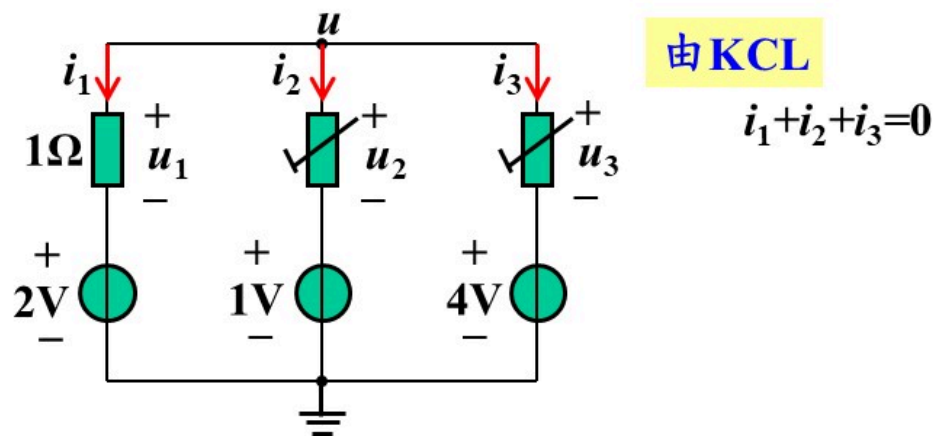
9

(1) 节点电压方程的列写

电路方程 $\left\{ \begin{array}{l} \text{元件性能——非线性} \\ \text{电路的连接——KCL, KVL} \end{array} \right.$

非线性电阻电路——非线性代数方程

例1 已知 $i_1 = u_1$, $i_2 = u_2^5$, $i_3 = u_3^3$, 列写求电压 u 所需方程。



(1) 节点电压方程的列写

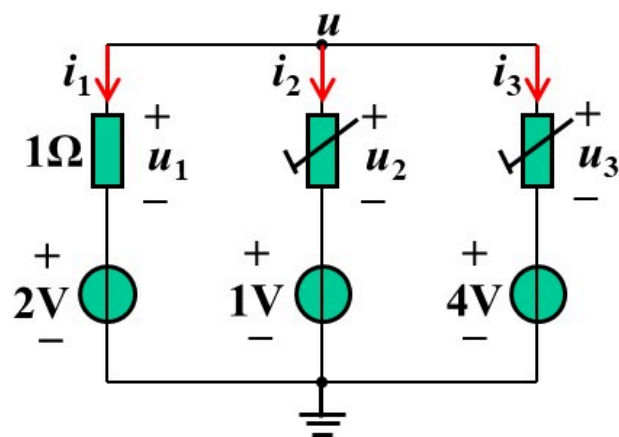
非线性电阻为压控电阻

电路方程 $\left\{ \begin{array}{l} \text{元件性能——非线性} \\ \text{电路的连接——KCL, KVL} \end{array} \right.$

KCL

非线性电阻电路——非线性代数方程

例1 已知 $i_1 = u_1$, $i_2 = u_2^5$, $i_3 = u_3^3$, 列写求电压 u 所需方程。



由KCL

$$i_1 + i_2 + i_3 = 0$$

代入元件性质

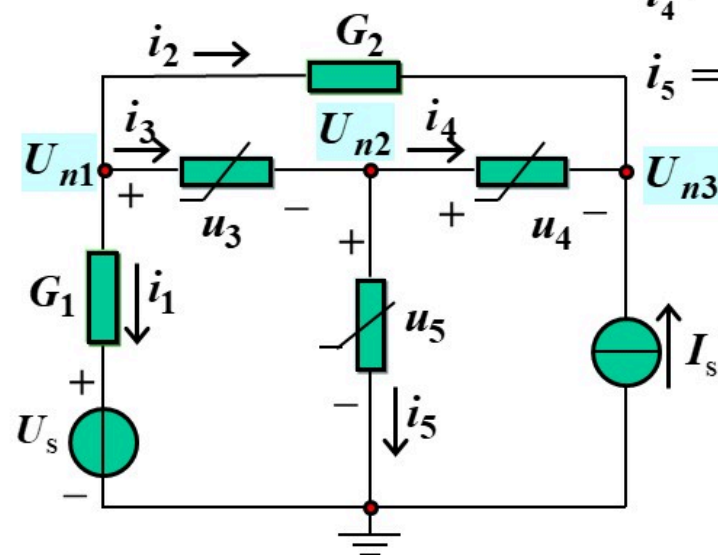
$$u_1 + u_2^5 + u_3^3 = 0$$

应用KVL, 得

$$u - 2 + (u - 1)^5 + (u - 4)^3 = 0$$

非线性代数
方程

例2 列写节点电压方程



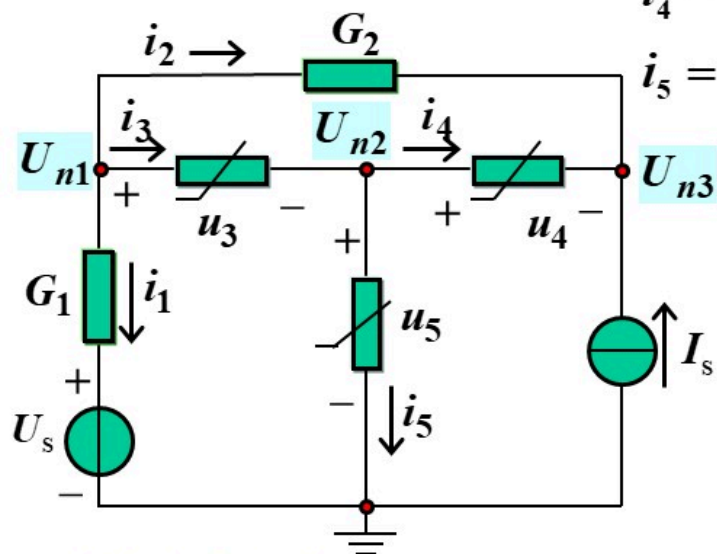
$$i_3 = 5u_3^3$$

$$i_4 = 10u_4^{1/3}$$

$$i_5 = 15u_5^{1/5}$$

$$\begin{cases} i_1 + i_2 + i_3 = 0 & \text{KCL} \\ -i_3 + i_4 + i_5 = 0 \\ -i_4 - i_2 - I_s = 0 \end{cases}$$

例2 列写节点电压方程



$$\begin{cases} i_3 = 5u_3^3 \\ i_4 = 10u_4^{1/3} \\ i_5 = 15u_5^{1/5} \end{cases} \begin{cases} i_1 + i_2 + i_3 = 0 & \text{KCL} \\ -i_3 + i_4 + i_5 = 0 \\ -i_4 - i_2 - I_s = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} i_1 = G_1(U_{n1} - U_s) \\ i_2 = G_2(U_{n1} - U_{n3}) \\ i_3 = 5(U_{n1} - U_{n2})^3 \\ i_4 = 10(U_{n2} - U_{n3})^{1/3} \\ i_5 = 15U_{n2}^{1/5} \end{cases}$$

元件性质

KVL

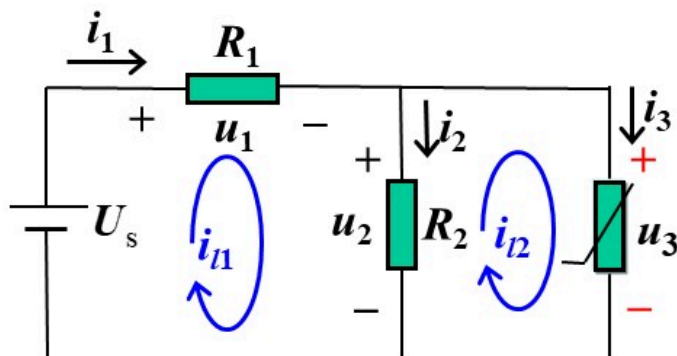
则节点方程为

$$\begin{cases} G_1(U_{n1} - U_s) + G_2(U_{n1} - U_{n3}) + 5(U_{n1} - U_{n2})^3 = 0 \\ -5(U_{n1} - U_{n2})^3 + 10(U_{n2} - U_{n3})^{1/3} + 15U_{n2}^{1/5} = 0 \\ -10(U_{n2} - U_{n3})^{1/3} - G_2(U_{n1} - U_{n3}) - I_s = 0 \end{cases}$$

非线性代数
方程组

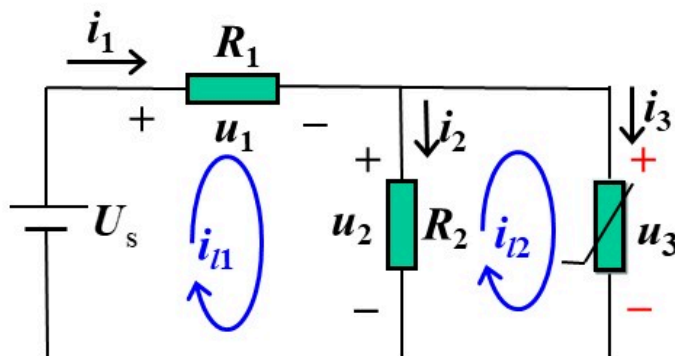
(2) 回路电流方程的列写

例3 已知 $u_3 = 20 i_3^{1/3}$, 求节点电压 u_3 。



(2) 回路电流方程的列写

例3 已知 $u_3 = 20 i_3^{1/3}$, 求节点电压 u_3 。



非线性电阻为流控电阻
KVL

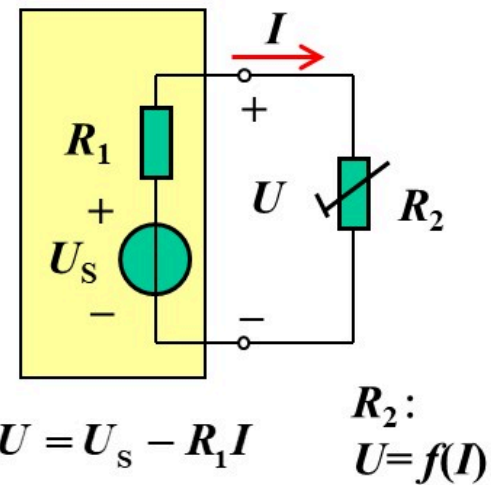
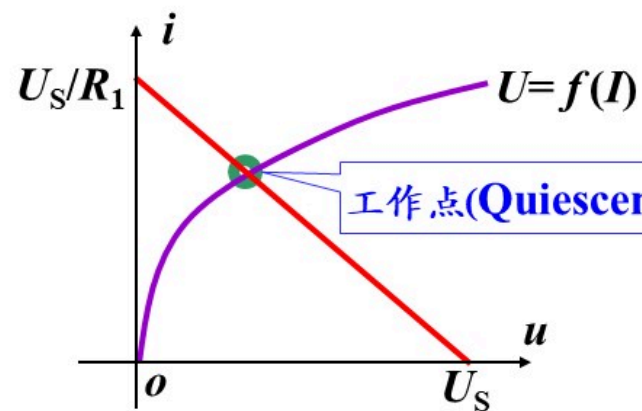
$$\begin{cases} R_1 i_{l1} + R_2 (i_{l1} - i_{l2}) = U_s \\ 20 i_{l2}^{1/3} + R_2 (i_{l2} - i_{l1}) = 0 \end{cases} \longrightarrow i_3 \longrightarrow u_3$$

非线性代数
方程组



3 非线性电阻电路的图形解法

用图解法求解非线性电路





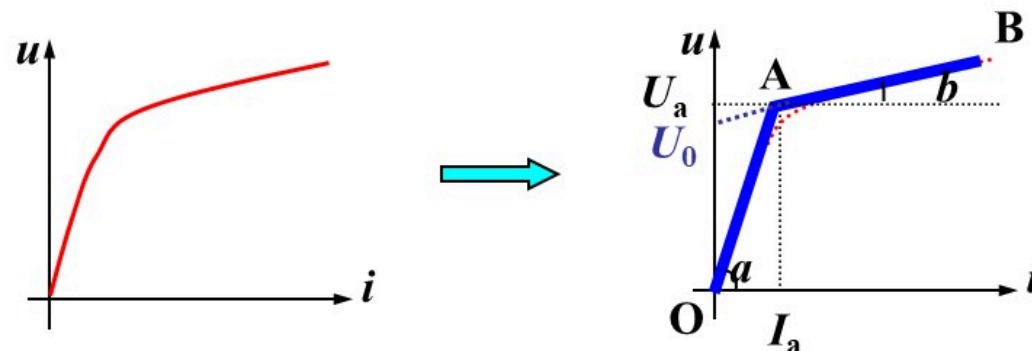


4 非线性电阻电路的分段线性解法

分段线性法：将非线性电阻近似地用折线来表示。

将求解过程分为几个线性段，每段中分析线性电路。

例1





A

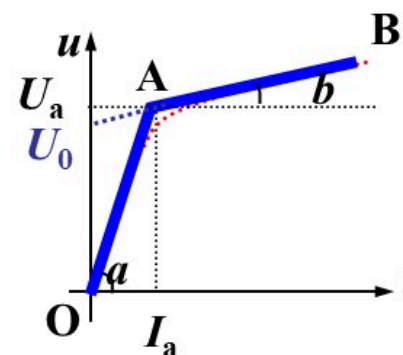
B

C

D

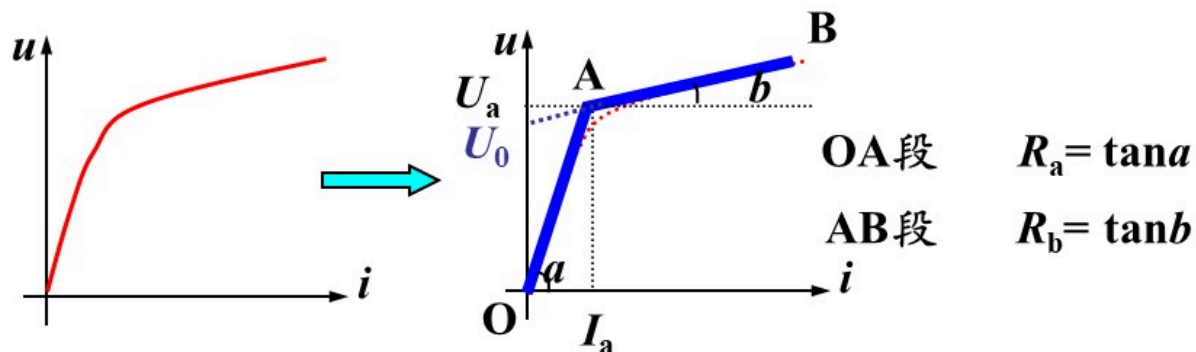
单选题 1分

A-B段对应等效电路为

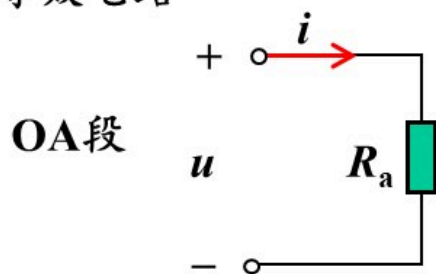


- ☐ A 阻值为 $\tan(a)$ 的电阻
- ☐ B 阻值为 $\tan(a)$ 的电阻串联 U_0 电压源
- ☐ C 阻值为 $\tan(b)$ 的电阻
- ☒ D 阻值为 $\tan(b)$ 的电阻串联 U_0 电压源

例1

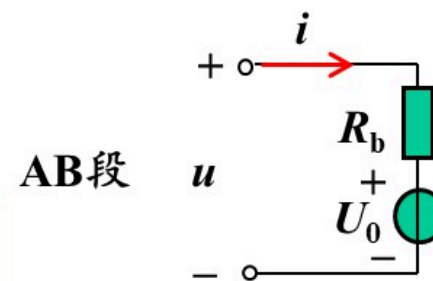


等效电路



真把它放在一个电路里
如何知道工作在哪段？

此处可以有弹幕



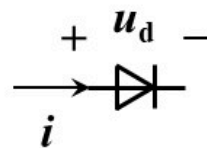




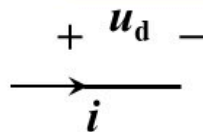


模型1

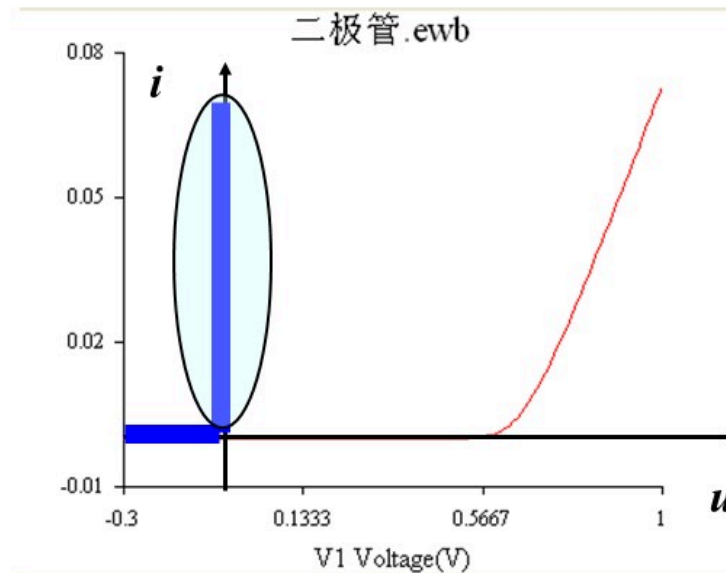
研究二极管的分段线性模型



(半个)短路



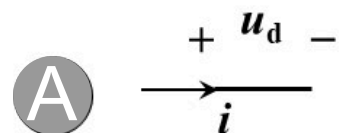
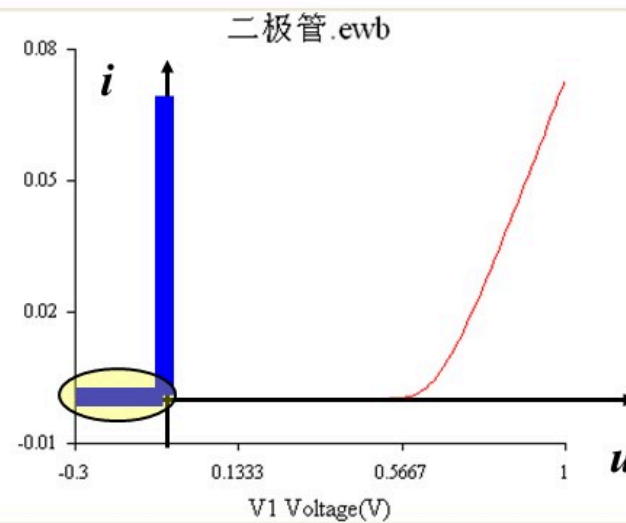
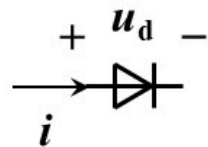
条件是 $i > 0$



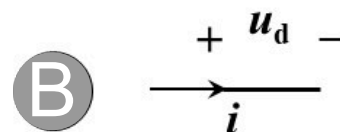
课前推送

单选题 1分

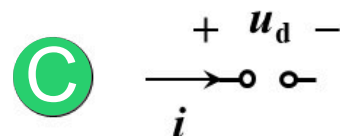
阴影部分对应的
模型和条件是？



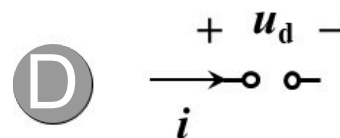
条件是 $i > 0$



条件是 $i < 0$



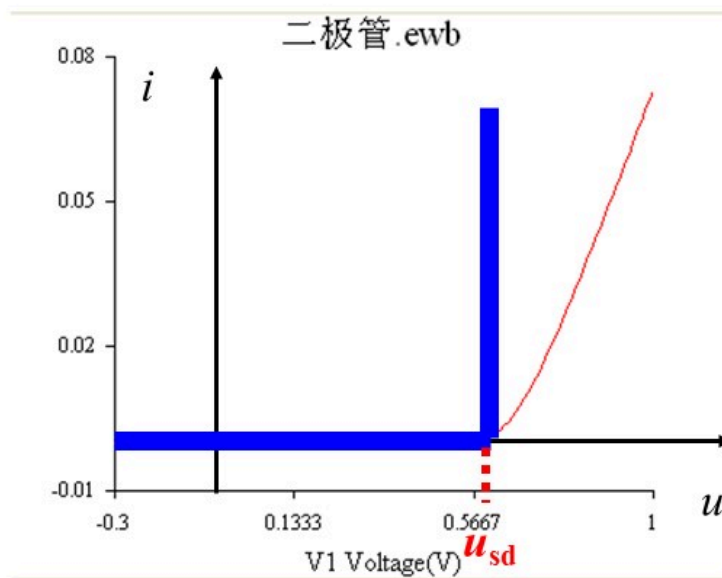
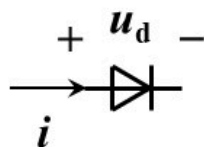
条件是 $u_d < 0$



条件是 $u_d > 0$

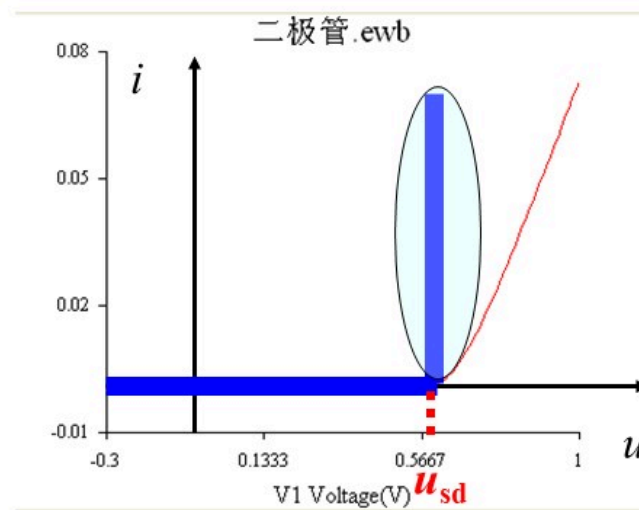
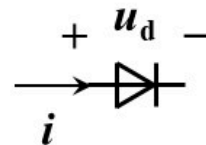


模型2



单选题 1分

阴影部分对应的
模型和条件是？



A 条件是 $i > 0$

B 条件是 $i > 0$

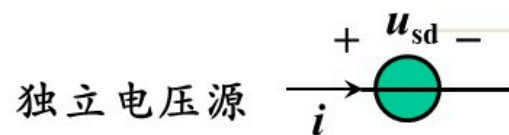
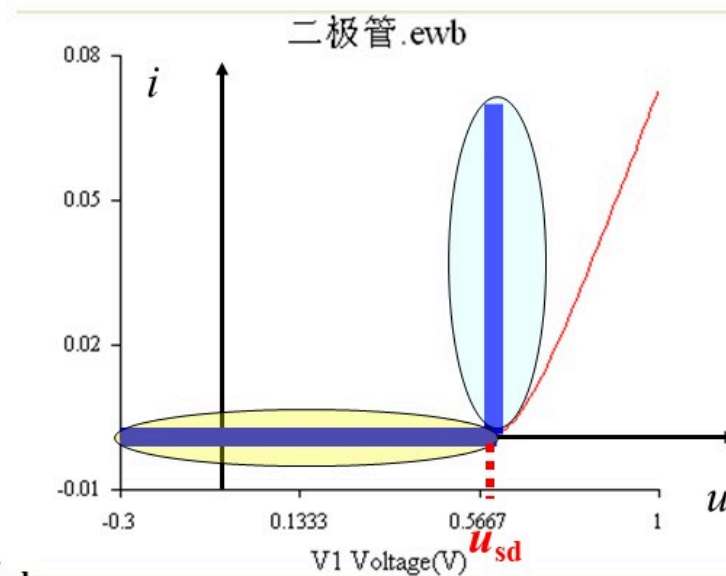
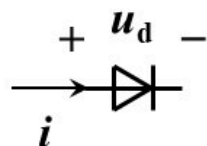
C 条件是 $u_d < 0$

D 条件是 $u_d < u_{sd}$

Principles of Electric Circuits Lecture 8 Tsinghua University 2023

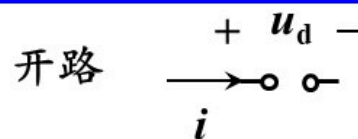
31

模型2



条件是 $i > 0$

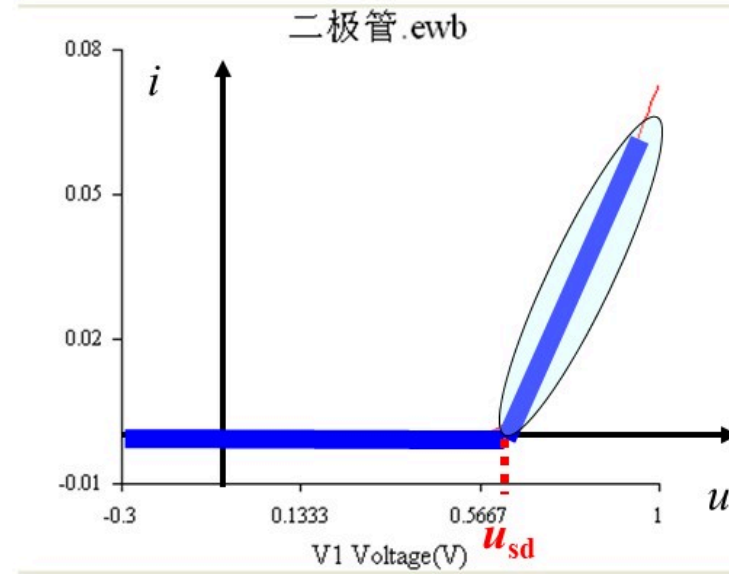
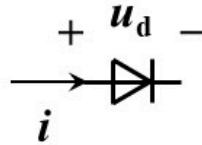
硅二极管 $u_{sd}=0.7V$
锗二极管 $u_{sd}=0.2V$



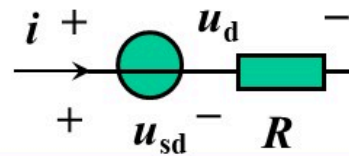
条件是 $u_d < u_{sd}$



模型4

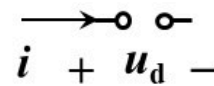


独立电压源串电阻



条件是 $i > 0$ 或 $u_d > u_{sd}$

开路



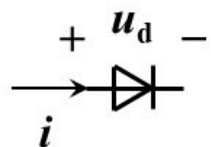
条件是 $u_d < u_{sd}$



A

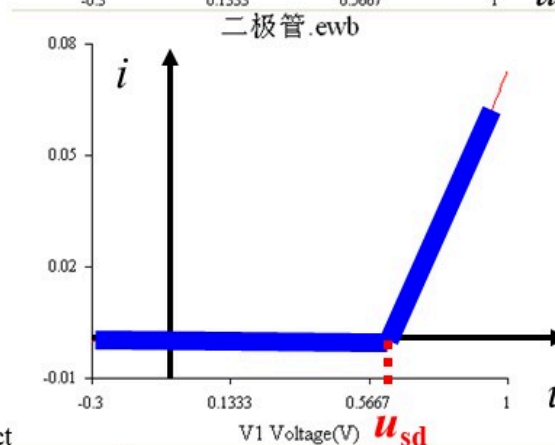
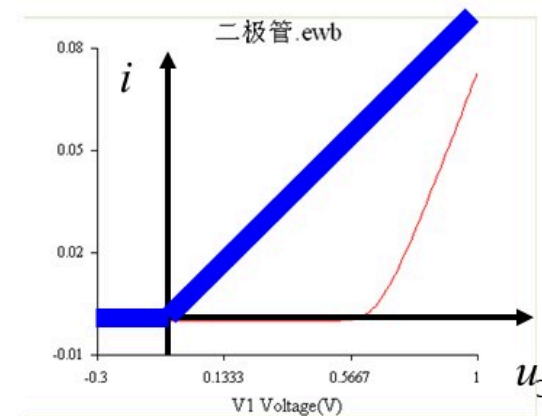
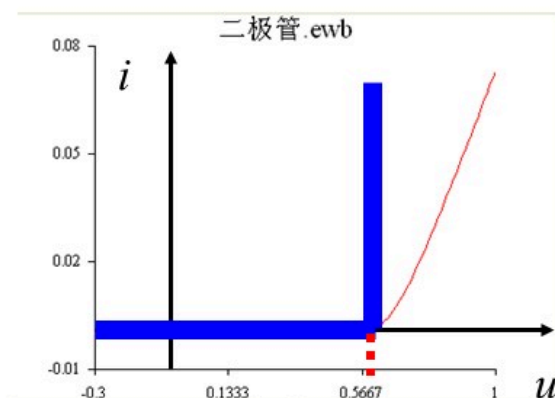
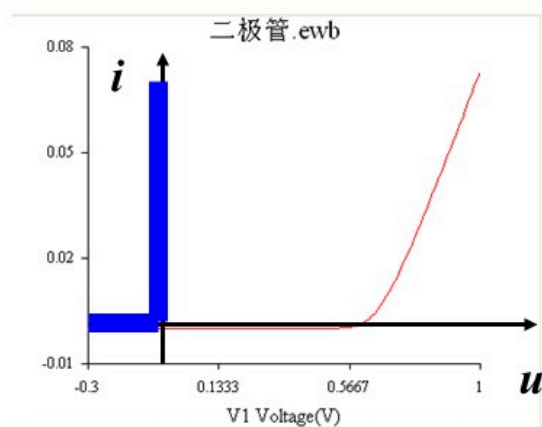
B

C



为什么有这么多模型？
什么时候用哪个？

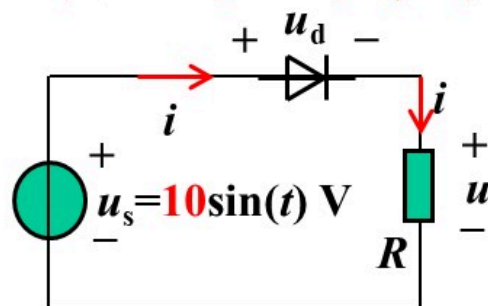
此处可以有弹幕



Circuits Lect

36

例3 用分段线性法求 u ，用理想二极管模型。



方法：

假设



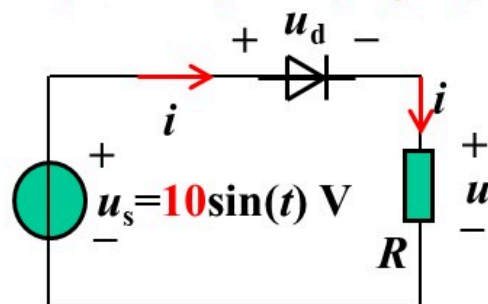
检验

模型1 短路 条件是 $i > 0$

开路 条件是 $u_d < 0$

假设二极管短路，得

例3 用分段线性法求 u ，用理想二极管模型。



方法：

假设



检验

模型1 短路 条件是 $i > 0$

开路 条件是 $u_d < 0$

假设二极管短路，得 $u = 10\sin(t)$ 假设二极管开路，得 $u = 0$

$$i = \frac{10\sin(t)}{R}$$

$$u_d = 10\sin(t)$$

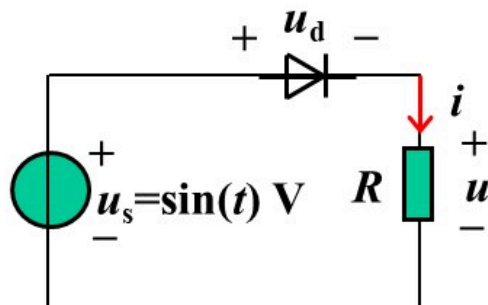
$\sin(t) > 0$ 时成立

$\sin(t) < 0$ 时成立

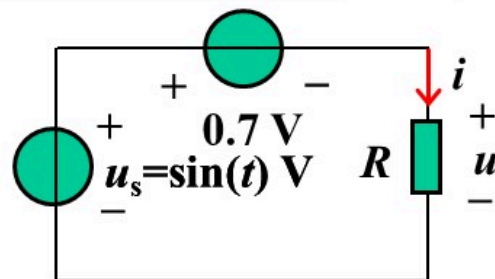
看仿真



例3 用分段线性法求 u 。二极管用模型2，硅二极管。



模型2	0.7V独立电压源 条件是 $i > 0$
	开路 条件是 $u_d < u_{sd}$



设 $i > 0$ $u = \sin(t) - 0.7$

$$i = \frac{\sin(t) - 0.7}{R}$$

即 $\sin(t) > 0.7$ 时成立。

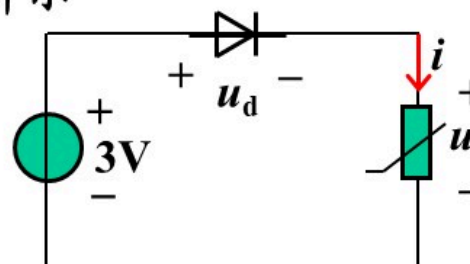
设二极管开路，得





单选题 1分

含两个非线性电阻,电路参数如下所示
计算电路中电流 $i=$ ____A (红包)



A 0

B 1

C 1.5

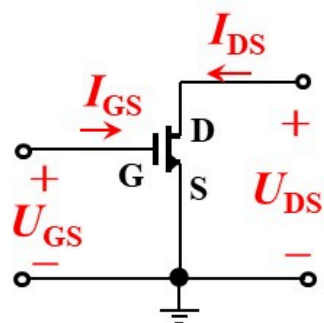
D 2

二极管 { 短路 条件是 $i > 0$
开路 条件是 $u_d < 0$

非线性电阻 $u = 2i, i < 1\text{A},$
 $u = i + 1, i \geq 1\text{A},$

分段线性解法的特点

- 步骤
 - 将非线性元件根据精度的需要划分为若干段，每段中用线性元件来建模。
确定模型和条件
 - 假设非线性元件位于某一段，将模型带入，检验条件是否满足
- 优点
 - 线性模型的求解比较方便
- 缺点
 - 精度上有牺牲
 - 非线性元件多的时候需要求解的线性电路数量大大增加

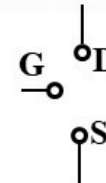


用“假设-检验”的思路来分析MOSFET电路

1. 截止区

条件 $(U_{GS} - U_T) < 0$

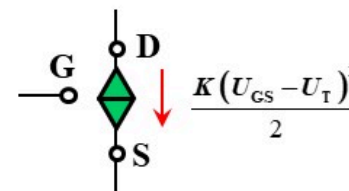
性质 $I_{DS} = 0$



2. 恒流源区

条件 $0 < (U_{GS} - U_T) < U_{DS}$

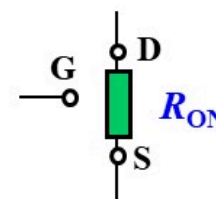
性质 $I_{DS} = \frac{K(U_{GS} - U_T)^2}{2}$



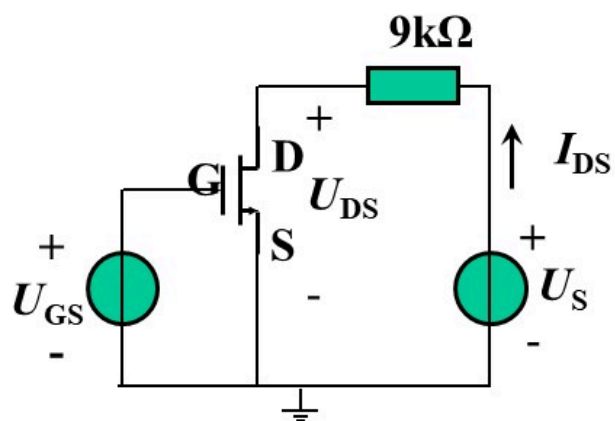
3. 电阻区

条件 $U_{DS} < (U_{GS} - U_T)$

性质: R_{ON}



问题：给定MOSFET元件参数(U_T 和 K)和 U_S 数值, U_{GS} 取不同值时, 如何确定MOSFET工作区间?

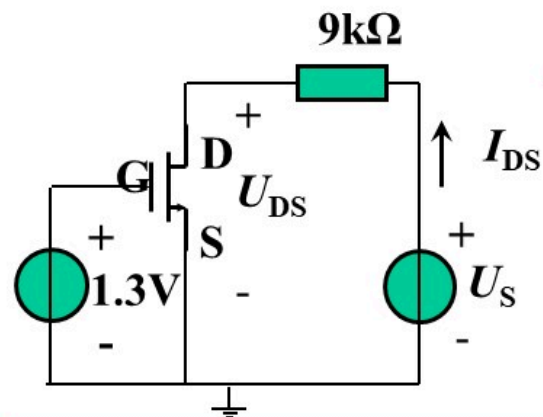


假设-检验!





例1: $U_S=5V$, $U_{GS}=1.3V$, $K=0.5mA/V^2$, $U_T=1V$, $R_L=9k\Omega$, $R_{ON}=1k\Omega$



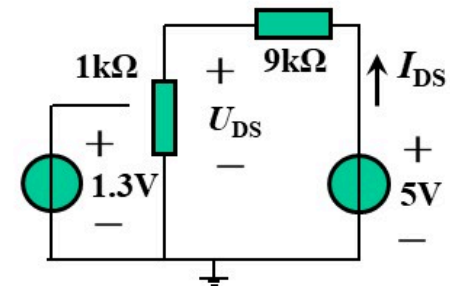
$U_{GS} > U_T \rightarrow$ D、S 导通

假设“可变电阻区”

$$U_{DS} < (U_{GS} - U_T)$$

$$0.5 > (1.3 - 1)$$

假设不成立



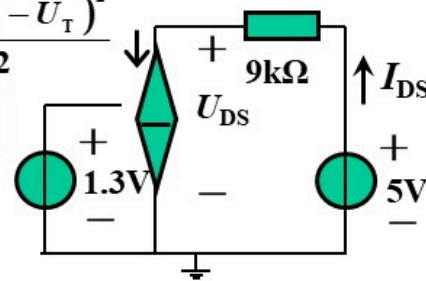
假设“恒流源区”

$$I_{DS} = \frac{K(U_{GS} - U_T)^2}{2}$$

$$(U_{GS} - U_T) < U_{DS}$$

$$(1.3 - 1) < 4.80$$

假设成立



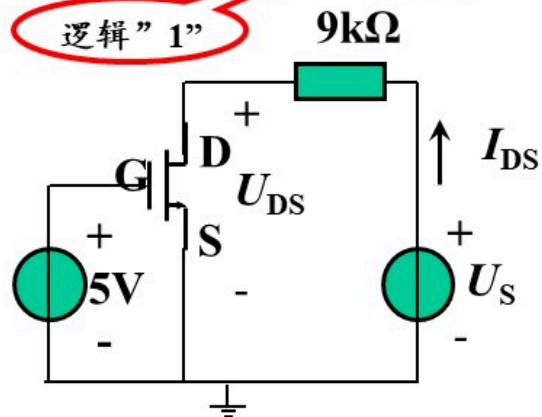
$$U_{DS} = U_S - I_{DS} R_L$$

$$U_{DS} = 5 - 9000 \frac{K(U_{GS} - U_T)^2}{2}$$

$$= 5 - \frac{0.5 \times (1.3 - 1)^2}{2} \times 9 = 4.80V$$

例2: $U_S = 5V$, $U_{GS} = 5V$, $K = 0.5mA/V^2$, $U_T = 1V$, $R_L = 9k\Omega$, $R_{ON} = 1k\Omega$

逻辑"1"



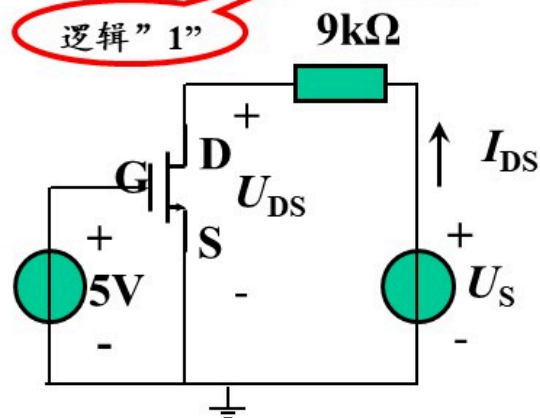
$U_{GS} > U_T \rightarrow$ D、S导通

假设“可变电阻区”

$$U_{DS} < (U_{GS} - U_T)$$

例2: $U_S = 5V$, $U_{GS} = 5V$, $K = 0.5mA/V^2$, $U_T = 1V$, $R_L = 9k\Omega$, $R_{ON} = 1k\Omega$

逻辑“1”



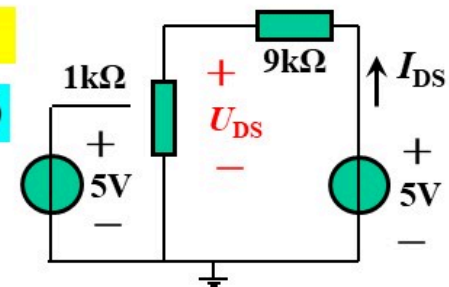
$U_{GS} > U_T \rightarrow$ D、S导通

假设“可变电阻区”

$$U_{DS} < (U_{GS} - U_T)$$

$$0.5 < (5 - 1)$$

假设成立



假设“恒流源区”

$$(U_{GS} - U_T) < U_{DS}$$

51

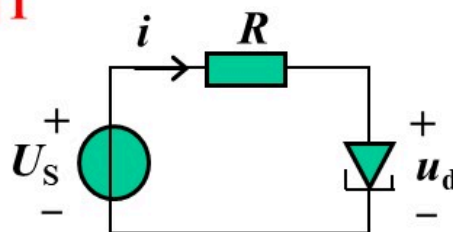


5 非线性电阻电路解的存在性与唯一性

线性电路一般有唯一解。

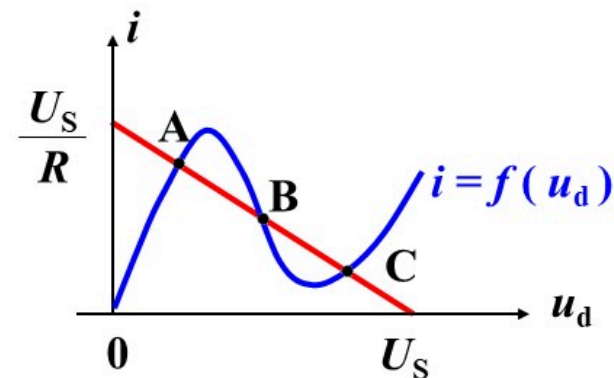
非线性电阻电路可以有多个解或没有解。

例1

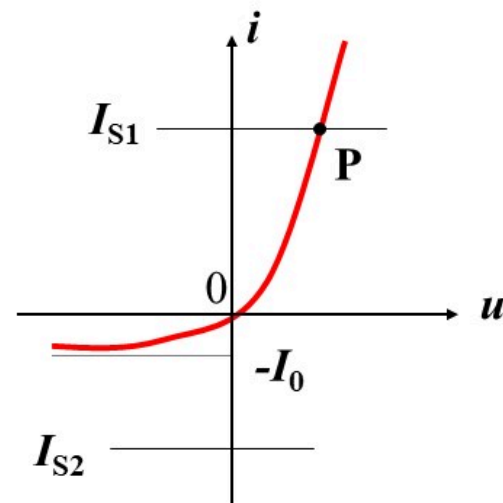
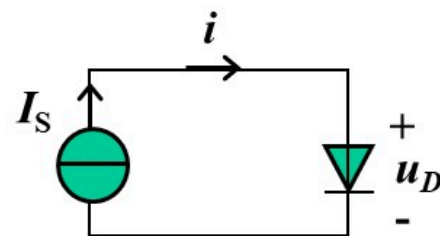


$$R i + u_d = U_S$$

$$i = f(u_d)$$



例2



当 $I_S > -I_0$ 时 有唯一解

当 $I_S < -I_0$ 时 无解

非线性电阻电路有唯一解的充分条件请参考教材4.1.2节