第二十七章

27.2 一个氧分子被封闭在一个盒子内。按一维无限深方势阱计算，并设势阱宽度为 10 cm。

(1) 该氧分子的基态能量是多大？

(2) 设该分子的能量等于 $T=300$ K 时的平均热运动能量 $\frac{3}{2}kT$，相应的量子数 n 的值是多少？这第 n 激发态和第 $n+1$ 激发态的能量差是多少？

解：$m = \dfrac{32\times10^{-3}}{6.02\times10^{23}} = 5.3\times10^{-26}\,\text{kg}$

(1) $E_1 = \dfrac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2} = \dfrac{\pi^2\times(1.05\times10^{-34})^2}{2\times5.3\times10^{-26}\times0.1^2} = 1.0\times10^{-80}\,\text{J}$

(2) 由 $\frac{3}{2}kT = E_n = \dfrac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}n^2 = E_1 n^2$ 得

$$n = \sqrt{\frac{3kT}{2E_1}} = \sqrt{\frac{3\times1.38\times10^{-23}\times300}{2\times1.0\times10^{-80}}} = 7.8\times10^{9}$$

$$\Delta E = E_1\{(n+1)^2 - n^2] = E_1(2n+1) = 1.0\times10^{-40}$$

*27.3 在如图 27.14 所示的无限深斜底势阱中有一粒子。试画出它处于 $n=5$ 的激发态时的波函数曲线。

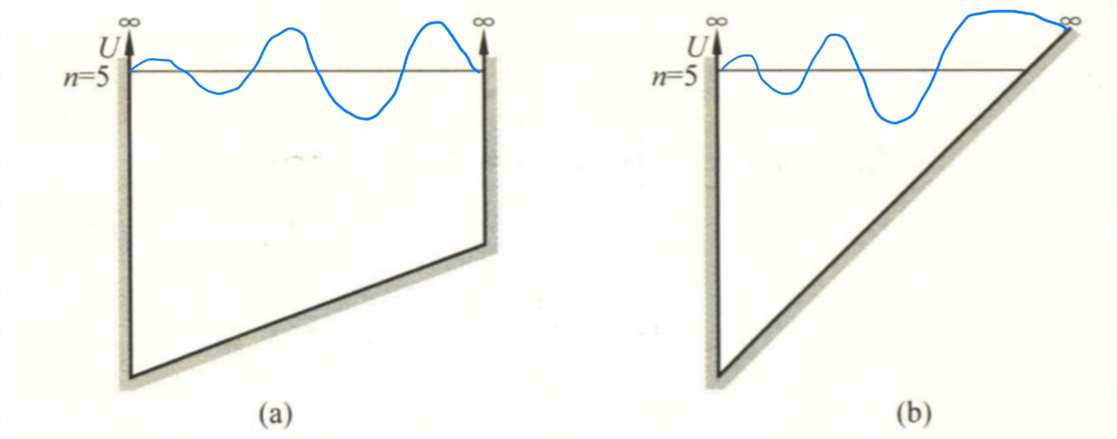

图 27.14 习题 27.3 用图

*27.6 证明：如果 $\Psi_m(x,t)$ 和 $\Psi_n(x,t)$ 为一维无限深方势阱中粒子的两个不同能态的波函数，则

$$\int_0^a \Psi_m^*(x,t)\Psi_n(x,t)\,dx = 0$$

此结果称为波函数的**正交性**。它对任何量子力学系统的任何两个能量本征波函数都是成立的。

证：$\int_0^a \Psi_m(x,t)\,\Psi_n(x,t)\,dt$

$= \int_0^a \sqrt{\frac{2}{a}}\, e^{i2\pi E_m \frac{t}{h}} \sin(\frac{m\pi}{a}x) \sqrt{\frac{2}{a}}\, e^{-i2\pi E_n \frac{t}{h}} \sin(\frac{n\pi}{a}x)\,dx$

$= \frac{2}{a} e^{2\pi i(E_m - E_n)\frac{t}{h}} \int_0^a \sin(\frac{m\pi}{a}x)\cdot\sin(\frac{n\pi}{a}x)\,dx$

$$= \frac{2}{a} e^{2\pi i (E_m - E_n)\frac{t}{h}} \left[\frac{\sin\left(\frac{\pi(m-n)x}{a}\right)}{2(m-n)\frac{\pi}{a}} - \frac{\sin\left(\frac{\pi(m+n)x}{a}\right)}{2(m+n)\frac{\pi}{a}} \right] \Bigg|_0^a$$

由于 $m, n \in Z^+$，故上式为 0，得证

27.8 一维无限深方势阱中的粒子的波函数在边界处为零。这种定态物质波相当于两端固定的弦的驻波，因而势阱宽度 a 必须等于德布罗意波的半波长的整数倍。试由此求出粒子能量的本征值为

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} n^2$$

解：$E_n = \frac{p_n^2}{2m} = \frac{1}{2m} \cdot \left(\frac{h}{\lambda_n}\right)^2 = \frac{1}{2m}\left(\frac{hn}{2a}\right)^2 = \frac{1}{2m}\left(\frac{\pi\hbar n}{a}\right)^2 = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2} n^2$

27.11 H_2 分子中原子的振动相当于一个谐振子，其等效劲度系数为 $k = 1.13 \times 10^3$ N/m，质量为 $m = 1.67 \times 10^{-27}$ kg。此分子的能量本征值（以 eV 为单位）为何？当此谐振子由某一激发态跃迁到相邻的下一激发态时，所放出的光子的能量和波长各是多少？

解：$E_n = (n+\frac{1}{2})h\nu = (n+\frac{1}{2})\frac{h}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = (n+\frac{1}{2}) \times \frac{6.63\times10^{-34}}{2\pi}\sqrt{\frac{1.13\times10^3}{1.67\times10^{-27}}} \times \frac{1}{1.6\times10^{-19}} = (n+\frac{1}{2}) \times 0.54\text{eV}$

$\Delta E = E_n - E_{n-1} = \left[n+\frac{1}{2} - ((n-1)+\frac{1}{2})\right]h\nu = 0.54\text{eV}$

$\lambda = \frac{hc}{\Delta E} = \frac{6.63\times10}{0.54\times1.6\times10^{-19}} = 2.3\times10^{-8}\text{m}$