

第 5 次习题课题目

2023 年 12 月 20 日

1. 一商家为促销某商品决定向前 100 名顾客赠送手表, 男性顾客会得到一只男士手表, 女性顾客会得到一只女士手表。假设改促销产品对男女消费者有同样的吸引力。试用正态近似解决以下问题。
 - (1) 为以 $P = 0.98$ 的概率保证前 100 名顾客中的男性顾客都得到男士赠品手表, 问商家至少准备多少只男士手表?
 - (2) 仍以 $P = 0.98$ 的概率保证前 100 名顾客都得到与其性别一致的赠品手表, 问商家至少需要准备多少只手表?
2. 为确定某城市成年男子吸烟者的比例 p , 任意调查 n 个成年男性, 记其中吸烟者人数为 m , 问 n 至少多大才能保证 m/n 与 p 的差异小于 $\alpha = 0.01$ 的概率大于 $\beta = 0.95$ 。
3. 设随机变量 $\{X_i\}_{i=1}^{100}$ 独立同分布, 服从均匀分布 $U(0,1)$, 又设 $Y = \prod_{i=1}^{100} X_i$ 。求概率 $P(Y < 10^{-40})$ 的近似值。
4. 清华大学篮球队某赛季共有 30 场比赛, 其中 16 场的对手是 A 球队, 14 场的对手是 B 球队。设每场比赛清华队对 A 球队获胜的概率是 a , 对 B 球队获胜的概率是 b 。假设各场次比赛结果相互独立。
 - (1) 若 $a = b = 0.5$, 则在该赛季清华队恰好获胜 18 场的概率是多少? 分别用以下三种方法计算:
 - (1a) 使用精确分布;
 - (1b) 使用正态近似;
 - (1c) 使用 Poisson 逼近;
 - (2) 若 $a = 0.4, b = 0.6$, 求以下两事件发生的概率:
 - (2a) 清华队至少获胜 18 场;
 - (2b) 清华队对 B 球队的获胜场次少于对 A 球队的获胜场次。

5. 设 $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}$ 是来自 $N(\mu, \sigma^2)$ 的样本, $\bar{x}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, s_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2$, 试求常数 c 使得 $t_c = c \frac{x_{n+1} - \bar{x}_n}{s_n}$ 服从 t 分布, 并指出分布的自由度。

6. 设 x_1, x_2, \dots, x_n 是来自 $N(\mu_1, \sigma^2)$ 的样本, y_1, \dots, y_m 是来自 $N(\mu_2, \sigma^2)$ 的样本, c, d 是任意两个不为 0 的常数, 证明:

$$t = \frac{c(\bar{x} - \mu_1) + d(\bar{y} - \mu_2)}{s_w \sqrt{\frac{c^2}{n} + \frac{d^2}{m}}} \sim t(n+m-2)$$

其中 $s_w^2 = \frac{(n-1)s_x^2 + (m-1)s_y^2}{n+m-2}$.

7. 设 x_1, x_2, \dots, x_n 是来自某连续总体的样本。该总体的分布函数 $F(x)$ 是连续严格增函数, 证明: 统计量 $T = -2 \sum_{i=1}^n \ln F(x_i)$ 服从 $\chi^2(2n)$ 。

8. 设总体 X 服从几何分布, 即 $P(X=k) = pq^{k-1}, k=1, 2, \dots$, 其中 $0 < p < 1, q = 1-p$, x_1, \dots, x_n 为总体的样本。求 $x_{(n)}, x_{(1)}$ 的概率分布。