第2节 高斯通量定理的积分形式及其应用

$$\begin{cases} \oint\!\!\oint_s \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\iiint_V \rho \mathrm{d}V = \dfrac{q}{\varepsilon_0} & (\boldsymbol{i}-1) \\ \oint_l \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0 & (\boldsymbol{i}-2) \end{cases}$$

作业：书第1章习题第2题。

对简单分布的场，仅通过电场积分方程组中的第一个方程，即高斯通量定理的积分形式便可求出场分布。

但这要求事先可以判断解答一定会满足第2个方程或场无旋特性。

故仅用高斯通量定理解题在理论上是不完备的，是有条件的。

注意：虽然闭合面的通量仅取决于面内的电荷，但面上的$\boldsymbol{E}$是由面内、外所有电荷共同产生的。

电力线从正电荷发出，终止于负电荷或无限远处。

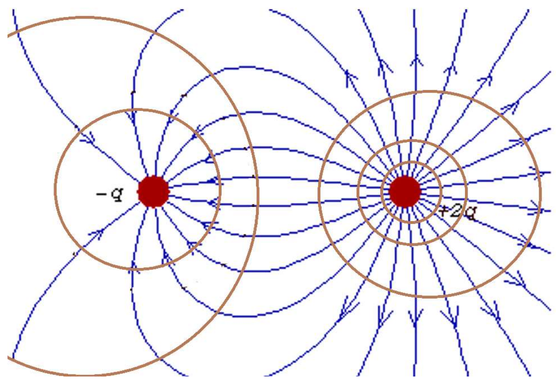
用方程($\boldsymbol{i}$–1)可以证明：在无源区

相邻电力线各处横截面/线上的通量相等。

画电力线时应取各相邻线间等通量，

这样的电力线间隔可表示场大小；

一根电力线只表示场的方向，不能表示大小。



- 解高斯定理方程的关键点是设法将积分方程变为一般函数方程。
- 显然，只有一种情况可实现该转化，那就是$\boldsymbol{D}$在积分面上是常数；
- 此时$\boldsymbol{D}$就可从积分号中提出，剩下积分核为1的积分可求出积分。

利用高斯通量定理求解电场的步骤为：

第一步：定性分析场分布或画出场图；判断出各点场的方向与大小关系；设定的场分布的电力线一定不出现环路。

第二步：根据场分布特性选择积分面$\boldsymbol{S}$（称为高斯面）。

选择准则：让$\boldsymbol{S}$经过要求解的场点；在$\boldsymbol{S}$的不同部位要么$\boldsymbol{D}$与$\boldsymbol{S}$的法向$\boldsymbol{n}$垂直，要么两者同向且D_n处处相等。

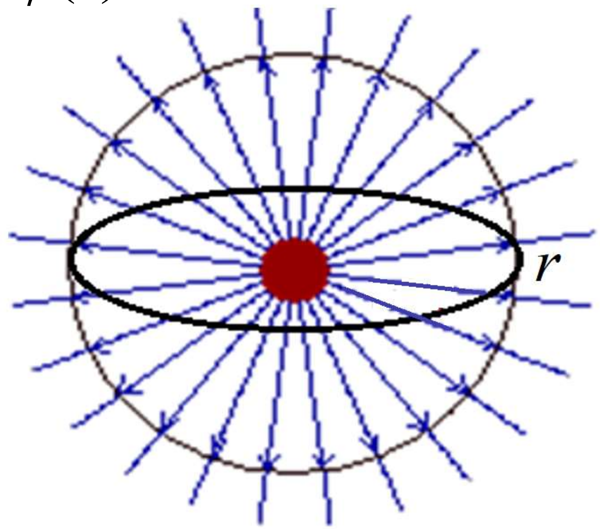
第三步：将积分方程变为一般函数方程。

可见，利用高斯通量定理解题的基础是能判断出场的分布，
因为电荷是电场的源，要判断电场分布必须先判断出电荷分布，
特别是有导体时就需要判断出导体表面上的电荷分布。

教材例1-4：自由空间中一个半径为a的球内均匀充满电荷，密度ρ，总量q，求球内外区域的电场强度。（物理例12.10）

解：对该问题，根据对称性知，场关于球心对称，取球坐标系且原点位于圆心，矢量线为向外发射的直线。

$\boldsymbol{E}$仅有r方向的分量E_r，且仅是r的函数，即$E_r(r)$。



设定场只有分量E_r后，可保证场无旋。

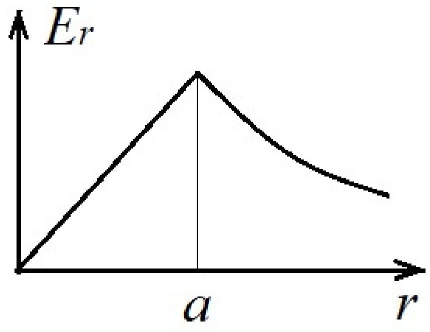
为通过求积分方程得球外距原点r处的场，取球心位于原点、r为半径的球面作为高斯通量定理中的积分面$\boldsymbol{S}$（称为高斯面）对$\boldsymbol{E}$做面积分。

$\boldsymbol{E}$与$\boldsymbol{S}$的法向一致，则矢量点积变为标量相乘$E_r\mathrm{d}S$；且在$\boldsymbol{S}$上E_r处处相等或为常数，因此，对于球外距球心r处的点有：

$$\oiint_s \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\oiint_s E_r\mathrm{d}S=E_r\oiint_s \mathrm{d}S=E_r 4\pi r^2=\frac{q}{\varepsilon_0} \qquad E_r=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

对于球内距球心r处的点，则仍取一个球面作为高斯面，有：

$$\oiint_s \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\oiint_s E_r \mathrm{d}S=E_r\oiint_s \mathrm{d}S=E_r 4\pi r^2=\frac{\rho}{\varepsilon_0}\frac{4\pi r^3}{3}$$

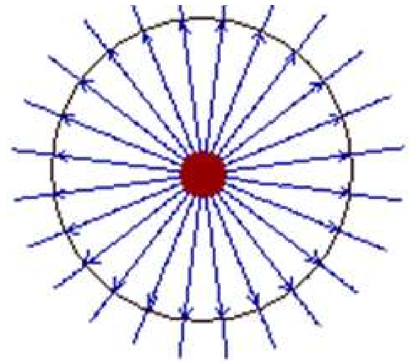


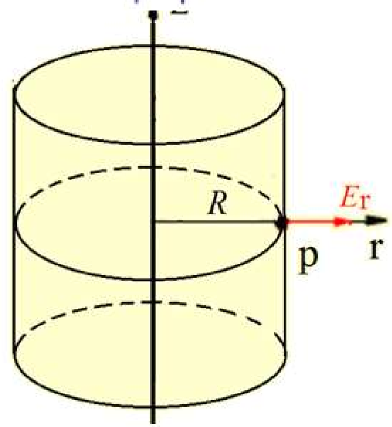
$$E_r=\frac{\rho r}{3\varepsilon_0}$$

此结果与例1-1相同，表明用闭合面通量表示场与标量源的高斯通量定理正确。

教材例1-3：求无限长线电荷产生的电场。

先画出矢量线！（物理例12.11）





如何取高斯面？如何求面积分？

为求R处的场，闭合面**S**选为单位高圆柱面。

在两个底面上，$\boldsymbol{E}$与面的法向垂直，

故通量或积分值为零；

在柱面上，$\boldsymbol{E}$与$\boldsymbol{S}$的法向同向，且E值相同，

故：$$\oiint_s \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iint_s E_r \mathrm{d}S=E_r\iint_s \mathrm{d}S=2\pi R E_r=\tau/\varepsilon_0$$

与教材例1-1无限长线电荷的结果相同 $$E_{\mathrm{r}}=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 R}$$

例：无限大面电荷的场计算（物理例12.12），$E=\rho_{\mathrm{s}}\varepsilon_0/2$结论重要。

第3节 电位φ的定义以及由$\boldsymbol{E}$求φ

作业：书习题8、9、12（b和d中设$\varphi_1 > \varphi_2$）

电位函数与电场强度函数之间的关系？

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\varphi \qquad \text{因为} \quad \nabla\times\boldsymbol{E} = 0$$

那$\boldsymbol{E}$在$\boldsymbol{l}^0$方向上的分量E_l与电位函数的关系？

$$E_l = \boldsymbol{l}^0\cdot\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{l}^0\cdot\nabla\varphi = -\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\,l}$$

场强方向是高电位到低电位

进而有函数：$\varphi(\mathrm{X}) = -\int_{\mathrm{Q}}^{\mathrm{X}} E_l\,\mathrm{d}\,l = \int_{\mathrm{X}}^{\mathrm{Q}} E_l\,\mathrm{d}\,l$ Q是任意一点，称为参考点

a、b两点之间的电压值为：$U_{\mathrm{ab}} = \varphi_{\mathrm{a}} - \varphi_{\mathrm{b}} = \int_{\mathrm{a}}^{Q} \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} + \int_{\mathrm{Q}}^{\mathrm{b}} \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$

U_{ab}与积分路径$\boldsymbol{l}$有关吗？无关。故由$\boldsymbol{E}$求电压不必介意梯度关系，任意选一个路径积分即可。求电位的方法之一是先求$\boldsymbol{E}$再求其积分。

U_{ab}也可称为以b点电位为参考点的a点的电位值。

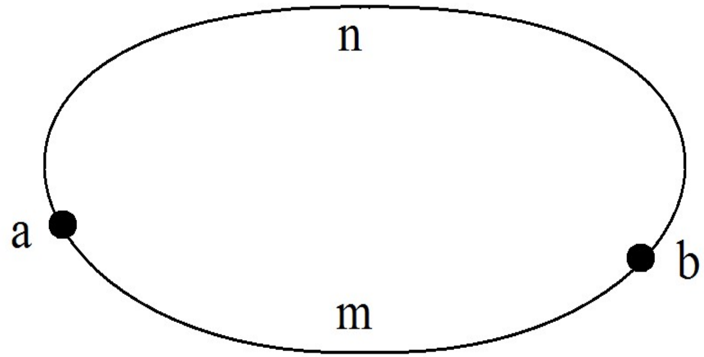
参考点的位置不同，各点电位值就不同；但其对应的场强相同。

对一个电位函数φ可任意定义参考点。无参考点，则φ不唯一。

以无限远处为参考点的a的电位值为：$\varphi_{\mathrm{a}} = \int_{\mathrm{a}}^{\infty} \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$

试证对无旋场下列积分结果与路径无关。

$$U_{ab}=\int_{a}^{b}\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}$$



证明：对无旋场环量必为零。
在闭合曲线上选取**a**和**b**两点，则有

$$\oint_{l}\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}=\int_{a\text{-}m}^{b}\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}+\int_{b\text{-}n}^{a}\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}=0$$

由上式得：$\int_{a\text{-}m}^{b}\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}=-\int_{b\text{-}n}^{a}\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}=\int_{a\text{-}n}^{b}\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}$ 由做功特性也已知此特性。

上式表明，从**a**至**b**的积分值与选取哪一条路径无关。

另外有：$\int_{a}^{b}\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}=\varphi(a)-\varphi(b)$

结论：无旋场$\boldsymbol{E}$从a至b的线积分等于其对应的标量场在**a**点与**b**点的值之差，且该差值是唯一的，不随积分路径改变。

由于电场强度定义为单位正电荷所受的力，

所以，电压的物理意义是：

U_{ab}是电场将单位正电荷从a点移动到b点所做的功，即

$$U_{ab}=\int_a^b \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}=\frac{1}{q}\int_a^b \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{l} \qquad (q=1)$$

因为电位与电场强度的关系：$\varphi(\boldsymbol{r})=\int_r^\infty E_r dr$

所以由无限大真空中电荷的电场强度式, 可得电荷产生的电位为：

$$d\varphi(\boldsymbol{r})=\frac{\rho(\boldsymbol{r}')dV'}{4\pi\varepsilon R} \qquad \varphi(\boldsymbol{r})=\iiint_V \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{4\pi\varepsilon R}dV'$$

类似的有面电荷与线电荷的电位的积分形式。

对点电荷有： $\varphi(r)=\int_r^\infty \frac{q}{4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2}dr=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$

电荷的电位符合叠加定理。

电位参考点的选取准则

选择参考点尽可能使电位表达式比较简单。

电荷分布在有限区域时，最好选择无限远处为参考点,

无限远有电荷时，应选择有限远处一点为参考点。

(什么样的问题电荷分布在无穷远区？)

位于静电场中导体的特性（待1-5节中具体证明）：

导体内电场为零，导体是等位体，导体表面是等位面。

非零场的一侧，导体表面的电力线垂直与导体表面。

至此，求自由空间中电荷的电位或电压有两种方法:

1）利用对电荷的积分。

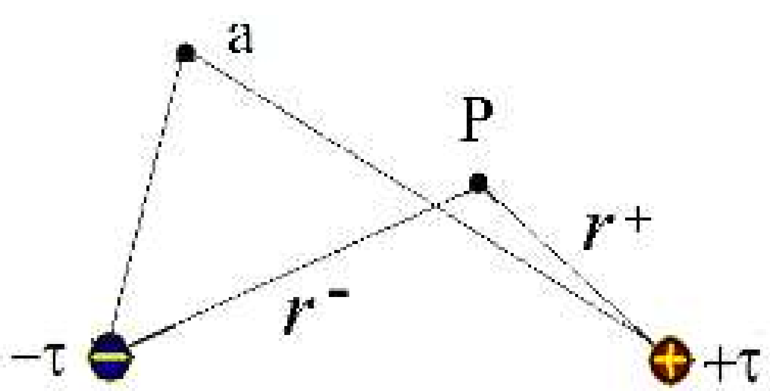
2）先求场强$\boldsymbol{E}$（用高斯定理），再对$\boldsymbol{E}$求线积分。

可选从场点到参考点的任意路径，简单的路径是处处与$\boldsymbol{E}$的方向一致。注意导体内$\boldsymbol{E}$的积分必为零。

例1：求自由空间中，相距一定距离的两根平行无限长直等量异号线电荷的电位，线电荷的线密度为$\pm\tau$。

- 理论上讲，求电位比求电场强度简单。
- 但有一个例外，利用高斯通量定理法求电场很简单，而直接求其电位可能却比较复杂。

解：此为平行平面场。
设a点为电位的参考点。
两个电荷的电位可以采用叠加定理，
故先求一根电荷的电位。
但两个电荷的电位参考点要相同。



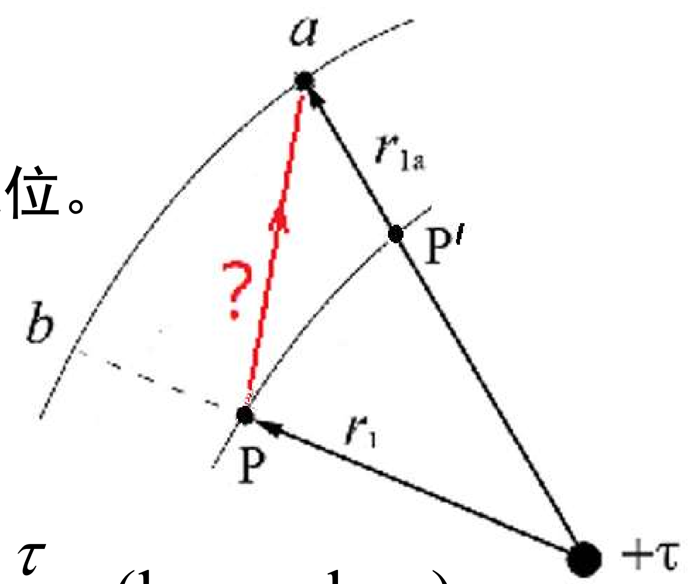
注意对E的积分路径的合理选取，
应选积分路径上要么E与路径切向平行，要么垂直。

1） 一根无限长直线电荷的电位

易得$+\tau$的场强：$\boldsymbol{E}=\tau/(2\pi\varepsilon_0 r)\boldsymbol{r}^0$。然后求电位。

设a点电位为零，即设r_{1a}的零等位面，

求P点电位。



积分路径可选从P到a吗？应P到b为好。

$$\varphi_{1\mathrm{P}}=\int_{r_1}^{r_{1b}} E_r \mathrm{d}r=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}(\ln r_{1b}-\ln r_1)=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}(\ln r_{1a}-\ln r_1)$$

或先判断出P点与P′点电位相同，将求P点变为求P′点的电位。

2）两根平行无限长直等量异号线电荷的电位

设参考点a位于两个电荷的中平面上，两电荷的电位相加得：

$$\boxed{\varphi_{\text{以对称面为参考点}}=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r^-}{r^+}}$$

距正电荷近的点电位一定是正，

此时有 $\ln r^+<\ln r^-$

故距正电荷的距离要在分母上。

电力线与等位面

E 的矢量线为电力线：电力线上每点的切向为该点电场强度的方向。若**d*l***是电力线一点处的切向长度元，电力线方程为：

$$\boxed{\boldsymbol{E} \times \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0}$$

在直角坐标系下：

$$\boxed{\frac{E_x}{\mathrm{d}x} = \frac{E_y}{\mathrm{d}y} = \frac{E_z}{\mathrm{d}z}}$$

电位相等的点构成的曲面为等位面，方程为: $\boxed{\varphi(x, y, z) = C}$

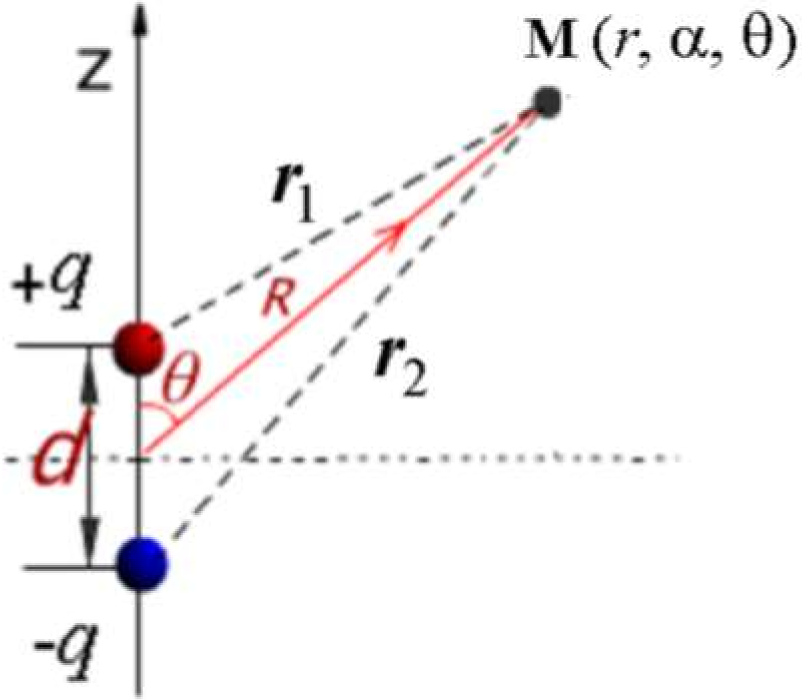
电力线与等位面处处正交！电力线是有向曲线，要画一个箭头。

- 等位面(线)画法基本要领：在最高与最低电位间取若干值，对每个电位值找出若干关键点（靠极板上的已知电位定性插值），连接这些点构成一个面或线。一般最少要画3个不同特征的面（线）。
- 导体是最正确的一根等位线，它约束了域内其它等位线的形状。
- 电力线一定垂直于等电位的导体极板面，这是要点。
- 先判断出正负电荷在极板上的分布是画电力线的另外一个基础。

第4节 电偶极子 Electric charge dipole

一种特殊结构的场源，仅为一个特例或例题。

当原子或分子中的正负电荷作用点不重合时，可视为电偶极子。



电偶极子是由一对等量异号电荷相距很近（即该距离远小于场点与电荷之间的距离）所构成的电荷源。

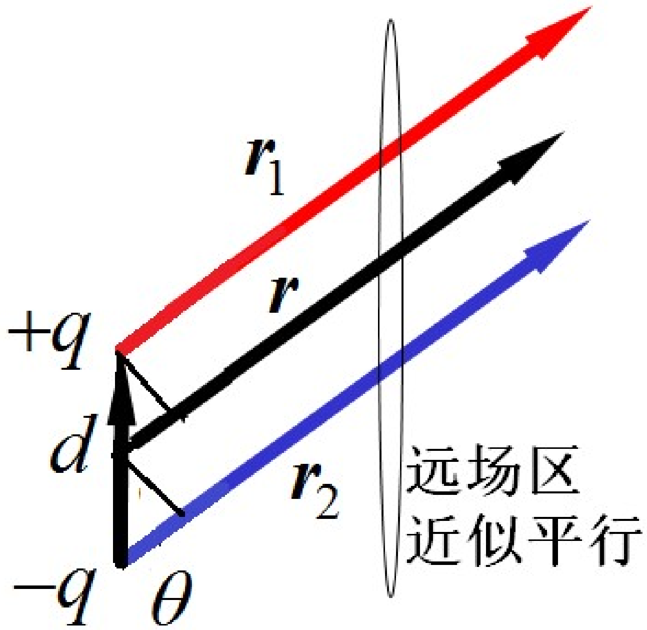
电偶极子的大小和方向用电偶极矩表示：

$$\boldsymbol{p}=qd$$

方向规定为从负指向正电荷。

电偶极子产生的电位近似表达式

在球坐标系中有：
$$\varphi_{\mathrm{M}}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r_2-r_1}{r_1 r_2}$$



对于 $r>>d$ 的远场区域：

$$r_1=r-\frac{d}{2}\cos\theta \qquad r_2=r+\frac{d}{2}\cos\theta$$

$$r_2-r_1=d\cos\theta\,; \qquad r_2 r_1=r^2$$

$$\varphi_{\mathrm{M}}=\frac{qd\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{e}_r}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

由 $\varphi = \dfrac{qd\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ 和 $\boldsymbol{E} = -\nabla\varphi$

以及球坐标系下

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\varphi = -(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\boldsymbol{r}^0 + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\boldsymbol{\theta}^0)$$

可得电场强度为：

$$\boldsymbol{E}_M = -\nabla\varphi = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(2\cos\theta\boldsymbol{e}_r + \sin\theta\boldsymbol{e}_\theta)$$

先求电位再根据电位结果求场强具有很大方便性。

当然此题也可以通过两个点电荷的电场叠加计算。

此节表达式不需要记。