第16讲　正弦稳态电路的功率

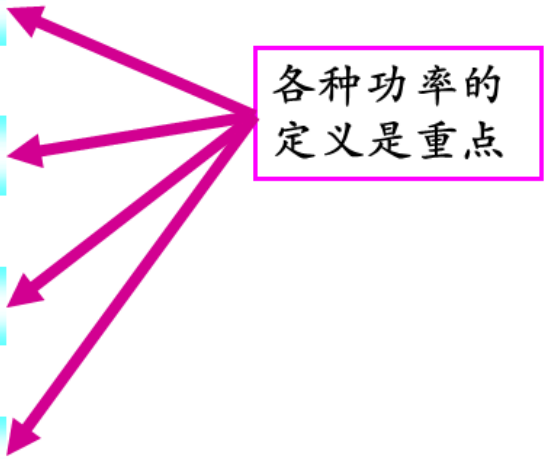
1 瞬时功率

2 平均(有功)功率

3 无功功率

4 复(数)功率

5 视在功率



本节课需要用纸笔和复数计算器

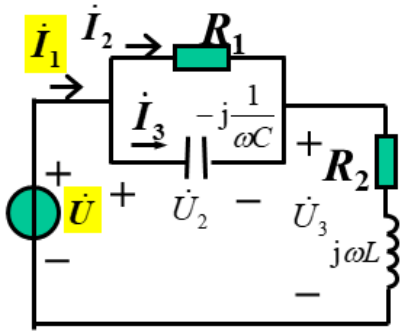
本讲重难点

- 有功（平均）功率/无功功率/复数功率/视在功率的定义式
- 功率因数及其补偿
- 功率表的接法和读数

单选题 1分

已知 $\dot{U}\dot{I}_1 = 59.8\angle 52.3° = 36.57 + j47.32$

下面叙述正确的是



A 电压源发出功率 59.8∠52.3°W

B 电压源发出功率 36.57W

C 电压源吸收功率 36.57W

D 什么也说明不了

无需计算
所有数据都已给出
仅需概念分析

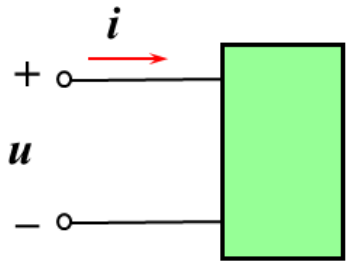
1 瞬时功率 (instantaneous power)

课前预习

定 义

$$p_{吸} \overset{\text{def}}{=} ui$$

单位：W（瓦）



单选题 1分

对于一个电容的两端施加50Hz工频电压，
其吸收的瞬时功率的频率为：

A 0 Hz

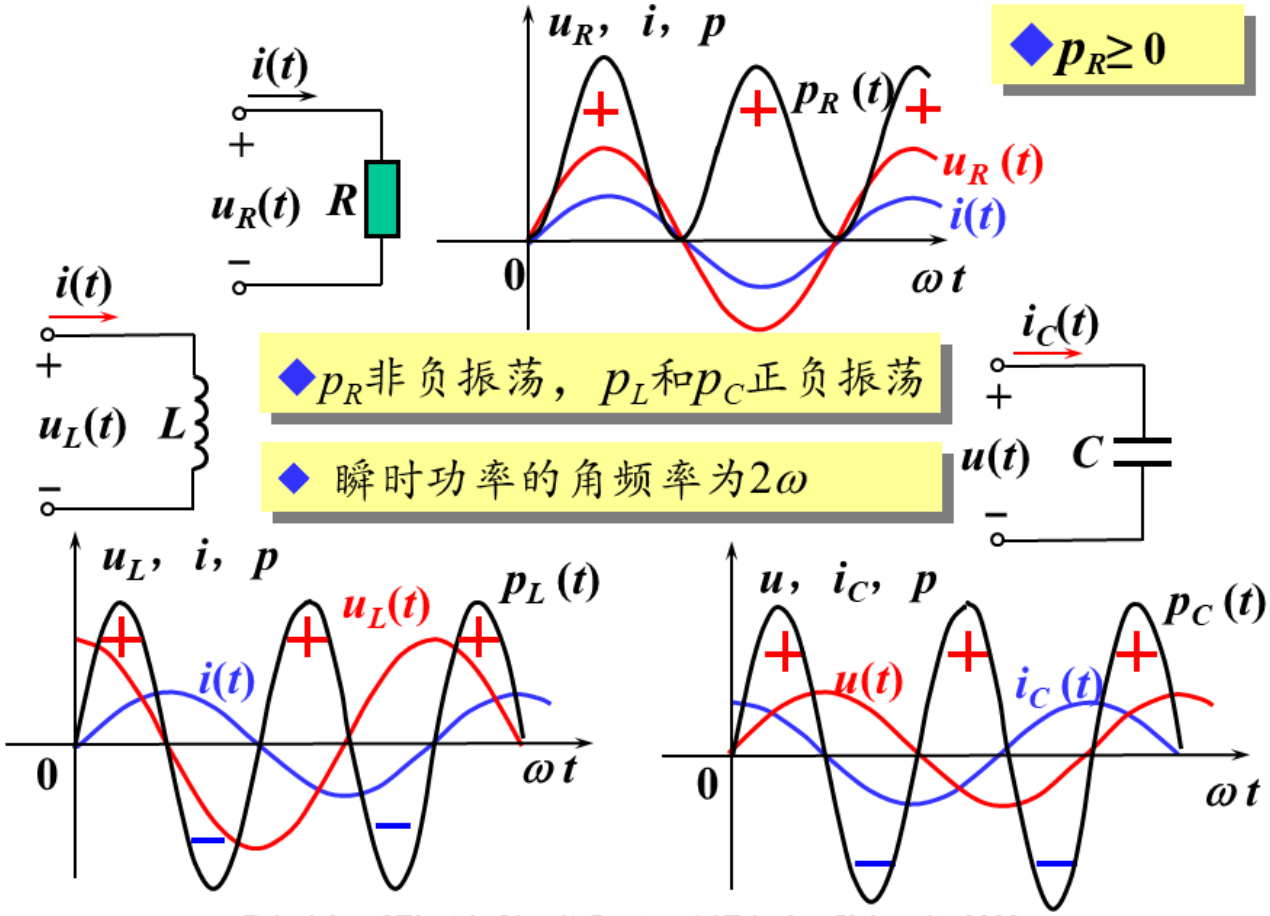
B 50 Hz

C 100 Hz

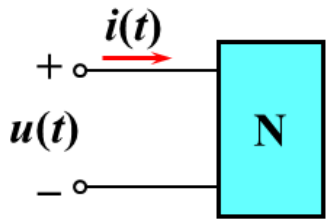
D 200 Hz

5

（1）正弦稳态下*RLC*元件的瞬时功率



（2）任意一端口网络吸收的瞬时功率



$$u(t)=\sqrt{2}U\sin\omega t$$

$$i(t)=\sqrt{2}I\sin(\omega t-\varphi)$$

$$p(t)=u(t)i(t)=\sqrt{2}U\sin\omega t\cdot\sqrt{2}I\sin(\omega t-\varphi)$$

$$=\sqrt{2}U\sin\omega t\cdot\sqrt{2}I\left(\sin\omega t\cos\varphi-\cos\omega t\sin\varphi\right)$$

$$=2UI\sin^2\omega t\cos\varphi-2UI\sin\omega t\cos\omega t\sin\varphi$$

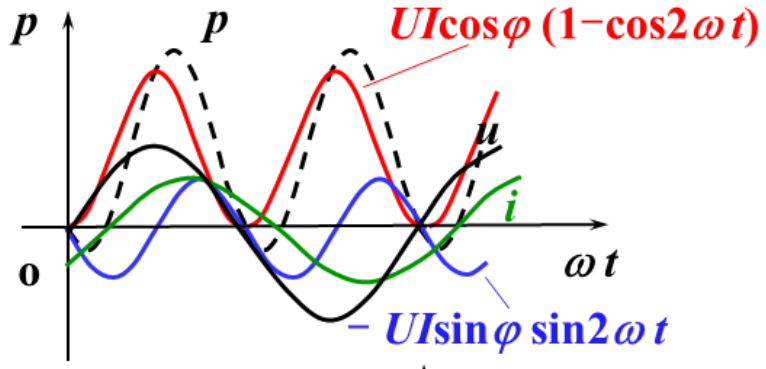
$$=UI\cos\varphi\,(1-\cos 2\omega t)-UI\sin\varphi\sin 2\omega t$$

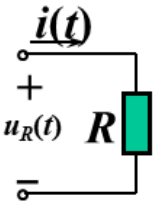
$$p(t)=u(t)i(t)=\sqrt{2}U\sin\omega t\cdot\sqrt{2}I\sin(\omega t-\varphi)$$

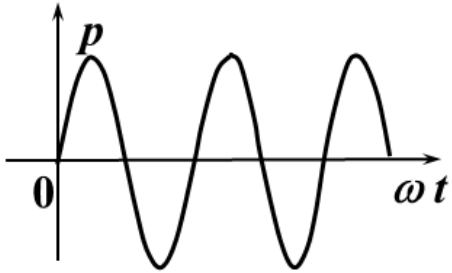
$$=UI\cos\varphi\,(1-\cos 2\omega t)-UI\sin\varphi\sin 2\omega t$$

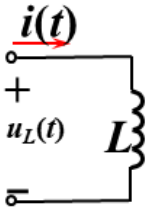
不可逆部分
（类似R的瞬时功率）

可逆部分
（类似L/C的瞬时功率）









2 平均功率

（1）平均功率 (average power)

$$u(t)=\sqrt{2}U\sin\omega t$$

$$i(t)=\sqrt{2}I\sin(\omega t-\varphi)$$

定义：瞬时功率的平均值。

常以符号P来表示。

$$p(t)=u(t)i(t)=\sqrt{2}U\sin\omega t\cdot\sqrt{2}I\sin(\omega t-\varphi)$$

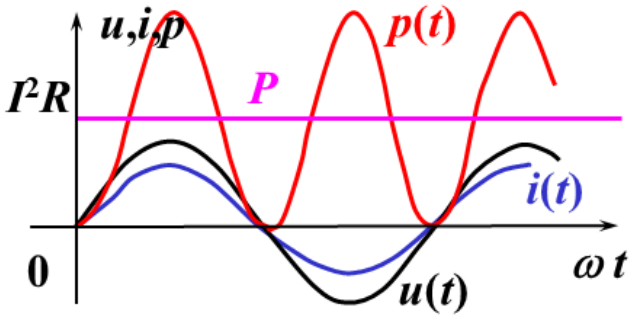
$$=UI\cos\varphi\,(1-\cos 2\omega t)-UI\sin\varphi\sin 2\omega t$$

$$P=\frac{1}{T}\int_0^T p\,\mathrm{d}t=UI\cos\varphi$$

平均功率P的单位也是W（瓦）

平均功率守恒：电路中所有元件吸收的平均功率的代数和为零。

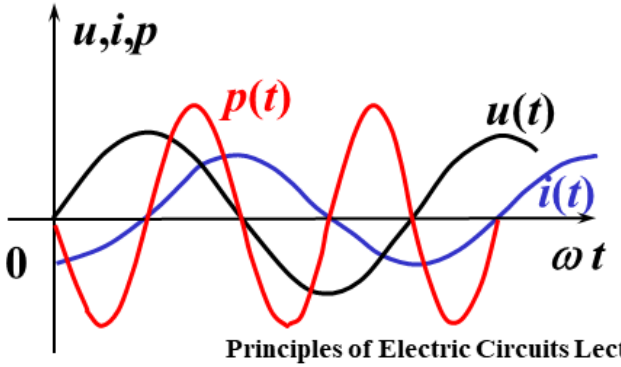
纯电阻(电阻元件或等效纯阻性网络)条件下，$\varphi = 0^\circ$



$$P = UI\cos\varphi = UI = I^2R = U^2/R$$

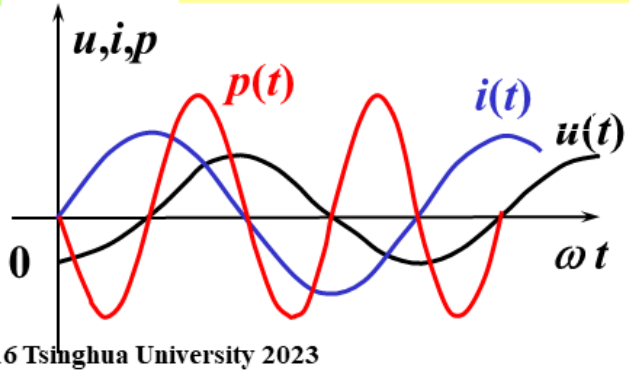
纯电感(电感元件或等效纯感性网络)条件下，$\varphi = 90^\circ$

$P = UI\cos 90^\circ = 0$



纯电容(电容元件或等效纯容性网络)条件下，$\varphi = -90^\circ$

$P = UI\cos(-90^\circ) = 0$



$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p\,\mathrm{d}t = UI\cos\varphi$$

$\cos\varphi$ 称为功率因数；$\varphi = \psi_u - \psi_i$，称作功率因数角。

对于无独立源网络，φ 即为其等效阻抗的阻抗角。

功率因数 $\cos\varphi$ $\begin{cases} 1, & \text{纯电阻} \\ 0, & \text{纯电抗} \end{cases}$

一般地，$0 \le \cos\varphi \le 1$

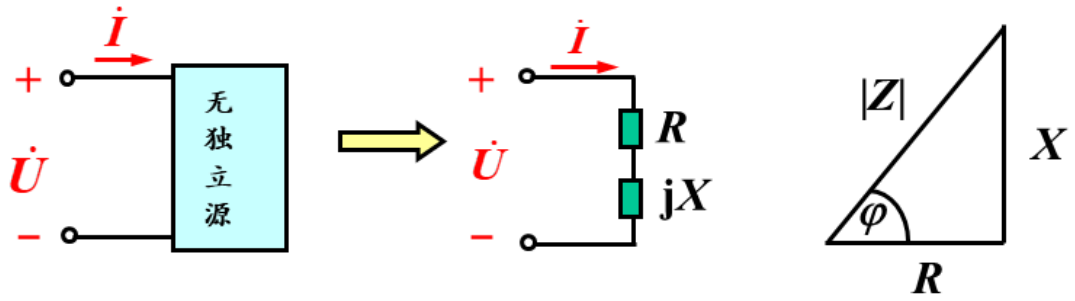
$X > 0$，$\varphi > 0$

感性，（电流）滞后（电压）的功率因数

$X < 0$，$\varphi < 0$

容性，（电流）超前（电压）的功率因数

例 $\cos\varphi = 0.5$（滞后），则 $\varphi = 60^{\circ}$



$$P = UI\cos\varphi = |Z|\, I\, I\cos\varphi = I^2|Z|\cos\varphi = I^2 R$$

平均功率就是

消耗在电阻上的功率。

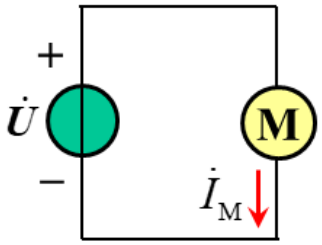
↓

有功功率(active power)

有功功率反映了阻抗中实部消耗的功率

例1 电动机如图，求其电流 $\dot{I}_{\mathrm{M}}$

U=220V，电动机P_{M}=1000W，$\cos\varphi_{\mathrm{M}}$=0.8（滞后）



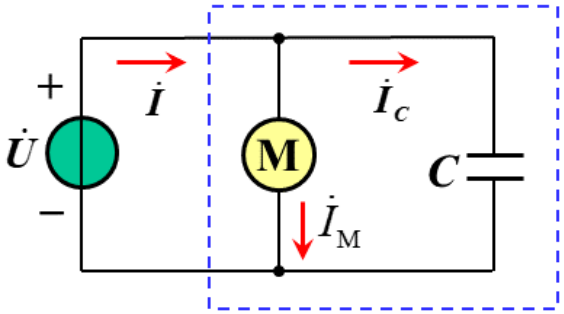
设 $\dot{U}=220\angle 0^{\circ}\,\mathrm{V}$

$$I_{\mathrm{M}}=\frac{P}{U\cos\varphi_{\mathrm{M}}}=\frac{1000}{220\times 0.8}=5.68\mathrm{A}$$

$\cos\varphi_{\mathrm{M}}=0.8$（滞后） 即：电动机的电流滞后电机电压

$$\varphi_{\mathrm{M}}=36.9^{\circ}\Longrightarrow \boxed{\dot{I}_{\mathrm{M}}=5.68\angle -36.9^{\circ}\ \mathrm{A}}$$

例2 在前题基础上，电动机并联一电容C=30μF，已知f=50Hz，求电源端看入虚线框中负载电路的功率因数



解 $\dot{U} = 220\angle 0^\circ \text{ V}$

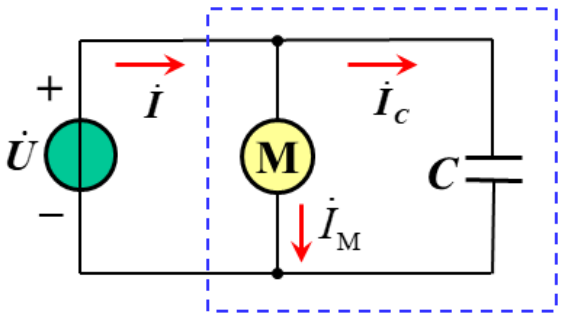
$\cos\varphi_M = 0.8$（滞后） $\dot{I}_M = 5.68\angle -36.9^\circ \text{ A}$

$\dot{I}_C = \text{j}\omega C 220\angle 0^\circ = \text{j}2.08\text{A}$

$\dot{I} = \dot{I}_M + \dot{I}_C = 4.54 - \text{j}1.33 = 4.73\angle -16.3^\circ \text{A}$

$\cos\varphi = \cos[0^\circ - (-16.3^\circ)] = 0.96$（滞后）

例　已知：U=220V，f=50Hz，
电动机P_M=1000W，
$\cos\varphi_M$=0.8（滞后），　C=30μF。
求虚线框中负载电路的功率因数



电动机的功率因数

$\cos\varphi_M = 0.8$（滞后）　$\dot{I}_M = 5.68\angle -36.9^\circ$ A

虚线框的功率因数

$\cos\varphi = 0.96$（滞后）　$\dot{I} = 4.73\angle -16.3^\circ$ A

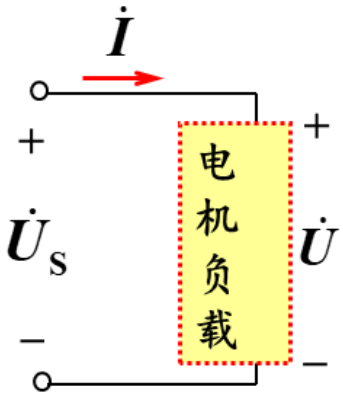
在并入电容前后，从电源看入，虚线框所示负载的功率因数有什么变化？
这么干有什么好处吗？

此处可以有弹幕

(2) 功率因数的提高

以异步电机为例：空载$\cos\varphi$ =0.2~0.3

满载$\cos\varphi$ =0.7~0.85



需要提高功率因数!

设：电源电压有效值$U_S = 10\text{V}$，

负荷吸收的有功功率$P=10\text{W}$（恒定）。

- $\cos\varphi=1$ $I=1\text{A}$
- $\cos\varphi=0.5$ $I=2\text{A}$
- $\cos\varphi=0.1$ $I=10\text{A}$

$$P = UI\cos\varphi$$

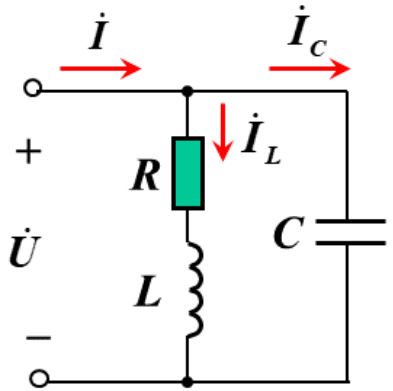
功率因数低带来的问题：

负载吸收相同有功功率时，(1)对电源有更高的要求(输出电流更大)，(2) 线路上的损耗随之增大。

功率因数低的用电户尤其是用电大户，必须提高功率因数。

解决办法：在用户端并联电容器；改造用电设备。

原理分析
(并电容)



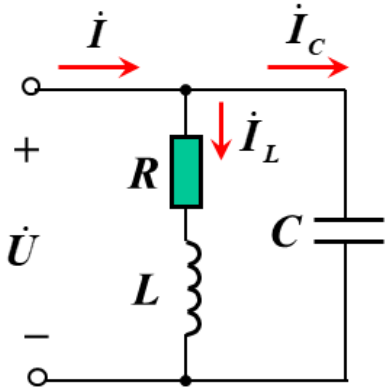
画相量图

此处可以有投稿

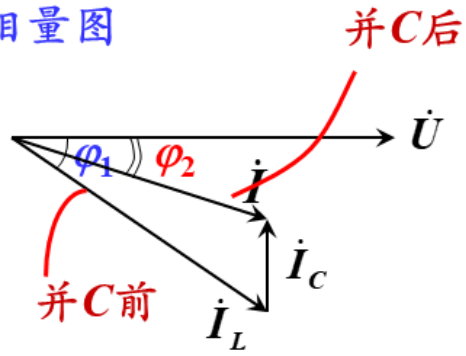
功率因数低的用电户尤其是用电大户，必须提高功率因数。

解决办法：在用户端并联电容器；改造用电设备。

原理分析
(并电容)



画相量图



提高了功率因数

一端口吸收的有功功率变了吗?

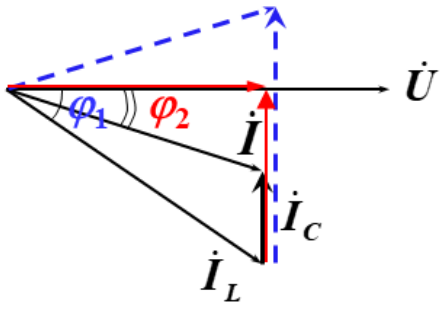
补偿容量的确定

$$I_C = I_L \sin\varphi_1 - I\sin\varphi_2$$

$$\left.\begin{aligned} I &= \frac{P}{U\cos\varphi_2} \\ I_L &= \frac{P}{U\cos\varphi_1} \end{aligned}\right\}\ \text{代入上式}$$

$$I_C = \frac{P}{U}(\mathrm{tg}\varphi_1 - \mathrm{tg}\varphi_2)$$

$$\therefore\ C = \frac{P}{\omega U^2}(\mathrm{tg}\varphi_1 - \mathrm{tg}\varphi_2)$$



补偿容量不同：欠补偿 / 全补偿 / 过补偿

你觉得应该采用哪种补偿？为什么？

弹幕

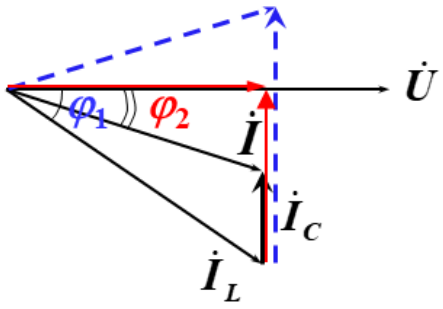
补偿容量的确定

$$I_C = I_L \sin\varphi_1 - I\sin\varphi_2$$

$$\left.\begin{aligned} I &= \frac{P}{U\cos\varphi_2} \\ I_L &= \frac{P}{U\cos\varphi_1} \end{aligned}\right\}\ \text{代入上式}$$

$$I_C = \frac{P}{U}(\mathrm{tg}\varphi_1 - \mathrm{tg}\varphi_2)$$

$$\therefore\ C = \frac{P}{\omega U^2}(\mathrm{tg}\varphi_1 - \mathrm{tg}\varphi_2)$$

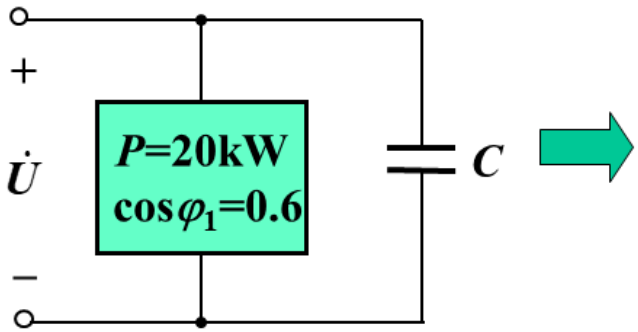


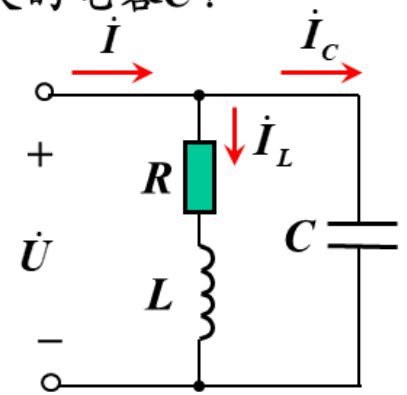
补偿容量不同：欠补偿 / 全补偿 / 过补偿

实际实施：性能 / 成本

一般补偿到λ=0.95(滞后)

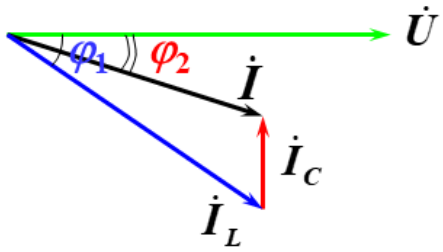
例 已知 f=50Hz，U=380V，P=20kW，$\cos\varphi_1$=0.6(滞后)。问：要使功率因数提高到0.9，需并联多大的电容C？





解 由 $\cos\varphi_1 = 0.6$ 得 $\varphi_1 = 53.13^\circ$

由 $\cos\varphi_2 = 0.9$ 得 $\varphi_2 = 25.84^\circ$



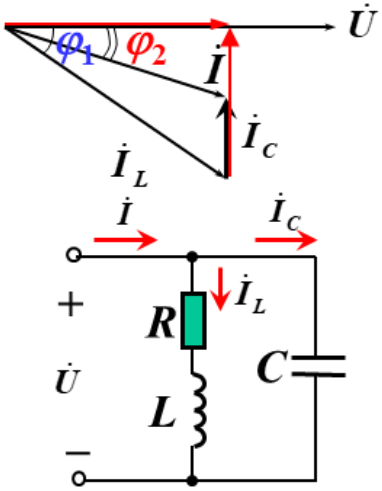
$$C = \frac{P}{\omega U^2}(\mathrm{tg}\varphi_1 - \mathrm{tg}\varphi_2)$$

$$= \frac{20\times10^3}{314\times380^2}(\mathrm{tg}53.13^\circ - \mathrm{tg}25.84^\circ)$$

$$= 375\,\mu\mathrm{F}$$

单选题 1分

如图所示电路，已知角频率为ω，若要达到全补偿，需要将功率因数提高到_____，需要补偿电容C=_____；



A　0，　$C=\dfrac{PL}{U^2R}$

B　0，　$C=\infty$

C　1，　$C=\dfrac{PL}{U^2R}$

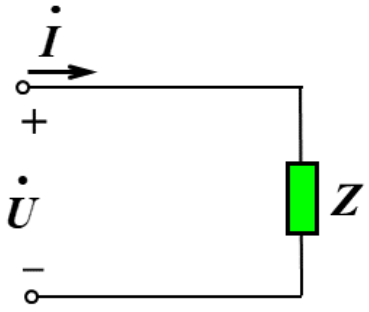
D　1，　$C=-\dfrac{PL}{U^2R}$

$\therefore\ C=\dfrac{P}{\omega U^2}(\mathrm{tg}\varphi_1-\mathrm{tg}\varphi_2)$

22

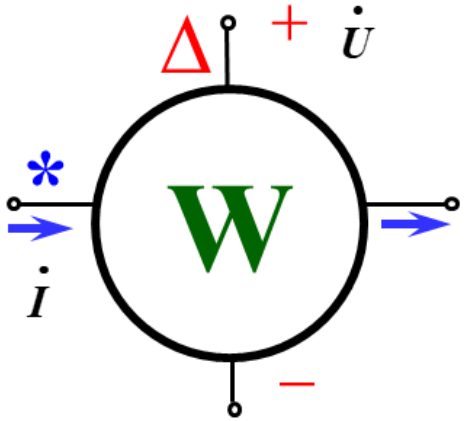
(3) 有功功率的测量

- 难点：要3个数值才能得到有功功率



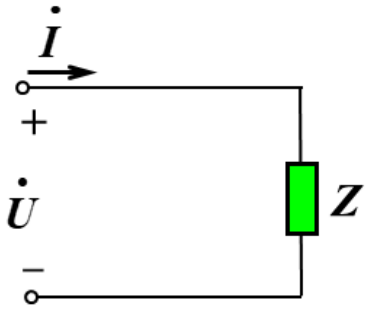
$$P_{吸} = UI\cos\varphi$$

功率表

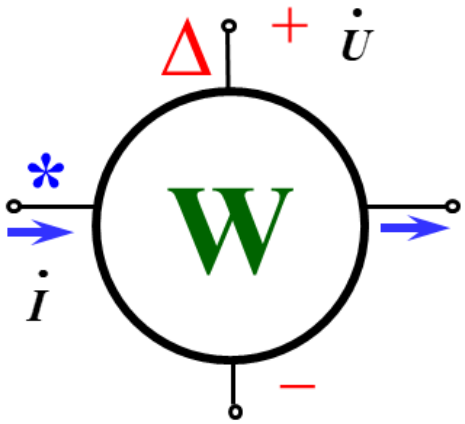


功率表接线：如果接线方式是使得电流从“*”端流入；电压线圈的“Δ”端接负载电压的正端→则功率表的示值反映的即为 $UI\cos(\psi_u-\psi_i)$

我们该如何接入功率表，使其读数即为负载Z吸收的有功功率？（投稿）

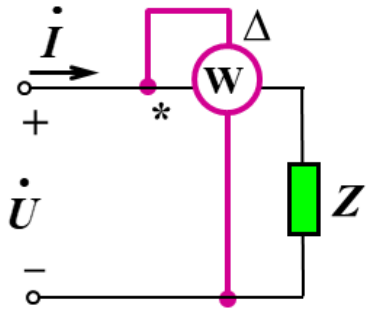


功率表



(1) 功率表接线：如果接线方式是使得电流从“*”端流入；电压线圈的“Δ”端接负载电压的正端→则功率表的示值反映的即为 $UI\cos(\psi_u-\psi_i)$

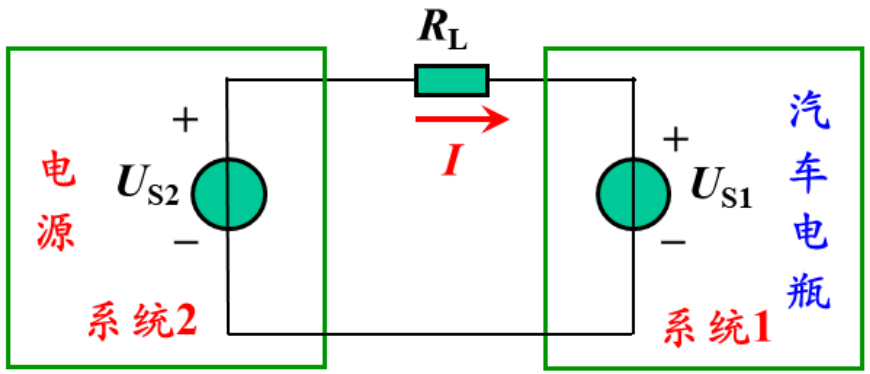
右侧功率表读数即为负载Z吸收的有功功率



(2) 功率表量程：测量有功功率时，*P*、*U*、*I*均不能超量程。

(4) 电力系统中有功功率的传输

直流系统



$$I = \frac{U_{S2} - U_{S1}}{R_L}$$

系统1（蓄电池）吸收的功率

$$P = U_{S1}\frac{U_{S2} - U_{S1}}{R_L}$$

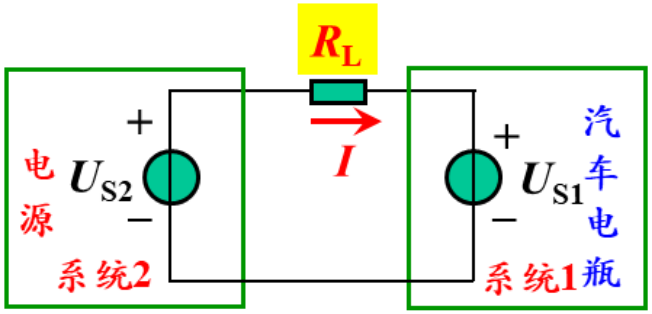
系统2向系统1输出的有功功率取决于：

- 电压U_{S1}，U_{S2}（以及二者之差）
- 线路电阻R_L

多选题 1分

增加直流系统

输电功率的方法有：



系统1吸收的功率为

$$P = U_{S1}\frac{U_{S2} - U_{S1}}{R_L}$$

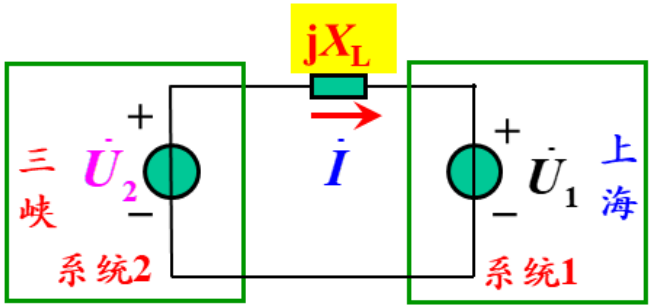
A 提高电压等级

B 增加系统间电压幅值差

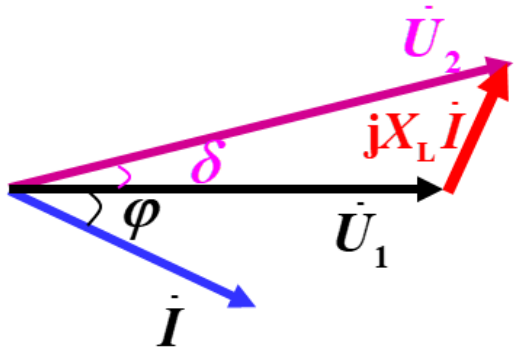
C 减小线路电阻

直流系统从电压高的向低的传输功率

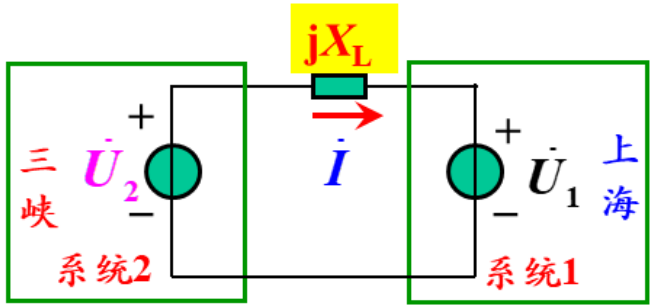
交流系统



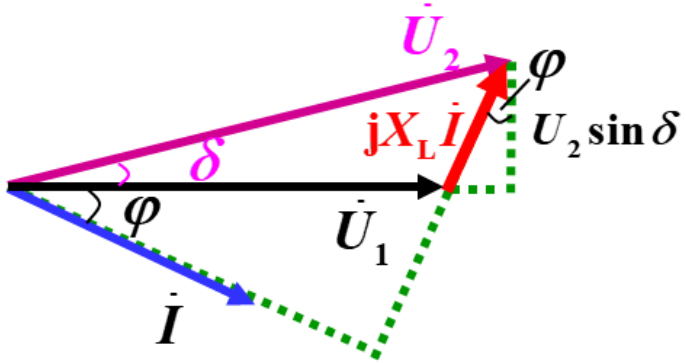
$$\dot{U}_2 = \dot{U}_1 + \mathrm{j}X_\mathrm{L}\dot{I}$$



交流系统



$$\dot{U}_2 = \dot{U}_1 + \mathrm{j}X_\mathrm{L}\dot{I}$$



系统1吸收的有功功率

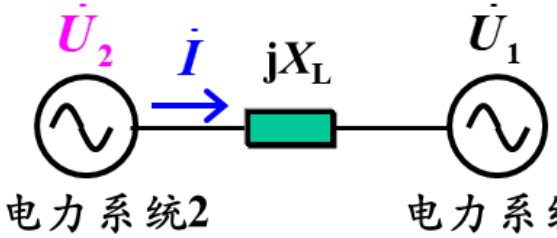
$$P = U_1 I\cos\varphi = U_1\frac{X_\mathrm{L} I\cos\varphi}{X_\mathrm{L}}$$

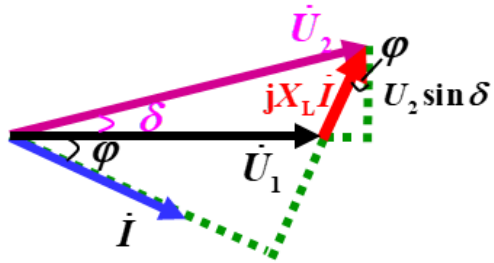
$$P = \frac{U_1 U_2\sin\delta}{X_\mathrm{L}}$$

系统2向系统1输出的有功功率取决于：

- 电压U_1，U_2
- 相角差δ
- 线路电抗X_L

多选题 1分





增加交流系统输电有功功率的方法有：

红包

系统1吸收的有功功率为

$$P=\frac{U_1U_2\sin\delta}{X_L}$$

A 提高电压等级

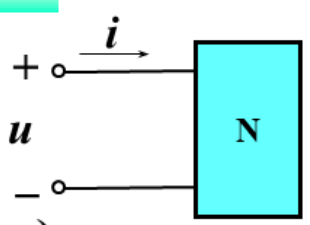
B 增加系统间电压幅值差

C 增加系统间电压相角差

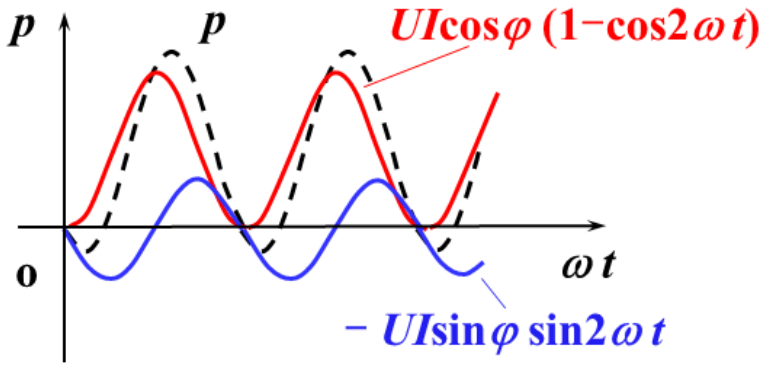
D 减小线路电抗

交流系统从电压相角领先的向落后的传输有功功率

3 无功功率



$$p(t)=u(t)i(t)=\sqrt{2}U\sin\omega t\cdot\sqrt{2}I\sin(\omega t-\varphi)$$
$$=UI\cos\varphi\,(1-\cos 2\omega t)-UI\sin\varphi\sin 2\omega t$$



不可逆部分
（类似*R*消耗瞬时功率）

可逆部分
（类似*L*/*C*瞬时功率）

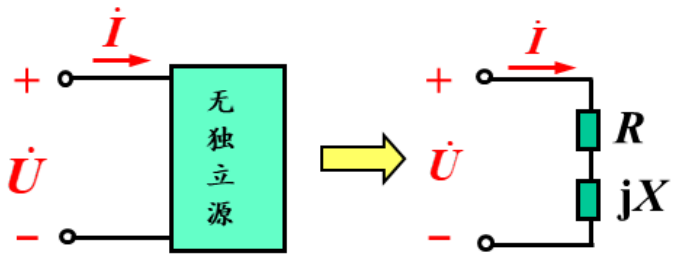
（1）无功功率 (reactive power) Q

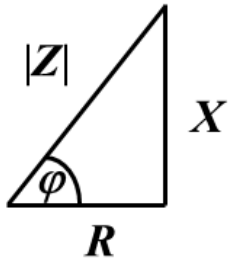
a）定义

$$p(t)=UI\cos\varphi\,(1-\cos 2\omega t)-UI\sin\varphi\sin 2\omega t$$

$$Q \overset{\text{def}}{=} UI\sin\varphi \quad \text{单位：var (乏)}$$

$$=|Z|\,I\,I\sin\varphi=I^2|Z|\sin\varphi=I^2X$$





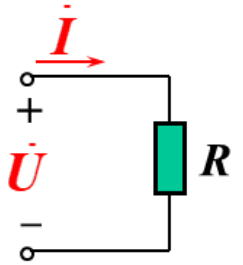
$\varphi=\psi_u-\psi_i$ 功率因数角

无功功率反映阻抗中虚部消耗的功率

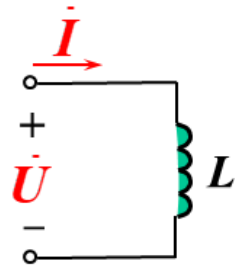
无功功率反映阻抗中电抗部分能量交换的最大速率

无功功率守恒：电路中所有元件吸收无功功率的代数和为零。

b） *R*、*L*、*C* 元件吸收的无功功率

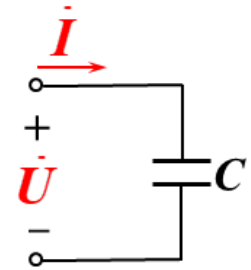


$$Q_R = UI\sin\varphi = UI\sin 0° = 0$$



$$Q_L = UI\sin\varphi = UI\sin 90° = UI = U^2/X_L = I^2X_L > 0$$

L 永远吸收无功功率

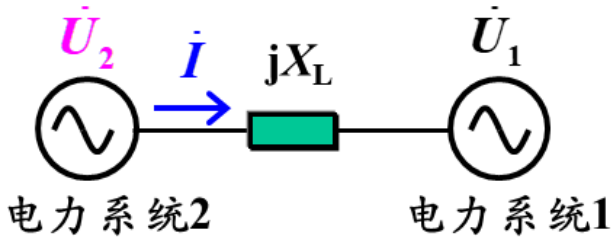


$$Q_C = UI\sin\varphi = UI\sin(-90°)$$

$$= -UI = -U^2/|X_C| = -I^2|X_C| < 0$$

C 永远发出无功功率

（2）电力系统中无功功率和电压的关系

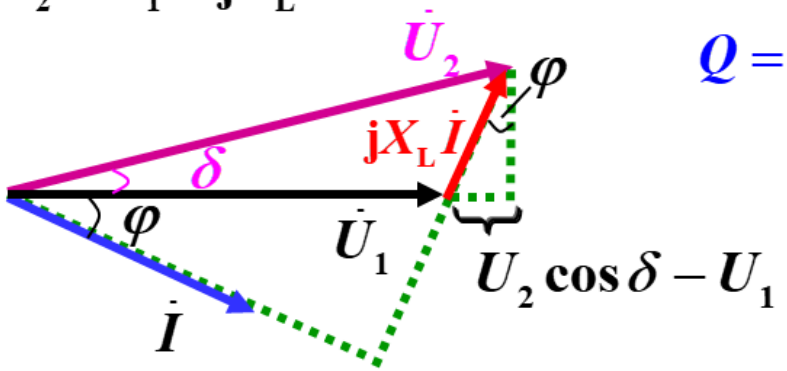


电力系统1吸收的无功功率

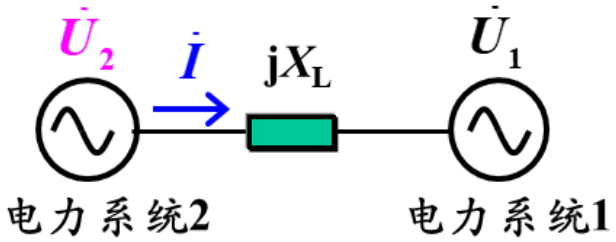
$$Q = U_1 I \sin\varphi$$

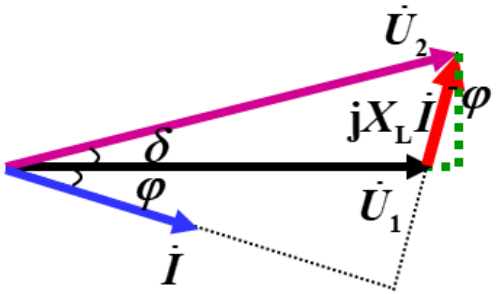
$$= U_1 \frac{X_L I \sin\varphi}{X_L}$$

$$\dot{U}_2 = \dot{U}_1 + jX_L\dot{I}$$

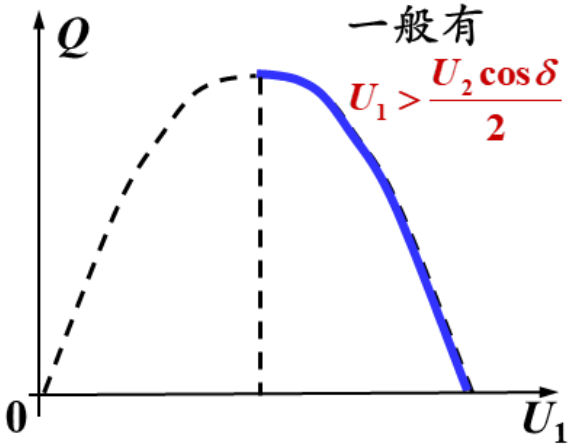


$$Q = \frac{U_1}{X_L}\left(U_2\cos\delta - U_1\right)$$



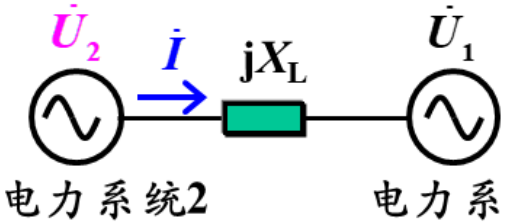


$$Q=\frac{U_1}{X_L}\left(U_2\cos\delta-U_1\right)$$



设电力系统2的端口电压U_2恒定
电力系统1吸收的无功功率是
关于U_1的二次函数

单选题 1分



“红包”

电力系统1吸收的无功功率为

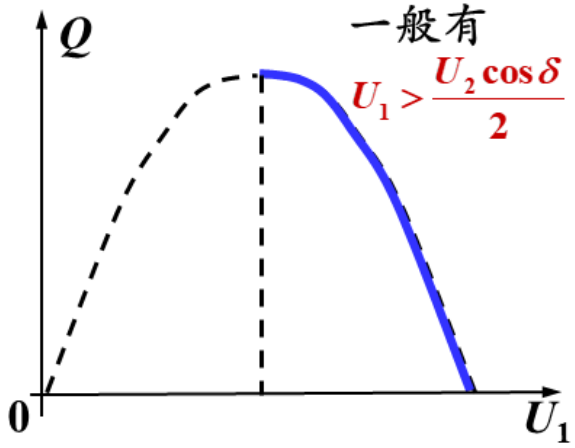
$$Q=\frac{U_1}{X_L}(U_2\cos\delta-U_1)$$

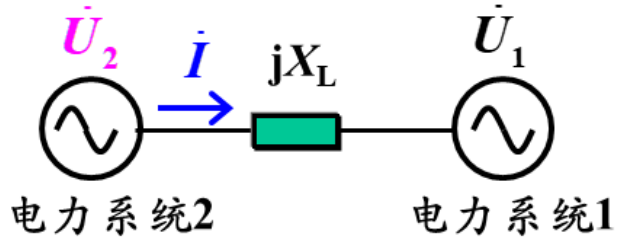
电力系统1吸收的无功功率越多，则：

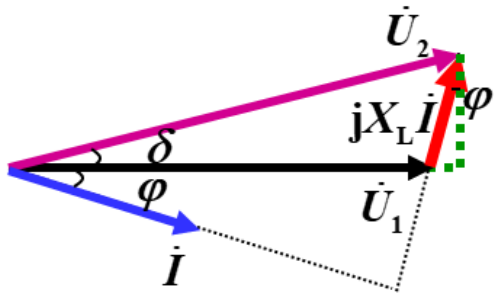
A 系统1电压越高

B 系统1电压越低

C 系统1电压不变

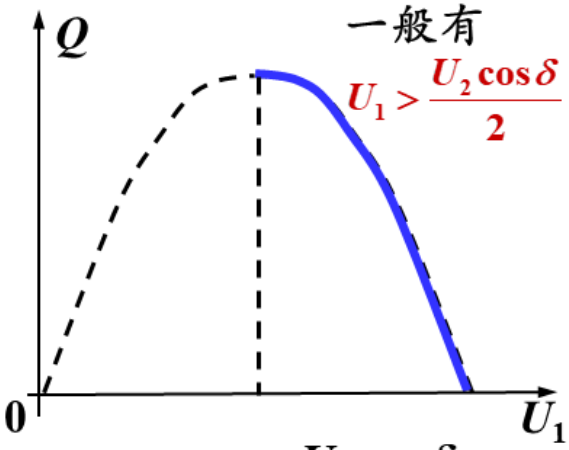






$$Q=\frac{U_1}{X_L}\left(U_2\cos\delta-U_1\right)$$

电力系统1吸收的无功功率是关于U_1的二次函数



该函数在$U_1=\frac{U_2\cos\delta}{2}$获得最大值

随着系统1吸收无功功率的增加

⬇

系统1母线上的电压随之降低

无功功率补偿
(类似功率因数提高)

再论无功功率和有功功率

$$p(t) = u(t)i(t) = \sqrt{2}U\sin\omega t \cdot \sqrt{2}I\sin(\omega t - \varphi)$$

$$= UI\cos\varphi\,(1-\cos 2\omega t) - UI\sin\varphi\sin 2\omega t$$

不可逆部分
（类似R的瞬时功率）

可逆部分
（类似L/C的瞬时功率）

有功功率就是“有用”的功率
无功功率就是“没用”的功率吗？真是“乏”吗？

不少能量处理元件必须要同时处理无功功率和有功功率

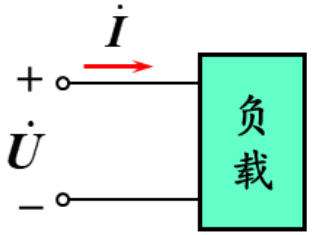
有功功率：人的智商

无功功率：人的情商

鸣谢：清华电机系夏清教授

4 复(数)功率 (complex power)

$\dot{U} = U\angle\psi_u$ ， $\dot{I} = I\angle\psi_i$



$$P = UI\cos(\psi_u - \psi_i) = UI\cos\varphi$$

$$Q = UI\sin(\psi_u - \psi_i) = UI\sin\varphi$$

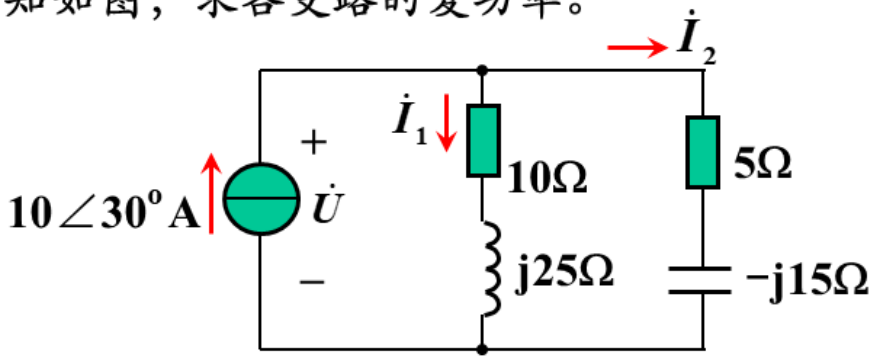
$$\dot{U}\dot{I}^* = U\angle\psi_u \times I\angle -\psi_i = UI\angle\psi_u - \psi_i$$

$$= UI\cos\varphi + \mathrm{j}UI\sin\varphi = P + \mathrm{j}Q$$

记： $\overline{S} = \dot{U}\dot{I}^*$ 称为复功率，单位:VA[伏安]

（2）复功率守恒 $\sum_{k=1}^{b}\overline{S}_k = \sum_{k=1}^{b}\dot{U}_k\dot{I}_k^* = 0$

例　已知如图，求各支路的复功率。



解

$$\dot{I}_1 = 10\angle 30^\circ \times \frac{5-\mathrm{j}15}{10+\mathrm{j}25+5-\mathrm{j}15} = 8.77\angle(-75.3^\circ) \quad \mathrm{A}$$

$$\dot{I}_2 = \dot{I}_S - \dot{I}_1 = 14.94\angle 64.5^\circ \quad \mathrm{A}$$

$$\dot{U} = 10\angle 30^\circ \times [(10+\mathrm{j}25)//(5-\mathrm{j}15)] = 236\angle(-7.1^\circ) \quad \mathrm{V}$$

电流源　$\bar{S}_{发} = 236\angle(-7.1^\circ) \times 10\angle(-30^\circ) = 1882 - \mathrm{j}1424$ VA

支路1　$\bar{S}_{1吸} = 236\angle(-7.1^\circ) \times 8.77\angle(75.3^\circ) = 769 + \mathrm{j}1923$ VA

支路2　$\bar{S}_{2吸} = 236\angle(-7.1^\circ) \times 14.94\angle(-64.5^\circ) = 1116 - \mathrm{j}3348$ VA

5 视在功率

定义：$S \overset{\text{def}}{=} UI$

单位：VA（伏安）

表征电气设备的容量

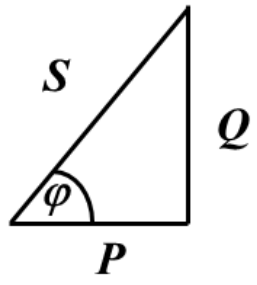
（例如发电机的发电容量）

有功功率、无功功率与视在功率的关系

有功功率：$P=UI\cos\varphi$　　单位：W

无功功率：$Q=UI\sin\varphi$　　单位：var

视在功率：$S=UI$　　单位：VA



功率三角形