第四章习题解答及提示

4.

1). 不正确，参看本章§2中的例；2). 不正确，参看本章§2幂级数的性质; 3). 不正确, 例如函数$f(z) = \frac{1}{2}(3z - \overline{z})$在$z = 0$处连续，但不可导，因此不能展成泰勒级数.

5. 令$w = z - 2$, 则原级数成为$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n w^2$, 原问题成为级数$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n w^2$能否在$w = -2$收敛而在$w = 1$发散？因为$|-2| = 2 > 1$根据$Abel$引理，该级数在$w = -2$收敛，则在$w = 1$必收敛.

7. 设$c_n = a_n + ib_n$, $a_n, b_n \in R, n \geq 0$. 若级数$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$的收敛半径是$R$, 级数$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$的收敛半径是$R_1$, 级数$\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$的收敛半径是$R_2$, 证明$R = \min\{R_1, R_2\}$.

另外，原题中的提示$<$应改为$\leq$.

第7题的证明：

不妨设$R_1 \leq R_2$, 则$\min\{R_1, R_2\} = R_1$. 若$|z| < R_1$, 则$|z| < R_2$, 由收敛半径的定义知，级数$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ 和级数$\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ 绝对收敛，即$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n z^n| < +\infty$ 和$\sum_{n=0}^{+\infty} |b_n z^n| < +\infty$, 这意味着

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |c_n z^n| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n z^n| + \sum_{n=0}^{+\infty} |b_n z^n| < +\infty,$$

即级数$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$绝对收敛，再由收敛半径的定义知$R \geq R_1 = \min\{R_1, R_2\}$.

若$|z| < R$, 由收敛半径的定义知级数$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$绝对收敛，而即$\sum_{n=0}^{+\infty} |c_n z^n| < +\infty$. 但$|a_n| \leq |c_n|$, 故$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n z^n| < +\infty$, 这意味着$R_1 \geq R$, 即$\min\{R_1, R_2\} \geq R$.

综上所述，$R = \min\{R_1, R_2\}$. 本题得证。

9. 设$r > 0$, 若级数$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n r^n$收敛，而$\sum_{n=0}^{+\infty} |c_n| r^n = +\infty$, 证明级数$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$的收敛半径是$r$.

第9题的证明：

设级数$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$的收敛半径为$R$. 因级数$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n r^n$收敛，由Abel定理知当$|z| < r$时，级数$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$绝对收敛，再由收敛半径的定义知$R \geq r$. 若$R > r$, 则由收敛半径的定义知级数$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n r^n$绝对收敛, 即$\sum_{n=0}^{+\infty} |c_n| r^n < +\infty$, 这与已知矛盾, 故$R \leq r$. 综上所述，得$R = r$. 本题得证。

10. 如果级数$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$在它的收敛圆的圆周上一点$z_0$处绝对收敛，证明它在收敛圆所围的闭区域上绝对收敛.

第10题的证明：

因级数$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z_0^n$绝对收敛，知$\sum_{n=0}^{+\infty} |c_n z_0^n| = M_0 < +\infty$, 因而当$|z| \le |z_0| = R$时，有

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |c_n z^n| \le \sum_{n=0}^{+\infty} |c_n z_0^n| = M_0 < +\infty,$$

即级数$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$绝对收敛，本题得证。

11. 把下列各函数展开成z的幂级数，并指出它们的收敛半径：

$$1)\quad \frac{1}{1+z^3}; \qquad 2)\quad \frac{1}{(1+z^2)^2}; \qquad 6)\quad e^{z^2}\sin z^2.$$

1) $\frac{1}{1+z^3} = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k z^{3k} = 1 - z^3 + z^6 - z^9 + \cdots, \qquad R = 1;$

2) $\frac{1}{(1+z^2)^2} = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k (k+1) z^{2k} = 1 - 2z^2 + 3z^4 - 4z^6 + \cdots, \qquad R = 1;$

6) $e^{z^2}\sin z^2 = z^2 + z^4 + \frac{z^6}{3} + \cdots, \quad R = +\infty.$

12. 求下列各函数在指定点z_0处的泰勒展开式，并指出它们的收敛半径：1)

$$\begin{aligned} \tfrac{z-1}{z+1} &= \tfrac{z-1}{z-1+2} = \tfrac{z-1}{2(1+\frac{z-1}{2})} = \tfrac{z-1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty} \tfrac{(-1)^k (z-1)^k}{2^k} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \tfrac{(-1)^k (z-1)^{k+1}}{2^{k+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \tfrac{(-1)^{n-1}(z-1)^n}{2^n}, \quad z_0 = 1, \qquad R = 2; \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned} \tfrac{z}{(z+1)(z+2)} &= \tfrac{2}{z+2} - \tfrac{1}{z+1} = \tfrac{1}{2(1+\frac{z-2}{4})} - \tfrac{1}{3(1+\frac{z-2}{3})} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \tfrac{(-1)^n (z-2)^n}{2^{2n+1}} - \sum_{n=0}^{+\infty} \tfrac{(-1)^n (z-2)^n}{3^{n+1}} \qquad , \\ &= \sum n + 0^{+\infty} (-1)^n \left[\tfrac{1}{2^{2n+1}} - \tfrac{1}{3^{n+1}}\right](z-2)^n, \qquad z_0 = -2, \qquad R = 3. \end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{z^2} &= \tfrac{1}{[1-(z+1)]^2} = \tfrac{1}{(1-w)^2} = (\tfrac{1}{1-w})' \\ &= \left(\sum_{k=0}^{+\infty} w^k\right)' = \sum_{k=1}^{+\infty} k w^{k-1} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) w^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(z+1)^n, \quad z_0 = -1, \quad w = z+1, \quad R = 1. \end{aligned}$$

16.

$$2)\frac{1}{z(1-z)^2}=\frac{1}{z}\left(\frac{1}{1-z}\right)'=\frac{1}{z}\left(\sum_{z^n}\right)'=\sum_{n=0}^{+\infty}nz^{n-2}=\sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)z^n,\quad 0<|z|<1;$$

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{z(1-z)^2} &= \tfrac{1}{z}\tfrac{1}{(z-1)^2}=\tfrac{1}{(1+(z-1))}\tfrac{1}{(z-1)^2}\\ &= \textstyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(z-1)^{n-2}=\sum_{n=-2}^{+\infty}(-1)^n(z-1)^n,\quad 0<|z-1|<1;\end{aligned}$$

$$3)\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}=\frac{-1}{[1-(z-1)]}-\frac{1}{z-1}=-\sum_{n=-1}^{+\infty}(z-1)^n,\quad 0<|z-1|<1;$$

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{(z-1)(z-2)} &= \tfrac{1}{z-2}-\tfrac{1}{z-1}=\tfrac{1}{z-2}-\tfrac{1}{1+(z-2)}\\ &= \tfrac{1}{z-2}-\tfrac{1}{(z-2)}\tfrac{1}{[1+\frac{1}{z-2}]}\\ &= \tfrac{1}{z-2}-\tfrac{1}{(z-2)}\textstyle\sum_{n=0}^{+\infty}\tfrac{(-1)^n}{(z-2)^n}\\ &= \textstyle\sum_{n=0}^{+\infty}\tfrac{(-1)^n}{(z-2)^{n+2}},\quad 1<|z-2|<+\infty;\end{aligned}$$

5)

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{z^2(z-i)} &= \tfrac{1}{[(z-i)+i]^2(z-i)}=\tfrac{1}{i^2[1+\frac{z-i}{i}]^2(z-i)}\\ &= \tfrac{-1}{(1+w)^2(z-i)}=\left(\tfrac{1}{1+w}\right)'\tfrac{1}{z-i}=\left(\textstyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^nw^n\right)'\tfrac{1}{z-i}\\ &= \textstyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^nnw^{n-1}\tfrac{1}{z-i}\\ &= \textstyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\tfrac{n(z-i)^{n-2}}{i^{n-1}}\\ &= \textstyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\tfrac{n(z-i)^{n-2}}{i^{n+1}},\quad w=\tfrac{z-i}{i},\quad 0<|z-i|<1.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{z^2(z-i)} &= \tfrac{1}{[(z-i)+i]^2(z-i)}=\tfrac{1}{(z-i)^3[1+\frac{i}{z-i}]^2}\\ &= \tfrac{1}{(z-i)^3(1+w)^2}=\tfrac{-1}{(z-i)^3}\left(\tfrac{1}{1+w}\right)'=\tfrac{-1}{(z-i)^3}\left(\textstyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^nw^{n-1}\right)\\ &= \textstyle\sum_{n=1}^{+\infty}\tfrac{(-1)^{n-1}ni^{n-1}}{(z-i)^{n+2}}\\ &= \textstyle\sum_{n=0}^{+\infty}\tfrac{(-1)^n(n+1)i^n}{(z-i)^{n+3}},\quad w=\tfrac{i}{z-i},\quad 1<|z-i|<+\infty.\end{aligned}$$