
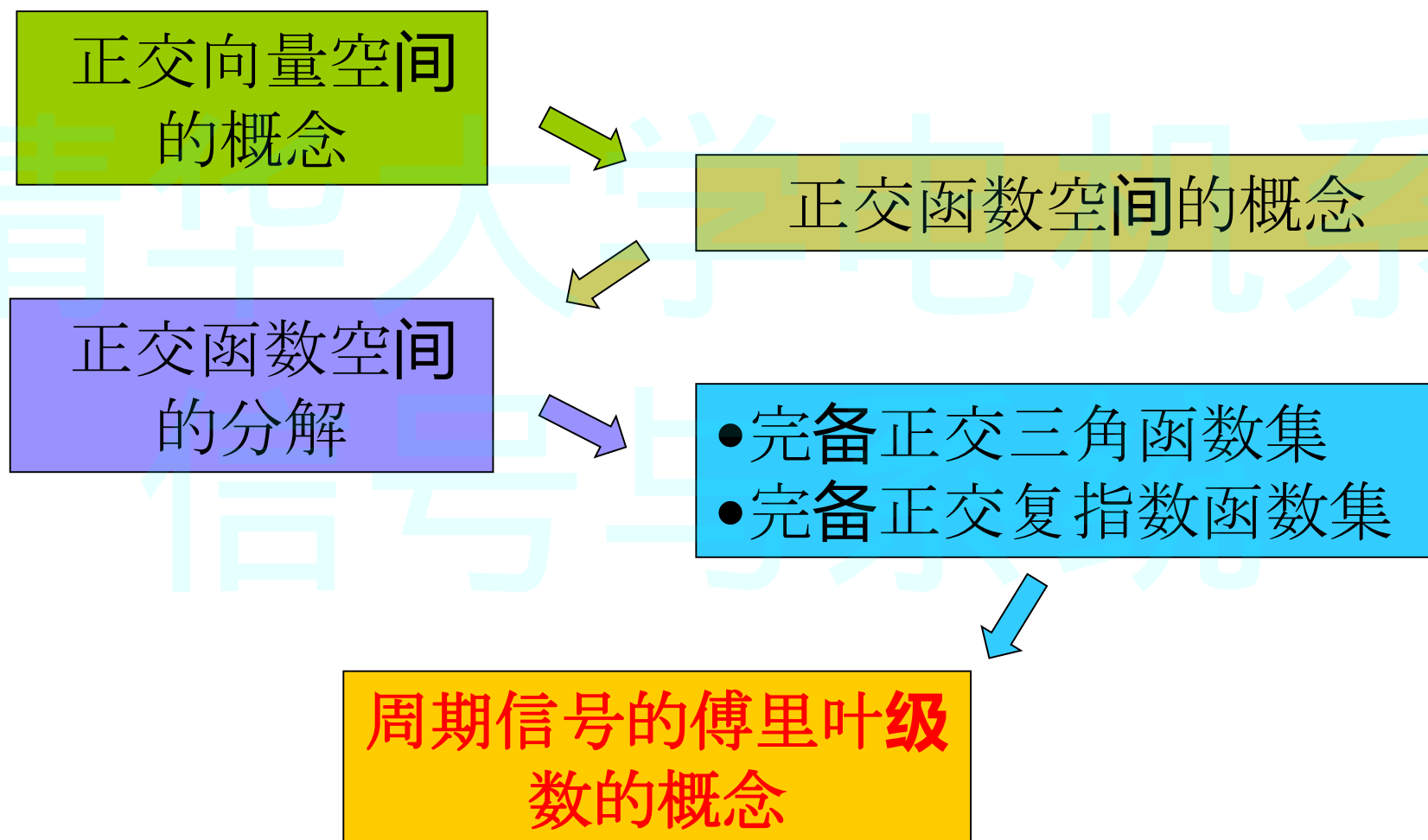


第7章



离散周期信号的傅里叶级数 DFS

复习——连续周期信号傅里叶级数



离散信号的投影

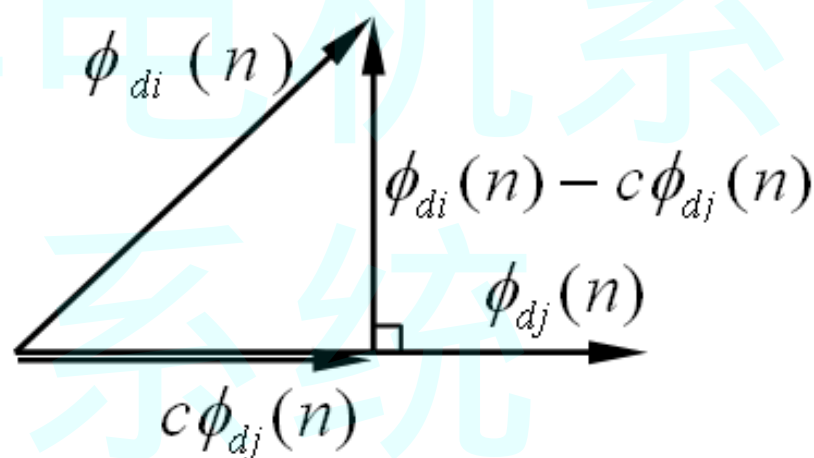
设有两个离散函数 $\phi_{di}(n)$ 和 $\phi_{dj}(n)$ ，在长度为 N 的离散时间区间 $(n_0, n_0 + N - 1)$ 内用函数 $c\phi_{dj}(n)$ 近似地表示 $\phi_{di}(n)$

$$\phi_{di}(n) \approx c\phi_{dj}(n)$$

所产生的差函数为 $\phi_{di}(n) - c\phi_{dj}(n)$

定义均方误差

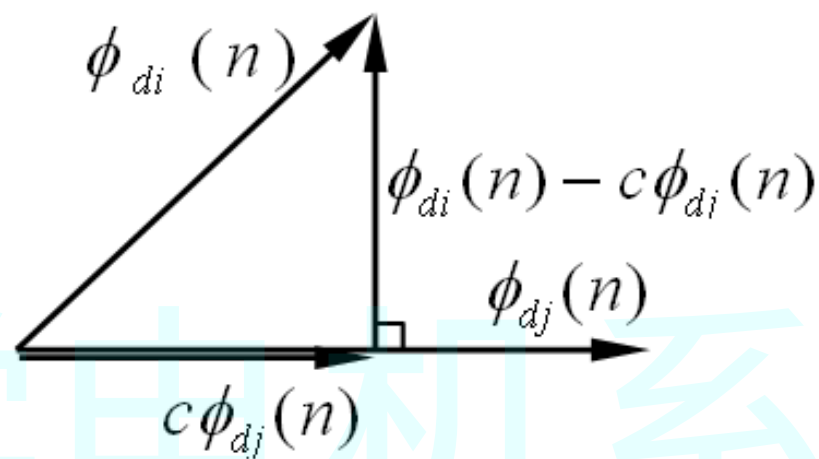
$$\bar{\varepsilon}^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=n_0}^{n_0+N-1} [\phi_{di}(n) - c\phi_{dj}(n)]^2$$



选择常数 c ，使得均方误差 $\bar{\varepsilon}^2$ 最小。

令： $\frac{d\bar{\varepsilon}^2}{dc} = 0$ ，

求得： $c = \frac{\sum_{n=n_0}^{n_0+N-1} \phi_{di}(n)\phi_{dj}(n)}{\sum_{n=n_0}^{n_0+N-1} \phi_{dj}^2(n)}$



称 $c\phi_{dj}(n)$ 为 $\phi_{di}(n)$ 在 $\phi_{dj}(n)$ 上的投影，或 $c\phi_{dj}(n)$ 为 $\phi_{di}(n)$ 在 $\phi_{dj}(n)$ 方向上的分量。

$$c = \frac{\int_{t_1}^{t_2} \phi_i(t)\phi_j(t)dt}{\int_{t_1}^{t_2} \phi_j^2(t)dt} = \frac{\langle \phi_i(t), \phi_j(t) \rangle}{\langle \phi_j(t), \phi_j(t) \rangle}$$

离散信号的内积

设两个离散信号 $\phi_{di}(n)$ 和 $\phi_{dj}(n)$ ，定义它们在长度为 N 的离散区间 $(n_0, n_0 + N - 1)$ 上的内积为

$$\langle \phi_{di}(n), \phi_{dj}(n) \rangle = \sum_{n=n_0}^{n_0+N-1} \phi_{di}(n) \phi_{dj}(n)$$

如果离散区间是从 $n=0$ 开始的 N 个点，则有

$$\langle \phi_{di}(n), \phi_{dj}(n) \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} \phi_{di}(n) \phi_{dj}(n)$$

当 $\phi_{di}(n)$ 和 $\phi_{dj}(n)$ 为复序列时，有

$$\langle \phi_{di}(n), \phi_{dj}(n) \rangle = \sum_{n=n_0}^{n_0+N-1} \phi_{di}(n) \phi_{dj}^*(n)$$

借助于函数内积的表述，信号投影系数可表示为

$$c = \frac{\langle \phi_{di}(n), \phi_{dj}(n) \rangle}{\langle \phi_{dj}(n), \phi_{dj}(n) \rangle}$$

当 $\langle \phi_{di}(n), \phi_{dj}(n) \rangle = 0$ 时，则 $c = 0$ ，此时称 $\phi_{di}(n)$ 在 $\phi_{dj}(n)$ 上的投影为零，或称 $\phi_{di}(n)$ 不包含在 $\phi_{dj}(n)$ 方向上的分量，或称 $\phi_{di}(n)$ 和 $\phi_{dj}(n)$ 正交。

离散函数的内积，也描述了两个函数在给定区间的相似性，当两个函数在给定区间正交时，它们的内积为零。

离散信号内积和正交的概念和连续信号具有相似性，

两个连续信号的内积：信号相乘，在给定区间上的积分；

两个离散信号的内积：信号相乘，在给定区间上的求和。

离散正交函数集

设有一组函数 $\phi_{d1}(n)$, $\phi_{d2}(n)$, ..., $\phi_{dK}(n)$, 把这组函数看作一个函数空间的 K 个元素。如果此组函数在给定 $(n_0, n_0 + N - 1)$ 区间满足: 任意两个不同元素的内积为零; 任一元素与自身的内积为一有限常数, 即

$$\langle \phi_{di}(n), \phi_{dj}(n) \rangle = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ A_i & i = j \end{cases} \quad i, j = 1, 2, 3, \dots, K$$

则称 $\phi_{d1}(n)$, $\phi_{d2}(n)$, ..., $\phi_{dK}(n)$ 为正交函数集。

如果 $\phi_{d1}(n)$, $\phi_{d2}(n)$, ..., $\phi_{dK}(n)$ 之外不再有非零函数 $\phi_{d(K+1)}(n)$, 满足

$$\langle \phi_{di}(n), \phi_{d(N+1)}(n) \rangle = 0 \quad i = 1, 2, \dots, K$$

则称 $\phi_{d1}(n)$, $\phi_{d2}(n)$, ..., $\phi_{dK}(n)$ 为完备正交函数集。

如果有

$$\langle \phi_{di}(n), \phi_{di}(n) \rangle = A_i = 1 \quad i = 1, 2, \dots, K$$

则称 $\phi_{d1}(n)$, $\phi_{d2}(n)$, ..., $\phi_{dK}(n)$ 为规范化的完备正交函数集。

离散信号正交分解

如果信号 $x_d(n)$ 在离散区间 $(n_0, n_0 + N - 1)$ 上绝对可和, 则在该区间内可表示为 **以此区间构成的完备正交函数集** 的各分量的线性组合

$$\begin{aligned} x_d(n) &= c_1 \phi_{d1}(n) + c_2 \phi_{d2}(n) + \cdots + c_K \phi_{dK}(n) \\ &= \sum_{k=1}^K c_k \phi_{dk}(n) \end{aligned}$$

$$n_0 < n < n_0 + N - 1$$

其中
$$c_k = \frac{\langle x_d(n), \phi_{dk}(n) \rangle}{\langle \phi_{dk}(n), \phi_{dk}(n) \rangle} \quad k = 1, 2, \dots, K$$

在完备正交分解情况下，离散信号能量满足关系

$$\sum_{n=n_0}^{n_0+N-1} x_d^2(n) = \sum_{k=1}^K \left[c_k^2 \sum_{n=n_0}^{n_0+N-1} \phi_{dk}^2(n) \right]$$

当 $x_d(n)$ 为复函数时，有

$$\sum_{n=n_0}^{n_0+N-1} |x_d(n)|^2 = \sum_{n=n_0}^{n_0+N-1} x_d(n) x_d^*(n) = \sum_{k=1}^K \left[c_k^2 \sum_{n=n_0}^{n_0+N-1} \phi_{dk}(n) \phi_{dk}^*(n) \right]$$

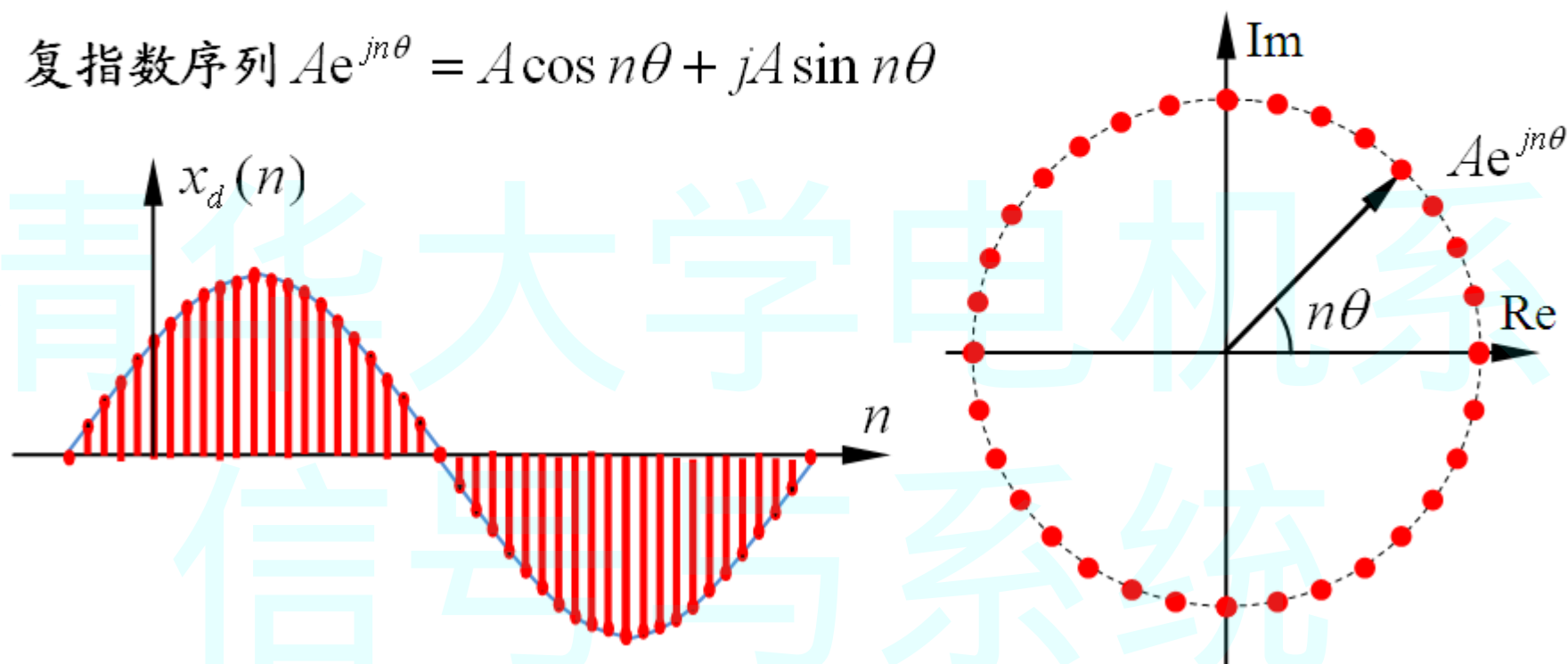
信号与系统

离散三角信号和离散复指数信号

余弦序列 $A \cos n\theta$

正弦序列 $A \sin n\theta$

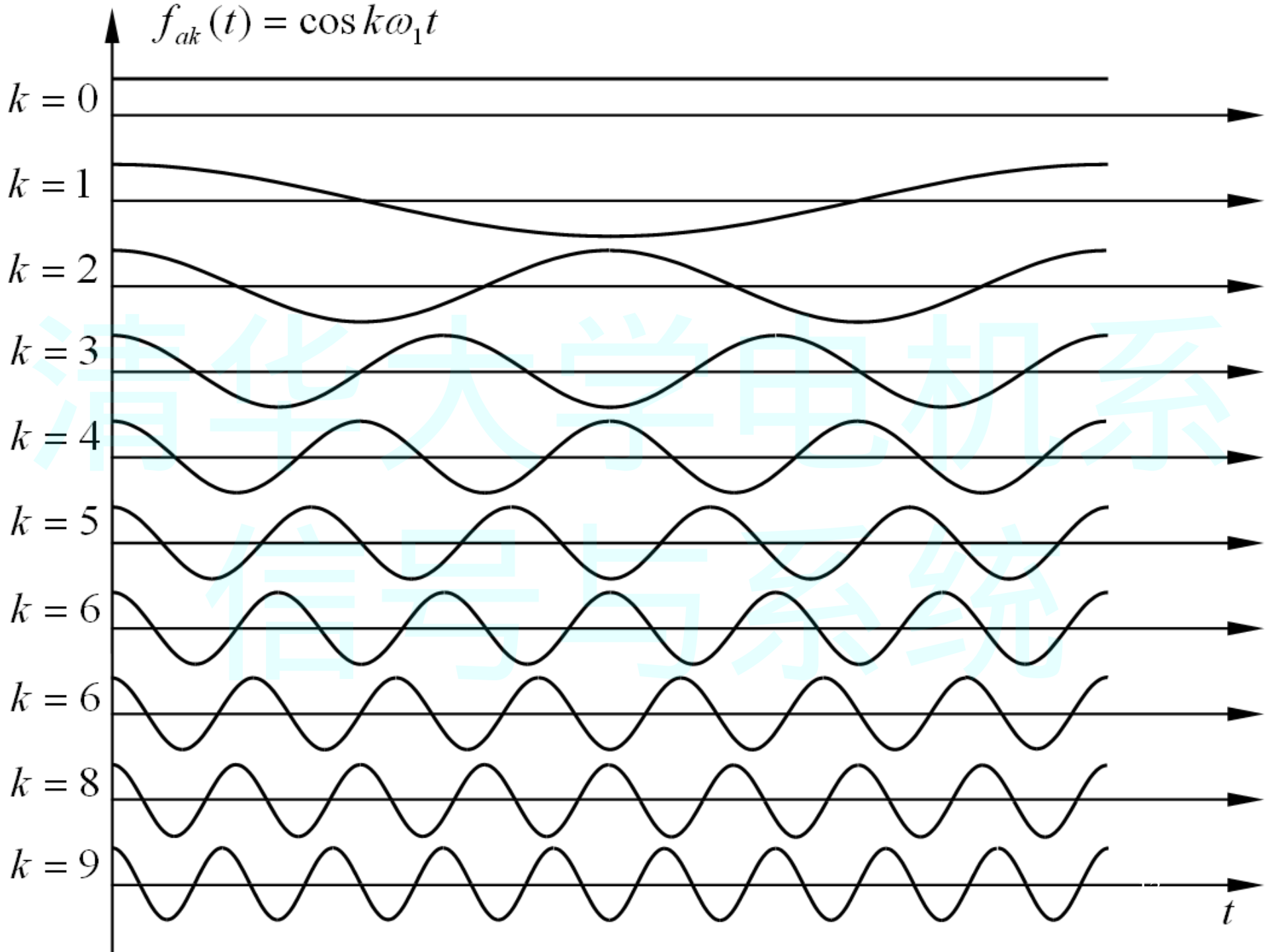
复指数序列 $Ae^{jn\theta} = A \cos n\theta + jA \sin n\theta$



例：已知一组连续余弦信号

$$f_{ak}(t) = \cos k\omega_1 t \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$k = 0$ 为直流, $k = 1$ 为基波, $k > 1$ 为 k 次谐波, 基波周期 $T_1 = 2\pi/\omega_1$ 。
随着频率 $k\omega_1$ 增大, 信号变化速度增大。

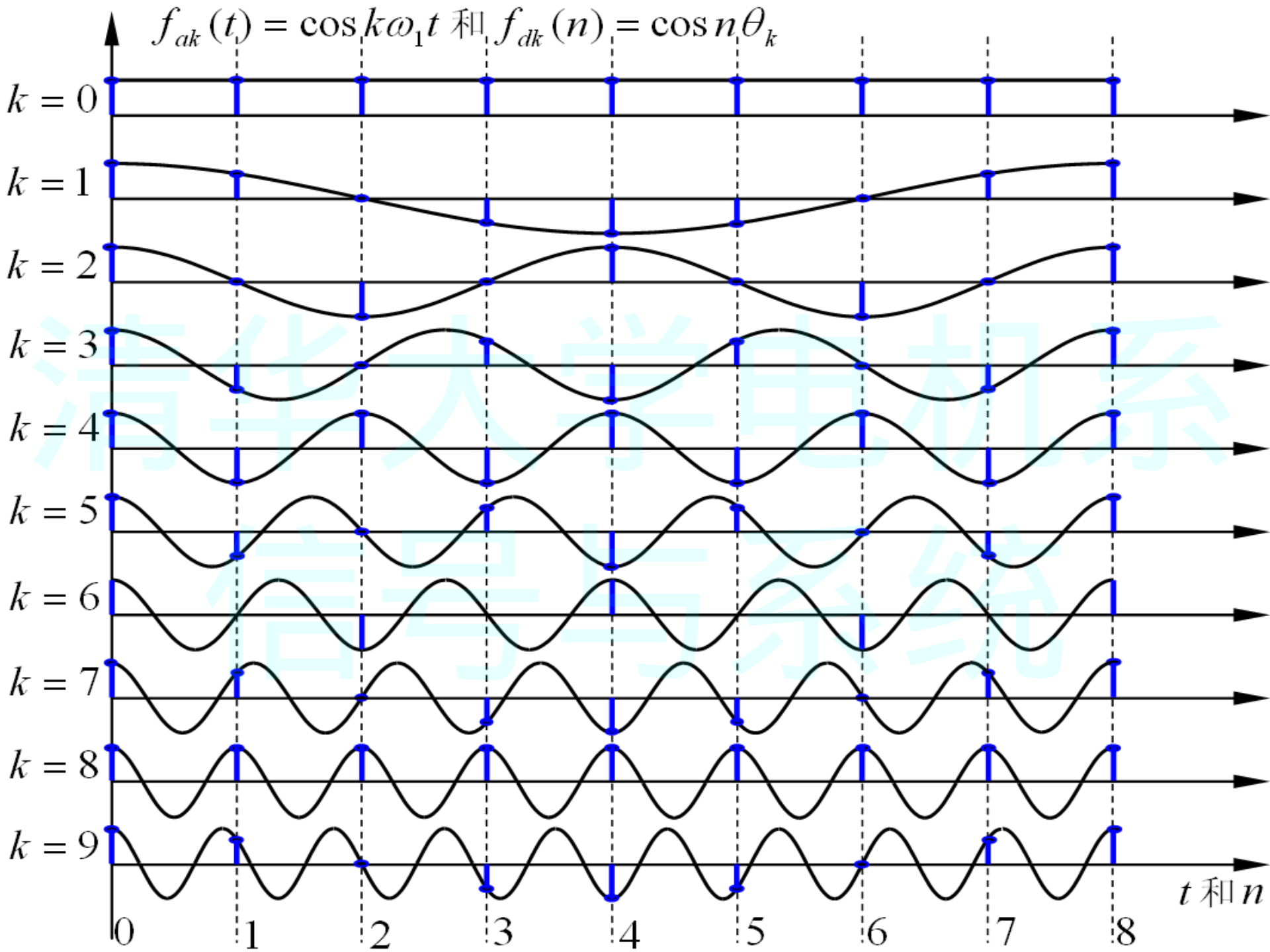


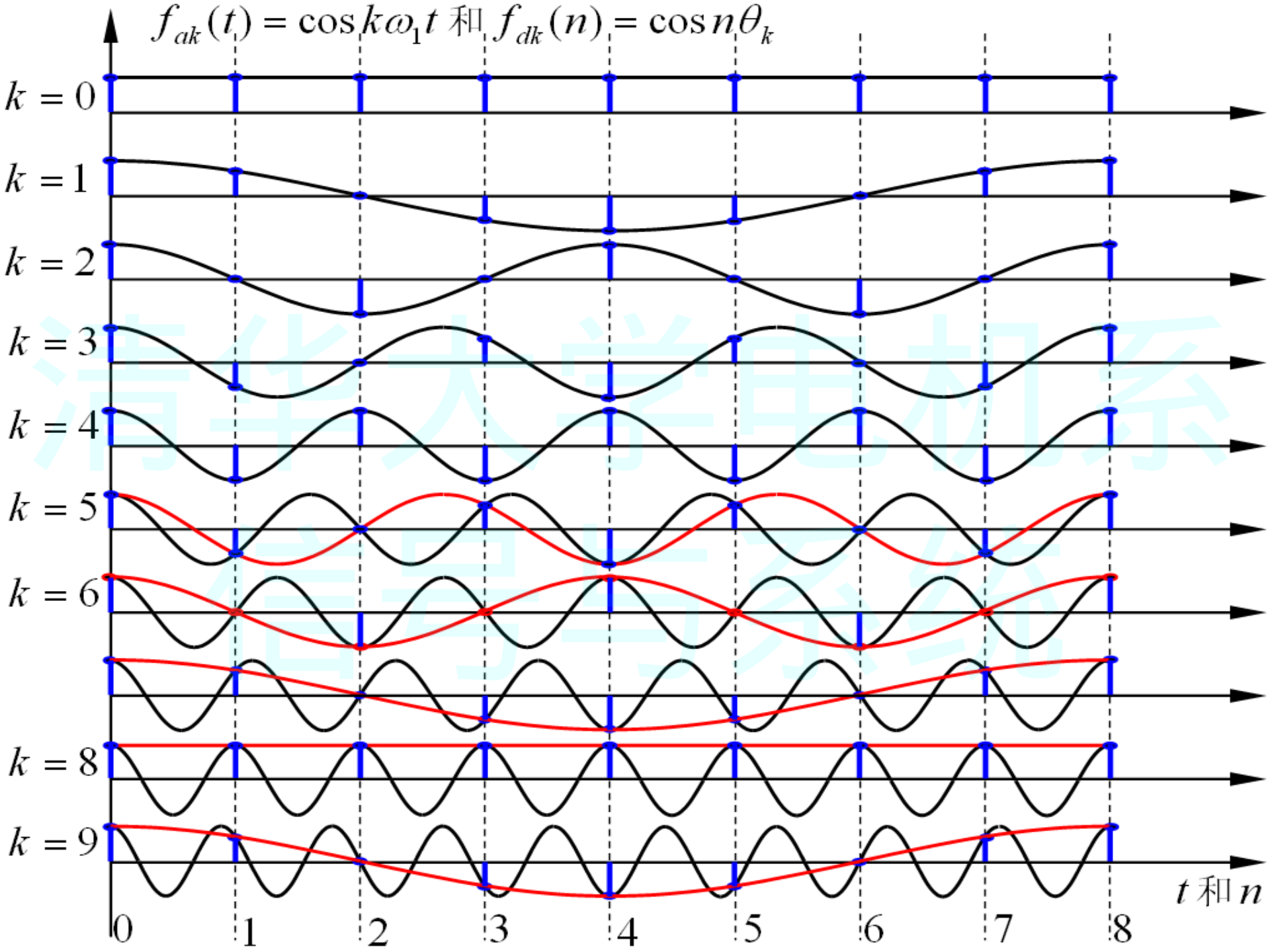
现以抽样间隔 $T_s = T_1 / 8$ 对这组连续周期信号进行抽样, 即一个基波周期抽样 8 点, 得一组离散序列

$$f_{dk}(n) = \cos k\omega_1 nT_s = \cos n\theta_k$$

$$\theta_k = k\theta_1 = k\omega_1 T_s = k\frac{\pi}{4}$$

清华大学电机系
信号与系统



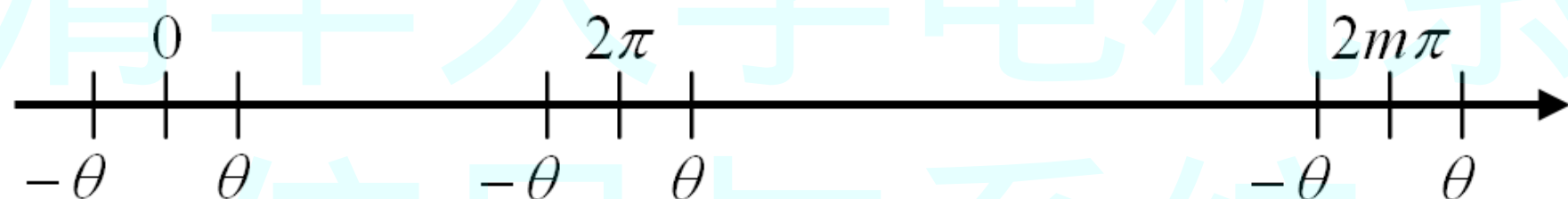


重复规律:

余弦序列: $\cos n(2m\pi \pm \theta) = \cos n\theta$, m 为整数。

正弦序列: $\sin n(2m\pi \pm \theta) = \pm \sin n\theta$, m 为整数。

复指数序列: $e^{jn(2m\pi \pm \theta)} = e^{\pm jn\theta}$, $e^{jn(2m\pi + \theta)} = [e^{jn(2m\pi - \theta)}]^*$, m 为整数。

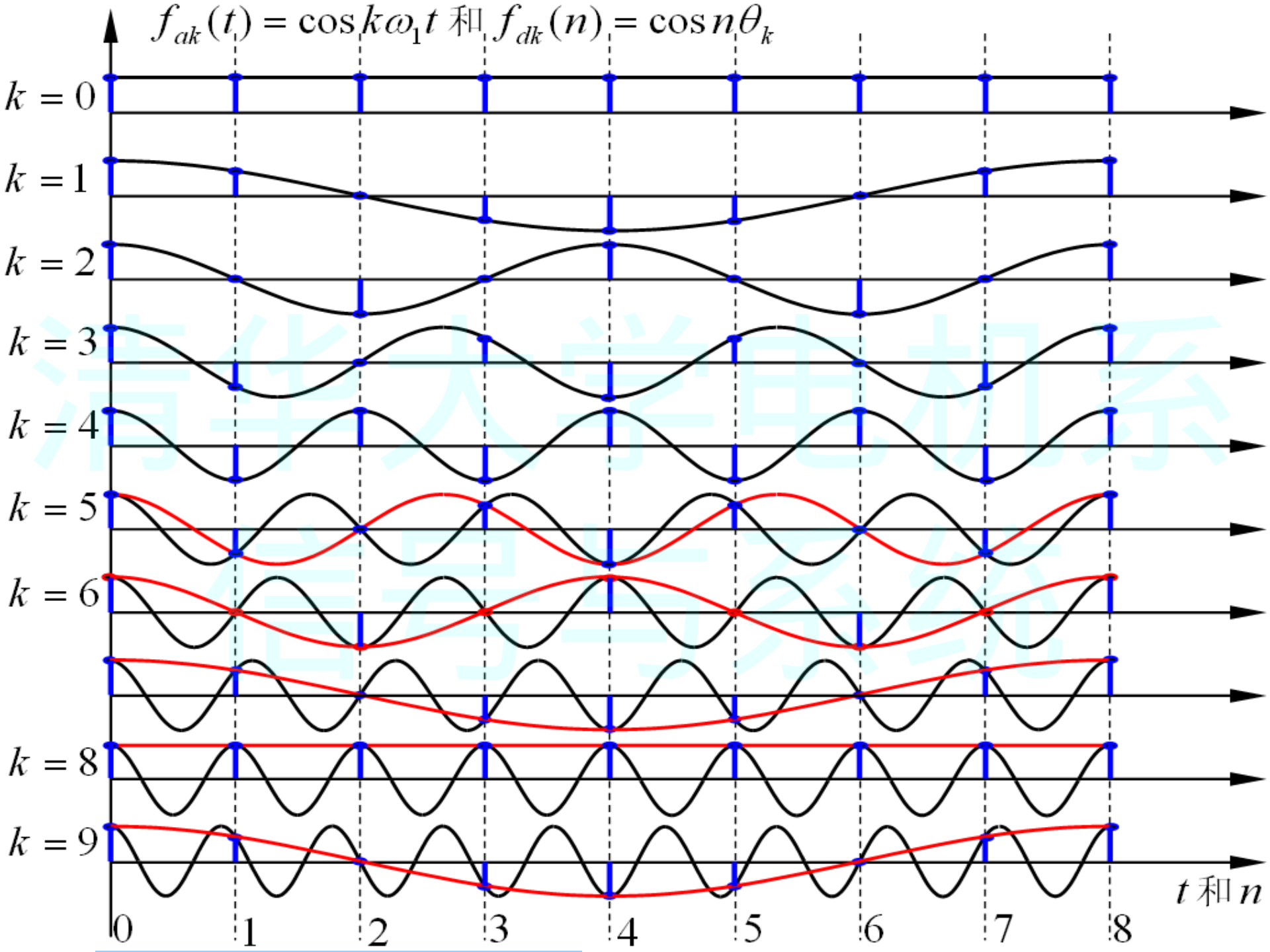


余弦序列 $\cos n\theta$ 、正弦序列 $\sin n\theta$ 和复指数序列 $e^{jn\theta}$ 都是离散角频率 θ 的周期函数, 周期是 2π 。

以上现象表明，在对连续周期信号进行抽样时，如果抽样间隔很大，使得一个抽样间隔中连续信号变化了很多周期，则这个变化在抽样所得的离散信号中无法反映，抽样结果为一个低频序列。

从抽样定理去理解！

清华大学电机系
信号与系统



完备正交复指数函数集

考察复指数函数集

$$\dots, e^{-jk\omega_1 t}, \dots, e^{-j2\omega_1 t}, e^{-j\omega_1 t}, 1, e^{j\omega_1 t}, e^{j2\omega_1 t}, \dots, e^{jk\omega_1 t}, \dots$$

其中 ω_1 为基本角频率, $T_1 = 2\pi / \omega_1$ 为基本周期, 此函数集各元素在区间 $(t_0, t_0 + T_1)$ 满足关系

$$\begin{aligned} \langle e^{jk_1\omega_1 t}, e^{jk_2\omega_1 t} \rangle &= \int_{t_0}^{t_0+T_1} e^{jk_1\omega_1 t} (e^{jk_2\omega_1 t})^* dt \\ &= \begin{cases} 0 & k_1 \neq k_2 \\ T_1 & k_1 = k_2 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^{jk\omega_1 t} &= e^{jk\omega_1 nT_s} \\ &= e^{jk\theta_1 n} \end{aligned}$$

$$k_1, k_2 = \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$$

此复指数函数集在基本周期区间 $(t_0, t_0 + T_1)$ 也是正交函数集, 并且也是完备正交函数集。

$$t = nT_s \longrightarrow \omega_1 t = \omega_1 nT_s = \theta_1 n$$

$$\omega_1 T_s = \theta_1$$

正交离散复指数函数集

给定离散复指数函数集

$$e^{j\frac{2\pi}{N_1}kn} = \boxed{e^{j\theta_1 kn}} = \cos \theta_1 kn + j \sin \theta_1 kn$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

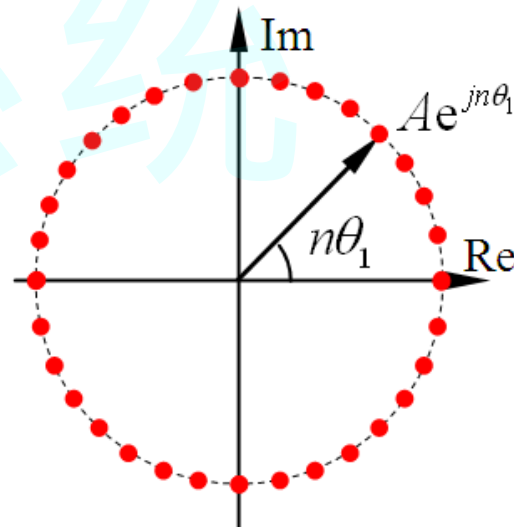
n 表示离散点的序号, k 表示函数集元素的序号。当 $k = 0$ 时, 对应于直流元素; 当 $k = \pm 1$ 时, 对应于基波元素, 基波的周期为 N_1 , 基波的

离散角频率为 $\theta_1 = \frac{2\pi}{N_1}$; 当 $|k| \geq 2$ 时, 对应于谐波元素, 谐波的离散

角频率为 $k\theta_1 = k\frac{2\pi}{N_1}$, 是基波角频率的整数倍。

函数周期性? 对 k , 对 n 均有周期为 N_1

函数集中有多少个不同元素? N_1 个



离散复指数函数集

$$e^{j\frac{2\pi}{N_1}kn} = e^{j\theta_1 kn} = \cos \theta_1 kn + j \sin \theta_1 kn$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

随谐波次数 k 的变化而周期变化，存在大量重复元素。在离散区间 $(0, N_1 - 1)$ 上，函数集中任意两个元素的内积为

$$\begin{aligned} \langle e^{j\theta_1 k_1 n}, e^{j\theta_1 k_2 n} \rangle &= \sum_{n=0}^{N_1-1} e^{j\theta_1 (k_1 - k_2)n} \\ &= \begin{cases} N_1 & k_1 - k_2 = mN_1 \\ 0 & k_1 - k_2 \neq mN_1 \end{cases} \quad m = \text{整数} \end{aligned}$$

因此，在离散区间 $(0, N_1 - 1)$ 上，此函数集只有 N_1 个相互正交的元素，其他元素都和这 N_1 个元素中的一个相同。可以任意选择 N_1 个互不相同的元素构成正交函数集，通常选取为 $e^{j\theta_1 kn}$ ， $k = 0, 1, 2, \dots, N_1 - 1$ 。

离散周期信号的傅立叶级数

已知离散周期信号 $x_d(n)$ ，周期 N_1 ，且 $x_d(n)$ 在一个周期上绝对可和。根据正交分解的概念， $x_d(n)$ 可以表示为正交离散复指数函数集的各分量的线性组合，即

$$x_d(n) = \sum_{k=0}^{N_1-1} X_d(k) e^{j\theta_1 kn} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

式中 $\theta_1 = 2\pi / N_1$ 为基波的离散角频率， $X_d(k)$ 为第 k 个分量的系数，有

$$X_d(k) = \frac{\langle x_d(n), e^{j\theta_1 kn} \rangle}{\langle e^{j\theta_1 kn}, e^{j\theta_1 kn} \rangle} = \frac{1}{N_1} \sum_{n=0}^{N_1-1} x_d(n) e^{-j\theta_1 kn}$$

由此得离散周期信号的傅立叶级数

$$X_d(k) = \frac{1}{N_1} \sum_{n=0}^{N_1-1} x_d(n) e^{-j\theta_1 kn} \quad k = 0, \pm 1 \pm 2, \dots$$

逆运算

$$x_d(n) = \sum_{k=0}^{N_1-1} X_d(k) e^{j\theta_1 kn} \quad n = 0, \pm 1 \pm 2, \dots$$

实际中习惯使用的定义为（更换了系数 $1/N_1$ 的位置）

$$X_d(k) = \text{DFS}[x_d(n)] = \sum_{n=0}^{N_1-1} x_d(n) e^{-j\theta_1 kn} \quad k = 0, \pm 1 \pm 2, \dots$$

$$x_d(n) = \text{IDFS}[X_d(k)] = \frac{1}{N_1} \sum_{k=0}^{N_1-1} X_d(k) e^{j\theta_1 kn} \quad n = 0, \pm 1 \pm 2, \dots$$

离散周期信号傅立叶级数的频谱函数 $X_d(k)$ 是 k 的周期函数，周期也为 N_1 。

离散与连续周期信号的傅立叶级数的比较

$$X_d(k) = \text{DFS}[x_d(n)] = \sum_{n=0}^{N_1-1} x_d(n) e^{-j\theta_1 kn} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$x_d(n) = \text{IDFS}[X_d(k)] = \frac{1}{N_1} \sum_{k=0}^{N_1-1} X_d(k) e^{j\theta_1 kn} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

其中 $\theta_1 = 2\pi / N_1$

$$F(k\omega_1) = \frac{\langle f(t), e^{jk\omega_1 t} \rangle}{\langle e^{jk\omega_1 t}, e^{jk\omega_1 t} \rangle} = \frac{1}{T_1} \int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t) e^{-jk\omega_1 t} dt \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

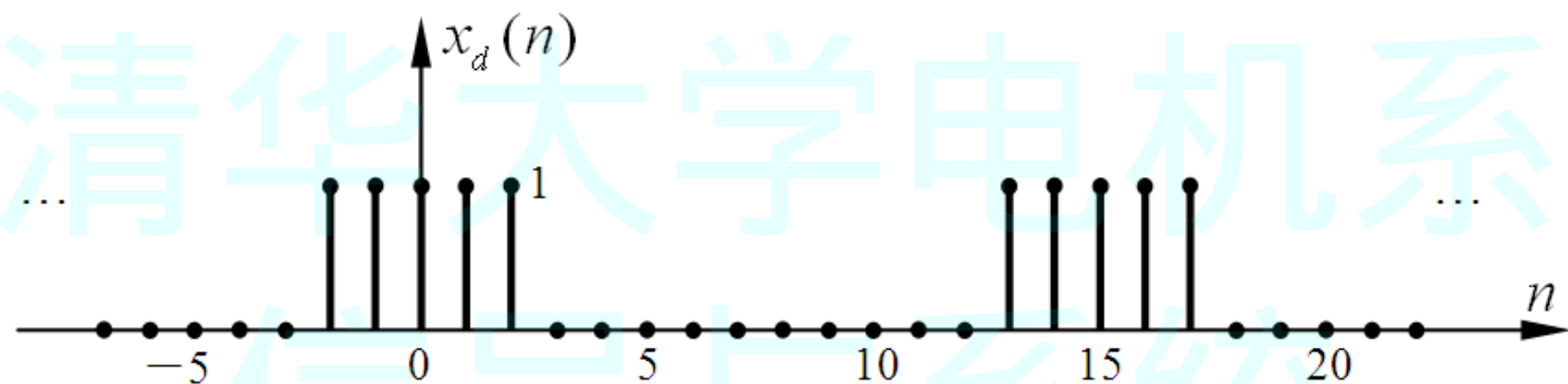
$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(k\omega_1) e^{jk\omega_1 t}$$

其中 $\omega_1 = 2\pi / T_1$

例 求如图所示离散周期矩形信号的傅立叶级数

解：此离散周期矩形信号的周期为 $N_1 = 15$ ，其傅立叶级数的系数为

$$X_d(k) = \sum_{n=0}^{14} x_d(n) e^{-j\frac{2\pi}{15}kn} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$



因为 $x_d(n)$ 是偶序列，所以 $X_d(k)$ 是实序列。 $X_d(k)$ 的一个周期的值为

$$X_d(0) = 5.00; \quad X_d(1) = 4.17; \quad X_d(2) = 2.13;$$

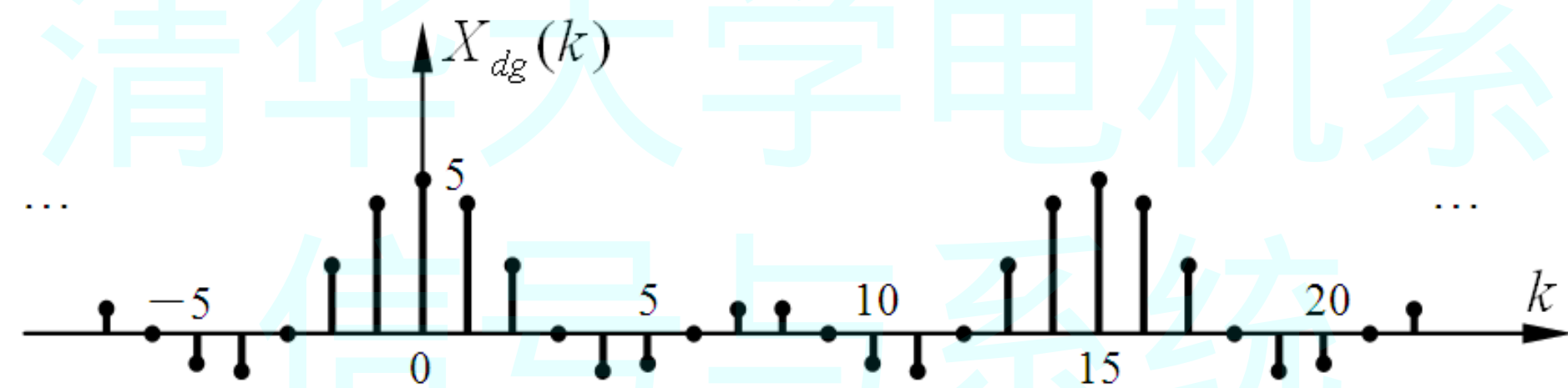
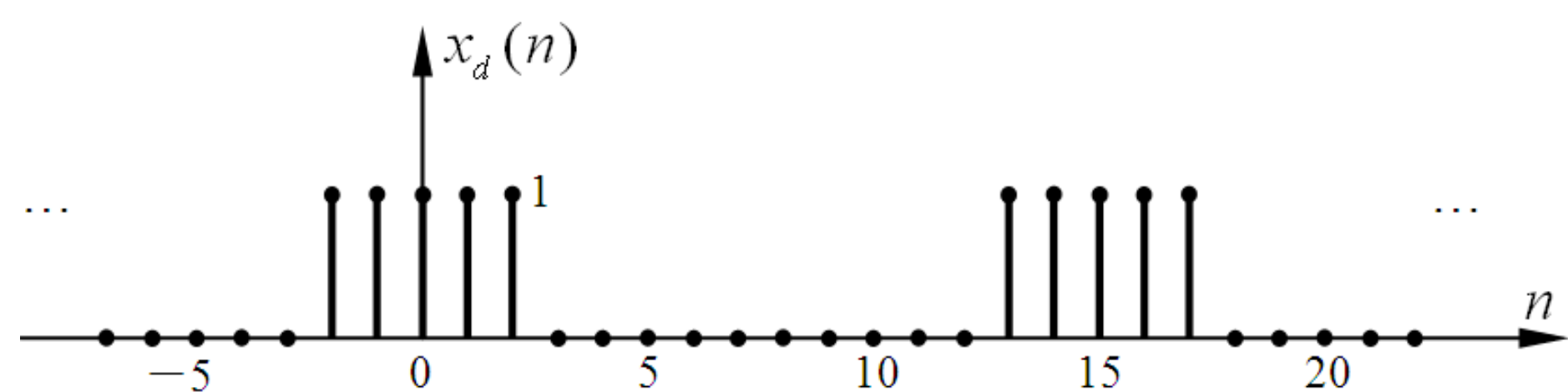
$$X_d(3) = 0.00; \quad X_d(4) = -1.17; \quad X_d(5) = -1.00;$$

$$X_d(6) = 0.00; \quad X_d(7) = 0.87; \quad X_d(8) = 0.87;$$

$$X_d(9) = 0.00; \quad X_d(10) = -1.00; \quad X_d(11) = -1.17;$$

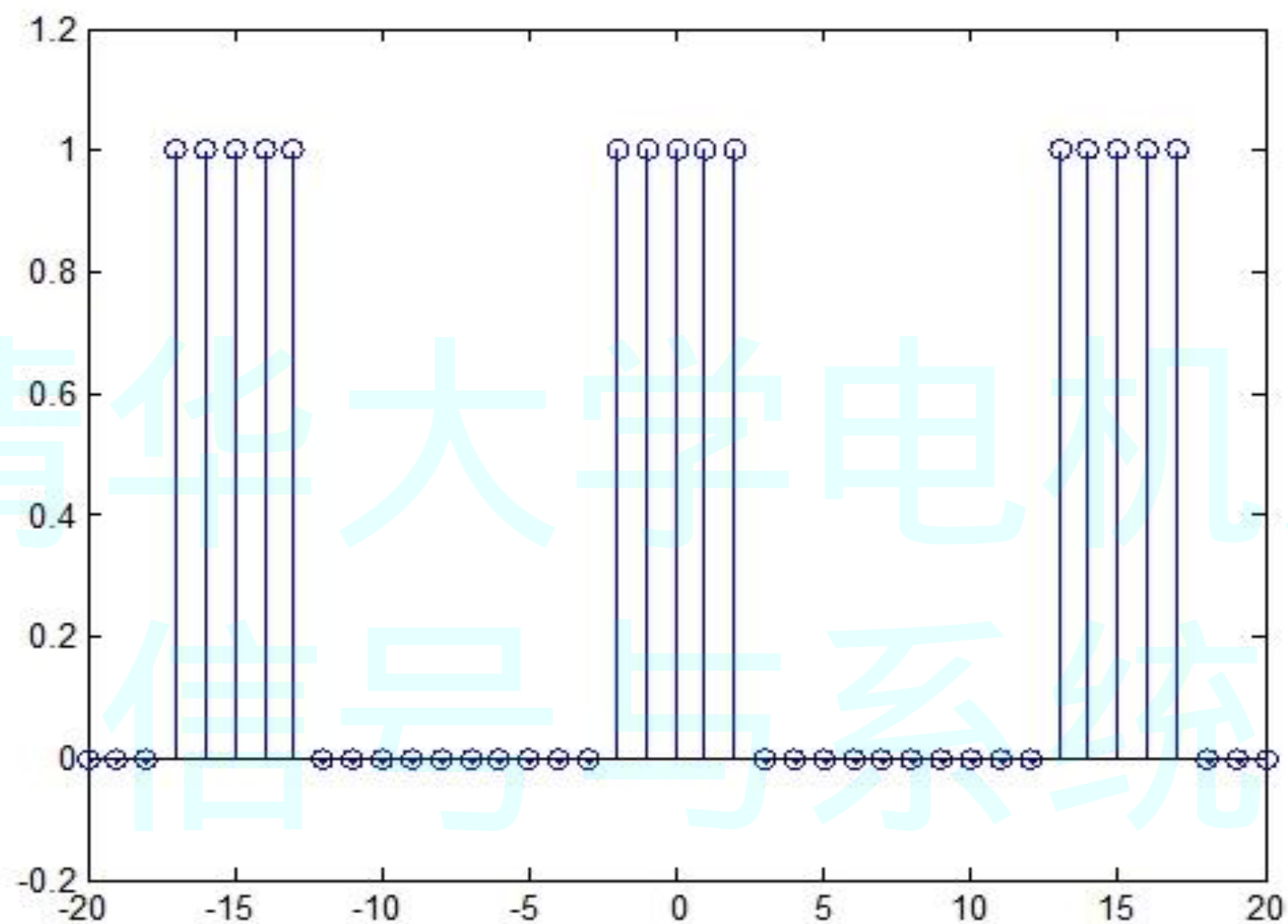
$$X_d(12) = 0.00; \quad X_d(13) = 2.13; \quad X_d(14) = 4.17$$

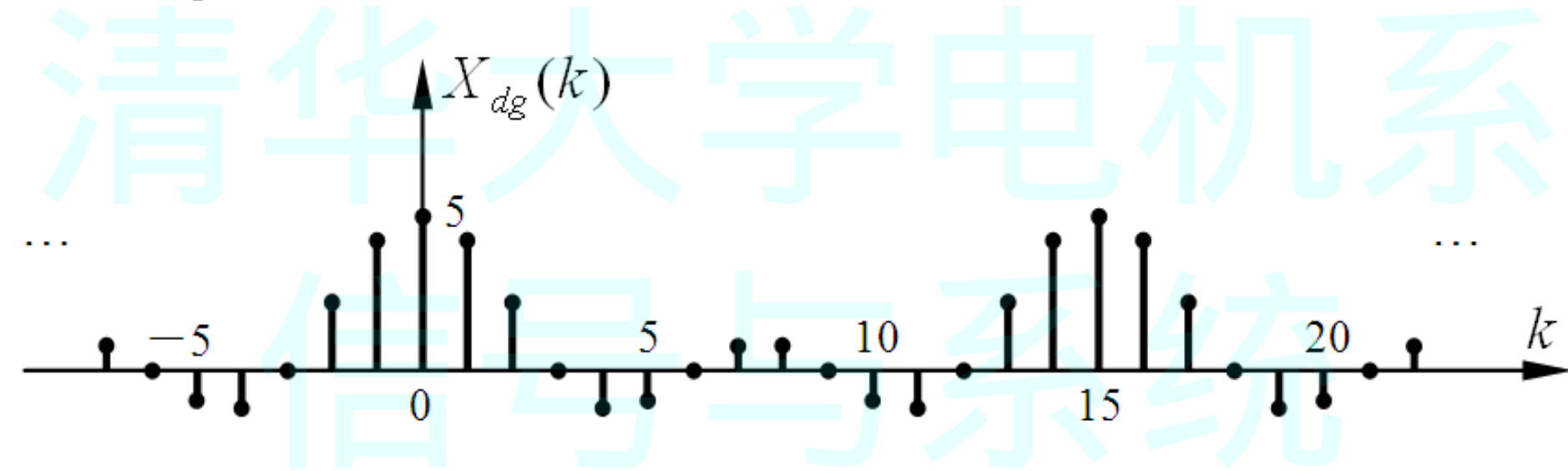
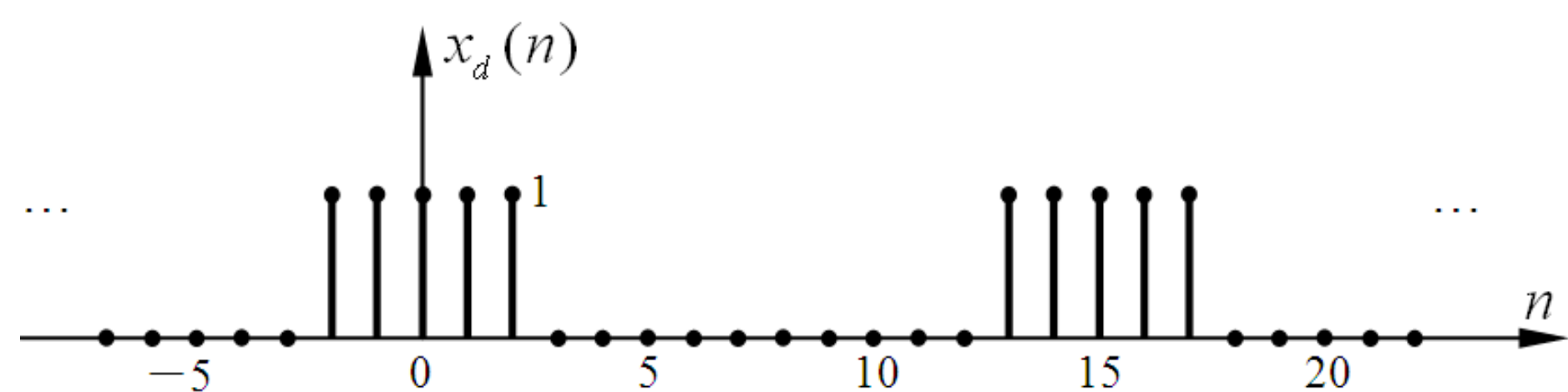
$$X_d(k) = \sum_{n=0}^{14} x_d(n) e^{-j \frac{2\pi}{15} kn} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$



由离散傅立叶级数还原原时域序列，有

$$\begin{aligned}x_d(n) &= \text{IDFS}[X_d(k)] = \frac{1}{N_1} \sum_{k=0}^{N_1-1} X_d(k) e^{j\theta_1 kn} \\&= \frac{1}{15} (5 + 4.17e^{j\frac{2\pi}{15}n} + 2.13e^{j\frac{4\pi}{15}2n} - 1.17e^{j\frac{8\pi}{15}n} - e^{j\frac{10\pi}{15}n} + 0.87e^{j\frac{14\pi}{15}n} \\&\quad + 0.87e^{j\frac{16\pi}{15}n} - e^{j\frac{20\pi}{15}n} - 1.17e^{j\frac{22\pi}{15}n} + 2.13e^{j\frac{26\pi}{15}n} + 4.17e^{j\frac{28\pi}{15}n}) \\&= \frac{2}{15} (2.5 + 4.17\cos\frac{2\pi n}{15} + 2.13\cos\frac{4\pi n}{15} \\&\quad - 1.17\cos\frac{8\pi n}{15} - \cos\frac{2\pi n}{3} + 0.87\cos\frac{14\pi n}{15})\end{aligned}$$





离散周期信号的傅立叶级数的特点

(1) 时域周期，频域离散。离散周期信号的傅立叶级数 $X_d(k)$ 是离散的（与连续周期信号的傅立叶级数相同），原因：周期信号各频率分量的周期之比必须为有理数。

(2) 时域离散，频域周期。离散周期信号的傅立叶级数 $X_d(k)$ 是 k 的周期函数，周期也为 N_1 。原因：离散复指数序列 $e^{j\theta_1 kn}$ 随 k 周期变化，因此 $x_d(n)$ 在 $e^{j\theta_1 kn}$ 上的投影也随 k 周期变化。

(3) 在反变换式 $x_d(n) = \frac{1}{N_1} \sum_{k=0}^{N_1-1} X_d(k) e^{j\theta_1 kn}$ 中，只含 N_1 个元素。

注意： $X_d(k)$ 是周期的，有无穷个元素， $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ，但其中只有 N_1 个元素满足正交性分解，通常取 $k = 0, 1, 2, \dots, N_1 - 1$ 。

(4) 奇偶性。离散周期信号的傅立叶级数可表示为

$$\begin{aligned} X_d(k) &= \sum_{n=0}^{N_1-1} x_d(n) e^{-j\theta_1 kn} \\ &= \sum_{n=0}^{N_1-1} x_d(n) \cos \theta_1 kn - j \sum_{n=0}^{N_1-1} x_d(n) \sin \theta_1 kn \end{aligned}$$

包含了 $x_d(n)$ 在余弦和在正弦序列上的投影，分别作为 $X_d(k)$ 的实部和虚部。

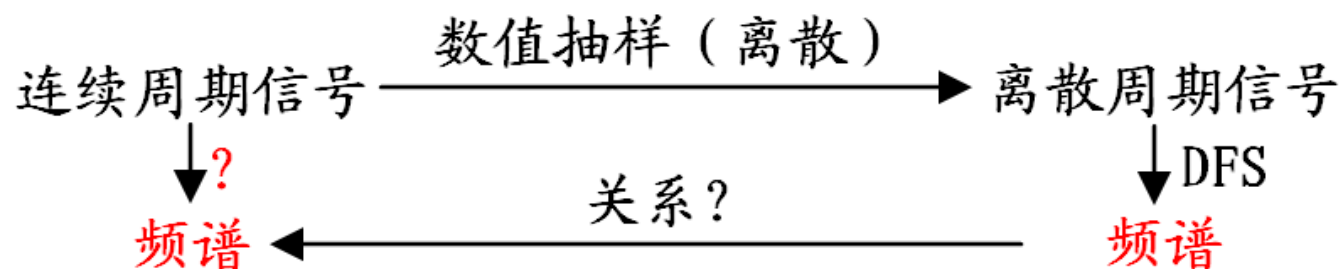
$X_d(k)$ 一般是一个复序列，有 $X_d(k) = |X_d(k)| e^{j\phi_d(k)}$ ， $|X_d(k)|$ 和 $\phi_d(k)$ 分别表示第 k 个频率分量的幅值和初始相位。

当 $x_d(n)$ 是一个偶序列时， $X_d(k)$ 是一个实序列；

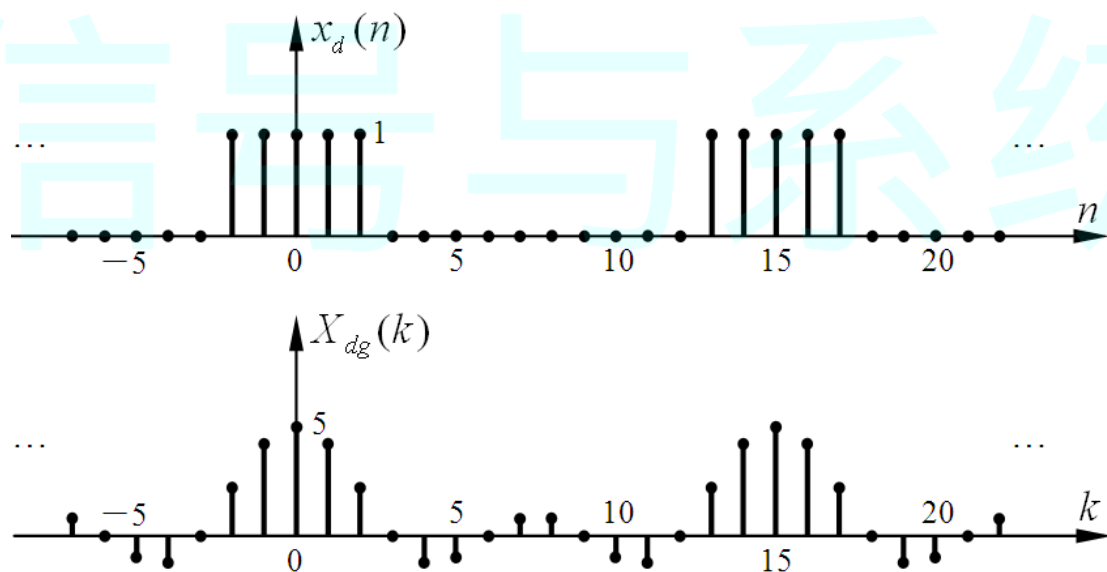
当 $x_d(n)$ 是一个奇序列时， $X_d(k)$ 是一个纯虚序列。

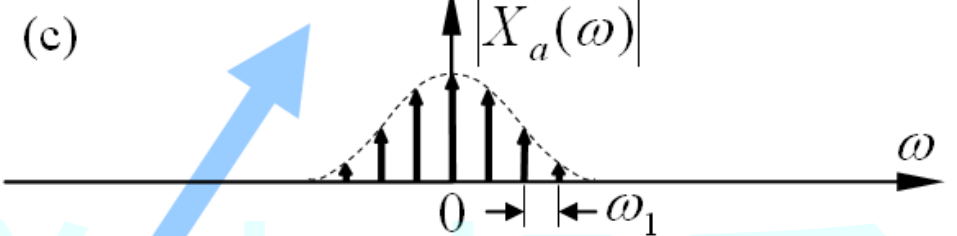
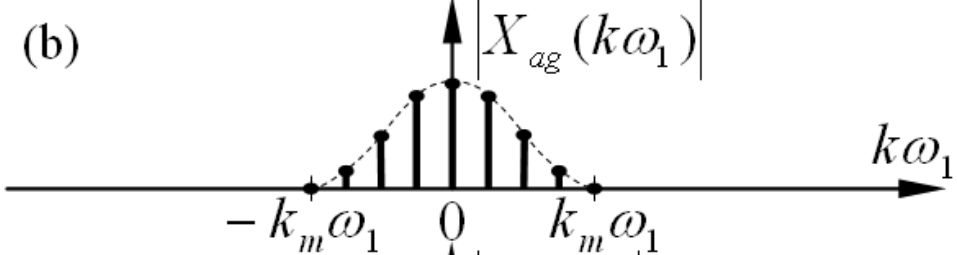
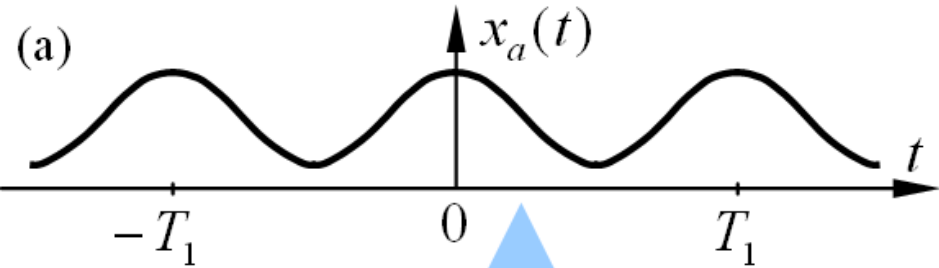
(5) 离散周期信号傅立叶级数得到的是信号的幅值谱， $|X_d(k)|$ - k 关系为幅频特性， $\phi_d(k)$ - k 的关系为相频特性。

离散和连续周期信号傅立叶级数的关系



为区别起见，下文中以下标 a 表示连续信号，下标 d 表示离散信号，下标 g 表示傅立叶级数，下标 s 表示脉冲抽样信号。



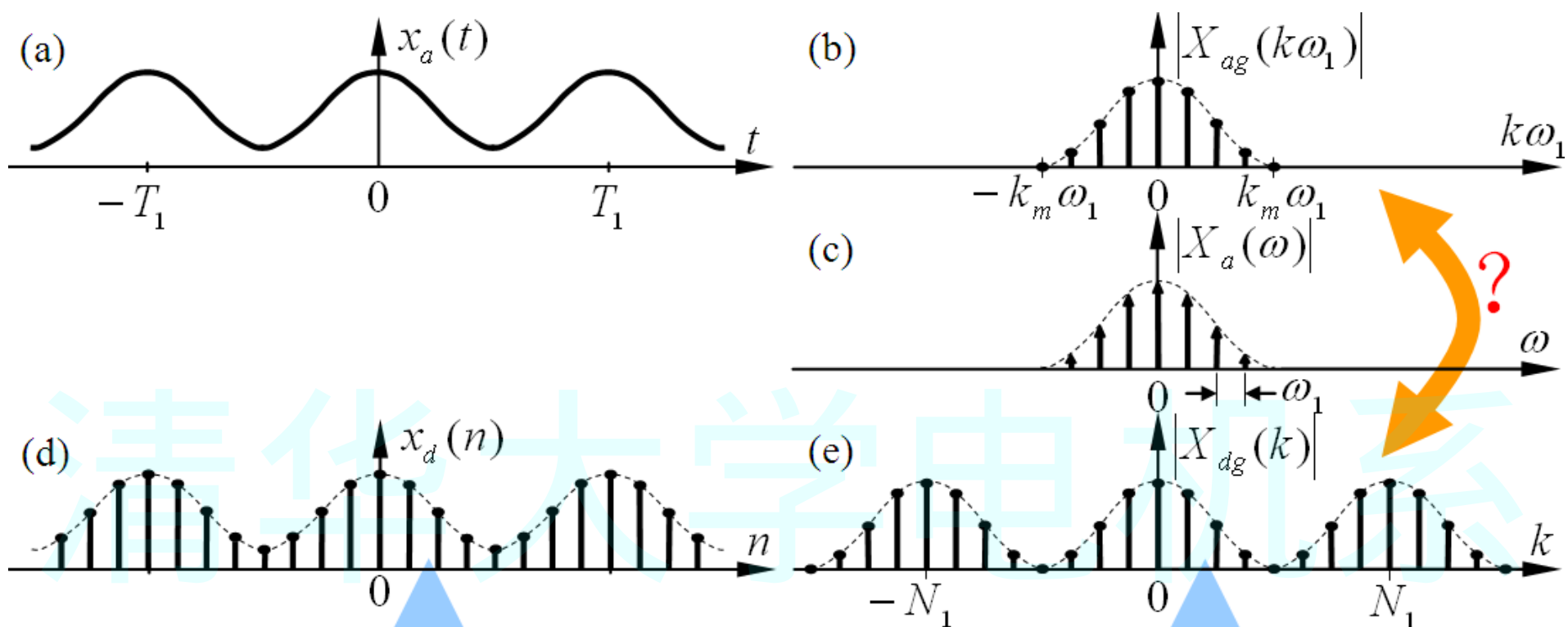


假设连续周期信号 $x_a(t)$ ，基波周期为 T_1

$x_a(t)$ 的傅立叶级数为 $X_{ag}(k\omega_1)$

$x_a(t)$ 的傅立叶变换为

$$X_a(\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_{ag}(k\omega_1) \delta(\omega - k\omega_1)$$



对 $x_a(t)$ 进行数值抽样

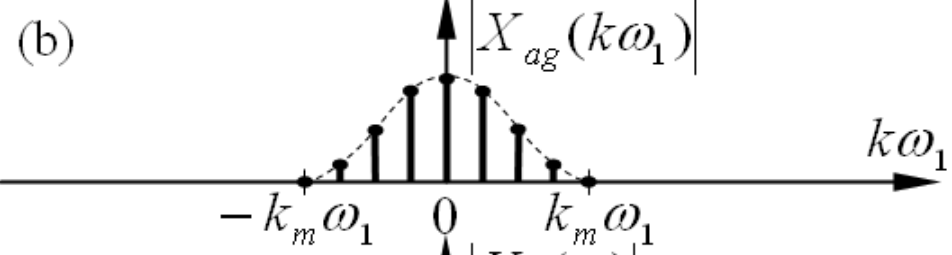
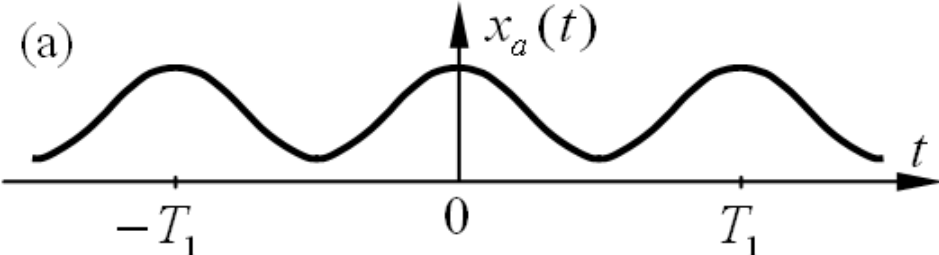
设：满足抽样定理 $\omega_s > 2k_m\omega_1$

且满足完整周期抽样， $T_s = T_1/N_1$

得离散序列： $x_d(n) = x_a(nT_s)$

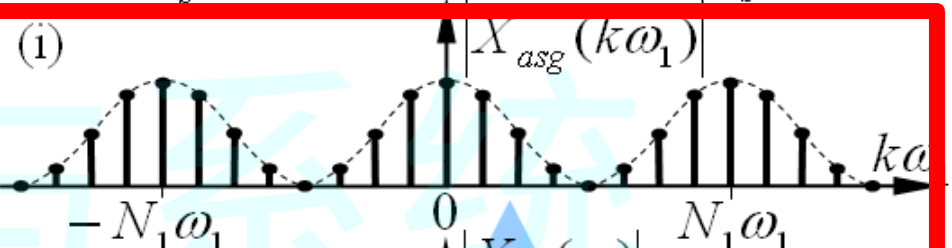
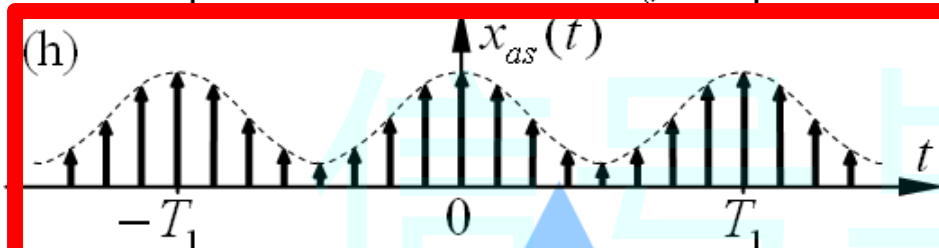
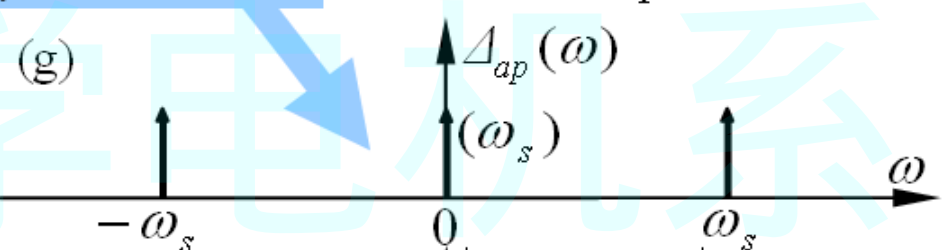
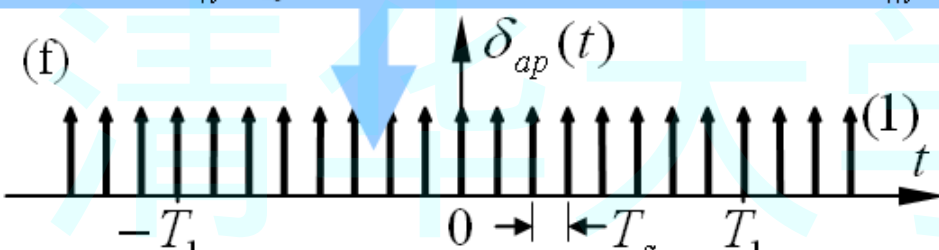
$x_d(n)$ 的离散傅立叶级数为

$$X_{dg}(k) = \sum_{n=0}^{N_1-1} x_d(n) \cdot e^{-j\theta_1 kn}$$



为了证明 DFS 和 FS 的关系，构造冲激抽样

$$\delta_{ap}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_a(t - nT_s), \quad \Delta_{ap}(\omega) = \omega_s \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta_a(\omega - m\omega_s)$$



得周期冲激序列

$$x_{as}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_d(n) \delta_a(t - nT_s)$$

$x_{as}(t)$ 为连续周期信号，

可求其傅立叶级数 $X_{asg}(k\omega_1)$

和傅立叶变换 $X_{as}(\omega)$

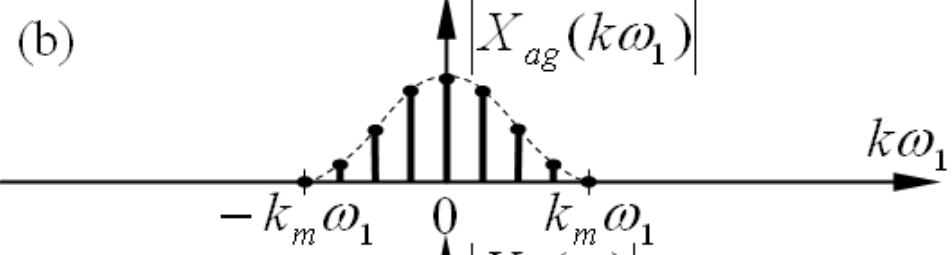
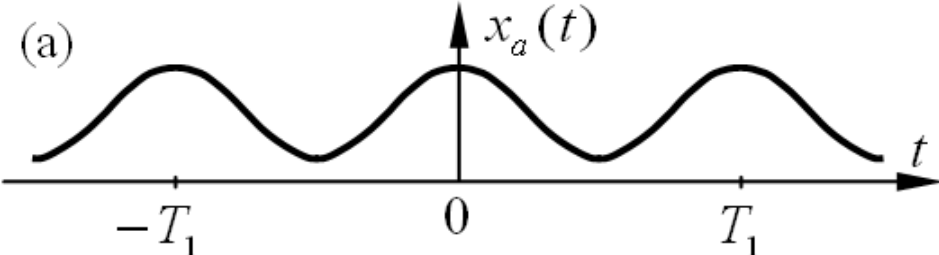
根据连续周期信号傅立叶级数的定义, $x_{as}(t)$ 的傅立叶级数为

$$\begin{aligned} X_{asg}(k\omega_1) &= \frac{1}{T_1} \int_{T_1} x_{as}(t) e^{-jk\omega_1 t} dt \\ &= \frac{1}{T_1} \int_{T_1} \sum_{n=0}^{N_1-1} x_d(n) \delta_a(t - nT_s) e^{-jk\omega_1 t} dt \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ &= \frac{1}{T_1} \sum_{n=0}^{N_1-1} x_d(n) e^{-j\frac{2\pi}{N_1} kn} \end{aligned}$$

此式显示

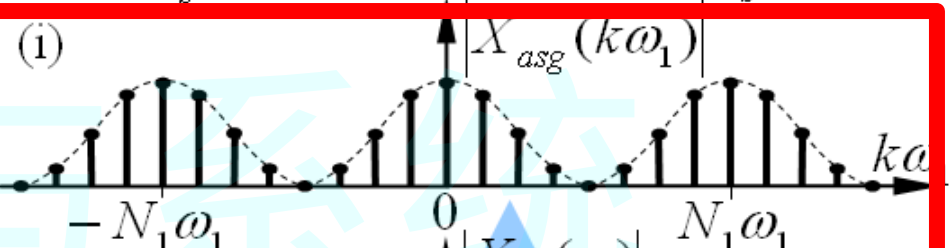
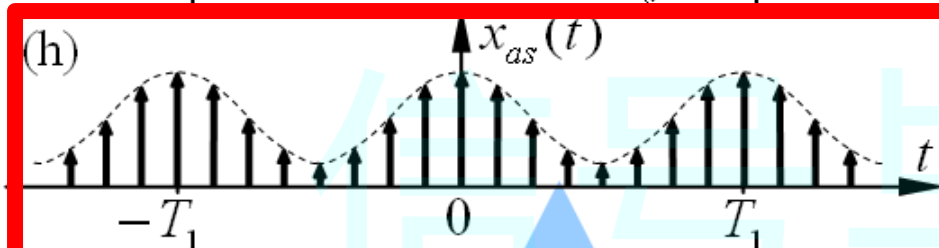
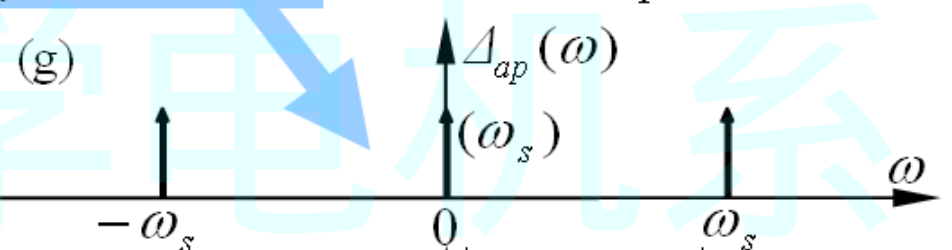
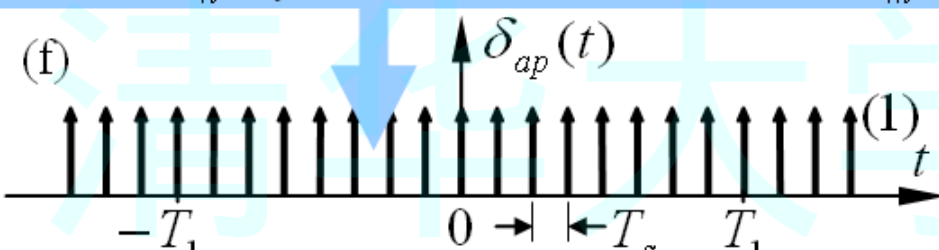
$$X_{asg}(k\omega_1) = \frac{1}{T_1} X_{dg}(k) \quad \text{FS}[x_{as}(t)] = \frac{1}{T_1} \text{DFS}[x_d(n)]$$

对连续周期信号 $x_a(t)$ 进行完整周期抽样, 其数值抽样信号的离散傅立叶级数等于其冲激抽样信号的连续傅立叶级数 (相差系数)。



为了证明 DFS 和 FS 的关系，构造冲激抽样

$$\delta_{ap}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_a(t - nT_s), \quad \Delta_{ap}(\omega) = \omega_s \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta_a(\omega - m\omega_s)$$



得周期冲激序列

$$x_{as}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_d(n) \delta_a(t - nT_s)$$

$x_{as}(t)$ 为连续周期信号，

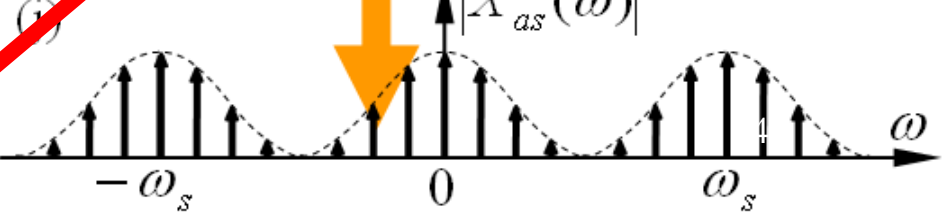
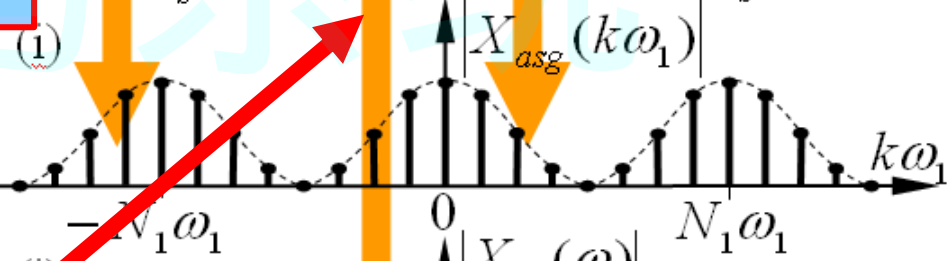
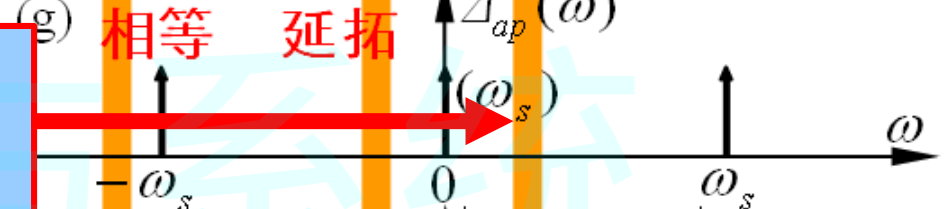
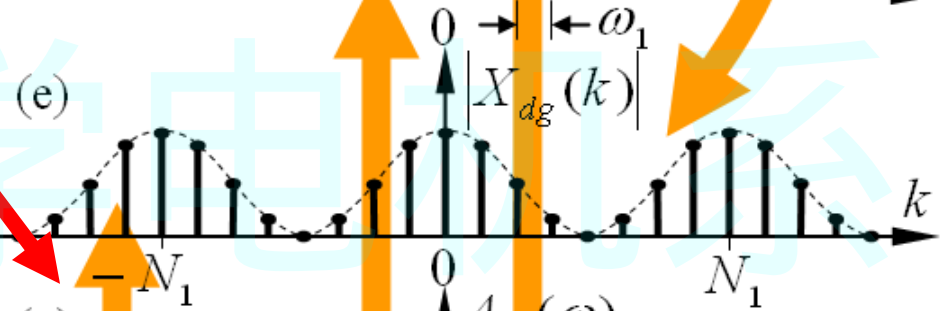
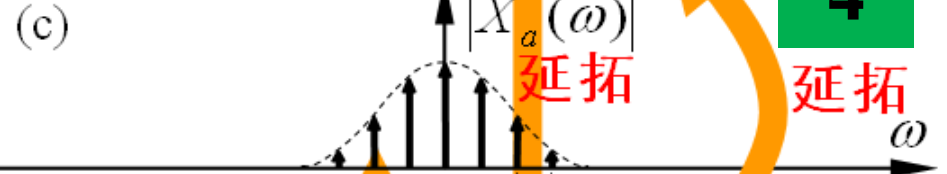
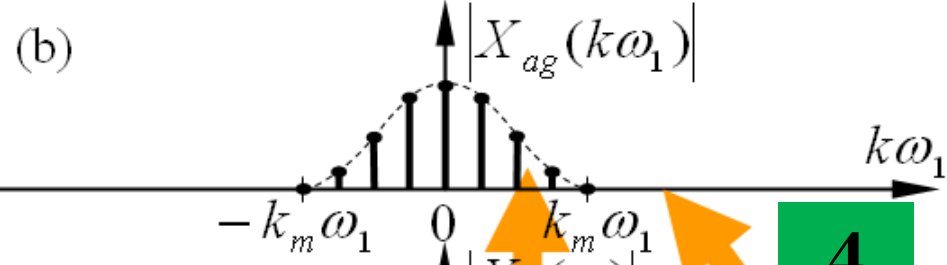
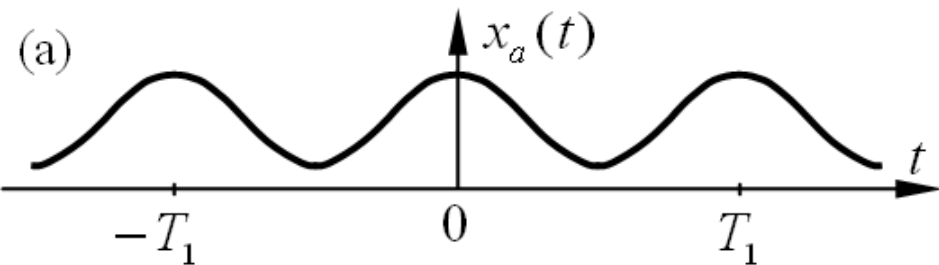
可求其傅立叶级数 $X_{asg}(k\omega_1)$

和傅立叶变换 $X_{as}(\omega)$

根据频域卷积定理, $x_{as}(t)$ 的傅立叶变换为

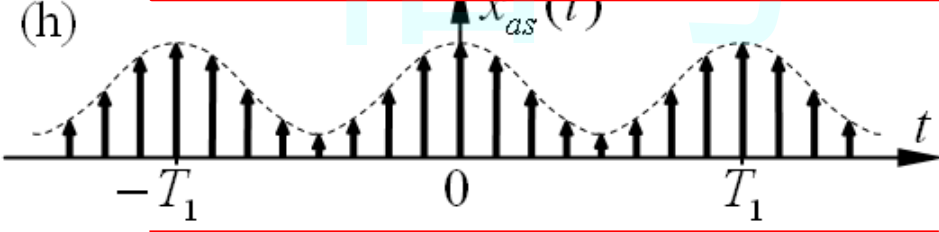
$$\begin{aligned} X_{as}(\omega) &= \frac{1}{2\pi} X_a(\omega) * \Delta_{ap}(\omega) \\ &= \frac{1}{2\pi} X_a(\omega) * \left[\omega_s \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta_a(\omega - m\omega_s) \right] \\ &= \frac{1}{T_s} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_a(\omega - m\omega_s) \end{aligned}$$

$X_{as}(\omega)$ 是 $X_a(\omega)$ 的周期延拓, 延拓周期是 ω_s 。



(3) $x_a(t)$ 的傅立叶变换为

$$X_a(\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_{ag}(k\omega_1) \delta(\omega - k\omega_1)$$



(2) $X_{as}(\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_a(\omega - m\omega_s)$

4

延拓

相等 延拓

$X_{as}(\omega)$ 是 $X_a(\omega)$ 的周期延拓, 所以 $X_{asg}(k\omega_1)$ 也是 $X_{ag}(k\omega_1)$ 的

周期延拓, 有

$$X_{as}(\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_a(\omega - m\omega_s)$$

$$X_{asg}(k\omega_1) = \frac{1}{T_s} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_{ag}(k\omega_1 - m\omega_s)$$

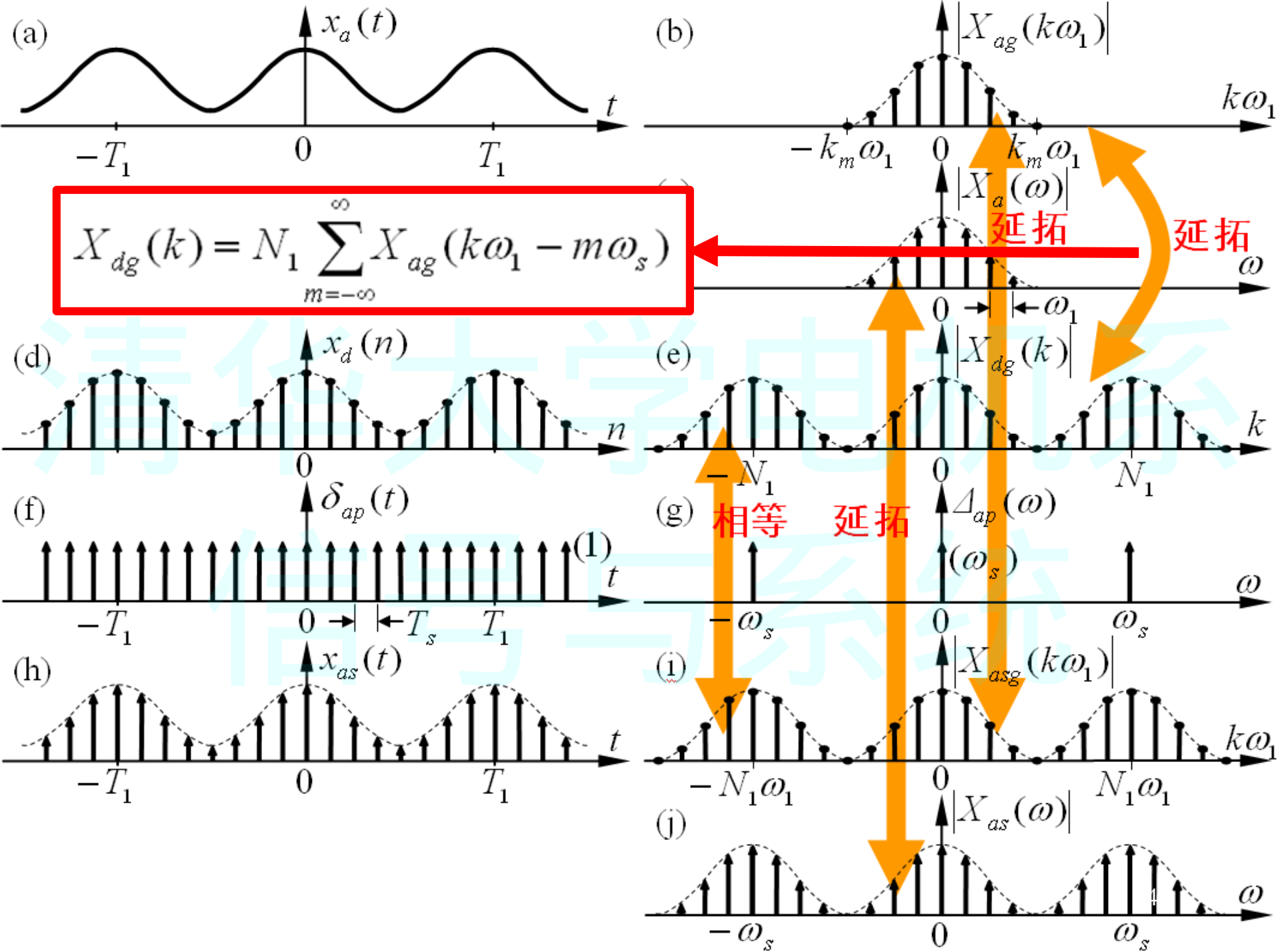
由此得

$$X_{asg}(k\omega_1) = \frac{1}{T_1} X_{dg}(k)$$

$$X_{dg}(k) = N_1 \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_{ag}(k\omega_1 - m\omega_s)$$

离散周期信号 $x_d(n)$ 的傅立叶级数 $X_{dg}(k)$ 是连续周期信号 $x_a(t)$ 的傅立叶级数 $X_{ag}(k\omega_1)$ 的周期延拓 (相差系数 N_1)。如果 $x_a(t)$ 频率有限 (最高频率 $\omega_m = k_m \omega_1$), 并且抽样满足抽样定理 ($\omega_s > 2\omega_m$), 则延拓过程不产生混叠。截取 $X_{dg}(k)$ 的一个周期, 有

$$X_{ag}(k\omega_1) = \frac{1}{N_1} X_{dg}(k) \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm k_m$$



连续和离散周期信号时域和频域主要参数和关系

连续周期信号傅立叶级数:

时域连续和周期, 周期 T_1 ;

频域非周期和离散, 离散间隔 ω_1 , 离散点 $k\omega_1$;

离散周期信号傅立叶级数:

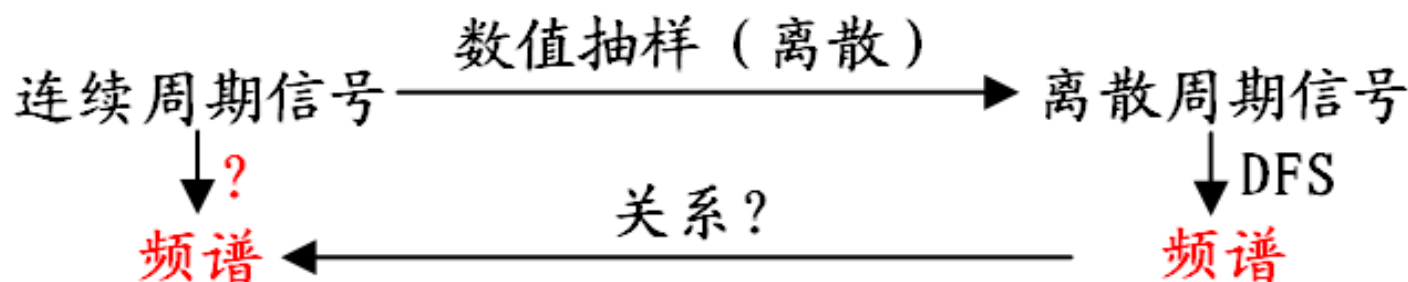
时域离散和周期, 离散间隔 1, 离散周期 N_1 ;

频域周期和离散, 离散周期 $N_1(2\pi)$, 离散间隔 1 ($\theta_1 = 2\pi / N_1$)

如果离散序列是连续信号在 T_s 间隔下的抽样, 则有参数关系

$$N_1 = T_1 / T_s; \quad \theta = \omega T_s; \quad \theta_1 = \omega_1 T_s; \quad k\theta_1 \Leftrightarrow k\omega_1; \quad 2\pi \Leftrightarrow \omega_s$$

误差分析



关系推导中设定了两个条件:

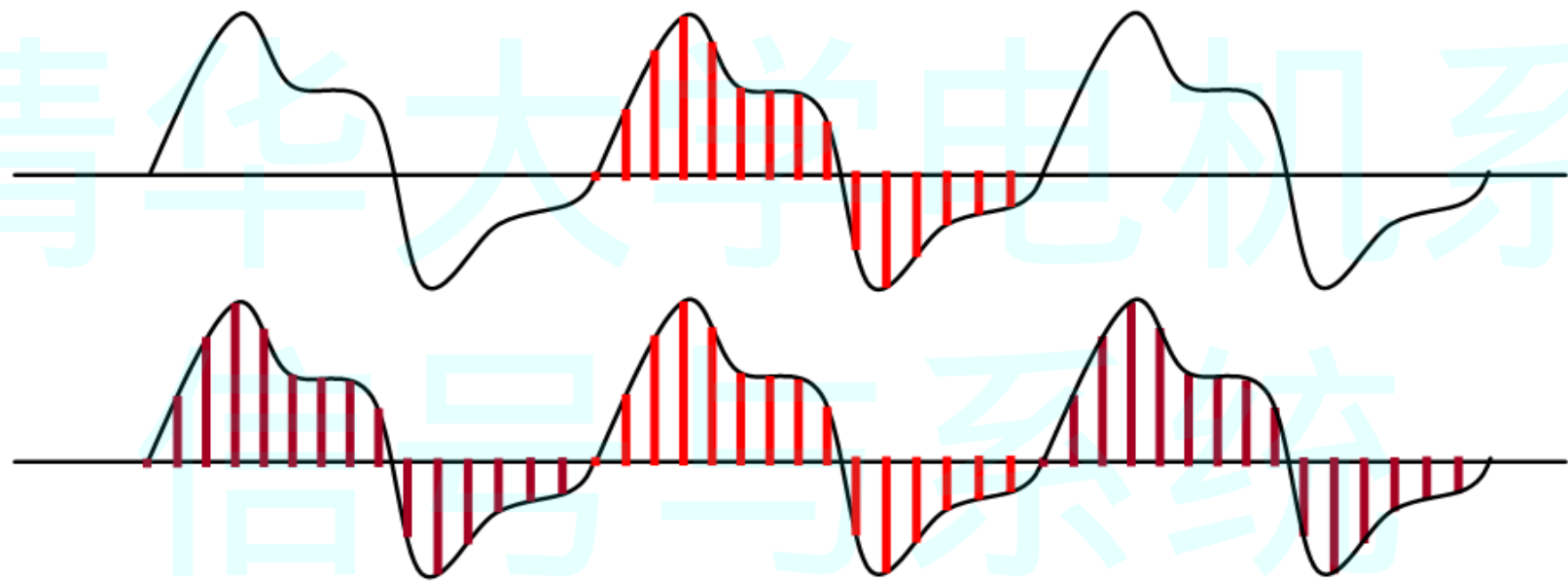
- (1) 对周期信号 $x_{ap}(t)$ 进行完整周期抽样, $T_1 / T_s = N_1$ 为整数;
- (2) $x_{ap}(t)$ 频率有限, 对 $x_{ap}(t)$ 的抽样满足抽样定理。

如果不满足这两个条件, 则会存在两种形式的误差, 非完整周期抽样产生**泄漏误差**; 不满足抽样定理产生**混叠误差**。

泄漏误差

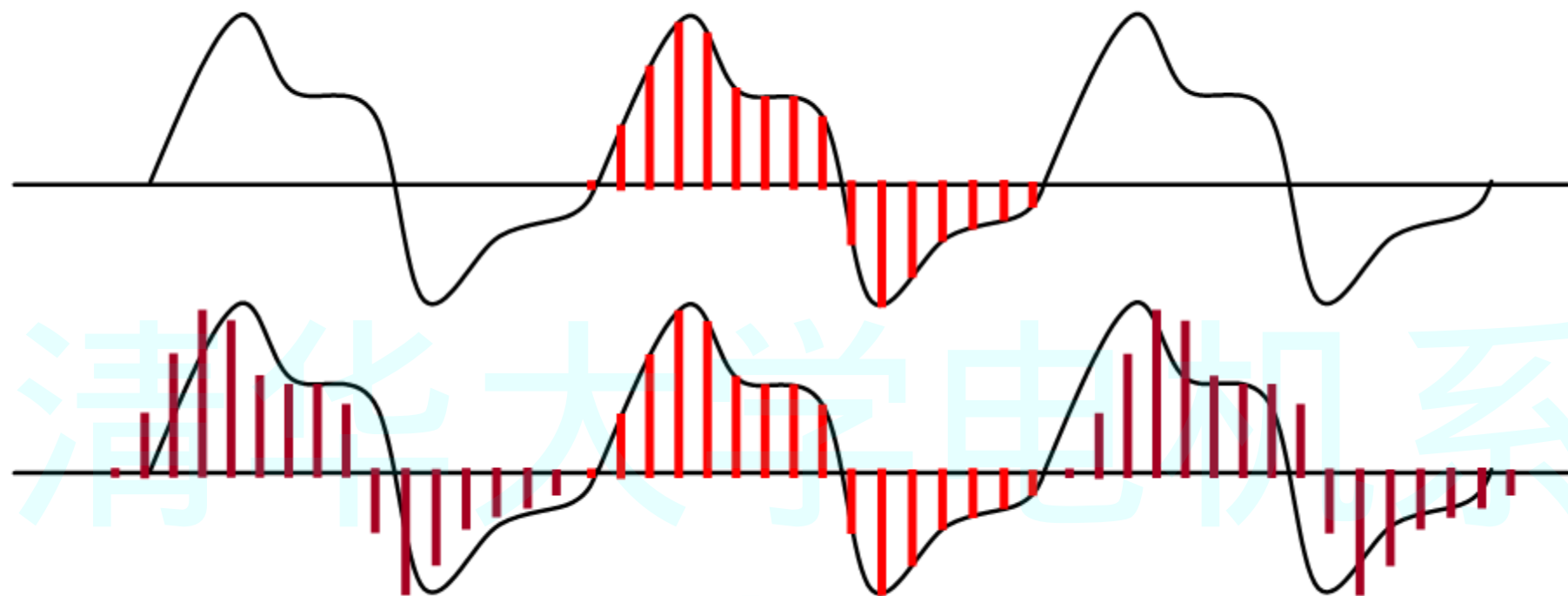
完整周期抽样的两种情况:

(1) 在连续周期 T_1 时间内正好抽样整数 N_1 个点, 即 $N_1 T_s = T_1$ 。将一个周期抽样的 N_1 个点周期延拓, 正好是对原来周期信号的抽样。



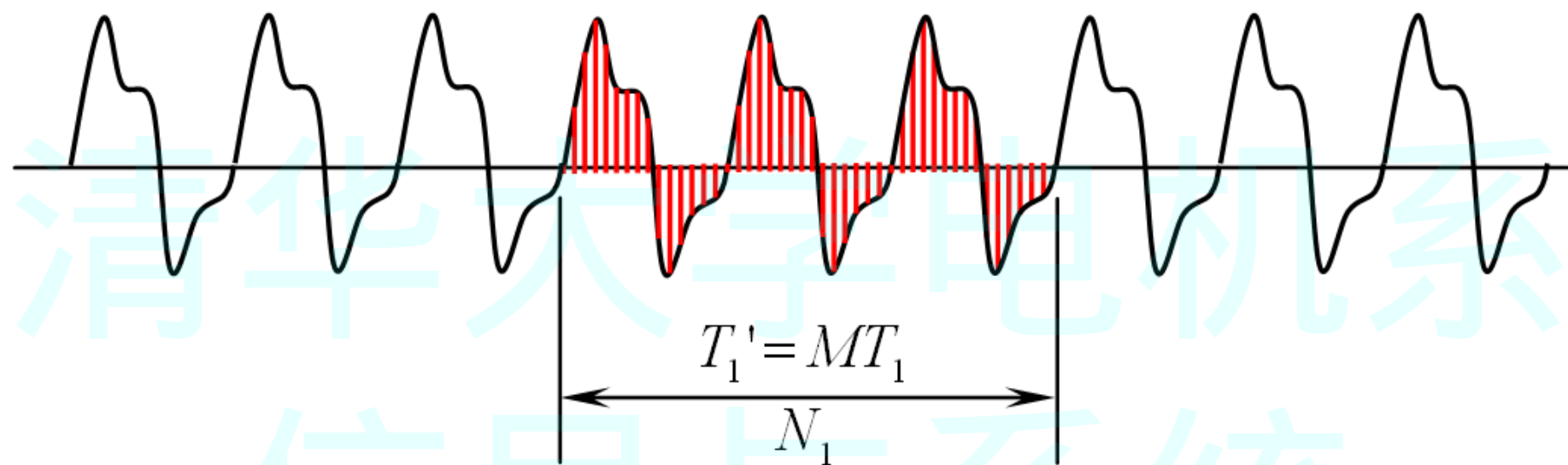
在此完整周期抽样情况下 (设满足抽样定理), 基于 $x_d(n)$ 一个周期的 N_1 个点计算离散傅立叶级数 $X_{dg}(k)$, 由 $X_{dg}(k)$ 可以准确得到 $x_a(t)$ 的傅立叶级数 $X_{ag}(k\omega_1)$ 。

非完整周期抽样的情况



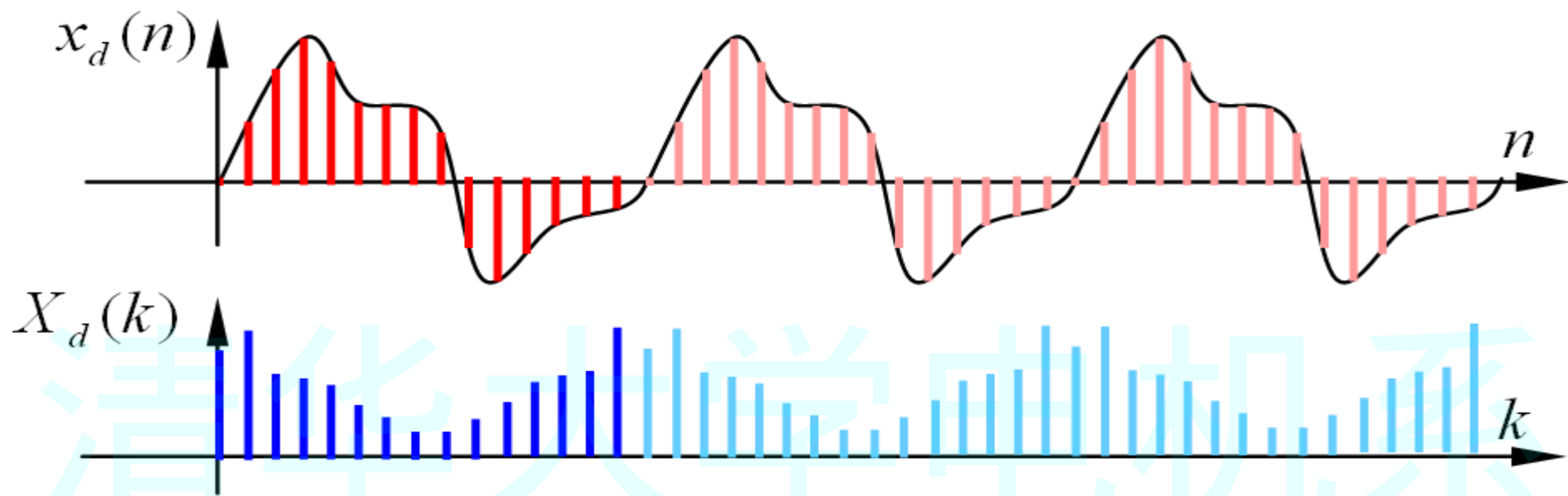
清华大学电机系
信号与系统

(2) 在 M 个连续周期 MT_1 时间内正好抽样整数 N_1 个点, 即 $N_1T_s = MT_1$ 。将 N_1 个点周期延拓, 正好是对原来周期信号的抽样。

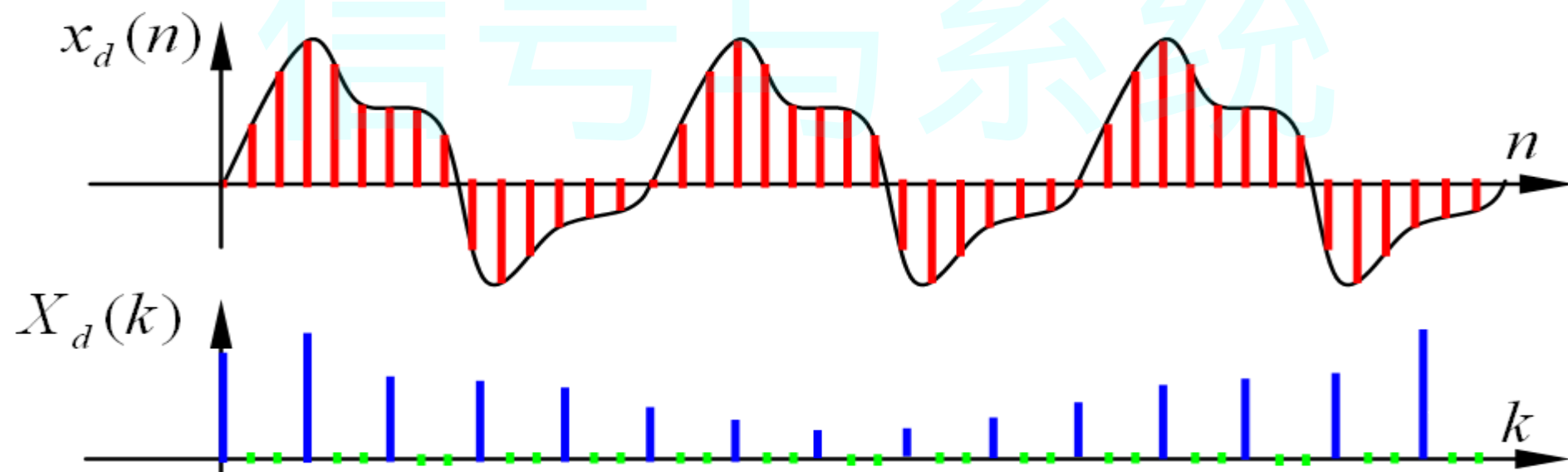


基于 $x_d(n)$ 一个周期的 N_1 个点计算离散傅立叶级数 $X_{dg}(k)$,
由 $X_{dg}(k)$ 也可以准确得到 $x_a(t)$ 的傅立叶级数 $X_{ag}(k\omega_1)$,
 $X_{dg}(k)$ 的第 kM 个分量对应于 $X_{ag}(k\omega_1)$ 的第 k 个分量。

单周期抽样的时域和频域



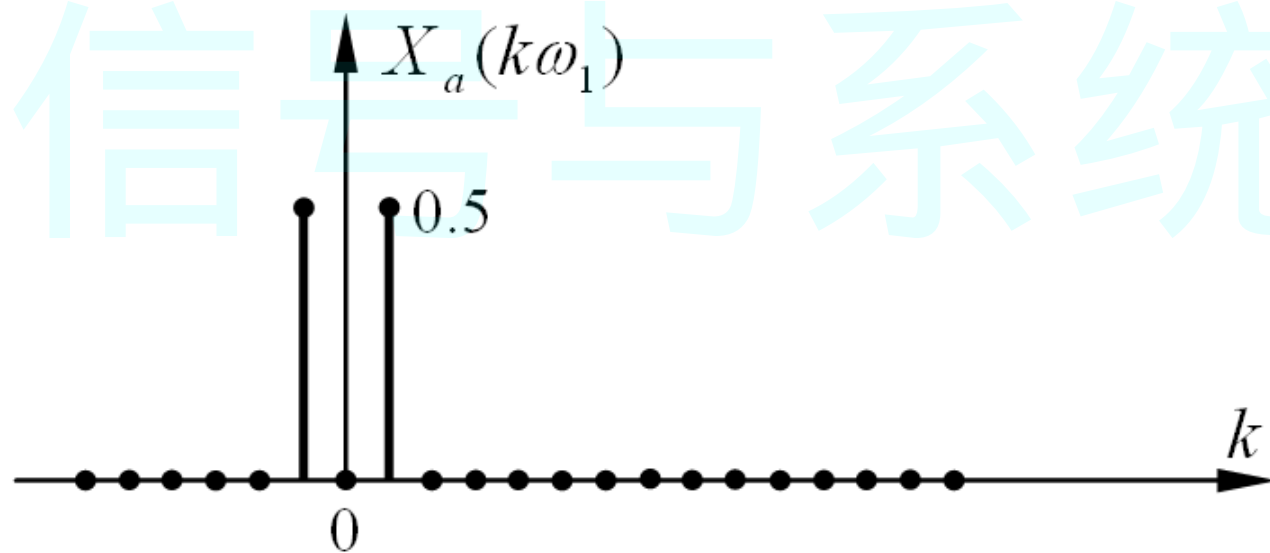
三周期抽样的时域和频域



例 已知连续余弦信号 $x_a(t) = \cos 2\pi t$ ，周期 $T_1 = 1$ 。分别以抽样间隔 $T_s = \frac{T_1}{8}$ 和 $T_s = \frac{T_1}{7.5}$ 对其抽样，取 $N_1 = 8$ ，计算离散傅立叶级数，比较计算结果和原来连续信号频谱的差别。

解：已知 $x_a(t)$ 的傅立叶级数

$$X_a(k\omega_1) = \begin{cases} 0.5 & k = \pm 1 \\ 0 & k \neq \pm 1 \end{cases} \quad k = \text{整数}$$



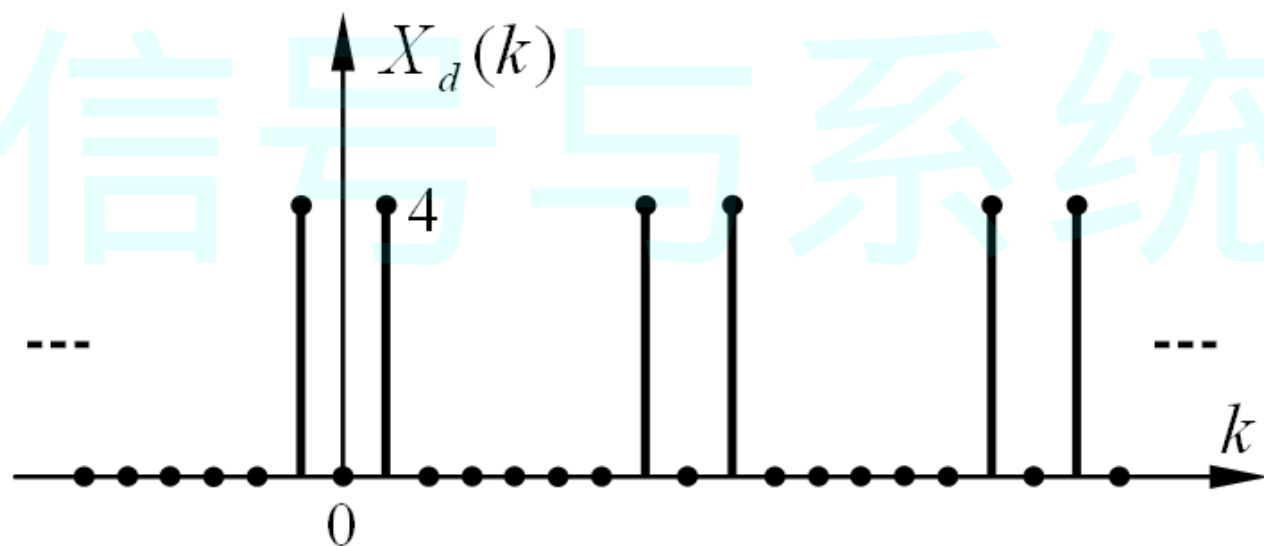
当以 $T_s = \frac{T_1}{8}$ 抽样时，得离散序列 $x_d(n) = \cos \frac{\pi}{4}n$ ，此时为完整

周期抽样。计算离散傅立叶级数，有

$$X_d(k) = \sum_{n=0}^7 \cos \frac{\pi n}{4} e^{-j\frac{\pi}{4}kn}$$

$$X_d(0) = 0; \quad X_d(1) = 4; \quad X_d(2) = 0; \quad X_d(3) = 0;$$

$$X_d(4) = 0; \quad X_d(5) = 0; \quad X_d(6) = 0; \quad X_d(7) = 4$$

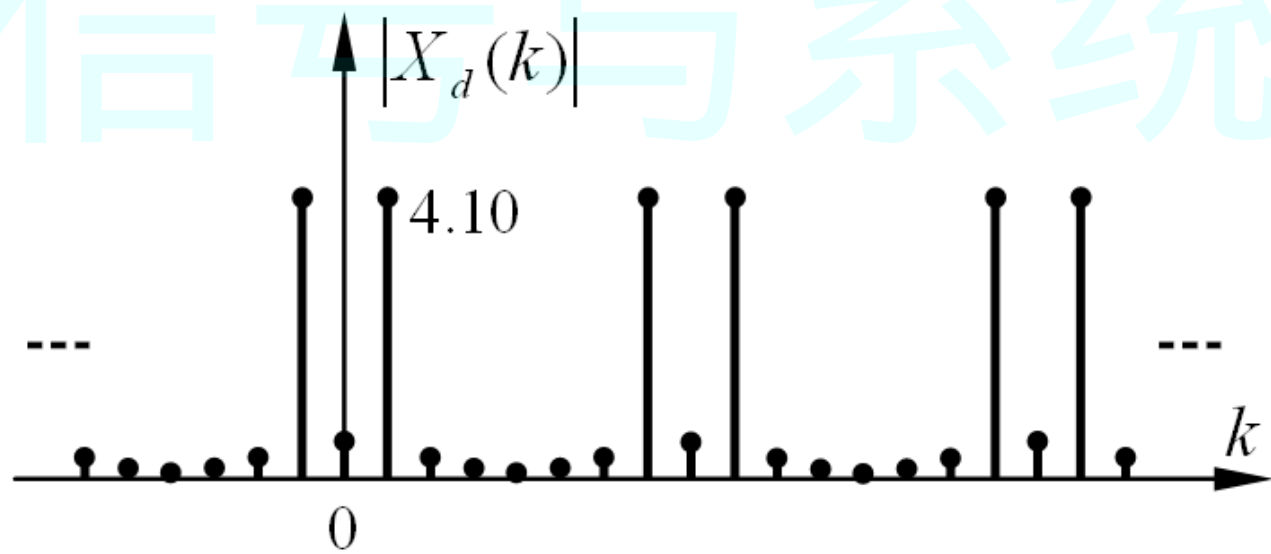


当以 $T_s = T_1 / 7.5$ 抽样时，得离散序列 $x_d(n) = \cos \frac{4\pi}{15}n$ ，此时不

是完整周期抽样。计算离散傅立叶级数的系数

$$X_d(k) = \sum_{n=0}^7 \cos \frac{4\pi n}{15} e^{-j\frac{\pi}{4}kn}$$

$$\begin{aligned} X_d(0) &= 0.50; & X_d(1) &= 4.02 + j0.81; & X_d(2) &= -0.18 - j0.07; \\ X_d(3) &= -0.07 - j0.02; & X_d(4) &= -0.05; & X_d(5) &= -0.07 + j0.02; \\ X_d(6) &= -0.18 + j0.07; & X_d(7) &= 4.02 - j0.81 \end{aligned}$$



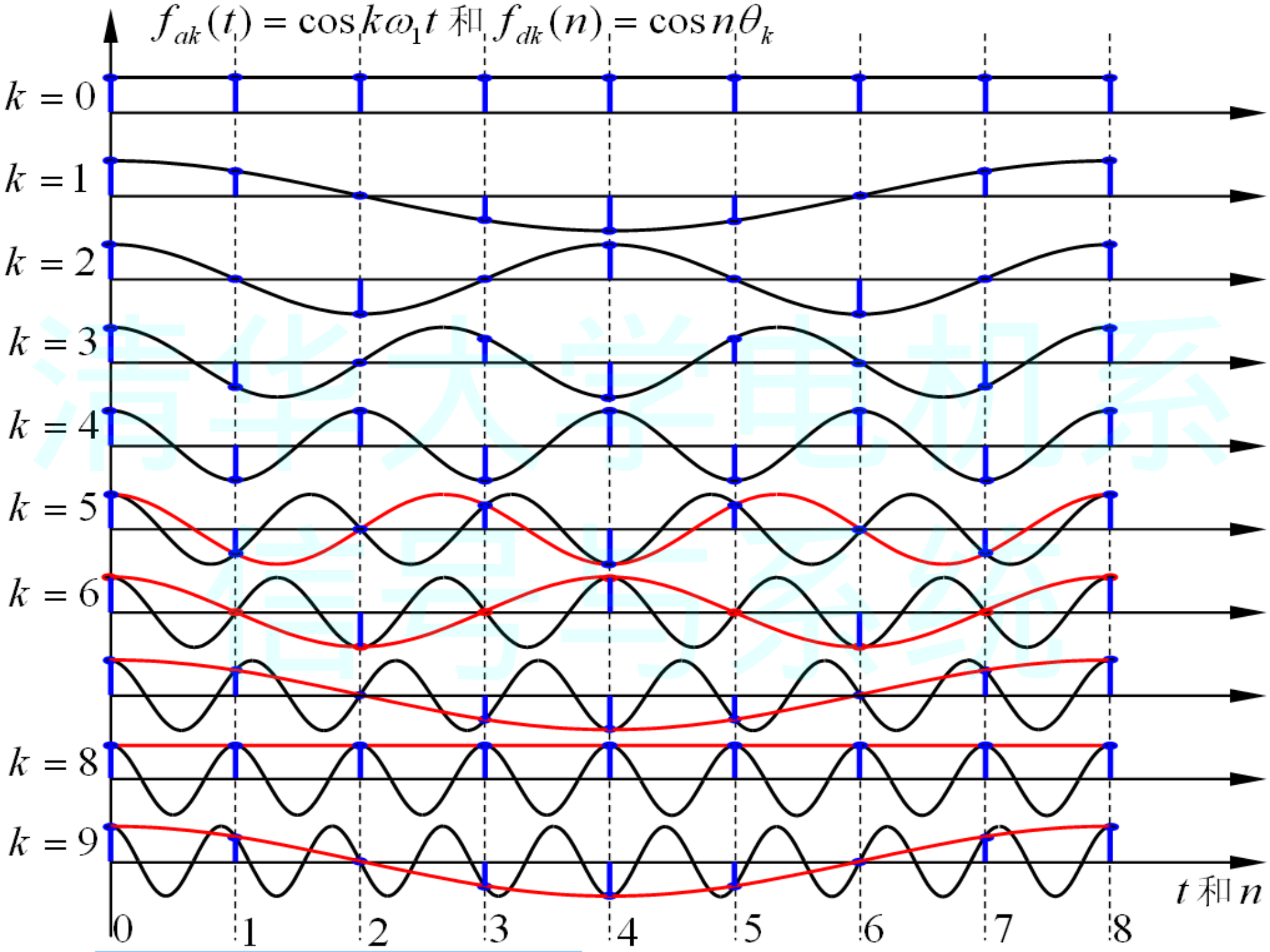
混叠误差

当对 $x_a(t)$ 的抽样不满足抽样定理时，则出现混叠误差。

当 $x_a(t)$ 频率无限，则无论如何提高抽样频率，混叠误差不可避免；

当 $x_a(t)$ 频率有限，则抽样率需要大于信号最高频率的两倍，否则出现混叠。

混叠误差的本质在于，如果对信号中高频分量的抽样不满足抽样定理，其抽样结果将表现为一低频序列，它和信号中原有低频分量的抽样结果混为一起，造成低频分量频谱的误差。换句话说，在存在混叠的情况下，连续信号中的不同频率分量会混为离散信号的同一个频率分量；同样，离散信号的一个频率分量可能包含了连续信号的不同频率分量。

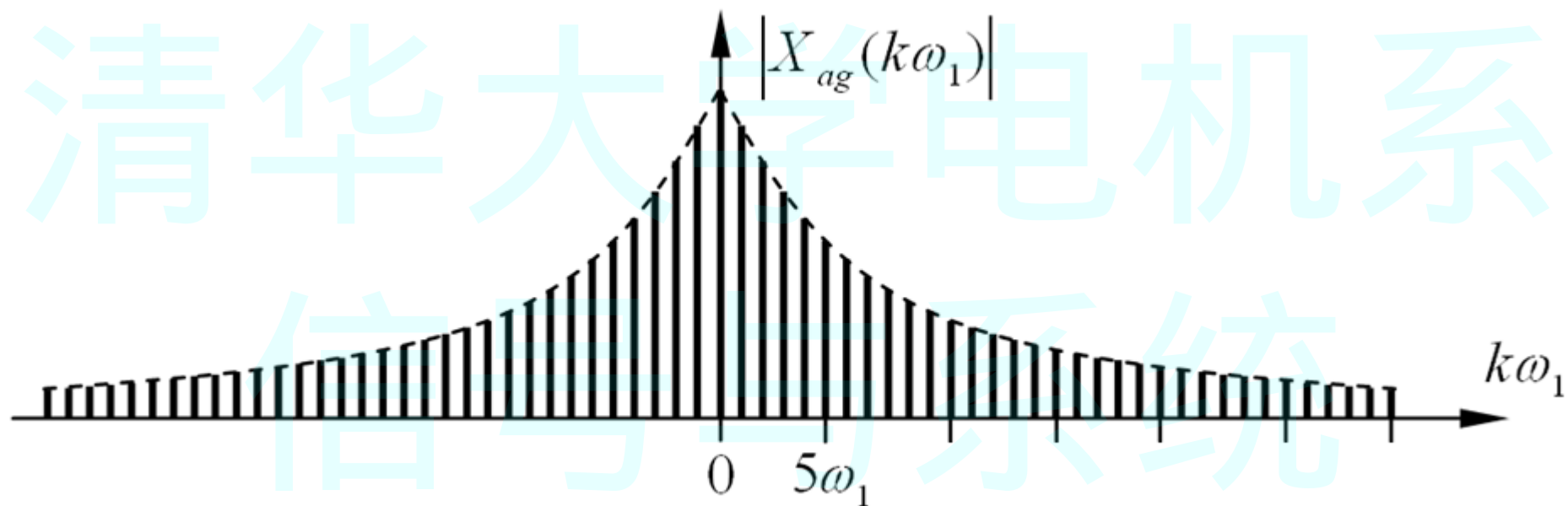


在信号抽样时，需要首先确定连续信号中的最高频率分量，由此确定信号抽样频率，通常取为最高频率的 5 倍以上。

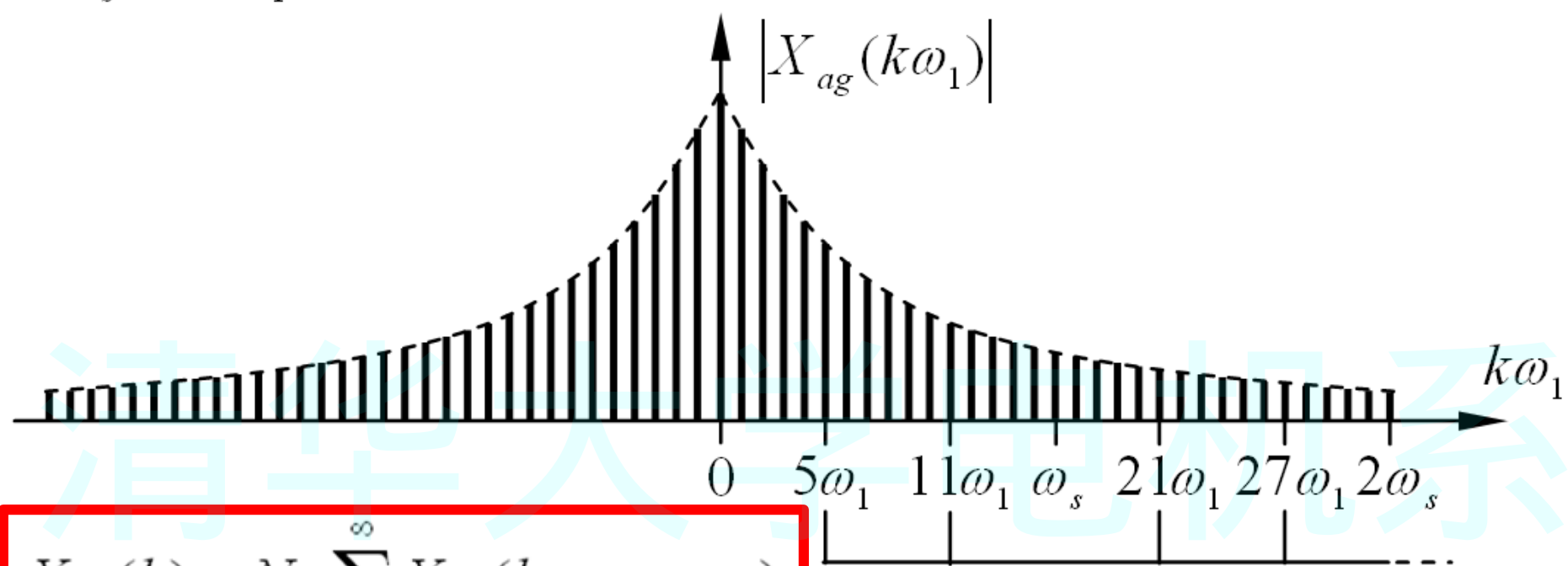
为了避免连续信号中无用的高频分量所造成的混叠误差，在信号抽样前通常先进行低通滤波，滤除无用的高频分量。

清华大学电机系
信号与系统

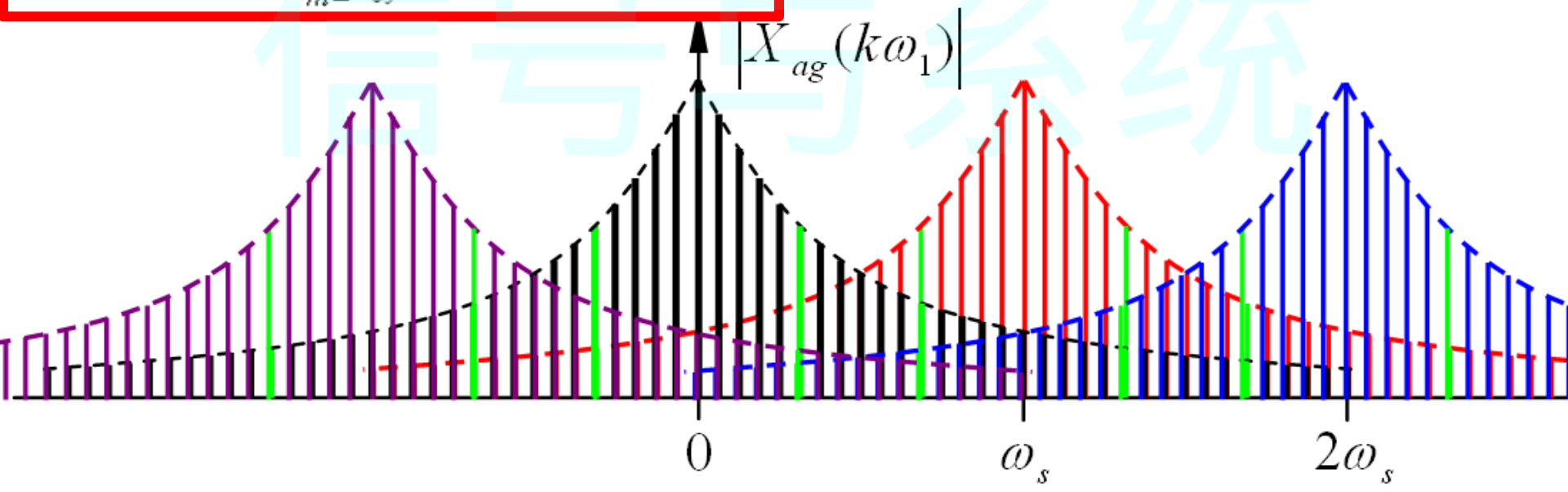
例 对一周期为 T_1 的频率无限的连续周期信号 $x_a(t)$ 进行抽样，抽样间隔为 $T_1/16$ 。对抽样序列进行 DFS 计算，得到 $X_d(k)$ 。试问计算结果中 $x_a(t)$ 的 5 次谐波会和它的那些更高次谐波相混叠。



当 $\omega_s = 16\omega_1$ 抽样时, 与 5 次谐波相互混叠的高次谐波分量



$$X_{dg}(k) = N_1 \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_{ag}(k\omega_1 - m\omega_s)$$



例 对一周期为 T_1 的频率无限的连续周期信号 $x_a(t)$ 进行抽样，抽样间隔为 $T_1/16$ 。对抽样序列进行 DFS 计算，得到 $X_d(k)$ 。试问计算结果中 $x_a(t)$ 的 5 次谐波会和它的那些更高次谐波相混叠。

解： $X_d(5)$ 和 $X_d(-5)$ 表示 $x_a(t)$ 的 5 次谐波分量。与它们产生混叠的所有频率分量

$$k = 16m \pm 5 \quad m \text{ 为整数}$$

对应的离散角频率为

$$k\theta_1 = (16m \pm 5)(2\pi/16) = 2m\pi \pm 5\pi/8$$

对应的连续角频率为

$$\begin{aligned} k\omega_1 &= k\theta_1 / T_s = (2m\pi \pm \frac{5\pi}{8}) \frac{16}{T_1} = \frac{32m\pi}{T_1} \pm \frac{10\pi}{T_1} \\ &= 16m\omega_1 \pm 5\omega_1 = m\omega_s \pm 5\omega_1 \end{aligned}$$