# 第4次习题课题目

1. 已知随机变量$Y$的密度函数为

$$p_Y(y)=\begin{cases}5y^4 & ,0<y<1\\ 0 & ,otherwise\end{cases}$$

在给定$Y=y$的条件下，随机变量$X$的密度函数为

$$p(x|y)=\begin{cases}3x^2/y^3 & ,0<x<y<1\\ 0 & ,otherwise\end{cases}$$

求概率$P(X>1/3)$。

2. 设随机变量$X$和$Y$独立同分布，均服从参数为$\lambda$的指数分布，令

$$Z=\begin{cases}3X+1 & ,X\geq Y\\ 6Y & ,X<Y\end{cases}$$

求期望$E(Z)$。

3. 二维随机变量$(X,Y)$服从平面区域$D=\{(x,y)|0\leq y\leq 1,0\leq x+y\leq 1\}$上的均匀分布。
(1)求条件期望$E(Y|X=0)$;
(2)设$U=X/Y$，求条件期望$E(Y|U=0)$。

4. 设随机变量序列$\{X_n\}$独立同分布，其密度函数为

$$p(x)=\begin{cases}e^{-(x-\alpha)} & ,X\geq\alpha\\ 0 & ,X<\alpha\end{cases}$$

令$Y_n=\min\{X_1,\ldots,X_n\}$，证明：$Y_n\xrightarrow{P}\alpha$。

5. 设随机变量序列$\{X_n\}$独立同分布，$Var(X_n)=\sigma^2$存在。记$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$以及$S_n^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n(X_i-\bar{X})$。证明：$S_n^2\xrightarrow{P}\sigma^2$。

6. 设随机变量序列$\{X_n\}$同分布，期望为$\mu$，方差为$\sigma^2$。$i>1$时，$X_i$仅与$X_{i-1},X_{i+1}$相关。令$Y_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，$n=1,2,\ldots$。证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}Var(Y_n)=0$；

(2) $Y_n\xrightarrow{P}\mu$

7. (1)设X服从正态$N(\mu,\sigma^2)$，定义$Y=e^X$.
求Y的概率密度函数。

(2)设T时刻某股票价格为
$S=S_0\exp((r-\sigma^2/2)T+\sigma\sqrt{T}Z)$，Z服从N(0,1)
($S_0$为0时刻股票价格，$r,\sigma$ 为参数)，
求 lnS和S的概率密度函数。

(3)求数学期望E(S).

8. 设X, Y为相互独立的标准正态随机变量N(0,1). 将(X, Y)作为平面上的点，设R, Θ为该点的极坐标（$R>0$, $0\le\Theta<2\pi$），即

$$\begin{cases}X=R\cos(\Theta),\\ Y=R\sin(\Theta).\end{cases}$$

（1）求(R, Θ)的联合概率密度函数；

（2）求R与Θ的边际概率密度函数，并判断R与Θ 是否相互独立？为什么？

（3）令$Z=R^2$，求Z的概率密度函数及数学期望。

（4）对上述随机变量Z，计算条件概率 $P(Z>6|Z>2)$.