第十三周作业

吴晨聪　电25　2022010311

5-18　一薄壁方筒，如图题 5-18 所示。其电导率为 σ，磁导率为 μ_0，壁厚为 Δ，方截面边长为 a，筒长很长。在 $t=0$ 时，由于外加磁通 Φ 突减至零，感生一面电流，其线密度为 J_{S0}。试证 $t>0$ 时 $J_S(t)=J_{S0}e^{-t/\tau_m}$，这里 $\tau_m=\mu_0\sigma\Delta a/4$。

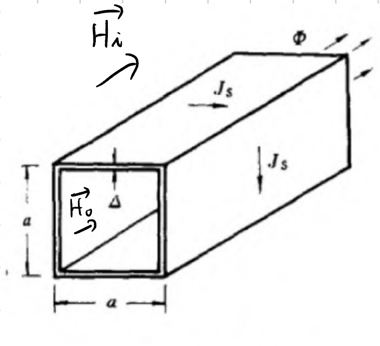

图　题 5-18

记外加磁场强度与管内实际磁场强分别为 $\vec{H_i}$ 与 $\vec{H_o}$

$\vec{H_i}$ 与 $\vec{H_o}$ 的正方向与 $\vec{J_s}$ 成右手螺旋关系

$\therefore H_o = J_s + H_i \Rightarrow H_o - H_i = J_s$，其中 $H_i = \dfrac{\Phi}{a^2\mu_0}$

而 $\nabla\times\vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$

壁厚 Δ 很小，即可认为壁内电流均匀分布

取筒长为 l

$\therefore \oint_c \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\iint_s \vec{B}\cdot d\vec{s}$

$\therefore \sigma\dfrac{J_s}{\sigma}\cdot 4a = -\mu_0\dfrac{\partial H_o}{\partial t}\cdot a^2$

$\therefore J_s = -\dfrac{\Delta\mu_0 a\sigma}{4}\cdot\dfrac{\partial H_o}{\partial t}$

代入 $H_o - H_i = J_s$ 有：$\dfrac{\Delta\mu_0 a\sigma}{4}\cdot\dfrac{\partial H_o}{\partial t} + H_o = H_i$

$H_o = 0$（初始条件）

$\therefore H_o = H_i(1-e^{-\frac{t}{\tau_m}})$，$\tau_m = \dfrac{\Delta\mu_0 a\sigma}{4}$

而 $J_s(t) = \dfrac{\partial H_o}{\partial t}\cdot\left(-\dfrac{\Delta\mu_0 a\sigma}{4}\right) = -H_i e^{-\frac{t}{\tau_m}}$

由于 $t=0$ 时，有 $\begin{cases} H_o = J_s + H_i \\ H_o(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow J_{s0} = -H_i$

$\therefore J_s(t) = J_{s0}e^{-\frac{t}{\tau_m}}$（其中 $\tau_m = \dfrac{\mu_0\sigma\Delta a}{4}$）证毕

补充作业: 给出一维涡流分布问题磁场强度相量的边值问题形式。

导体长度为 L，磁场强度 H 沿 y 方向

微分方程：$\frac{d^2 H_y(x)}{dx^2} = -j\omega\mu\sigma H$

边界条件：$\begin{cases} H_y(0) = H_0 \\ H_y(L) = H_L \end{cases}$