作业：11、12、13

第6章 时变电磁场与电磁波　思考题

1. 波动方程的解函数是什么形式？
2. 麦克斯韦方程组能用什么样的位函数表示？位函数满足的方程为何？其积分形式的解为何？
3. 电磁波的能量特性为何？电场能与磁场能的关系为何？
4. 如何说明有电磁波现象？分别从能量与场量变化解释。
5. 对一个正弦电磁波问题，不同时刻场量的空间分布与不同点上场量的时间变化图像是什么？
6. 如何能定向传输电磁波？
7. 可以用什么量描述空间电磁波传播的方向特性？
8. 波在传播中遇到媒质交界面会发生什么现象？其根源为何？

第6章 时变电磁场与电磁波

第1节 电磁场基本方程与场量满足的波动方程及解答

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}+\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\qquad(1)$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\qquad(2)$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0\qquad(3)$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho\qquad(4)$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{J}=-\partial\rho/\partial t\qquad(5)$$

材料的成分方程:

$$\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}\qquad(6)$$

$$\boldsymbol{J}=\sigma\boldsymbol{E}\qquad(7)$$

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}\qquad(8)$$

如何求解方程组？ 将方程合并成一个变量所满足的方程

将(1)两边取旋度，并利用恒等式：$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{H})=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{H})-\nabla^2\boldsymbol{H}$

然后应用(6)(7)和式(3)及(2)后对线性均匀媒质得：

$$-\nabla^2\boldsymbol{H}=\sigma\left(-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\right)+\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\right)\qquad\left(\nabla^2-\mu\sigma\frac{\partial}{\partial t}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{H}=0$$

对于ρ=0的空间，类似上面的推导可得：

$$(\nabla^2-\mu\sigma\frac{\partial}{\partial t}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2})\boldsymbol{E}=0$$

此为广义波动方程

含二阶时间导数项。

在非导电媒质中有：$(\nabla^2-\mu\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2})\begin{Bmatrix}\boldsymbol{H}\\ \boldsymbol{E}\end{Bmatrix}=0$ 此为波动方程

只保留了电与磁的相互产生，称为电磁波问题。

一维波动方程的解为何？

对空间与对时间的二阶导数结果为相同的函数。$f(x+vt)$ 如何？

若场量仅为x的函数，则具有如下宗量形式的任意函数都是波动方程的解。

$$f(x-vt)\ \text{和}\ f(x+vt)\quad\text{或}\quad f(t-\frac{x}{v})\text{和}\ f(t+\frac{x}{v})\qquad (v=1/\sqrt{\mu\varepsilon})$$

将其代入波动方程中便可验证它们为方程的解。

波动方程的齐次性与对两个不同变量的微分决定了解可以是任意函数。

当考虑激励源时，方程便有了右端项，函数形式会被确定；

或考虑与有源区的交界面条件时函数形式会被确定。

波动方程解的物理意义　先看 $f_1(t-\dfrac{x}{v})$

此为双变量耦合的自变量函数。设宗量为：$\xi = t - \dfrac{x}{v}$

对宗量相同的函数点，若时间t增加，则空间x一定会变化。

现观察值为$f(\xi_1)$的"质点"经Δt后在空间上跑到哪里去了？

即自变量均为 ξ_1的两点在t增加Δt后x如何变化？设增加Δx 。

则宗量不变 $\xi_1 = \xi_1$，而t和x变化会有：

$$[t_1 - \frac{x_1}{v}] = [t_1 + \Delta t - \frac{x_1 + \Delta x}{v}]$$

即有：$0 = \Delta t - \dfrac{\Delta x}{v}$　=>　$\Delta x = v\Delta t$

上式表明：在Δt时间内"质点"以速度 v 向前方移动或传播，故称f_1为入射波。 波速为：（$v=1/\sqrt{\mu\varepsilon}$）

$f_2(t+\dfrac{x}{v})$　表示在Δt时间内"质点" 向后$(-x)$方向传播，故称为反射波。

第2节 坡印亭定理与坡印亭矢量(时变电磁场的能量)

- 在时变场中，电场能与磁场能都在随时间变化，而且伴随着两种能量的交换与空间流动。
- 坡印亭定理描述了电磁场能量的守恒定律与转换关系。
- 坡印亭矢量描述了电磁场功率的空间流动特性。

在时变场中，任意点处任意时刻的电磁能量密度为：

$$w(t)=w_e(t)+w_m(t)=\frac{1}{2}\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}+\frac{1}{2}\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H}$$

对一个体积V，总电磁能量为：

$$W(t)=\iiint_V w(t)\mathrm{d}V=\iiint_V \frac{1}{2}(\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H})\mathrm{d}V$$

- V内电磁总能量的变化等于什么？除了变化为热能外，其它的便为与外面交换的能量，此叫能量的流动或传播特性。
- 正弦电路中将能量的流动叫无功功率，是电感磁场能或电容电场能吞吐现象，电容与电感不匹配时与外电路交换能量。

V内能量的变化 $\dfrac{\partial W}{\partial t}=P_{EM}=\dfrac{\partial}{\partial t}\iiint_V[(\frac{1}{2}\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}+\frac{1}{2}\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H})]\mathrm{d}V=?$

这个能量变化率或功率可以用该体积表面的面积分表示吗？

由于有： $\dfrac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{2}\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E})=\boldsymbol{E}\cdot\dfrac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$ $\quad\dfrac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{2}\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H})=\boldsymbol{H}\cdot\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$

故： $$\frac{\partial W}{\partial t}=\iiint_V(\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}+\boldsymbol{H}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t})\mathrm{d}V=\iiint_V\left[\boldsymbol{E}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{H}-\boldsymbol{J})-\boldsymbol{H}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{E})\right]\mathrm{d}V$$

利用了Maxwell第一方程　第二方程

$$\frac{\partial W}{\partial t}=\iiint_V\left[\boldsymbol{E}\cdot\nabla\times\boldsymbol{H}-\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J}-\boldsymbol{H}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{E})\right]\mathrm{d}V$$

利用矢量恒等式：$\nabla\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})=\boldsymbol{H}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{E})-\boldsymbol{E}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{H})$

$$\frac{\partial W}{\partial t}=-\iiint_V\left[\nabla\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})+\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J}\right]\mathrm{d}V=-\oiint_S(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}-\iiint_V\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J}\,\mathrm{d}V$$

$\boldsymbol{S}$为外法向。若体积内无焦耳功率损耗和电源，则有：

$\dfrac{\partial W}{\partial t}=P_{EM}=-\oiint_S(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 定义坡印亭矢量为：$\boxed{\boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}}$

若有损耗和电源该如何？

坡印亭矢量 $\boxed{\boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}}$ $$\frac{\partial W}{\partial t}=P_{EM}=-\oint\!\!\oint_S \boldsymbol{S}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

是功率面密度，即穿过垂直于$\boldsymbol{S}$的单位面积在单位时间内的电磁能量之变化或流动，故$\boldsymbol{S}$可称为功率流面密度 。单位：W/m^2

- $\boldsymbol{S}$的方向为电磁能流动或传播的方向，实际上就是电磁波能量辐射的方向。$\boldsymbol{S}$也可用来表述电磁波的强弱以及骚扰影响程度。
- 对一闭合面，若面内无损耗且无源，$\boldsymbol{S}$的面积分的负值等于体积内电磁场能量随时间的增加率，积分面的方向为外法向。

- 显然，若体积内有焦耳损耗和电源，根据能量守恒定理可知：

流入V内的电磁功率=V内电磁能量的时变率+焦耳损耗功率–电源产生的功率，即：（电场能量与磁场能量之和）

$$-\oint\!\!\oint_S(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\frac{\partial W}{\partial t}+P_R-P_e=\frac{\partial W}{\partial t}+\iiint_{V_J}J^2/\sigma\mathrm{d}V-\iiint_{V_e}\boldsymbol{E}_e\cdot\boldsymbol{J}\,\mathrm{d}V$$ 坡印亭定理

上式也可由前面得到的这个方程 $$\frac{\partial W}{\partial t}=-\oint\!\!\oint_S(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}-\iiint_V\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J}\,\mathrm{d}V$$

并考虑对导体和电源内有 $\boldsymbol{J}=\sigma(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}_e)$ $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{J}/\sigma-\boldsymbol{E}_e$ 而得到。

在正弦电路中，复功率为 $\tilde{S}=\dot{U}\times\dot{I}^*$

由于$j\times j=-1$，所以电流取共轭，复功率展开式的实部才能为保证为正数表示有功（不取共轭可能为负值）；虚部表示无功；结果是容性无功为负，称为发出无功，感性为正。

类似地，复坡印亭矢量的相量形式：$\tilde{\boldsymbol{S}}=\dot{\boldsymbol{E}}\times\dot{\boldsymbol{H}}^*$

下面求复波印亭矢量与体内能量和损耗的关系。

利用矢量恒等式：$\nabla\cdot(\dot{\boldsymbol{E}}\times\dot{\boldsymbol{H}}^*)=\dot{\boldsymbol{H}}^*\cdot(\nabla\times\dot{\boldsymbol{E}})-\dot{\boldsymbol{E}}\cdot(\nabla\times\dot{\boldsymbol{H}}^*)$

$$=-j\omega\dot{\boldsymbol{H}}^*\cdot\dot{\boldsymbol{B}}-\dot{\boldsymbol{E}}\cdot\dot{\boldsymbol{J}}^*+j\omega\dot{\boldsymbol{E}}\cdot\dot{\boldsymbol{D}}^*$$

（利用了Maxwell第二方程和第一方程 $\nabla\times\dot{\boldsymbol{H}}^*=\dot{\boldsymbol{J}}^*-j\omega\dot{\boldsymbol{D}}^*$）

上式两边取体积分，并利用高斯公式，

得坡印亭定理的相量形式：

$$-\oint\!\!\!\oint_S(\dot{\boldsymbol{E}}\times\dot{\boldsymbol{H}}^*)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=j\omega\iiint_V(\mu H^2-\varepsilon E^2)\mathrm{d}V+\iiint_V\frac{J^2}{\sigma}\mathrm{d}V-\iiint_V\dot{\boldsymbol{E}}_e\cdot\boldsymbol{J}^*\mathrm{d}V$$

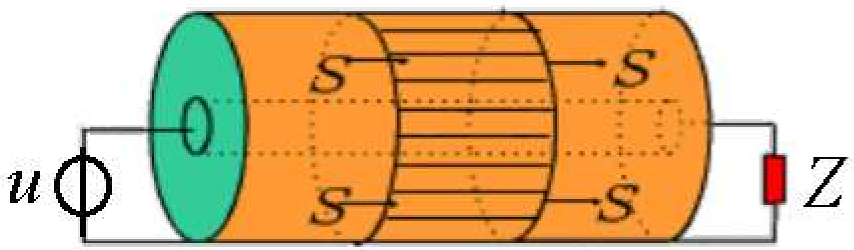
若体积V内无电源，则有：

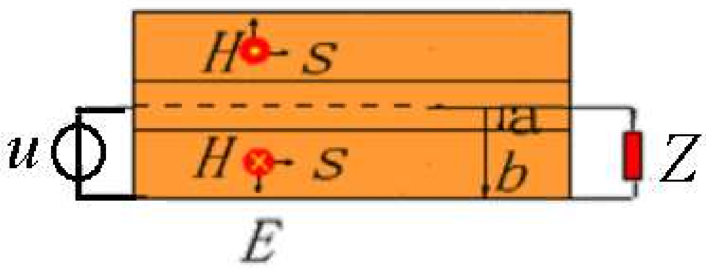
$$-\oint\!\!\!\!\oint_S(\dot{\boldsymbol{E}}\times\dot{\boldsymbol{H}}^*)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iiint_V\frac{J^2}{\sigma}\mathrm{d}V+j\omega\iiint_V(\mu H^2-\varepsilon E^2)\mathrm{d}V=P+jQ$$

有功功率+无功功率(磁场能与电场能的交换速率)

复坡印亭矢量的面积分的负值的实部为有功，虚部为无功。
由上面的恒等式可知，计算有功与无功有两种方法：
按方程左端由复坡印亭矢量求面积分、按右端由定义求体积分。

例1：用坡印亭矢量证明电源沿同轴电缆向负载传送能量平衡。
设电缆为理想导体电阻率ρ=0，内外半径分别为$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$ 。





解：视为电准静态场。

导体中电场$\boldsymbol{E}$=0。

介质中径向库仑电场强度 $$\boldsymbol{E}(t)=\frac{u(t)}{r\ln(b/a)}\boldsymbol{e}_r$$

轴向E_z=0

磁场强度 $$\boldsymbol{H}=\frac{i}{2\pi r}\boldsymbol{e}_\alpha$$

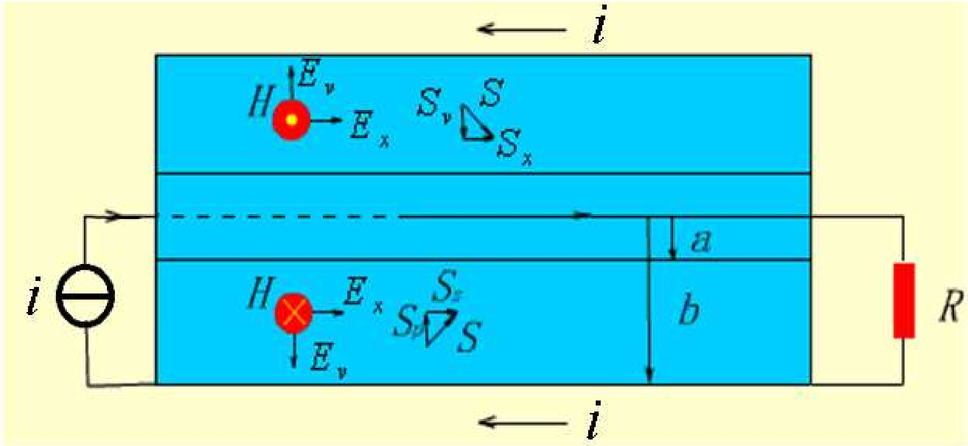
坡印亭矢量 $$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}=\frac{u}{r\ln(b/a)}\cdot\frac{i}{2\pi r}\boldsymbol{e}_z$$

单位时间从电源向负载方向流过电缆介质区横截面$\boldsymbol{A}$的总能量为：

$$p=\int_A\boldsymbol{S}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{A}=\int_a^b\frac{ui}{2\pi r^2\ln b/a}2\pi r\mathrm{d}r=ui$$

表明：电磁能量是通过导体周围的介质传播的，导线只起导向作用。电源提供的能量被负载吸收。

例2：上例中如考虑导线损耗，设导线电导率为σ，试用坡印亭矢量计算芯线损耗的能量，已知电缆流过的电流为i。



解：设芯线中的电流为i。

导体内，电场强度为：

$$\boldsymbol{E}=\frac{\boldsymbol{J}}{\sigma}=\frac{i}{\pi a^2\sigma}\boldsymbol{e}_z$$

（导体外的电场有轴向与径向分量）

芯线表面的磁场强度为：

$$\boldsymbol{H}(a)=\frac{i}{2\pi a}\boldsymbol{e}_\varphi$$

以芯线表面为闭合面，两端面的波印廷矢量与端面垂直，故只需考虑圆柱面的内侧，则导体吸收的功率为：

$$p=\iint_S(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\int_l\frac{i}{\pi a^2\sigma}\cdot\frac{i}{2\pi a}2\pi a\mathrm{d}z=\frac{i^2 l}{\pi a^2\sigma}=i^2R_l$$

R_l为芯线两端面之间导线的电阻。

这表明，导体电阻所消耗的能量是由外部传递的。

第3节 动态位$A(t)$-$\varphi(t)$

因为有 $\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$ ，故可引进

矢量磁位A来表示磁密：

$$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$$

且由于矢量旋度的散度一定为零，
所以式（3）一定能得到满足。

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}+\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\qquad(1)$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\qquad(2)$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0\qquad(3)$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho\qquad(4)$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{J}=-\partial\rho/\partial t\qquad(5)$$

将上式带入（2）得：$\nabla\times(\boldsymbol{E}+\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t})=0$

引进φ使 $\boldsymbol{E}+\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}=-\nabla\varphi$ φ称为标量电位，

则式(5)和(2)一定能得到满足，因 $\nabla\times\nabla\varphi\equiv0$

将 $\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}-\nabla\varphi$ $\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$ 带入式（1）和（4）

便可得A–φ满足的、可替代电磁场方程组的两个方程。

代入麦克斯韦第（1）和第（4）方程，

并假设除已知的传导电流密度***J***源区之外没有导电媒质，

且电荷密度ρ已知或由电荷守恒定律约束给定情况下，

对线性均匀媒质，可得：

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}+\frac{\partial(\varepsilon\boldsymbol{E})}{\partial t} \Rightarrow \nabla\times\frac{1}{\mu}\nabla\times\boldsymbol{A}=\boldsymbol{J}+\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}-\nabla\varphi\right)$$

$$\nabla\cdot(\varepsilon\boldsymbol{E})=\rho \Rightarrow \nabla\cdot\varepsilon\left(-\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}-\nabla\varphi\right)=\rho$$

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A})=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-\nabla^2\boldsymbol{A}$$

$$\boxed{\begin{cases}\nabla^2\boldsymbol{A}-\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-\varepsilon\mu\dfrac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}-\mu\varepsilon\nabla\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}=-\mu\boldsymbol{J}\\[2ex]\nabla^2\varphi+\dfrac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\boldsymbol{A}=-\dfrac{\rho}{\varepsilon}\end{cases}}$$

对于$\boldsymbol{A}$还缺少规定它的散度，否则其不唯一。
可任意规定其散度。

1）规定 $\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0$（称为库仑规范）

将此时的$\boldsymbol{A}$-φ记为$\boldsymbol{A}_{\mathrm{C}}$-$\varphi_{\mathrm{C}}$

则方程

$$\begin{cases}\nabla^2\boldsymbol{A}-\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-\varepsilon\mu\dfrac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}-\mu\varepsilon\nabla\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}=-\mu\boldsymbol{J}\\ \nabla^2\varphi+\dfrac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\boldsymbol{A}=-\dfrac{\rho}{\varepsilon}\end{cases}$$

变为：

$$\begin{cases}\nabla^2\boldsymbol{A}_{\mathrm{C}}-\varepsilon\mu\dfrac{\partial^2\boldsymbol{A}_{\mathrm{C}}}{\partial t^2}-\mu\varepsilon\nabla\dfrac{\partial\varphi_{\mathrm{C}}}{\partial t}=-\mu\boldsymbol{J}\\ \nabla^2\varphi_{\mathrm{C}}=-\dfrac{\rho}{\varepsilon}\end{cases}$$

此$\boldsymbol{A}_{\mathrm{C}}$-$\varphi_{\mathrm{C}}$所满足的两个方程等效于电磁场方程组。

2）规定 $\nabla\cdot\boldsymbol{A}=-\mu\varepsilon\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}$ （称为洛仑兹规范，即为$\boldsymbol{A}_{\mathrm{L}}$-$\varphi_{\mathrm{L}}$）

则方程

$$\begin{cases}\nabla^2\boldsymbol{A}-\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-\varepsilon\mu\dfrac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}-\mu\varepsilon\nabla\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}=-\mu\boldsymbol{J}\\ \nabla^2\varphi+\dfrac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\boldsymbol{A}=-\dfrac{\rho}{\varepsilon}\end{cases}$$

变为：

$$\begin{cases}\nabla^2\boldsymbol{A}_{\mathrm{L}}-\mu\varepsilon\dfrac{\partial^2\boldsymbol{A}_{\mathrm{L}}}{\partial t^2}=-\mu\boldsymbol{J}\\ \nabla^2\varphi_{\mathrm{L}}-\mu\varepsilon\dfrac{\partial^2\varphi_{\mathrm{L}}}{\partial t^2}=-\dfrac{\rho}{\varepsilon}\end{cases}$$

此为非齐次波动方程

称为达朗贝尔方程

$\nabla\cdot\boldsymbol{J}=-\partial\rho/\partial t$

（无限大均匀空间中达朗贝尔方程的解为何？）

已知电荷与电流源求位函数要比直接求场强简单。

若为多媒质有界空间问题，上面的方程加上界面条件与边界条件便可构成边值问题。

$\boldsymbol{A}$和φ的交界面条件可由$\boldsymbol{H}_{1\mathrm{t}}=\boldsymbol{H}_{2\mathrm{t}}$、$\boldsymbol{B}_{1\mathrm{n}}=\boldsymbol{B}_{2\mathrm{n}}$、$\boldsymbol{E}_{1\mathrm{t}}=\boldsymbol{E}_{2\mathrm{t}}$、$\boldsymbol{D}_{1\mathrm{n}}=\boldsymbol{D}_{2\mathrm{n}}$得到。

第4节 达朗贝尔方程的积分形式解（洛仑兹规范下）

洛仑兹规范下

$\boldsymbol{A}_{\mathrm{L}}$-$\varphi_{\mathrm{L}}$ 满足达朗贝尔方程：

$$\begin{cases} \nabla^2 \boldsymbol{A}_{\mathrm{L}} - \mu\varepsilon \dfrac{\partial^2 \boldsymbol{A}_{\mathrm{L}}}{\partial t^2} = -\mu \boldsymbol{J} \\ \nabla^2 \varphi_{\mathrm{L}} - \mu\varepsilon \dfrac{\partial^2 \varphi_{\mathrm{L}}}{\partial t^2} = -\dfrac{\rho}{\varepsilon} \end{cases}$$

通过解$\boldsymbol{A}(t)$-$\varphi(t)$方程与界面及边界条件构成的边值问题可得$\boldsymbol{A}(t)$与$\varphi(t)$ 。

但对于无限大均匀无损空间，可得到边值问题的积分形式解。

现推导该解，后面将用此解求天线发射的电磁场或电磁波。

此时，$\boldsymbol{A}$、φ可分别求解，$\boldsymbol{A}$只与传导电流$\boldsymbol{J}$有关，φ只与ρ有关。

先求$\boldsymbol{A}$

无限大均匀介质中，矢量磁位满足的达朗贝尔方程的齐次方程，即波动方程的解为：

$$f_1\left(t - \frac{r}{v}\right) \quad (v=1/\sqrt{\mu\varepsilon}) \qquad \text{（对入射波）}$$

$\boldsymbol{A}$的齐次方程的一个解（仅入射波）为：$\boldsymbol{A}_1(t-\frac{r}{v})$

当电流不随时间变化时，达朗贝尔方程方程退变为泊松方程，无限大空间中泊松方程的解为：

$$\boldsymbol{A}(x,y,z)=\frac{\mu}{4\pi}\int_{V'}\frac{\boldsymbol{J}(x',y',z')}{R}\mathrm{d}V'$$

R为源点到场点的距离

$$R=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}=|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|$$

由此可知，时变电流$\boldsymbol{J}(x,y,z,t)$产生的动态磁位，即达朗贝尔方程的解应为：

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)=\frac{\mu}{4\pi}\int_{V'}\frac{\boldsymbol{J}(t-\frac{R}{v})}{R}\mathrm{d}V'$$

被积函数是将$\boldsymbol{J}(x,y,z,t)$变为 $\boldsymbol{J}(t-\frac{R}{v})$

距离源点R处的场点，不仅$\boldsymbol{A}$的幅值不同，以$\mathbf{1}/R$衰减，且在时间上$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)$是$\boldsymbol{J}$处的$\boldsymbol{A}|_{R=0}$以速度$v$传播到$R$处的，$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)$落后于$\boldsymbol{J}$的时间为$R/v$，故位具有时间上滞后的特性。

类似可得洛仑兹规范下电位为：$\varphi(\boldsymbol{r},t)=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{V'}\dfrac{\rho(t-R/v)}{R}\mathrm{d}V'$

可证明上面$\boldsymbol{A}$和φ的表达式满足洛仑兹规范：$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=-\mu\varepsilon\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}$

故φ可通过电荷ρ求得，也可由上式据已得到的$\boldsymbol{A}$求得。

若激励源为正弦函数$\boldsymbol{J}(x,y,z,t)=\boldsymbol{J}_m(x,y,z)\sin\omega t$，则时域解为：

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)=\frac{\mu}{4\pi}\int_{V'}\frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')\sin[\omega(t-\frac{R}{v})]}{R}\mathrm{d}V' \qquad \omega(t-\frac{r}{v})=\omega t-\beta r$$

故$-\beta r$是初相位，由复数表示的初相位形式可得相量形式解：

$$\dot{\boldsymbol{A}}(r)=\frac{\mu}{4\pi}\int_{V'}\frac{\dot{\boldsymbol{J}}(r')\mathrm{e}^{-j\beta r}}{r}\mathrm{d}V'$$ 类似的有：$$\dot{\varphi}=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{V'}\frac{\dot{\rho}(r')\mathrm{e}^{-j\beta r}}{r}\mathrm{d}V'$$

$\mathrm{e}^{-j\beta r}$表示$\boldsymbol{A}$与φ相对于源所滞后的相位，故亦称为滞后因子；

即$\beta=\omega/v$称为相位常数，单位：弧度/米；每米相位变化量。