第5节 考虑磁性材料的磁场的边值问题

1. 基本方程组

场与源的关系，安培环路定律：

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J} \qquad \oint_l \boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=I$$

电流是磁场的源。

场的特性，磁通连续性定理：

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0 \qquad \oiint_S \boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=0$$

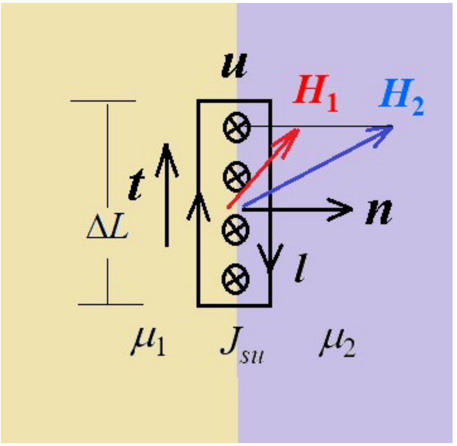
材料本构方程： $\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}$

条件 $\oiint_S \boldsymbol{J}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=0 \qquad \nabla\cdot\boldsymbol{J}=0$

2. 交界面条件

在不同媒质交界面上，$\boldsymbol{B}$与$\boldsymbol{H}$均不连续。

施加 $\oiint_S \boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=0$ 到分界面上可得$\boldsymbol{B}$的法向连续：$B_{1n}=B_{2n}$



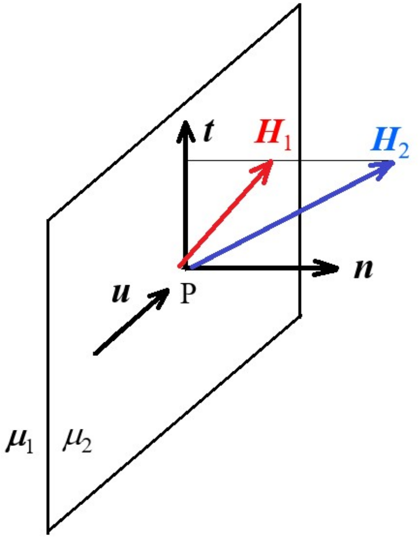
设交界面上有面电流密度$\boldsymbol{J}_s$，定义其方向为$\boldsymbol{u}$；

设界面的法向$\boldsymbol{n}$从区域1指向2；设 $\boldsymbol{t}=\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{u}$ 。

设界面上一点P两侧的磁场强度为$\boldsymbol{H}_1$和$\boldsymbol{H}_2$；

两侧$\boldsymbol{H}$向界面的投影向量的单位矢量是$\boldsymbol{t}$的方向。

在界面上包围P点作矩形回路$\boldsymbol{l}$，其围成的面积为$\boldsymbol{S}$，



根据安培环路定律 $\oint_l \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=I=\boldsymbol{J}_S\cdot\boldsymbol{S}=J_{Su}S$

有 $H_{1t}\Delta L-H_{2t}\Delta L=J_{su}\Delta L$ $\quad J_{su}$是$\boldsymbol{J}_s$的$\boldsymbol{u}$分量。

因此得：$H_{1t}-H_{2t}=J_{su}$ $\quad$ $\boldsymbol{t}$的方向由$\boldsymbol{u}$与$\boldsymbol{n}$确定。

为借助$\boldsymbol{n}$表示上式取 $\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{t}=\boldsymbol{H}\cdot(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{u})=\boldsymbol{u}\cdot(\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{n})$

故上式可写为： $\boldsymbol{u}\cdot[(\boldsymbol{H}_1-\boldsymbol{H}_2)\times\boldsymbol{n}]=\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{J}_s=J_{su}$

$[(\boldsymbol{H}_1-\boldsymbol{H}_2)\times\boldsymbol{n}]$是$\boldsymbol{u}$上的矢量，故有：

$$(\boldsymbol{H}_1-\boldsymbol{H}_2)\times\boldsymbol{n}=\boldsymbol{J}_s$$

$\boldsymbol{n}$从区域1指向2。

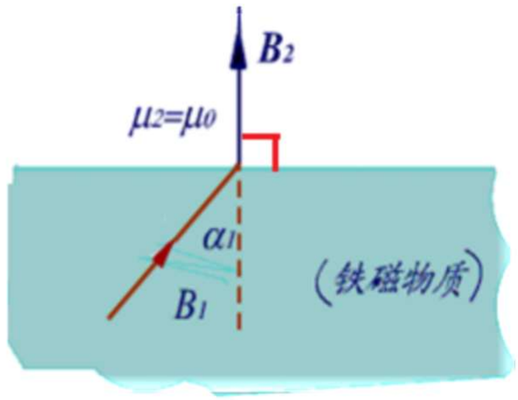
当分界面上无传导面电流时，$\boldsymbol{H}_1 \times \boldsymbol{n} = \boldsymbol{H}_2 \times \boldsymbol{n}$。此时则有：

折射定律 $$\frac{\tan\alpha_1}{\tan\alpha_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$ α_1和α_2是两种媒质中的磁力线与法向的夹角。

对铁磁材料区域与空气区域的分界面，磁场的折射情况为：

设 $\mu_2 = \mu_0$，则 $\mu_1 >> \mu_2$

$$\tan\alpha_2 = \frac{\mu_0}{\mu_1}\tan\alpha_1 \approx 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_2 \to 0$$



即，只要铁磁物质侧的$\boldsymbol{B}$不与界面平行，那么空气侧的$\boldsymbol{B}$一定近似与分界面垂直，磁力线垂直于铁磁区域表面。

磁屏蔽：球壳、圆柱壳对内外场的屏蔽，导磁板的屏蔽特性。圆柱对其轴线上电流的磁场无屏蔽作用；平板对垂直场无屏蔽。

3. 边界条件

在边界上给定***B***或***H***的切向或法向分量之一为充必边界条件。

4. 边值问题的形式

$$
\begin{cases}
\nabla\times\boldsymbol{H}_k=\boldsymbol{J}_k & \in V_k\\
\nabla\cdot\boldsymbol{B}_k=0 & \in V_k\\
\boldsymbol{B}_k=\mu_k\boldsymbol{H}_k & \in V_k\\
\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{B}_1=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{B}_2 & \in \boldsymbol{S}_{\text{int}}\\
\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}_1-\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}_2=\boldsymbol{J}_{Su} & \in \boldsymbol{S}_{\text{int}}\\
\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{B}=0 & \in \boldsymbol{S}_1\\
\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{B}=0 & \in \boldsymbol{S}_2
\end{cases}
$$

5. 边值问题的求解

（**1**）积分形式通解法

得到每个子区域*k*中的积分形式通解，结合交界面条件方程形成多子区域问题的积分形式通解。

再结合边界条件求解通解中的待定量（函数）。

（**2**）直接获取显示解函数法

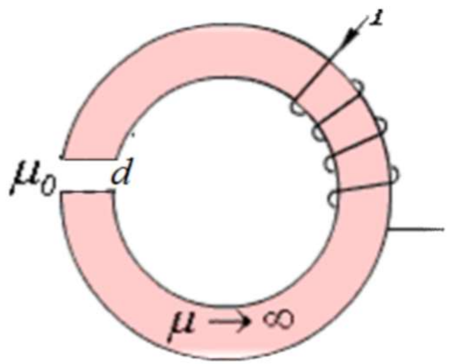
（在后面矢量磁位***A***求解中再介绍该方法）

例（利用交界面条件的例题）：
一带有小气隙的镯环铁心，设铁心材料的磁导率为无限大，气隙长为d，加磁动势NI，求气隙中的$\boldsymbol{B}$和$\boldsymbol{H}$。

解：磁力线为一个个圆，因为气隙很小。用安培环路定律求解。
铁心内$\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}$，$\mu$无限大，那铁心内是$\boldsymbol{B}$等于无限大，还是$\boldsymbol{H}$等于零？
显然，气隙区域内的$\boldsymbol{B}$和$\boldsymbol{H}$均不为零和无限大。
因此，根据交界面条件可知：空气与铁心中的$\boldsymbol{B}$连续或相等，为有限值，故铁心内$H=B/\mu=0$。
取圆环为安培环路（与NI交链），

$$\oint_L \boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} \approx H_{空气}d = NI$$

$$H_{空气} = NI/d \qquad B_{空气} = \mu_0 NI/d$$



作业附加题：若铁心磁导率μ不是无限大，求气隙中的$\boldsymbol{B}$。

I过大时铁心进入饱和区，铁心磁导率下降，则B随I的增加程度变小。原因有二：H与I成正比，I一定时μ小则B小；μ小则集中式线圈产生的磁通“流”到气隙处的会减少，线圈周围的漏磁会增大。

第6节 磁标量位φ_m及其边值问题 (不作要求)

在无电流区域有 $\nabla\times\boldsymbol{H}=0$

因此可以利用一个标量函数φ_m来表示$\boldsymbol{H}$，即

$$\boldsymbol{H}=-\nabla\varphi_m$$

φ_m称为磁标量位，单位：$\boldsymbol{A}$（安培）。

φ_m仅适合于无传导电流的区域，该量无明确的物理意义。

在均匀线性磁媒质中，有：

$$\nabla^2\varphi_m=0$$

介质交界面条件为：$\begin{cases}\varphi_{m1}=\varphi_{m2}\\ \mu_1\dfrac{\partial\varphi_{m1}}{\partial n}=\mu_2\dfrac{\partial\varphi_{m2}}{\partial n}\end{cases}$

边界条件有第一、二、三类。由此构成边值问题。

第7节 磁矢量位A

作业：34, 以外皮外表面为场域边界。仅需给出边值问题与通解，不需求出常数。

1. 磁矢量位A的引入(引入A只是为了简化计算，A没有物理意义！)

恒定磁场的一般方程： $\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$ $\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}$ $\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}$

引进A，令：$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$， 可使 $\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$得到满足。

$\boldsymbol{A}$ 称为磁矢量位(**Magnetic vector potential**) 。

为使A唯一，可取：$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0$，对应的积分形式为：$\oint\!\!\oint_S \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=0$

A要选零参考点，否则相差常数的A都能满足旋度和散度方程。

2. 磁矢量位A的一般方程

$\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J} \xrightarrow{\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}} \nabla\times\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{J}$ （对均匀线性媒质）代入 $\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$ 得：

$$\boxed{\begin{cases}\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{A}=\mu\boldsymbol{J}\\ \nabla\cdot\boldsymbol{A}=0\end{cases}}$$

此为A的一般方程组

利用矢量恒等式 $\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{Q}=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{Q})-\nabla^2\boldsymbol{Q}$，合并以上两式得：

$$\boxed{\nabla^2\boldsymbol{A}=-\mu\boldsymbol{J}}$$

此为另一种形式一般方程，矢量泊松方程。

自由空间中泊松方程的解为：$\boldsymbol{A}(r)=\dfrac{\mu}{4\pi}\int_{V'}\dfrac{\boldsymbol{J}(r')}{|r-r'|}\mathrm{d}V'$

上式也可通过毕奥-萨伐尔定律得到：

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\nabla\times\frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V'=\nabla\times\left[\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V'\right]$$

$\boldsymbol{A}$与产生该$\boldsymbol{A}$的电流$\boldsymbol{J}\mathrm{d}v$同方向。

在已知电流分布的情况下，比求$\boldsymbol{B}$要简单一些。

在直角坐标系下，矢量泊松方程可写为三个标量方程：

$$\begin{cases}\nabla^2 A_x=-\mu J_x\\ \nabla^2 A_y=-\mu J_y\\ \nabla^2 A_z=-\mu J_z\end{cases}$$

故自由空间中有：

$$A_x=\frac{\mu}{4\pi}\int_{V'}\frac{J_x\mathrm{d}V'}{R}$$

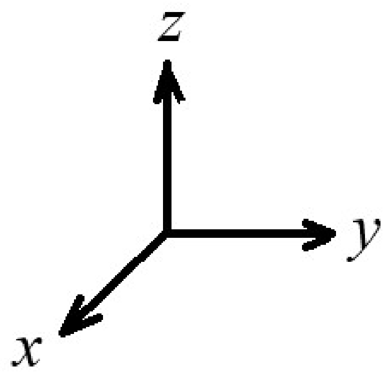
$$A_y=\frac{\mu}{4\pi}\int_{V'}\frac{J_y\mathrm{d}V'}{R}$$

$$A_z=\frac{\mu}{4\pi}\int_{V'}\frac{J_z\mathrm{d}V'}{R}$$

对线电流有：

$$\boldsymbol{A}=\frac{\mu}{4\pi}\int_{l'}\frac{I}{R}\mathrm{d}\boldsymbol{l}'$$

认识$\boldsymbol{B}$与$\boldsymbol{A}$的关系（或对函数$\boldsymbol{A}$取旋度后的结果矢量$\boldsymbol{B}$的关系认识）。
在直角坐标系下，有



$$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ A_x & A_y & A_z\end{vmatrix}$$

$$=(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z})\boldsymbol{i}+(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x})\boldsymbol{j}+(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y})\boldsymbol{k}=B_x\boldsymbol{i}+B_y\boldsymbol{j}+B_z\boldsymbol{k}$$

因此有：$B_z=\dfrac{\partial A_y}{\partial x}-\dfrac{\partial A_x}{\partial y}$

故此，$\boldsymbol{B}$的一个分量(如B_z)等于以该分量为法向的平面内，$\boldsymbol{A}$的两个分量(A_x和A_y)沿相异坐标(y或x)的变化率之和，当分量到微分坐标变量与$\boldsymbol{B}$的分量成左手螺旋关系时微分取正，否则取负。

如上式第二项为负是因为从x轴到y轴不是左手螺旋关系。

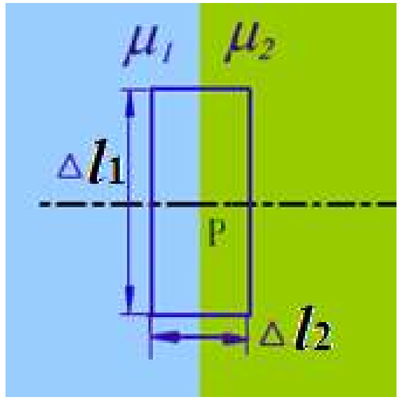
磁通的磁矢量位表示法： $\Phi = \iint_S \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iint_S (\nabla \times \boldsymbol{A})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \underline{\oint_l \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}}$

3. *A*的交界面条件

a）围绕 P点作一矩形回路$\boldsymbol{l}$，施加 $\oint_l \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\Phi$

若在界面上$\boldsymbol{B}$不是无限大，则在 $\Delta l_2 \to 0$时回路中的Φ=0。

故有：$A_{1t} = A_{2t}$



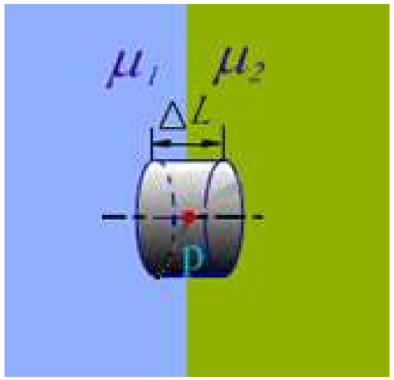
围绕P点作一扁圆柱，施加 $\oiint_s \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=0$

得：A_{1n}=A_{2n}，源于$\boldsymbol{A}$的规范。

因此有*A*在媒质交界面上连续： $\boldsymbol{A}_1 = \boldsymbol{A}_2$

$A_{1t} = A_{2t}$可使得 $B_{1n} = B_{2n}$ ，因 $B_n = \partial A_t / \partial u$

即A_t对切向u的导数等于B_n。



b）由$\boldsymbol{H}$的界面条件 $\boldsymbol{H}_1 \times \boldsymbol{n} - \boldsymbol{H}_2 \times \boldsymbol{n} = \boldsymbol{J}_{su}$ 得：

$$\frac{1}{\mu_1}(\nabla \times \boldsymbol{A}_1)_t - \frac{1}{\mu_2}(\nabla \times \boldsymbol{A}_2)_t = J_{su}$$

上式能简化吗？不能。但对二维可以。

(1) x-y坐标系中二维平行平面场对应H_t的$\boldsymbol{A}$的界面条件 $B_t=(\nabla\times\boldsymbol{A})_t$

(如任意截面形状的无限长直载流导线与磁媒质模型) $\boldsymbol{t}=\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{u}$

对二维平行平面场，因$\boldsymbol{J}=J_z\boldsymbol{k}$，故$\boldsymbol{A}=A_z(x,y)\boldsymbol{k}$；设$\boldsymbol{u}$为$\boldsymbol{k}$方向。

$$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ 0 & 0 & A_z\end{vmatrix}=\frac{\partial A_z}{\partial y}\boldsymbol{i}+(-\frac{\partial A_z}{\partial x})\boldsymbol{j}=B_x\boldsymbol{i}+B_y\boldsymbol{j}$$

$$B_x=\frac{\partial A_z}{\partial y}\qquad B_y=-\frac{\partial A_z}{\partial x}$$

$\boldsymbol{B}$的分量与求导变量交叉

i）对于平行于x轴的线，设其下方为区域**1**，$\boldsymbol{n}$为y轴向，则$\boldsymbol{t}$为x轴向，

则有：$B_t=B_x=\dfrac{\partial A_z}{\partial y}$

故 $\dfrac{1}{\mu_1}(\nabla\times\boldsymbol{A}_1)_t-\dfrac{1}{\mu_2}(\nabla\times\boldsymbol{A}_2)_t=J_{su}$ 可简化为：$\dfrac{1}{\mu_1}\dfrac{\partial A_{z1}}{\partial y}-\dfrac{1}{\mu_2}\dfrac{\partial A_{z2}}{\partial y}=J_{sz}$

ii) 对于平行于y轴的线，设其左方为区域**1**，$\boldsymbol{n}$为x轴，$\boldsymbol{t}$为负y轴向，

则有：$B_t=-B_y=\dfrac{\partial A_z}{\partial x}$

故H_t的交界面条件可简化为：$\dfrac{1}{\mu_1}\dfrac{\partial A_{z1}}{\partial x}-\dfrac{1}{\mu_2}\dfrac{\partial A_{z2}}{\partial x}=J_{sz}$

故有：$\dfrac{1}{\mu_1}\dfrac{\partial A_{z1}}{\partial n}-\dfrac{1}{\mu_2}\dfrac{\partial A_{z2}}{\partial n}=J_{sz}$

(2) 对于极坐标系r-α中的二维平行平面场

如无限长圆柱载流导线与同轴圆柱界面的多层媒质问题。

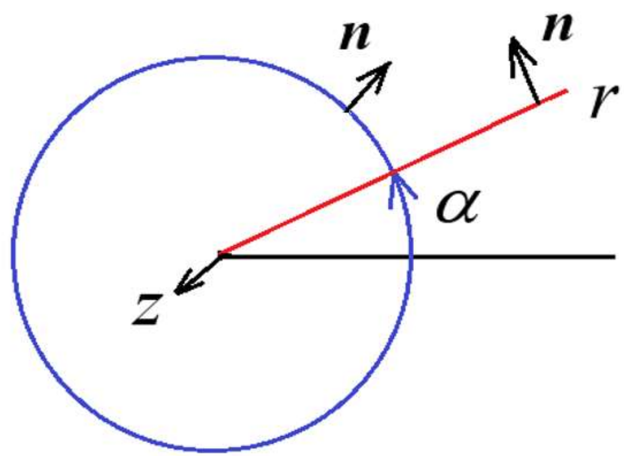
待求量为$A_z(r,\alpha)$。设$\boldsymbol{u}$为$\boldsymbol{k}$向指向外，面电流密度为J_{su}。

在圆柱坐标系下有：

$$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}\frac{1}{r}\boldsymbol{r}^0 & \boldsymbol{\alpha}^0 & \frac{1}{r}\boldsymbol{k}\\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \alpha} & \frac{\partial}{\partial z}\\ 0 & 0 & A_z\end{vmatrix}$$

$$B_r=\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \alpha}$$

$$B_\alpha=-\frac{\partial A_z}{\partial r}$$



$$=\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \alpha}\boldsymbol{r}^0-\frac{\partial A_z}{\partial r}\boldsymbol{\alpha}^0=B_r\boldsymbol{r}^0+B_\alpha\boldsymbol{\alpha}^0$$

i)　对于如图圆边界，设$\boldsymbol{n}$为$\boldsymbol{r}^0$轴向，则$\boldsymbol{t}$为负$\boldsymbol{\alpha}^0$向，则有：

$$B_t=-B_\alpha=\frac{\partial A_z}{\partial r}$$

故有：$$\frac{1}{\mu_1}\frac{\partial A_{z1}}{\partial r}-\frac{1}{\mu_2}\frac{\partial A_{z2}}{\partial r}=J_{sz}$$

ii) 对于如图经向直线，设$\boldsymbol{n}$为$\boldsymbol{\alpha}^0$轴向，则$\boldsymbol{t}$为负$\boldsymbol{r}^0$向，则有：

$$B_t=B_r=\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \alpha}$$

故有：$$\frac{1}{\mu_1}\frac{1}{r}\frac{\partial A_{z1}}{\partial \alpha}-\frac{1}{\mu_2}\frac{1}{r}\frac{\partial A_{z2}}{\partial \alpha}=J_{sz}$$

(3) 二维轴对称场中（扩充内容）

如有限长螺线管线圈，因 $\boldsymbol{J}=J_\alpha\boldsymbol{\alpha}^0$，故 $\boldsymbol{A}=A_\alpha(r,z)\boldsymbol{\alpha}^0$。

设$\boldsymbol{u}$为$\boldsymbol{\alpha}^0$方向，面电流密度为J_{su}。则有：

$$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}=-\frac{\partial A_\alpha}{\partial z}\boldsymbol{r}^0+\frac{1}{r}\frac{\partial(rA_\alpha)}{\partial r}\boldsymbol{k}=B_r\boldsymbol{r}^0+B_z\boldsymbol{k}$$

$$B_r=-\frac{\partial A_\alpha}{\partial z}\qquad B_z=\frac{1}{r}\frac{\partial(rA_\alpha)}{\partial r}=\frac{A_\alpha}{r}+\frac{\partial A_\alpha}{\partial r}$$

i）对于平行于z轴的线，设 $\boldsymbol{n}$为$\boldsymbol{r}$轴向，则$\boldsymbol{t}$为$\boldsymbol{z}$轴向。则有：

$$B_t=B_z=\frac{A_\alpha}{r}+\frac{\partial A_\alpha}{\partial r}$$

故 $$\left(\frac{1}{\mu_1}\nabla\times\boldsymbol{A}_1-\frac{1}{\mu_2}\nabla\times\boldsymbol{A}_2\right)\times\boldsymbol{n}=J_{su}\boldsymbol{u}$$

可简化为：$$\frac{1}{\mu_1}\left(\frac{A_{\alpha1}}{r}+\frac{\partial A_{\alpha1}}{\partial r}\right)-\frac{1}{\mu_2}\left(\frac{A_{\alpha2}}{r}+\frac{\partial A_{\alpha2}}{\partial r}\right)=J_{s\alpha}$$

ii) 对于平行于r轴的线，这$\boldsymbol{n}$为$\boldsymbol{z}$轴向，则$\boldsymbol{t}$为负$\boldsymbol{r}$轴向。则有：

$$B_t=-B_r=\frac{\partial A_\alpha}{\partial z}$$

H_t的界面条件可简化为：$$\frac{1}{\mu_1}\frac{\partial A_{\alpha1}}{\partial z}-\frac{1}{\mu_2}\frac{\partial A_{\alpha2}}{\partial z}=J_{s\alpha}$$

4. 矢量位*A*的边界条件

矢量位*A*的边界条件需要考虑两个方面：

利用*A*表示场*B*的两类边界条件；

保证矢量*A*有唯一解的其本身的边界条件：

$$\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{A}=\boldsymbol{K} \quad \in\Gamma_1 \qquad \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{A}=C \quad \in\Gamma_2$$

对*B*的齐次切向边界 $\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{B}=0$，*A*应为：$\boldsymbol{n}\times\nabla\times\boldsymbol{A}=0 \quad \in\boldsymbol{S}_1$

对*B*的齐次法向边界 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{B}=0$ ，*A*应为：$\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{A}=\boldsymbol{K}_i \quad \in\boldsymbol{S}_2$

这是由于*B*的法向只与*A*的切向分量沿另一切向的变化率有关，因此，若在表面上*A*的切向为常数，则一定有B_n=0。

磁场模型一般仅有一条磁力线即$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{B}=0$边界， 故可设：

$\boxed{\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{A}=0 \quad \in\boldsymbol{S}_2}$ 这个条件同时可满足上面的 $\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{A}=\boldsymbol{K} \quad \in\Gamma_1$

在$\boldsymbol{S}_1$上需要设两个条件： $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{A}=0$，$\boldsymbol{n}\times\nabla\times\boldsymbol{A}=0 \quad \in\boldsymbol{S}_1$

在 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{A}=0$下，$\boldsymbol{n}\times\nabla\times\boldsymbol{A}=0$ 可简化为：$\dfrac{\partial}{\partial n}(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{A})=0$

故有：$\boxed{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{A}=0,\ \dfrac{\partial}{\partial n}(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{A})=0 \quad \in\boldsymbol{S}_1}$ 证明略。较复杂，需用下式，设*C*=*n*

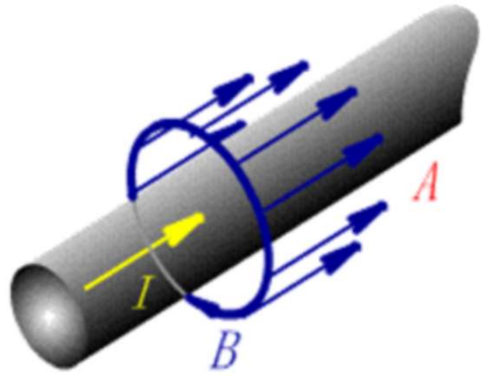
$$\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})=\boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{C})+\boldsymbol{C}\times(\nabla\times\boldsymbol{A})+(\boldsymbol{C}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{C}$$

即在 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{A}=0$下，*A*的切向分量的法向导数为零等价于*B*的切向为零。

用磁矢量位$\boldsymbol{A}$表示的磁力线及二维平行平面中$\boldsymbol{A}$的边界条件形式（需重点掌握内容）

此时$\boldsymbol{A}=A_z\boldsymbol{k}$，即$\boldsymbol{A}$仅有$z$分量，对场域边界或交界面$\boldsymbol{A}$仅有切向分量。

对一根磁力线上各点有$B_n=0$，这需有A_z的切向为常数，
因此，若在一根曲线上， 各点的A_z均相等，
则为$B_n=0$，则该线就是磁力线。
因此，等A_z线为磁力线（如右图）。



A 线,等 A 线与 B 线关系

设置A_z的边值条件准则：
(a) 磁力线即为A_z的第一类边界，可给定$A_z=0$。
(b) 与磁力线垂直的面(铁磁材料边界的空气侧)为A_z的齐次二类边界，因其上$B_t=0$，故有 $\dfrac{\partial A_z}{\partial n}=0$

5. 矢量磁位*A*的边值问题

$$\begin{cases}\nabla^2 \boldsymbol{A} = -\mu \boldsymbol{J} & \in V \\ \boldsymbol{A}_1 = \boldsymbol{A}_2 & \in \boldsymbol{S}_{\text{int}} \\ \dfrac{1}{\mu_1}(\nabla\times\boldsymbol{A}_1)_t - \dfrac{1}{\mu_2}(\nabla\times\boldsymbol{A}_2)_t = J_{su} & \in \boldsymbol{S}_{\text{int}} \\ \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{A} = 0 \ \ \& \ \dfrac{\partial}{\partial n}(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{A}) = 0 & \in \boldsymbol{S}_1 \\ \boldsymbol{n}\times\boldsymbol{A} = 0 & \in \boldsymbol{S}_2\end{cases}$$

6.矢量磁位*A*积分形式通解为:

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu}{4\pi}\iiint_V \frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')}{R}\mathrm{d}V'$$

$$-\frac{1}{4\pi}\oiint_S \{\boldsymbol{n}\times[\nabla'\times\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}')]\frac{1}{R}\}\mathrm{d}S' - \frac{1}{4\pi}\oiint_S \{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}')\nabla'\frac{1}{R} + [\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}')]\times\nabla'\frac{1}{R}\}\mathrm{d}S'$$

在无界均匀媒质空间中，有:

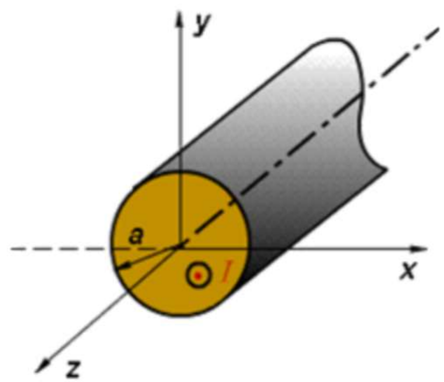
$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu}{4\pi}\iiint_V \frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')}{R}\mathrm{d}V'$$

例1（教材例题3-16）：一半径为 a 的带电长直圆柱体，其电流I在截面上均匀分布，圆柱体内外的磁导率分别为μ_1和μ_2，利用解边值问题法求导体内外的磁矢位 $\boldsymbol{A}$。

解：它是平行平面场，在平面上用极坐标系，变为一维问题，$\boldsymbol{A}=A_z(r)\boldsymbol{e}_z$ 。边值问题为(极坐标也是柱坐标系的r-α下)：

$$\nabla^2 A_{Z1} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial A_{z1}}{\partial r}\right) = -\mu_1 J_z \quad 0<r<a \qquad J_z=I/(\pi a^2)$$

$$\nabla^2 A_{Z2} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial A_{z2}}{\partial r}\right) = 0 \qquad a<r<\infty$$



交界面条件：$A_{z1}\big|_{r=a} = A_{z2}\big|_{r=a}$

$$\frac{1}{\mu_1}\frac{\partial A_{z1}}{\partial r}\bigg|_{r=a} = \frac{1}{\mu_2}\frac{\partial A_{z2}}{\partial r}\bigg|_{r=a}$$

边界条件： 参考磁矢位 $A_{z1}\big|_{r=a} = 0$

通解为
$$A_{z1} = -\frac{\mu_1 J_z}{4} r^2 + C_1 \ln r + C_2$$
$$A_{z2} = C_3 \ln r + C_4$$

这是由于选择圆柱坐标系A的表达式发生的不合理现象。

$$\frac{\partial A_{z1}}{\partial r} = -\frac{\mu_0 J_z}{2} r + C_1 \frac{1}{r}$$

由 $\left.\frac{\partial A_{z1}}{\partial r}\right|_{r=0} \to$ 有限值　　得：C_1=0

由 $A_{z1}\big|_{r=a} = 0$　　得：$C_2 = \mu_1 J_z a^2 \big/ 4$　　$A_{z1} = \frac{\mu_1 J_z}{4}(a^2 - r^2)$

利用 $\frac{1}{\mu_1}\frac{\partial A_{z1}}{\partial r}\Big|_{r=a} = \frac{1}{\mu_2}\frac{\partial A_{z2}}{\partial r}\Big|_{r=a}$　　得：$-\frac{J_z}{2}a = C_3 \frac{1}{\mu_2}\frac{1}{a}$　　$C_3 = -\frac{\mu_2 J_z a^2}{2}$

利用 $A_{z2}\big|_{r=a} = A_{z1}\big|_{r=a} = 0$　　得：$A_{z2} = C_3 \ln a + C_4 = 0$

$$C_4 = -C_3 \ln a = \frac{\mu_2 J_z a^2}{2} \ln a$$

$$A_{z1} = \frac{\mu_1 J_z}{4}(a^2 - r^2)$$

$$A_{Z2} = \frac{\mu_2 J_z a^2}{2} \ln \frac{a}{r}$$

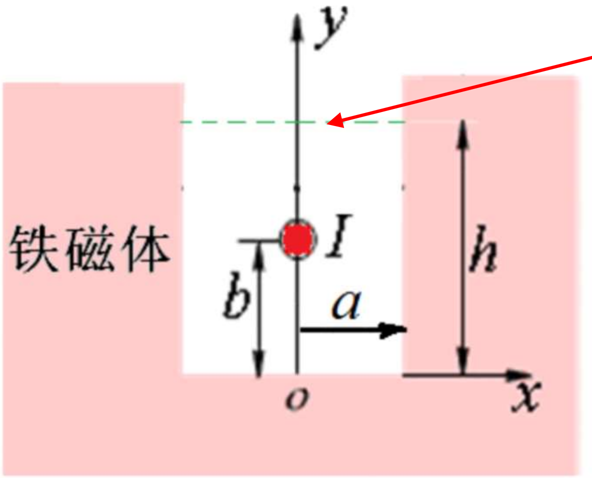
$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A} = -\frac{\partial A_z}{\partial r}\boldsymbol{e}_\alpha = \begin{cases} \dfrac{\mu_1 J_z r}{2}\boldsymbol{e}_\alpha & 0 < r \le a \\ \dfrac{\mu_2 a^2 J_z}{2r}\boldsymbol{e}_\alpha & a < r < \infty \end{cases}$$

例2：图示铁磁体槽内有一线电流***I***，铁磁体的磁导率远大于空气，槽和载流导线均为无限长，写出槽内矩形$2a\mathrm{x}h$求解场域磁矢量位***A***的边值问题。

解：能够仅取出该矩形区域作为求解场域是因为此场域边界条件我们可以近似确定。磁力线为何？

依图示电流方向，矢量磁位 $\boldsymbol{A}= A_z\,(x, y)\,\boldsymbol{k}$。$A_z$满足的方程为：

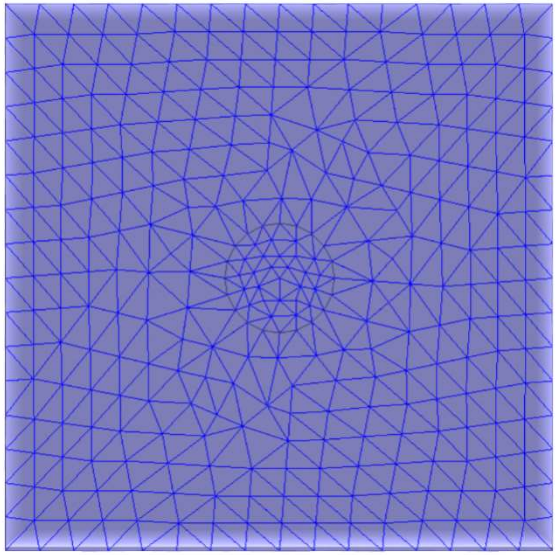
$$\nabla^2 A_z = \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} = -\mu_0 I \delta(x, y-b)$$



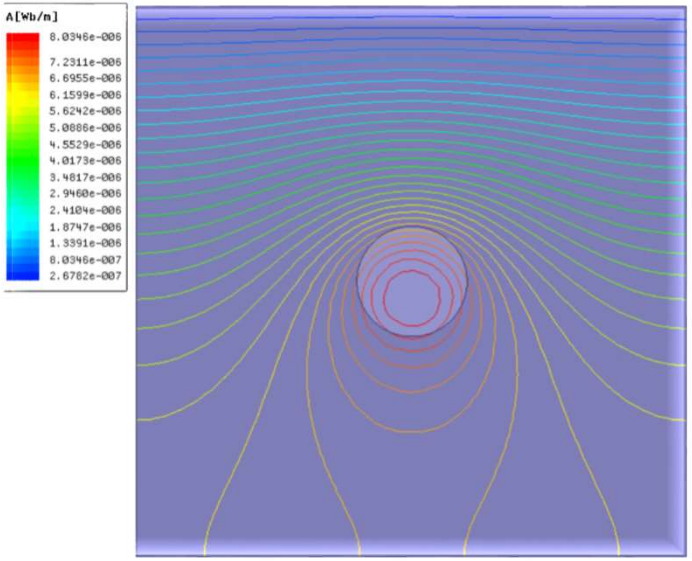
铁磁体槽内的线电流

矩形的上边界可看成一条磁力线，
为一类边界，可设A_z=0；
根据空隙与铁磁材料界面的折射率可知，
其它三条边为磁力线垂直边界，即A_z的
齐次二类边界，
在两条竖边上有$\dfrac{\partial A_z}{\partial x}=0$，底边上有$\dfrac{\partial A_z}{\partial y}=0$

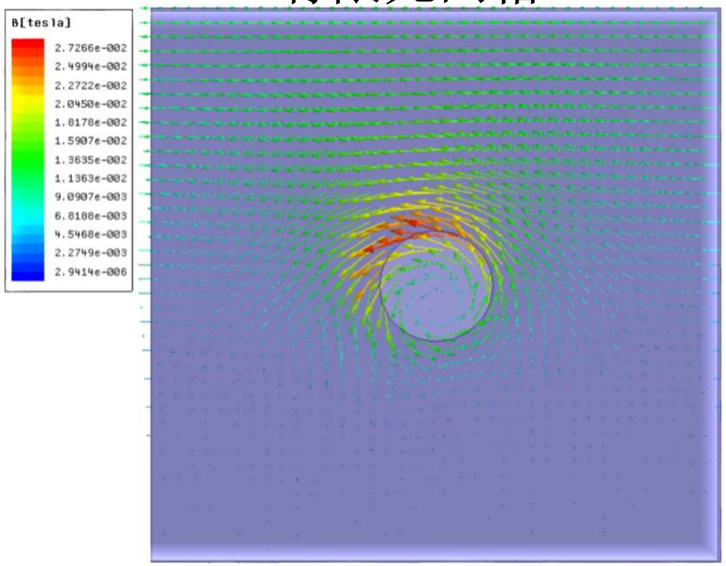
有限元软件计算结果：



有限元网格



磁力线（等A_z线）



磁场矢量图

闭合的磁力线中一定有电流，

因沿磁力线的 $\oint_l \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 必大于0

内无电流的闭合磁力线一定是错的！