

第二章 导体中的恒定电流场

作业：习题：10、17

恒定电流场与介质中的静电场比拟

恒定电场（电源外）

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$$

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi$$

$$\nabla^2 \varphi = 0$$

$$J_{1n} = J_{2n}$$

$$E_{1t} = E_{2t}$$

$$\sigma_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \sigma_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n}$$

$$\varphi_1 = \varphi_2$$

I

G

静电场($\rho = \rho_s = 0$)

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$$

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi$$

$$\nabla^2 \varphi = 0$$

$$D_{1n} = D_{2n}$$

$$E_{1t} = E_{2t}$$

$$\varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n}$$

$$\varphi_1 = \varphi_2$$

q

C

第二章 导体中的恒定电流场

恒定电流场与介质中的静电场比拟

例 无限大均匀导电媒质中的点电流 I 产生的 J 、 E 、 φ 为何?

I
↓
 q

J
↓
 D

E
↓
 E

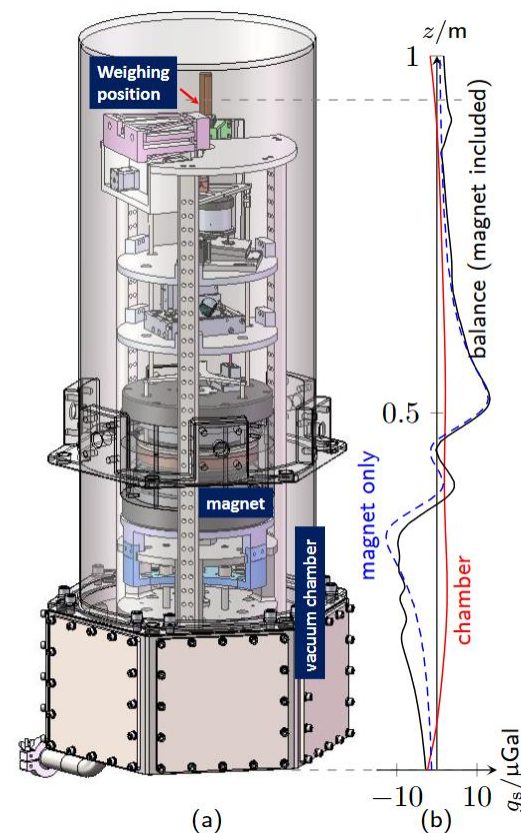
φ
↓
 φ

σ
↓
 ϵ

无限大均匀电介质中的点电荷 q 产生的 D 、 E 、 φ 为何?

$$g_s = G \sum \frac{\rho_i V_i}{r^3} \mathbf{r} \cdot \mathbf{k}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum \frac{\rho_i V_i}{r^3} \mathbf{r} \cdot \mathbf{k}$$



第二章 导体中的恒定电流场

恒定电流场与介质中的静电场比拟

两种电场分布相同的条件：

- ◆两种场的电极形状、尺寸与相对位置相同；
- ◆相应电极的电压相同（或成比例）；
- ◆若场中含多个子区域，除了几何形状相同外，还需要静电场界面无面电荷、各区材料参数满足比例关系：即

$$\sigma_1 : \sigma_2 : \dots = \varepsilon_1 : \varepsilon_2 : \dots$$

场的比拟原理的应用：

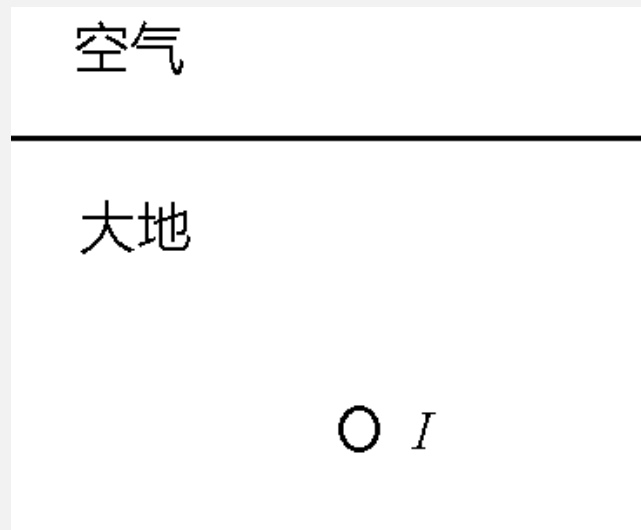
利用一种场的分布结果直接得到另一种场的分布结果。

通过容易实现的电流场的实验测量研究，得到不易测量的静电场结果（静电场的电压无法测量）。

电极结构相同的电容与电导表达式可以比拟转换。

大地中一个小导体球向外发散电流 I ，计算该问题也可用镜像法，可在空气区放一个镜像电流。问该镜像电流的符号为何？

- ☐ A 负电流，即 $-I$
- ☒ B 正电流，即 $+I$

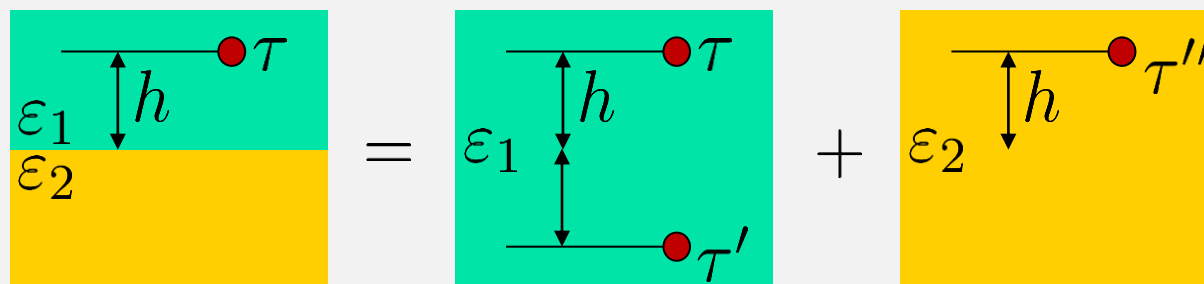


提交

第二章 导体中的恒定电流场

恒定电流场与介质中的静电场比拟（镜像法）

由静电场中点电荷、线电荷的镜像直接得到导电媒质中点电流源（从一点发出电流流到无限远）和线电流源的镜像结果。



$$\tau' = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \tau \quad \tau'' = \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \tau$$

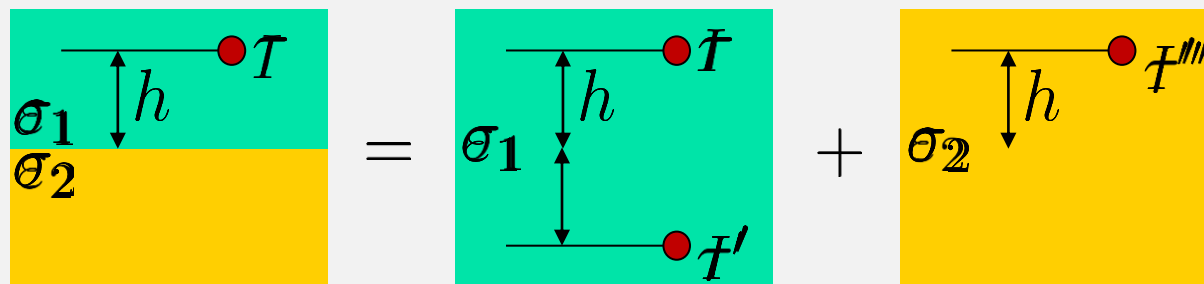
当 ε_2 趋向于无限大时，介质2的效果类似大地。

$$\tau' = -\tau$$

第二章 导体中的恒定电流场

恒定电流场与介质中的静电场比拟（镜像法）

电流场的镜像法：电流从圆柱导线向周围泄漏，导线表面为电极。



$$I' = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} I \quad I'' = \frac{2\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} I$$

当 σ_2 趋向于零时变为空气。

$$I' = I$$

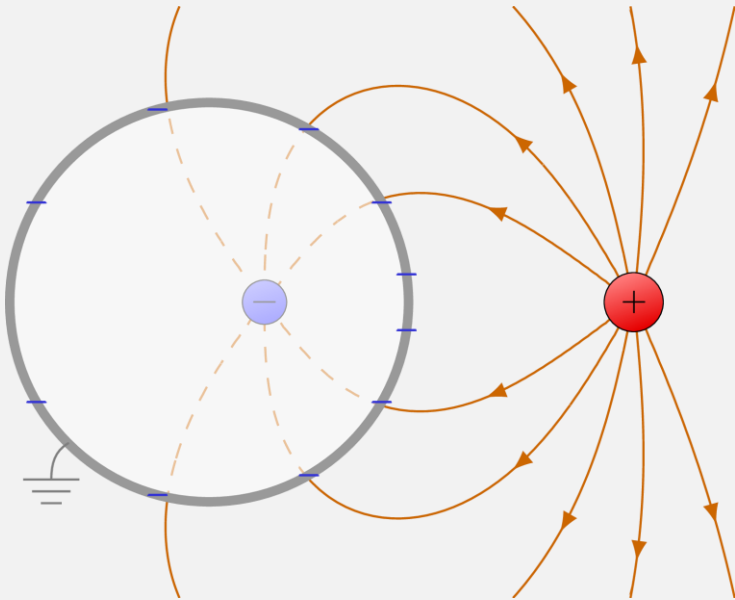
第二章 导体中的恒定电流场

恒定电流场与介质中的静电场比拟（镜像法）

其它镜像结构类似。也有类似电轴和球电极的镜像，如何理解？

将导体表面视为发射或回收电流的电极，电流密度 J 一定垂直电极表面。

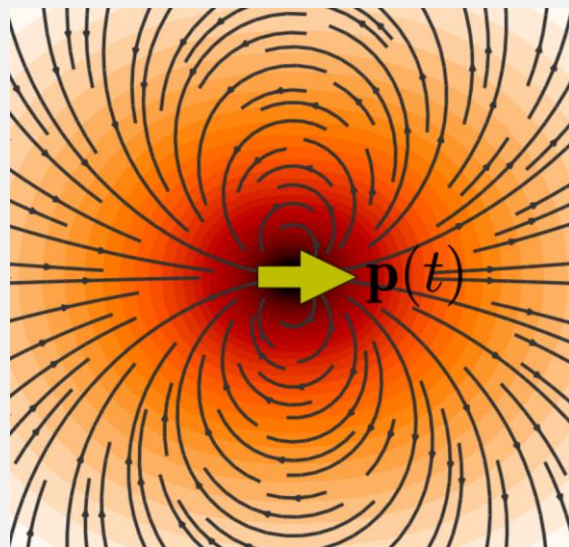
先分析边界或界面场特性，让镜像模型满足该特性即可。



第二章 导体中的恒定电流场

电流偶极子的场

- 导电媒质中，两个距离很近的点电流源，一个点流出电流、一个点流入电流。
- 类似于一节电池放入导电媒质中，电池的正负极可以看成是正点电流源 I 和负点电流源 $-I$ 。
- 电流偶极子的大小可用电流偶极矩表示， $p=Id$, d 为两个电源的间距，方向由正指向负。
- 基于静电比拟利用电荷偶极子的电位与电场表达式，不难得到电流偶极子的电位与场强及电流密度结果。



第二章 导体中的恒定电流场

电导与接地电阻

电导与电阻的定义：在导电媒质中有两个**电极**（可认为电极的电导率远大于场域的电导率），若在电极间加一个电压 U ，则电极上流出/流入的电流为 I ，则定义电导为：

$$G = \frac{I}{U}$$

电阻为：

$$R = \frac{U}{I}$$

计算方法：

- 1) **设 I 求 U 法：** $I \rightarrow J \rightarrow E = J / \sigma \rightarrow U = \int E \cdot dl \rightarrow G = \frac{I}{U}$
- 2) **设 U 求 I 法：** $U \rightarrow \varphi \rightarrow E \rightarrow J = \sigma E \rightarrow I = \int J \cdot dS \rightarrow G = \frac{I}{U}$
- 3) **功率法：** $P = I^2 R$ $P = \iiint_V E \cdot J dV$
- 4) **静电比拟法：** 由相同结构的电容求电导 $G / C = \sigma / \varepsilon$

例1：求图示电极A与B间弧形电导片的电导，片厚 h （纸面方向）。

思路1：加电压 U ，求电流 I 。先画场图。

等位线为“径向线”，电力线为圆弧线。取圆柱坐标系，故 φ 仅为 α 的函数， J 仅有 e_α 方向分量，且仅为 r 的函数。电位的边值问题为：

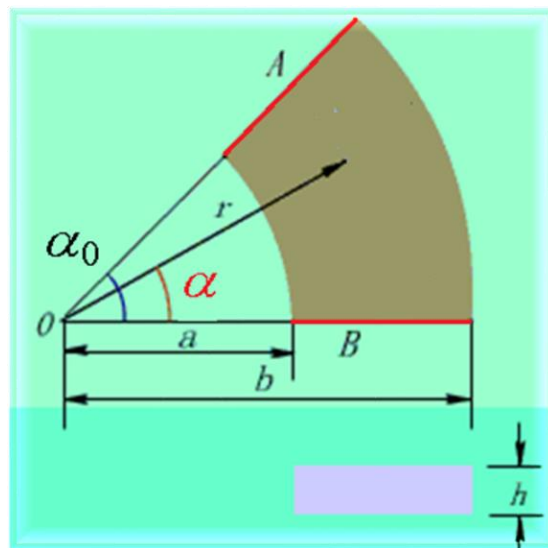
$$\begin{cases} \nabla^2 \varphi(\alpha) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi(\alpha)}{\partial \alpha^2} = 0 \\ \varphi(\alpha)|_{\alpha=0} = 0, \quad \varphi(\alpha)|_{\alpha=\alpha_0} = U \end{cases}$$

方程通解为 $\varphi = C_1 \alpha + C_2$

代入边界条件，可得电位函数： $\varphi = \left(\frac{U}{\alpha_0} \right) \alpha$

电场强度：
$$E = -\nabla \varphi = \frac{-\partial \varphi}{r \partial \alpha} e_\alpha = -\frac{U}{r \alpha_0} e_\alpha$$

E 仅有 α 方向分量，大小为 U 除以过各点的弧长。



例1：求图示电极A与B间弧形电导片的电导，片厚 h （纸面方向）。

思路1：加电压 U ，求电流 I 。先画场图。

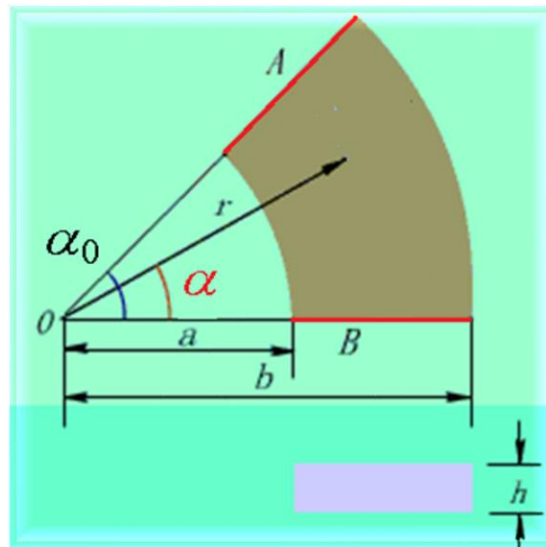
$$\text{电场强度: } E = -\nabla \varphi = \frac{-\partial \varphi}{r \partial \alpha} \mathbf{e}_\alpha = -\frac{U}{r \alpha_0} \mathbf{e}_\alpha$$

$$\text{电流密度: } J = \sigma E = -\frac{\sigma U}{r \alpha_0} \mathbf{e}_\alpha$$

在B极板上积分求电流

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \int_a^b \frac{\sigma U}{r \alpha_0} h dr = \frac{\sigma U h}{\alpha_0} \ln \frac{b}{a}$$

$$\text{电导 } G = \frac{I}{U} = \frac{\sigma h}{\alpha_0} \ln \frac{b}{a} \quad (\text{S/m})$$

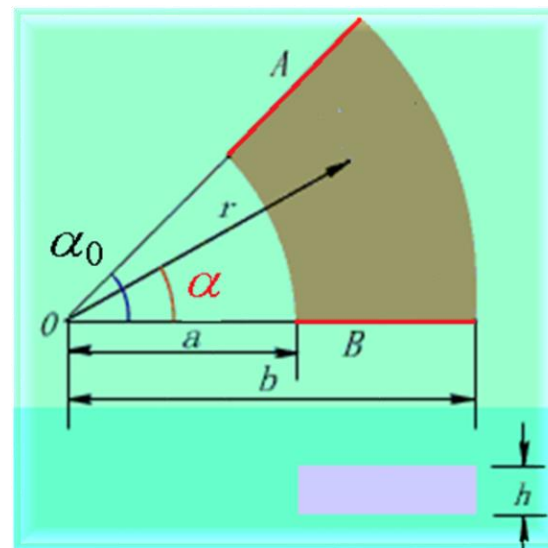


例1：求图示电极A与B间弧形电导片的电导，片厚 h （纸面方向）。

解法2：极板为等位面，电流线垂直于极板，故电流线和电力线为同心圆弧线。对 r 处的圆弧有： $E = U/(ra_0)$ 。（ U 除弧长）

然后与上相同计算 J 、 I 、 G 。

此题采用加电流求电压法不易实现。



问：为何内圆弧的电场强度要大于外圆弧？

内圆弧电场强度大于外圆弧可由电场无旋或闭合环路积分为零来解释，内圆弧上 E 的积分要等于外圆弧积分，在分析得知 E 仅有 a 分量的基础上有：

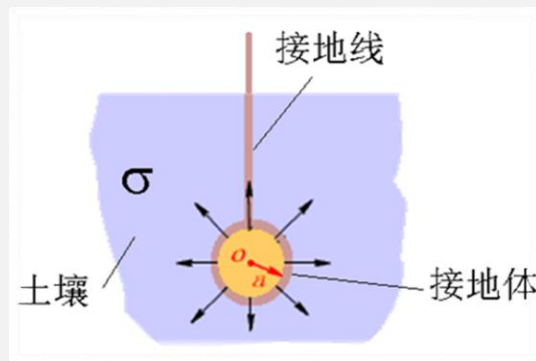
即 $E_{a内}l_{内} = E_{a外}l_{外}$ ， $E_{a内}/E_{a外} = l_{外}/l_{内}$ 。

类似的可说明直导线上的恒定电流密度必然均匀，以保证 E 无旋。

第二章 导体中的恒定电流场

接地电阻

- **接地**是指电气设备的某些部分与大地连接，用大地作为故障电流或部分工作电流的路径，使电流从一个接地点流入大地而从其它接地点返回电网。设备**外壳接地**与单相三头插座。
- 接地由接地体和接地线实现。接地体是埋入地中直接与大地接触的金属导体，接地线是连接接地体与设备的导线。结构简单的接地体叫**接地极**，复杂接地体可称为**接地网**。
- 可将地球视为整个电力系统的一个器件，对低频或工频可视为电阻器件，对雷电冲击电流或高频电流激励可视为阻抗器件，器件的端子为各接地极引出的接地点。



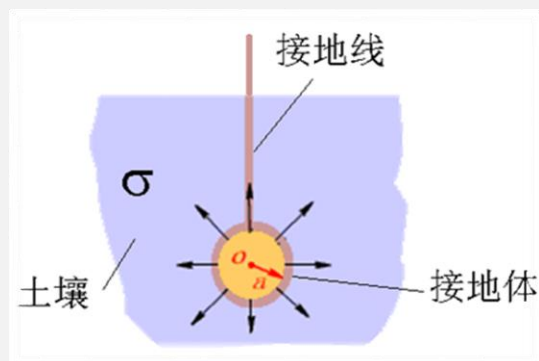
第二章 导体中的恒定电流场

接地电阻

- 为满足系统运行及各种保护要求，对接地电阻具有一定要求。

接地电阻值**越小越好**。

- 一个电极的接地电阻的主要**目的**是在有电流入地时，将接地点的电位限制在一定范围内，不至于由于高电位或高电压破坏设备或造成人员伤害。因此，对接地极接地电阻的要求均为小于一个特定值，如一般变电站接地网的接地电阻应小于0.5欧，输电线一个杆塔的接地电阻不大于15欧。



铜的电阻率比钢的电阻率约小10倍，
所以接地极应该采用铜材料，
这样接地电阻就会小很多，该说法

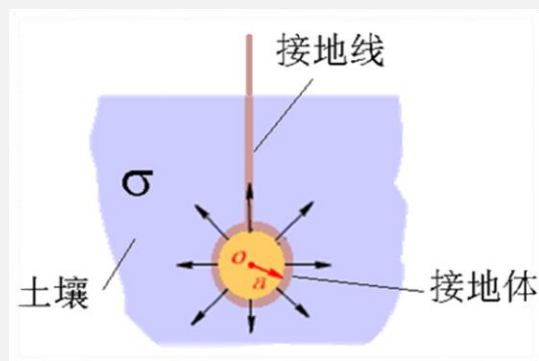
- ☐ A 正确
- ☒ B 不正确

提交

第二章 导体中的恒定电流场

接地电阻

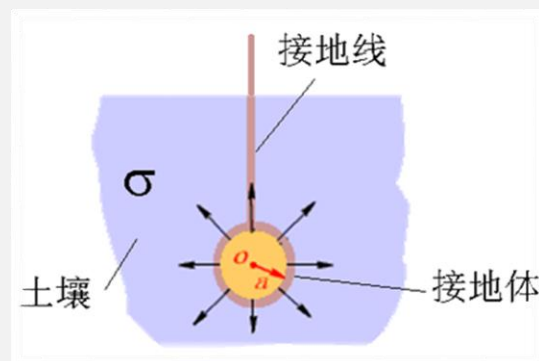
- 在实际工程中，一般接地极之间的距离较远，所以可将每个电极视为导电媒质中的**孤立电极**对无限远处的电阻来分析。
- 接地电阻值由接地线的电阻、接地极导体的电阻和接地极与无限远处两电极之间的土壤区域电阻**串联**而成。
- 由于土壤电阻率远远大于接地极和接地线导体的电阻率，故接地电阻可视为接地极表面之外的**土壤的电阻**，是接地极表面与无限远处无限大电极之间的电阻，接地极与接地线的电阻可忽略。



第二章 导体中的恒定电流场

接地电阻

- 因此，在接地极形状一定的情况下，接地极导体**选用钢还是铜**，甚至采用导电性能更好的材料，则对接地电阻几乎没有影响，不会有效降低接地电阻。



- 如何减小接地电阻？
- 增加接地极表面积可增加电极与大地的交界面，接地电阻将减小。
- 减小土壤电阻率可降低接地电阻，电极附近用降阻剂。

例1.求深埋球形接地极的接地电阻

解：深埋接地极可不考虑地面影响,其电流场与无限大区域的孤立圆球的电流场相似。如何求该接地电阻？其值为何？

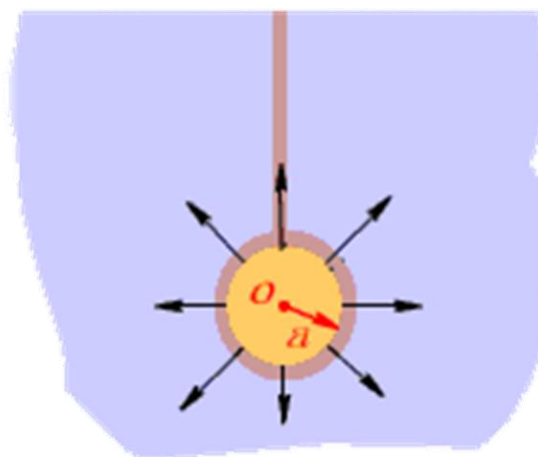
解法一：设电流求电位

$$I \rightarrow J = \frac{I}{4\pi r^2} \rightarrow E = \frac{J}{\sigma} = \frac{I}{4\pi\sigma r^2} \rightarrow$$
$$U = \int_a^\infty \frac{I}{4\pi\sigma r^2} dr = \frac{I}{4\pi\sigma a} \rightarrow G = 4\pi\sigma a$$

其实可直接写出该电位表达式

解法二：静电比拟法

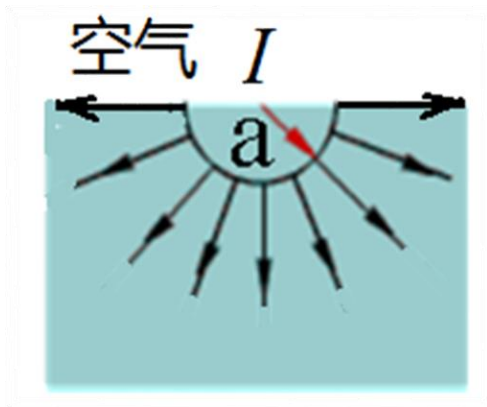
$$\left. \begin{array}{l} \frac{C}{G} = \frac{\varepsilon}{\sigma} \\ C = 4\pi\varepsilon a \end{array} \right\} \rightarrow G = 4\pi\sigma a \quad R = \frac{1}{4\pi\sigma a}$$



深埋球形接地极

例2. 半球形平地面对设接地极的接地电阻

解： 整球电导为： $G = 4\pi\sigma a$ 。 实际的半球电导要小：



$$G' = G/2 \rightarrow R = \frac{1}{2\pi\sigma a}$$

另解：加电流求电压法。

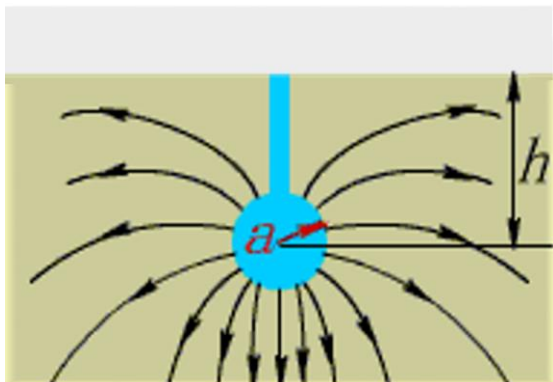
$$I \rightarrow J = \frac{I}{2\pi r^2} \rightarrow E = \frac{J}{\sigma} = \frac{I}{2\pi\sigma r^2} \rightarrow$$

$$U = \int_a^\infty \frac{I}{2\pi\sigma r^2} dr = \frac{I}{2\pi\sigma a} \rightarrow G = 2\pi\sigma a$$

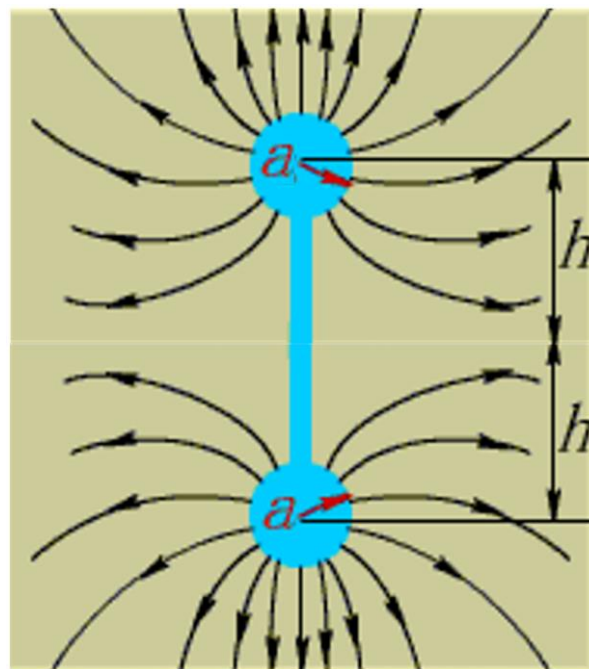
也可用镜像法：设电流 I ，镜像模型为无限大导电媒质中球心处有 $2I$ 点电流，直接可得电位为上式。

例3. 非深埋的球形接地极的接地电阻

解：考虑地面影响，用镜像法建立无限大导电媒质的镜像模型。



可近似认为 I 位于两个球的球心。
计算下球面的电位，便得接地电阻。
该假设对浅埋情况有较大误差，
但对于两个相距较近的球电极没有准确的镜像模型。



$$U = \frac{I}{4\pi\sigma a} + \frac{I}{4\pi\sigma(2h-a)} \quad R = \frac{U}{I} = \frac{1}{4\pi\sigma a} + \frac{1}{4\pi\sigma(2h-a)}$$

比深埋时 R 增大了。

第二章 导体中的恒定电流场

跨步电压与接触电压

有电流 I 流入大地时，距电极中心 r 处的电位为何？

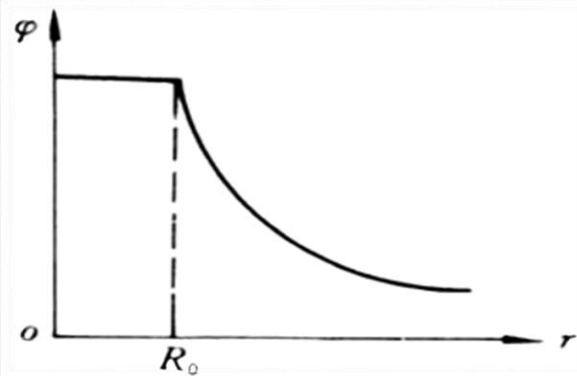
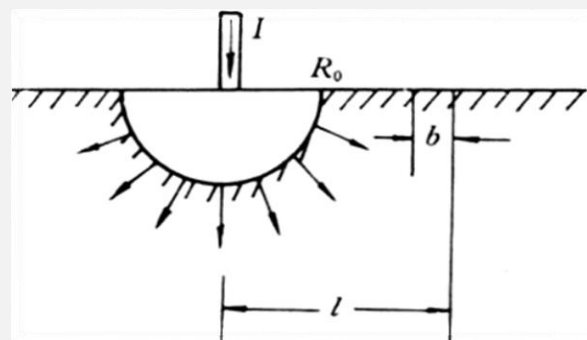
- 1) 在 $r \leq R_0$ 的区域内电位基本相同，因电极导体（如钢或铜）的电阻率很小，其上压降很小；
- 2) 当 $r > R_0$ 时电位 $\varphi = I / (2\pi\sigma r)$ 。

当人站立在距球心 l 处，向内跨一步间距 b 时，
则跨步电压为：

$$U_s = |\varphi_{l-b} - \varphi_l| = \frac{I}{2\pi\sigma} \left(\frac{1}{l-b} - \frac{1}{l} \right)$$

设设备的外壳与接地极连接，站在距球心 $l (> R_0)$ 处的人用手触

摸设备外壳，人的手与脚之间的电压称为接触电压，为：
$$U_t = \frac{I}{2\pi\sigma} \left(\frac{1}{R_0} - \frac{1}{l} \right)$$



第二章 导体中的恒定电流场

焦耳定律

电路中电阻的功率损耗为： $P=UI$

导电媒质中任意点的功率体密度为： $p' = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}$ (W/m³)

为焦耳定律的微分形式。在 p' 均匀的情况下对其乘体积可得 $P=UI$ 。

P 是电场力克服阻力使电荷运动形成电流所做的功，转化成热量。

由功率密度可得一个体积内损耗的总功率为：

$$\begin{aligned} P &= \iiint_V p' dV = \iiint_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} dV \\ &= - \iiint_V \nabla \varphi \cdot \mathbf{J} dV & \nabla \cdot (\varphi \mathbf{J}) &= \varphi \nabla \cdot \mathbf{J} + \mathbf{J} \cdot \nabla \varphi \\ &= - \iiint_V \nabla \cdot (\varphi \mathbf{J}) dV + \iiint_V \varphi \nabla \cdot \mathbf{J} dV \\ &= - \oiint_S (\varphi \mathbf{J}) \cdot d\mathbf{S} & \text{且} \quad \iiint_V \varphi \nabla \cdot \mathbf{J} dV &= 0 \end{aligned}$$

此为一个体积内功率损耗的电位与电流密度表示形式。其本质上就是电流与压降的乘积。

例：一段导线（可为任意弯曲和变截面的导线），两端面上有电极，电极间加有电压 U ，形成电流为 I ，利用总损耗等于 φJ 的面积分的负值形式证明导线的总功率损耗为 $P=UI$ 。

证：在导体整个表面上对 φJ 求面积分。

但在导线侧面上由于 J 与表面垂直，

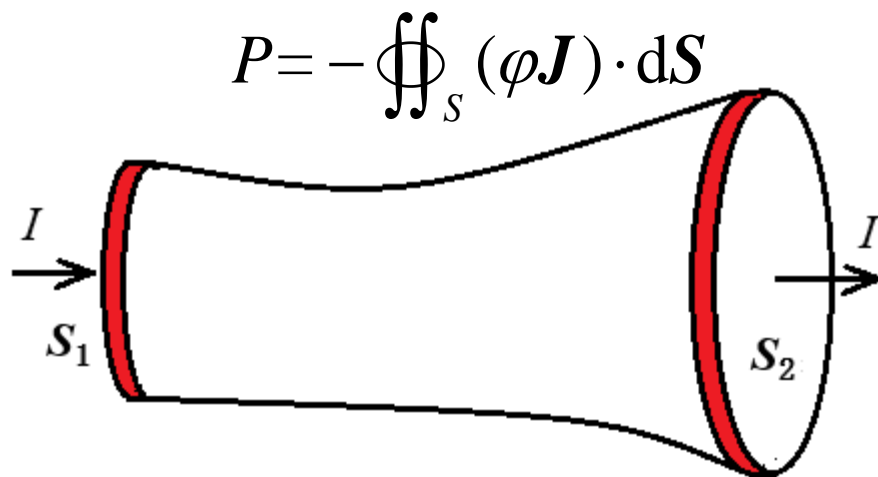
故积分一定为零，

所以只需对两个端面积分。

设端面 S_1 的电位高于端面 S_2 ，

即电流从 S_1 流入， S_2 流出，

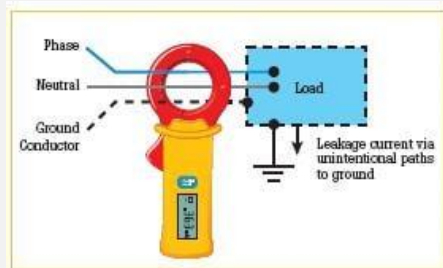
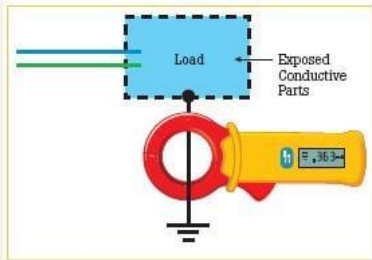
则在 S_2 上 J 与表面法向（场域的外法向）同向， S_1 上相反，因此有：



$$P = -[\varphi_2 \iint_{S_2} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} - \varphi_1 \iint_{S_1} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}] = [\varphi_1 - \varphi_2] \iint_{S_2} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = UI$$

第二章 导体中的恒定电流场

泄漏/接地电阻测量方法



$$R_L = \frac{U}{I_L}$$

