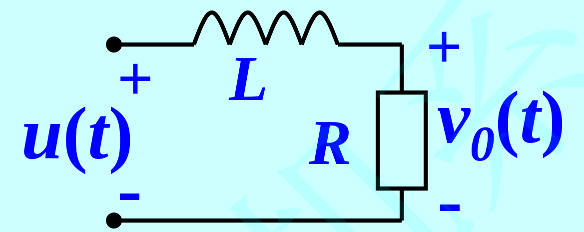
第2章

线性时不变连续时间系统的时域分析

Linear Time-Invariant System, LTI系统

线性时不变连续时间系统的数学模型

[例]　　$i(0) \neq 0$，求 $v_0(t)$



[解]　电感　$v_L(t) = L\dfrac{di_L(t)}{dt}$

列电路方程　$L\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{v_0(t)}{R}\right) + v_0(t) = u(t)$

- 系统通过一个微分方程描述了其特性（关系）

线性时不变连续时间系统的数学模型

- **状态方程**：状态方程为一阶微分方程组
- **高阶微分方程**：单个输出信号和系统输入信号之间的关系。
- **状态方程和高阶微分方程的转换:**

$$\begin{cases} R_1 i(t) + v_C(t) = e(t) \\ v_C(t) = L\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i_L(t) + R_2 i_L(t) \\ i(t) = C\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}v_C(t) + i_L(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}i(t) + \left(\frac{1}{R_1 C} + \frac{R_2}{L}\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i(t) + \left(\frac{1}{LC} + \frac{R_2}{R_1 LC}\right)i(t) \\ &= \frac{1}{R_1}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}e(t) + \frac{R_2}{R_1 L}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e(t) + \frac{1}{R_1 LC}e(t) \end{aligned}$$

- **多激励怎么处理?**

  多输入情况下的系统响应求解可分解为单输入的情况。

  - **解决方案:** 求解系统单输入和单输出之间关系的高阶微分方程。

- 本章**重点学习**单输入单输出线性时不变连续时间系统的高阶微分方程求解和卷积积分求解。

单输入单输出系统

一个线性时不变连续时间系统，其输入为$e(t)$，输出为$r(t)$，则$r(t)$和$e(t)$的关系可用一个n阶线性常系数微分方程来描述

$$\frac{d^n r(t)}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}r(t)}{dt^{n-1}}+\cdots+a_1\frac{dr(t)}{dt}+a_0 r(t)$$

$$=b_m\frac{d^m e(t)}{dt^m}+b_{m-1}\frac{d^{m-1}e(t)}{dt^{m-1}}+\cdots+b_1\frac{de(t)}{dt}+b_0 e(t)$$

1 求解该方程需要n个初始条件。 $r(0), r'(0), r''(0), \cdots, r^{(n-1)}(0)$

2 对应的齐次微分方程

$$\frac{d^n r(t)}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}r(t)}{dt^{n-1}}+\cdots+a_1\frac{dr(t)}{dt}+a_0 r(t)=0$$

3 对应的特征方程

$$\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0=0$$

特征方程有n个特征根。

时域经典解法

常系数线性微分方程，其**完全解 = 齐次解 + 特解**

4 **齐次解**是微分方程在输入为0时的齐次方程的解，它由方程的特征根确定;

5 **特解**则是在输入的作用下满足微分方程式的解。

- 齐次方程为（激励$e(t)$及其各阶导数都为零）

$$\frac{\mathrm{d}^n r(t)}{\mathrm{d}t^n}+a_{n-1}\frac{\mathrm{d}^{n-1} r(t)}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+a_1\frac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t}+a_0 r(t)=0$$

特征方程为 $\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0=0$

齐次解一定具有 $Ae^{\lambda t}$ 这样的形式，其中A是待定系数，λ是由系统本身决定的常数。

$$\frac{d^2 r(t)}{dt^2}+a_1\frac{dr(t)}{dt}+a_0 r(t)=0 \Rightarrow Ae^{\lambda t}\left(\lambda^2+a_1\lambda+a_0\right)=0$$

$$\frac{d^n r(t)}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1} r(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dr(t)}{dt} + a_0 r(t) = 0$$

特征方程为 $\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0$

解特征方程可求得特征根:

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\ldots\ldots(\lambda - \lambda_n) = 0$$

λ_i 称为特征根，它与**系统**有关，与**激励**无关。

齐次解: $r_n(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} + \ldots + A_n e^{\lambda_n t} = \sum_{i=1}^{n} A_i e^{\lambda_n t}$

齐次解的形式和特征根的关系

特征根 λ 的形式	齐次解的形式（A,B,C,D,A_i,B_i,C_i,D_i 为待定系数）
λ 为单实根	$A\mathrm{e}^{\lambda t}$
λ 为 k 阶重实根	$A_1\mathrm{e}^{\lambda t}+A_2t\mathrm{e}^{\lambda t}+A_3t^2\mathrm{e}^{\lambda t}+\cdots+A_kt^{k-1}\mathrm{e}^{\lambda t}$
$\lambda_{1,2}=\sigma\pm j\omega$ 一对共轭复根	$A\mathrm{e}^{(\sigma+j\omega)t}+B\mathrm{e}^{(\sigma-j\omega)t}$ 或： $C\mathrm{e}^{\sigma t}\cos\omega t+D\mathrm{e}^{\sigma t}\sin\omega t$
$\lambda_{1,2}=\sigma\pm j\omega$ k 阶共轭复根	$A_1\mathrm{e}^{(\sigma+j\omega)t}+A_2t\mathrm{e}^{(\sigma+j\omega)t}+\cdots+A_kt^{k-1}\mathrm{e}^{(\sigma+j\omega)t}$ $+B_1\mathrm{e}^{(\sigma-j\omega)t}+B_2t\mathrm{e}^{(\sigma-j\omega)t}+\cdots+B_kt^{k-1}\mathrm{e}^{(\sigma-j\omega)t}$ 或： $C_1\mathrm{e}^{\sigma t}\cos\omega t+C_2t\mathrm{e}^{\sigma t}\cos\omega t+\cdots+C_kt^{k-1}\mathrm{e}^{\sigma t}\cos\omega t$ $+D_1\mathrm{e}^{\sigma t}\sin\omega t+D_2t\mathrm{e}^{\sigma t}\sin\omega t+\cdots+D_kt^{k-1}\mathrm{e}^{\sigma t}\sin\omega t$

系统微分方程求解

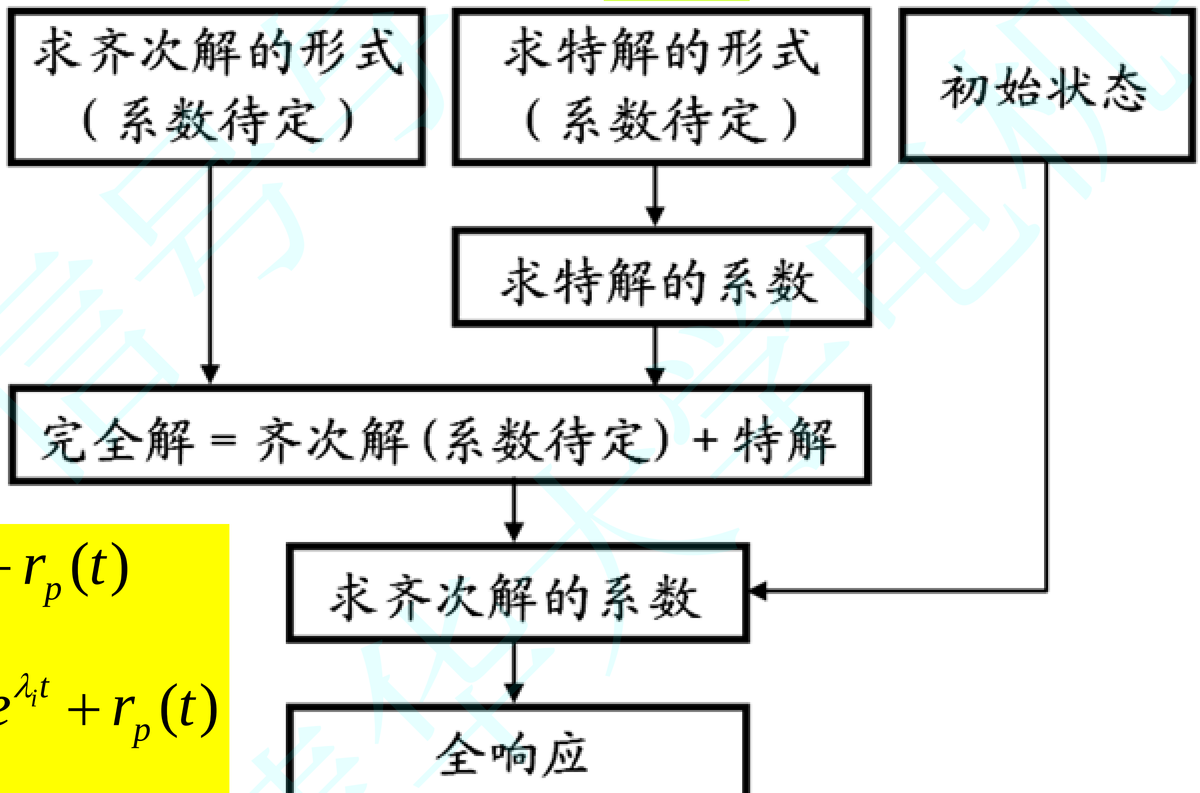
直接求解全响应

$$\frac{d^n r(t)}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1} r(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{dr(t)}{dt} + a_0 r(t) = b_m\frac{d^m e(t)}{dt^m} + b_{m-1}\frac{d^{m-1} e(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_1\frac{de(t)}{dt} + b_0 e(t)$$

$$r_n(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} + \ldots + A_n e^{\lambda_n t} = \sum_{i=1}^{n} A_i e^{\lambda_n t}$$

$$r_p(t)$$

$$r(0), r'(0), r''(0), \cdots, r^{(n-1)}(0)$$



$$r(t) = r_n(t) + r_p(t) = \sum_{i=1}^{n} A_i e^{\lambda_i t} + r_p(t)$$

典型激励函数对应的特解的形式

激励函数$e(t)$	特解形式（A,B,A_i,B_i 为待定系数）
E（常数）	A
t^m	$A_m t^m + A_{m-1} t^{m-1} + A_{m-2} t^{m-2} + \cdots + A_1 t + A_0$
e^{pt}，p 实数，不是方程特征根	$A\mathrm{e}^{pt}$
e^{pt}，p 实数，是方程k阶特征根	$A_0\mathrm{e}^{pt} + A_1 t\mathrm{e}^{pt} + A_2 t^2\mathrm{e}^{pt} + \cdots + A_k t^k \mathrm{e}^{pt}$
$\cos\omega t$ 或 $\sin\omega t$，$\pm j\omega$ 不是方程特征根	$A\cos\omega t + B\sin\omega t$
$\cos\omega t$ 或 $\sin\omega t$，$\pm j\omega$ 是方程k阶共轭特征根	$A_0\cos\omega t + A_1 t\cos\omega t + \cdots + A_k t^k\cos\omega t$ $+ B_0\sin\omega t + B_1 t\sin\omega t + \cdots + B_k t^k \sin\omega t$
$\mathrm{e}^{\sigma t}\cos\omega t$ 或 $\mathrm{e}^{\sigma t}\sin\omega t$，$\sigma \pm j\omega$ 不是方程特征根	$A\mathrm{e}^{\sigma t}\cos\omega t + B\mathrm{e}^{\sigma t}\sin\omega t$
$\mathrm{e}^{\sigma t}\cos\omega t$ 或 $\mathrm{e}^{\sigma t}\sin\omega t$，$\sigma \pm j\omega$ 是方程k阶共轭特征根	$A_0\mathrm{e}^{\sigma t}\cos\omega t + A_1 t\mathrm{e}^{\sigma t}\cos\omega t + \cdots + A_k t^k\mathrm{e}^{\sigma t}\cos\omega t$ $+ B_0\mathrm{e}^{\sigma t}\sin\omega t + B_1 t\mathrm{e}^{\sigma t}\sin\omega t + \cdots + B_k t^k\mathrm{e}^{\sigma t}\sin\omega t$

齐次解：$$r_n(t)=A_1e^{\lambda_1 t}+A_2e^{\lambda_2 t}+\ldots+A_ne^{\lambda_n t}=\sum_{i=1}^{n}A_ie^{\lambda_n t}$$

齐次解也称为："自由响应"

特解被称为："强迫响应"

完全解：$$r(t)=\underbrace{r_n(t)}_{\text{自由分量}}+\underbrace{r_p(t)}_{\text{强迫分量}}=\sum_{i=1}^{n}A_ie^{\lambda_i t}+r_p(t)$$

$$\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0=0$$

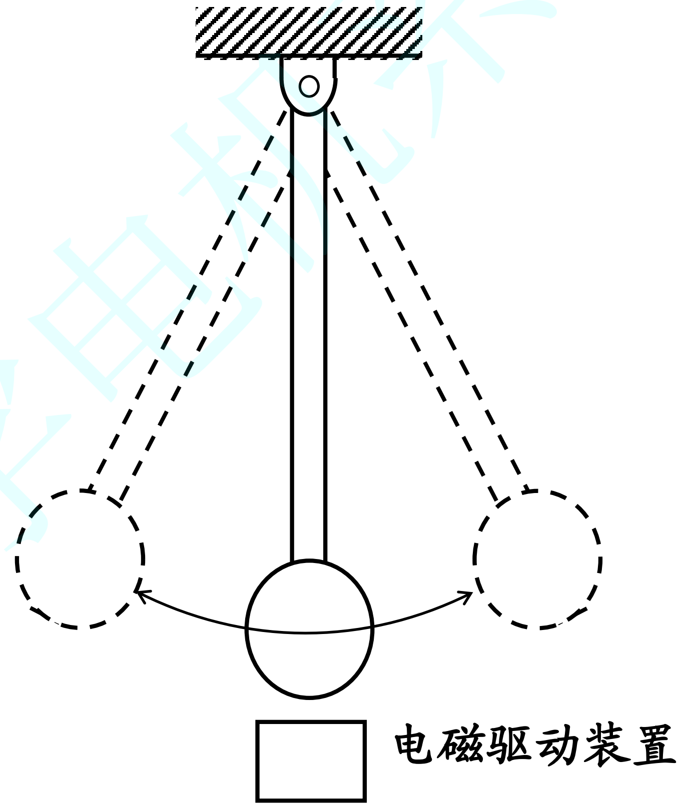
- 齐次解对应于齐次方程，反映系统的固有特性
- 特解与激励有关（见前表）

待定常数 A_i（$i=1,\ldots,n$）由系统初始条件决定

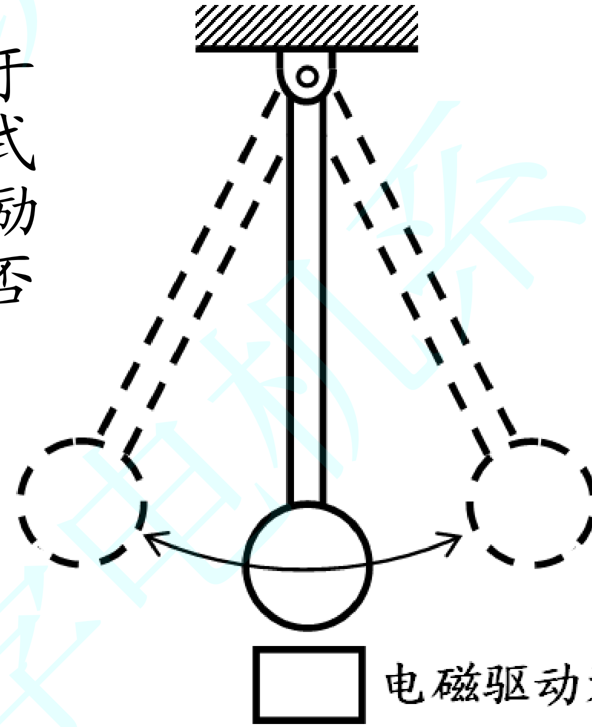
解的构成

线性时不变系统的解的构成可以通过如图所示的一个单摆系统加以说明。摆锤下方有一个电磁装置，可以给单摆提供一个推动力。单摆的摆动可以有以下几种情况：

- 零输入响应：有初始状态，无驱动。
- 零状态响应：零初始状态，有驱动。
- 全响应：有初始状态，有驱动。
- 冲激响应：零初始状态，冲激驱动，只含有自由响应。



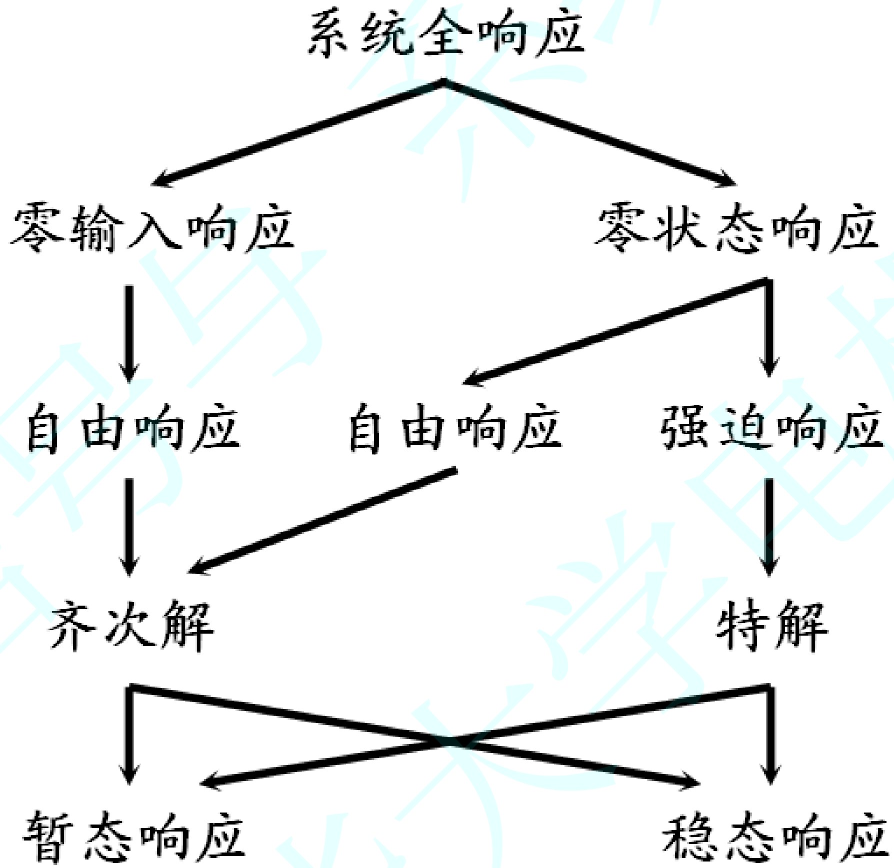
- 自由响应：由系统自身固有特性决定，对应系统微分方程的齐次解，自由响应的特征频率是系统微分方程的特征根
- 强迫响应：由系统激励决定，它对应于系统微分方程的特解。强迫响应的形式取决于系统激励信号的形式，以及激励信号的特征频率和系统的固有频率是否重合。如果重合则出现谐振



暂态响应：当 $t \to \infty$ 时，系统响应中趋于零的分量。

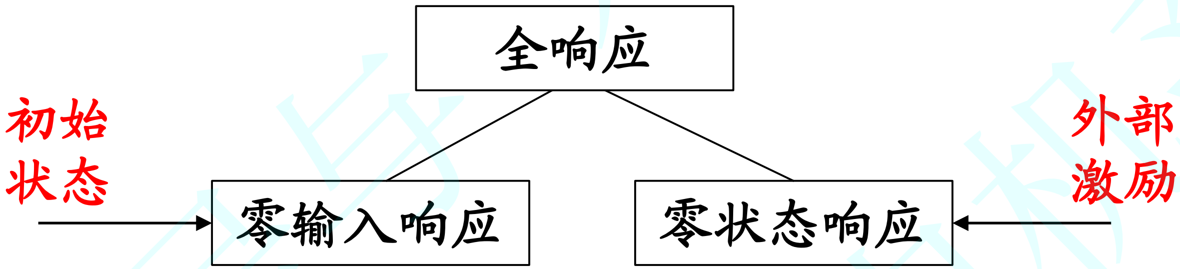
稳态响应：当 $t \to \infty$ 时，系统响应中能够保留的分量。

线性系统响应的构成



□ 扩展意义上的线性系统

$r(t) = r_{zi}(t) + r_{zs}(t)$的分解方法物理概念清楚，解决问题有简便之处，使系统分析方法在理论上更完善。



- 零状态响应和激励成线性关系，满足叠加性和均匀性;
- 零输入响应和初始状态成线性关系，满足叠加性和均匀性。

例

已知一线性时不变系统，在相同初始条件下，当激励为 $e(t)$ 时，其全响应为 $r_1(t)=\left[2e^{-3t}+\sin(2t)\right]u(t)$；当激励为 $2e(t)$ 时，其全响应为 $r_2(t)=\left[e^{-3t}+2\sin(2t)\right]u(t)$。求：

(1) 初始条件不变，当激励为 $e(t-t_0)$ 时的全响应 $r_3(t)$，t_0 为大于零的实常数。

(2) 初始条件增大 1 倍，当激励为 $0.5e(t)$ 时的全响应 $r_4(t)$。

(1) 设零输入响应为 $r_{zi}(t)$，零状态响应为 $r_{zs}(t)$，则有

$$r_1(t)=r_{zi}(t)+r_{zs}(t)=\left[2e^{-3t}+\sin(2t)\right]u(t)$$

$$r_2(t)=r_{zi}(t)+2r_{zs}(t)=[e^{-3t}+2\sin(2t)]u(t)$$

解得

$$r_{zi}(t) = 3e^{-3t}u(t)$$

$$r_{zs}(t) = [-e^{-3t} + \sin(2t)]u(t)$$

(1) 激励延迟t_0

$$\therefore r_3(t) = r_{zi}(t) + r_{zs}(t - t_0)$$

$$= 3e^{-3t}u(t) + [-e^{-3(t-t_0)} + \sin(2t - 2t_0)]u(t - t_0)$$

(2) 激励0.5倍，初始条件增大1倍

$$\therefore r_4(t) = 2r_{zi}(t) + 0.5r_{zs}(t)$$

$$= 2\left[3e^{-3t}u(t)\right] + 0.5\left[-e^{-3t} + \sin(2t)\right]u(t)$$

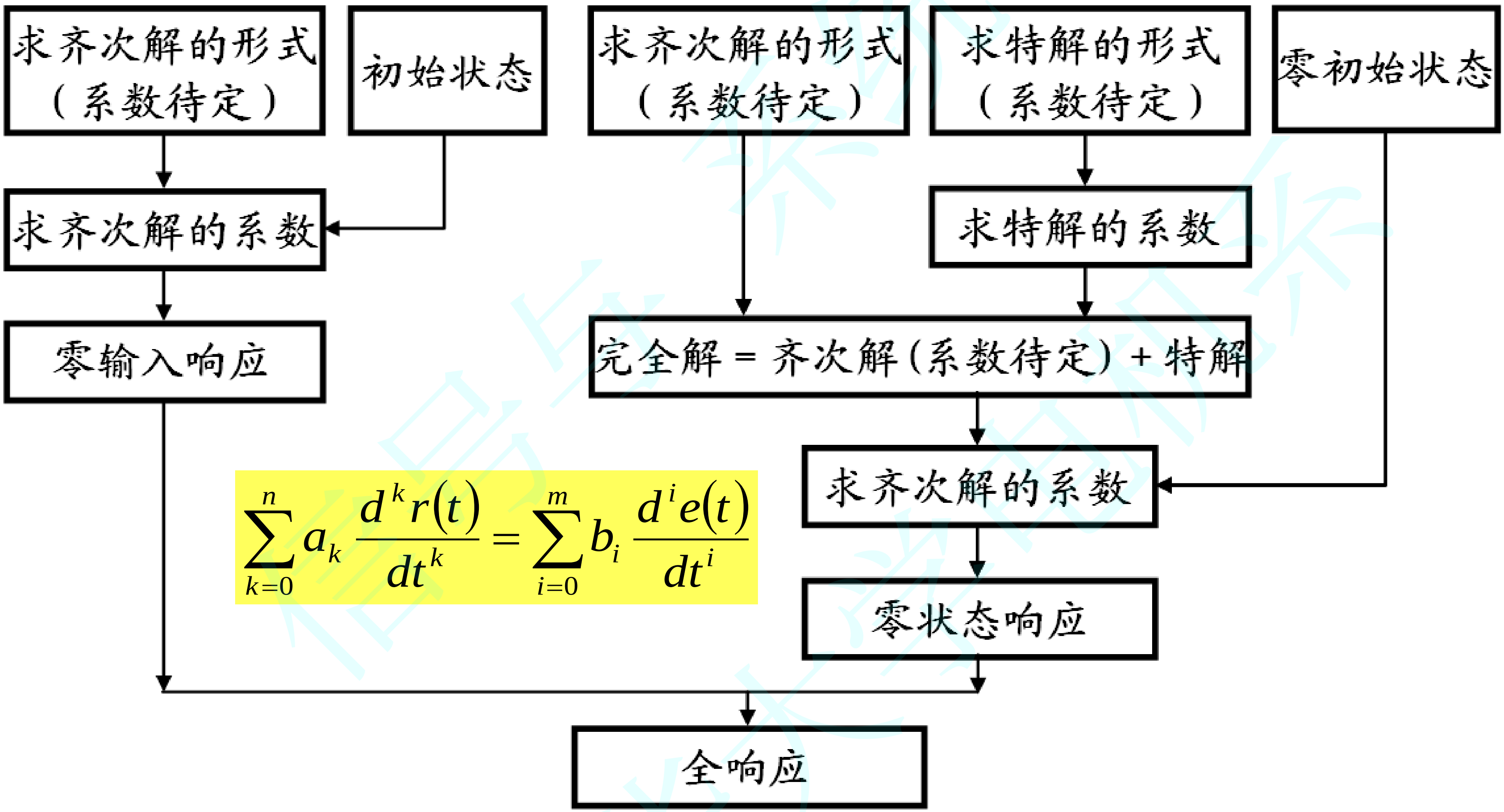
$$= \left[5.5e^{-3t} + 0.5\sin(2t)\right]u(t)$$

在线性时不变系统中

当初始状态增大K倍时，零输入响应也增大K倍

当激励增大K倍时，零状态响应也增大K倍

分别求解零输入响应和零状态响应，然后进行叠加得到全响应



$$\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^k r(t)}{dt^k} = \sum_{i=0}^{m} b_i \frac{d^i e(t)}{dt^i}$$

[例] $\frac{d^2r(t)}{dt^2}+3\frac{dr(t)}{dt}+2r(t)=t^2+t$ $\begin{cases} r(0)=1, \\ r'(0)=0, \end{cases}$ 求 $\begin{cases} r_{zs}(t), \\ r_{zi}(t), \\ r(t). \end{cases}$

[解]

(1) 求 $r_{zi}(t)$ $\alpha_1=-2,\quad \alpha_2=-1$ $r_{zi}(t)=C_{zi,1}e^{-2t}+C_{zi,2}e^{-t}$

由初始条件求待定系数 $\begin{cases} r(0)=C_{zi,1}+C_{zi,2} \\ r'(0)=-2C_{zi,1}-C_{zi,2} \end{cases}$ $\begin{cases} C_{zi,1}=-1 \\ C_{zi,2}=2 \end{cases}$

$$r_{zi}(t)=-e^{-2t}+2e^{-t},\quad t>0$$

(2) 求 $r_{zs}(t)$ $r_{zs}(t)=C_{zs,1}e^{-2t}+C_{zs,2}e^{-t}+r_p(t)$ $r_p(t)=\frac{1}{2}t^2-t+1$

由 $\begin{cases} r(0)=0 \\ r'(0)=0 \end{cases}$ 求出 $\begin{cases} C_{zi,1}=0 \\ C_{zi,2}=-1 \end{cases}$ $r_{zs}(t)=-e^{-t}+\frac{1}{2}t^2-t+1$

$$r(t)=\underbrace{-e^{-2t}+2e^{-t}}_{r_{zi}(t)}\underbrace{-e^{-t}+\frac{1}{2}t^2-t+1}_{r_{zs}(t)}=\underbrace{-e^{-2t}+e^{-t}}_{\text{自由响应}}+\underbrace{\frac{1}{2}t^2-t+1}_{\text{强迫响应}}$$

初始状态的跳变

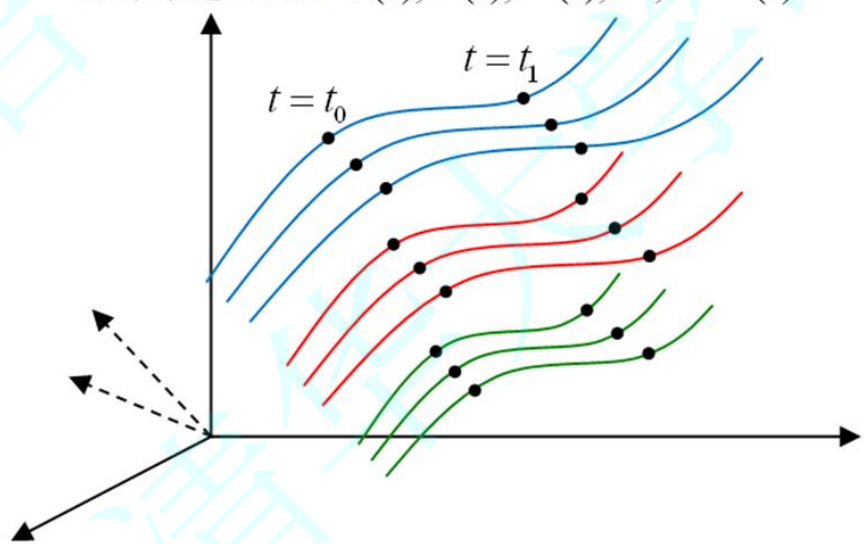
- 响应的函数族、待定系数和边界条件:
  - 满足微分方程的所有函数构成一个函数族，其中包含若干待定系数。
  - **由给定的边界条件确定这些待定系数**

$$\boxed{r_{zi}(t)=\sum_i A_{zi,i}e^{\lambda_i t}}$$

求解一个线性常系数微分方程需要边界条件。

  - 在系统分析中，通常给定激励信号**起始点时刻的系统状态**作为边界条件，因此也称为初始条件或初始状态。

n 维状态空间：$r(t),r'(t),r''(t),\cdots,r^{(n-1)}(t)$

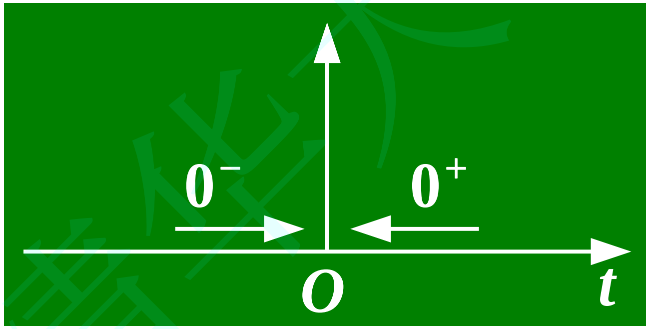


系统激励和响应的奇异性:

- 在经典线性常系数微分方程求解中，一般激励函数都是非奇异的，因此微分方程的解也是非奇异的。
- 在电路和信号分析中，激励常常是从某一时刻t_0开始作用，是奇异的，因此系统响应也常会变得奇异。

$$e(t)\ u(t-t_0)$$

- 系统微分方程的解$r(t)$仅表示$t \geq t_{0+}$时间区间的系统响应，不表示$t \leq t_{0-}$时间区间的情况。

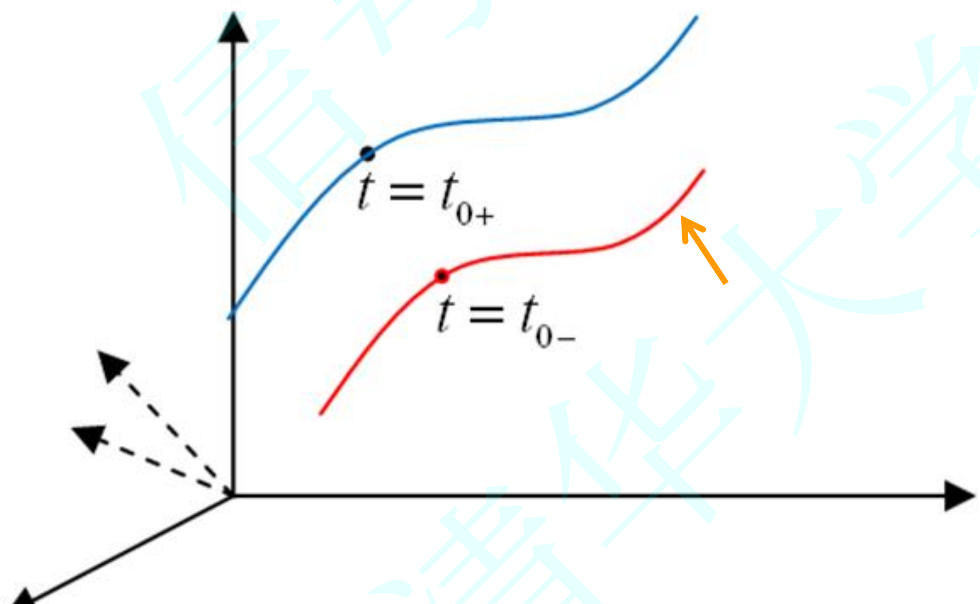


初始状态的跳变

- 要确定$t \geq t_{0+}$时间区间的系统响应$r(t)$，应该采用t_{0+}时刻的初始状态，即：$r(t_{0+})$， $r'(t_{0+})$， …， $r^{(n-1)}(t_{0+})$ 。
- 由于系统激励的奇异性，系统t_{0+}时刻的初始状态和t_{0-}时刻的初始状态有可能不相同，即初始状态跳变。

在求解系统响应时，需要判断是否存在初始状态跳变。

- 不存在跳变：无需区分t_{0+}和t_{0-} ，仅称为t_0时刻的初始状态即可
- 存在跳变：需要明确初始状态是t_{0+}和t_{0-}，应采用t_{0+}。



系统零输入响应是否存在初始状态跳变？

微分方程在奇异点的平衡

- 对于线性时不变系统，激励信号和响应信号的奇异项也必须满足系统微分方程。

$$\frac{\mathrm{d}^n r(t)}{\mathrm{d}t^n}+a_{n-1}\frac{\mathrm{d}^{n-1} r(t)}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+a_1\frac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t}+a_0 r(t)$$

$$=b_m\frac{\mathrm{d}^m e(t)}{\mathrm{d}t^m}+b_{m-1}\frac{\mathrm{d}^{m-1} e(t)}{\mathrm{d}t^{m-1}}+\cdots+b_1\frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t}+b_0 e(t)$$

初始条件： $r(t_0), r'(t_0), \cdots, r^{(n-1)}(t_0)$

右边 $=\delta(t-t_0)+\cdots$

$$\frac{\mathrm{d}^n r(t)}{\mathrm{d}t^n}+a_{n-1}\frac{\mathrm{d}^{n-1} r(t)}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+a_1\frac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t}+a_0 r(t)$$

$\delta(t-t_0)$ $\quad$ $u(t-t_0)$ → 在t_0有跳变 →

$r^{(n-1)}(t_0)$

在t_0有跳变

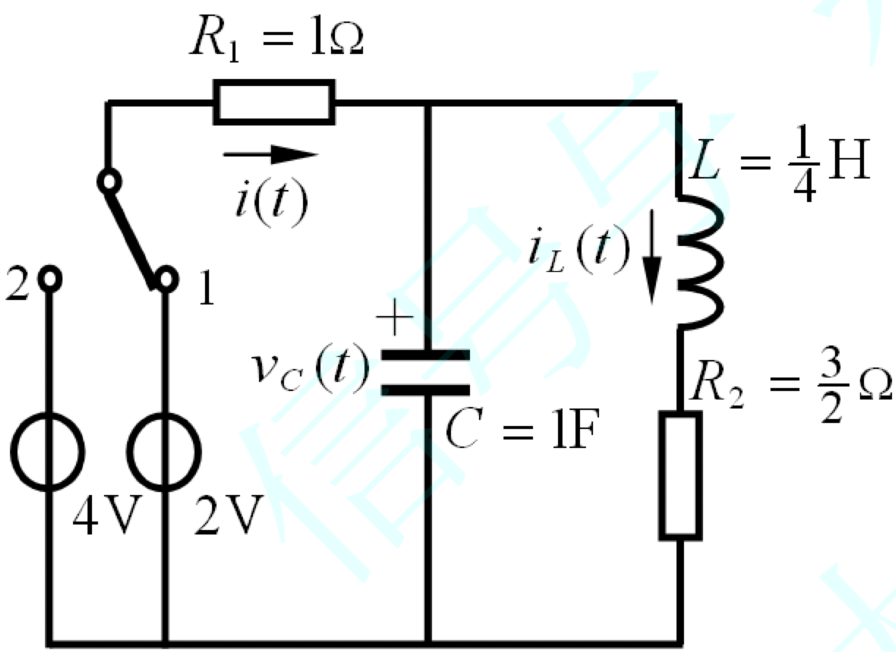
\# 系统初始状态跳变的判别：把激励$e(t)u(t-t_0)$代入系统微分方程，如果方程的右边出现冲激函数$\delta(t-t_0)$或它的导数$\delta^{(k)}(t-t_0)$，则初始状态有跳变；否则初始状态无跳变。

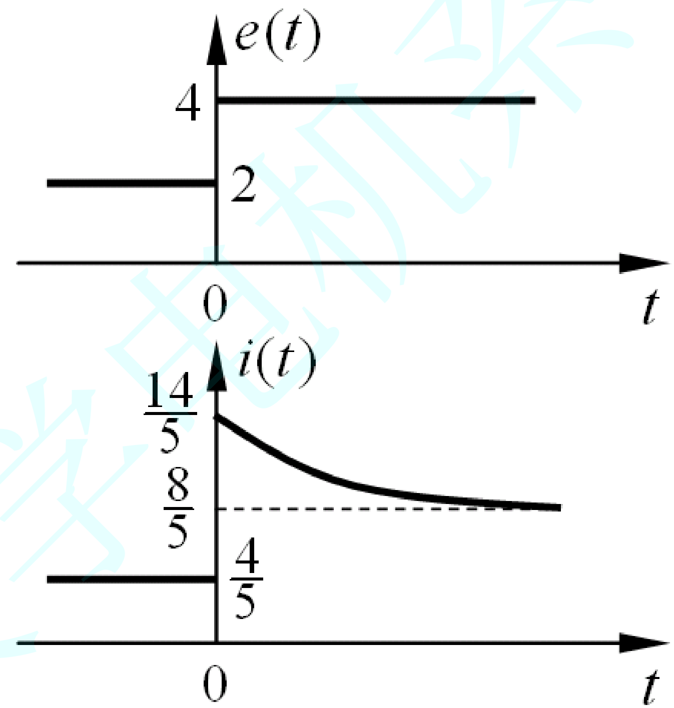
初始状态跳变的求取：**冲激函数匹配法**

- 在初始状态存在跳变和已知 t_{0-} 初始状态的情况下，利用微分方程奇异项平衡，求解初始状态跳变Δ，进而求 t_{0+} 的状态。

$$
\boxed{\begin{aligned}
&r^{(n-1)}(t_{0+})=r^{(n-1)}(t_{0-})+\Delta_{n-1}\\
&\cdots\\
&r(t_{0+})=r(t_{0-})+\Delta_1
\end{aligned}}
$$

例：如图所示电路，$t<0$ 时开关 **S** 处于 **1** 的位置并达到稳态；$t=0$ 时刻 **S** 由 **1** 转到 **2**。求图中所示电流 $i(t)$ 在 $t>0$ 时间区间的变化。





电路知识:

电阻: $i_R(t)=\frac{1}{R}v_R(t)$

电感: $i_L(t)=\frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t}v_L(\tau)d\tau$ 或 $v_L(t)=L\frac{d}{dt}i_L$

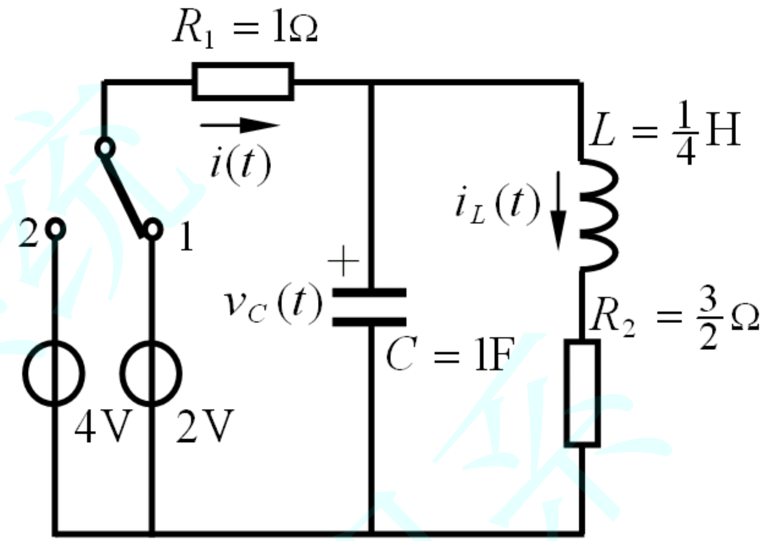
电容: $i_C(t)=C\frac{d}{dt}v_C(t)$ 或 $v_C(t)=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t}i_C(\tau)d\tau$

电路约束条件:

$$R_1 i(t) + v_C(t) = e(t)$$

$$v_C(t) = L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i_L(t) + R_2 i_L(t)$$

$$i(t) = C\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}v_C(t) + i_L(t)$$



系统微分方程:

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}i(t) + \left(\frac{1}{R_1 C} + \frac{R_2}{L}\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i(t) + \left(\frac{1}{LC} + \frac{R_2}{R_1 LC}\right)i(t)$$

$$= \frac{1}{R_1}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}e(t) + \frac{R_2}{R_1 L}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e(t) + \frac{1}{R_1 LC}e(t)$$

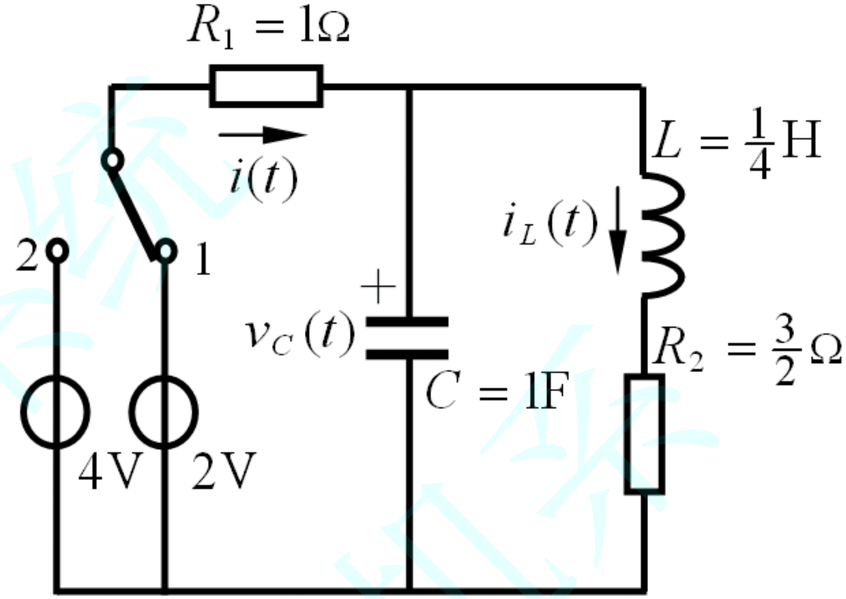
代入电路参数得:

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}i(t) + 7\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i(t) + 10i(t) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}e(t) + 6\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e(t) + 4e(t)$$

方程的特征方程和特征根:

$$\alpha^2 + 7\alpha + 10 = 0;\quad \alpha_1 = -2;\quad \alpha_2 = -5$$

系统的0_-初始状态:

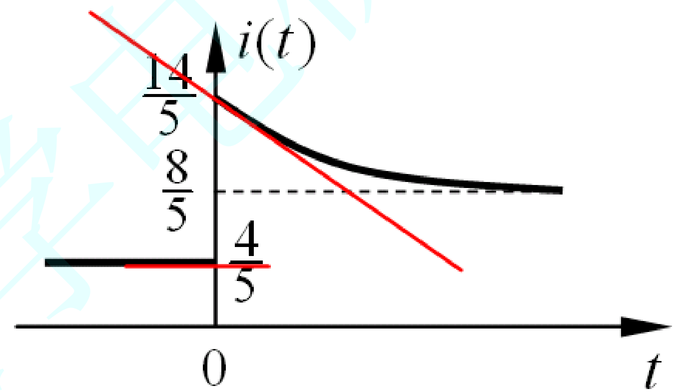


$$i(0_-)=i_L(0_-)=\frac{2\mathrm{V}}{R_1+R_2}=\frac{4}{5}\mathrm{A}$$

$$v_C(0_-)=R_2 i_L(0_-)=\frac{6}{5}\mathrm{V}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i(0_-)=0\mathrm{A/s}$$

系统的0_+初始状态:



$$v_C(0_+)=v_C(0_-)=\frac{6}{5}\mathrm{V}$$

$$i_L(0_+)=i_L(0_-)=\frac{4}{5}\mathrm{A}$$

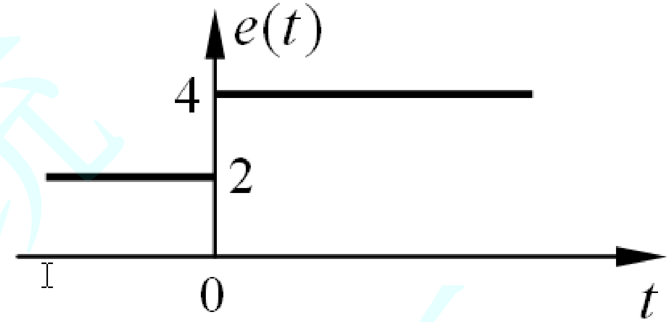
$$i(0_+)=\frac{1}{R_1}\left[e(0_+)-v_C(0_+)\right]=\frac{14}{5}\mathrm{A}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i(0_+)=\frac{1}{R_1}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e(t)-\frac{1}{C}\left[i(0_+)-i_L(0_+)\right]\right]=-2\mathrm{A/s}$$

初始状态有跳变!

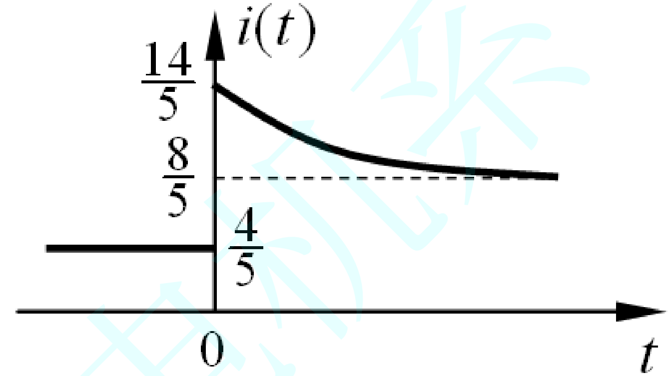
方程求解方法一：使用 0_+ 初始状态，不必考虑初始状态跳变，取 $e(t)=4$，代入方程得

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}i(t)+7\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i(t)+10i(t)=16$$



根据初始条件 $i(0_+)=14/5$ 和 $i'(0_+)=-2$，求得方程的全解为

$$i(t)=\frac{4}{3}\mathrm{e}^{-2t}-\frac{2}{15}\mathrm{e}^{-5t}+\frac{8}{5}\qquad t>0$$



方程求解

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}i(t)+7\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i(t)+10i(t)=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}e(t)+6\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e(t)+4e(t)}$$

已知： $e(t$ … $)=2\delta'(t)$

代入方程得：
$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}i(t)+7\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i(t)+10i(t)=\underline{2\delta'(t)+12\delta(t)}+8u(t)+8$$

方程右边有冲激，初始状态有跳变！

代入方程得：$$\frac{d^2}{dt^2}i(t)+7\frac{d}{dt}i(t)+10i(t)=2\delta'(t)+12\delta(t)+8u(t)+8$$

方程右边有冲激，初始状态有跳变！

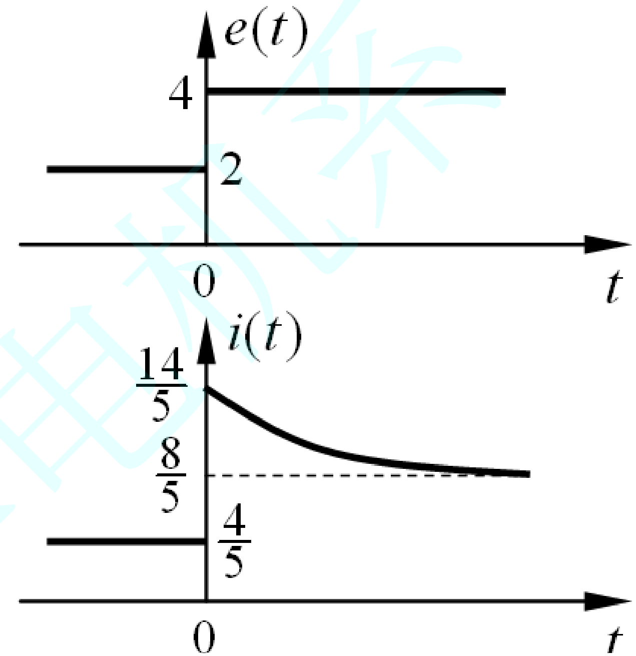
为了奇异项平衡，假设

$\Delta u(t)$表示0_-到0_+的单位跳变量，C表示跳变幅值

$$\left.\frac{d^2}{dt^2}i(t)\right|_{t=0}=A\delta'(t)+B\delta(t)+C\Delta u(t)$$

积分，可得 $$\left.\frac{d}{dt}i(t)\right|_{t=0}=A\delta(t)+B\Delta u(t)$$

$$\left.i(t)\right|_{t=0}=A\Delta u(t)$$



将上述响应的奇异项假设代入系统微分方程，求平衡，得

$$A\delta'(t)+(7A+B)\delta(t)+(10A+7B+C)\Delta u(t)=2\delta'(t)+12\delta(t)+8u(t)$$

求得系数

$$A=2\text{，}\quad B=-2\text{，}\quad C=2$$

A 和 B 表示了系统初始状态跳变的幅值。由此求 0_+ 时刻的初始状态

$$i(0_+) = i(0_-) + \mathrm{A} = \frac{4}{5} + 2 = \frac{14}{5}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} i(0_+) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} i(0_-) + \mathrm{B} = 0 - 2 = -2$$

$$\boxed{\begin{aligned} i(t)\big|_{t=0} &= \mathrm{A}\Delta u(t) \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} i(t)\bigg|_{t=0} &= \mathrm{A}\delta(t) + \mathrm{B}\Delta u(t) \end{aligned}}$$

冲激函数匹配法

此结果和前面根据电路条件求得的 0_+ 初始状态相同。方程求解同方法一。

方程求解方法三：把激励分解为$e_1(t)=2$和$e_2(t)=2u(t)$，分别求解。

对于激励$e_1(t)=2$，激励从$t=-\infty$开始，非奇异。将$e_1(t)=2$带入方程，选择$i(0_)=\dfrac{4}{5}\text{A}$和$i'(0_)=0\text{A/s}$作为边界条件，求得系统响应

$$i_1(t)=\frac{4}{5}$$

对于激励$e_2(t)=2u(t)$，激励从$t=0$开始，奇异。因为激励$e_1(t)=2$已单独考虑，所以激励$e_2(t)=2u(t)$的响应有零初始状态。将$e_2(t)=2u(t)$带入微分方程，得

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}i_2(t)+7\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i_2(t)+10i_2(t)=2\delta'(t)+12\delta(t)+8u(t)$$

求该方程的零状态响应。该方程初始状态有跳变。

由方程的激励、特征根和零初始状态，可得到解的形式

$$i_2(t)=(Ae^{-2t}+Be^{-5t})u(t)+Cu(t)$$

其中 $(Ae^{-2t}+Be^{-5t})u(t)$ 为齐次解，$Cu(t)$ 为特解，初始状态由零状态跳变的幅值也包含在此式中。将上式代入微分方程，求方程两边奇异项的平衡，得系数

$$\mathrm{A}=\frac{4}{3},\quad \mathrm{B}=-\frac{2}{15},\quad \mathrm{C}=\frac{4}{5}$$

由此求得

$$i_2(t)=\left(\frac{4}{3}e^{-2t}-\frac{2}{15}e^{-5t}+\frac{4}{5}\right)u(t)$$

$i_1(t)$ 和 $i_2(t)$ 叠加，得系统响应

$$\begin{aligned}i(t)&=i_1(t)+i_2(t)\\&=\frac{4}{3}e^{-2t}-\frac{2}{15}e^{-5t}+\frac{8}{5}\qquad t>0\end{aligned}$$

系统的单位冲激响应

激励信号为单位冲激函数时的系统的零状态响应称为系统的单位冲激响应，用 $h(t)$ 表示。

冲激响应的物理过程：零状态；冲激激励（瞬间获得能量），状态跳变，建立 0_+ 初始状态；零输入响应（自由响应）

把冲激信号代入系统微分方程，得

$$\frac{\mathrm{d}^n h(t)}{\mathrm{d}t^n}+a_{n-1}\frac{\mathrm{d}^{n-1}h(t)}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+a_1\frac{\mathrm{d}h(t)}{\mathrm{d}t}+a_0 h(t)$$

$$=b_m\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}t^m}\delta(t)+b_{m-1}\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}t^{m-1}}\delta(t)+\cdots+b_1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta(t)+b_0\delta(t)$$

方程两边奇异项（冲激函数及其各阶导数）必须平衡。

对于不同的 n 和 m 的关系，方程解的形式如下：

（1）当 $n>m$ 时，$h(t)$ 不能有 $\delta(t)$ 及其各阶导数，解的形式为

$$h(t)=(\text{齐次解形式})u(t)$$

$$\frac{d^n h(t)}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}h(t)}{dt^{n-1}}+\cdots+a_1\frac{dh(t)}{dt}+a_0h(t)$$

$$=b_m\frac{d^m}{dt^m}\delta(t)+b_{m-1}\frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}}\delta(t)+\cdots+b_1\frac{d}{dt}\delta(t)+b_0\delta(t)$$

（2）当 $n=m$ 时，$h(t)$ 必须有 $\delta(t)$，但不能有其各阶导数，解的形式为

$$h(t)=A\delta(t)+(\text{齐次解形式})u(t)$$

（3）当 $n<m$ 时，$h(t)$ 必须有 $\delta^{(m-n)}(t)$ 及较低阶数的冲激函数导数，解的形式为

$$h(t)=A_{m-n}\delta^{(m-n)}(t)+\cdots+A_1\delta'(t)+A_0\delta(t)+(\text{齐次解形式})u(t)$$

以上 $h(t)$ 的形式中，系数都是待定的，求解方法:

(1) 将 $h(t)$ 的解的形式代入微分方程

(2) 求 $\delta(t)$ 及其各阶导数的系数平衡，确定所有待定系数

单位冲激响应求解方法二：

- 由**冲激函数匹配法**，确定初始状态的跳变值，得到0+时刻的初始状态，然后求解零输入响应即可。

- 在冲激函数匹配法计算中，如果h(t)在0-到0+时刻不仅出现跳变，而且包含了冲激函数及其导数，那么最终的表达式中也要包含冲激函数及其导数。

例：求下列微分方程的单位冲激响应

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}r(t)+2r(t)=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}e(t)+3\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e(t)+3e(t)$$

解：代入冲激函数得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}r(t)+2r(t)=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\delta(t)+3\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta(t)+3\delta(t)$$

方程的特征方程和特征根为

$$a+2=0;\quad a=-2$$

$n=1$，$m=2$，单位冲激响应的形式为

$$h(t)=\mathrm{A}_1\delta'(t)+\mathrm{A}_0\delta(t)+\mathrm{B}e^{-2t}u(t)$$

将 $r(t)=h(t)$ 代入微分方程，求方程两边系数平衡，得

$$\mathrm{A}_1=1,\quad \mathrm{A}_0=1,\quad \mathrm{B}=1$$

系统单位冲激响应

（阶跃项的平衡？）

$$h(t)=\delta'(t)+\delta(t)+\mathrm{e}^{-2t}u(t)$$

解法二:

冲激函数匹配法

令 $$\frac{d}{dt}r(t)=a\delta''(t)+b\delta'(t)+c\delta(t)+d\Delta u(t)$$

$$r(t)=a\delta'(t)+b\delta(t)+c\Delta u(t)$$

$$\Rightarrow \quad a\delta''(t)+b\delta'(t)+c\delta(t)+d\Delta u(t)+2[a\delta'(t)+b\delta(t)+c\Delta u(t)]$$
$$=\delta''(t)+3\delta'(t)+3\delta(t)$$

$$\Rightarrow \quad a=1, b=1, c=1, d=-2$$

$$\Rightarrow \quad r(0_+)=r(0_-)+c=1$$

齐次解 $r(t)=Ae^{-2t}u(t)$

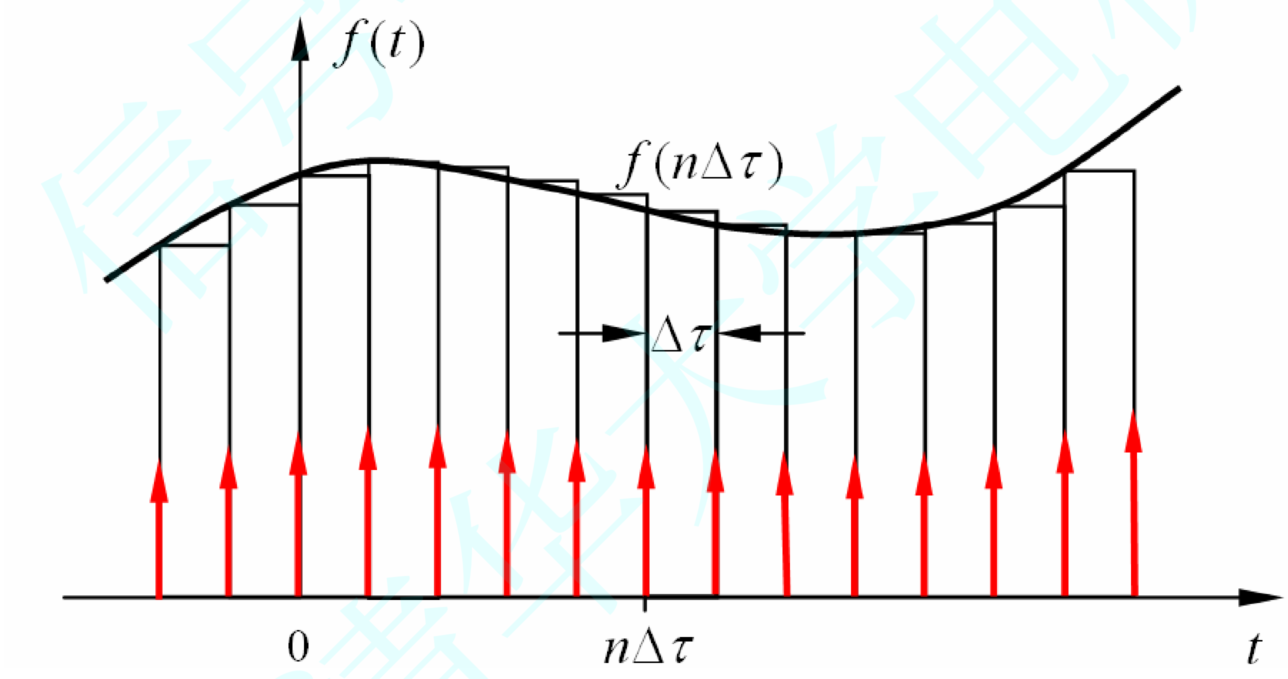
$$\Rightarrow \quad A=1$$

$$\Rightarrow \quad h(t)=\delta'(t)+\delta(t)+e^{-2t}u(t)$$

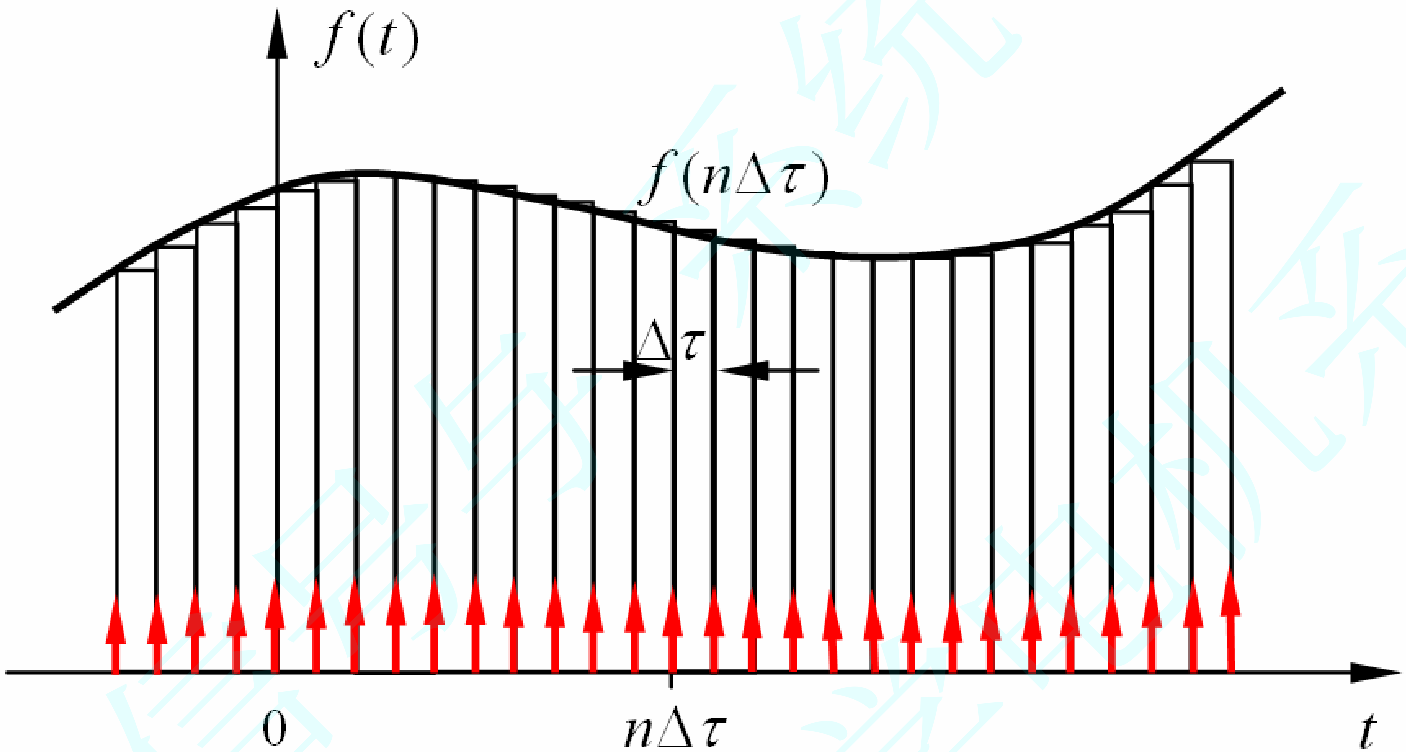
卷积积分

- 信号的脉冲分量分解

设信号$f(t)$的波形如图所示，它可近似地表示为一串宽度为$\Delta\tau$的矩形脉冲的叠加



$\Delta\tau$越小，矩形脉冲叠加的波形越接近$f(t)$。



在任意时间$n\Delta\tau$处，矩形脉冲的高度为$f(n\Delta\tau)$，此处的矩形脉冲可表示为

$$f(n\Delta\tau)\left[u(t-n\Delta\tau)-u(t-n\Delta\tau-\Delta\tau)\right]$$

因此有 $$f(t)\approx\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(n\Delta\tau)\left[u(t-n\Delta\tau)-u(t-n\Delta\tau-\Delta\tau)\right]$$

$$f(t)\approx\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(n\Delta\tau)\left[u(t-n\Delta\tau)-u(t-n\Delta\tau-\Delta\tau)\right]$$

复习

$\Delta\tau\to 0$ 上式变成什么？

$$f(n\Delta\tau)\Delta\tau\cdot\underline{\frac{1}{\Delta\tau}\left[u(t-n\Delta\tau)-u(t-n\Delta\tau-\Delta\tau)\right]}$$

$$\boxed{\delta(t-n\Delta\tau)}$$

取 $\Delta\tau\to 0$ 的极限，有 $\Delta\tau\to \mathrm{d}\tau$， $n\Delta\tau\to\tau$

$$f(n\Delta\tau)\Delta\tau\delta(t-n\Delta\tau)\to f(\tau)\mathrm{d}\tau\delta(t-\tau)$$

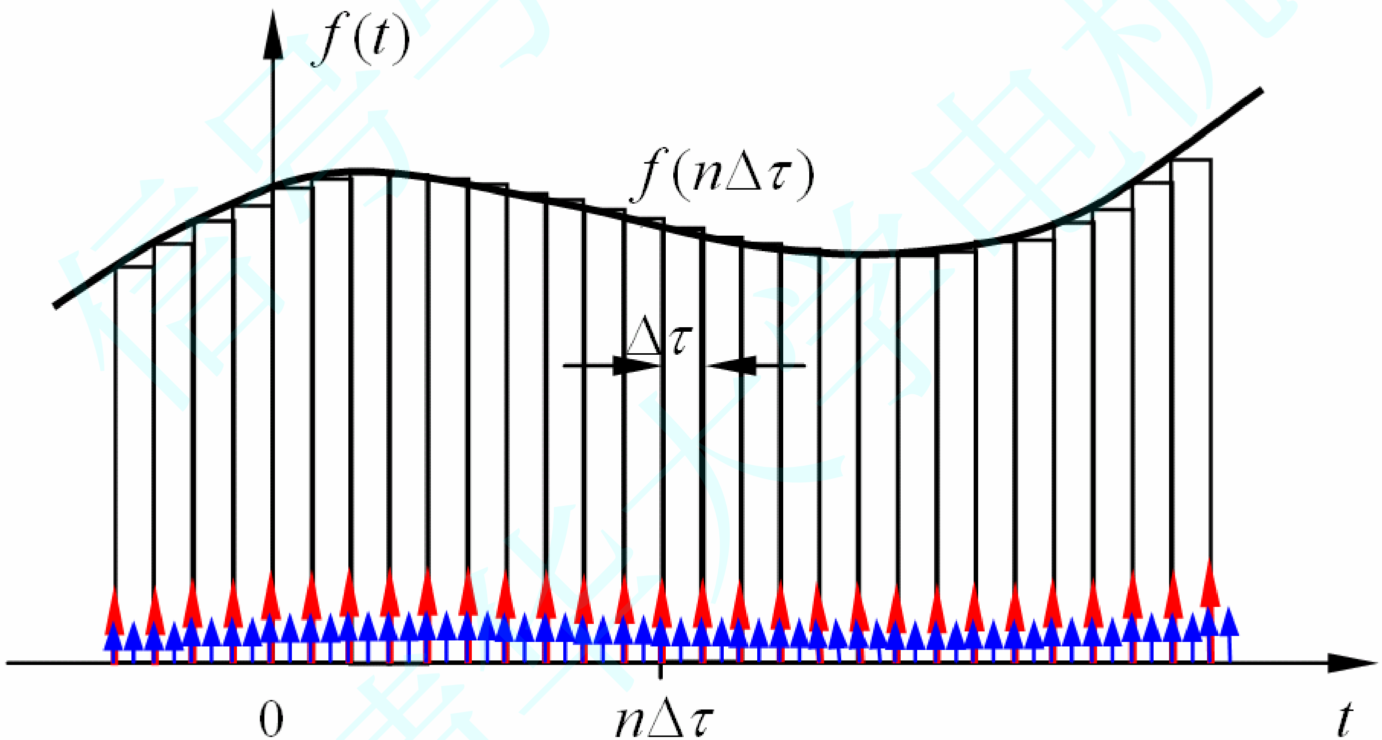
$$f(t)=\lim_{\Delta\tau\to 0}\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(n\Delta\tau)\left[u(t-n\Delta\tau)-u(t-n\Delta\tau-\Delta\tau)\right]$$

$$\boxed{\begin{aligned}&=\lim_{\Delta\tau\to 0}\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(n\Delta\tau)\Delta\tau\delta(t-n\Delta\tau)\\&=\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)\delta(t-\tau)\mathrm{d}\tau\end{aligned}}$$

$$f(t)=\lim_{\Delta\tau\to 0}\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\Delta\tau)\Delta\tau\delta(t-n\Delta\tau)$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

信号 $f(t)$ 等效为一串冲激脉冲，在时间 τ 处的冲激脉冲强度为 $f(\tau)\mathrm{d}\tau$ ，是无穷小；相邻脉冲之间的时间间隔为 $\mathrm{d}\tau$ ，也是无穷小，这串冲激脉冲连续分布。



卷积的概念

- 需求：输入是千变万化的，系统是相对不变的，系统特性描述 → 系统响应的方便求解。
- 面对的问题：
  - 如果能够求得一个线性时不变系统的单位冲激响应$h(t)$，对于任意系统激励$e(t)$，如何求系统的零状态响应$r(t)$?

单位冲激响应$h(t)$

信号的脉冲分量分解

线性时不变系统

第一步:

基于信号的脉冲分解，激励信号$e(t)$可以表示为一串冲激脉冲信号的叠加

$$e(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e(\tau)\delta(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

在时间τ处，冲激脉冲分量为$\left[e(\tau)\mathrm{d}\tau\right]\delta(t-\tau)$。

第二步:

已知系统的单位冲激响应为$h(t)$，即

激励$\delta(t)$产生响应$h(t)$

基于系统的时不变特性，有

激励$\delta(t-\tau)$产生响应$h(t-\tau)$

基于线性系统响应的均匀性，有

激励$\left[e(\tau)\mathrm{d}\tau\right]\delta(t-\tau)$产生响应$\left[e(\tau)\mathrm{d}\tau\right]h(t-\tau)$

第三步：

基于线性系统响应的叠加性，有

$$\text{激励}\, e(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e(\tau)\delta(t-\tau)\mathrm{d}\tau \;\text{产生响应}\; r(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

卷积的概念

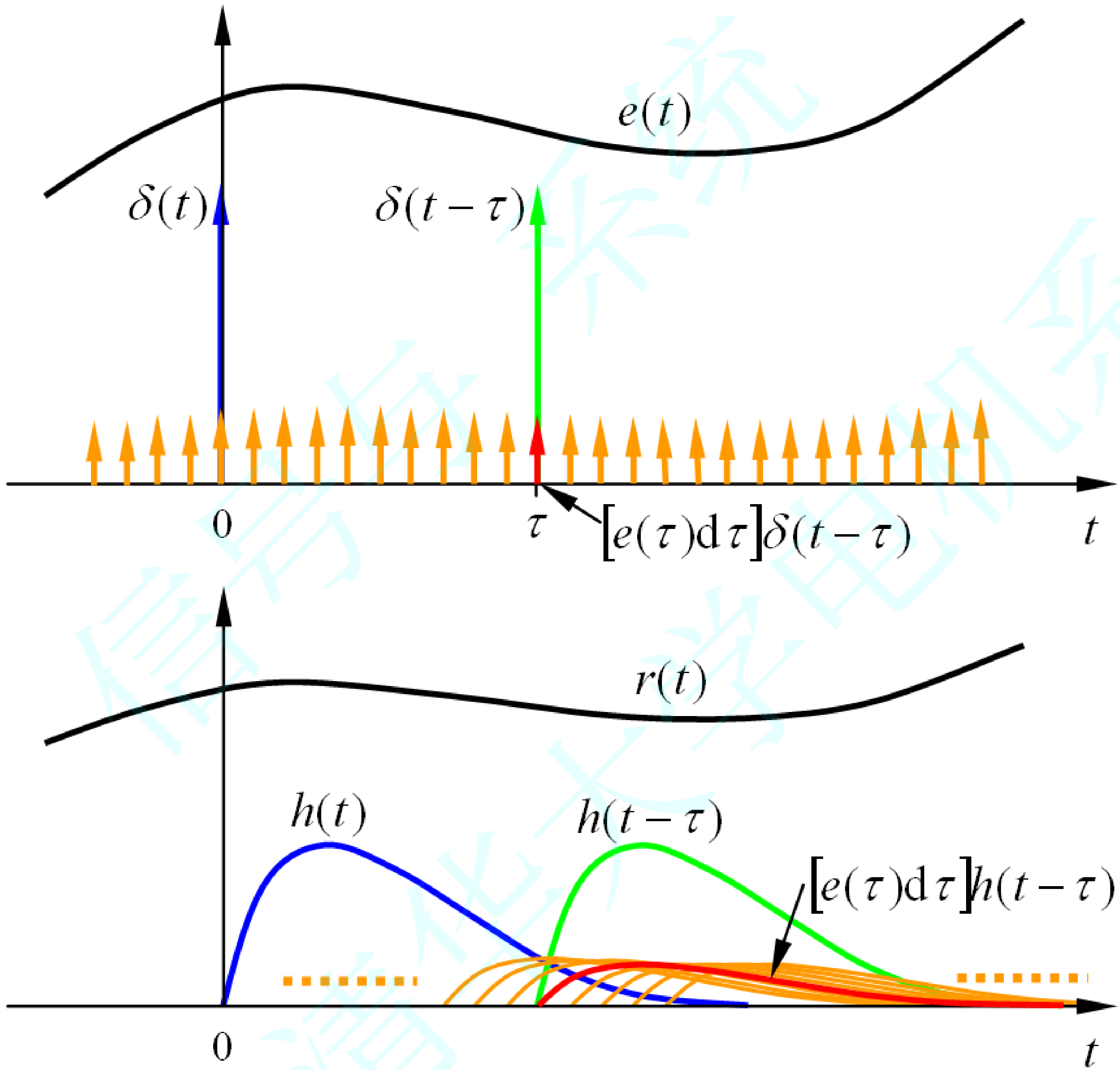
定义两函数 $e(t)$ 和 $h(t)$ 卷积积分为

$$r(t)=e(t)*h(t)$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} e(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

则有：线性时不变系统在激励 $e(t)$ 作用下的零状态响应 $r(t)$ 是激励 $e(t)$ 和该系统的单位冲激响应 $h(t)$ 的卷积。

物理意义

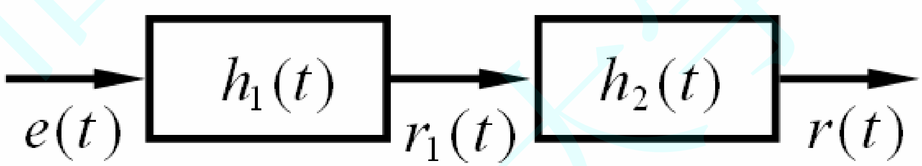


$e(t)$
$\delta(t)$
$\delta(t-\tau)$
0
τ
$[e(\tau)\mathrm{d}\tau]\delta(t-\tau)$
t
$r(t)$
$h(t)$
$h(t-\tau)$
$[e(\tau)\mathrm{d}\tau]h(t-\tau)$
0
t

如果系统是因果的，则在t时刻的响应$r(t)$只和t时刻以前的冲激脉冲有关，和t时刻以后的冲激脉冲无关。因此，对于因果系统，系统响应满足关系

$$r(t) = e(t) * h(t)$$
$$= \int_{-\infty}^{t} e(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

对于线性时不变系统，已知系统单位冲激响应，可求任意激励下的系统零状态响应，单位冲激响应反映了系统的基本特性，经常被用来表示系统。



卷积积分的图解方法

图解方法可以帮助理解卷积积分的概念和运算。将卷积积分的形式改写为

$$e(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e(\tau)h\left[-(\tau-t)\right]\mathrm{d}\tau$$

其中的运算包括:

（1）$h(\tau)$ 反褶，得 $h(-\tau)$；

（2）$h(-\tau)$ 移位 t，得 $h\left[-(\tau-t)\right]$

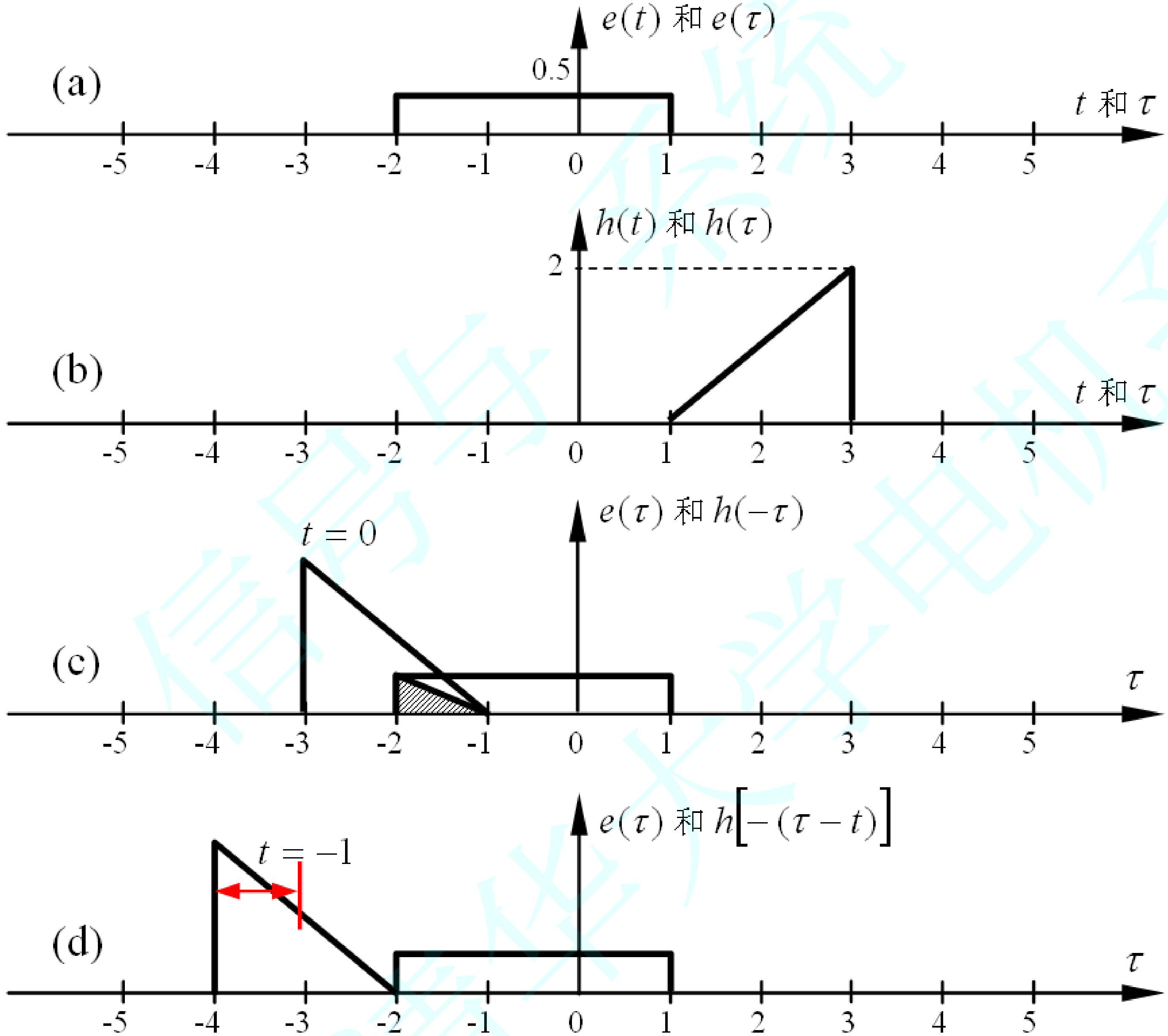
（3）两函数相乘，得函数积 $e(\tau)h\left[-(\tau-t)\right]$

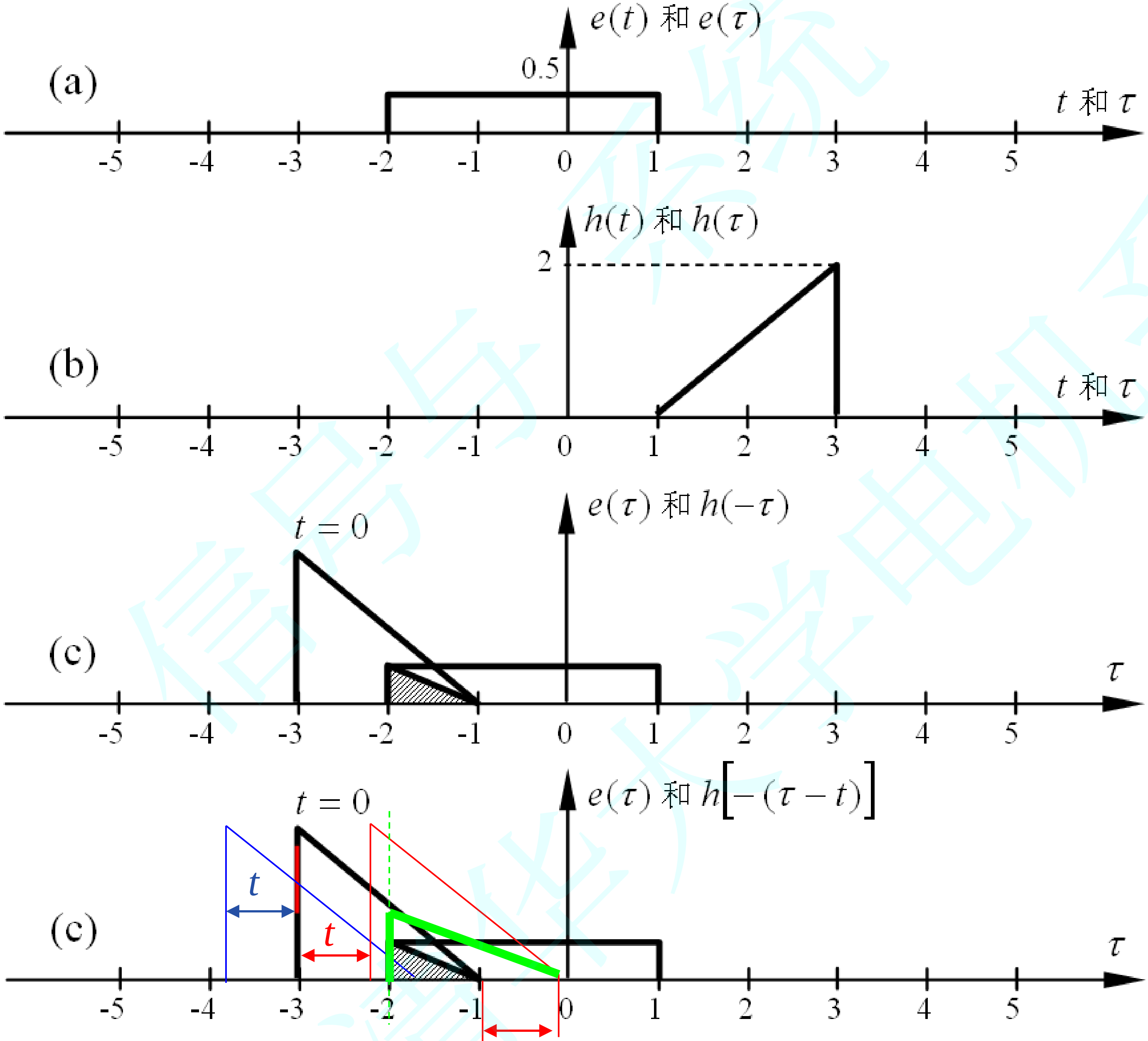
（4）求函数积 $e(\tau)h\left[-(\tau-t)\right]$ 在 $(-\infty,\infty)$ 区间的净面积

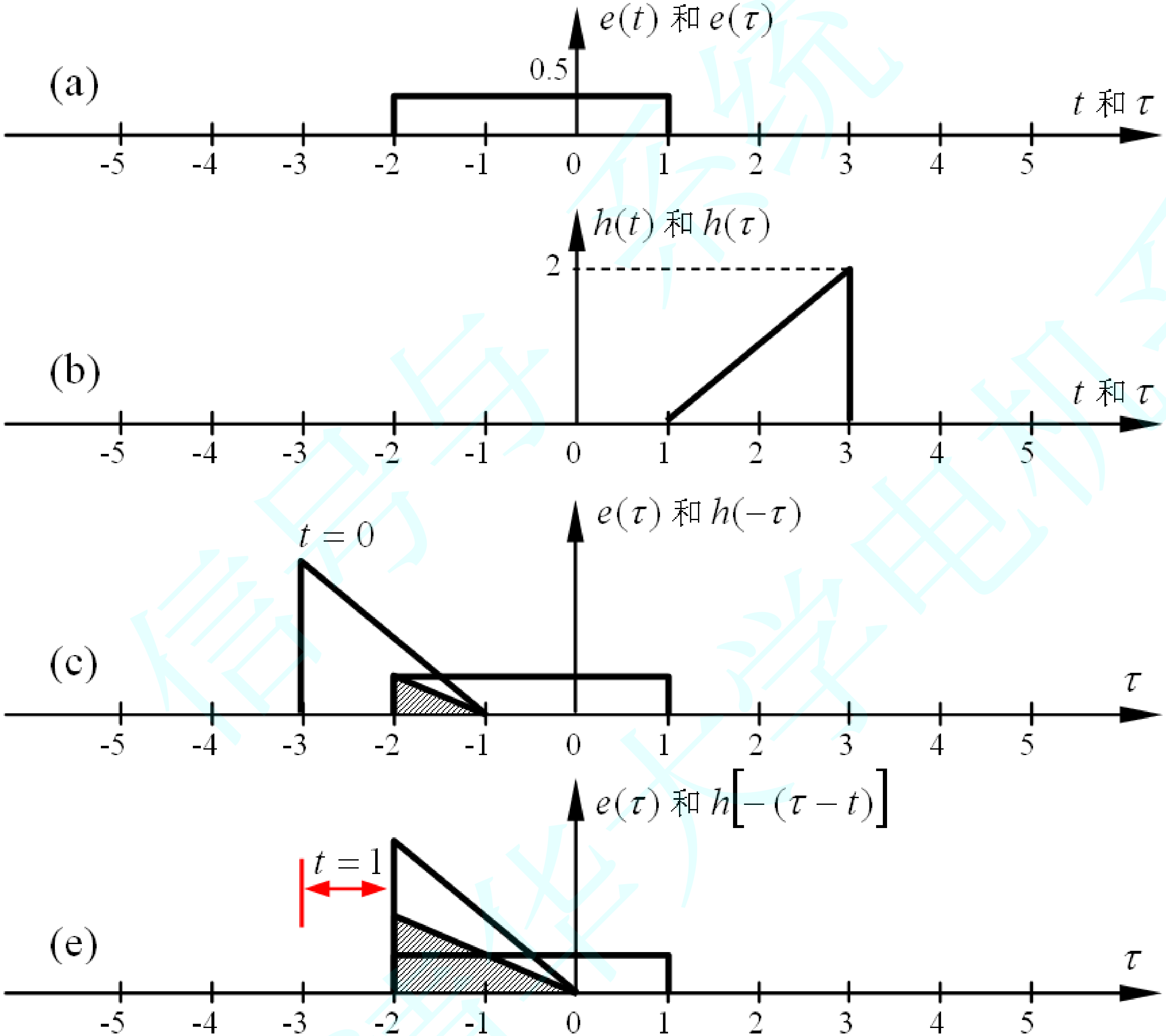
$$\boxed{得\int_{-\infty}^{\infty}e(\tau)h\left[-(\tau-t)\right]\mathrm{d}\tau}$$

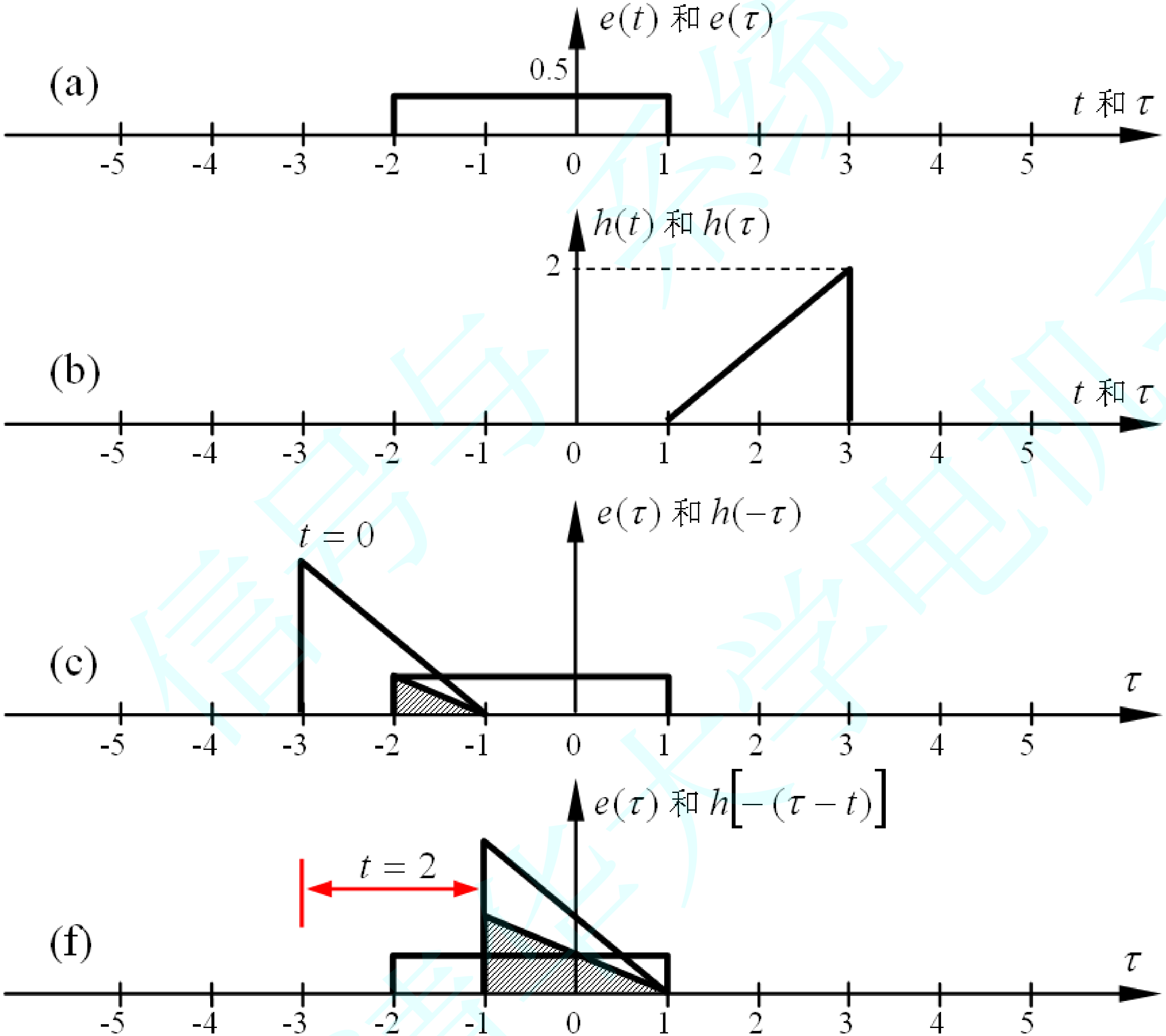
在卷积积分中，τ 为积分变量，t 为时移。随着时移 t 的改变，函数积 $e(\tau)h(t-\tau)$ 改变，函数积下的净面积也改变。卷积积分是一个函数，函数变量是 t，表示函数积的净面积随时移 t 的变化关系。

例　已知如图所示信号$e(t)$和$h(t)$的波形，图解法求此两信号的卷积

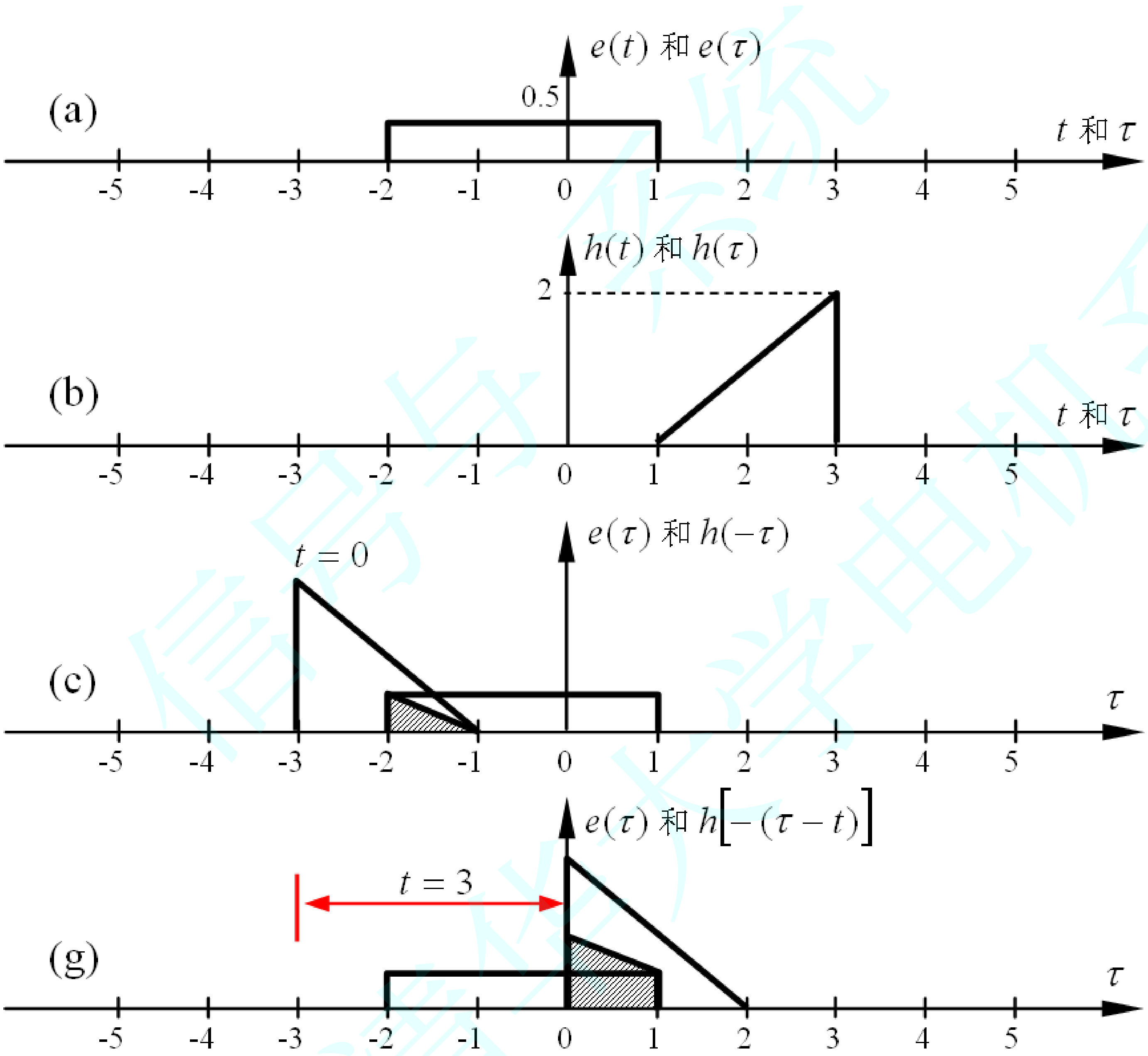


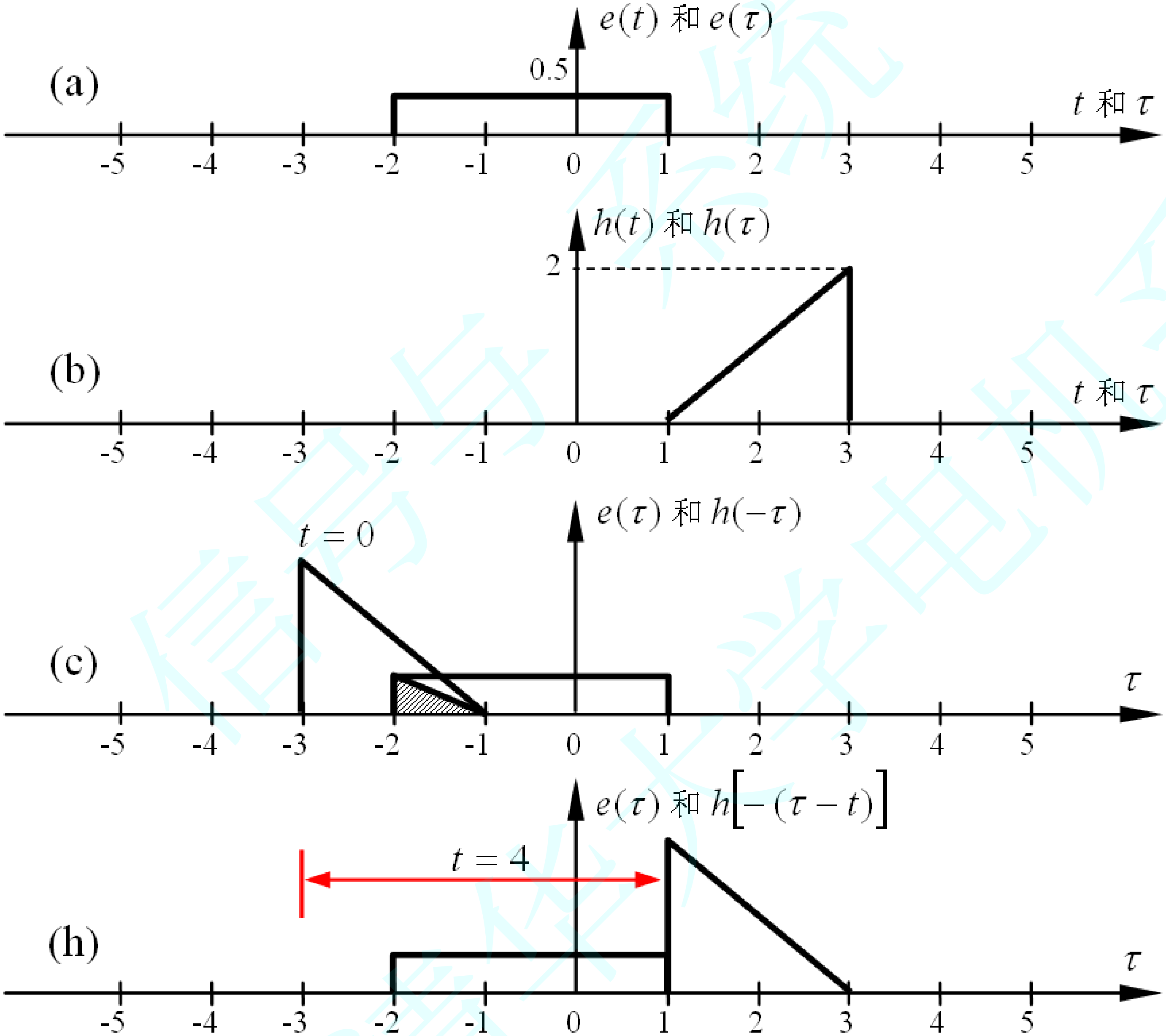

(a)
e(t) 和 e(τ)
0.5
t 和 τ
-5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5
(b)
h(t) 和 h(τ)
2
t 和 τ
-5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5
(c)
e(τ) 和 h(−τ)
t = 0
τ
-5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5
(c)
e(τ) 和 h[−(τ − t)]
t = 0
t
t
τ
-5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5
t


(a)
$e(t)$ 和 $e(\tau)$
0.5
t 和 τ
-5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5
(b)
$h(t)$ 和 $h(\tau)$
2
t 和 τ
-5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5
(c)
$e(\tau)$ 和 $h(-\tau)$
$t=0$
τ
-5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5
(e)
$e(\tau)$ 和 $h\left[-(\tau-t)\right]$
$t=1$
τ
-5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5

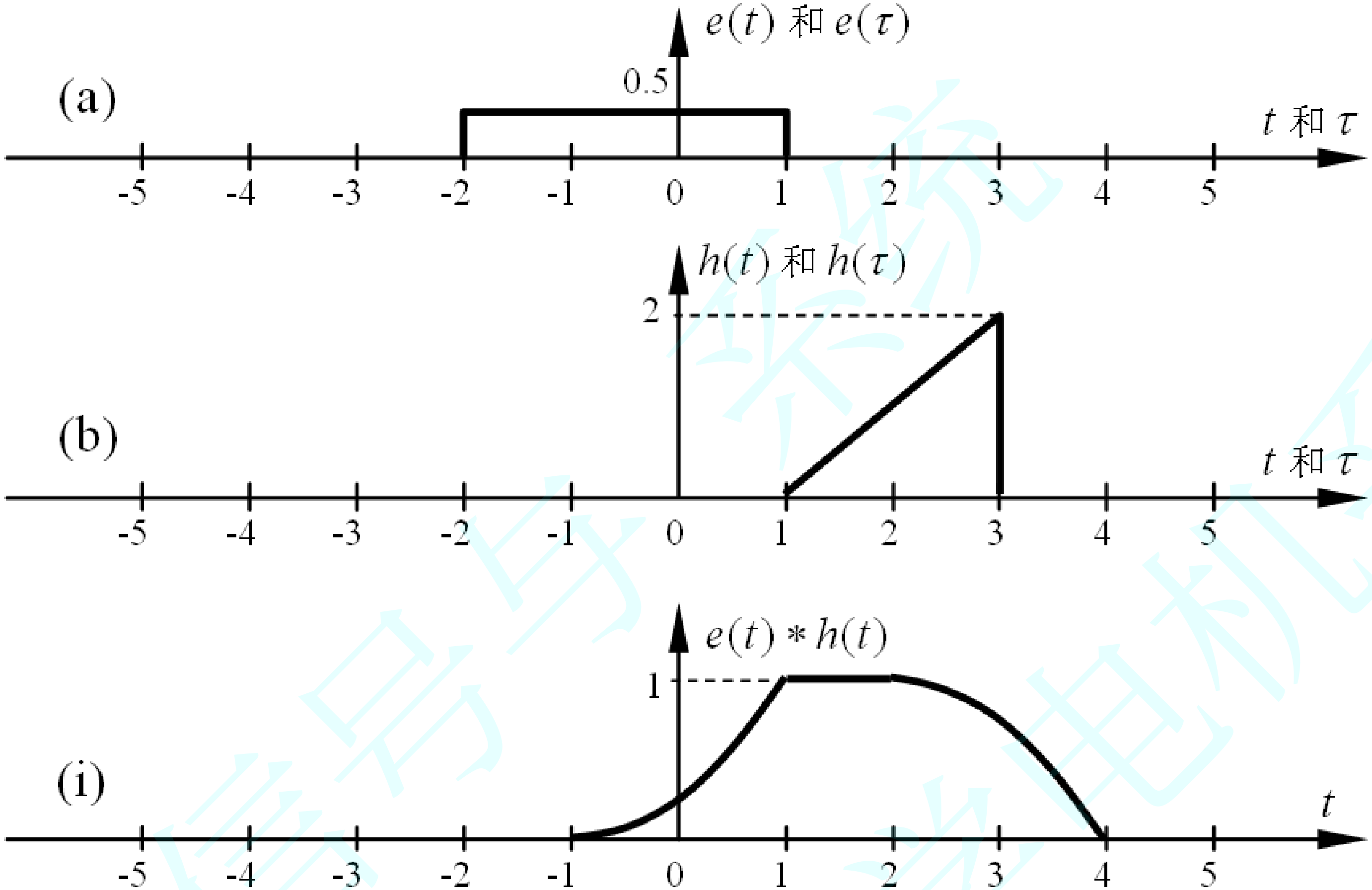


(a)
e(t) 和 e(τ)
0.5
t 和 τ
-5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5
(b)
h(t) 和 h(τ)
2
t 和 τ
-5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5
(c)
e(τ) 和 h(−τ)
t = 0
τ
-5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5
(f)
e(τ) 和 h[−(τ − t)]
t = 2
τ
-5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5


(a)
$e(t)$ 和 $e(\tau)$
0.5
t 和 τ
-5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5
(b)
$h(t)$ 和 $h(\tau)$
2
t 和 τ
-5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5
(c)
$e(\tau)$ 和 $h(-\tau)$
$t=0$
τ
-5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5
(g)
$e(\tau)$ 和 $h\left[-(\tau-t)\right]$
$t=3$
τ
-5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5



(a)
$e(t)$ 和 $e(\tau)$
0.5
t 和 τ
-5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5
(b)
$h(t)$ 和 $h(\tau)$
2
t 和 τ
-5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5
(c)
$e(\tau)$ 和 $h(-\tau)$
$t=0$
τ
-5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5
(h)
$e(\tau)$ 和 $h\left[-(\tau-t)\right]$
$t=4$
τ
-5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5



$$e(t)*h(t)=\begin{cases}0 & t\le -1\\ 0.25(1+t)^2 & -1<t\le 1\\ 1 & 1<t\le 2\\ 0.25t(4-t) & 2<t\le 4\\ 0 & t>4\end{cases}$$

卷积的性质

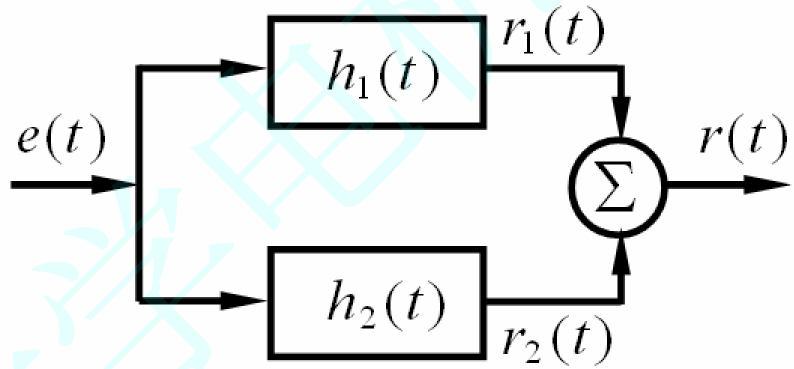
#　卷积代数

交换律：　$f_1(t)*f_2(t)=f_2(t)*f_1(t)$

分配律：　$f_1(t)*\left[f_2(t)+f_3(t)\right]=f_1(t)*f_2(t)+f_1(t)*f_3(t)$

结合律：　$\left[f_1(t)*f_2(t)\right]*f_3(t)=f_1(t)*\left[f_2(t)*f_3(t)\right]$

如图所示是两个系统并联的情况，根据分配率，系统并联后的响应和激励满足关系



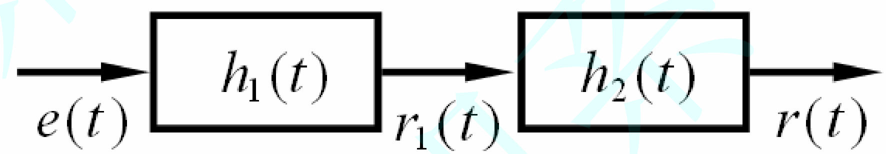
$$
\begin{aligned}
r(t)&=r_1(t)+r_2(t)\\
&=e(t)*h_1(t)+e(t)*h_2(t)\\
&=e(t)*\left[h_1(t)+h_2(t)\right]
\end{aligned}
$$

此式显示，并联系统的单位冲激响应是各子系统的单位冲激响应之和。

如图所示是两个系统串联的情况，根据结合率，系统串联后的响应和激励满足关系

$$r_1(t)=e(t)*h_1(t)$$

$$\begin{aligned}r(t)&=r_1(t)*h_2(t)\\&=e(t)*h_1(t)*h_2(t)\\&=e(t)*\left[h_1(t)*h_2(t)\right]\end{aligned}$$



此式显示，串联系统的单位冲激响应是各子系统的单位冲激响应的卷积。

卷积的微分和积分

（1） 微分：$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[f_1(t)*f_2(t)\right]=\frac{\mathrm{d}f_1(t)}{\mathrm{d}t}*f_2(t)=f_1(t)*\frac{\mathrm{d}f_2(t)}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{d}{dt}\left[f_1(t)*f_2(t)\right]=\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau)\frac{d}{dt}f_2(t-\tau)d\tau=f_1(t)*f_2'(t)$$

（2） 积分：

$$\int_{-\infty}^{t}\left[f_1(\lambda)*f_2(\lambda)\right]\mathrm{d}\lambda=f_1(t)*\int_{-\infty}^{t}f_2(\lambda)\mathrm{d}\lambda=f_2(t)*\int_{-\infty}^{t}f_1(\lambda)\mathrm{d}\lambda$$

（3） 推演得：$$f_1(t)*f_2(t)=\frac{\mathrm{d}f_1(t)}{\mathrm{d}t}*\int_{-\infty}^{t}f_2(\lambda)\mathrm{d}\lambda$$

$$\frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}t^i}\left[f_1(t)*f_2(t)\right]=f_1^{(j)}(t)*f_2^{(i-j)}(t)$$

与冲激函数的卷积

$$f(t)*\delta(t)=f(t)$$

$$f(t)*\delta(t-t_0)=f(t-t_0)$$

$$f(t)*\delta^{(k)}(t)=f^{(k)}(t)$$

$$f(t)*\delta^{(k)}(t-t_0)=f^{(k)}(t-t_0)$$

$$f(t)*\delta(t-t_0)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\delta(t-t_0-\tau)d\tau=f(t-t_0)$$

特例：冲激函数与冲激函数的卷积

$$\delta(t)*\delta(t)=\delta(t)$$

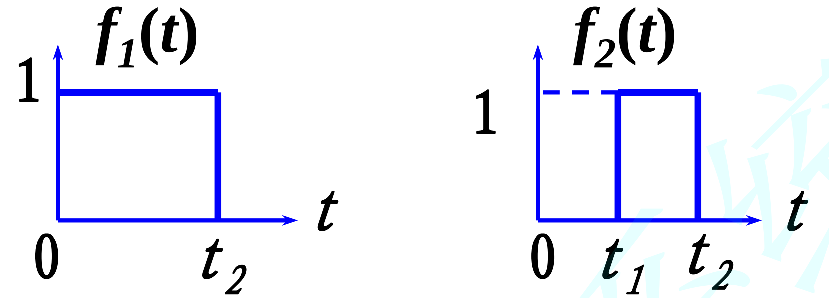
$$\delta(t)*\delta(t-t_0)=\delta(t-t_0)$$

$$\delta(t-t_1)*\delta(t-t_2)=\delta(t-t_1-t_2)$$

信号的周期延拓：

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(t-nT)=f(t)*\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$$

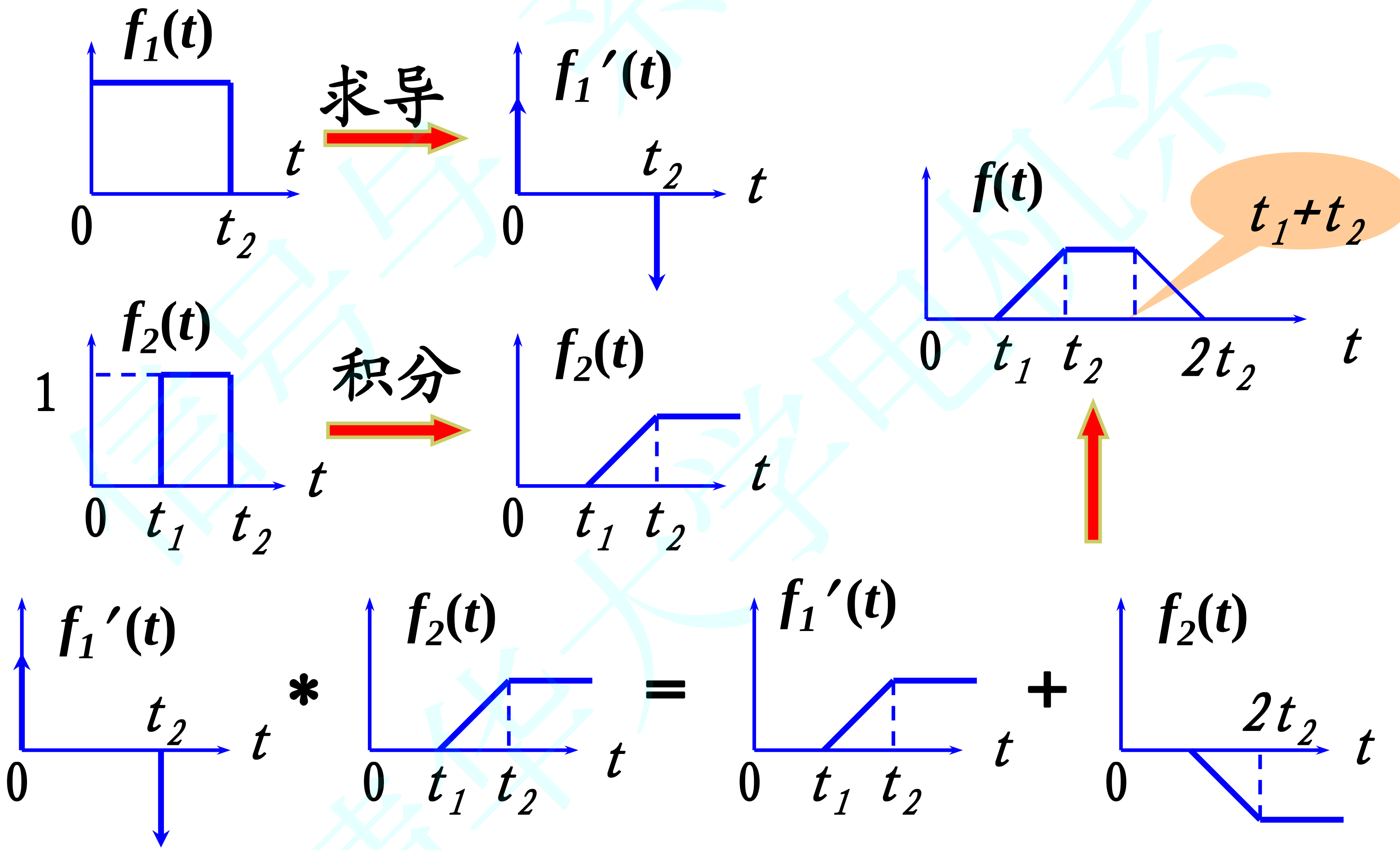
[例1]



f1(t)
1
0
t2
t
f2(t)
1
0
t1
t2
t

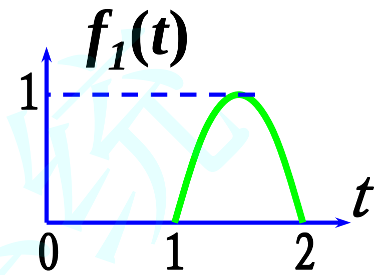
求 $f_1(t) * f_2(t)$

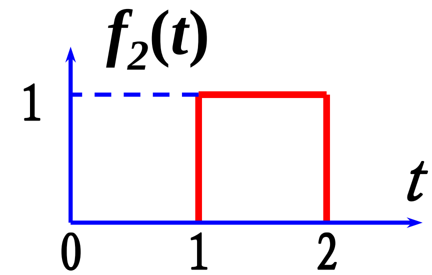
[解]



f1(t)
0
t2
t
求导
f1′(t)
t2
0
t
f2(t)
1
0
t1
t2
t
积分
f2(t)
0
t1
t2
t
f(t)
t1+t2
0
t1
t2
2t2
t
f1′(t)
*
f2(t)
=
f1′(t)
+
f2(t)
2t2

[例2]





$$f_1(t) = -\sin \pi t \left[u(t-1) - u(t-2)\right]$$

$$f_2(t) = u(t-1) - u(t-2)$$

求 $f_1(t) * f_2(t)$

[解] **利用微积分性质** $f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{t} f_1(\lambda)\, d\lambda * f_2'(t)$

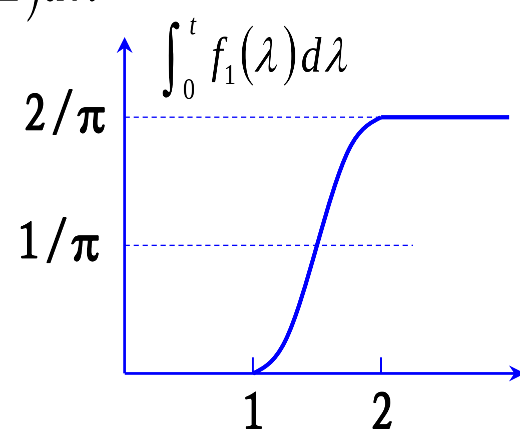
法一、

$$f_{f1}(t) = \int_{-\infty}^{t} f_1(\lambda)\, d\lambda = \int_{-\infty}^{t} -\sin \pi\lambda \left[u(\lambda-1) - u(\lambda-2)\right] d\lambda$$

$$= \int_{-\infty}^{t} -\sin \pi\lambda\; u(\lambda-1)\, d\lambda + \int_{-\infty}^{t} \sin \pi\lambda\; u(\lambda-2)\, d\lambda$$

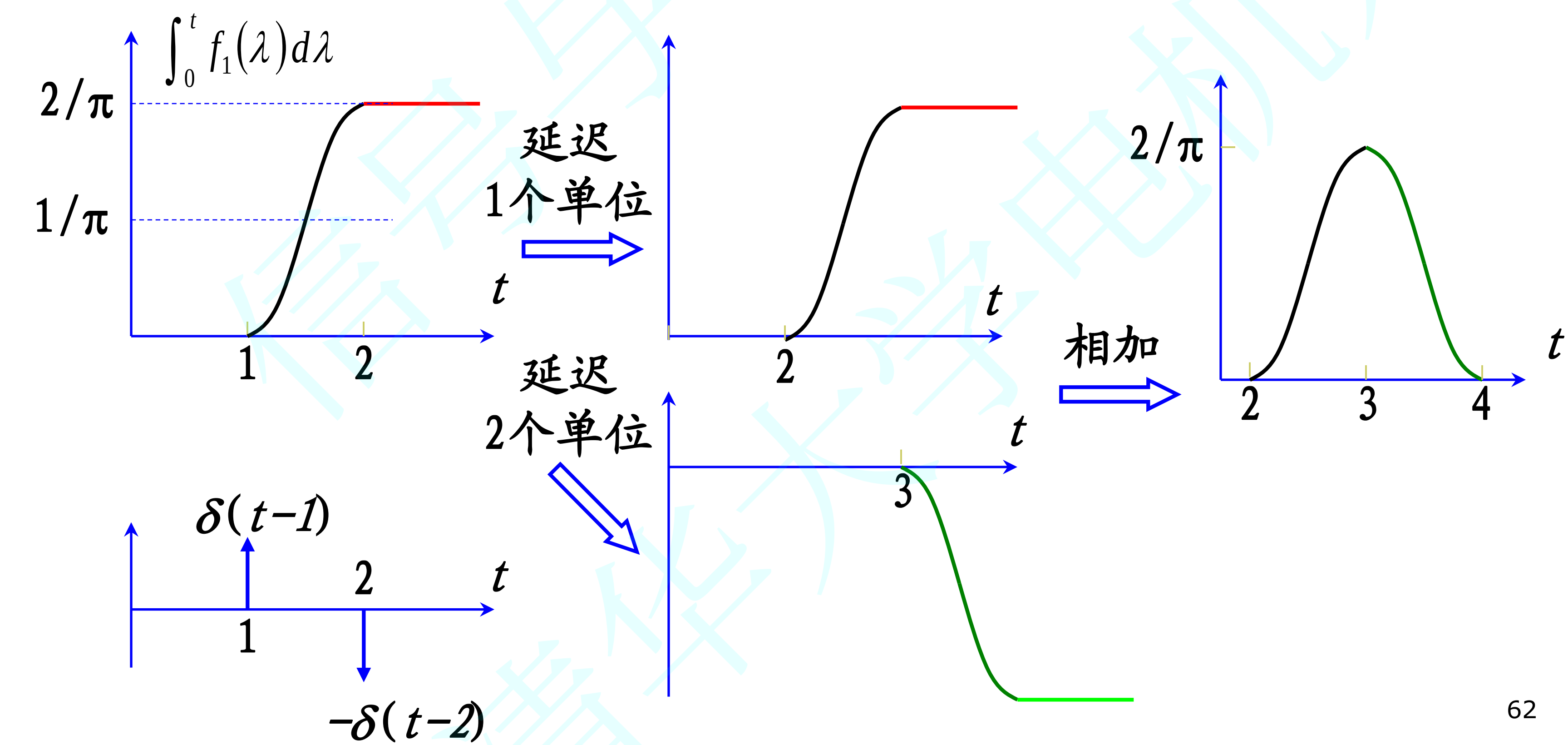
$$= \int_{1}^{t} -\sin \pi\lambda\, d\lambda + \int_{2}^{t} \sin \pi\lambda\, d\lambda$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\pi}(1+\cos \pi t), & 1 < t < 2 \\ \frac{2}{\pi}, & t \geq 2 \end{cases}$$



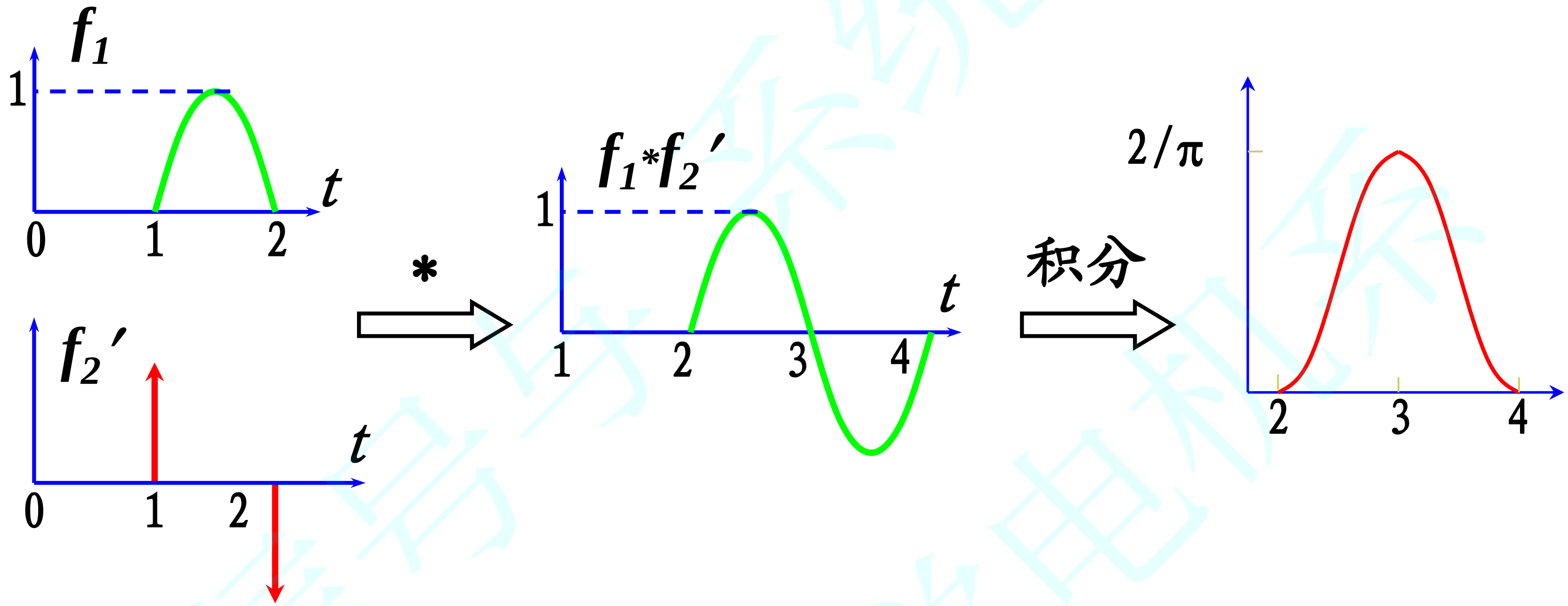
$$f_2'(t)=\frac{d}{dt}\left[u(t-1)-u(t-2)\right]=\delta(t-1)-\delta(t-2)$$

$$f_{f1}(t)*f_2'(t)=\begin{cases}\frac{1}{\pi}(1-\cos\pi t) & 2<t<4\\ 0 & t\le 2,t\ge 4\end{cases}$$



法二、

利用性质，若 $f_1 * f_2 = f$，则 $f_1 * f_2' = f'$

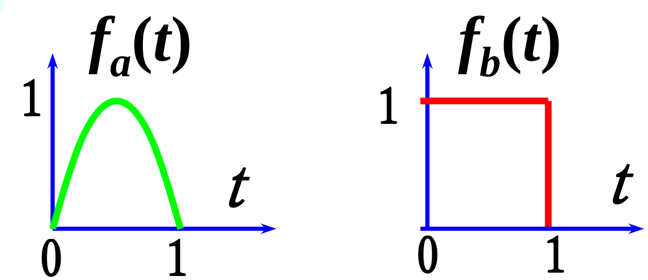


法三、利用时移性质

若 $f_1 * f_2 = f$

则 $f_1(t-t_1) * f_2(t-t_2) = f(t-t_1-t_2)$

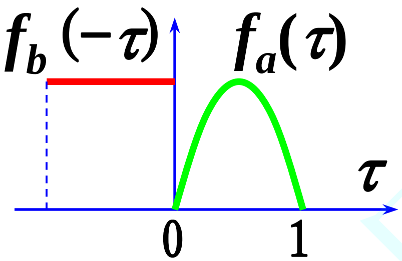
构造 f_a、f_b



则 $f_1(t) = f_a(t) * \delta(t-1),$

$$f_2(t) = f_b(t) * \delta(t-1)$$

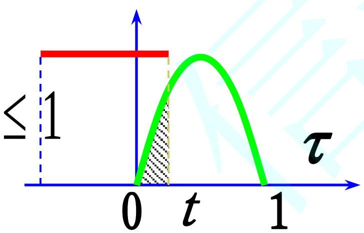
$$f_1(t) * f_2(t) = f_a(t) * f_b(t) * \delta(t-2)$$



由图解法确定f_a*f_b的积分限

当 $0 \le t \le 1$时，$\int_0^t \sin \pi\tau \, d\tau = \frac{1}{\pi}(1-\cos \pi t)$

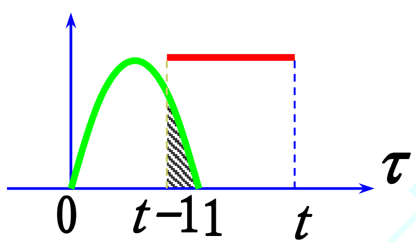
$0 \le t \le 1$



当 $1 \le t \le 2$ 时，$\int_{t-1}^1 \sin \pi\tau \, d\tau = \frac{1}{\pi}(1-\cos \pi t)$

所以 $f_a(t) * f_b(t) = \frac{1}{\pi}(1-\cos \pi t)$

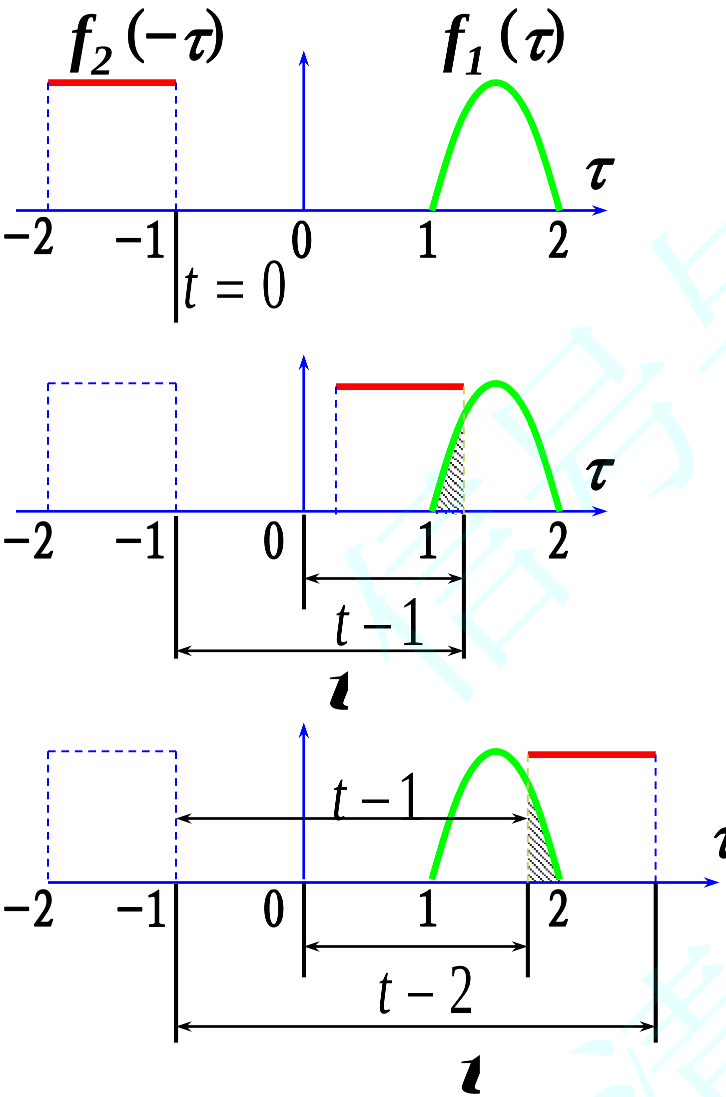
$1 \le t \le 2$



$$f_1(t) * f_2(t) = \frac{1}{\pi}[1-\cos \pi(t-2)] \qquad t \in (2,4)$$

法四、直接求解

由图解法确定f_a*f_b的积分限



当 $t<2$时

两波形不重叠， $f(t)=0$

当 $2<t<3$时

$$\int_1^{t-1} -\sin\pi\tau\, d\tau = \frac{1}{\pi}\left(1-\cos\pi t\right)$$

当 $3<t<4$时

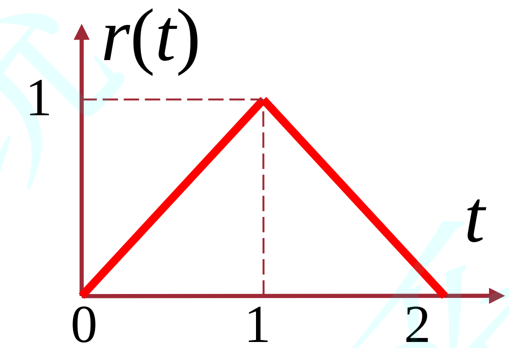
$$\int_{t-2}^{2} -\sin\pi\tau\, d\tau = \frac{1}{\pi}\left(1-\cos\pi t\right)$$

当 $t>4$时

两波形不重叠， $f(t)=0$

例题

一LTI系统，对激励信号$\sin t\cdot u(t)$的零状态响应$r(t)$，求该系统的冲激响应$h(t)$.



[解]

$$r(t)=[\sin t\cdot u(t)]*h(t)$$

求$h(t)$的过程，称为反卷积，比较困难。

解题思路：设法使激励中出现$\delta(t)$信号。

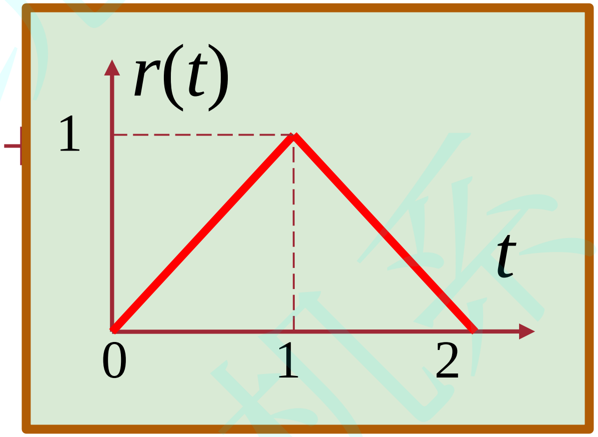
$$\frac{d}{dt}[\sin t\cdot u(t)]=\cos t\cdot u(t)+\sin t\cdot\delta(t)=\cos t\cdot u(t)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}[\sin t\cdot u(t)]=-\sin t\cdot u(t)+\cos t\cdot\delta(t)=-\sin t\cdot u(t)+\delta(t)$$

因此 $\delta(t)=\dfrac{d^2}{dt^2}\left[\sin t\cdot u(t)\right]+\sin t\cdot u(t)$

$$h(t)=\delta(t)*h(t)=\left[\frac{d^2\sin t\cdot u(t)}{dt^2}+\right.$$

$$=\left[\frac{d^2\sin t\cdot u(t)}{dt^2}\right]*h(t)+\left[\sin\right.$$



$$\frac{d^2}{dt^2}\left[\sin t\cdot u(t)*h(t)\right]$$

$$=\frac{d^2r(t)}{dt^2}+r(t)$$