第十六周作业

11.1 已知模拟滤波器的系统函数为 $H_a(s)=\frac{3}{(s+1)(s+3)}$，试用冲激响应不变法求出相应的数字滤波器的系统函数 $H_d(z)$，并写出递归算式. 设定抽样周期 $T_s=0.5\text{s}$.

$$H_a(s)=\frac{3}{(s+1)(s+3)}=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+3}\right)$$

$$\therefore H_d(z)=\frac{3}{2}\left(\frac{z}{z-e^{-0.5}}-\frac{z}{z-e^{-1.5}}\right)$$

$$=\frac{\frac{3}{2}z(e^{-0.5}-e^{-1.5})}{z^2-(e^{-0.5}+e^{-1.5})z+e^{-2}}$$

$$=\frac{\frac{3}{2}z^{-1}(e^{-0.5}-e^{-1.5})}{1-(e^{-0.5}+e^{-1.5})z^{-1}+e^{-2}z^{-2}}$$

$$\therefore r_d(n)-(e^{-0.5}+e^{-1.5})r_d(n-1)+e^{-2}r(n-2)=\frac{3}{2}(e^{-0.5}-e^{-1.5})e_d(n-1)$$

修正后：$$H_d(z)=\frac{\frac{3}{4}(e^{-0.5}-e^{-1.5})z^{-1}}{1-(e^{-0.5}+e^{-1.5})z^{-1}+e^{-2}z^{-2}}$$

$$\therefore r_d(n)-(e^{-0.5}+e^{-1.5})r_d(n-1)+e^{-2}r(n-2)=\frac{3}{4}(e^{-0.5}-e^{-1.5})e_d(n-1)$$

11.2 巴特沃兹低通滤波器容差要求如下：$\omega_p=10^4\pi\text{rad/s}$ 时，$\alpha_p\leqslant 3\text{dB}$；$\omega_c=5\times10^4\pi\text{rad/s}$ 时，$\alpha_c\geqslant 40\text{dB}$；抽样周期 $T_s=10\mu\text{s}$. 用双线性变换法求出数字滤波器的系统函数 $H_d(z)$.

$$\begin{cases}10\ \ln\left[1+\left(\frac{w_p}{w_c}\right)^{2n}\right]\le 3\\ 10\ \ln\left[1+\left(\frac{w_p}{w_c}\right)^{2n}\right]\geqslant 10\end{cases}\Rightarrow\left(\frac{w_p}{w_c}\right)^{2n}\geqslant\frac{10^{\frac{3}{10}}-1}{10^{\frac{40}{10}}-1}$$

$$\therefore n\geqslant\frac{1}{2}\frac{\lg\frac{10^{\frac{3}{10}}-1}{10^4-1}}{\lg\frac{10^4\pi}{5\times10^4\pi}}=2.863$$

取 $n=3$

$$\therefore H_a(s')=\frac{1}{(s')^3+2(s')^2+2(s')+1}$$

$$H_a(s)=\frac{w_c^3}{s^3+2s^2w_c+2sw_c^2+w_c^3}$$

$$H_d(z)=H_a(s)\Big|_{s=\frac{2}{T_s}\frac{z-1}{z+1}}$$ 代入即可

11.3 已知两个连续系统的系统函数 $H_{a1}(s)=\frac{1}{s+a}(a>0)$ 和 $H_{a2}(s)=\frac{s+a}{(s+a)^2+\left(\frac{2\pi}{T_s}\right)^2}(a>0)$，用冲激响应不变法将它们转换为离散系统（$T_s$ 为抽样间隔），试证明两离散系统具有相同的系统函数，即 $H_{d1}(z)=H_{d2}(z)$. 从物理概念上解释这一结果.

$$h_{a1}(t)=e^{-at}$$

$$h_{a2}(t)=e^{-at}\cos\left(\frac{2\pi}{T_s}t\right)$$

$$\therefore h_{d1}(n)=T_s\cdot e^{-aT_s n}$$

$$h_{d2}(n)=T_s\cdot e^{-aT_s n}\cos(2\pi n)$$

$$=T_s\cdot e^{-aT_s n}=h_{d1}(n)$$ 证毕

物理解释：$h_{a2}(t)$ 相当于 $h_{a1}(t)$ 的幅值用一个余弦信号调制，但由于每次抽样都恰好取到最大值处，故 $h_{d1}(n)=h_{d2}(n)$

补充题：理想高通滤波器，其系统函数为

$$H(\omega)=\begin{cases}e^{-j\omega t_0} & (|\omega|\geq\omega_c)\\ 0 & (|\omega|<\omega_c)\end{cases}$$

式中，ω_c为截止频率，t_0为延迟时间。求该系统的冲激响应$h(t)$。

令 $H_1(w)=e^{-jwt_0}$, $w\in R$

$$H_2(w)=\begin{cases}e^{-jwt_0}, & |w|\geqslant w_c\\ 0, & |w|\geqslant w_c\end{cases}$$

$$\therefore H(w)=H_1(w)-H_2(w)$$

而 $h_1(t)=\delta(t-t_0)$

$$2\pi h_2(-w)=2w_c\,Sa[(w+t_0)w_c]$$

$$\therefore h_2(t)=\frac{w_c}{\pi}Sa[(t-t_0)w_c]$$

$$\therefore h(t)=h_1(t)-h_2(t)=\delta(t-t_0)-\frac{w_c}{\pi}Sa[(t-t_0)w_c]$$