

互感的定义：

回路1的电流 I_1 产生的与回路2交链的磁链 ψ_{21} 除以 I_1 称为回路1对回路2的互感，即：

$$M_{21} = \frac{\psi_{21}}{I_1}$$

回路2的一个小面积 dS 上的磁链等于该面积上的磁通 $d\Phi$ 乘其磁力线所交链的回路2的匝数。

同理有回路2对回路1的互感：

$$M_{12} = \frac{\psi_{12}}{I_2}$$

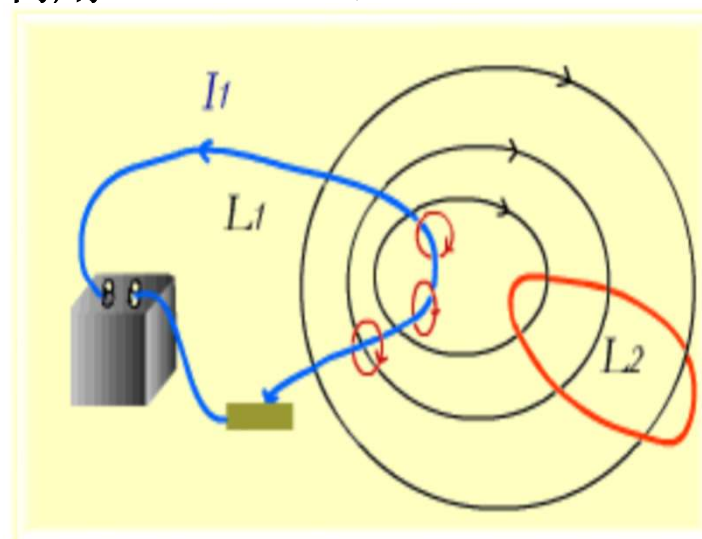
实际上有： $M_{12} = M_{21}$

自感定义式取的是磁通与电流方向成右手螺旋关系。互感由于电流与磁通是两个回路，难以定义方向关系，只能借助两个回路的自感来定义互感磁通与电流的方向，由此产生“同名端”的概念。互感定义式中的电流和磁通方向应符合同名端约束，即两个电流在一个回路中产生的磁通同向。在此约束下互感为正值。

作业：

习题： 45、46（可按无限长线圈计算）

习题： 54（必须视为无限长螺线管才能解，利用 $B_{1n} = B_{2n}$ 。）



电流 I_1 产生与回路2交链的磁链

互感计算通式——诺以曼公式

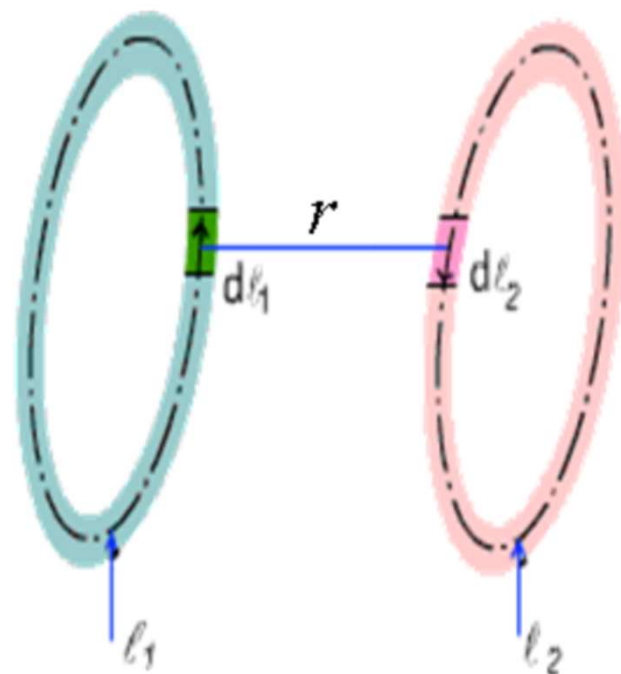
类似于前面任意闭合回路的外电感公式，

若设回路 l_1 通电流 I_1 ，则回路 l_2 围成的曲面的磁通为：

$$\Phi_{21} = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint_{l_2} \oint_{l_1} \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{r}$$

$$M_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{l_2} \oint_{l_1} \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{r}$$

$$\begin{aligned} M_{21} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{l_2} \oint_{l_1} \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{r} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{l_1} \oint_{l_2} \frac{d\mathbf{l}_2 \cdot d\mathbf{l}_1}{r} = M_{12} \end{aligned}$$



以上是 $M_{12}=M_{21}$ 的证明方法。

对于螺线管线圈也如此，沿两线圈导线中心线积分可得互感。这样的积分直接所得就是磁链，就不需要由磁通计算磁链了。

当然，若场域中有非线性磁媒质，互感无定值，且 $M_{12} \neq M_{21}$ 。

例：交流电流互感器（用途是电磁感应法测量交流电流）

交流电流互感器的原理：电磁感应定律，或

$$\dot{U}_2 = j\omega M_1 \dot{I}_1 \quad U_2 = \omega M_1 I_1$$

测得二次线圈上的感应电压，计算出互感 M ，便可得到一次绕组中电流。实际中是测二次侧的短路电流，二次侧开路时电压太高。通常一次侧为一根长直导线（或很少几匝构成的绕组）。

对于图示互感器，计算中间长直导线（认为在无限远处闭合）与外面二次绕组的互感，绕组匝数为 N ，铁芯磁导率为 μ 。

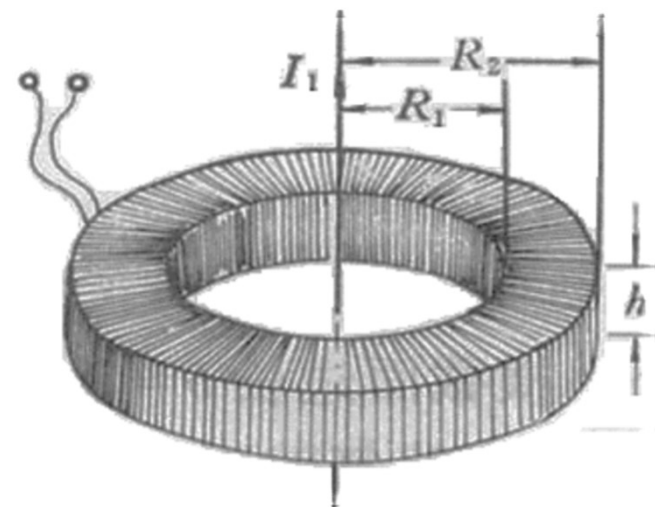
解：设一次导线中的电流为 I_1 ，其在二次绕组内距离轴心 r 处产生的磁场为：

$$H_\alpha = I_1 / (2\pi r)$$

二次绕组截面上的磁链为：

$$\psi_{21} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu I_1}{2\pi r} N h dr = \frac{\mu I_1 N h}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

$$M_{21} = \frac{\mu N h}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$



交流电流互感器结构

为测量一次侧电流，一次侧导线不位于中心线上测得的结果还准确吗？或问导线位于不同地方所测电流相同吗？**基本相同。**

下面进行证明，只要证明导线位于不同位置处互感相同即可。

设一次导线中的电流为 I ，其在二次绕组上的磁链如何计算？

I 不在中心时需计算每匝的磁通然后求和。故计算 M_{21} 太复杂。

转而计算 M_{12} 会变得很简单。

设在二次导线中加电流 I_2 ，其产生的磁通 Φ_{12} 大都在二次绕组内，外部几乎没有磁通。因此，该磁通就是一次侧线圈所交链的磁通，故 $M_{12} = \psi_{12}/I_2$ 。 I_2 在离轴心 r 处产生的磁场为：

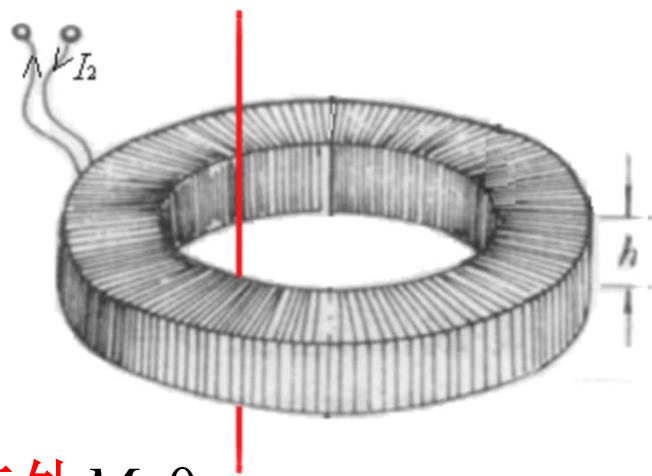
$$H_{\alpha} = NI_2 / (2\pi r)$$

二次绕组截面上的磁链为：

$$\psi_{12} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu NI_2}{2\pi r} h dr = \frac{\mu I_2 N h}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

$$M_{12} = \frac{\mu N h}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1} = M_{21}$$

若导线在外 $M=0$

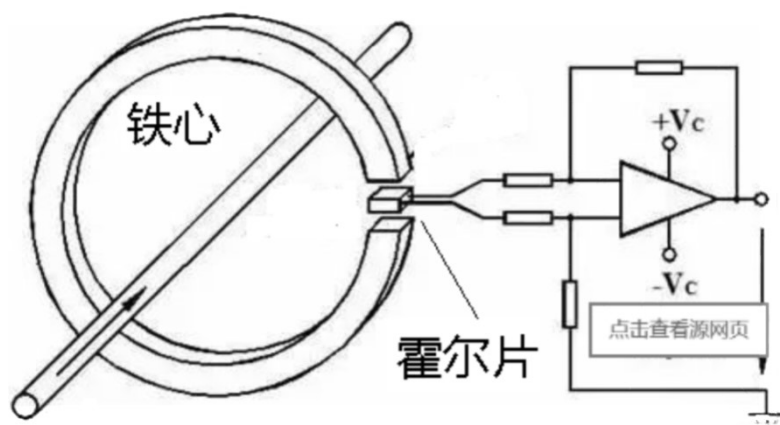


如何利用霍尔元件测量电流？（扩充内容）

测电流的钳形表的原理：铁芯内的磁通与其内导线位置无关。

为何？ 可以判断 I 不在中心时铁芯内有一根根闭合圆形磁力线！
磁通就像闭合的导体内的电流“流动”一样。

沿一磁力线对磁场 H 的环路积分等于其内的电流，无论其在什么位置。所以加装有铁芯的霍尔元件电流互感器的电流测量值基本不受其内导线位置的影响。



霍尔互感器原理图



钳形探头、表



线圈式电流互感器

第10节 磁场能量

- 在线圈中的电流建立过程中，电流变化会产生感应电动势，其作用是阻止电流增加。为使电流增加需要施加电压源。
- 在理想情况下，电源提供的功率或能量一半被系统中的电阻损耗，另一半转换成了磁场能量。
- 该一半一半关系在电路的 RL 电路过渡过程中已证明。无论电阻多大都是一半一半关系。这种储能的效率最高为**50%**。
- 下面仅分析建立磁场能量的功率，不考虑电阻的损耗。
- 磁场能量共有三种表示形式：

(1) 用电感与电流表示；对一个线圈： $W_m = \frac{1}{2} I^2 L$

(2) 用电感与磁链或磁链与电流；对一个线圈： $W_m = \frac{1}{2} \frac{\psi^2}{L} = \frac{1}{2} \psi I$

(3) 用矢量磁位与电流密度表示： $W_m = \frac{1}{2} \iiint_V \mathbf{A} \cdot \mathbf{J} dV$

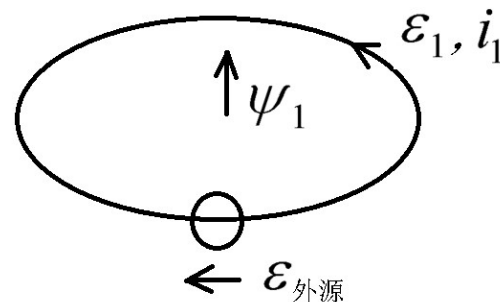
(4) 用场强表示（各场点的能量密度）： $W_m = \frac{1}{2} \iiint_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} dV$

对于两个线圈或回路（这里用到了电磁感应定律的概念）：

第一步：让回路1的电流从 $0 \rightarrow I_1$ ，而回路2中 $I_2=0$ 保持不变。

I_1 变化中，在回路1、2中的感应电动势：

$$\varepsilon_{11} = -\frac{d\psi_{11}}{dt} \quad \varepsilon_{21} = -\frac{d\psi_{21}}{dt}$$



外电源需克服回路的感应电动势，两个电源提供的能量为：

$$dW_1 = u i dt = (-\varepsilon_{11}) i_1 dt = \frac{d\psi_{11}}{dt} i_1 dt = i_1 d\psi_{11}$$

$$dW_2 = i_2 d\psi_{21} = 0 \times d\psi_{21} = 0$$

从 $0 \rightarrow I_1$ 整个过程中，外源提供的能量为（对线性电感）：

$$W' = W_1 + W_2 = \int_0^{I_1} i_1 d\psi_{11} = \int_0^{I_1} i_1 L_1 di_1 = \frac{1}{2} L_1 I_1^2$$

其实这就是仅一个线圈情况下，自感储能的大小。

第二步：让回路2的电流从 $0 \rightarrow I_2$, I_1 保持不变。

回路1、2中的感应电动势： $\varepsilon_{12} = -\frac{d\psi_{12}}{dt}$ $\varepsilon_{22} = -\frac{d\psi_{22}}{dt}$

外电源需克服回路的感应电动势，两个电源提供的能量为：

$$dW_1 = (-\varepsilon_{12})I_1 dt = \frac{d\psi_{12}}{dt} I_1 dt = I_1 M_{12} di_2 \quad dW_2 = \frac{d\psi_{22}}{dt} i_2 dt = L_2 i_2 di_2$$

从 $0 \rightarrow I_2$ 整个过程中，外源提供的能量为：

$$W'' = W_1 + W_2 = I_1 M_{12} \int_0^{I_2} di_2 + L_2 \int_0^{I_2} i_2 di_2 = M I_1 I_2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2$$

两回路电流增加到 I_1 和 I_2 整个过程中，能量的总值为：

$$W_m = W' + W'' = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M I_1 I_2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 L_i I_i^2 + \frac{1}{2} M_{12} I_1 I_2 + \frac{1}{2} M_{21} I_2 I_1$$

第三步：让回路3的电流从 $0 \rightarrow I_3$, I_1 和 I_2 保持不变，

$$W''' = \frac{1}{2} L_3 I_3^2 + M_{13} I_1 I_3 + M_{23} I_2 I_3$$

n 个回路磁场能量:

$$W_m = \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n L_k I_k^2}_{\text{自有能}} + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n M_{kj} I_k I_j}_{k \neq j, \text{互有能}}$$

取线圈 k 遍历自己
和其它线圈

$$\psi_{kj} = M_{kj} I_j$$

将线圈 k 的电流与其自感
或互感的乘积变为磁链

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \psi_{kk} I_k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \underbrace{\psi_{kj} I_k}_{k \neq j} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n I_k \psi_k$$

ψ_k 为所有回路（含自己回路）的电流在回路 k 中产生的磁链。
当两个载流线圈产生的磁通是相互增加的，互有能为正；
反之为负。

$L_k I_k^2 / 2$ 是回路 k 单独存在时的能量，对于单一回路有：

$$W_m = \frac{1}{2} L I^2 \quad \Rightarrow \quad L = \frac{2W_m}{I^2}$$

磁场能量的分布及磁场能量密度

将磁链用磁矢量位 A 表示，则磁场能量 W_m 可表示为：

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n I_k \psi_k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \oint_{l_k} I_k A \cdot d\mathbf{l}_k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \oint_{l_k} A \cdot I_k d\mathbf{l}_k$$

对体电流分布， $I_k d\mathbf{l}$ 变为 $\mathbf{J}dV$ ，线积分变体积分，则用矢量位 A 与电流密度 \mathbf{J} 表示的磁场能量为：

$$W_m = \frac{1}{2} \iiint_V A \cdot \mathbf{J} dV$$

V 扩展成整个场域公式仍成立。

利用 \mathbf{H} 的旋度方程与恒等式： $\nabla \cdot (\mathbf{H} \times \mathbf{A}) = \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{H} - \mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{A}$

$$\begin{aligned} W_m &= \frac{1}{2} \int_V A \cdot \nabla \times \mathbf{H} dV = \frac{1}{2} \int_V \nabla \cdot (\mathbf{H} \times \mathbf{A}) dV + \frac{1}{2} \iiint_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} dV \\ &= \frac{1}{2} \oiint_S (\mathbf{H} \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} + \frac{1}{2} \iiint_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} dV \end{aligned}$$

对于开域或磁力线围成的区域（可设 $A=0$ ），能量及其密度为：

$$W_m = \frac{1}{2} \iiint_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} dV = \iiint_V w_m dV$$

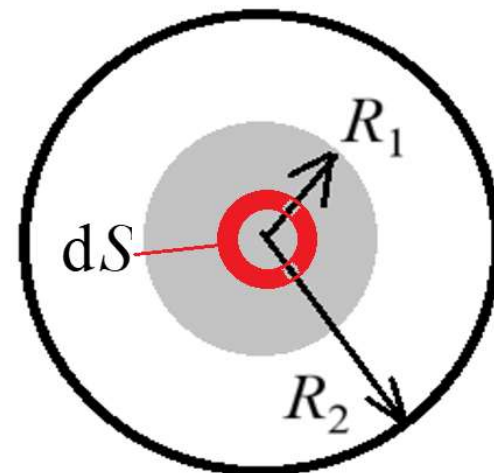
$$w_m = \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{2} \mu H^2 = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu}$$

例：内外导体半径分别为 R_1 与 R_2 的同轴电缆，通有电流 I ，求单位长电缆储存的磁场能量与自感。(设外皮无限薄)

解：由安培环路定律，得

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2\pi r} \frac{\pi r^2}{\pi R_1^2} I \mathbf{e}_\varphi = \frac{rI}{2\pi R_1^2} \mathbf{e}_\varphi \quad 0 < r < R_1$$

$$\mathbf{H} = \frac{I}{2\pi r} \mathbf{e}_\varphi \quad R_1 < r < R_2$$



极坐标下有：
 $dS = 2\pi r dr$

$$\begin{aligned} \text{对芯线: } W_{mi} &= \frac{1}{2} \iiint_V \mu_0 H^2 dV = \frac{\mu_0}{2} \int_0^{R_1} \left(\frac{rI}{2\pi R_1^2} \right)^2 2\pi r dr \\ &= \frac{\mu_0 I^2}{4\pi R_1^4} \int_0^{R_1} r^3 dr = \frac{\mu_0 I^2}{16\pi} \quad L_i = \frac{2W_{mi}}{I^2} = \frac{\mu_0}{8\pi} \end{aligned}$$

$$\text{芯线与外皮间: } W_{mo} = \frac{\mu_0}{2} \int_{R_1}^{R_2} \left(\frac{I}{2\pi r} \right)^2 2\pi r dr = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

$$\text{总自感为 } L = \frac{\mu_0}{8\pi} + \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

避免了磁链的计算！

第11节 磁场力

磁场和磁场能量的效应是对载流导体或运动电荷有作用力。类似电场力，磁场力的计算也有两种方法：

1. 安培力或洛仑兹力定义法；
2. 虚位移法(能量对广义位移坐标求导)。

1. 安培力(洛伦兹力)法

载有电流 I 的导体在磁场 \mathbf{B} 下所受的力为：

$$\mathbf{F} = \int_l I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$$

力的方向为左手定则

此处的 \mathbf{B} 为移走电流 I 后的磁密。

例：近似计算两块通有电流 I 的大平行板间的相互作用力。
 （设板的宽度 a 与长度 b 远大于间距 d ，可忽略端部效应）

解：由安培力定律，先求仅有A板时产生的磁场。
 磁力线为平行于 y 轴的直线，且磁场可认为各处相等。
 做一个矩形框作为安培环路，矩形的两条边平行于 y 轴、边长为 l ，分别位于 $x=d$ 与 $x=-d$ ，另外两条边平行于 x 轴，则有：

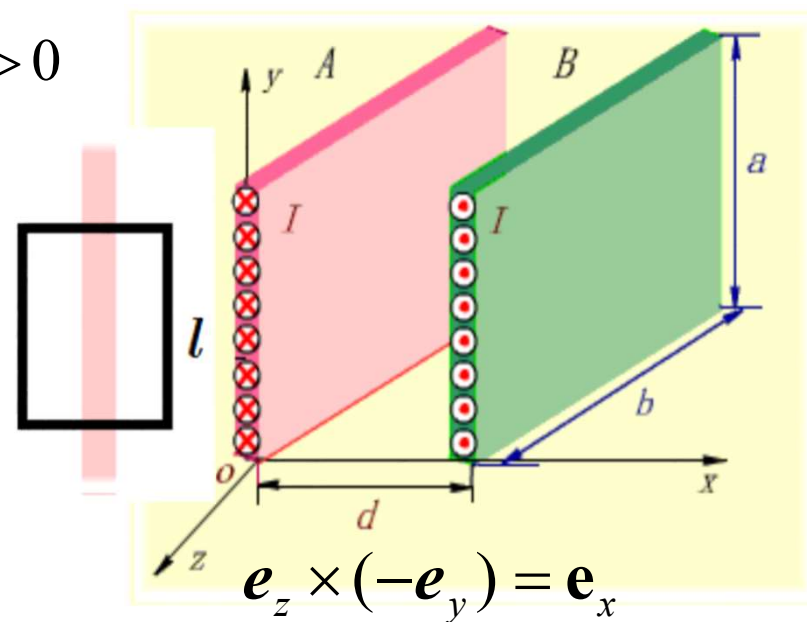
$$2lH_1 = \frac{I}{a}l \quad \mathbf{H}_1 = \frac{I}{2a}(-\mathbf{e}_y) \quad x > 0$$

B板高 dy 、长 b 的电流受力为：

$$d\mathbf{F}_x = \frac{I}{a} dy b \mathbf{e}_z \times \mathbf{B}_1 = \frac{\mu_0 b I^2}{2a^2} dy \mathbf{e}_x$$

$$\mathbf{F}_B = \int_0^a \frac{\mu_0 b I^2}{2a^2} dy \mathbf{e}_x = \frac{\mu_0 b I^2}{2a} \mathbf{e}_x$$

力的方向是排斥力，使电感增加的方向（此具有普遍性）。



2. 虚位移法

若各绕组中接有电流源保持电流不变，在发生位移 dg 的过程中，系统中的功能关系为：

$$dW = dW_m + fdg$$

绕组电流源的电压为绕组磁链的变化率，一个绕组的电源的功率和提供的能量为：

$$p = ie = i \frac{d\psi}{dt} \quad dW = p dt = i d\psi$$

而一个线圈的磁场能增加为： $dW_m = \frac{1}{2} i d\psi$

故： $dW = 2dW_m$

所以有： $2dW_m = dW_m + fdg$

因此有磁场力： $f = \left. \frac{\partial W_m}{\partial g} \right|_{I_k = \text{常量}}$

若没接电源，磁场能减小则要么电流减小，要么磁链减小，或同时减小。

韦伯指出是磁链守恒保持不变，系统的能量平衡关系为：

磁场做功 = 磁场能减小量： $f dg = -dW_m \Big|_{\psi_k = \text{常量}}$

因此有磁场力： $f = -\frac{\partial W_m}{\partial g} \Big|_{\psi_k = \text{常量}}$

由于 $W_m = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} \frac{\Psi^2}{L}$

则无论电流还是磁链保持恒定，一个回路的受力均为：

$$f = \frac{1}{2} I^2 \frac{\partial L}{\partial g}$$

受力方向使得电感增加

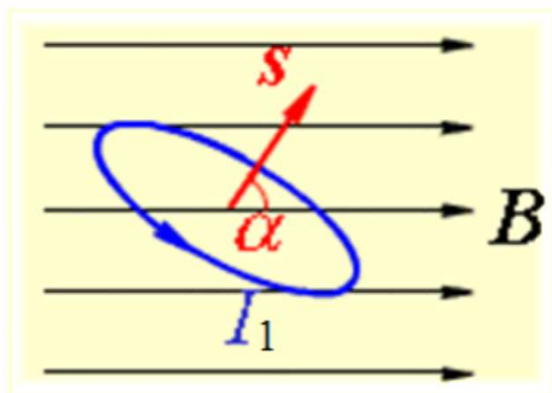
由两个回路的能量 $W_m = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M I_1 I_2$

可得两个回路的相互作用力（回路不变形）为：

$$f = I_1 I_2 \frac{\partial M}{\partial g}$$

两电流必须是同名端流入。
受力方向使得互感增加。

例（教材例3-53）：求图示载流线圈在均匀磁场中受到的转矩。设线圈中的电流为 I_1 ，线圈的面积为 S ，其法线方向与外磁场 B 的夹角为 α 。



外磁场中的电流回路

解：系统的相互作用能量为

$$W_{mM} = M I_1 I_2 = I_1 \psi_{12} = I_1 B S \cos \alpha$$

选 α 为广义坐标，对应的广义力是转矩，则有

$$T = \frac{\partial W_{mM}}{\partial \alpha} \Big|_{I_1 = \text{常量}} = -I_1 B S \sin \alpha$$

使 α 减小

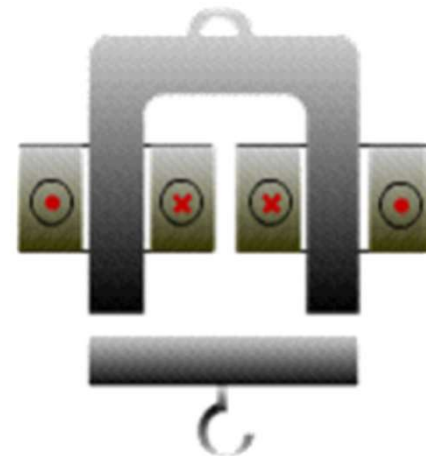
例（教材例3-23）求电磁铁对衔铁的吸力。已知铁心端部的面积为 S ，一侧空气隙长 l 和一侧安匝数为 NI 。

解：由于铁心磁导率远大于空气，近似认为铁心内的 H 为零。由此得空气中的 H 为：

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = Hl = NI \quad H = NI/l$$

一侧气隙中的磁场能量为： $W_m = \frac{1}{2} BHV = \frac{1}{2} \mu_0 H^2 Sl$

$$f = -\frac{dW_m}{dl} \Big|_{\psi=\text{const}} = -\frac{1}{2} \mu_0 H^2 S = -\frac{1}{2} \mu_0 \left(\frac{NI}{l} \right)^2 S \quad \begin{array}{l} \text{负号表示使} l \text{减小。} \\ \text{合力为两侧力之和。} \end{array}$$



对于界面上只有磁场的法向或切向的情况，界面一侧所受的单位面积的磁场力等于磁场的能量密度，即

$$f_{\text{面}} = \frac{1}{2} BH = \frac{1}{2} \mu H^2 = \frac{B^2}{2\mu}$$

本章请自己参考教材的提要进行总结。