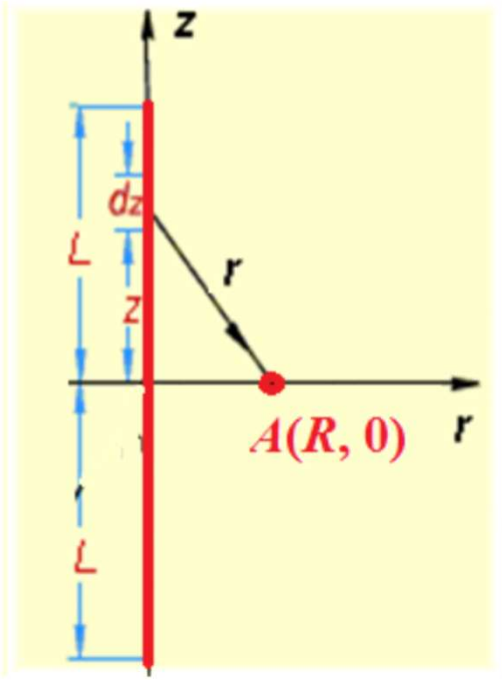
例3：空气中一个载流闭合回路的一部分为直线，求该直线部分在其中平面上的磁矢量位 $\boldsymbol{A}$。

解：$\boldsymbol{A}$与电流同方向，所以$\boldsymbol{A}(r, z)=A_z(r, z)\,\boldsymbol{e}_z$，设无限远处为参考点，则有：

$$\boldsymbol{A}(r,z)=A_Z\boldsymbol{e}_z=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-L}^{L}\frac{dz}{r}\boldsymbol{e}_z=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-L}^{L}\frac{\mathrm{d}z}{(R^2+z^2)^{1/2}}\boldsymbol{e}_z$$

$$=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\frac{L+\sqrt{R^2+L^2}}{R}\boldsymbol{e}_z$$

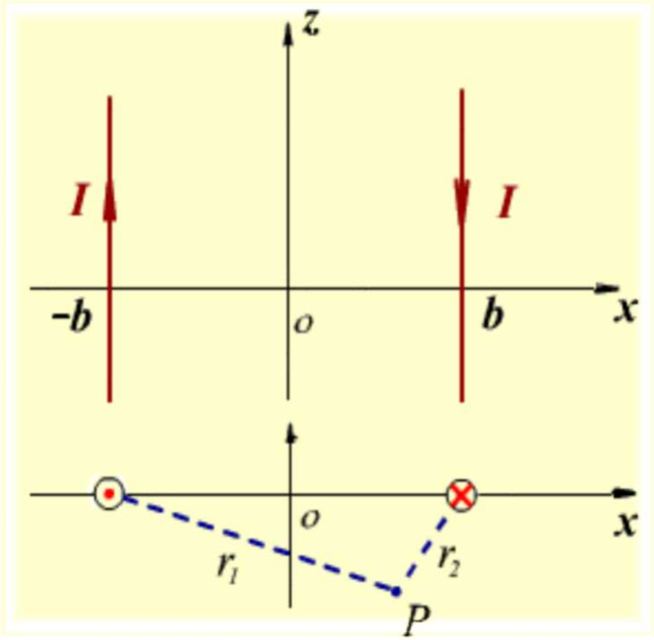


当$L>>R$时，$\boldsymbol{A}=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\dfrac{2L}{R}\boldsymbol{e}_z$

L不能为无限大。若L为无限大则不能取无限远处$\boldsymbol{A}$为零，可取任一点$\boldsymbol{r}_0$处为0，则各点都减去$\boldsymbol{r}_0$处的磁位有：

$$\boldsymbol{A}=\frac{\mu_0 I}{2\pi}[\ln\frac{2L}{R}-\ln\frac{2L}{r_0}]\boldsymbol{e}_z=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\frac{r_0}{R}\boldsymbol{e}_z \quad \text{与}L\text{无关}$$

例4：求两无限长输电线的磁矢量位。



解：由上例单根长直导线的结果，可得两长直导线在P点的磁矢量位：

$$\boldsymbol{A}_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\frac{r_{01}}{r_1}\boldsymbol{e}_z$$

$$\boldsymbol{A}_2 = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\frac{r_{02}}{r_2}\boldsymbol{e}_z$$

设参考点在中间面上，则有$r_{01}=r_{02}$，故有：

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\frac{r_2}{r_1}\boldsymbol{e}_z$$

与$\boldsymbol{A}$反向的电流导线距离r_2在分子上。

此为两无限长输电线的磁矢量位。此公式直接用。

重申：利用磁矢量位A求磁通

$$\Phi=\int_s \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S}=\int_s(\nabla\times\boldsymbol{A})\cdot d\boldsymbol{S}=\oint_l \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l}\quad (\text{Wb})$$

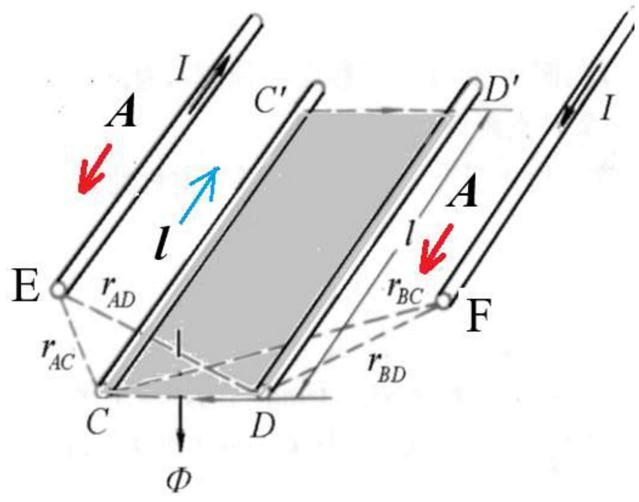
利用$\boldsymbol{A}$计算磁通比利用$\boldsymbol{B}$计算磁通要简单得多。

计算磁通是求电感的基础。

例5： 一对传输线E、F中通有电流I。计算其在另一对传输线C、D之间的面积上产生的磁通（长度为l），磁通方向(向下)如图。

一对传输线产生的$\boldsymbol{A}$为：$\boldsymbol{A}=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\dfrac{r_2}{r_1}\boldsymbol{e}_z$ （设方向向外 ）

磁通面积$\boldsymbol{S}$对应的边界$\boldsymbol{l}$及方向为顺时针：C-C′-D′-D-C。设磁矢量位$\boldsymbol{A}$的方向与右侧电流同向(向外)。磁位$\boldsymbol{A}$与边C′-D′和D-C垂直，故对$\boldsymbol{A}$的线积分为零，只剩下两轴向上$\boldsymbol{A}$的积分：



$$\Phi=\oint_l \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l}=-A_C l+A_D l$$ 此处的电流与$\boldsymbol{A}_C$反向

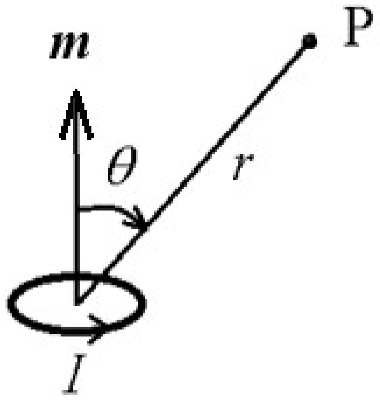
$$=-\left(\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\frac{r_{AC}}{r_{BC}}\right)l+\left(\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\frac{r_{AD}}{r_{BD}}\right)l=\frac{\mu_0 Il}{2\pi}\ln\frac{r_{AD}r_{BC}}{r_{AC}r_{BD}}$$

扩充内容：磁偶极子的A以及等效磁化电流密度的推导

称小圆环电流为磁偶极子，定义磁偶极矩$\boldsymbol{m}=I\boldsymbol{S}$。在球坐标系下，其产生的$\boldsymbol{B}$的近似表达式(教材式3-28)：$\boldsymbol{B}_{\mathrm{P}}=\dfrac{\mu_0 m}{4\pi r^3}(2\cos\theta\boldsymbol{e}_r+\sin\theta\boldsymbol{e}_\theta)$

其产生的$\boldsymbol{A}$为：$\boldsymbol{A}_{\mathrm{P}}=\dfrac{\mu_0 I}{4\pi}\oint_l\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}}{r}$

$$A_\alpha\approx\frac{\mu_0 m}{4\pi r^2}\sin\theta=\frac{\mu_0\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{r}^0}{4\pi r^2}$$ (参见冯慈璋编电磁场第二版142页)



在球坐标系下可验证：$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$

一个磁媒质体V'被磁化带有磁化强度$\boldsymbol{M}$后产生的$\boldsymbol{A}$：

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\iiint_{V'}\frac{\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}')\times|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^0\mathrm{d}V}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2}=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\iiint_{V'}\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}')\times\nabla'\frac{1}{R^2}\mathrm{d}V，\quad R=|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|$$

应用恒等式：$\boldsymbol{C}\times\nabla h=h\nabla\times\boldsymbol{C}-\nabla\times(h\boldsymbol{C})$ 和 $\iiint_V\nabla\times\boldsymbol{C}\mathrm{d}V=-\oiint_S(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{n})\mathrm{d}S$

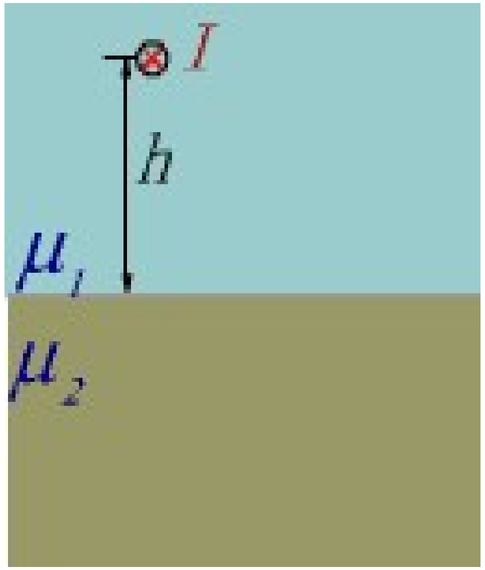
可得：
$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\iiint_{V'}\frac{1}{R}\nabla'\times\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}V-\frac{\mu_0 I}{4\pi}\iiint_{V'}\nabla'\times\frac{\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}')}{R}\mathrm{d}V$$
$$=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\iiint_{V'}\frac{\nabla'\times\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}')}{R}\mathrm{d}V-\frac{\mu_0 I}{4\pi}\oiint_S\frac{\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}')\times\boldsymbol{n}}{R}\mathrm{d}S$$

从上式可看出等效体电流密度和面电流密度为：$\boldsymbol{J}_m=\nabla\times\boldsymbol{M}$，$\boldsymbol{K}_m=\boldsymbol{M}\times\boldsymbol{n}$

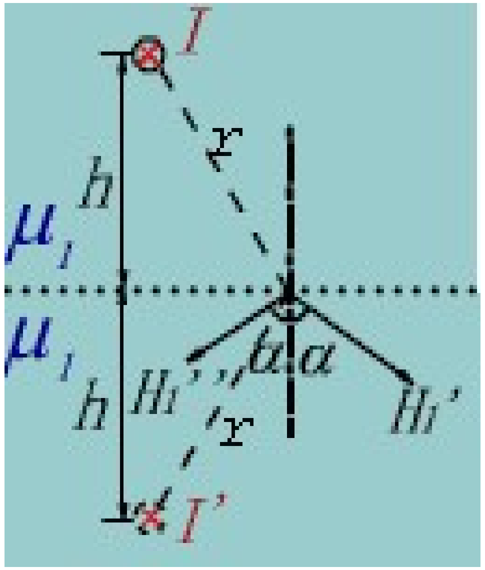
第8节 镜像法

作业：习题36（c、d）、39、40

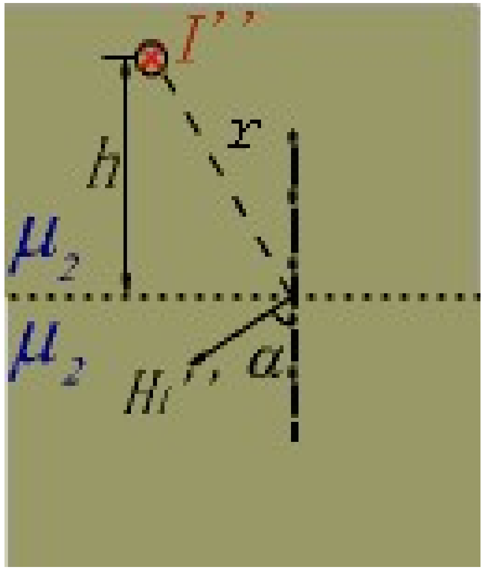
1. 两种半无限大磁媒质中长直线电流的镜像



原问题



求上半平面的镜像



求下半平面的镜像

$$H_{1t} = H_{2t} \qquad \frac{I}{2\pi r}\sin\alpha - \frac{I'}{2\pi r}\sin\alpha = \frac{I''}{2\pi r}\sin\alpha$$

$$B_{1n} = B_{2n} \qquad \mu_1\frac{I}{2\pi r}\cos\alpha + \mu_1\frac{I'}{2\pi r}\cos\alpha = \mu_2\frac{I''}{2\pi r}\cos\alpha$$

由以上两式得： $I' = \dfrac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1}I, \quad I'' = \dfrac{2\mu_1}{\mu_2 + \mu_1}I$

$$\frac{1}{\varepsilon} \leftrightarrow \mu$$

$$\sigma \leftrightarrow \mu$$

2. 半无限大理想磁媒质上方长直线电流的镜像

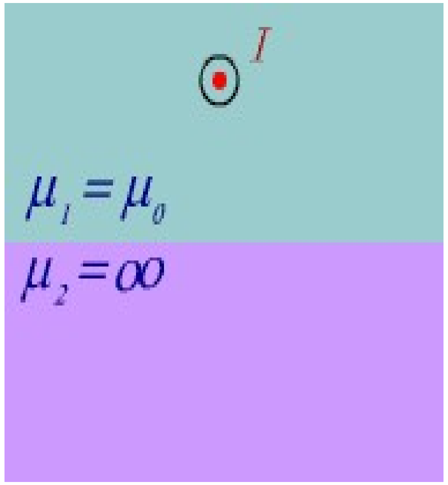
写出场的边值问题或由场分布特性分析边界条件：

空气侧***B***线垂直于分界面，B_t=0.

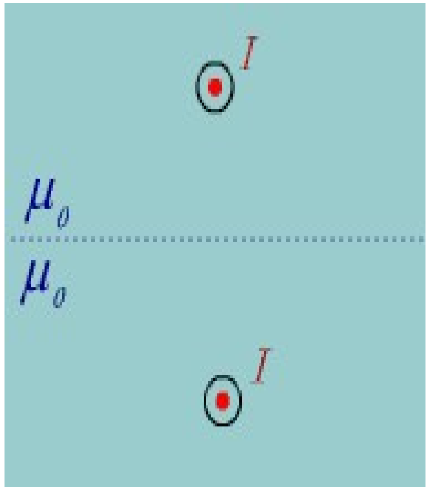
利用场分布特性B_t=0，很容易判断出应有I'=I。

将上面的区域**2**的磁导率设为无限大，区域**1** 为空气，则有：

$$I' = \frac{\mu_2 - \mu_0}{\mu_0 + \mu_2} I = I \qquad I'' = \frac{2\mu_0}{\mu_0 + \mu_2} I = 0$$



=



区域2中的***B***=0?

空气中 $\boldsymbol{B}_1=\frac{\mu_0}{2\pi}(\frac{I}{r_1}\boldsymbol{e}_{\alpha 1}+\frac{I'}{r_2}\boldsymbol{e}_{\alpha 2})$

空气中 ***B*** 线垂直于铁磁平板，在交界面上***B***有法向，所以铁磁板中的***B***不等于零，而是等于：

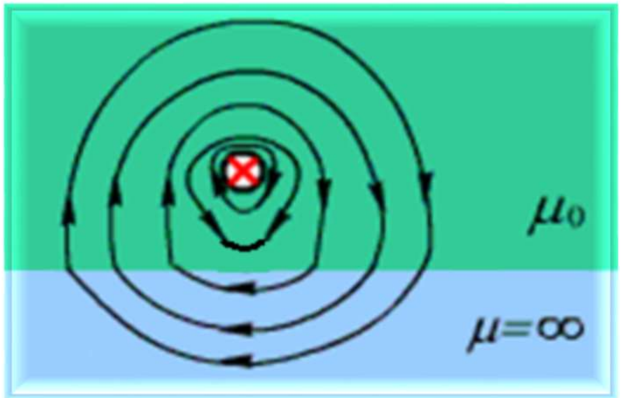
$$\boldsymbol{B}_2=\mu_2\boldsymbol{H}_2=\mu_2\frac{I''}{2\pi r}\boldsymbol{e}_{\alpha'}=\mu_2(\frac{2\mu_0}{\mu_0+\mu_2})\frac{I}{2\pi r}\boldsymbol{e}_{\alpha'}\overset{\mu_2\to\infty}{=}\frac{\mu_0 I}{\pi r}\boldsymbol{e}_{\alpha'}$$

$\mu_2\to\infty$，B_2 非零非无限大，

故H_2=$B_2/\mu_2=0$

3. 长直线电流位于半无限大
磁导率为无限大的材料中

模型太过理想化，故略去其分析。



B线

多选题 1分

设置

此题未设置答案，请点击右侧设置按钮

关于自感，下列说法是否正确?

1) 电感的定义是磁通除电流。

A 正确 B 不正确

2) 一个细导线绕成的空心线圈的电感值与频率有关。

C 正确 D 不正确

3) 一个铁心线圈的电感与电流有关。

E 正确 F 不正确

提交

第9节 电感(自感与互感)

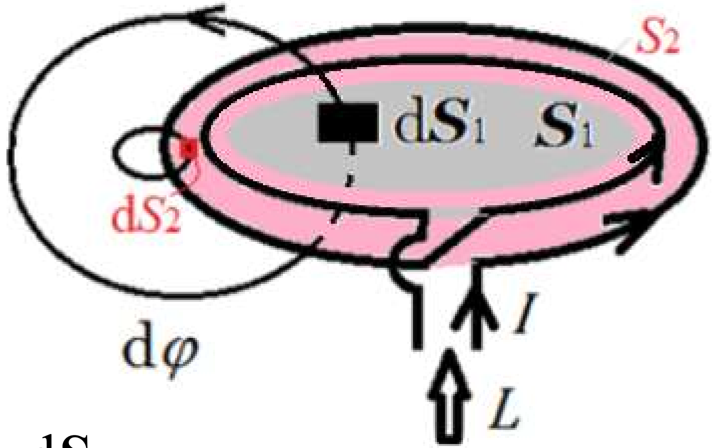
自感定义：回路电流I产生的磁链与该电流的比值称为自感：

$$L = \frac{\psi}{I}$$ 单位：亨利[H]。电感的属性是回路与磁链。

回路围成的面积上的磁链与电流成右手螺旋关系。电感值一定为正。

磁链ψ的定义：一个小面积d$\boldsymbol{S}$上的磁链等于该面积上的磁通dΦ乘其磁力线所交链的电流的个数$N_{\mathrm{d}\Phi}$，即：

$$\boxed{\mathrm{d}\psi = N_{\mathrm{d}\Phi}\mathrm{d}\Phi} = N_{\mathrm{d}\Phi}\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}$$



d$\boldsymbol{S}_1$对应的$\boldsymbol{N}_{\mathbf{d}\Phi1}$=2，而d$\boldsymbol{S}_2$对应的$\boldsymbol{N}_{\mathbf{d}\Phi2}$=1。求$\psi$时要对回路构成的面根据不同的$N_{\mathbf{d}\Phi}$分区积分，即：

$$\boxed{\psi = \sum_i \iint_{S_i} N_{\mathrm{d}\Phi i}\mathrm{d}\Phi} = \sum_i \iint_{S_i} N_{\mathrm{d}\Phi i}\boldsymbol{B}_i\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}$$

只有各匝导线都重合在一起时才有磁链等于磁通乘匝数：

$$\psi = N\Phi$$

- 在线性媒质中，L 仅与回路的几何尺寸、媒质参数有关，而与加不加电流无关。
- 对于有铁心构成的线圈之电感，其非线性程度一般较大，电感无定值，不给定电流就无法说电感值有多大。这是非线性电感或器件参数值的重要特性。如铁心式电抗器的电感值不定。
- 总磁链可分为位于导线内的磁通对应的磁链(或与导线中部分电流交链的磁链）和与全部电流交链的磁链，它们分别对应的电感称为内自感与外自感，即：

$$L_{\mathrm{i}} = \frac{\psi_{\mathrm{i}}}{I}$$:与部分电流交链的磁链除以总电流称为内自感。

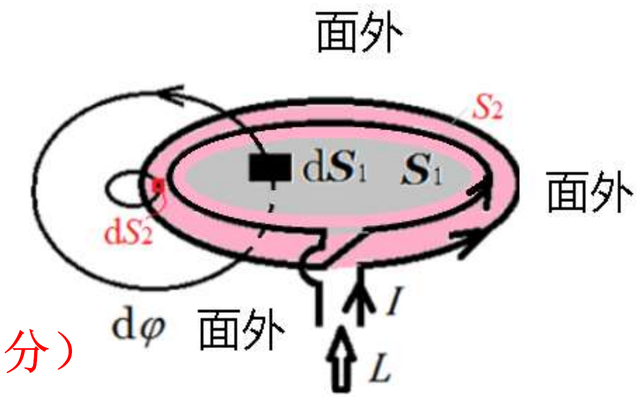
$$L_{\mathrm{o}} = \frac{\psi_{\mathrm{o}}}{I}$$:与全部电流交链的磁链除以总电流称为外自感。

总自感：$L = L_{\mathrm{i}} + L_{\mathrm{o}}$

时变电感一般要略小于直流电感，减小的部分主要是内电感，外电感随频率变化很小。原因：不同频率下导线内电流有趋肤现象，内部磁密变小，但外部磁密基本不变。

自感计算方法：

1）加电流求磁链法



$$I \rightarrow \boldsymbol{H} \rightarrow \boldsymbol{B} \rightarrow \Phi \rightarrow \psi \rightarrow L\,(\,L_i\,,\,L_0\,)$$

$\rightarrow \boldsymbol{A} \rightarrow$（先明确d$S$上的磁通与磁链再积分）

计算电感首先要明确回路，然后在回路中加电流I，画出有代表性的磁力线。由面上各处的磁力线与电流数的关系确定磁链计算区域。

电感定义式中的磁链可认为是回路围成的曲面上的磁链。

而由于磁通的连续性，该曲面外的总磁链与面上磁链一定相等。

求磁链时的面积是：所有磁力线都要穿过该面，且只穿过一次。

2）加电流求磁场能量法

$$W_m = \frac{1}{2}LI^2 \qquad L = \frac{2W_m}{I^2} \qquad W_m = \frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B}\,\mathrm{d}V$$

电感是储存磁场能的器件，将电感电流保持住就可储存能量，

当然这最好使用超导材料做成导线形成线圈，以减小损耗。

只要有导线、有回路就一定有电感，或者说只要有电流回路、

就有磁场能、就有电感。电感可能起好作用也可能起坏作用。

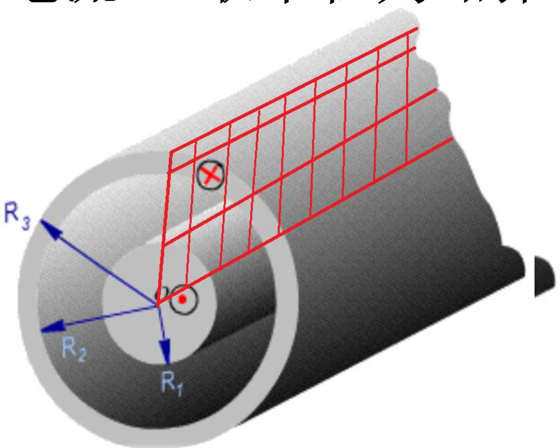
例1: 求同轴电缆单位长的电感L，芯线与外皮的磁导率为μ。

解：芯线与外皮形成回路，可认为是电缆端部的芯线与外皮引出两个端子，电缆的另一端芯线与外皮连接（短接或接电阻），电阻不影响电感值，忽略端部效应，或求电缆中间部位的单位长电感。芯线与外皮加反向电流I后，磁力线为圆，求磁通或磁链的面积是位于任意一条半径上的面，在电缆方向上单位长。

（回路）总自感 $L = L_{i1} + L_{i2} + L_o$

1) 芯线的内自感 L_{i1} $(0 \le r \le R_1)$ （习题**40**与此类似）

设电流I。取半径为r的圆为安培环路，则有：



同轴电缆截面

$$\oint_L \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = I' = \frac{I}{\pi R_1^2}\pi r^2 = \frac{I}{R_1^2} r^2$$

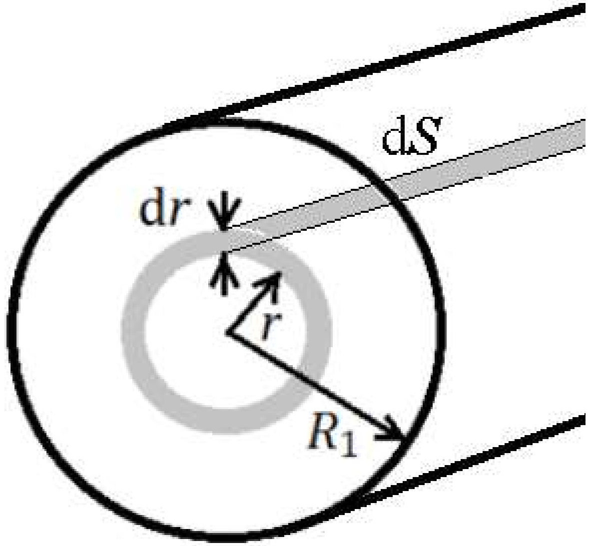
$$H = \frac{I}{2\pi R_1^2} r \qquad B = \frac{\mu I}{2\pi R_1^2} r$$

若求单位长的磁通对B从0到R_1积分即可。然而，现在是要求磁链。

先求：$\boxed{\mathrm{d}\psi = N_{\mathrm{d}\Phi}\mathrm{d}\Phi}$

求磁链

为求沿整个半径与电缆单位长的面积上的磁链，
设d$\boldsymbol{S}$为半径方向上的宽度dr乘单位长，
穿过dr处的磁力线所交链的电流“个数”为
（即包含的半径为r的圆截面中的电流占总
电流的比例，实为面积比）：



$$N = \frac{\pi r^2}{\pi R_1^2} = \frac{r^2}{R_1^2}$$

观察芯线截面

穿过宽度为dr、单位长度的矩形面积的
磁链为：

$$\mathrm{d}\psi = N_{\mathrm{d}\varphi}\mathrm{d}\Phi = N_{\mathrm{d}\varphi}\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{r^2}{R_1^2}\frac{\mu I\, r}{2\pi R_1^2}\mathrm{d}r\times 1 = \frac{\mu I\, r^3}{2\pi R_1^4}\mathrm{d}r$$

$$\psi_{\mathrm{i1}} = \int_0^{R_1}\frac{\mu I\, r^3}{2\pi R_1^4}\mathrm{d}r = \frac{\mu I}{8\pi}$$

芯线（导线）的内自感与半径无关，
无论多粗的导线内自感均相同。

内自感 $L_{\mathrm{i1}} = \dfrac{\psi_{\mathrm{i1}}}{I} = \dfrac{\mu}{8\pi}$

显然，芯线半径越大外自感越小，总
自感也越小。对线圈也近似如此。

2）外导体的内自感 L_{i2} $R_2 \le r \le R_3$

芯线与外皮的电流方向相反。

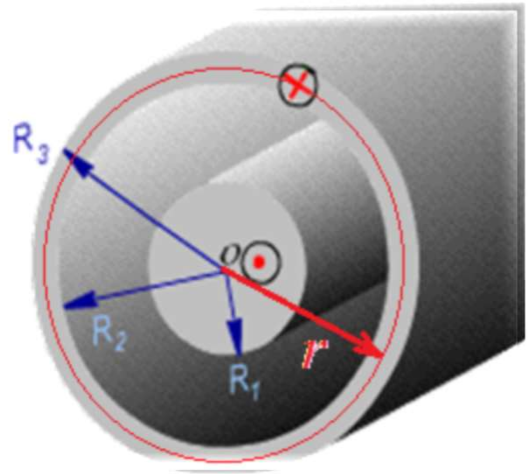
取半径为r的圆为安培环路，则该回路包含的电流为：

$$I' = I - I\left(\frac{\pi r^2 - \pi R_2^2}{\pi R_3^2 - \pi R_2^2}\right) = \frac{R_3^2 - r^2}{R_3^2 - R_2^2} I$$

由I'的表达式可得：

穿过半径上宽度为dr的磁力线所交链的电流“个数”为：

$$N = \frac{I'}{I} = \frac{R_3^2 - r^2}{R_3^2 - R_2^2}$$

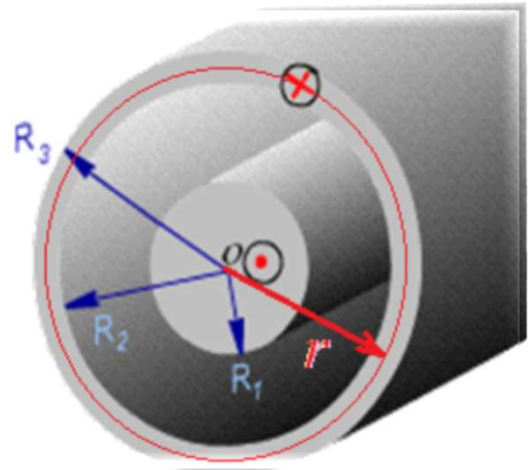


磁场强度：

$$H = \frac{I'}{2\pi r} = \frac{\left(\frac{R_3^2 - r^2}{R_3^2 - R_2^2}\right) I}{2\pi r} = \frac{I}{2\pi r}\left(\frac{R_3^2 - r^2}{R_3^2 - R_2^2}\right)$$

$$\mathrm{d}\psi = N_{\mathrm{d}\varphi}\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{R_3^{\,2}-r^2}{R_3^{\,2}-R_2^{\,2}}\frac{\mu I}{2\pi r}\left(\frac{R_3^2-r^2}{R_3^2-R_2^2}\right)\mathrm{d}r$$

$$= \frac{\mu I}{2\pi r}\frac{(R_3^{\,2}-r^2)^2}{(R_3^{\,2}-R_2^{\,2})^2}\mathrm{d}r \qquad N = \frac{R_3^{\,2}-r^2}{R_3^{\,2}-R_2^{\,2}}$$



$$L_{i2} = \frac{\psi}{I} = \frac{1}{I}\int_{R_2}^{R_3}\frac{\mu I}{2\pi r}\cdot\left(\frac{R_3^2-r^2}{R_3^2-R_2^2}\right)^2 dr$$

$$= \frac{\mu}{2\pi}\left(\frac{R_3^2}{R_3^2-R_2^2}\right)^2\ln\frac{R_3}{R_2} - \frac{\mu R_3^2}{2\pi(R_3^2-R_2^2)} + \frac{\mu(R_3^2+R_2^2)}{8\pi(R_3^2-R_2^2)}$$

3）内、外导体间的外自感 $L_{\mathrm{o}} \quad (R_1 < r < R_2)$

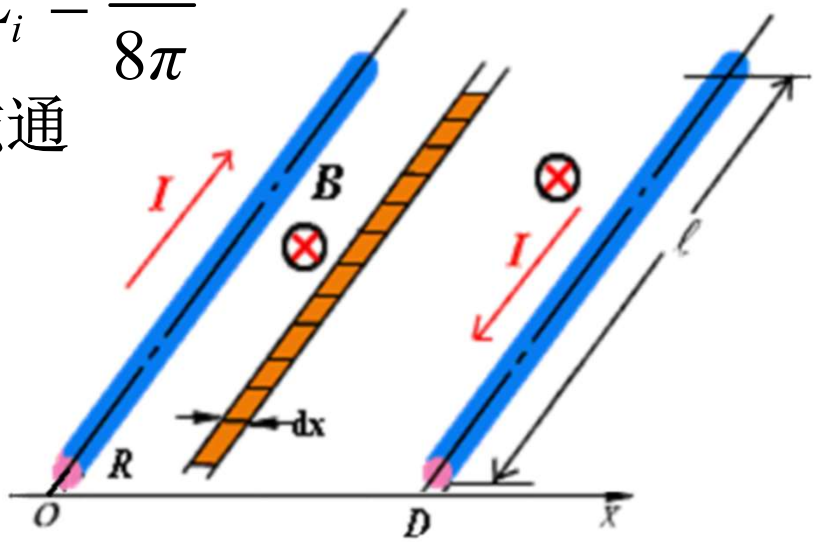
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \qquad \mathrm{d}\psi_{\mathrm{o}} = \mathrm{d}\Phi_{\mathrm{o}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\mathrm{d}r$$

$$L_{\mathrm{o}} = \frac{\psi_{\mathrm{o}}}{I} = \frac{1}{I}\int_{R_1}^{R_2}\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\mathrm{d}r = \frac{\mu_0}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

例2: 近似计算两平行长直传输线（铝线）单位长的自感。

解：总自感 $L = 2L_i + L_o$

这里一根导线的内自感近似为：$L_i = \dfrac{\mu_0}{8\pi}$



外自感解法一：设电流I、由$\boldsymbol{B}$求磁通

在x处，$H_{向下} = \dfrac{I}{2\pi x} + \dfrac{I}{2\pi(D-x)}$

所求磁通要与电流成右手螺旋关系。
这里是向下。

$$\psi_o = \Phi_o = \int \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{S}$$

$$= \mu_0 I \int_R^{D-R} \left[\frac{1}{2\pi x} + \frac{1}{2\pi(D-x)}\right] dx$$

$$= \frac{\mu_0 I}{\pi} \ln \frac{D-R}{R}$$

导线的半径变大，内电感基本不变，而外电感减小。
分裂型输电线是为了增加相线半径，从而为了减小电感。

$$L_o = \frac{\psi_o}{I} = \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{D-R}{R}$$

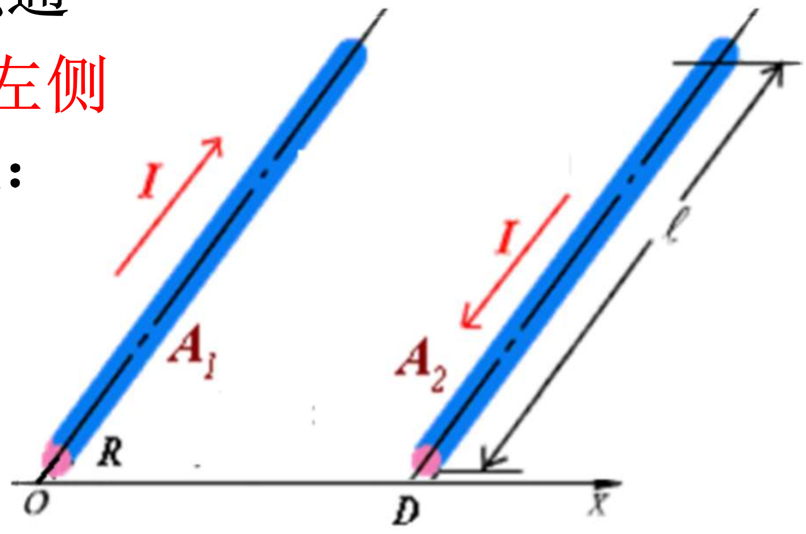
总电感：$L = 2L_i + L_o \approx \dfrac{\mu_0}{4\pi} + \dfrac{\mu_0}{\pi} \ln \dfrac{D-R}{R}$

外自感解法二：设电流I、由$\boldsymbol{A}$求磁通

设两导线内侧表面上$\boldsymbol{A}$的方向均与左侧导线电流方向相同，则有内侧面上：

$$A_1=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\frac{D-R}{R}$$

$$A_2=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\frac{R}{D-R}$$



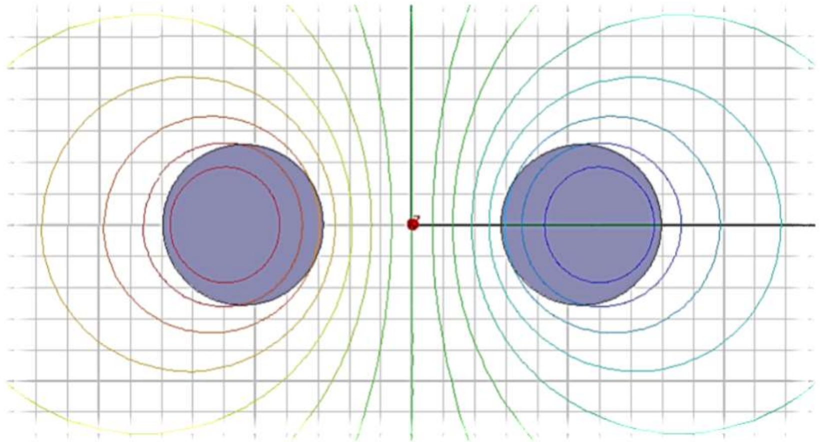
对方向向下的磁链，取回路为顺时针，则有：

$$\psi_o=\Phi_o=\oint\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=A_1 l-A_2 l=l\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\frac{D-R}{R}-l\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\frac{R}{D-R}=l\frac{\mu_0 I}{\pi}\ln\frac{D-R}{R}$$

$$L_o=\frac{\psi_o}{I}=\frac{\mu_0}{\pi}\ln\frac{D-R}{R}\quad（单位长）$$

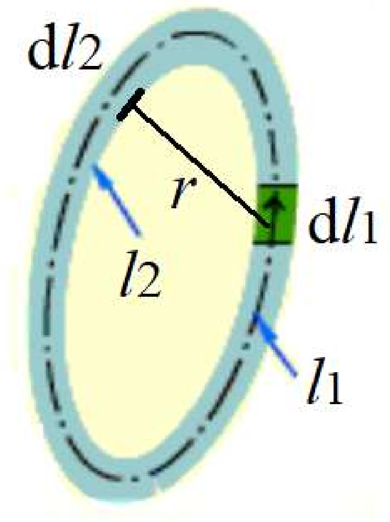
内电感并不严格为：$L=2L_i=\dfrac{\mu_0}{4\pi}$

实际值要大于该值，因导体1对导体2内靠近导体1半边的$\boldsymbol{B}$有增加作用。



基于矢量磁位A得到的任意闭合回路的外电感计算通式

求外自感：设电流I，近似认为其等效于位于中心线l_1上的线电流，该电流在任意点产生的磁矢量位：



$$\boldsymbol{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{l_1}\frac{I\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1}{r}$$

内侧闭合线l_2上所围成的曲面的磁通等于对$\boldsymbol{A}$求闭合线积分，因此有：

$$\varPhi_o = \oint_{l_2}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint_{l_2}\oint_{l_1}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2}{r}$$

$$L_o = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{l_2}\oint_{l_1}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2}{r}$$

对多匝和考虑螺距的螺线管线圈同样适用。
此避开了由磁通求磁链的难题，是直接求任意回路的磁链。