第4章 矢量场的边值问题与求解方法　　作业：　计算题2

先讲一个概念：**方向导数与梯度**

为表征标量函数随空间的变化特性或变化率而引入。

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}$$ 此为沿x轴的方向导数

空间一点处有无限多个方向，对每个方向都可以求f的变化率，称为方向导数，如沿$\boldsymbol{l}$方向的方向导数记为：$\partial f/\partial l$

一点处f的最大方向导数定义为梯度的大小，该方向定义为梯度的方向，故标量函数f的梯度是一个矢量，其运算式为：

$$\nabla f=\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

梯度与任意方向$\boldsymbol{l}^0$上的方向导数关系为：$\partial f/\partial l=\nabla f\cdot\boldsymbol{l}^0$

当这个任意方向$\boldsymbol{l}^0$与梯度的方向相同时方向导数最大，$\boldsymbol{l}^0$方向上的方向导数等于梯度（最大方向导数）在$\boldsymbol{l}^0$方向上的投影。

一个标量函数的梯度的旋度一定等于零 $\nabla\times(\nabla f)\equiv 0$

4.1 亥姆霍兹定理：唯一确定矢量函数形式的微分方程组

1) 若给定 $\nabla \cdot \boldsymbol{Q} = \rho$，$\rho$为已知函数，

$\boldsymbol{Q}$的函数形式是否唯一？ 答：不唯一。

因为，假设$\boldsymbol{Q}_1$满足上面的方程，则 $\boldsymbol{Q}_2 = \boldsymbol{Q}_1 + \nabla \times \boldsymbol{A}$

（$\boldsymbol{A}$为任意函数）也一定满足上面的方程，因 $\nabla \cdot \nabla \times \boldsymbol{A}=0$

2) 若给定 $\nabla \times \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{J}$，$\boldsymbol{J}$为已知函数，

$\boldsymbol{Q}$的函数形式是否唯一？ 答：不唯一。

因若$\boldsymbol{Q}_1$满足上面的方程，则 $\boldsymbol{Q}_2 = \boldsymbol{Q}_1 + \nabla \psi$

也一定满足上面的方程，ψ 为任意函数，因 $\nabla \times \nabla \psi=0$

3) 若同时给定$\boldsymbol{Q}$的散度与旋度， $\boldsymbol{Q}$的函数形式唯一，

故能确定矢量函数形式或通解的一般方程为：

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{Q} = \rho \\ \nabla \times \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{J} \end{cases}$$

但相差常数的$\boldsymbol{Q}$都可满足该方程，此为通解。

4.2 边值问题

边值问题是带有充必边界条件的具有唯一特解的微分方程组。

边界条件是指场域外围边界$\boldsymbol{S}$上的已知量，用来给出定解或特解。

正确的边界条件是在$\boldsymbol{S}$的各处给定$\boldsymbol{Q}$的切向分量Q_t或法向分量Q_n。

若场分布在整合空间，称其为开域问题或开域场，其边值问题为：

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{Q} = \rho \\ \nabla \times \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{J} \\ Q_t(r)\big|_{r\to\infty} = 0 \end{cases}$$

- 闭合区域简称闭域问题有天然的、有人为从开域中选取制造的。
- 这种缩小计算场域的方法或策略在电磁场数值计算中非常重要。
  数值计算：利用计算机实现的数值计算不是试图得到场函数，
  而是要得到空间很多点上的场量，称其为离散解，
- 计算场域越大，数值计算需要计算的点数就越多，反之亦然。
- 解析解：利用函数表述的场的解答。
- 大部分实际问题场分布太复杂，解的表达式根本不存在。

4.2.1 子区域选取方法

在原开域或大区域问题中，若能基于场的对称等分布特性，
选取出边界上$\boldsymbol{Q_t}$或$\boldsymbol{Q_n}$已知的子区域$\boldsymbol{V}$，那就只需求解该子区域。

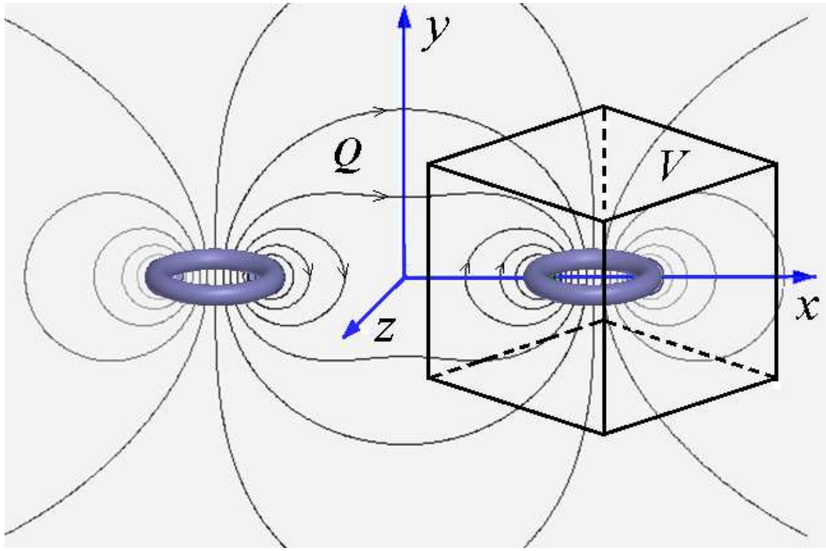
什么样的面上可以直接看出$\boldsymbol{Q_t}$或$\boldsymbol{Q_n}$的值？

1）与矢量场垂直的面，其上场的切向分量一定为零Q_t=0，
故若将这种面选为边界则称为<u>场垂直边界</u>，其上具有<u>齐次切向边界条件Q_t=0</u>；

2）与矢量场或其矢量线平行的面，称为<u>场平行边界</u>，其上具有<u>齐次法向边界条件Q_n=0</u>。

如果能从中找到几个具有齐次切向或齐次法向边界条件的面（无限远处一定为齐次边界面），且这些面能围成一个子区域，则该子区域就能取出来单独求解，这是选取子区域的主要方法，
称之为<u>齐次边界条件子区域选取方法</u>或者称为<u>场垂直与场平行边界面子区域选取方法</u>。

例：



两个圆环电流产生的磁场

第一象限场域的边界条件可被给定

x-y坐标面为场平行面， $Q_n=0$；

x-z坐标面和***y-z***坐标面为场垂直，

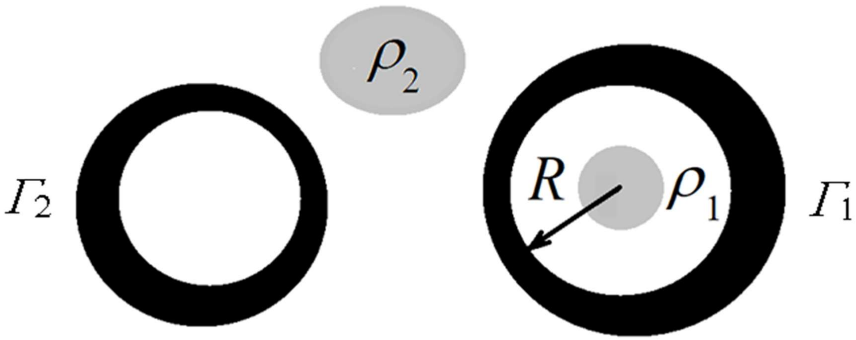
在无限远处有$Q_t=0$。

两个导体球壳，

两个电荷区域ρ_1、ρ_2开域问题。

对静电场问题，导体表面$E_t=0$。

问可取出哪几个子区域分别计算？



子区域1为半径等于R的球内区域，

子区域2为另一个球壳内区域，

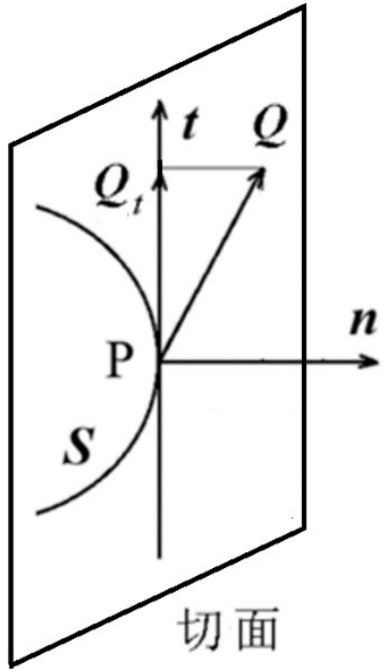
子区域3为两个导体壳外表面与

无限远边界围成的区域。

4.2.2 边值问题的形式

切向分量表示方法Q_t与 $\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{Q}$ 的关系说明

（后者用法向有明显优点）



Q_t表示$\boldsymbol{Q}$向切平面上的投影矢量$\boldsymbol{Q}_t$的模，

$\boldsymbol{t}$是投影矢量$\boldsymbol{Q}_t$的单位矢量。

$\boldsymbol{t}$与$\boldsymbol{Q}$和$\boldsymbol{n}$应在同一平面内。有：

$$(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{Q})\times\boldsymbol{n}=\boldsymbol{Q}_t=Q_t\boldsymbol{t}$$

可见，Q_t可用法向$\boldsymbol{n}$与$\boldsymbol{Q}$来表示；但不必用 $(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{Q})\times\boldsymbol{n}$ 而用 $\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{Q}$ 即可。$\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{Q}$ 与 Q_t并不相等，两者垂直，两者的模相等，前者可表示后者，前者已知后者便知。

进而，在表面局部坐标系$\boldsymbol{n}$-$\boldsymbol{t}$下有矢量的两分量形式：

$$\boldsymbol{Q}=Q_n\boldsymbol{n}+Q_t\boldsymbol{t}=(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{Q})\boldsymbol{n}+(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{Q})\times\boldsymbol{n}$$

边界条件的形式

矢量场的定解齐次边界条件定理：使得矢量场$\boldsymbol{Q}$的一般方程存在定解的边界条件或可以唯一确定其定解的充分必要条件是：在整个边界$\boldsymbol{S}$的不同部位上给定场的切向或法向分量之一。

给定切向代矢量 $\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{Q}=0$ 称为第一类边界条件，

给定法向分量 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{Q}=0$ 称为第二类边界条件。

对于散度源或标量源产生的有散场，若有n个第一类边界（无限远处也为第一类边界），需要在n-1个第一类边界上施加通量约束条件，即:

$$\oiint_{S_{\text{in}}} \boldsymbol{Q}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oiint_{S\text{in}} Q_n \mathrm{d}S = q$$

任选的、没有施加通量约束条件的那条边界称为参考第一类边界。

静电场中导体表面为齐次切向边界，当导体上放置不同电荷时均能满足齐次切向边界条件，故设置齐次切向边界条件不能区分导体上电荷的大小，这显然不能完整表述物理问题，因此必须施加通量约束。

边值问题的形式

对于场量连续的区域V，若场域的边界面为$\boldsymbol{S}$，由场域V内描述场的一般方程与边界$\boldsymbol{S}$上给定的使场具有唯一解的边界条件，构成场的边值问题，其形式为：

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{Q} = \rho & \in V \\ \nabla \times \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{J} & \in V \\ \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{f}_1 & \in \boldsymbol{S}_1 \\ \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{Q} = Q_n = f_2 & \in \boldsymbol{S}_2 \end{cases}$$

矢量函数 $\boldsymbol{f}_1$和标量函数f_2为已知函数。

一般方程描述场的普遍特性，而边界条件描述具体问题的特性。对于某一类场问题，一般方程形式相同，但同一类问题的不同场域模型，场域边界形状及边界条件分布情况会不同，

边值问题是场论的核心理论。能给出实际电磁场问题的求解区域及其边值问题，特别是从实际的较大区域中选出一个局部区域形成其边值问题，是求解场的基础或首要任务。

4.3 获得边值问题通解的两种解法

4.3.1标量源ρ的场　（1）显示函数通解法

场满足的一般方程：

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho & \in V \quad (1) \\ \nabla \times \boldsymbol{D} = 0 & \in V \quad (2) \end{cases}$$

可先联立两方程得到$\boldsymbol{D}$的矢量形式的泊松方程。

将方程(2)两边求旋度，并利用矢量恒等式 $\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{D}=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{D})-\nabla^2\boldsymbol{D}$ 得：

$$\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{D})-\nabla^2\boldsymbol{D}=0 \qquad (3)$$

将方程(1)两边求梯度，得：

$$\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{D})=\nabla\rho \qquad (4)$$

将该方程代入式(3)可得矢量泊松方程：

$$\nabla^2\boldsymbol{D}=\nabla\rho \qquad (5)$$

直角坐标系下

拉普拉斯算符：

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

然而，在一维中不需要解以上方程，因为事先假定的形成一维场域的场分布特性便是环量为零，因此，仅需要求解方程(1)。

例4.3-1：一半径为a的球形区域内均匀分布有电荷ρ，用解边值问题的显示函数通解法，求球内外区域的电位移$\boldsymbol{D}$。

解：先分析场分布！对称，可知各点$\boldsymbol{D}$的方向均为半径方向。

建立球坐标系，这样$\boldsymbol{D}$仅为r的函数，为一维问题；

且只有$\boldsymbol{r}$方向的分量，即$\boldsymbol{D}=D_r(r)\boldsymbol{r}^0$；

求解场域为一根射线即r为 $[0,\infty)$，两端点为场域边界，边界条件？

因有两个区域，所以先设两个函数，球内$D_{1r}(r)$，球外$D_{2r}(r)$。

为给出$\boldsymbol{D}$仅需要列些散度方程。球坐标系下散度的格式：

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}(r)=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2D_r)$$

则$D_r(r)$的边值问题为：

$$\begin{cases}\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}(r^2D_{1r})=\rho & (r<a)\\ \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}(r^2D_{2r})=0 & (r>a)\\ D_{1r}(a)=D_{2r}(a) & \text{这是交界面条件，不是场域的外边界的边界条件。}\\ D_{1r}(0)=0 & \text{这是个特殊边界，可认为是第二类边界条件。}\\ D_{2r}(\infty)=0 & \text{这是唯一的第一类边界，不需要施加通量条件。}\end{cases}$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 D_{1r})=\rho$$

由上式得$D_{1r}(r)$的通解为： $D_{1r}=\frac{\rho}{3}r+\frac{C_1}{r^2}$

可得$D_{2r}(r)$的通解为： $D_{2r}=\frac{r}{3}C_2+\frac{C_3}{r^2}$

由边界条件$D_{1r}(0)=0$ 可得$C_1=0$；由 $D_{2r}(\infty)=0$ 得$C_2=0$；

由界面条件 $D_{1r}(a)=D_{2r}(a)$得： $C_3=\frac{\rho}{3}a^3$

因此得特解： $D_{1r}=\frac{\rho}{3}r$ $D_{2r}=\frac{\rho a^3}{3r^2}=\frac{q}{4\pi r^2}$

对于二维和三维复杂场域问题解该方程组的数值计算方法是有限元法，它是在场域中设m个点，解出各点的$\boldsymbol{D}$。

（2）积分形式通解法

场满足的一般方程：$\begin{cases}\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho & \in V \quad (1)\\ \nabla\times\boldsymbol{D}=0 & \in V \quad (2)\end{cases}$ V的边界为$\boldsymbol{S}$。

可以证明（参见附录2）该方程组的一种通解形式为：

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})=\iiint_V \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{4\pi R^2}\boldsymbol{R}^0\mathrm{d}V'$$

$$-\frac{1}{4\pi}\oint\!\!\!\oint_S\{[\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}')]\times\boldsymbol{R}^0\frac{1}{R^2}+[\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}')]\frac{1}{R^2}\boldsymbol{R}^0\}\mathrm{d}S'$$

式中积分是对变量$\boldsymbol{r}'$进行，假如积分核都已知，积分后变量为$\boldsymbol{r}$ 。

体积分项是什么？ $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'$

然而，边值问题中只给出了$\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{D}$ 或 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{D}$两者之一，
所以该通解中含有边界$\boldsymbol{S}$上的待求量。

基于已知边界条件可以确定这些待求量，
即基于已知的 $\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{D}=\boldsymbol{f}_1 \in \boldsymbol{S}_1$ 和$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{D}=f_2 \in \boldsymbol{S}_2$求$\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{D} \in \boldsymbol{S}_2$ $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{D} \in \boldsymbol{S}_1$
这要通过解边界积分方程来实现。

4.3.2矢量源*J*的场

场满足的一般方程：
$$\begin{cases}\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J} & (1)\\ \nabla\cdot\boldsymbol{H}=0 & (2)\end{cases}$$

（1）显示函数通解法

将方程(1)两边求旋度，得：$\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{H})-\nabla^2\boldsymbol{H}=\nabla\times\boldsymbol{J}$

代入方程(2)，得：$\nabla^2\boldsymbol{H}=-\nabla\times\boldsymbol{J}$ 此为矢量泊松方程。

（2）积分形式通解法

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})=\iiint_V\frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')\times\boldsymbol{R}^0}{4\pi R^2}\mathrm{d}V'-\frac{1}{4\pi}\oiint_S[(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H})\times\boldsymbol{R}^0\frac{1}{R^2}+(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{H})\frac{1}{R^2}\boldsymbol{R}^0]\mathrm{d}S'$$

体积分项是什么？

第5章 矢量场的位函数表示

（为求解方便而引入位函数）

5.1 亥姆霍兹矢量函数分解定理

<u>亥姆霍兹定理</u>：上面的唯一性定理是亥姆霍兹定理的第一句话，其后一句话是：一个矢量函数$\boldsymbol{Q}$可用一个标量函数的梯度与一个矢量函数的旋度叠加来表示（证明见附录3），即：

$$\boldsymbol{Q} = -\nabla\varphi + \nabla \times \boldsymbol{A}$$

上式第一项无旋、第二项无散。故一个矢量函数可以分解为一个无旋函数和一个无散函数，即：

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}_{\mathrm{NOcurl}} + \boldsymbol{Q}_{\mathrm{NOdiv}}$$

<u>标量源与矢量源的场分解定理</u>：任何一个矢量场都可分解为标量源与矢量源各自产生的场（当然对有的场一种源可能为零）；标量源与矢量源在线性媒质中共同产生的场可以分开单独分析。

标量源的场的一般方程：$\begin{cases}\nabla\cdot\boldsymbol{Q}_{\mathrm{NOcurl}}=\rho\\ \nabla\times\boldsymbol{Q}_{\mathrm{NOcurl}}=0\end{cases}$

矢量源的场的一般方程：$\begin{cases}\nabla\cdot\boldsymbol{Q}_{\mathrm{NOdiv}}=0\\ \nabla\times\boldsymbol{Q}_{\mathrm{NOdiv}}=\boldsymbol{J}\end{cases}$

将上面两个方程的对应方程相加，可得合成场$\boldsymbol{Q}$的一般方程：

$$\begin{cases}\nabla\cdot\boldsymbol{Q}=\rho\\ \nabla\times\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{J}\end{cases}$$

例：电场可能是由两种源产生，电荷ρ产生的库仑电场$\boldsymbol{E}_{\mathrm{C}}$与矢量源时变磁场$\partial\boldsymbol{B}/\partial t$产生的感应电场$\boldsymbol{E}_{\mathrm{i}}$的组合。

问各电场与合成电场$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_{\mathrm{C}}+\boldsymbol{E}_{\mathrm{i}}$的方程？两者可以分开分析吗？

答：$\boldsymbol{E}_{\mathrm{C}}$的方程易知；将上面$\boldsymbol{J}$的场方程中$\boldsymbol{J}$改为$\partial\boldsymbol{B}/\partial t$将$\boldsymbol{Q}_{\mathrm{NOvid}}$改为$\boldsymbol{E}_{\mathrm{i}}$即可；

合成电场的方程：$\begin{cases}\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\rho/\varepsilon\\ \nabla\times\boldsymbol{E}=-\dfrac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\end{cases}$

两者可以分开分析，且在概念上应该分开理解与分析。

5.2 标量源的无旋场的标量位表示法

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{E} = \rho / \varepsilon \\ \nabla \times \boldsymbol{E} = 0 \end{cases}$$

（1）标量位φ的引入及其满足的泊松方程

对一个无旋场 $\nabla \times \boldsymbol{E} = 0$，可用标量函数$\varphi$表示为：

$\boldsymbol{E} = -\nabla\varphi$（无负号也可） 为什么可表示?

因为 $\nabla \times \nabla\varphi \equiv 0$，故 φ 一定能满足矢量场的无旋特性。

所有φ都能满足$\boldsymbol{E}$的无旋性，需由$\boldsymbol{E}$的散度约束φ形式才唯一。

$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \rho / \varepsilon$，则有：

$$\nabla \cdot (\nabla\varphi) = \nabla^2\varphi = -\rho / \varepsilon$$

$$\nabla \cdot \nabla = \nabla^2 = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

称为泊松方程，一个方程表示$\boldsymbol{E}$的两个矢量方程，故φ较易解。相差一个常数的φ都满足方程，为使φ唯一需设一个参考点。

再加上界面与边界条件可形成φ的边值问题，求解得φ。

φ称为对应的矢量场$\boldsymbol{E}$的位函数。用φ表示$\boldsymbol{E}$的边界条件为何?

（2）标量位φ的边界条件

分析用φ表示$\boldsymbol{E}$的边界条件可形成φ的边界条件。

先分析场平行边界或齐次法向边界条件 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{E}=E_n=0$

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{E}=-\boldsymbol{n}\cdot\nabla\varphi=-\frac{\partial\varphi}{\partial n}=0$$

用φ表示的通量条件：$\iint_S \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iint_S E_n\mathrm{d}S=-\iint_S\frac{\partial\varphi}{\partial n}\mathrm{d}S=q/\varepsilon$

再看$\boldsymbol{E}$的齐次切向边界条件 $\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}=0$， 因$|\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}|=E_t=\partial\varphi/\partial t=0$

φ在S上的切向导数为零表明其为等位面，
因此，为满足$\boldsymbol{E}$的齐次切向边界条件，设φ为常数即可：$\varphi_i=\mathrm{C}_i$
只要C_i是任意常数便可，下标i表示各个齐次切向边界。

φ需设一个参考点，那就设参考第一类边界为电位参考点（面）；
有时（导体接电压源）可给定C_i，其上的通量源q_i为未知量，这个通量约束就没有必要了，因加电压源可保证电荷独立性。
对于C_i未知的第一类边界称为<u>悬浮位边界</u>，记为$\boldsymbol{S}_f$，需要通量约束。

（3）标量位φ的边值问题

综合φ的一般方程和边界条件，可得φ的边值问题为：

$$
\begin{cases}
\nabla^2\varphi = -\rho/\varepsilon & \in V \\
\varphi = \mathrm{C}_{0m} & \in \boldsymbol{S}_1 \\
\varphi = \mathrm{C}_i & \in \boldsymbol{S}_\mathrm{f} \\
-\oiint_S \dfrac{\partial\varphi}{\partial n}\mathrm{d}S = q_i/\varepsilon & \in \boldsymbol{S}_\mathrm{f} \\
\dfrac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 & \in \boldsymbol{S}_2
\end{cases}
$$

φ的参考点应设在一个$\boldsymbol{S}_1$的一个面上，C_{0m}为已知量，C_i为未知量，即悬浮位第一类边界。

<u>标量位的泊松方程的定解边界条件</u>是在$\boldsymbol{S}$上给定位函数（第一类边界条件）或位函数的法向导数（第二类）之一。

5.2.2 位函数边值问题的两种解法

1）显示函数通解法

对一维问题，泊松方程变为常微分方程，通解很容易得到。

这是静电场中的一大类计算问题。

对二维问题，可以利用分离变量法得到通解（详见附录2）

“分离”的含义是将二维函数分成两个函数的乘积，

每个函数仅为单一变量的函数。直角坐标系下 $\varphi(x,y)=\varphi_x(x)\varphi_y(y)$

将其代入拉普拉斯方程中，并在两边除以$\varphi_x(x)\varphi_y(y)$，得：

$$\frac{1}{\varphi_x}\frac{\partial^2\varphi_x}{\partial x^2}+\frac{1}{\varphi_y}\frac{\partial^2\varphi_y}{\partial y^2}=0$$

每一项只是一个变量的函数，要成立只能是两个任意常数，设为$\pm k$

$$\frac{1}{\varphi_x}\frac{\partial^2\varphi_x}{\partial x^2}=+k \qquad \frac{1}{\varphi_y}\frac{\partial^2\varphi_y}{\partial y^2}=-k$$

将偏微分方程化成两个常微分方程了。将两方程的通解组合可得拉普拉斯方程的通解。泊松方程的通解是在此基础上加一个特解。

2）积分形式通解法

可以证明，φ的泊松方程的积分形式通解为（证明参见附录3）：

$$\varphi(\boldsymbol{r})=\iiint_V \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{4\pi\varepsilon R}\mathrm{d}V'-\frac{1}{4\pi}\oiint_S[\varphi(\boldsymbol{r}')\frac{\partial}{\partial n}(\frac{1}{R})-\frac{\partial\varphi(\boldsymbol{r}')}{\partial n}\frac{1}{R}]\mathrm{d}S'$$

利用上式形成边界积分方程，然后与已知的边界条件，
可以求边界上未知的量。

由此还可以看出，边界上的φ与 $\partial\varphi/\partial n=0$ 不独立；

在$\boldsymbol{S}$上给定两者之一就暗含着给定了两者，
故给定两者之一便是充分的定解边界条件。

无限大均匀空间中标量源产生的位函数或泊松方程的特解为：

$$\varphi(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint_V \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{R}\mathrm{d}V'$$

5.3 无散场的矢量位表示法

（1）矢量位*A*的引入及其满足的方程

$$\begin{cases}\nabla\times\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{J}\\ \nabla\cdot\boldsymbol{B}=0\end{cases}$$

对无散场可用一矢量函数的旋度表示

对无散场 $\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$ 可用一个矢量函数表示为：

$$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A} \qquad \text{为何？}$$

因为 $\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})\equiv 0$，$\boldsymbol{A}$ 一定能满足$\boldsymbol{B}$无散 $\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$。

所有$\boldsymbol{A}$都能使$\boldsymbol{B}$无散，所以要用$\boldsymbol{B}$的旋度约束$\boldsymbol{A}$，如

$$\nabla\times\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{J} \qquad\qquad \nabla\times\nabla\times\boldsymbol{A}=\mu\boldsymbol{J}$$

但$\boldsymbol{A}$仍不唯一，很多$\boldsymbol{A}$（相差$\nabla\psi$）都能表示同一$\boldsymbol{B}$。

必须规定$\boldsymbol{A}$的散度值。可任意规定，因相差 $\nabla\psi$ 的不同的$\boldsymbol{A}$可得相同的$\boldsymbol{B}$。可设 $\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0$。

约束$\boldsymbol{A}$的方程组为：

$$\begin{cases}\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{A}=\mu\boldsymbol{J}\\ \nabla\cdot\boldsymbol{A}=0\end{cases}$$

$\boldsymbol{A}$称为表示矢量场$\boldsymbol{B}$的矢量位函数。

根据矢量运算有： $\nabla\times(\nabla\times \boldsymbol{A})=\nabla(\nabla\cdot \boldsymbol{A})-\nabla^2\boldsymbol{A}=\mu\boldsymbol{J}$

代入 $\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0$ 得： $\nabla^2\boldsymbol{A}=-\mu\boldsymbol{J}$

此为矢量场$\boldsymbol{A}$所满足的矢量泊松方程。

矢量泊松方程可分解为三个分量的标量泊松方程。

因 $\nabla^2(A_x\boldsymbol{i}+A_y\boldsymbol{j}+A_z\boldsymbol{k})=-\mu(J_x\boldsymbol{i}+J_y\boldsymbol{j}+J_z\boldsymbol{k})$

故有： $\nabla^2A_x=-\mu J_x$ $\quad\nabla^2A_y=-\mu J_y$ $\quad\nabla^2A_z=-\mu J_z$

这种$\boldsymbol{A}$的三分量形式的泊松方程看上去比$\boldsymbol{A}$的双旋度方程与散度为零的方程组简单，在二维问题中确实如此（仅有两个分量）。
但对于三维问题，边界条件和界面条件是以表面上局部坐标下的两分量形式 给定，即给定的是$\boldsymbol{A}$的切向或法向分量，而不是以三坐标分量给定，因此，对于三分量的泊松方程施加边界条件反而较复杂，不如直接在双旋度方程下，基于$\boldsymbol{A}$的两分量形式求解更直接、简单。

$$\boldsymbol{A}=A_n\boldsymbol{n}+A_t\boldsymbol{t}=(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{A})\boldsymbol{n}+(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{A})\times\boldsymbol{n}$$

（2）矢量位$\boldsymbol{A}$的边界条件

矢量位$\boldsymbol{A}$的边界条件需要考虑两个方面：

利用$\boldsymbol{A}$表示场$\boldsymbol{B}$的两类边界条件；

保证矢量$\boldsymbol{A}$有唯一解的其本身的边界条件：

$$\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{A}=\boldsymbol{K} \quad \in \varGamma_1 \qquad \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{A}=C \quad \in \varGamma_2$$

对$\boldsymbol{B}$的齐次切向边界 $\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{B}=0$，$\boldsymbol{A}$应为：$\boldsymbol{n}\times\nabla\times\boldsymbol{A}=0 \quad \in \boldsymbol{S}_1$

对$\boldsymbol{B}$的齐次法向边界 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{B}=0$ ，$\boldsymbol{A}$应为：$\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{A}=\boldsymbol{K}_i \quad \in \boldsymbol{S}_2$

这是由于$\boldsymbol{B}$的法向只与$\boldsymbol{A}$的切向分量沿另一切向的变化率有关，因此，若在表面上$\boldsymbol{A}$的切向为常数，则一定有B_n=0。

矢量源的场一般为单连域问题，可将常数取为零，即：

$\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{A}=0 \quad \in \boldsymbol{S}_2$ 这个条件同时可满足上面的 $\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{A}=\boldsymbol{K} \in \varGamma_1$

在$\boldsymbol{S}_1$上需要设两个条件，因为两者不能合并：$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{A}=C$ ，$\boldsymbol{n}\times\nabla\times\boldsymbol{A}=0$

对单联通域问题，C可取为0。在 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{A}=C$下，$\boldsymbol{n}\times\nabla\times\boldsymbol{A}=0$ 可简化为：

$$\frac{\partial}{\partial n}(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{A})=0 \qquad \in \boldsymbol{S}_1$$

实际上就是$\boldsymbol{B}$的切向为零等价于$\boldsymbol{A}$的切向的法向导数为零。

（3）矢量位*A*的边值问题

$$\begin{cases} \nabla\times\nabla\times\boldsymbol{A}=\mu\boldsymbol{J} & \in V \\ \nabla\cdot\boldsymbol{A}=0 & \in V \\ \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{A}=0 & \in \boldsymbol{S}_1 \\ \dfrac{\partial}{\partial n}(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{A})=0 & \in \boldsymbol{S}_1 \\ \boldsymbol{n}\times\boldsymbol{A}=0 & \in \boldsymbol{S}_2 \end{cases}$$

（4）*A*积分形式通解为（证明参见附录3）：

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})=\frac{\mu}{4\pi}\iiint_V\frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')}{R}\mathrm{d}V'$$

$$-\frac{1}{4\pi}\oint\!\!\oint_S\{\boldsymbol{n}\times[\nabla'\times\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}')]\frac{1}{R}\}\mathrm{d}S'-\frac{1}{4\pi}\oint\!\!\oint_S\{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}')\nabla'\frac{1}{R}+[\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}')]\times\nabla'\frac{1}{R}\}\mathrm{d}S'$$

在无界均匀媒质空间中，有：

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})=\frac{\mu}{4\pi}\iiint_V\frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')}{R}\mathrm{d}V'$$