概率论与数理统计第二次习题课

1. 设$X\sim \mathrm{U}(-1,2)$，求$Y=|X|$和$Z=X^2$的密度函数。

2. 设$f(x)$为凸函数，X为一随机变量，并且$E[X]<\infty, E[f(X)]<\infty$，求证：
$$E[f(X)]\geq f(E[X])$$

3. 设随机变量$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，求$E|X-\mu|^k$，k为正整数。

4. （1）设离散型随机变量X取值于非负整数，若其期望存在，求证：
$$E[X]=\sum_{k=1}^{\infty}P(X\geq k)$$
由此计算几何分布的$X\sim Ge(p)$的期望。

（2）设 X 为非负连续型随机变量，若其期望和方差都存在，求证：
$$E[X]=\int_0^{\infty}P(X>x)dx, \qquad E[X^2]=\int_0^{\infty}2xP(X>x)dx$$
由此计算设随机变量 X 满足 $P(X>x)=\exp(-x^2), x>0$，求X的期望和方差。

5. 设袋中有 r 个红球和 b 个黑球，现在一次拿一个得不放回地取出，直到取出红球为止，求取球次数的数学期望。

6. 假设一设备开机后无故障工作的时间X服从参数为 0.2 的指数分布，设备定时开机，出现故障后自动关机，而在无故障情况下工作两小时自动关机，求该设备每次工作时间（从开机到关机）Y的分布函数。

7. 设X为连续型随机变量，其密度函数为$f(x)$，若 m 是 X分布的唯一的中位数，并且 b 是一个取定的实数，求证：在以下的期望都存在的前提下，
$$E|X-b|=E|X-m|+2\int_m^b(b-x)f(x)dx$$
并求使得$E|X-b|$取到最小值的 b.

8. 设连续随机变量 X 的密度函数$p(x)$是个偶函数，$F(x)$是X的分布函数，求证

对任意实数$a > 0$，有

(1) $F(-a) = 1 - F(a) = 0.5 - \int_0^a p(x)dx$

(2) $P(|X| < a) = 2F(a) - 1$

(3) $P(|X| > a) = 2[1 - F(a)]$