《电磁场基础》

习题解答

科目＿＿＿＿＿分类号＿＿＿＿＿

基本电工教研组

编制者＿＿＿＿＿ **习题卡片** 1-1 日期＿＿＿＿＿

题号 自编，根据《电磁场习题集》1-9改编

题文 長度为l的细直线，均匀带电，线电荷密度为τ。试计算：① 空气中在细直线的中垂线上离线中心l远处的电场强度，

② 在细直线的延長线上离线中心l远处的电场强度

解：

① $$E_r = \frac{-\tau}{4\pi\varepsilon_0 r}(\cos\theta_2 - \cos\theta_1) = -\frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 l}\left(-\frac{1}{\sqrt5}-\frac{1}{\sqrt5}\right) = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 l}\frac{2}{\sqrt5}$$

$$E_z = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 r}(\sin\theta_2 - \sin\theta_1) = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 l}\left(\frac{2}{\sqrt5}-\frac{2}{\sqrt5}\right) = 0$$

② $$E_r = -\frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 r}\left(\sqrt{1-\sin^2\theta_2} - \sqrt{1-\sin^2\theta_1}\right)$$

$$= -\frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 r}\left[\sqrt{1-\left(\frac{r}{l/2}\right)^2} - \sqrt{1-\left(\frac{r}{3l/2}\right)^2}\right]$$

$$= -\frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 r}\left[1 - \frac{2\frac{r}{l/2}}{2\sqrt{1-\left(\frac{r}{l/2}\right)^2}}\cdot\frac{r}{l/2} + \cdots \right.$$
$$\left. -1 + \frac{2\left(\frac{r}{3l/2}\right)}{2\sqrt{1-\left(\frac{r}{3l/2}\right)^2}}\cdot\frac{r}{3l/2} - \cdots\right]$$

$= 0$（当$r\to 0$时）

$$E_z = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 r}(\sin\theta_2 - \sin\theta_1)$$

$$\doteq \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 r}\left(\frac{r}{l/2} - \frac{r}{3l/2}\right)$$

$$= \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{2}{l} - \frac{2}{3l}\right) = \frac{\tau}{3\pi\varepsilon_0 l}$$

科目________ 分类号________

基本电工教研组

编制者________ **习题卡片** 1-2 日期________

题号 自编

题文 一半径为1厘米的球面上均匀分布有电荷，总电量为Q。周围为空气，其击穿电场强度为30千伏/厘米。问当Q增至多大时，空气将局部电场~~被击穿现象出现~~开始达击穿电场强度~~情况~~。

解：

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}$$

$$Q = 4\pi\varepsilon_0 a^2 E = 4\pi \times 8.85\times10^{-12} \times 10^{-4} \times 30\times10^{5}$$

$$= 33.36\times10^{-9} \text{ 库}$$

科目________ 分类号________

基本电工教研组

编制者__________ **习 题 卡 片** 1-3 日期________

题号 自编，根据《电磁场习题集》1-8，改编

题文 半径为 a 的圆盘均匀带电，面电荷密度为 ρ_s，处于空气中。计算①在圆盘轴线上距圆盘 a 处的电场强度和电位，②在圆盘轴线上无限靠近圆盘处的电场强度和电位，③~~比较~~上述两处结果的~~倍数~~比值。

解：

1. $z = a$ 处

$$\varphi_a = \frac{\rho_s}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{a^2+z^2} - z\right] = \frac{\rho_s}{2\varepsilon_0} 0.414a$$

$$E_a = \frac{\rho_s}{2\varepsilon_0}\left[-\frac{z}{\sqrt{a^2+z^2}} + 1\right] = \frac{\rho_s}{2\varepsilon_0} 0.293$$

2. $z = 0^+$ 处　　　　$z = 0^-$ 处

$$\varphi_{0^+} = \frac{\rho_s}{2\varepsilon_0} a \qquad \varphi_{0^-} = \frac{\rho_s}{2\varepsilon_0} a$$

$$E_{0^+} = \frac{\rho_s}{2\varepsilon_0} \qquad E_{0^-} = -\frac{\rho_s}{2\varepsilon_0}$$

3.

$$\frac{\varphi_a}{\varphi_0} = 0.414$$

$$\frac{E_a}{E_0} = 0.293$$

科目________分类号________

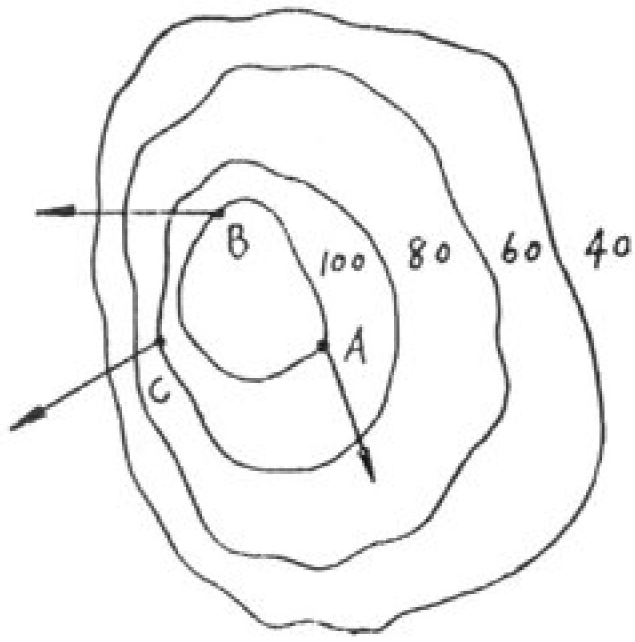
基本电工教研组

习题卡片 1-4

编制者__________ 日期________

题号 自编《电磁场习题集》，1-4题

题文 题1-4图表示了描述三维电场的等位线族，靠近每条等位线的数字表示相应的电位值，单位为伏特。试按图形近似地定出A、B、C三点的电场强度值，画出它们的方向，并求出各电场强度在图示方向的分量值。图中长度的比例尺为1:1。



电路原理习题卡片 1-5

题号 《电磁场习题集》自编，1-5

题文 试回答下列各问：

(1) 等位面上的电位处处一样，因此面上各处的电场强度的大小也一样。这句话对吗？试举例说明。

(2) 某处 $\varphi=0$，因此那里的电场 $\vec{E}=-\mathrm{grad}\varphi=-\mathrm{grad}0=0$。对吗？

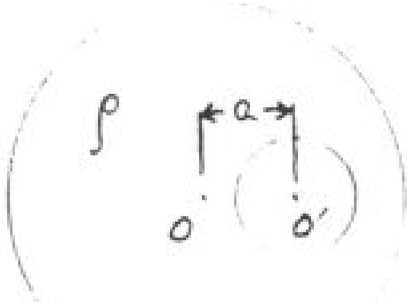
(3) 甲处电位是1万伏，乙处电位是10伏，故甲处的电场强度大于乙处的电场强度。对吗？

电路原理习题卡片 1-6

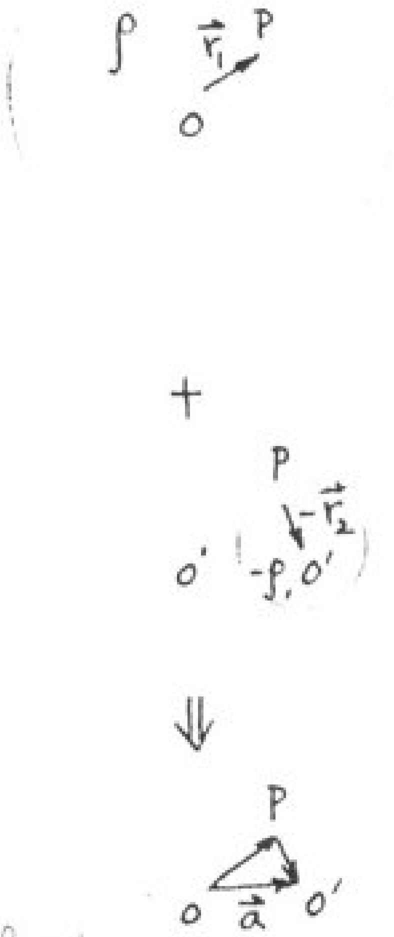
题号 《电磁场习题集》自编，1-3

题文 空间均匀分布有体积密度为ρ的电荷，它们以两个无限长的圆柱面为界，如图所示。试求出小圆柱内任一点的电场强度，并判断小圆柱内电场的图形。

提示：可用迭加原理求解。



解：



$$\vec{E_1} = \frac{\pi r^2 \rho}{2\pi r}\vec{r_1^{\circ}} = \frac{\rho}{2}\vec{r_1}$$

$$\vec{E_1} = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\vec{r_1}$$

$$\vec{E_2} = -\frac{\rho}{2}\vec{r_2}$$

$$\vec{E_2} = -\frac{\rho}{2\varepsilon_0}\vec{r_2}$$

$$\vec{E} = \vec{E_1} + \vec{E_2} = \frac{\rho}{2}\vec{a} \qquad \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\vec{a}$$

为均匀电场。

科目________分类号____

基本电工教研组

编制者__________ **习 题 卡 片** 1-7 日期____

题号 自编，根据《电磁场习题集》1-1题改编

题文 真空中有1纳库的电荷，均匀地分布在圆球形空间内形成电荷云。已知该球形云的半径为1厘米。求电场强度的最大值并说明出现的位置。

解：

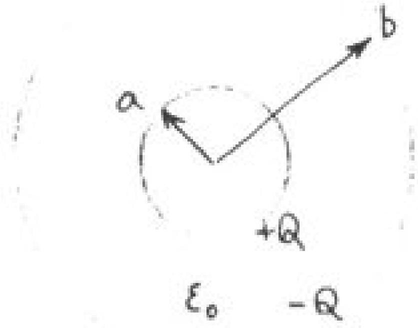
$$\rho = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi a^3} = \frac{1\times10^{-9}}{\frac{4}{3}\pi(10^{-2})^3} = 0.2387\times10^{-3} \quad C/m^3$$

$$E_{max} = \frac{\rho a}{3\varepsilon_0} = \frac{0.2387\times10^{-3}\times10^{-2}}{3\times8.85\times10^{-12}} = 89.9\times10^3 \quad V/m$$

出现在云的表面。

题号 《电磁场习题集》自编，1-6

题文 圆球形电容器，如图所示；内球半径为a，带有电荷+Q；外球内半径为b，带有电荷-Q。今取无穷远处为电位参考点，设其电位为零。计算各处的电位，（$r\le a$，$a\le r\le b$，$b\le r$）。



解：$\varphi = \int_P^\infty \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_P^\infty E\,dr$

1. $b \le r$

$E = 0$

$\varphi = 0$

2. $a \le r \le b$

$E = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

$\varphi = \int_r^b E\,dr + \varphi_b = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{b}\right)$

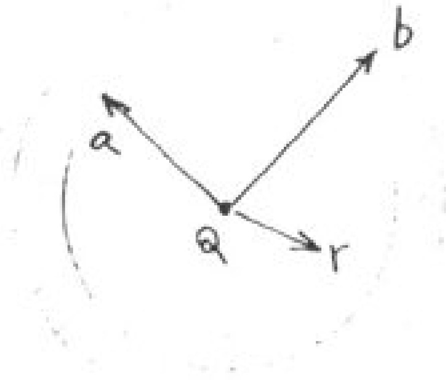
3. $r \le a$

$E = 0$

$\varphi = \varphi_a = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}\right)$

题号 《电磁场习题集》自编，1-7

题文 空心导体球，如图所示，内半径为a，外半径为b。若球心置一点电荷Q，计算各处电位（$r \le a$，$a \le r \le b$，$b \le r$）。



解：$\varphi = \int_P^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_P^{\infty} E\, dr$

1. $b \le r$ 区

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$\varphi = \int_r^{\infty} E\, dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

2. $a \le r \le b$

$$E = 0$$

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 b}$$

3. $r \le a$

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

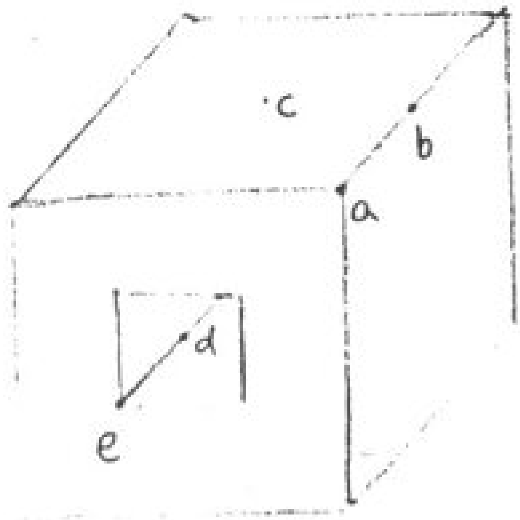
$$\varphi = \int_r^{a} E\, dr + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 b} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a}\right) + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 b}$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$$

题号 自编

题文 有一个穿空的立方体，如图所示。

问若观察点在a、b、c、d和e，立方体表面所张立体角为多少？观察点非常靠近表面，但离开表面向外无限小距离。



解：按a、b、c、d、e依次立体角为

$\frac{\pi}{2}$、π、2π、3π、$\frac{3}{2}\pi$

科目＿＿＿＿分类号＿＿＿＿

基本电工教研组

编制者＿＿＿＿　**习 题 卡 片** 1-11　日期＿＿＿＿

题号 自编

题文 空气中有一圆盘形电偶层，电偶极矩面密度η为常数，圆盘半径为a。试应用立体角求圆盘轴线上的任一点的电位。该点距圆盘中心为x。

解：

$$\varphi = -\frac{\eta}{4\pi\varepsilon_0}\Omega$$

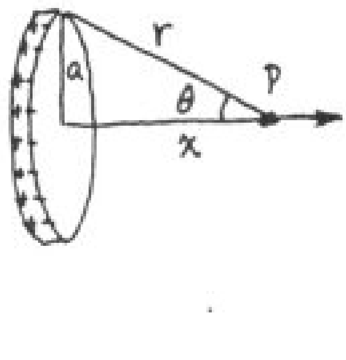
~~立体角~~Ω为球冠形面积对观察点所张的立体角

$$\Omega = \frac{2\pi r^2(1-\cos\theta)}{r^2} = 2\pi(1-\cos\theta)$$

$$= 2\pi\left(1-\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}\right)$$

$$\therefore\ \varphi = -\frac{\eta}{4\pi\varepsilon_0}2\pi\left(1-\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}\right)$$

$$\therefore\ \varphi = \begin{cases} -\dfrac{\eta}{2\varepsilon_0}\left(1-\dfrac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}\right), & x>0 \\ \dfrac{\eta}{2\varepsilon_0}\left(1+\dfrac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}\right), & x<0 \end{cases}$$



科目________分类号________

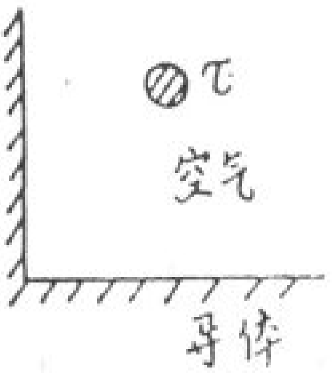
基本电工教研组

编制者________ **习题卡片** 1-12 日期________

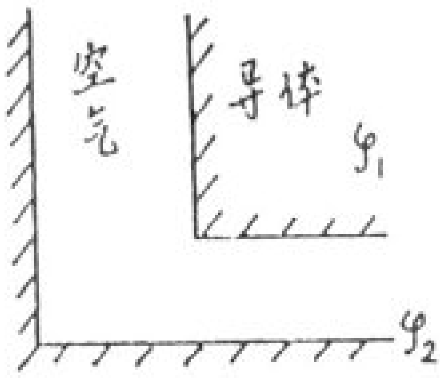
题号 自编《电磁场习题集》1-15

题文

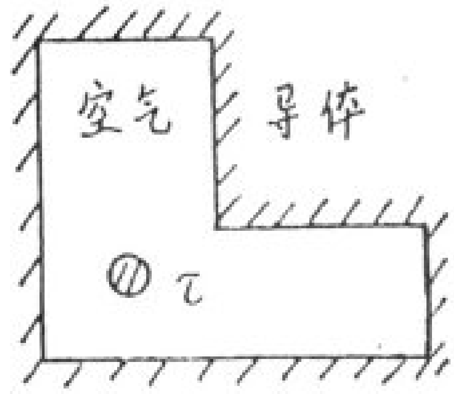
(1-15) 定性地画出以下平行平面场的场图（先画出等位线再画出电力线）。



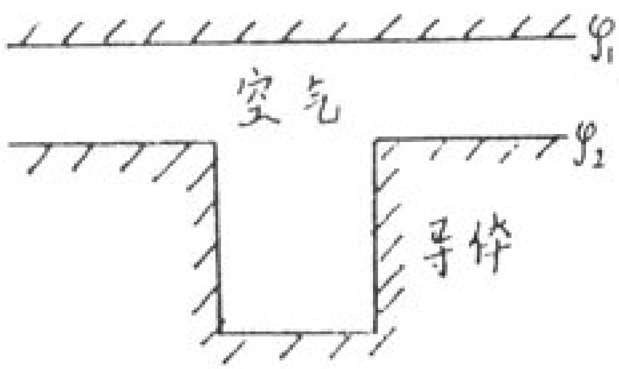
(a)



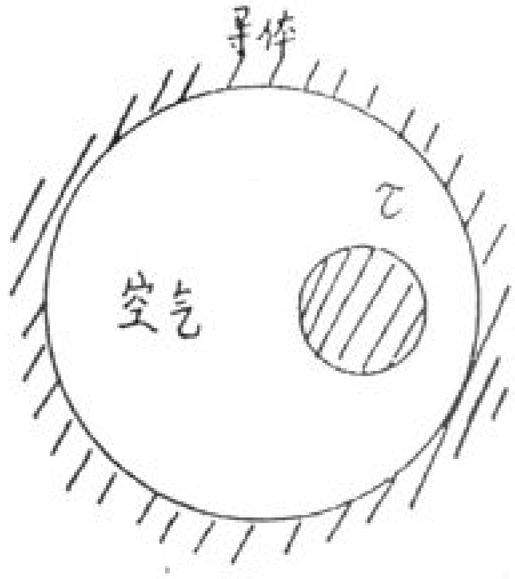
(b)



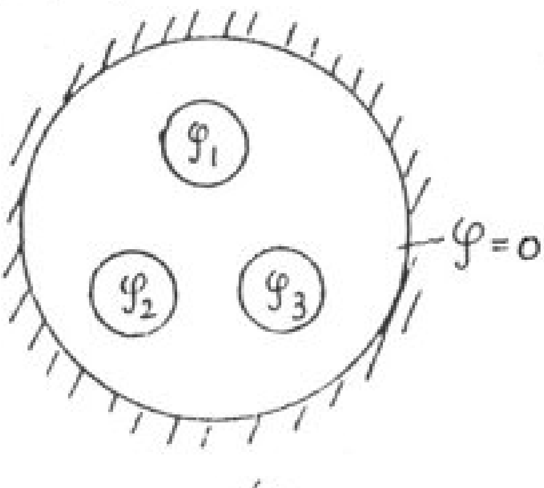
(c)



(d)

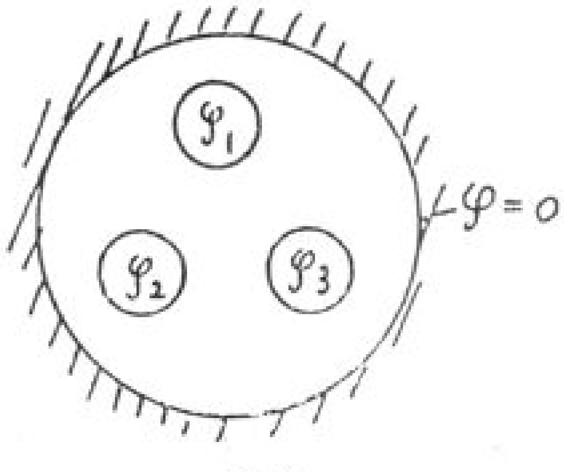


(e)



(f)

$\varphi_1=0$，$\varphi_2=5\,V$，$\varphi_3=-5\,V$



(g)

$\varphi_1=10\,V$，$\varphi_2=\varphi_3=-5\,V$

题号 自编《电磁场习题集》，1-18

题文 有一带电为Q的球体，附近有一块介电常数ε的介质，如图所示。问下列公式仍正确否？

$$\oint_{S_1} \vec{D}\cdot\vec{ds} = Q$$

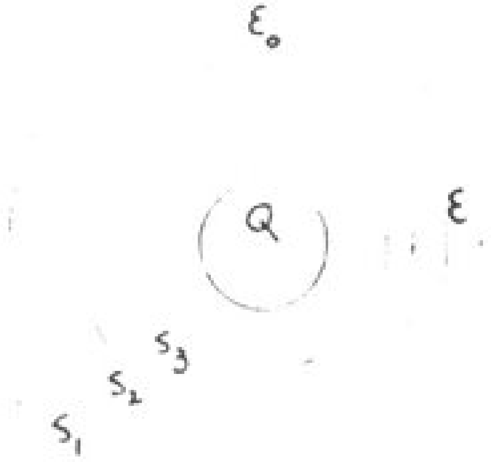
$$\oint_{S_2} \vec{D}\cdot\vec{ds} = Q$$

$$\oint_{S_3} \vec{D}\cdot\vec{ds} = Q$$

$$\vec{D} = \frac{Q}{4\pi r^2}\vec{r}^0$$

$$\oint_{S_1} \vec{E}\cdot\vec{ds} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\oint_{S_2} \vec{E}\cdot\vec{ds} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$



解：

$$\oint_{S_1 \text{或} S_2 \text{或} S_3} \vec{D}\cdot\vec{ds} = Q$$ 均正确

$$\vec{D} = \frac{Q}{4\pi r^2}\vec{r}^0$$ 不正确

$$\oint_{S_1} \vec{E}\cdot\vec{ds} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$ 正确

$$\oint_{S_2} \vec{E}\cdot\vec{ds} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$ 不正确

电路原理习题卡片 1-14

题号 冯慈璋编《电磁场》, 1-13

题文 对于真空中下列各种电位分布，分别求电场强度和电荷体密度：

(1) $\varphi = Ax^2$

(2) $\varphi = Axyz$

(3) $\varphi = Ar^2\sin\alpha + Brz$

(4) $\varphi = Ar^2\sin\theta\cos\alpha$

解：

(1) $$\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi = -\vec{i}\frac{\partial}{\partial x}(Ax^2) = -\vec{i}2Ax$$

$$\rho = -\varepsilon_0\nabla^2\varphi = -\varepsilon_0\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi = -\varepsilon_0 2A$$

(2) $$\vec{E} = -\left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)Axyz = -(\vec{i}Ayz + \vec{j}Axz + \vec{k}A$$

$$\rho = -\varepsilon_0\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)Axyz = 0$$

(3) $$\vec{E} = -\left(\vec{r}^0\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \vec{\alpha}^0\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} + \vec{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) = -\vec{r}^0(2Ar\sin\alpha + Bz)$$
$$-(\vec{\alpha}^0\frac{1}{r}Ar^2\cos\alpha)$$
$$-(\vec{k}Br)$$

$$\rho = -\varepsilon_0\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right]$$
$$= -\varepsilon_0\left[4A\sin\alpha + \frac{Bz}{r} + \frac{1}{r^2}Ar^2(-\sin\alpha)\right]$$
$$= -\varepsilon_0\left[3A\sin\alpha + \frac{Bz}{r}\right]$$

(4) $$\vec{E} = -\left[\vec{r}^0\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \vec{\theta}^0\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} + \vec{\alpha}^0\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\right]$$
$$= -\left[\vec{r}^0 2Ar\sin\theta\cos\alpha + \vec{\theta}^0 Ar\cos\theta\cos\alpha + \vec{\alpha}^0 Ar(-\sin\alpha)\right]$$

$$\rho = -\varepsilon_0\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2}\right]$$

电路原理习题卡片 1-15

题号 冯慈璋，《电磁场》第二版，p.83，1-9

题文 求下列情况下，真空中带电面间的电压：

(1) 相距为 a 的两无限大平行板，面电荷密度分别为 $+\rho_{s0}$ 和 $-\rho_{s0}$；

(2) 无限长同轴圆柱面，半径分别为 a 和 b $(b>a)$，每单位长度上的总电荷：内柱为 τ_0，外柱为 $-\tau_0$；

(3) 半径分别为 R_1 和 R_2 的两同心球面 $(R_2>R_1)$，带有均匀分布的面电荷，其总量分别为 q_0（内球面）和 $-q_0$（外球面）。

解：

(1)

$$E=\frac{\rho_{s0}}{\varepsilon_0}$$

$$U=E\cdot a=\frac{\rho_{s0}}{\varepsilon_0}a$$

(2)

$$E=\frac{\tau_0}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

$$U=\int_a^b E\,dr=\frac{\tau_0}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{b}{a}$$

(3)

$$E=\frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$U=\int_{R_1}^{R_2}E\,dr=\frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)$$

$$\rho=-\varepsilon_0\left[6A\sin\theta\cos\alpha+\frac{\cos2\theta}{\sin\theta}\cos\alpha-\frac{\cos\alpha}{\sin\theta}\right]$$

电路原理习题卡片 1-16

题号 冯慈璋，《电磁场》第二版，p.83，1-10

题文 一圆柱形电容器，外导体的直径为4厘米，内外导体间介质的击穿电场强度为200千伏/厘米。设内导体的直径2r可以自由选定。问r为何值时，该电容器能承受最大电压，并求此最大电压值？

解：

$$E_{max}=\frac{U}{\ln\frac{r_2}{r_1}}\cdot\frac{1}{r_1}$$

$$\therefore\quad U=200r_1\cdot\ln\frac{r_2}{r_1}$$

$$\frac{\partial U}{\partial r_1}=200\left(\ln\frac{r_2}{r_1}-r_1\cdot\frac{1}{r_1}\right)=200\left(\ln\frac{r_2}{r_1}-1\right)$$

令 $\frac{\partial U}{\partial r_1}=0$

则 $\ln\frac{r_2}{r_1}-1=0$

$$\ln\frac{r_2}{r_1}=1$$

$$\therefore\quad \frac{r_2}{r_1}=e^1$$

$$\therefore\quad r_1=\frac{r_2}{e}=\frac{2^{cm}}{e}=0.736\ 厘米$$

$$\therefore\quad U=200\times0.736\times10^{-2}\times1=1\,47\ 千伏$$

电路原理习题卡片 1-17

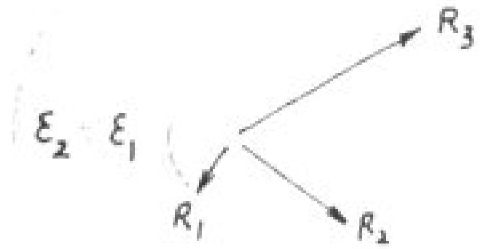
题号 自编《电磁场习题集》，1-17

题文 有一介电常数各为 $\varepsilon_1 = 4\varepsilon_0$，$\varepsilon_2 = 2\varepsilon_0$ 的同轴电缆，如图所示，内外导体单位長所带的电荷各为 τ 及 $-\tau$。

① 求两种介质里以及 $r < R_1$、$r > R_3$ 处的电场强度及电位移

② 求两种介质里的极化强度；

③ 问何处有束缚电荷？等于多少？



解：

① $D = \dfrac{\tau}{2\pi r}$ ； $E = \dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon r}$ ，即 $E_1 = \dfrac{\tau}{8\pi\varepsilon_0 r}$ ， $E_2 = \dfrac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 r}$

② $P = D - \varepsilon_0 E = (\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0 E$ ，即 $P_1 = \dfrac{3\tau}{8\pi r}$ ， $P_2 = \dfrac{\tau}{4\pi r}$

③ 束缚电荷存在于 ε_1 的内表面，ε_1 与 ε_2 的分界面，ε_2 的外表

ε_1 的内表面 $\sigma = -\dfrac{3\tau}{8\pi R_1}$

ε_1 与 ε_2 的分界面 $\sigma = \dfrac{3\tau}{8\pi R_2} - \dfrac{\tau}{4\pi R_2} = \dfrac{\tau}{8\pi R_2}$

ε_2 的外表面 $\sigma = \dfrac{\tau}{4\pi R_3}$

科目________分类号________

基本电工教研组

编制者__________ 习题卡片 1-18 日期________

题号 谢处方《电磁场与电磁波》2.27题

题文 试证明不均匀电介质在没有自由电荷体密度时可能有束缚电荷体密度，并导出束缚电荷体密度 ρ_P 的表示式。

$$\rho_P = -\nabla\cdot\vec{P}$$

$$\because\ \nabla\cdot\vec{D} = \nabla\cdot(\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}) = 0$$

$$\therefore\ \nabla\cdot\vec{P} = -\nabla\cdot(\varepsilon_0\vec{E}) = -\varepsilon_0\nabla\cdot\vec{E}$$

而 $\nabla\cdot\vec{E} = \nabla\cdot\left(\frac{\vec{D}}{\varepsilon}\right) = -\frac{\nabla\varepsilon}{\varepsilon}\cdot\vec{E}$

$$\therefore\ \nabla\cdot\vec{P} = \frac{\nabla\varepsilon}{\varepsilon_r}\cdot\vec{E}$$

$$\therefore\ \rho_P = -\frac{\nabla\varepsilon}{\varepsilon_r}\cdot\vec{E}$$

科目________分类号________

基本电工教研组

编制者__________ 习题卡片 1-19 日期__________

题号 自编《电磁场习题集》，1-22

题文 在一个圆柱形电容器中有二层同轴的绝缘体。其内导体的直径为 2 cm，外导体的直径为 8 cm，内外二绝缘层的厚度为 1 cm 和 2 cm，内外导体间的电位差为 1000 V。已知二层绝缘体内最大场强相等。设外导体为电位参考点。求二层介质交界面的电位。

解：

$$E_1 = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_1 r}, \quad 0.01\,m < r < 0.02\,m, \quad E_{1max} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_1} \times \frac{1}{0.01}$$

$$E_2 = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_2 r}, \quad 0.02\,m < r < 0.04\,m, \quad E_{2max} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_2} \times \frac{1}{0.02}$$

由 $E_{1max} = E_{2max}$

得 $\varepsilon_1 = 2\varepsilon_2$

而 $$U = \int_{0.01}^{0.02} \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_1 r} dr + \int_{0.02}^{0.04} \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_2 r} dr$$

$$1000 = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_1} \ln 2 + \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_2} \ln 2$$

$$1000 = \frac{\tau}{2\pi} (\ln 2) \times \left(\frac{1}{2\varepsilon_2} + \frac{1}{\varepsilon_2} \right)$$

交界面电位

$$\varphi = \int_{0.02}^{0.04} \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_2 r} dr = \frac{2}{3} \times 1000 = 666.7 \ \text{V}$$

科目________分类号________

基本电工教研组

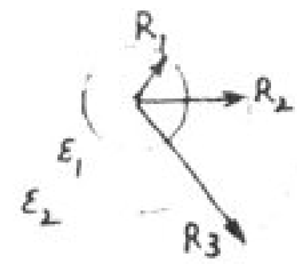
编制者__________ **习 题 卡 片** 1-20 日期________

题号 自编《电磁场习题集》，1-26

题文 同球形电容器，已知内球半径 $R_1 = 0.5$ cm，外球半径 $R_3 = 2.4$ cm，球间用两层介质绝缘，电容器的极板电压为 6000 V。问：

① 欲使二层介质中最大电场强度相等，每层介质的厚度应是多少（即须求图中的 R_2）。

② 若 $\varepsilon_1/\varepsilon_2 = 4$，每层介质的电压降各为多少？



解：

① $E_1 = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_1 r^2}$

$E_2 = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_2 r^2}$

由 $E_{1max} = E_{2max}$，$\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_1 R_1^2} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_2 R_2^2}$

$\therefore \quad R_2 = \sqrt{\dfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} \cdot R_1$

$R_2 = \sqrt{\dfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} \times 0.5$ cm

② 若 $\dfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = 4$, $R_2 = 1.0$ cm

$$U_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_1}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

$$U_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_2}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3}\right)$$

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\frac{\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)}{\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3}\right)}$$

$$\therefore \quad \frac{U_1}{U_2} = \frac{1}{2}\,\frac{1/0.5 - 1/0.707}{1/0.707 - 1/2.4}$$

$$\left.\begin{aligned} &\text{即} \quad \frac{U_1}{U_2} = 0.428 \\ &\text{另} \quad U_1 + U_2 = 6000 \text{ V} \end{aligned}\right\}$$

解得

$$U_1 = 1800 \text{ V}$$

$$U_2 = 4200 \text{ V}$$

题号 冯慈璋，《电磁场》第二版，p.86，1-20

题文 一平行板电容器，极板面积 $S = 400$ 厘米^2，两板相距 $d = 0.5$ 厘米，两板中间的一半厚度为玻璃所占，另一半为空气。已知玻璃的 $\varepsilon_r = 7$，其击穿场强为 60 千伏/厘米，空气的击穿场强为 30 千伏/厘米。当电容器接到 10 千伏的电源时，会不会被击穿？

解：若 ε_{r1}、ε_{r2} 分别表示空气、玻璃之相对介电常数

由分界面条件

$$D_{1n} = D_{2n}$$

$$\varepsilon_{r1} E_1 = \varepsilon_{r2} E_2$$

$$E_1 = 7E_2$$

由题意

$$E_1 \times 0.25 + E_2 \times 0.25 = 10 \times 10^3$$

联立求解

$$(7 \times 0.25 + 0.25) E_2 = 10 \times 10^3$$

玻璃区 $E_2 = 5 \times 10^3$ 伏/厘米

空气区 $E_1 = 35 \times 10^3$ 伏/厘米，可能被击穿。

电 路 原 理 习 题 卡 片

题号 冯慈璋《电磁场》第二版，P.83，1-8

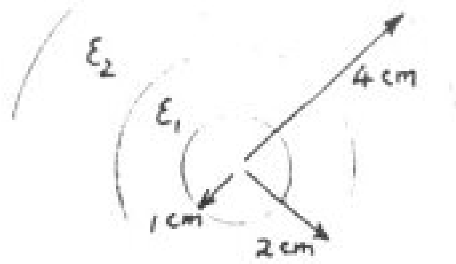
题文 一圆柱形电容器中，同轴地置有两层绝缘体，已知内导体的直径为2厘米，外导体的直径为8厘米，内外两绝缘层的厚度分别为1厘米和2厘米。内外导体间的电压为1000伏。设有一层很薄的金属圆柱片放在两层绝缘介质之间。要使两种介质的最大场强相等，如以外导体为电位参考点，问金属圆柱片的电位应为何值？

解：

$$E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon r}$$

$$U = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon} \ln\frac{r_{max}}{r_{min}}$$

$$\therefore \quad \tau = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln\frac{r_{max}}{r_{min}}} \cdot U$$



无论内层还是外层绝缘

$$\ln\frac{r_{max}}{r_{min}} = \ln 2$$

内层绝缘

$$E_{max} = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln 2} \cdot \frac{1000 - U_x}{2\pi\varepsilon r_{min}} = \frac{1}{\ln 2} \frac{1000 - U_x}{1} \quad 伏/厘米$$

外层绝缘

$$E_{max} = \frac{1}{\ln 2} \frac{U_x}{2} \quad 伏/厘米$$

根据最大场强相等

$$1000 - U_x = \frac{U_x}{2}$$

$$\therefore \quad U_x = \frac{2}{3} \times 1000 = 667 \quad 伏$$

题号 自编《电磁场习题集》，1-37

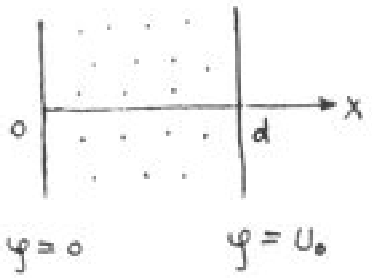
题文 在平行平板电极上加一直流电压 $U_0 = 2$ 伏，极板间均匀分布着体积电荷 ρ。试用泊松方程求出极板间任意一点电位 φ 及电场强度 E。

已知 $\rho = -10^{-6}$ 库/米³，$\varepsilon = \varepsilon_0$，极板间距离 $d = 5$ 毫米。

解：列泊松方程

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$



积分二次，

$$\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}\frac{x^2}{2} + c_1 x + c_2$$

定 c_1、c_2，

$x = 0$，$\varphi = 0$，　$\therefore c_2 = 0$

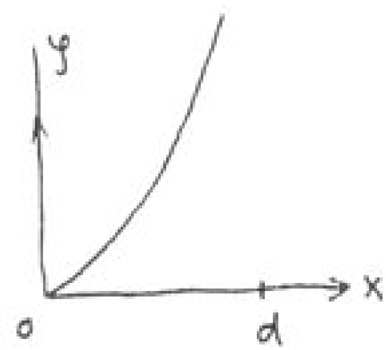
$x = d$，$\varphi = U_0$，　$\therefore c_1 = \frac{1}{d}\left(U_0 + \frac{\rho}{\varepsilon_0}\frac{d^2}{2}\right)$

故
$$\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}\frac{x^2}{2} + \left(\frac{U_0}{d} + \frac{\rho}{\varepsilon_0}\frac{d}{2}\right)x$$

代入数字，

$$\varphi = +\frac{10^{-6}}{8.85\times10^{-12}}\frac{x^2}{2} + \left(\frac{2}{.005} + \frac{-10^{-6}}{8.85\times10^{-12}}\times\frac{.005}{2}\right)x$$

$$= 56.5\times10^{3}\,x^2 + 117.5\,x \text{ 伏}$$



题号 自编《电磁场习题集》，1-36

题文 一半径为 r_0 的无限长介质圆柱体，充有体积电荷 $\rho=\rho_0\frac{r}{r_0}$，$(0<r\le r_0)$。试解泊松方程和拉普拉斯方程，求出圆柱内外的电位和电场强度。已知圆柱体内的介电常数为 ε_1，圆柱体外介质的介电常数为 ε_2。

解：採用圆柱坐标，圆柱体内

$$\nabla^2\varphi_1=-\frac{\rho}{\varepsilon_1}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi_1}{\partial r}\right)=-\frac{\rho_0}{\varepsilon_1}\frac{r}{r_0}$$

$$\therefore r\frac{\partial\varphi_1}{\partial r}=-\frac{\rho_0}{\varepsilon_1 r_0}\cdot\frac{r^3}{3}+c_1,\quad E_1=-\frac{\partial\varphi_1}{\partial r}=\frac{\rho_0}{\varepsilon_1 r_0}\frac{r^2}{3}-c_1\frac{1}{r}$$

$$\therefore \varphi_1=-\frac{\rho_0}{\varepsilon_1 r_0}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{r^3}{3}+c_1\ln r+c_2$$

定 c_1、c_2 常数

$r=0$ 时 $E=0$，$\therefore c_1=0$

选 $r=0$ 处 $\varphi=0$ $\therefore c_2=0$

$$\therefore \varphi_1=-\frac{\rho_0}{\varepsilon_1 r_0}\frac{r^3}{9},\quad E_1=\frac{\rho_0}{\varepsilon_1 r_0}\frac{r^2}{3}$$

圆柱体外

$$\nabla^2\varphi_2=0$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi_2}{\partial r}\right)=0$$

$$\therefore r\frac{\partial\varphi_2}{\partial r}=c_3,\quad E_2=-\frac{\partial\varphi_2}{\partial r}=-\frac{c_3}{r}$$

$$\therefore \varphi_2=c_3\ln r+c_4$$

定 c_3、c_4 常数，根据分界面条件

$r = r_0$ 处，$\varphi_1 = \varphi_2$ ， $\qquad \left.\begin{aligned} -\frac{\rho_0}{\varepsilon_1 r_0}\frac{r_0^3}{9} &= c_3 \ln r_0 + c_4 \\ \varepsilon_1 \frac{\rho_0}{\varepsilon_1 r_0}\frac{r_0^2}{3} &= -\frac{c_3}{r_0}\varepsilon_2 \end{aligned}\right\}$

〃 $\quad -\varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} = -\varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial r}$ ，

$\therefore$

$$c_3 = -\frac{\rho_0}{\varepsilon_2}\frac{r_0^2}{3}$$

$$c_4 = -\frac{\rho_0}{\varepsilon_1}\frac{r_0^2}{9} + \frac{\rho_0}{\varepsilon_2}\frac{r_0^2}{3}\ln r_0 = -\frac{\rho_0 r_0^2}{3}\left(\frac{1}{3\varepsilon_1} - \frac{\ln r_0}{\varepsilon_2}\right)$$

最后结果

$$\varphi_2 = -\frac{\rho_0}{\varepsilon_2}\frac{r_0^2}{3}\ln r - \frac{\rho_0}{\varepsilon_1}\frac{r_0^2}{9} + \frac{\rho_0}{\varepsilon_2}\frac{r_0^2}{3}\ln r_0$$

$$E_2 = \frac{\rho_0}{\varepsilon_2}\frac{r_0^2}{3}\frac{1}{r}$$

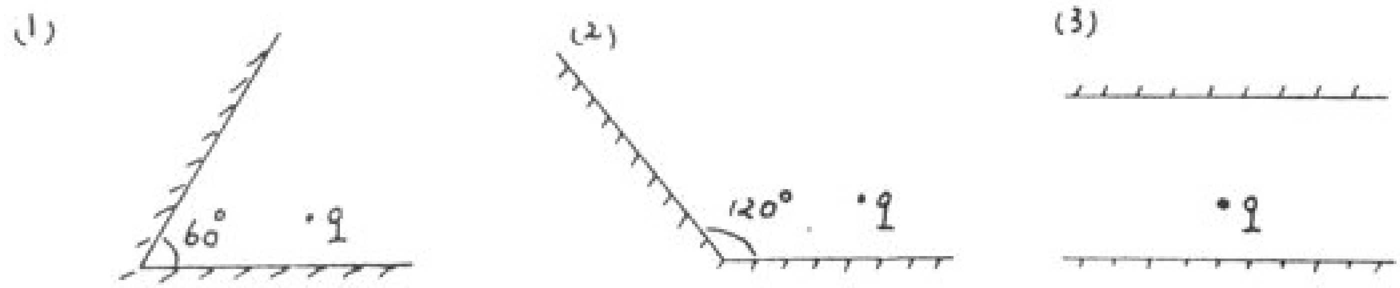
科目________分类号________

基本电工教研组

编制者__________ 习 题 卡 片 1-24 日期__________

题号 自编

题文 以下各小题能否用镜象法求解？如能，画出其镜象电荷的位置和数值；如不能，说明理由。

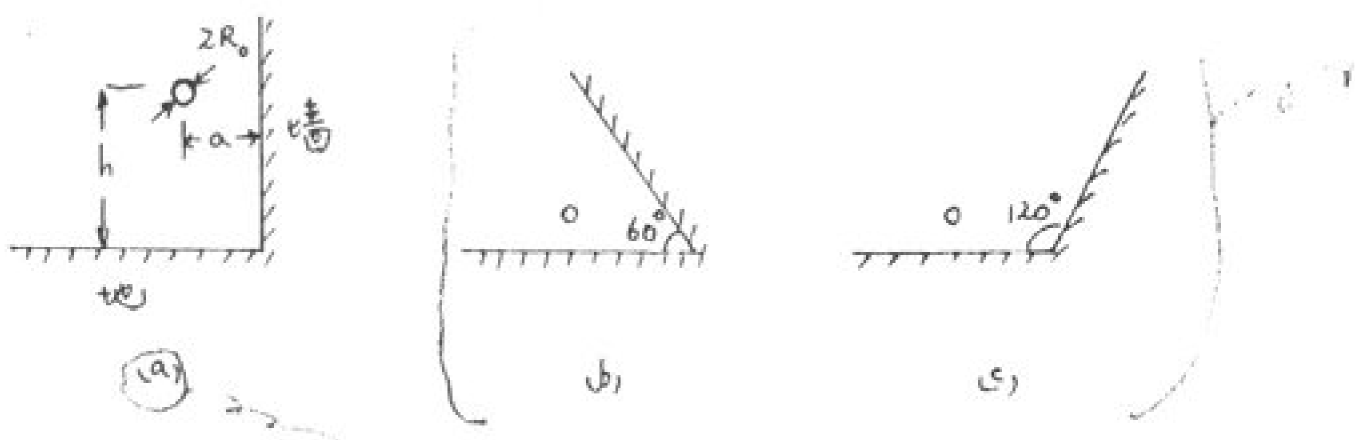


题号

题文 有一与地面平行的导线，其旁边有一高墙。已知 R_0、a、h。求导线单位长电容（如图(a)所示）。

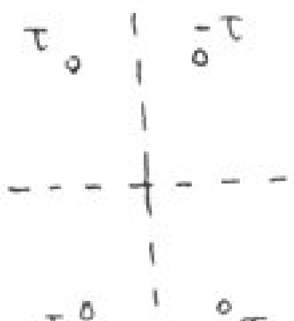
思考：① 为什么能利用镜象法来解静电场问题？

② 如析查所之镜象电荷是否正确？求图(b)所示电场的镜象电荷？图(c)又如何？



解：(a) 镜象法可用，三个镜象电荷加上原电荷τ，共四个。

$$\varphi = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{2h}{R_0} + \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{2a}{\sqrt{4h^2+4a^2}}$$

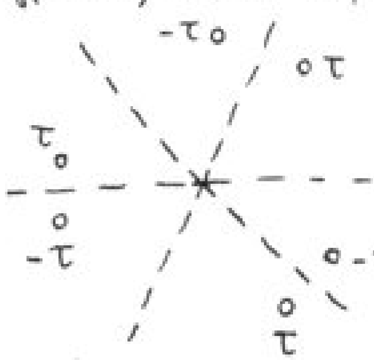


$$\therefore\ C = \frac{\tau}{\varphi - 0} = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\dfrac{2h\cdot a}{R_0\sqrt{h^2+a^2}}}$$

(b) 镜象法可用，五个镜象电荷加上原电荷τ，共六个。

镜象电荷均在域外，

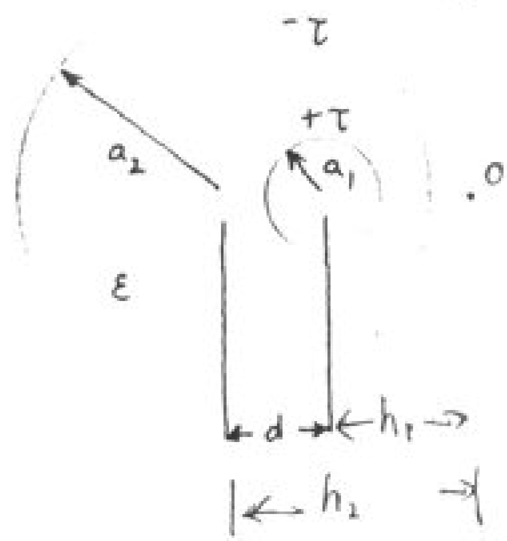
边界条件均满足。



(C) 镜象法不适用。

题号 冯慈璋，《电磁场》第二版，p.87，1-27

题文 求附图所示带等量异号电荷的偏心圆柱导体间的电场。设两~~柱~~导体之间介质的介电常数为 ε，且 a_1、a_2 和 d 都是已知量。



解：镜像法或电轴法，正负电轴至原点的距离均为 b，小、大圆柱圆心至原点的距离分别为 h_1、h_2。

$$\begin{cases} h_1^2 = a_1^2 + b^2 \\ h_2^2 = a_2^2 + b^2 \\ h_2 - h_1 = d \end{cases}$$

联立求解

$$h_2^2 - h_1^2 = a_2^2 - a_1^2$$

$$(h_2 + h_1)(h_2 - h_1) = a_2^2 - a_1^2$$

$$\begin{cases} h_2 + h_1 = \dfrac{a_2^2 - a_1^2}{d} \\ h_2 - h_1 = d \end{cases}$$

两电轴坐标分别为

$$\therefore \quad h_1 = \frac{a_2^2 - a_1^2 - d^2}{2d}$$

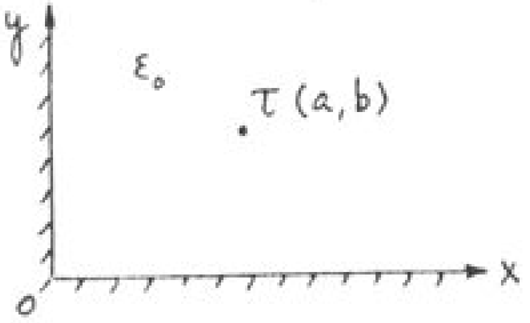
$$h_2 = \frac{a_2^2 - a_1^2 + d^2}{2d}$$

题号 冯慈璋，《电磁场》第二版，p.87，1-28

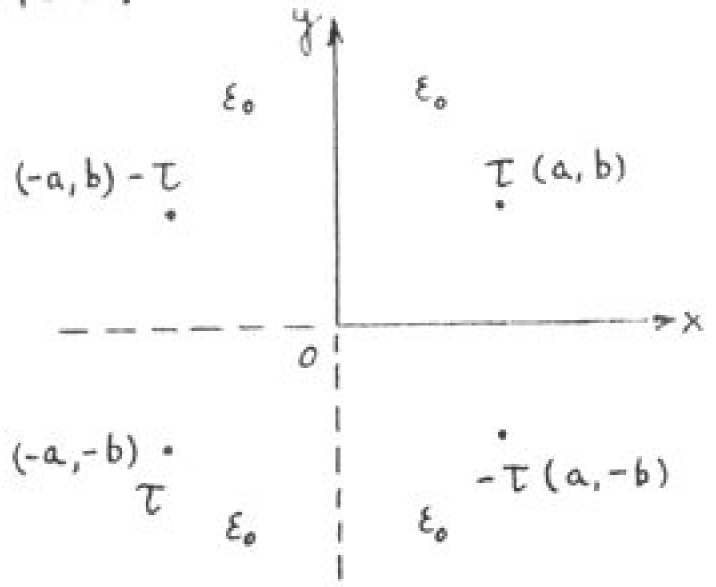
题文 一密度为 τ 的线电荷，置于坐标为 (a, b) 之处，其靠近成直角的导电平板，如附图所示。求：

(1) 线电荷每单位长度所受之力；

(2) 在 $x=0$ 和 $y=0$ 两表面上，每单位长度的感应电荷。



解：采用电轴法



(1) 所受电场力

$$F_x = -\frac{\tau^2}{2\pi\varepsilon_0(2a)} + \frac{\tau^2}{2\pi\varepsilon_0\sqrt{4a^2+4b^2}}\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{-\tau^2 b^2}{4\pi\varepsilon_0 a(a^2+b^2)}$$

$$F_y = -\frac{\tau^2}{2\pi\varepsilon_0(2b)} + \frac{\tau^2}{2\pi\varepsilon_0\sqrt{4a^2+4b^2}}\cdot\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{-\tau^2 a^2}{4\pi\varepsilon_0 b(a^2+b^2)}$$

$$\vec{F} = \vec{i}F_x + \vec{j}F_y$$

$$= \frac{-\tau^2}{4\pi\varepsilon_0(a^2+b^2)ab}\left[\vec{i}b^3 + \vec{j}a^3\right]$$

(2) 在 $x=0$ 平面

$$\tau_1 = \psi_D = 2\frac{-\tau}{2\pi}\left(\frac{\pi}{2} + tg^{-1}\frac{b}{a}\right) + 2\frac{\tau}{2\pi}\left(\frac{\pi}{2} - tg^{-1}\frac{b}{a}\right) = -\frac{2\tau}{\pi} tg^{-1}\frac{b}{a}$$

在 $y=0$ 平面

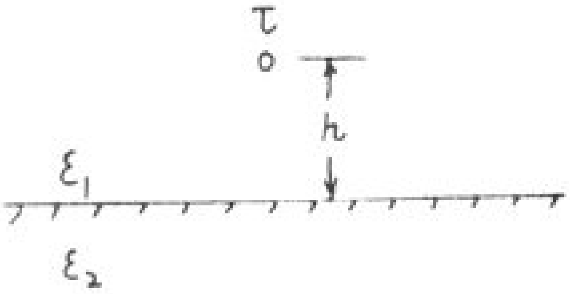
$$\tau_2 = \psi_D = 2\frac{-\tau}{2\pi}\left(\frac{\pi}{2} + tg^{-1}\frac{a}{b}\right) + 2\frac{\tau}{2\pi}\left(\frac{\pi}{2} - tg^{-1}\frac{a}{b}\right) = -\frac{2\tau}{\pi} tg^{-1}\frac{a}{b}$$

$$\tau_1 + \tau_2 = -\tau$$

题号 自编《电磁场习题集》，1-60

题文 介质 ε_1 与 ε_2 以无穷平面为界，在介质 ε_1 里距交界面 h 处，有一条与平面平行的无穷长线，线电荷密度为 τ，如图所示。求镜象线电荷密度的公式。若 $\tau = 6\times10^{-6}$ 库/米，$h = 1$ 米，$\varepsilon_1 = \varepsilon_0$，$\varepsilon_2 = 5\varepsilon_0$，求无穷长线的单位長度所受之力。

解：



静象电轴法

$$\tau' = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\tau = -\frac{2}{3}\tau$$

$$\tau'' = \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\tau = \frac{5}{3}\tau$$

线电荷 τ 的单位長度受力 F，为吸力

$$|F| = \frac{|\tau'|}{2\pi\varepsilon_0(2h)}\cdot\tau = \frac{\frac{2}{3}\tau}{4\pi\varepsilon_0 h}\cdot\tau$$

$$= \frac{\tau^2}{6\pi\varepsilon_0 h}$$

$$= \frac{(6\times10^{-6})^2}{6\pi\times8.85\times10^{-12}\times1}$$

$$= 0.2158 \text{ 牛/米}$$

科目________分类号________

基本电工教研组

习题卡片 1-29

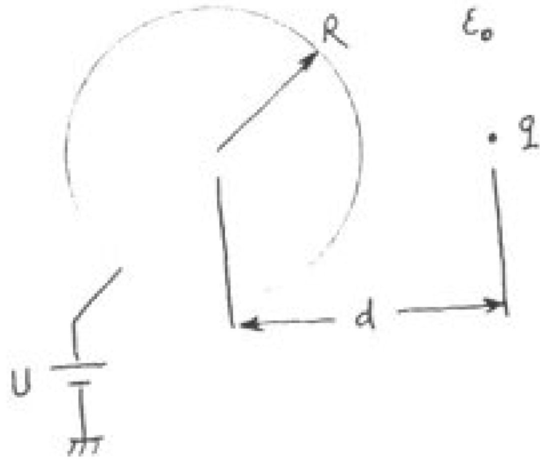
日期________

编制者________

题号 自编

题文 一个导体球接至电压源U的正极，而其负极连至无穷远处之地。若有点电荷q靠近该~~导体~~球，问导体球上总电荷是多少？尺寸均已知，如图所示。

解：



∴ 采用镜象法，为双镜象电荷 q' 和 q''

$q' = -\frac{R}{d}q$ ，偏心距 $b = \frac{R^2}{d}$

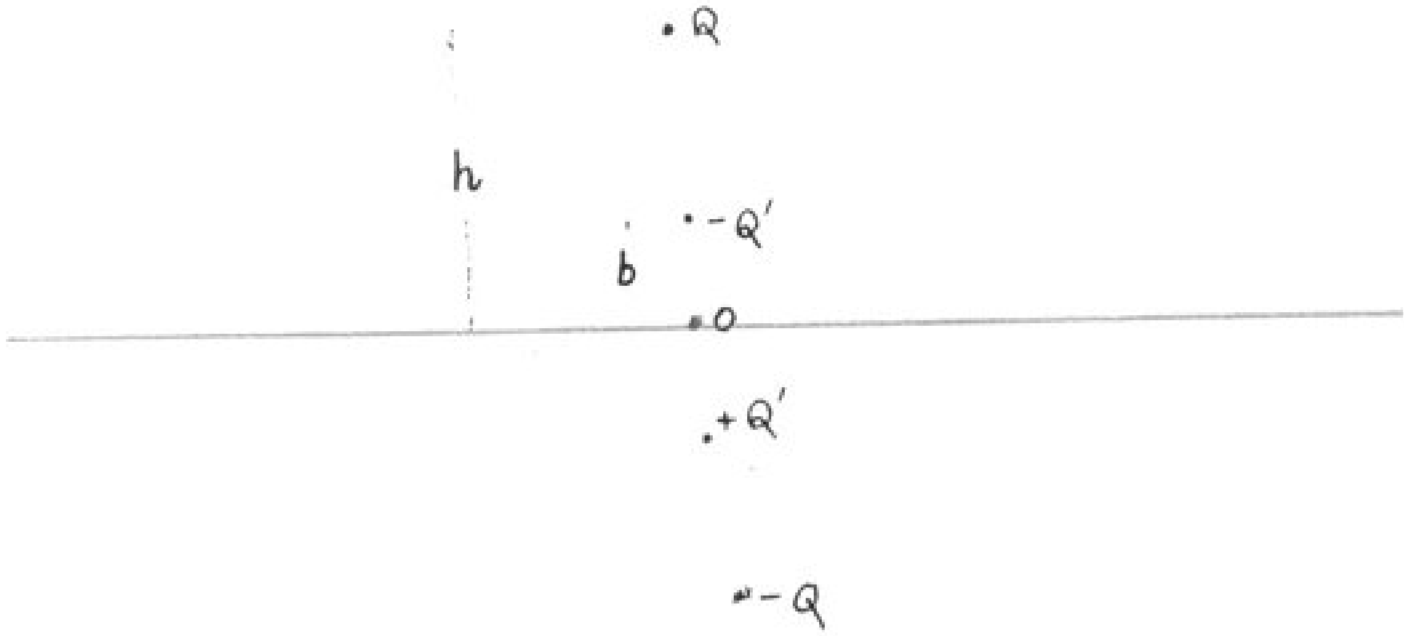
$q'' = 4\pi\varepsilon_0 RU$ ，位于球心

∴ 总电荷 $Q = q' + q'' = 4\pi\varepsilon_0 RU - \frac{R}{d}q$

题号 自编《电磁场习题集》，1-46

题文 点电荷Q置于导体A附近，如图所示。已知Q，h，R。求此点电荷所受的力。

解：导体A上的感应电荷可用镜象电荷代替，



$$b = \frac{R^2}{h}$$

$$Q' = \frac{R}{h} Q$$

电荷受力$\vec{F}$，方向向下，为吸力

$$|\vec{F}| = \frac{Q' \cdot Q}{4\pi\varepsilon_0 (h-b)^2} - \frac{Q' \cdot Q}{4\pi\varepsilon_0 (h+b)^2} + \frac{Q \cdot Q}{4\pi\varepsilon_0 (2h)^2}$$

$$|\vec{F}| = \frac{\frac{R}{h} Q^2}{4\pi\varepsilon_0 \left(h - \frac{R^2}{h}\right)^2} - \frac{\frac{R}{h} Q^2}{4\pi\varepsilon_0 \left(h + \frac{R^2}{h}\right)^2} + \frac{Q^2}{16\pi\varepsilon_0 h^2}$$

$$= \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{4R^3 h^3}{(h^4 - R^4)^2} + \frac{1}{4h^2} \right]$$

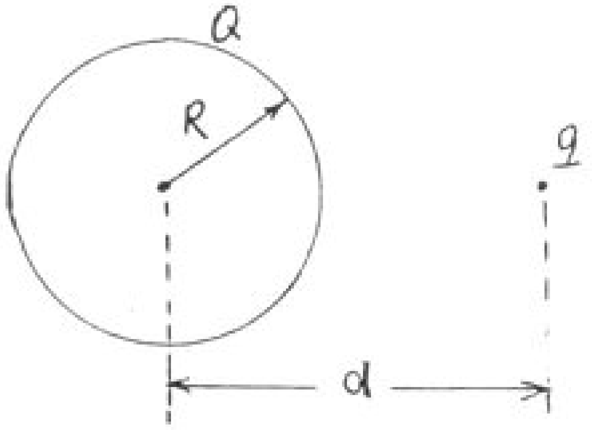
电路原理习题卡片 1-31

题号

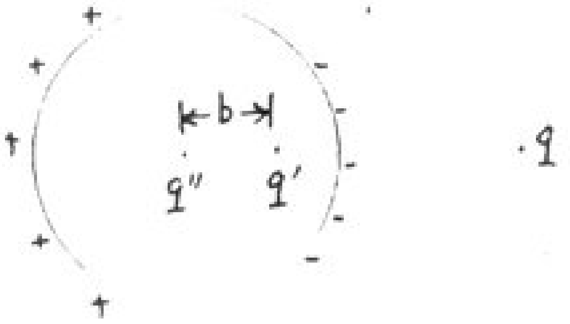
题文

真空中半径为R的导体球带电荷Q，球外有一点电荷q，距球心d。若Q与q均为正电荷，导体球与点电荷q是否可能相吸引？为什么？

解：



采用镜象法分析导体球上的感应电荷分布，



$q' = -\frac{R}{d}q$，吸引电荷q， 吸力 $f' = \frac{q' \cdot q}{4\pi\varepsilon_0 (d-b)^2}$

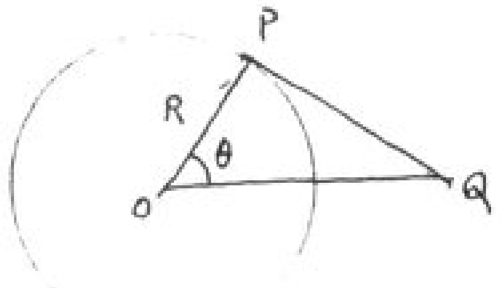
$q'' = \frac{R}{d}q$，排斥 q， 斥力 $f'' = \frac{(Q+q'')\cdot q}{4\pi\varepsilon_0 d^2}$

若 $f' > f''$ 时，可能相吸，即条件为

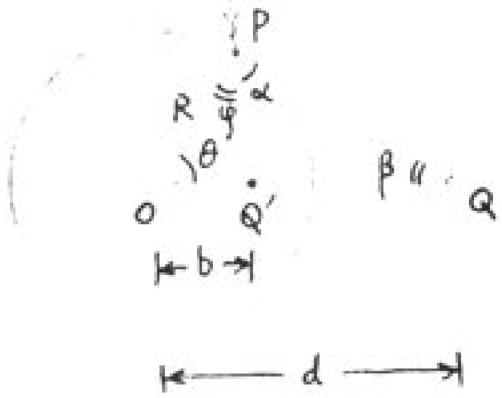
$\frac{|q'|}{(d-b)^2} > \frac{|Q+q''|}{d^2}$ 。 $\frac{|\frac{R}{d}q|}{(d-b)^2} > \frac{|Q+\frac{R}{d}q|}{d^2}$

题号 冯慈璋，《电磁场》第二版，p.89，1-34

题文 附图表示一半径为R的导体球及它的切线PQ。如在Q点置一点电荷q，求P点的表面电荷密度。设球在真空中且是接地的。



解：採用静象法



$$b = \frac{R^2}{d}$$

$$Q' = -\frac{R}{d}Q$$

可得

$$\sigma = D_n = \frac{Q'}{4\pi(\overline{PQ'})^2}\cdot\cos\varphi$$

$$(\overline{PQ'})^2 = R^2 + b^2 - 2Rb\cos\theta$$

$$\cos\varphi = \sin\alpha$$

而 $\dfrac{\sin\alpha}{d-b} = \dfrac{\sin\beta}{\overline{PQ'}}$， $\sin\beta = \dfrac{R}{d}$， $\therefore \cos\varphi = \dfrac{d-b}{d}\dfrac{R}{\overline{PQ'}}$

$$\sigma = \frac{-\frac{R}{d} Q \left(\frac{d-b}{d}\right) R}{4\pi \left(R^2 + b^2 - 2Rb\cos\theta\right)^{3/2}}$$

$$= \frac{-R(d-b)QR}{4\pi d^2 \left(R^2 + b^2 - 2Rb\cos\theta\right)^{3/2}}$$

$$= \frac{-R\left(d - \frac{R^2}{d}\right)QR}{4\pi d^2 \left(R^2 + \frac{R^4}{d^2} - 2R\frac{R^2}{d}\cos\theta\right)^{3/2}}$$

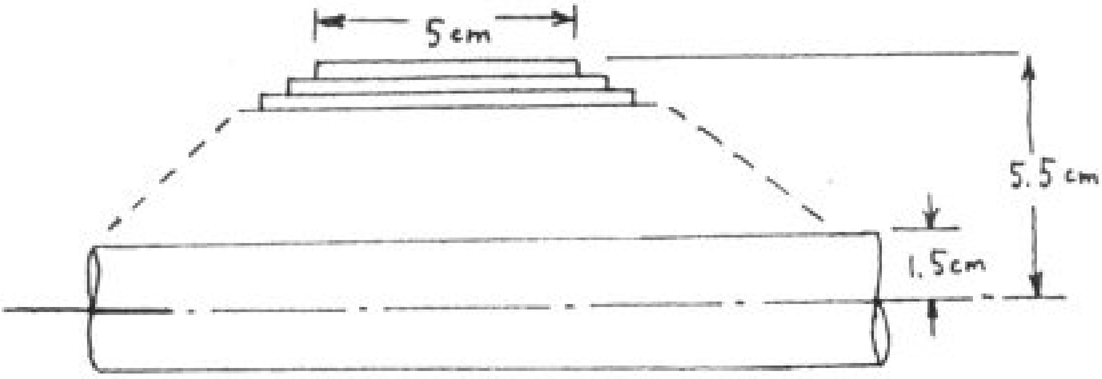
$$= \frac{-\frac{R}{d} Q \left(d^2 - R^2\right) R}{4\pi \cancel{\frac{1}{d}} \left(R^2 d^2 + R^4 - 2R^3 d \cdot \cos\theta\right)^{3/2}}$$

$$= \frac{-\frac{R}{\cancel{d}} Q \left(d^2 - R^2\right) R}{4\pi \left(R^2 d^2 + R^4 - 2R^3 \cancel{d} \cdot \frac{R}{\cancel{d}}\right)^{3/2}}$$

$$\therefore \quad \sigma = \frac{-\frac{R}{\cancel{d}} QR}{4\pi R^3 \left(d^2 - R^2\right)^{1/2}} = -\frac{Q}{4\pi R\sqrt{d^2 - R^2}}$$

题号 自编《电磁场习题集》，1－28

题文 在电容式绝缘套管中，将绝缘分成同样厚度的许多薄层，各层之间隔以金属板，板的厚度可以不计。若层数为20，最外层长度为5 cm，外半径为5.5 cm，内半径为1.5 cm，试定出各层的长度。要求：应使各层绝缘所受的最大电场强度相同。



解：

$$E = \frac{Q}{2\pi \varepsilon r l} = \text{const.}$$

$$\therefore \quad rl = \text{const.} \qquad rl = 27.5\ \text{cm}^2$$

$$\text{每层厚度}\ \Delta r = \frac{5.5-1.5}{20}\ \text{cm} = 0.2\ \text{cm}.$$

层号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
r cm	5.5	5.3	5.1	4.9	4.7	4.5	4.3	4.1	3.9	3.7	3.5	3.3	3.1	2.9	2.7	2.5	2.3	2.1	1.9	1.7
l cm	5	5.2	5.4	5.6	5.9	6.1	6.4	6.7	7.1	7.4	7.9	8.3	8.9	9.5	10.2	11	12	13.1	14.5	16.2

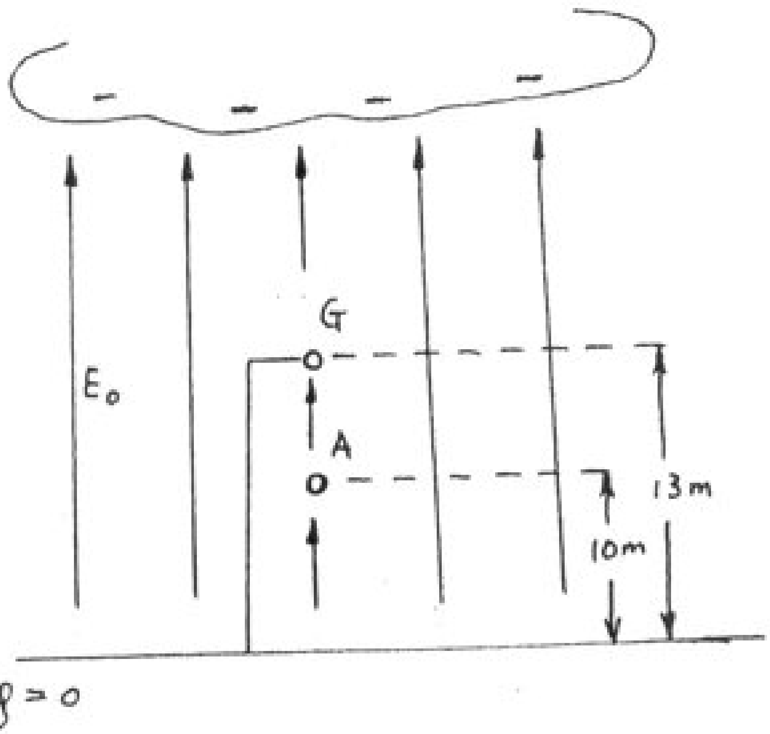
题号 自编《电磁场习题集》, 1-44

题文 雷雨天时,在某区域内,带负电的云与地面之间形成一均匀电场 E_0。为了使在云下的高压输电线A避免雷击,在A的上空置一接地的架空地线,如图所示;它可将A线上电位降低,对输电线起屏蔽作用。已知G的高度13 m,半径为5 mm,而A的高度为10 m。求出在这均匀电场中,加入架空地线后,A线的电位变化

$$\frac{\varphi_A(\text{无地线}) - \varphi_A'(\text{有地线})}{\varphi_A}$$

讨论地线高度对电位变化的影响(设 τ_A 为零)。

提示:先用镜象法求出G上的感应电荷(G接地、$\varphi_G = 0$),再用迭加法求 φ_A。



无地线时,考虑为均匀电场

$$\varphi_A = -E_0 \times 10\,\text{m}$$

有地线时,G上有感应电荷 τ_G,採用镜象电轴法

$$\varphi_A' = -E_0 \times 10^m + \frac{\tau_G}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{13+10^m}{13-10^m}$$

$$\frac{\tau_G}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{13 + 13^m}{5 \times 10^{-3} m} - E_0 \times 13 m = 0 \quad , \quad \tau_G / 2\pi\varepsilon_0 = \frac{E_0 \times 13}{8.556} = E_0 \times 1.519$$

$$\frac{\varphi_A - \varphi_A'}{\varphi_A} = \frac{-(\tau_G / 2\pi\varepsilon_0) \ln 23/3}{- E_0 \times 10} = + \frac{E_0 \times 1.519 \ln 7.667}{E_0 \times 10} = + 0.3094$$

科目________分类号________

基本电工教研组

习题卡片 1-35

日期________

者________

号 自编《电磁场习题集》1-10

文 两个金属小球半径为 1 cm，相距为 20 cm，处于空气中。

①若已知 φ_1、φ_2，求 q_1、q_2。

②若已知 φ_1、q_2，求 q_1、φ_2。

③欲使小球1带电荷 $q_1 = 10^{-8}$ 库仑，小球2不带电荷（$q_2=0$），该用什么方法？

解：

$$\begin{cases} \varphi_1 = \dfrac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r} + \dfrac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 d} \\ \varphi_2 = \dfrac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 d} + \dfrac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r} \end{cases}$$

① $$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi 8.85\times10^{-12}\times10^{-2}} q_1 + \frac{1}{4\pi 8.85\times10^{-12}\times20\times10^{-2}} q_2$$

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{1}{111.2\times10^{-14}} q_1 + \frac{1}{111.2\times10^{-14}}\cdot\frac{1}{20} q_2 \\ \varphi_2 &= \frac{1}{111.2\times10^{-14}}\cdot\frac{1}{20} q_1 + \frac{1}{111.2\times10^{-14}} q_2 \end{aligned}\right\}$$

$$\therefore q_1 = \frac{111.2\times10^{-14}\begin{vmatrix} \varphi_1 & \frac{1}{20} \\ \varphi_2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{20} \\ \frac{1}{20} & 1 \end{vmatrix}} \doteq \left(\varphi_1 - \frac{1}{20}\varphi_2\right) 111.2\times10^{-14} \text{ 库}$$

② $$q_1 = +111.2\times10^{-14}\varphi_1 - \frac{1}{20} q_2$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{111.2\times10^{-14}}\cdot\frac{1}{20}\left(+111.2\times10^{-14}\varphi_1 - \frac{1}{20} q_2\right) + \frac{1}{111.2\times10^{-14}} q_2$$

$$\doteq +\frac{1}{20}\varphi_1 + \frac{1}{111.2\times10^{-14}} q_2$$

(3) 使 $\varphi_2 = \frac{1}{20}\varphi_1$ 时，$q_2 = 0$

$$\varphi_1 = \frac{1}{111.2\times10^{-14}}\times10^{-8} = 8993\text{V}$$

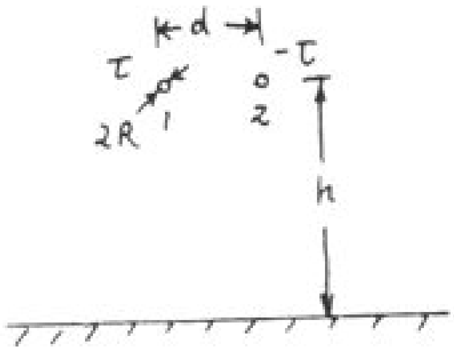
电路原理习题卡片 1-36

题号 自编《电磁场习题集》，1-41

题文 有一半径为5毫米的二线传输线，轴线相距2米，离地6米。另外有一同轴电缆，芯子及外皮半径各为5毫米及10毫米，绝缘材料的介电常数 $\varepsilon = 3.5\varepsilon_0$。求二者单位长的电容。并比较之。

解：

① 二线传输线



$$\varphi_1 = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{2h}{R} + \frac{-\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{\sqrt{4h^2+d^2}}{d}$$

$$\varphi_2 = -\varphi_1$$

$$\therefore\ C = \frac{\tau}{\varphi_1-\varphi_2} = \frac{\pi\varepsilon_0}{\ln\frac{2h}{R} - \ln\frac{\sqrt{4h^2+d^2}}{d}}$$

$$= \frac{\pi\varepsilon_0}{\ln\frac{2h\cdot d}{R\cdot\sqrt{4h^2+d^2}}}$$

$$= \frac{\pi\varepsilon_0}{\ln\frac{12\times 2}{.005\times\sqrt{12^2+2^2}}}$$

$$= \frac{\pi\times 8.85\times 10^{-12}}{\ln\left(\frac{2}{.005}\times\frac{12}{12.16}\right)}$$

$$= 4.651\times 10^{-12}\ \text{法/米}$$

② 同轴电缆

$$U = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{R_2}{R_1}$$ ，R_1 芯子半径，R_2 外皮的内半径

$$C = \frac{\tau}{U} = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln\frac{R_2}{R_1}}$$

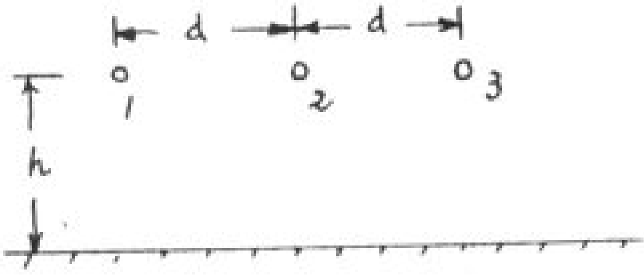
$$= \frac{2\pi\times 3.5\times 8.85\times 10^{-12}}{\ln\frac{10}{5}}$$

$$= 280.8\times 10^{-12}\ \text{法/米}$$ 电缆电容大于传输线几十倍。

电路原理习题卡片 1-37

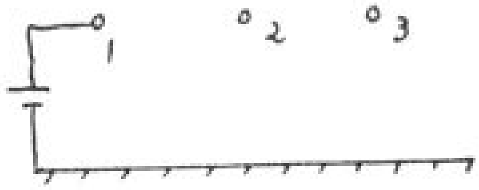
题号 自编《电磁场习题集》，1-51

题文 三条输电线位于同一水平面上，导体半径均为 $r_0 = 4\ mm$，距地面高度 $h = 14\ m$，线间距离 $d = 2\ m$，其中导线1接电源对地电压为 $U = 110$ 千伏。(1)导线2、3未接至电源但它们由于静电场作用也有电压，问电压各为多少？(2)若将导线2接地，问导线2上的电荷~~是多少~~和导线3对地电压分别为多少？(3)此时若导线的接地线切断，然后电源也断开，问三根线对地的电压为多少？



解：

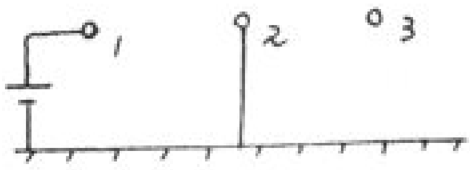
(1)
$$\begin{cases} \varphi_1 = \dfrac{\tau_1}{2\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{2h}{r_0} = 110\ KV. \\ \varphi_2 = \dfrac{\tau_1}{2\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{\sqrt{(2h)^2+d^2}}{d} \\ \varphi_3 = \dfrac{\tau_1}{2\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{\sqrt{(2h)^2+(2d)^2}}{2d} \end{cases}$$



(1)

$$\therefore\ \varphi_2 = \frac{\ln\dfrac{\sqrt{(2h)^2+d^2}}{d}}{\ln\dfrac{2h}{r_0}}\times 110^{KV}$$

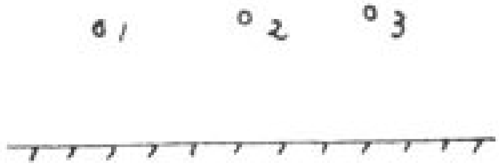
$$= \frac{\ln\dfrac{\sqrt{28^2+2^2}}{2}}{\ln\dfrac{28}{.004}}\times 110^{KV}$$



(2)

$$= 32.8\ KV$$

$$\varphi_3 = \frac{\ln\dfrac{\sqrt{(2h)^2+(2d)^2}}{2d}}{\ln\dfrac{2h}{r_0}}\times 110^{KV}$$



(3)

$$= \frac{\ln\dfrac{\sqrt{28^2+4^2}}{4}}{8.854}\times 110^{KV}$$

$$= 24.3\ kV$$

(2) 求 τ_2 及其对 φ_3 的影响

$$\left.\begin{aligned}\varphi_1 &= \frac{\tau_1}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{2h}{r_0} + \frac{\tau_2}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{\sqrt{(2h)^2+d^2}}{d} = 110\,\text{KV} \\ \varphi_2 &= \frac{\tau_1}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{\sqrt{(2h)^2+d^2}}{d} + \frac{\tau_2}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{2h}{r_0} = 0\end{aligned}\right\}$$

解联立方程

$$\tau_2 = \frac{-2\pi\varepsilon_0\ln\frac{\sqrt{4h^2+d^2}}{d}}{\begin{vmatrix}\ln\frac{2h}{r_0} & \ln\frac{\sqrt{4h^2+d^2}}{d} \\ \ln\frac{\sqrt{4h^2+d^2}}{d} & \ln\frac{2h}{r_0}\end{vmatrix}}\,110\,\text{KV}$$

$$= \frac{-2\pi\varepsilon_0\ln\frac{\sqrt{4h^2+d^2}}{d}}{\left(\ln\frac{2h}{r_0}\right)^2-\left(\ln\frac{\sqrt{4h^2+d^2}}{d}\right)^2}\,110\,\text{KV}$$

$$= \frac{-2\pi 8.85\times10^{-12}\ln\frac{\sqrt{28^2+2^2}}{2}}{\left(\ln\frac{28}{.004}\right)^2-\left(\ln\frac{\sqrt{28^2+2^2}}{2}\right)^2}\,110\times10^3$$

$$= \frac{-2\pi 8.85\times10^{-12}\times2.642}{(8.854)^2-(2.642)^2}\,110\times10^3$$

$\tau_2 = -226.3\times10^{-9}$ 库/米，　$\tau_1 = -\tau_2\dfrac{\ln\frac{2h}{r_0}}{\ln\frac{\sqrt{4h^2+d^2}}{d}} = 758.4\times10^{-9}$ 库/米

$$\varphi_{32} = \frac{\tau_2}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{\sqrt{(2h)^2+d^2}}{d} = \frac{-226.3\times10^{-9}}{2\pi8.85\times10^{-12}}\ln\frac{\sqrt{28^2+2^2}}{2}$$

$$= -10.75\times10^3\ \text{V}$$

$$\varphi_{31} = \frac{\tau_1}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{\sqrt{(2h)^2+(2d)^2}}{2d} = \frac{758.4\times10^{-9}}{2\pi8.85\times10^{-12}}\ln\frac{\sqrt{28^2+4^2}}{4}$$

$$= 26.68\times10^3\ \text{V}$$

$\therefore\ \varphi_3 = \varphi_{31}+\varphi_{32} = 15.93\ \text{KV}$

(3) 因电荷未变，三根线对地的电压不变，与(2)相同，即：

$\varphi_1 = 110\ \text{KV}$

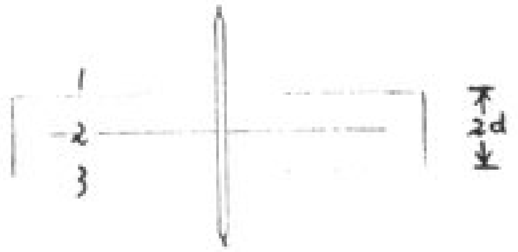
$\varphi_2 = 0$

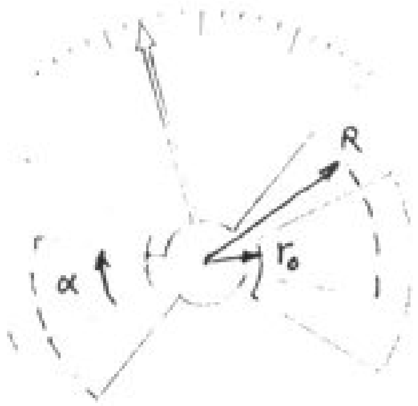
$\varphi_3 = 15.93\ \text{KV}$

电路原理习题卡片 1-38

题号 自编《电磁场习题集》，1-73

题文 有一静电伏特计，其构造如图所示：外面二片导体1、3是相连的定片，中间的一片2是可转动的。被测电压加在1、2上时，动片2即受力而偏转。各片都是扇形，其中：$R = 8\ cm$，$r_0 = 1cm$，$d = 1.5\ cm$。求当被测电压为 6 kV 时的偏转力矩 T。





解：虚位移法

$$T = \left.\frac{\partial W_e}{\partial \alpha}\right|_{U=const.} = \frac{1}{2}U^2\frac{\partial C}{\partial \alpha}$$

电容C，

$$C = (\pi R^2 - \pi r_0^2)\frac{2\alpha}{2\pi}\cdot 2\varepsilon_0/d = (R^2 - r_0^2)\alpha\frac{2\varepsilon_0}{d}$$

代入，

$$T = U^2(R^2 - r_0^2)\frac{\varepsilon_0}{d}$$

$$= (6\times10^3)^2[(8\times10^{-2})^2 - (10^{-2})^2]\frac{8.85\times10^{-12}}{1.5\times10^{-2}}$$

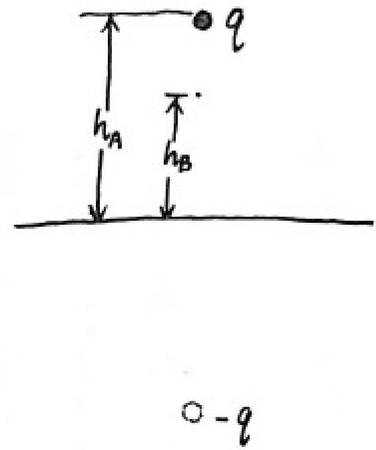
$$= 36\times10^6\times63\times10^{-4}\frac{8.85\times10^{-12}}{1.5\times10^{-2}}$$

$$= 133.81\times10^{-6} \text{ 牛·米}$$

1-39. 解：设 q 离导体板的距离为 r.

镜像电荷 $-q$.

电场力做的功包含对 q、$-q$ 两者做的功.



(1) 用库仑定律：

$$f = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 (2r)^2}$$

$$W_{AB} = 2\int_{h_A}^{h_B} f\,(-dr)$$

$$= 2\int_{h_A}^{h_B} \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 (2r)^2}\,(-dr)$$

$$= \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r}\Big|_{h_A}^{h_B}$$

$$= \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{h_B} - \frac{1}{h_A}\right).$$

(2) 用电场能量的变化：

$$W_A = \frac{1}{2}\left[q\cdot\frac{-q}{4\pi\varepsilon_0\cdot 2h_A} + (-q)\cdot\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\cdot 2h_A}\right] = \frac{-q^2}{8\pi\varepsilon_0 h_A}$$

$$W_B = \frac{1}{2}\left[q\cdot\frac{-q}{4\pi\varepsilon_0\cdot 2h_B} + (-q)\cdot\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\cdot 2h_B}\right] = \frac{-q^2}{8\pi\varepsilon_0 h_B}$$

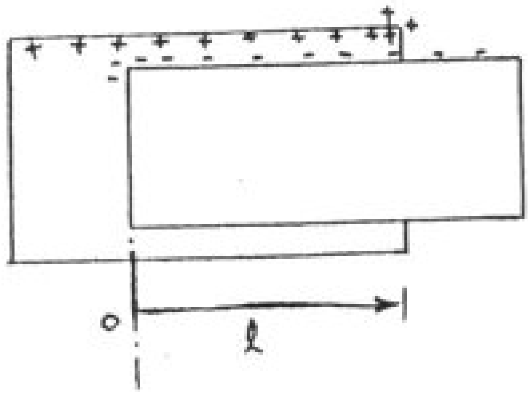
$$\therefore W_{AB} = W_A - W_B = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{h_B} - \frac{1}{h_A}\right).$$

电路原理习题卡片 1-40

题号 自编《电磁场习题集》，1-75

题文 两个长的同轴金属圆筒~~导体~~的位置如图所示。在圆柱体间加以 $U_0 = 1000$ 伏的电压。圆柱体的半径为 $R_1 = 5\,cm$，$R_2 = 6\,cm$。求趋向于推动里面那个圆柱体的力。由于两圆柱体的公共部分很长，~~因此在某些部分的~~故除筒端部分外电场可以看作是平行平面的。

解：设置坐标 l，如图。



$$F_l = \left.\frac{\partial W_e}{\partial l}\right|_{U=const.}$$

$$= \frac{1}{2}U^2\frac{\partial C}{\partial l}$$

电容 C，

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\frac{R_2}{R_1}}l + C_{筒端}$$

$$\frac{\partial C}{\partial l} \approx \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\frac{R_2}{R_1}}$$

$$\therefore\quad F_l = \frac{1}{2}U_0^2\frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\frac{R_2}{R_1}} = U_0^2\frac{\pi\varepsilon_0}{\ln\frac{R_2}{R_1}}$$

$$= (10^3)^2\frac{\pi\times 8.85\times 10^{-12}}{\ln\frac{6}{5}}$$

$$= 152.5\times 10^{-6}\ 牛$$

为吸力，趋于使两圆柱体不错开。

电路原理习题卡片 1-41

题号 冯慈璋，《电磁场》第二版，p.91，1-43

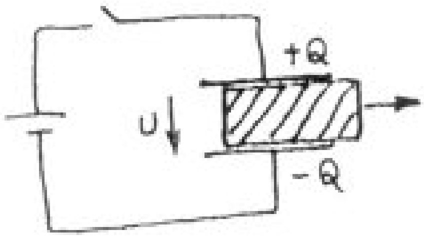
题文 用8毫米厚、$\varepsilon_r = 5$的介质片隔开的两片金属盘，形成一电容为1皮法的平行板电容器，接到一1000伏电源。如果不计摩擦，要把介质片从两金属盘间移出来，问在下列情况需作多少功：

(1) 移动前，电源已断开；

(2) 移动中，电源一直联着。

解：

(1) 移动前，电源已断开



$Q = \text{const}.$

$$\vec{f}\cdot\vec{dg} = -dW_e\Big|_{Q=\text{const}}.$$

$$\int -\vec{f}\cdot\vec{dg} = +\left(\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C_2} - \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C_1}\right)$$

式中 C_2 为介质片移出后电容，$C_2 = \frac{\varepsilon_0 S}{l} = 0.2\,pF$

C_1 〃 〃 前 〃，$C_1 = \frac{\varepsilon_r\varepsilon_0 S}{l} = 1\,pF.$

外加克服电场力所作的功为 $-\vec{f}\cdot\vec{dg}$，$Q = C_1U = 1\times10^{-12}\times10^{3} = 10^{-9}C.$

$$\int -\vec{f}\cdot\vec{dg} = \frac{1}{2}(10^{-9})^2\left(\frac{1}{0.2\times10^{-12}} - \frac{1}{10^{-12}}\right) = 2\times10^{-6}$$ 焦

(2) 移动中，电源一直联着

$U = \text{const}.$

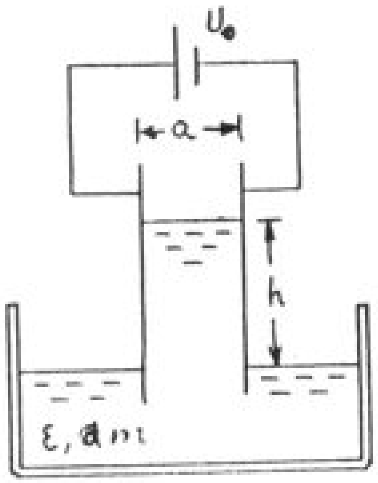
$$\vec{f}\cdot\vec{dg} = dW_e\Big|_{U=\text{const}}.$$

$$\int -\vec{f}\cdot\vec{dg} = -\left(\frac{1}{2}C_2U^2 - \frac{1}{2}C_1U^2\right) = \frac{-1}{2}(10^3)^2(0.2-1)\times10^{-12} = +0.4\times10^{-6}$$ 焦

电路原理习题卡片 1-42

题号 《电磁场习题集》自编，1-77

题文 测定液体电介质的介电常数的仪器示意图如图所示。已知平行板电容器两极板间的距离为a，液体电介质的密度为m，液面高度差为h，两极板间电压为U_0。求液体电介质的介电常数ε。



解：

电场力 $f = \dfrac{\partial W_e}{\partial h} = \dfrac{1}{2}(\varepsilon - \varepsilon_0)\left(\dfrac{U_0}{a}\right)^2 a \cdot 1$

重力 $f = mgha$

$$\therefore \quad h = \frac{1}{2}\frac{(\varepsilon - \varepsilon_0)}{mga^2}U_0^2$$

或 $$(\varepsilon - \varepsilon_0) = \frac{2mga^2}{U_0^2}h$$

$$\therefore \quad \varepsilon = \frac{2mga^2}{U_0^2}h + \varepsilon_0$$

电路原理习题卡片 1-43

题号 黄礼镇，《电磁场原理》人教社，1980年，2-25

题文 两个电容器为 C_1 和 C_2，各充以电荷 Q_1 和 Q_2。然后移去电源，将二电容器并联，总的能量是否减少？减了多少？到哪里去了？

解：

1. 并联前 C_1， $W_1 = \frac{1}{2}\frac{Q_1^2}{C_1}$

 〃 C_2， $W_2 = \frac{1}{2}\frac{Q_2^2}{C_2}$

2. 并联后，电压相等，电荷重新分配

$$\begin{cases} U = \dfrac{Q_1'}{C_1} = \dfrac{Q_2'}{C_2} \\ Q_1' + Q_2' = Q_1 + Q_2 \end{cases}$$

$$Q_2' = \frac{C_2}{C_1} Q_1'$$

$$\left(1 + \frac{C_2}{C_1}\right) Q_1' = Q_1 + Q_2$$

$$\therefore \quad Q_1' = \frac{C_1}{C_1 + C_2}(Q_1 + Q_2)$$

和 $Q_2' = \frac{C_2}{C_1 + C_2}(Q_1 + Q_2)$

3. 能量有损失 ΔW，变为热能和火花

并联后 C_1， $W_1 = \frac{1}{2}\frac{Q_1^2}{C_1} = \frac{1}{2}C_1 U^2 = \frac{1}{2}C_1\frac{(Q_1+Q_2)^2}{(C_1+C_2)^2}$

 〃 C_2， $W_2 = \frac{1}{2}\frac{Q_2^2}{C_2} = \frac{1}{2}C_2 U^2 = \frac{1}{2}C_2\frac{(Q_1+Q_2)^2}{(C_1+C_2)^2}$

$$\Delta W = \frac{1}{2}\frac{Q_1^2}{C_1} - \frac{1}{2}C_1\frac{(Q_1+Q_2)^2}{(C_1+C_2)^2} + \frac{1}{2}\frac{Q_2^2}{C_2} - \frac{1}{2}C_2\frac{(Q_1+Q_2)^2}{(C_1+C_2)^2}$$

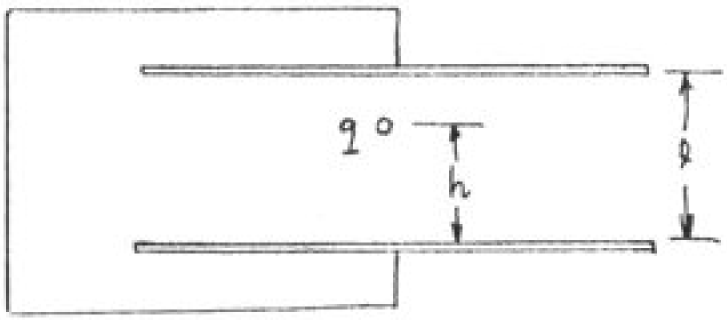
$$= \frac{1}{2}\frac{(C_1 Q_2 - C_2 Q_1)^2}{C_1 C_2 (C_1 + C_2)}$$

1-44

电路原理习题卡片

题号 自编《电磁场习题集》，1-56

题文 在平行板电极之间放置一个电荷为 q 的微粒，极板间的距离为 l，电荷到下极板的距离为 h。然后将两极板用导线联接在一起。试求出在上极板和下极板的内侧所感应出来的电荷。



解：上极板为导体1，微粒为导体2，下极板为参考导体0

多导体系统公式

$$\begin{cases}\varphi_1 = \alpha_{11} q_1 + \alpha_{12} q_2 \\ \varphi_2 = \alpha_{21} q_1 + \alpha_{22} q_2\end{cases}$$

$$0 = \alpha_{11} q_1 + \alpha_{12} q_2$$

$$\therefore\ q_1 = -\frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}} q_2$$

$$= -\frac{\alpha_{21}}{\alpha_{11}} q, \quad (\because \alpha_{12} = \alpha_{21})$$

$$\text{而}\ \alpha_{21} = \left.\frac{\varphi_2}{q_1}\right|_{q_2=0} = \frac{\frac{q_1}{S\varepsilon_0} h}{q_1} = \frac{1}{S\varepsilon_0} h$$

$$\alpha_{11} = \left.\frac{\varphi_1}{q_1}\right|_{q_2=0} = \frac{\frac{q_1}{S\varepsilon_0} l}{q_1} = \frac{1}{S\varepsilon_0} l$$

$$\therefore\ q_1 = -\frac{h}{l} q$$

$$\therefore\ q_0 = -(q + q_1) = -\left(q - \frac{h}{l} q\right) = -\frac{l-h}{l} q$$