第18讲 谐振

1 谐振的定义

2 谐振电路的品质因数

本节课要用计算器

本讲重难点

- 求谐振频率
- 求谐振时端口的入端电阻
- 定性画LC一端口频率特性

1 谐振 (resonance)

resonance

The increase in amplitude of oscillation of an electric or mechanical system exposed to a periodic force whose frequency is equal or very close to the natural undamped frequency of the system.

3

Principles of Electric Circuits Lecture 18 Tsinghua University 2023

Tacoma大桥垮塌事件

Washington, USA 1980 米长

July 1, 1940 ～ November 7, 1940

广东虎门大桥

2020年5月5日

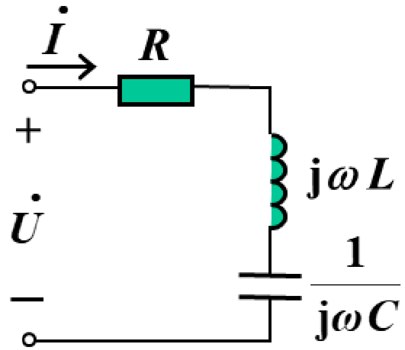
虎门大桥1997年6月9日建成通车，全长15.76千米，主桥全长4.6千米，桥面为双向六车道高速公路，设计速度120千米/小时。2020年5月5日发生竖向弯曲振动，5月15日恢复通车

（1） 电路中谐振的定义

当ω，L，C 满足一定条件，恰好使一端口网络的端口电压、电流出现同相位。一端口网络的这种状态称为谐振。

谐振一定是一个端口

RLC串联



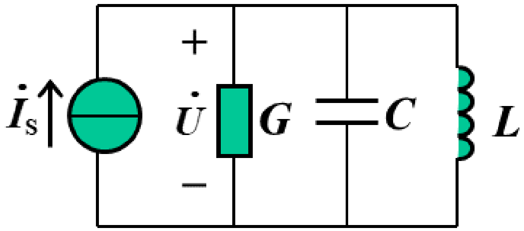
$$Z = R + \mathrm{j}(\omega L - \frac{1}{\omega C})$$

$\omega L > \frac{1}{\omega C}$ 感性

$\omega L < \frac{1}{\omega C}$ 容性

$\omega L = \frac{1}{\omega C}$ 阻性 串联谐振

电路谐振定义和词典定义不一样？课后推送



*RLC*并联

$$Y = G + \mathrm{j}(\omega C - \frac{1}{\omega L})$$

$\omega C > \frac{1}{\omega L}$ 容性

$\omega C < \frac{1}{\omega L}$ 感性

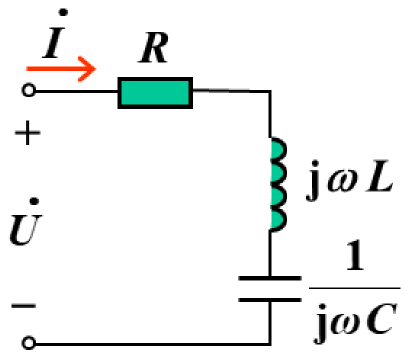
$\omega C = \frac{1}{\omega L}$ 阻性 并联谐振

7

(1) RLC串联谐振

（a） 串联谐振的谐振条件和谐振时端口入端电阻

① LC 不变，改变 ω，使 $X_L=|X_C|$



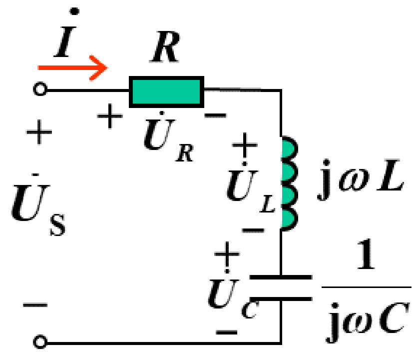
谐振时 $\omega_0 L = \dfrac{1}{\omega_0 C}$

$$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$ 谐振角频率（resonant angular frequency）

$$\boxed{Z_0 = R}$$ 谐振时端口入端阻抗(入端电阻)

② 电源频率不变，改变 L 或 C (常改变 C)，使 $X_L=|X_C|$ 。

（b） 串联谐振时元件的电压和电流



谐振时的相量图

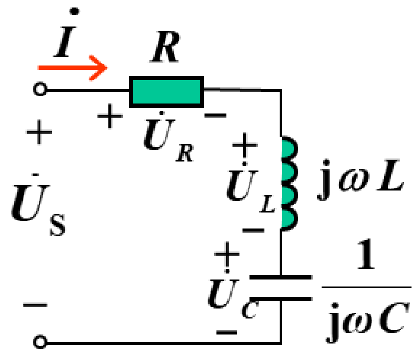
(b) 串联谐振时元件的电压和电流

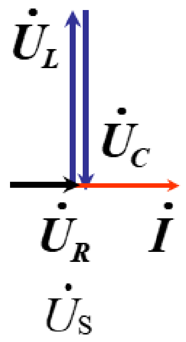
$$\dot{U}_R = R\dot{I} = \dot{U}_S \qquad \dot{I} = \frac{\dot{U}_S}{R}$$

$$\dot{U}_L = \mathrm{j}\omega_0 L\dot{I} = \mathrm{j}\frac{\omega_0 L}{R}\dot{U}_S$$

$$\dot{U}_C = \frac{\dot{I}}{\mathrm{j}\omega_0 C} = -\mathrm{j}\frac{1}{\omega_0 CR}\dot{U}_S$$

$$\omega_0 L = \frac{1}{\sqrt{LC}}L = \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{\omega_0 C}$$





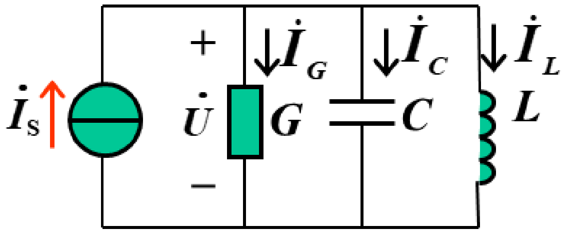
谐振时的相量图

L 和 C 上可能出现比端口电压更高的电压

串联谐振又称电压谐振

10

(2) GCL并联谐振



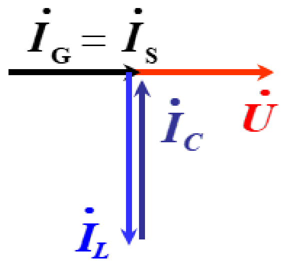
$$Y = G + \mathrm{j}(\omega C - \frac{1}{\omega L})$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$ $$Z_0 = 1/G$$

$$\dot{I}_G = G\dot{U} = \dot{I}_S \qquad \dot{U} = \frac{\dot{I}_S}{G}$$

$$\dot{I}_L = \frac{\dot{U}}{\mathrm{j}\omega_0 L} = -\mathrm{j}\frac{1}{\omega_0 LG}\dot{I}_S$$

$$\dot{I}_C = \mathrm{j}\omega_0 C\dot{U} = \mathrm{j}\frac{\omega_0 C}{G}\dot{I}_S$$



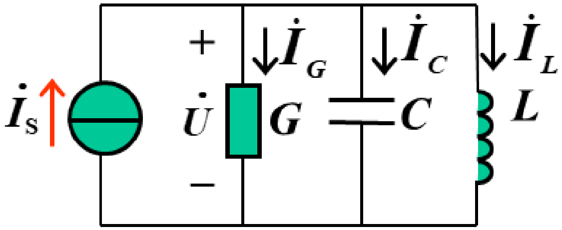
L 和 C 上可能出现比端口电流更大的电流

并联谐振又称电流谐振

11

单选题 1分

对于图示的GCL并联电路，电源为频率可变的正弦电流，L=0.25mH，C=10μF。其谐振频率为



A 20.0 kHz

B 6.36 kHz

C 3.18 kHz

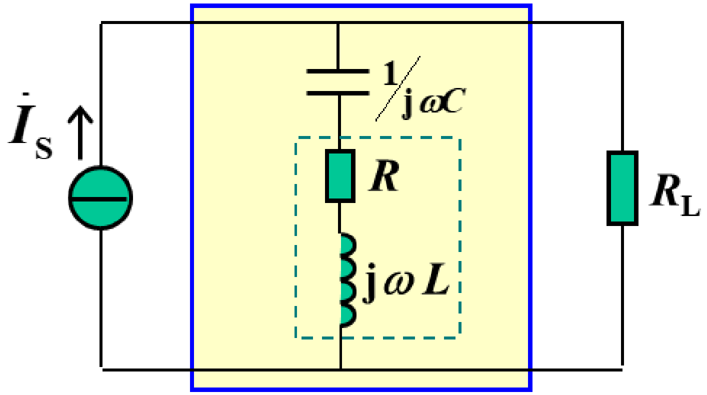
D 1.59 kHz

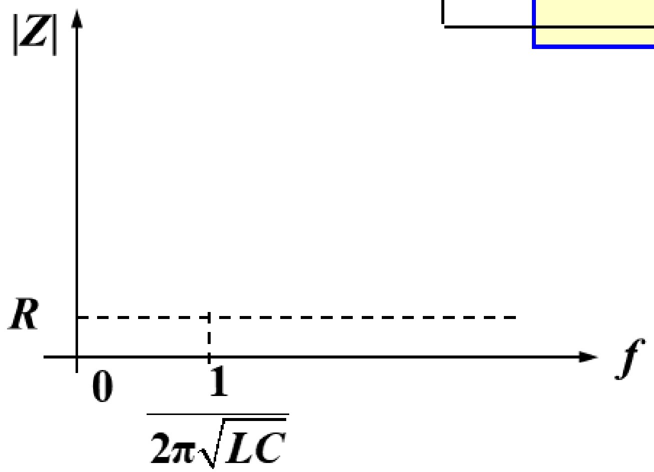
12

(4) 谐振可视为某种滤波器

电力谐振滤波器

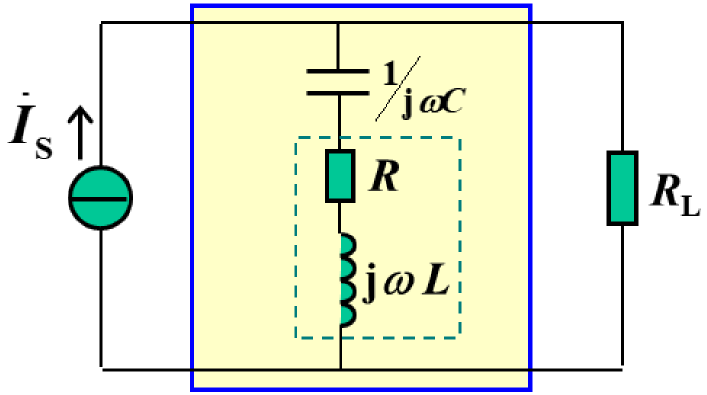
$$Z = R + \mathrm{j}(\omega L - \frac{1}{\omega C})$$



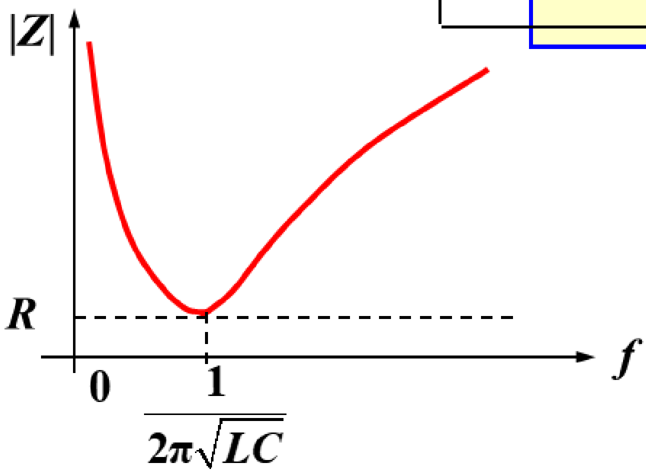


(4) 谐振可视为某种滤波器

电力谐振滤波器



$$Z = R + \mathrm{j}(\omega L - \frac{1}{\omega C})$$

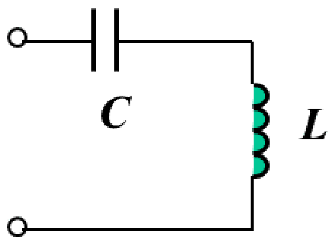


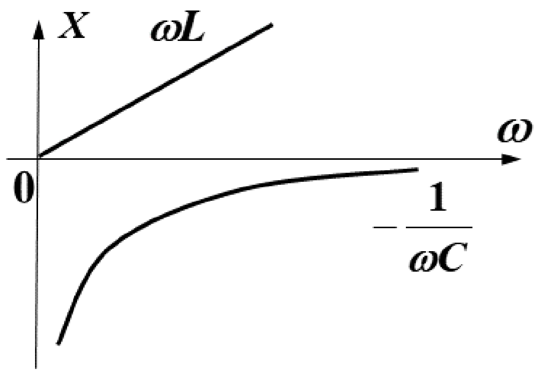
带阻滤波器

(5) LC谐振电路

（a） 串联谐振

$$\mathrm{j}X = \mathrm{j}(\omega L - \frac{1}{\omega C})$$

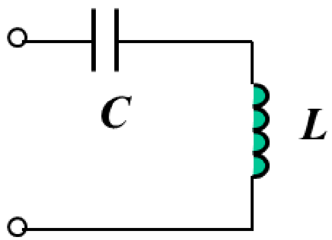


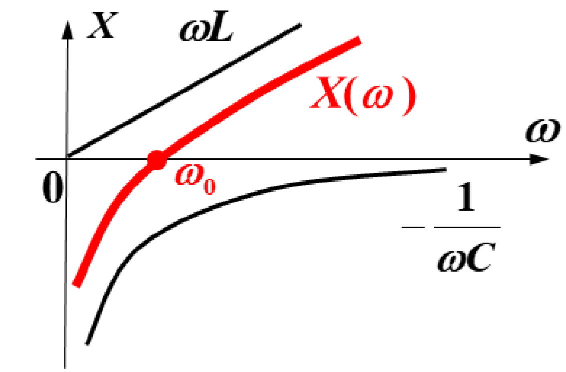


(5) LC谐振电路

（a）串联谐振

$$\mathrm{j}X = \mathrm{j}(\omega L - \frac{1}{\omega C})$$

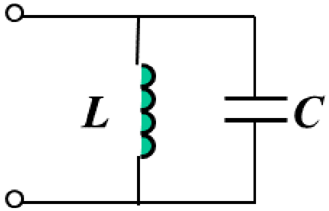




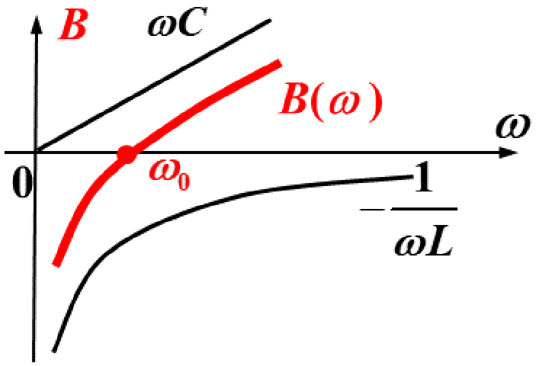
$\omega = \omega_0$ 时　端口相当于短路

16

（b）并联谐振



$$\mathrm{j}B = \frac{1}{\mathrm{j}\omega L} + \mathrm{j}\omega C = \mathrm{j}(\omega C - \frac{1}{\omega L})$$



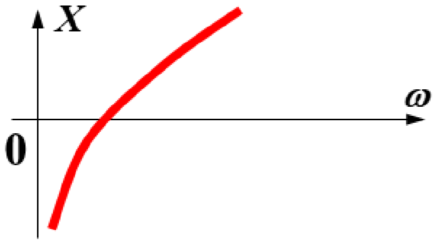
$$\mathrm{j}X = \frac{1}{\mathrm{j}B} = \mathrm{j}(-\frac{1}{B})$$

单选题 1分

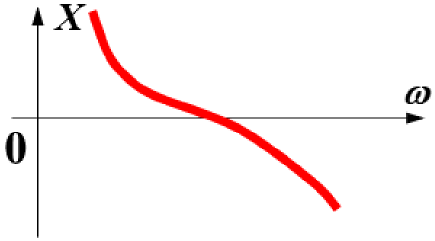
LC并联谐振的端口电抗频率特性为

$$\mathrm{j}X=\frac{1}{\mathrm{j}B}=\mathrm{j}(-\frac{1}{B})$$

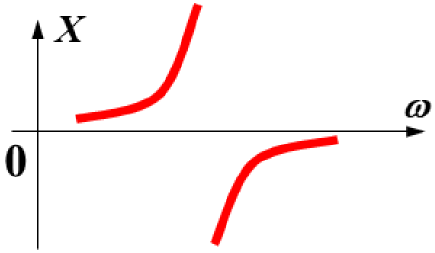
A

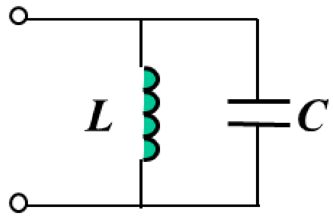


B

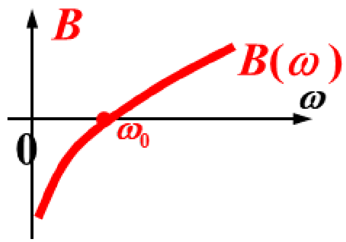


C

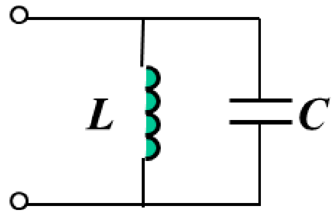




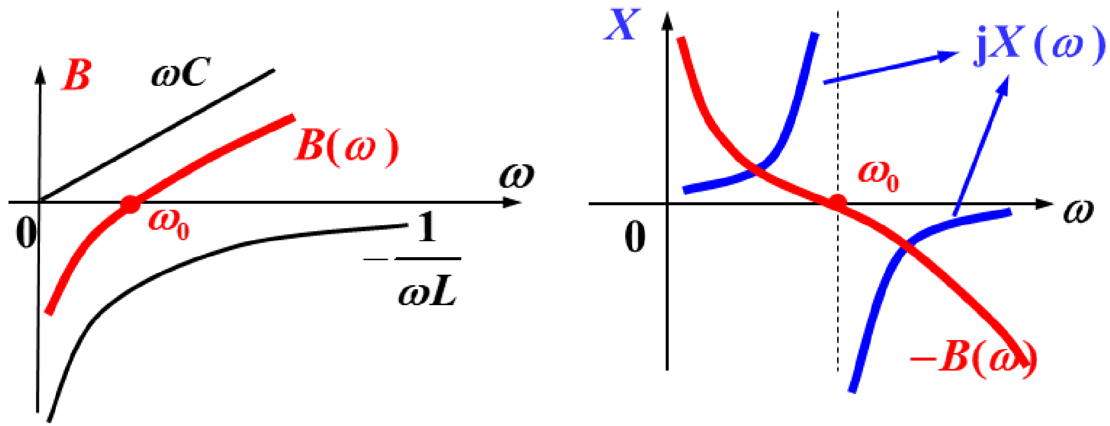
$$\mathrm{j}B=\mathrm{j}(\omega C-\frac{1}{\omega L})$$



（b）并联谐振

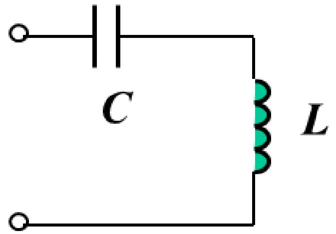


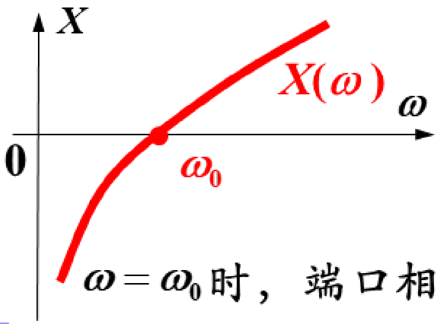
$$\mathrm{j}B=\frac{1}{\mathrm{j}\omega L}+\mathrm{j}\omega C=\mathrm{j}(\omega C-\frac{1}{\omega L})\qquad \mathrm{j}X=\frac{1}{\mathrm{j}B}=\mathrm{j}(-\frac{1}{B})$$



$\omega=\omega_0$ 时　端口相当于开路

LC串联谐振

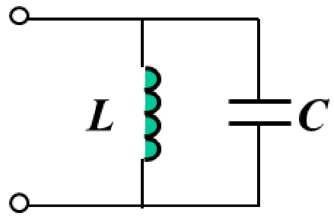


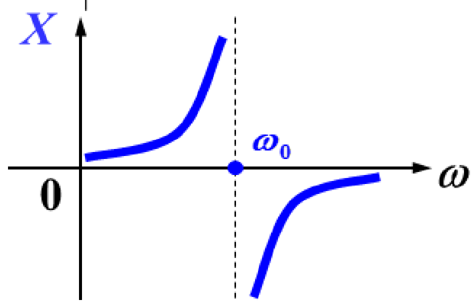


$$Z = \mathrm{j}X = \mathrm{j}(\omega L - \frac{1}{\omega C})$$

$\omega = \omega_0$时，端口相当于短路

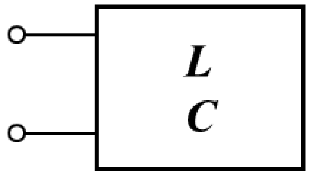
LC并联谐振





$$Z = \mathrm{j}X = \frac{1}{\mathrm{j}(\omega C - \frac{1}{\omega L})}$$

$\omega = \omega_0$时，端口相当于开路



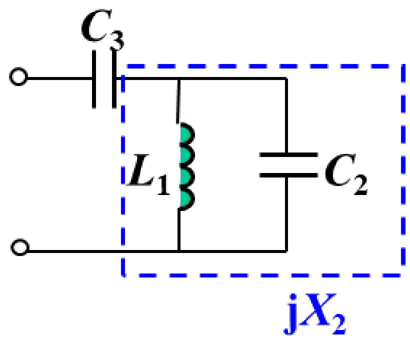
$$Z(\omega) = \mathrm{j}\frac{f_1(\omega)}{f_2(\omega)}$$

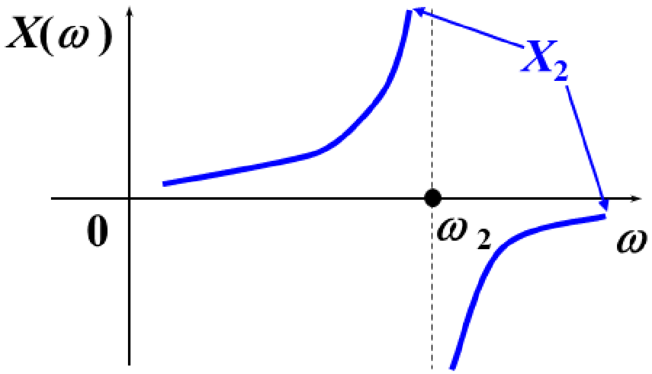
$f_1(\omega_0) = 0$ 时，电路发生串联谐振

$f_2(\omega_0) = 0$ 时，电路发生并联谐振

(c) 混联谐振

$$\mathrm{j}X=\frac{1}{\mathrm{j}\omega C_3}+\mathrm{j}X_2=\mathrm{j}(-\frac{1}{\omega C_3}+X_2)$$





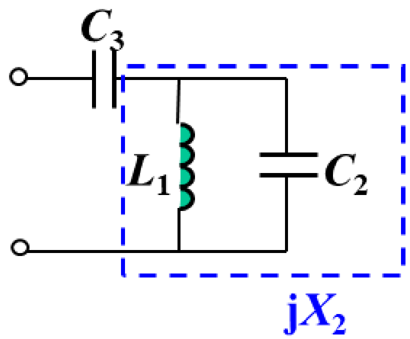
L_1、C_2并联，在某一角频率ω_2下发生并联谐振。

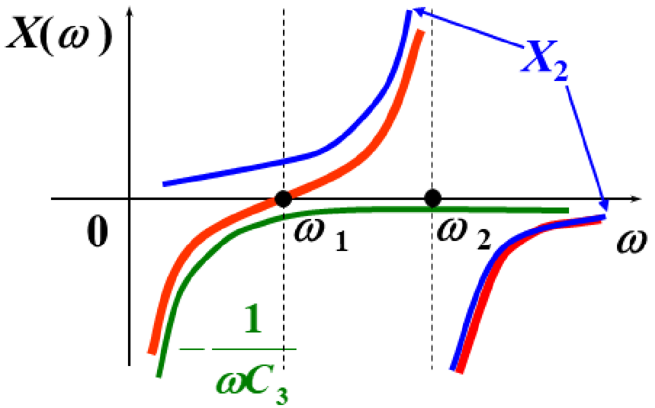
将虚线端口视为一个元件X_2，它和C_3串联后整个端口的电抗频率特性是怎样的？

（投稿）

(c) 混联谐振

$$jX = \frac{1}{j\omega C_3} + jX_2 = j(-\frac{1}{\omega C_3} + X_2)$$



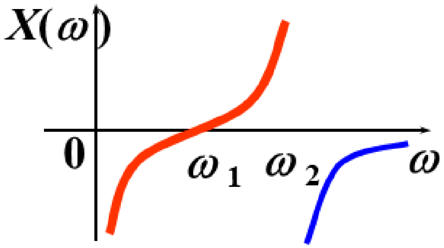


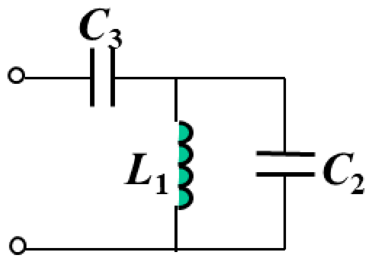
L_1、C_2并联，在某一角频率ω_2下发生并联谐振。

将虚线端口视为一个元件X_2，它和C_3串联后整个端口的电抗频率特性是怎样的？（投稿）

$\omega > \omega_2$时，并联部分呈容性，$\omega < \omega_2$时，并联部分呈感性，在某一角频率ω_1下可与C_3发生串联谐振。

定量分析





$$Z(\omega)=\frac{1}{\mathrm{j}\omega C_3}+\frac{\mathrm{j}\omega L_1\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C_2}}{\mathrm{j}\omega L_1+\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C_2}}$$

$$=\frac{1}{\mathrm{j}\omega C_3}+\frac{\mathrm{j}\omega L_1}{1-\omega^2 L_1 C_2}$$

$$=-\mathrm{j}\frac{1-\omega^2 L_1(C_2+C_3)}{\omega C_3(1-\omega^2 L_1 C_2)}$$

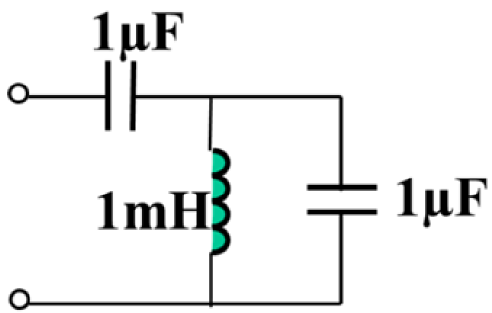
分别令分子、分母为零，可得：

$$\omega_1=\frac{1}{\sqrt{L_1(C_2+C_3)}}$$ 发生串联谐振 $Z_0=0$

$$\omega_2=\frac{1}{\sqrt{L_1 C_2}}$$ 发生并联谐振 $Z_0=\infty$

单选题 1分

对于图示电路，当频率为何值时，会发生串联谐振？



A 3.56 kHz

B 5.03 kHz

C 22.4 kHz

D 31.6 kHz

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L_1(C_2+C_3)}}$$ 发生串联谐振

$$\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_2}}$$ 发生并联谐振

24

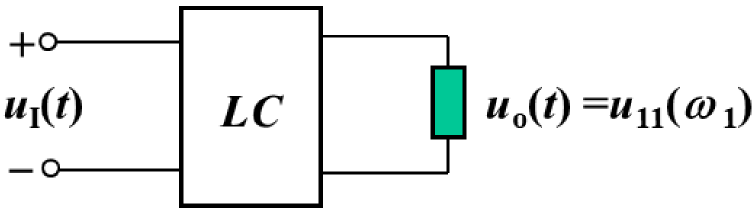
思考　此处可以有投稿（画出二端口内电路）

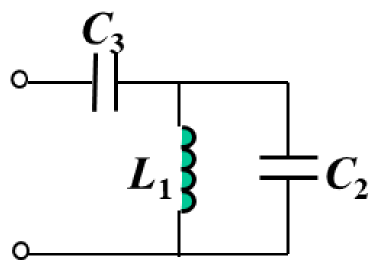
激励 $u_I(t)$，包含两个频率ω_1、 ω_2分量($\omega_1 < \omega_2$)：

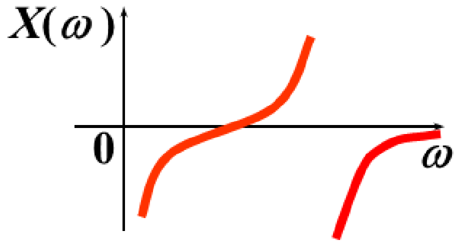
$$u_1(t) = u_{11}(\omega_1) + u_{12}(\omega_2)$$

要求负载电压$u_o(t)$只有$u_{11}(\omega_1)$频率电压，（无ω_2频率电压）。

如何实现?





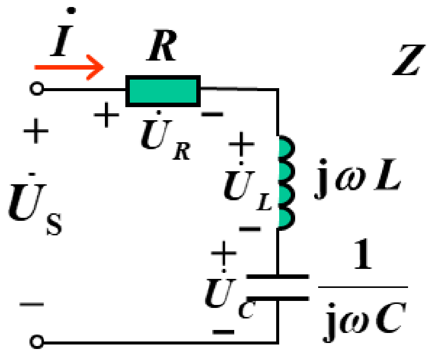


若$\omega_1 > \omega_2$，仍要只得到ω_1频率电压，如何设计电路?

2 谐振电路的品质因数（Quality Factor）

(1) 从支路量幅值角度考虑

以串联谐振为例



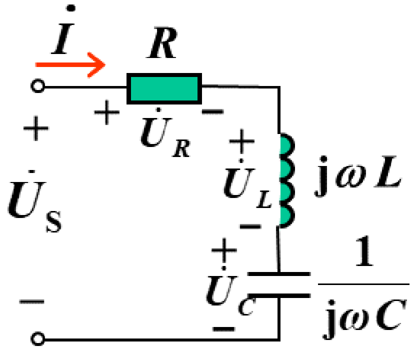
$$Z = R + \mathrm{j}(\omega L - \frac{1}{\omega C})$$

$$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

$$\left.\begin{aligned} U_{L0} &= \frac{\omega_0 L}{R} U_S \\ U_{C0} &= \frac{1}{\omega_0 C R} U_S \end{aligned}\right\} \text{二者相等}$$

$$\boxed{Q \overset{\text{def}_1}{=} \frac{U_{L0}}{U_S} = \frac{U_{C0}}{U_S}} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 RC} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

Q大 $\longrightarrow$ 谐振时**储能元件上的电压(电流)** 大　　无量纲



$$Q=\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

品质因数Q
与ω无关

特性阻抗　　单位：Ω
(characteristic impedance)

$$\boxed{\rho \overset{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{L}{C}}}$$

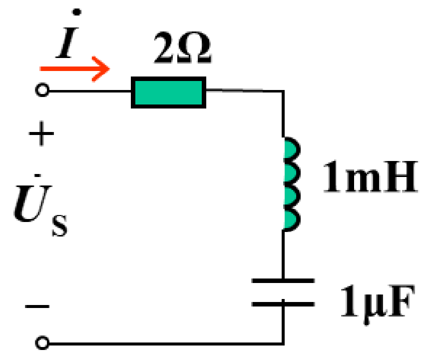
$$\dot{U}_R=\dot{U}_S$$

$$\dot{U}_L=\mathrm{j}Q\dot{U}_S \qquad \dot{U}_C=-\mathrm{j}Q\dot{U}_S$$

L 和 C 上可能出现高电压 → 利用 / 避免

单选题 1分

图示电路谐振时的品质因数Q为



A 12.8

B 15.2

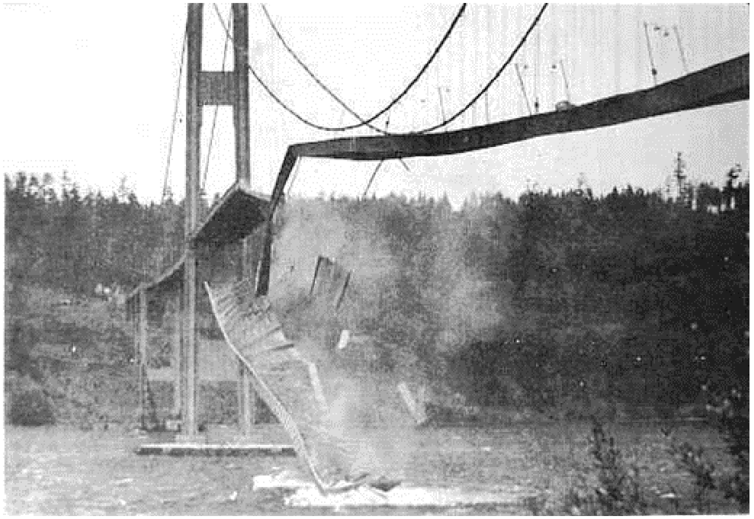
C 15.8

D 19.2

28

Principles of Electric Circuits Lecture 18 Tsinghua University 2023

Tacoma大桥为什么会垮掉?



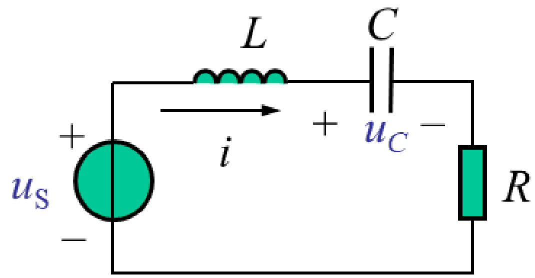
原因:

风的频率≈桥的自振频率

桥自振的Q大

29

（2）从能量角度考虑



设 $u_S = U_m \sin \omega_0 t$

则 $i = \frac{U_m}{R} \sin \omega_0 t = I_m \sin \omega_0 t$

电感存储的磁场能量 $w_L = \frac{1}{2} L i^2 = \frac{1}{2} L I_m^2 \sin^2 \omega_0 t$

$$u_C = \frac{1}{\omega_0 C} I_m \sin(\omega_0 t - 90^\circ) = -\sqrt{\frac{L}{C}} I_m \cos \omega_0 t$$

$$\sqrt{\frac{L}{C}}$$

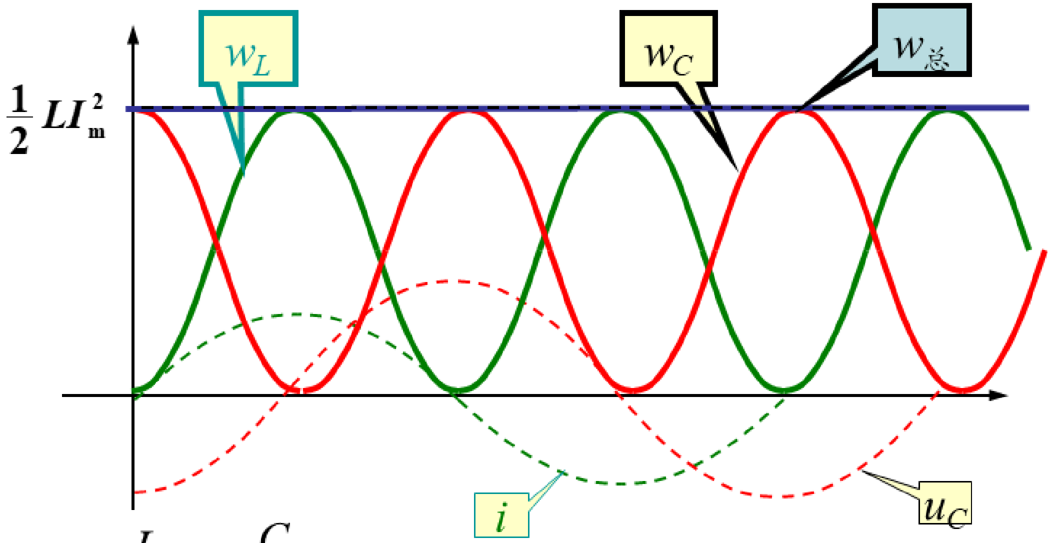
电容存储的电场能量

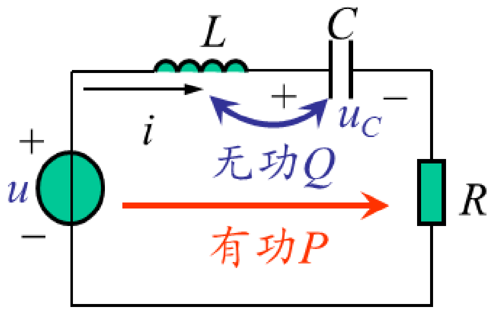
$$w_C = \frac{1}{2} C u_C^2 = \frac{1}{2} L I_m^2 \cos^2 \omega_0 t$$

电感和电容能量按2倍频正弦规律变化，最大值相等 $w_{Lm}=w_{Cm}$。

$$w_{\text{Total}} = w_L + w_C = \frac{1}{2} L I_m^2$$

磁场能量 $w_L=\frac{1}{2}LI_{\mathrm{m}}^2\sin^2\omega_0 t$ 电场能量 $w_C=\frac{1}{2}LI_{L\mathrm{m}}^2\cos^2\omega_0 t=\frac{1}{2}CU_{C\mathrm{m}}^2\cos^2\omega_0 t$





电磁场总能量

$$w_{\mathrm{Total}}=w_C+w_L=\frac{1}{2}LI_{\mathrm{m}}^2=\frac{1}{2}CU_{C\mathrm{m}}^2$$

谐振时：有功P和无功Q解耦

31

Principles of Electric Circuits Lecture 18 Tsinghua University 2023

$$Q \overset{\text{def}_2}{=} 2\pi \frac{\text{电路中储存的电磁场总能量}}{\text{谐振时一个周期内电路消耗的能量}}$$

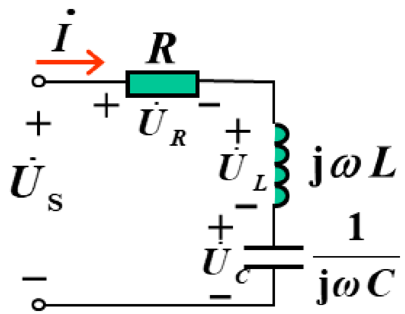
Q大 $\longrightarrow$ 谐振时储能大，消耗能量少。

Q是反映谐振回路中电磁振荡程度的量

$$Q \overset{\text{def}_2}{=} 2\pi \frac{\text{电路中储存的电磁场总能量}}{\text{谐振时一个周期内电路消耗的能量}}$$

$$= 2\pi \frac{LI^2}{RI^2 T_0} = \frac{\omega_0 L}{R}$$

Q的定义1和定义2吻合



$$w_{\text{Total}} = w_C + w_L$$
$$= \frac{1}{2} L I_m^2$$
$$= LI^2$$

单选题 1分

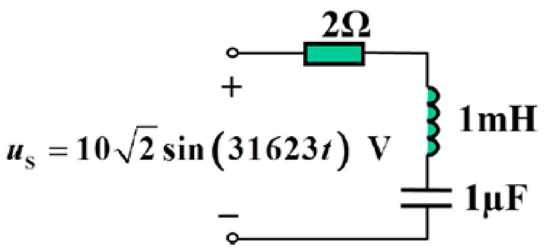
谐振时，
电路中储存的电磁场总能量为

A 12.5 mJ

B 20 mJ

C 25 mJ

D 50 mJ



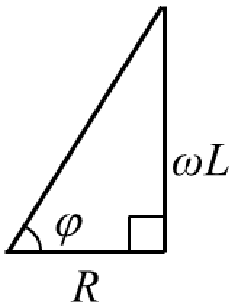
$$w_{\text{Total}} = w_C + w_L = \frac{1}{2}LI_m^2 = \frac{1}{2}CU_{Cm}^2$$
$$= LI^2 = CU_C^2$$

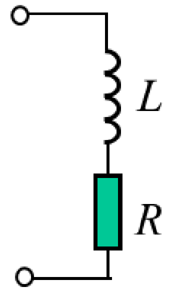
谐振电路的品质因数 $Q \overset{\text{def}_2}{=} 2\pi \dfrac{\text{电路中储存的电磁场总能量}}{\text{谐振时一个周期内电路消耗的能量}}$

电感线圈的品质因数Q_L(某个工作频率下)

$$Q_L \overset{\text{def}}{=} 2\pi \frac{\text{线圈中储存的最大磁场能量}}{\text{一个周期内线圈电阻消耗的能量}}$$

$$= 2\pi \frac{\frac{1}{2}L(\sqrt{2}I)^2}{I^2RT} = \frac{\omega L}{R}$$



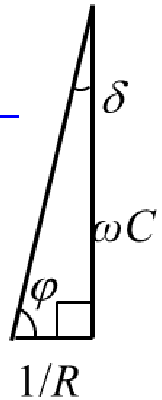


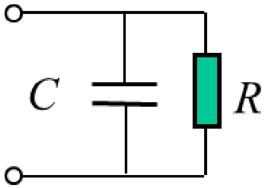
注意：
这不是谐振！！

电容器的介质损耗角(某个工作频率下)

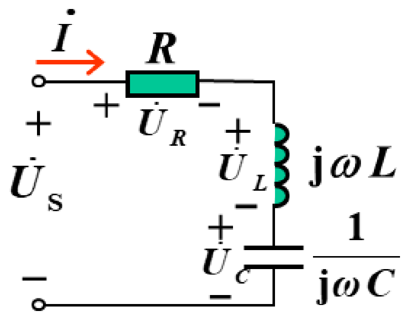
$$\tan\delta = \frac{1}{Q_C} \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi} \frac{\text{一个周期内电阻消耗的能量}}{\text{电容中储存的最大电场能量}}$$

$$= \frac{(U^2/R)T}{2\pi\frac{1}{2}C(\sqrt{2}U)^2} = \frac{1}{\omega CR}$$





(3) 从频率特性角度考虑

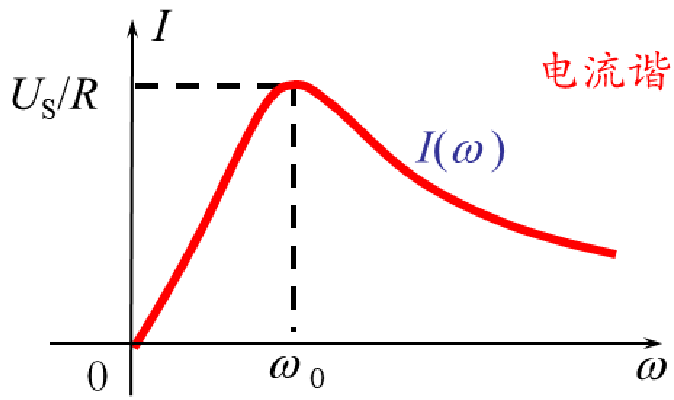


电流频率特性

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}_S}{R + \mathrm{j}(\omega L - \frac{1}{\omega C})}$$

幅值关系

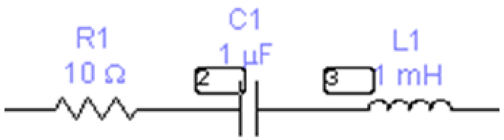
$$I(\omega) = \frac{U_S}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} \le \frac{U_S}{R}$$

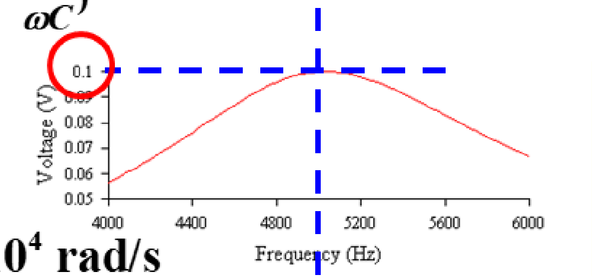


电流谐振曲线

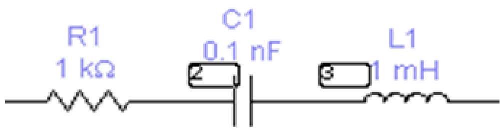
如何从
电流谐振曲线
看出Q来?

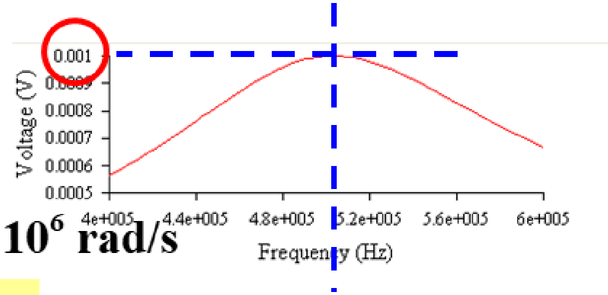
$$I(\omega)=\frac{U_S}{\sqrt{R^2+(\omega L-\frac{1}{\omega C})^2}}$$





$$Q=3.16 \qquad \omega_0=3.16\times10^4\ \text{rad/s}$$





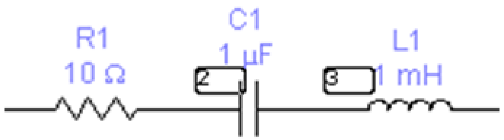
$$Q=3.16 \qquad \omega_0=3.16\times10^6\ \text{rad/s}$$

如何比较谐振频率不同、幅频特性最大幅值不同的两个谐振电路的Q?

希望：谐振点处幅频特性的幅值都为1。在同一点发生谐振。

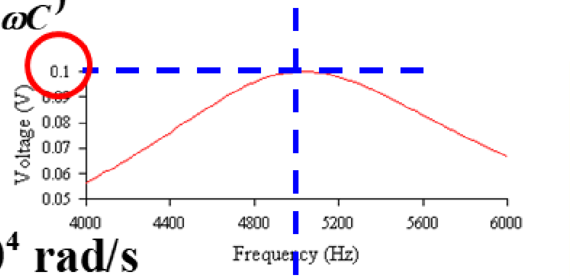
这事儿怎么办？弹幕说说呗

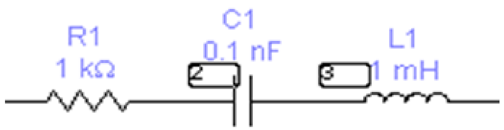
$$I(\omega)=\frac{U_S}{\sqrt{R^2+(\omega L-\frac{1}{\omega C})^2}}$$



$$Q=3.16$$

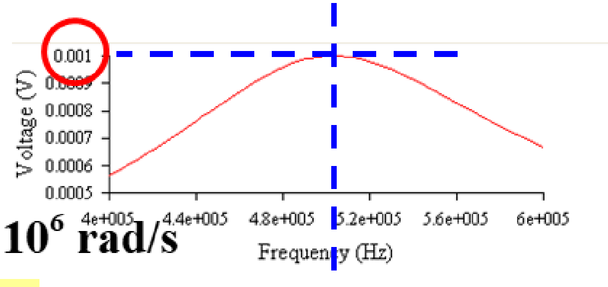
$$\omega_0=3.16\times10^4\ \text{rad/s}$$





$$Q=3.16$$

$$\omega_0=3.16\times10^6\ \text{rad/s}$$



如何比较谐振频率不同、幅频特性最大幅值不同的两个谐振电路的Q?

希望：谐振点处幅频特性的幅值都为1。在同一点发生谐振。

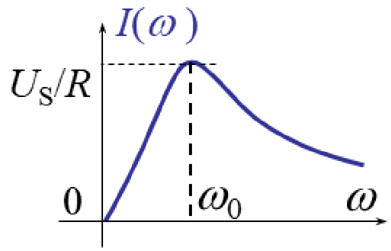
进行归一化处理！

归一化→除以基准值

纵轴变量的归一化

$$\frac{I(\omega)}{I(\omega_0)}=\frac{U_S/|Z|}{U_S/R}$$

$$I(\omega)=\frac{U_S}{\sqrt{R^2+(\omega L-\frac{1}{\omega C})^2}}$$



$$=\frac{R}{\sqrt{R^2+(\omega L-\frac{1}{\omega C})^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{\omega L}{R}-\frac{1}{\omega RC})^2}}$$

横轴变量的归一化

$$=\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{\omega_0 L}{R}\cdot\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{1}{\omega_0 RC}\cdot\frac{\omega_0}{\omega})^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+(Q\frac{\omega}{\omega_0}-Q\frac{\omega_0}{\omega})^2}}$$

令 $\eta=\dfrac{\omega}{\omega_0}$

Q的定义1

$$\omega=\omega_0\longrightarrow\eta=1\longrightarrow\frac{I(\eta)}{I_0}=1$$

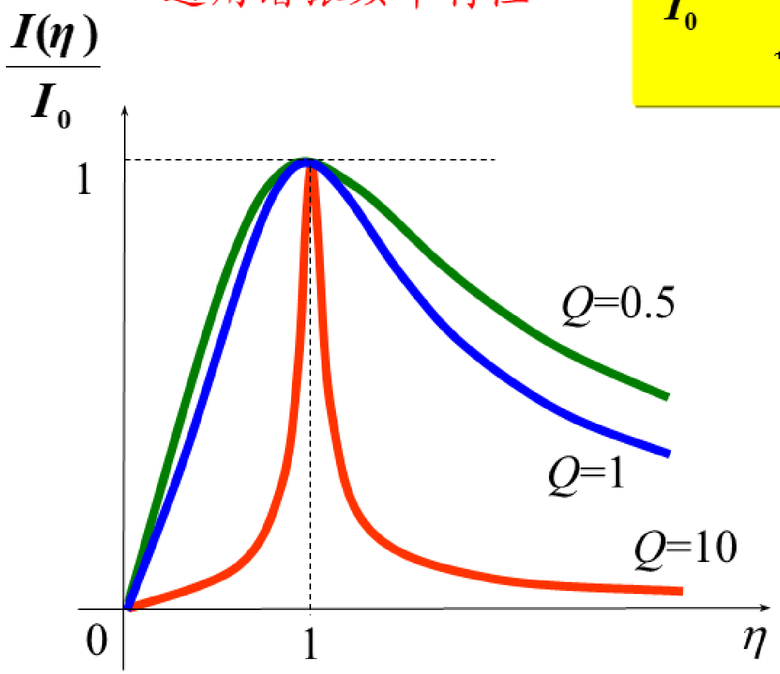
$$\frac{I(\eta)}{I_0}=\frac{1}{\sqrt{1+Q^2(\eta-\frac{1}{\eta})^2}}$$

任何谐振，都在$\eta=1$处发生，
谐振点处幅频特性的幅值都为1。

归一化完成！

通用谐振频率特性

$$\frac{I(\eta)}{I_0}=\frac{1}{\sqrt{1+Q^2(\eta-\frac{1}{\eta})^2}}$$



Q大 → 归一化后电流谐振曲线尖

谐振电路的选择性好

单选题 1分

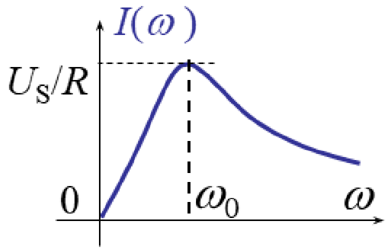
在通用谐振频率特性曲线中，如果曲线越宽，则

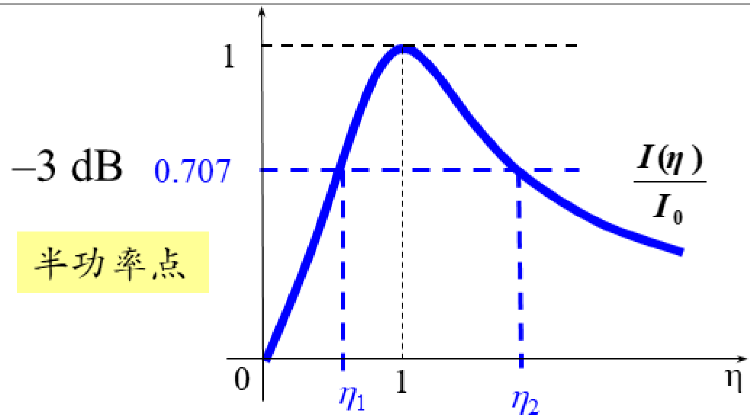
A 品质因数越大，谐振电路选择性越差

B 品质因数越小，谐振电路选择性越差

C 品质因数越大，谐振电路选择性越好

D 品质因数越小，谐振电路选择性越好





$$\frac{I(\eta)}{I_0}=\frac{1}{\sqrt{1+Q^2(\eta-\frac{1}{\eta})^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\eta_1=-\frac{1}{2Q}+\sqrt{\frac{1}{4Q^2}+1}$$

$$\eta_2=\frac{1}{2Q}+\sqrt{\frac{1}{4Q^2}+1}$$

$$\eta_2-\eta_1=\frac{1}{Q}$$

$$Q\overset{\text{def}_3}{=}\frac{1}{\eta_2-\eta_1}=\frac{\omega_0}{\omega_2-\omega_1}=\frac{f_0}{f_2-f_1}$$

可利用频率特性求Q

看仿真

$$\eta=\frac{\omega}{\omega_0}$$

带宽Band Width (BW)

品质因数Q定义的归纳

➢ 从信号幅值的变化来衡量 $Q \overset{\text{def}_1}{=} \dfrac{U_{L0}}{U_S} = \dfrac{U_{C0}}{U_S}$

Q大 ⟶ 谐振时电容电压和电感电压大。

白箱问题
算增益/估危险

➢ 从电磁能量的转换来衡量

$$Q \overset{\text{def}_2}{=} 2\pi \frac{\text{电路中储存的电磁场总能量}}{\text{谐振时一个周期内电路消耗的能量}}$$

Q大 ⟶ 谐振时储能大，消耗能量少。

白箱问题
对本质的理解

➢ 从频率特性的形状来衡量 $Q \overset{\text{def}_3}{=} \dfrac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1}$

Q大 ⟶ 谐振电路的选择性好

黑箱问题
根据端口测量参数求Q

谐振的应用

见课后推送