求

$$I=\max_{|z|\leq r}|\alpha z^n+\beta|,$$

这里n是正整数, $r>0,\ \alpha,\beta\in C,\ \alpha\neq 0$. 并给出取得最大值时，$z$及$z'=z^n+\alpha$ 的表达式来.

解答：(A). 当$\beta=0$时，显然有$I=\max_{|z|\leq r}|\alpha z^n|=|\alpha|r^n$, 等号成立当且仅当$|z|=r$, 即$z=re^{i\theta},\ \theta\in[0,\,2\pi)$, 这时$z'=\alpha z^n=\alpha r^n e^{in\theta}$.

(B). 当$\beta\neq 0$时, 则由

$$|\alpha z^n+\beta|\leq|\alpha z^n|+|\beta|\leq|\alpha|r^n+|\beta|, \tag{0.1}$$

知$I\leq|\alpha|r^n+|\beta|$.

且当(0.1)的两个不等式同时取等号时等号成立。而(0.1)的第一个等号成立当且仅当αz^n与β同向，即存在正数$\lambda>0$, 使

$$\alpha z^n=\lambda\beta, \tag{0.2}$$

而(0.1)的第二个等号成立当且仅当

$$|z|=r, \tag{0.3}$$

将(0.3)代入(0.2)，得$|\alpha|r^n=\lambda|\beta|$, 即$\lambda=\frac{|\alpha|r^n}{|\beta|}$. 将此式代入(0.2)，得

$$z^n=r^n\frac{\frac{\beta}{\alpha}}{|\frac{\beta}{\alpha}|}=r^n e^{iarg(\frac{\beta}{\alpha})},$$

由此可得

$$z=z_k=re^{i\frac{\arg(\frac{\beta}{\alpha})+2k\pi}{n}},\qquad k=0,1,2,\cdots,n-1.$$

这时，

$$z'=\alpha z^n+\beta=\alpha z_k^n+\beta=(|\alpha|r^n+|\beta|)e^{i\arg\beta}.$$

由上面的讨论可知，当$\beta=0$时，$\max_{|z|\leq r}|\alpha z^n+\beta|=|\alpha|r^n$, 这时$z=re^{i\theta},\quad \theta\in[0,\,2\pi),\ z'=\alpha r^n e^{in\theta}$. 而当$\beta\neq 0$时，$\max_{|z|\leq r}|\alpha z^n+\beta|=|\alpha|r^n+|\beta|$, 这时$z=z_k=re^{i\frac{\arg(\frac{\beta}{\alpha})+2k\pi}{n}},\ k=0,1,2,\cdots,n-1$. 且$z'=\alpha z^n+\beta=\alpha z_k^n+\beta=[|\alpha|r^n+|\beta|]e^{i\arg\beta}$，且有$|z'|=|\alpha|r^n+|\beta|$.

写出$\sin(x+iy)$的实部和虚部，并由此证明：方程$\sin(x+iy)=A+iB$有无穷多个解，这里$x,\ y,\ A,\ B\in R$且$A,\ B$是常数.

解. 由定义

$$\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i},$$

令$z=x+iy$, 得

$$\begin{aligned}\sin(x+iy)&=\tfrac{e^{i(x+iy)}-e^{-i(x+iy)}}{2i}\\&=\tfrac{e^{ix-y}-e^{-ix+y}}{2i}\\&=\tfrac{(\cos x+i\sin x)e^{-y}-(\cos x-i\sin x)e^{y}}{2i}\\&=\tfrac{e^{-y}+e^{y}}{2}\sin x+i\tfrac{e^{y}-e^{-y}}{2}\cos x.\end{aligned}$$

由此可得

$$Re(\sin(x+iy))=\frac{e^{-y}+e^{y}}{2}\sin x,\qquad Im(\sin(x+iy))=\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}\cos x.$$

这时方程$\sin(x+iy)=A+iB$ 成为

$$\frac{e^{-y}+e^{y}}{2}\sin x=A,\qquad \frac{e^{y}-e^{-y}}{2}\cos x=B. \tag{0.1}$$

以下分别对$B=0$ 及$B\neq 0$进行讨论.

(1). $B=0$. 这时由(0.1)的第二式可知$y=0$或者$\cos x=0$.

(I). 当$|A|\leq 1$时，可取$y=0$, 这时(0.1)的第一式成为$\sin x=A$. 此方程有无穷多解$x=x_k=\arcsin A+2k\pi,\ k\in Z$. 这时方程$\sin(x+iy)=A+iB=A$ 有无穷多解$z=z_k=x_k=\arcsin A+2k\pi,\ k\in Z$.

(II). 当$|A|>1$时, 由(0.1)可知必有$\cos x=0, y\neq 0$. 这时有$|\sin x|=1$ 且当$A<-1$时，$\sin x=-1$, $x=x_k=\frac{-\pi}{2}+2k\pi$, $k\in Z$. 而当$A>1$ 时，$\sin x=1$, $x=x_k=\frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in Z$. 代入到(0.1)式的第一式，可得$\frac{e^{-y}+e^{y}}{2}=|A|>1$. 令$f(y)=\frac{e^{-y}+e^{y}}{2}$, $y\neq 0$. 因$f(y)$是y的偶函数，故可只讨论$y\in(0,+\infty)$的情况. 因$f'(y)=\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}>0,\forall y>0$. 又因$f(0)=1<|A|,\ f(+\infty)=+\infty$, 可得唯一$y_A>0$, 使得$f(\pm y_A)=|A|>1$.

这时方程(0.1)有无穷多解$z=z_k=x_k\pm iy_A=(\pm\frac{\pi}{2}+2k\pi)\pm iy_A$, $k\in Z$.

(2). $B\neq 0$. 这时由(0.1)知$y\neq 0$, 消去x后可得

$$\frac{4A^2}{(e^{y}+e^{-y})^2}+\frac{4B^2}{(e^{y}-e^{-y})^2}=1,\quad y\neq 0. \tag{0.2}$$

记

$$g(y)=\frac{4A^2}{(e^y+e^{-y})^2}+\frac{4B^2}{(e^y-e^{-y})^2},\quad y\neq 0.$$

则$g(y)$是y的连续偶函数，故可只讨论$y\in(0,+\infty)$即可. 因$B\neq 0$, 知$g(0^+)=+\infty$, $g(+\infty)=0$, 由连续函数介值定理可知存在$y_1>0$, 满足$g(\pm y_1)=1$. 将$y=\pm y_1$ 代入(0.1)中任一式, 再利用(0.2), 可解得$x=x_k$, $k\in Z$. 这时, 方程(0.1)有无穷多解$z=z_k=x_k\pm iy_1$, $k\in Z$.

试题二解答完毕.

$$J=\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}u_x & u_y\\ v_x & v_y\end{vmatrix}=u_xv_y-v_xu_y=u_x^2+v_x^2=|f'(z)|^2>0$$
$$\iint_{D'}dudv=\iint_D Jdxdy=\iint_D|f'(z)|^2dxdy>0$$

■

***2.5.

对于任意的$A,B\in\mathbb{R}$，

$$\cos(z)=\cos(x+iy)=A+iB$$

有无穷多解。

证明：

$$\cos(x+iy)=\cos(x)\cos(iy)-\sin(x)\sin(iy)=\cos(x)\frac{e^y+e^{-y}}{2}-i\sin(x)\frac{e^y-e^{-y}}{2}$$
$$A=\Re(cos(z))=\cos(x)\frac{e^y+e^{-y}}{2},B=\mathrm{Im}(\cos(z))=-\sin(x)\frac{e^y-e^{-y}}{2}$$

这等价于证明 上述方程组有解。

2.5.1. $B=0$ 时，

$$\sin(x)\frac{e^y-e^{-y}}{2}=0\Leftrightarrow\sin(x)=0\vee\frac{e^y-e^{-y}}{2}=0$$

2.5.1.1. $|A|\le 1$:

取 $y=0\Rightarrow\cos x=A,x=x_k=\pm\arccos A+2k\pi,k\in\mathbb{Z}.$

2.5.1.2. $|A|>1$:

取 $\sin x=0,\cos x=\mathrm{sgn}(A).$

$$\Rightarrow|A|=\frac{e^y+e^{-y}}{2}>1$$

令

$$\cosh(y):=\frac{e^y+e^{-y}}{2},y>0$$
$$\cosh'(y)=\frac{e^y-e^{-y}}{2}>0,\cosh(0)=1,\lim_{y\to+\infty}\cosh(y)\to+\infty$$
$$\Rightarrow\exists!y_A>0,\cosh(y_A)=|A|>1$$

且cosh 是偶函数，因此有 $x=\pm\arccos\mathrm{sgn}(A)+2k\pi,y=\pm y_A,k\in\mathbb{Z},y_A>0.$

2.5.2. $B\neq 0$ 时，

$$\frac{4A^2}{(e^y+e^{-y})^2}+\frac{4B^2}{(e^y-e^{-y})^2}=1$$

记左式 为 $g(y)$， 由于 g 时偶函数，只讨论 $y>0$。 显然有

$$\lim_{y\to0^+}g(y)\to+\infty,\lim_{y\to+\infty}g(y)=0$$

而且 g 在 $(0,+\infty)$ 连续，有连续函数的介值定理， $\exists y'>0$, s.t. $g(\pm y')=1.$

而且 $\cos(x)=2A/(e^{y'}+e^{-y'}),\sin(x)=2B/(e^{y'}-e^{-y'})$， $\cos^2(x)+\sin^2(x)=1$ ，

因此$(\cos(x),\sin(x))=(2A/(e^{y'}+e^{-y'}),2B/(e^{y'}-e^{-y'}))$ 一定对应单位圆上的某一个点，即一定存在 x' 满足上述要求。

如果 $A>0,\ x'=\arctan\frac{B(e^{y'}+e^{-y'})}{A(e^{y'}-e^{-y'})}$ ，

如果 $A<0,x'=\pi+\arctan\frac{B(e^{y'}+e^{-y'})}{A(e^{y'}-e^{-y'})}$ ，

如果 $A=0$, $\sin(x)=2B/(e^{y'}-e^{-y'})=\pm1,\cos(x)=0,$ (正负取决于 y 的取值) ，$x'=\frac{(4k\pm1)\pi}{2}$ (正负号与前方相同)。

而 $x=x'+2k\pi$ 都是解，对于 $y=-y'$ 也可以求出相应的x' ，也对应无穷多个 x 。

■

设C_r是圆周：$|z-z_0|=r>0$, 函数$f(z)$在复平面处处解析，用$f(z)$关于C_r的闭曲线积分公式给出$f(z)$在z_0点的n阶导数的公式(Cauchy 高阶导数公式)，这里n是非负整数, (2分) 并由此证明：

(a). 若令$M(r)=\max_{|z-z_0|=r}|f(z)|$, 则$|f^{(n)}(z_0)|\le \frac{n!M(r)}{r^n}$; (4分)

(b). 若存在常数$M>0$，n是非负整数, 使得$|f(z)|\le M\left(\sum_{k=0}^{n}|z|^k\right), \forall z\in C$, 则$f(z)$为一次数不超过$n$的多项式. (4分)

Cauchy 高阶导数公式:

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_{C_r}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz=\frac{n!}{2\pi i}\oint_{|z-z_0|=r}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz,\quad n\in N_0=\{0,1,2,\cdots,\}. \tag{0.1}$$

(a) 令$r>0$, 由Cauchy 积分公式得：(这里用到$z=z_0+re^{i\theta}$, $|z-z_0|=r,\ dz=ire^{i\theta}d\theta,\ |dz|=rd\theta>0$),

$$\begin{aligned}\left|f^{(n)}(z_0)\right| &=\left|\tfrac{n!}{2\pi i}\right|\left|\oint_{|z-z_0|=r}\tfrac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz\right|\\ &\le \tfrac{n!}{2\pi}\oint_{|z-z_0|=r}\left|\tfrac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\right||dz|\\ &=\tfrac{n!}{2\pi}\oint_{|z-z_0|=r}\tfrac{|f(z)|}{|z-z_0|^{n+1}}|dz|\\ &\le \tfrac{n!}{2\pi}\int_0^{2\pi}\tfrac{M(r)}{r^{n+1}}rd\theta\\ &=\tfrac{n!M(r)}{r^n}.\end{aligned}$$

命题(a) 得证.

(b) 当$|f(z)|\le M\cdot(\sum_{k=0}^{n}|z|^k)$, 令$z_0=0$, 可得$M(r)\le M\cdot(\sum_{k=0}^{n}r^k)$，

因而由上式, 可得

$$0\le\left|f^{(n+j)}(0)\right|\le\frac{(n+j)!M\cdot(\sum_{k=0}^{n}r^k)}{r^{n+j}}=(n+j)!M\cdot\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{r^{n+j-k}}\right)\to 0,\quad r\to+\infty,$$

故有$f^{(n+j)}(0)=0,\ j=1,2,\cdots$.

由Taylor 级数可得

$$f(z)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}z^k=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}z^k.$$

这表明$f(z)$是一次数不超过n的多项式. 命题(b)得证.

利用Liouville 证明代数学基本定理

代数学基本定理 设n是不小于1的正整数. 则每个复系数多项式

$$p_n(z) = z^n + c_1 z^{n-1} + c_2 z^{n-2} + \cdots + c_{n-1} z + c_n$$

在C中有一个零点.

Liouville Theorem Every bounded entire function is constant.

代数学基本定理的证明

证明 假设$p_n(z)$没有零点，令$f(z) = \frac{1}{p_n(z)}$, 则有$f'(z) = \frac{-p_n'(z)}{p_n^2(z)}$处处存在，因而$f(z)$是处处解析的非常数函数. 因当$|z|$充分大时，

$$|p_n(z)| = |z^n(1 + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \cdots + \frac{c_n}{z^n})| \geq |z^n|(1 - |\frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \cdots + \frac{c_n}{z^n}|) \geq |z^n|(1 - \frac{1}{2}) = \frac{|z|^n}{2}$$

故

$$|p_n(z)| \to +\infty, \quad 若\ |z| \to +\infty.$$

从而有$\lim_{|z|\to+\infty} f(z) = 0$，因而$f(z)$ 有界，由Liouville 定理, 必有$f(z) \equiv$常数$(= 0)$. 但是这与$f(z)$的定义矛盾. 因而$f(z)$不是处处解析的函数，不难看出，$f(z)$不解析的点即是$p_n(z)$的零点. 从而证明了代数学基本定理. □

参考文献

1.J.B.Conway, Functions of One Complex Variable, Springer 1973.

2.J.Bak and D.J.Newman, Complex Analysis, Undergraduate Texts in Mathematics, 2010.

记$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}c_nz^n$. 叙述幂级数$f(z)$的Abel定理的内容（2分）及收敛半径$(R>0)$的定义(2分）, 并分别给出具体例子（每例2分），说明存在幂级数使其在收敛圆周上(I) 处处发散；(II) 既有收敛的点，又有发散的点；(III) 处处收敛（以上例子均须给出理由）.

解答:

Abel定理: 若$f(z)$在$z=z_1$收敛, 则对所有的$z:|z|<|z_1|$, 有$f(z)$绝对收敛; 若$f(z)$在z_2发散, 则对所有的$z:|z|>|z_2|, f(z)$ 发散.

收敛半径的定义: 若存在$R>0$, 使得所有的$z:|z|<R$, $f(z)$ (绝对)收敛, 而对所有的$z:|z|>R$, $f(z)$发散, 则R是$f(z)$的收敛半径.

例1. $f_1(z)=\sum_{n=1}^{+\infty}z^n(=\frac{z}{1-z})$, $R=1$, 当$|z|=1$, 有$|z^n|=1\nrightarrow 0$, 当$n\to+\infty$, 由Cauchy收敛定理, $f_1(z)$发散. 因而$f_1(z)$在收敛圆周$|z|=1$上处处发散;

例2. $f_2(z)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^n}{n}(=-\ln(1-z))$, $R=1$, 当$z=-1$时, $f_2(-1)=-\ln 2$, 而$z=1$时, $f_2(1)=+\infty$发散, 故在收敛圆周$|z|=1$上, $f_2(z)$既有收敛的点, 又有发散的点;

例3. $f_3(z)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^n}{n^2}(=\int_0^z\frac{f_2(t)}{t}dt=-\int_0^z\frac{\ln(1-t)}{t}dt)$, $R=1$, 当$|z|=1$时, 有$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{|z|^n}{n^2}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}<+\infty$. 故$f_3(z)$ 在收敛圆周上处处(绝对)收敛.

*****5.8.**

$$I_n=\oint_{|z|=1}\frac{1-\cos 5z^6}{z^n}dz=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}5^{2k}}{(2k)!}\oint_{|z|=1}z^{12k-n}dz$$

非零项k一定满足 $k=(n-1)/12, n\geq 13$ 且 $n\equiv 1(\mod 12)$

$$I_n=\begin{cases}2\pi i\frac{(-1)^{(n-13)/12}5^{(n-1)/6}}{((n-1)/6)!}, & n\geq 13\wedge n\equiv 1(\mod 12)\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$$

***4.7.5.

求

$$J=\oint_{|z|=r>1}\frac{z^3e^{1/z}}{1+z}dz$$

解：

令 $z=1/t, dz=-dt/t^2$ · $z=re^{i\theta}\Rightarrow t=r^{-1}e^{-i\theta},\theta\in[0,2\pi]$

$$J=-\oint_{|t|=1/r<1}-\frac{e^tdt}{t^4(1+t)}$$

而

$$\frac{e^t}{1+t}=\left(1+t+\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{6}t^3+\cdots\right)(1-t+t^2-t^3+\cdots)$$

t^3 的系数为 $-1+1-1/2+1/6=-1/3$ ·

$$J=\oint_{|t|=1/r}\frac{e^tdt}{t^4(1+t)}=\oint_{|t|=1/r}-\frac{dt}{3t}=-\frac{2\pi i}{3}$$

一个三角函数的积分

求实积分 (I) $\qquad I_1=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a+b\cos\theta}$, $\qquad$ 这里a, b 是实数，且$a>|b|\geq 0$ (6分），

(II) $\qquad I_2=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{A^2\cos^2\theta+B^2\sin^2\theta}$, $\qquad$ 这里$A>0$, $B>0$. （4分）.

解. (I) 令$z=e^{i\theta}$, $\theta\in[0,\,2\pi]$. 则$dz=ie^{i\theta}d\theta=izd\theta$, $\quad d\theta=\frac{dz}{iz}$,

$$\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}=\frac{z+z^{-1}}{2}=\frac{z^2+1}{2z}.$$

将以上表达式代入积分I_1中，可得当$b\neq 0$时，

$$\begin{aligned}
I_1 &= \tfrac{2}{i}\oint_{|z|=1}\tfrac{dz}{bz^2+2az+b}\\
&= \tfrac{2}{bi}\oint_{|z|=1}\tfrac{dz}{z^2+\frac{2az}{b}+1}\\
&= \tfrac{2}{bi}Res\left[\tfrac{1}{z^2+\frac{2az}{b}+1},z_1\right]\cdot(2\pi i)\\
&= \tfrac{2}{bi}\tfrac{1}{2z_1+\frac{2a}{b}}\cdot(2\pi i)\\
&= \tfrac{2\pi}{b(z_1+\frac{a}{b})}\\
&= \tfrac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}.
\end{aligned}$$

这里$z_1=-\frac{a}{b}+\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}$ 是二次方程$z^2+\frac{2az}{b}+1=0$ 在单位圆$|z|=1$内的唯一复根：$|z_1|<1$.

当$b=0$ 时，易得$I_1=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a}=\frac{2\pi}{a}$. 故不论$b$是否等于0, 均有$I_1=\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$.

(II) 由$\cos^2\theta=\frac{1+\cos 2\theta}{2}$, $\quad\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=\frac{1-\cos 2\theta}{2}$. 将以上表达式代入到$I_2$中，再利用(I)的结果，可得

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_0^{2\pi}\tfrac{2d\theta}{(A^2+B^2)+(A^2-B^2)\cos 2\theta}\\
&= \int_0^{2\pi}\tfrac{d(2\theta)}{(A^2+B^2)+(A^2-B^2)\cos 2\theta}\\
&= \int_0^{4\pi}\tfrac{dt}{(A^2+B^2)+(A^2-B^2)\cos t}\qquad(t=2\theta),\\
&= 2\int_0^{2\pi}\tfrac{dt}{(A^2+B^2)+(A^2-B^2)\cos t}\\
&= \tfrac{4\pi}{\sqrt{(A^2+B^2)^2-(A^2-B^2)^2}}\\
&= \tfrac{4\pi}{\sqrt{4A^2B^2}}\\
&= \tfrac{2\pi}{AB}.
\end{aligned}$$

一个带有三角函数的积分

求实积分$I=\int_0^{+\infty}\frac{x\sin kx dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$，　　这里$a,\, b,\, k$ 是正数.

解. 显然，

$$I=\frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{xe^{ikx}}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}dx. \tag{0.1}$$

令

$$R>\max\{a,\, b\},\ \Gamma_R=[-R,\, +R]\cup C_R,\ C_R=\{z:z=Re^{i\theta}:\theta\in[0,\, \pi]\}.$$

作闭曲线积分：

$$\oint_{\Gamma_R}\frac{ze^{ikz}dz}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}=\int_{-R}^{R}\frac{xe^{ikx}dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}+\int_{C_R}\frac{ze^{ikz}dz}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}=2\pi i\{C_{-1}^{(1)}+C_{-1}^{(2)}\}.$$

这里

$$C_{-1}^{(1)}=Res[\frac{ze^{ikz}}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)},\, ai],\quad C_{-1}^{(1)}=Res[\frac{ze^{ikz}}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)},\, bi].$$

由于$\deg z=1, \deg(z^2+a^2)(z^2+b^2)=4>1+1$, 知

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R}\frac{ze^{ikz}dz}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}=0.$$

令$R\to+\infty$, 从上面的分析可得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{xe^{ikx}dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}=2\pi i\{C_{-1}^{(1)}+C_{-1}^{(2)}\}.$$

再由(0.1)可得

$$I=\frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{xe^{ikx}}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}dx=\pi\{C_{-1}^{(1)}+C_{-1}^{(2)}\}. \tag{0.2}$$

由一阶极点留数的计算公式，当$a\neq b$时，

$$\begin{aligned}C_{-1}^{(1)}&=Res[\tfrac{ze^{ikz}}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)},\, ai]\\&=Res[\tfrac{ze^{ikz}}{z^4+(a^2+b^2)z^2+a^2b^2},\, ai]\\&=\tfrac{aie^{-ka}}{4(ai)^3+2(ai)(a^2+b^2)}\\&=\tfrac{e^{-ka}}{2(b^2-a^2)}.\end{aligned}$$

交换a,b的角色，可得

$$C_{-1}^{(2)}=Res[\frac{ze^{ikz}}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)},\, bi]=\frac{e^{-kb}}{2(b^2-a^2)}.$$

由此可得所求的积分值为

$$I = \frac{\pi}{2(b^2 - a^2)}(e^{-ka} - e^{-kb}).$$

而当$b = a$时，在上式中取极限，由$L'Hospital$法则，可得

$$I = \lim_{b \to a} \frac{\pi}{2(b^2 - a^2)}(e^{-ka} - e^{-kb}) = \frac{k\pi}{4ae^{ka}}.$$

即

$$\int_0^{+\infty} \frac{x \sin kx}{(x^2 + a^2)^2} dx = \frac{k\pi}{4ae^{ka}}.$$

*****5.10.**

$$I_{a,b,k}=\int_0^{+\infty}\frac{x^3\sin kxdx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$$

解：

被积函数是偶函数，因此

$$I_{a,b,k}=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^3\sin kxdx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$$

记

$$J_{a,b,k}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^3e^{ikx}dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^3\cos kxdx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}+i\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^3\sin kxdx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$$

而 $\frac{x^3\cos kx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$ 是奇函数，积分值为零，因此 $J_{a,b,k}=2iI_{a,b,k}$。

另一方面，作 $C_R=\{z:z=Re^{i\theta},0\le\theta\le\pi\},\Gamma_R=C_R\cup[-R,R].$

$$(!!):\frac{2}{\pi}x\le\sin x,x\in[0,\pi/2]$$

$$\left|\int_{C_R}\frac{z^3e^{ikz}dz}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}\right|\le\int_{C_R}\frac{R^3e^{-ky}|dz|}{|z^2+a^2||z^2+b^2|}<\int_{C_R}\frac{R^3e^{-kR\sin\theta}Rd\theta}{R^4}$$

$$=\int_0^{\pi}e^{-kR\sin\theta}d\theta=2\int_0^{\pi/2}e^{-kR\sin\theta}d\theta<2\int_0^{\pi/2}e^{-2kR\theta/\pi}d\theta=\frac{2\pi(1-e^{-\frac{kR}{2}})}{kR}\to0,R\to+\infty$$

因此

$$\oint_{\Gamma_R}\frac{z^3e^{ikz}dz}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}=\int_{-R}^{R}\frac{x^3e^{ikx}dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}+\int_{C_R}\frac{z^3e^{ikz}dz}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}\to\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^3e^{ikx}dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}=J_{a,b,k},R\to+\infty$$

而在上半平面，ai,bi 是被积函数仅有的两个奇点。与此同时，

$$\frac{z^3e^{ikz}}{[(z^2+a^2)(z^2+b^2)]'}=\frac{z^3e^{ikz}}{2z(2z^2+a^2+b^2)}=\frac{z^2e^{ikz}}{2(2z^2+a^2+b^2)}$$

所以

$$J_{a,b,k}=\lim_{R\to+\infty}\oint_{\Gamma_R}\frac{z^3e^{ikz}dz}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}=2\pi i\left(\mathrm{Res}\left[\frac{z^3e^{ikz}}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)},ai\right]+\mathrm{Res}\left[\frac{z^3e^{ikz}}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)},bi\right]\right)$$

$$=2\pi i\left(\frac{-a^2e^{-ak}}{2(-a^2+b^2)}+\frac{-b^2e^{-bk}}{2(a^2-b^2)}\right)=\frac{\pi i(a^2e^{-ak}-b^2e^{-bk})}{a^2-b^2},I_{a,b,k}=\frac{J_{a,b,k}}{2i}=\frac{\pi(a^2e^{-ak}-b^2e^{-bk})}{2(a^2-b^2)}$$

推广：

$$I_{a,b,k}=\int_0^{+\infty}\frac{x\sin kxdx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}=\frac{\pi(e^{-ak}-e^{-bk})}{2(a^2-b^2)}$$

*****5.9.**

$$I_n=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^{2n}}$$

被积函数是偶函数，因此

$$I_n=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^{2n}}=\lim_{R\to+\infty}\frac{1}{2}\int_{-R}^{R}\frac{dx}{1+x^{2n}}$$

作 $C_R=\{z:z=Re^{i\theta},0\le\theta\le\pi\},\Gamma_R=C_R\cup[-R,R]$.

$$\left|\int_{C_R}\frac{dz}{1+z^{2n}}\right|\le\int_{C_R}\frac{|dz|}{|1+z^{2n}|}\le\int_{C_R}\frac{|dz|}{|z^{2n}|-1}=\frac{\pi R}{R^{2n}-1}=\frac{\pi}{R^{2n-1}-R^{-1}}\to 0,R\to+\infty$$

因此

$$\oint_{\Gamma_R}\frac{dz}{1+z^{2n}}=\int_{-R}^{R}\frac{dx}{1+x^{2n}}+\int_{C_R}\frac{dz}{1+z^{2n}}\to\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^{2n}}=2I_n,R\to+\infty$$

而第一个半圆的路径积分的被积函数的奇点，是 $1+z^{2n}=0$ 在上半平面的零点，共有 n 个。所以，

$$I_n=\lim_{R\to+\infty}\frac{1}{2}\oint_{\Gamma_R}\frac{dz}{1+z^{2n}}=\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}\left[\frac{1}{1+z^{2n}},z_k\right]=\pi i\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2nz_k^{2n-1}}=-\frac{\pi i}{2n}\sum_{k=1}^{n}z_k$$

$z_k^{2n}=-1\Rightarrow z_k=e^{(2k-1)\pi i/(2n)}=e^{-\pi i/(2n)}(e^{\pi i/n})^k$

$$I_n=-\frac{\pi i}{2n}e^{-\pi i/(2n)}\sum_{k=1}^{n}(e^{\pi i/n})^k=-\frac{\pi i}{2n}e^{-\pi i/(2n)}\frac{e^{\pi i/n}(1+1)}{1-e^{\pi i/n}}=\frac{\pi}{2n}\cdot\frac{2ie^{\pi i/(2n)}}{e^{\pi i/n}-1}=\frac{\pi}{2n}\cdot\left(\frac{e^{\pi i/(2n)}-e^{-\pi i/(2n)}}{2i}\right)^{-1}=\frac{\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}}.$$

推广：

$$I_{r,n}=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{r^{2n}+x^{2n}}=\frac{r}{r^{2n}}\int_0^{+\infty}\frac{d(x/r)}{1+(x/r)^{2n}}=\frac{1}{r^{2n-1}}\cdot\frac{\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}}$$

*****6.1.1.**

单位圆盘$|z|<1$到单位圆盘$|w|<1$的分式线性映射，都具有下列形式：

$$w=e^{i\theta}\frac{z-z_1}{1-\bar{z_1}z},\theta\in[0,2\pi),|z_1|<1.$$

这是因为要把圆盘内某一个点 z_1，映到原点，它的反演点就要映到无穷远点了。

证明不变式

$$\frac{|dz|}{1-|z|^2}=\frac{|dw|}{1-|w|^2}$$

证明如下：

证明原命题等价于证明

$$\left|\frac{dw}{dz}\right|=\frac{1-|w|^2}{1-|z|^2},$$

而

$$\left|\frac{dw}{dz}\right|=|e^{i\theta}|\left|\frac{(1-\bar{z_1}z)+(z-z_1)\bar{z_1}}{(1-\bar{z_1}z)^2}\right|=\frac{1-|z_1|^2}{|1-\bar{z_1}z|^2}$$

于是只需要证明

$$\frac{1-|w|^2}{1-|z|^2}=\frac{1-|z_1|^2}{|1-\bar{z_1}z|^2}$$

而

$$\begin{aligned}1-|w|^2=1-w\bar{w}=1-\frac{z-z_1}{1-\bar{z_1}z}\cdot\overline{\frac{z-z_1}{1-\bar{z_1}z}}=1-\frac{(z-z_1)(\bar{z}-\bar{z_1})}{|1-\bar{z_1}z|^2}=1-\frac{z\bar{z}-z\bar{z_1}-z_1\bar{z}+z_1\bar{z_1}}{|1-\bar{z_1}z|^2}\\=\frac{1-z_1\bar{z}-\bar{z_1}z+|z_1z|^2-|z|^2+z\bar{z_1}+z_1\bar{z}-|z_1|^2}{|1-\bar{z_1}z|^2}=\frac{(1-|z|^2)(1-|z_1|^2)}{|1-\bar{z_1}z|^2}\end{aligned}$$

■

给出圆盘 $|z-z_0|\leq r$ 到 $|w-w_0|\leq R$ 的线性映射，其中 $z_1\to w_0$。

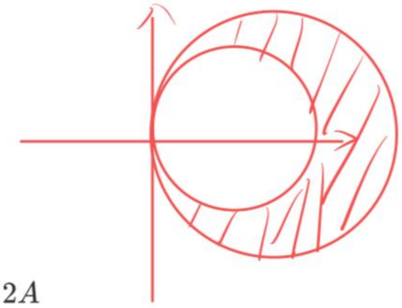
对单位圆盘作置换 $z'=(z-z_0)/r,w'=(w-w_0)/R.$

$$\frac{w-w_0}{R}=e^{i\theta}\frac{\frac{z-z_0}{r}-\frac{z_1-z_0}{r}}{1-\frac{\bar{z_1}-\bar{z_0}}{r}\cdot\frac{z-z_0}{r}}=re^{i\theta}\frac{z-z_1}{r^2-(\bar{z_1}-\bar{z_0})(z-z_0)}\Rightarrow w=w_0+rRe^{i\theta}\frac{z-z_1}{r^2-(\bar{z_1}-\bar{z_0})(z-z_0)},$$
$$\theta\in[0,2\pi),|z_1-z_0|<r$$

准不变式：

$$\frac{|d(\frac{z-z_0}{r})|}{1-|\frac{z-z_0}{r}|^2}=\frac{|d(\frac{w-w_0}{R})|}{1-|\frac{w-w_0}{R}|^2}\Leftrightarrow\frac{r|dz|}{r^2-|z-z_0|^2}=\frac{R|dw|}{R^2-|w-w_0|^2}$$

*****6.1.4.**



→ 圆盘

求单值解析映射 $f: D_1 \to D_2$。

$D_1 = \{z: |z-A| > A, |z-B| < B\}, D_2: |w| < 1$。

解：

1. 把原像映到一竖长条(原点映到无穷远点)，$z = 2A$ 映到原点：

$$z_1 = \frac{z-2A}{z}$$

2. 把竖长条旋转 $\pi/2$ ，变成一横长条：

$$z_2 = iz_1$$

3. 把横长条拉伸，把宽度由 $\frac{B-A}{B}$ 调整为 π。

$$z_3 = \frac{\pi B}{B-A} z_2$$

4. 把横长条映到整个上半平面：

$$z_4 = e^{z_3}$$

5. 把上半平面映到单位圆：

$$w = \frac{z_4 - i}{z_4 + i}$$

综上，

$$w = \frac{z_4 - i}{z_4 + i} = \frac{e^{z_3} - i}{e^{z_3} + i} = \frac{e^{\frac{\pi B}{B-A} z_2} - i}{e^{\frac{\pi B}{B-A} z_2} + i} = \frac{e^{\frac{i\pi B}{B-A} z_1} - i}{e^{\frac{i\pi B}{B-A} z_1} + i} = \frac{e^{\frac{i\pi B(z-2A)}{(B-A)z}} - i}{e^{\frac{i\pi B(z-2A)}{(B-A)z}} + i}$$

求 $D=\{z: |z-a|>a, |z-b|<b\}$ 到单位圆盘 $|W|<1$ 的单叶解析映射.

解. 令 $z'=\dfrac{z-2a}{z}$,

$D \to D'$

$$z''=\frac{z' i\pi}{\frac{b-a}{b}}=\frac{ib\pi(z-2a)}{(b-a)z}$$

$D' \to D''$

$$z'''=e^{z''}=e^{\frac{ib\pi(z-2a)}{(b-a)z}}$$

$z'' \to D'''$

$$W=\frac{z'''-i}{z'''+i},\quad D''' \to |W|<1$$

$$=\frac{e^{\frac{ib\pi(z-2a)}{(b-a)z}}-i}{e^{\frac{ib\pi(z-2a)}{(b-a)z}}+i}$$