第3次习题课题目

1. 在长为a的线段的中点的两边随机地各选取一点，求两点间距离小于$a/3$的概率。

2. 设随机变量$X_1, ..., X_n$相互独立，且都服从区间$[0, \theta]$上的均匀分布，定义:$Y = max\{X_1, ..., X_n\}$，$Z = min\{X_1, ..., X_n\}$。
(1)求(Y, Z)的联合分布函数$F(y, z)$;
(2)求Y、Z各自的数学期望和方差。

3. 设(X, Y)的联合密度函数为
$$p(x,y) = \begin{cases} \frac{1+xy}{4} & ,(x,y) \in [-1,1]^2 \\ 0 & ,otherwise \end{cases} \tag{1}$$
问：(1)X与Y是否独立？
(2)X^2与Y^2是否独立？

4. 设X, Y独立且都服从均匀分布$U(0, 1)$。记:$U = min(X, Y), V = max(X, Y)$, $W = U/V$。
(1)求U、V各自的概率分布函数;
(2)证明(U, V)服从平面区域$\{(u, v)|0 < u \leq v < 1\}$上的均匀分布;
(3)求W和V的联合概率密度函数，判断W和V是否独立并给出解释。

5. 设(X, Y)的联合密度函数为
$$p(x,y) = \begin{cases} 3x & ,0 < y < x < 1 \\ 0 & ,otherwise \end{cases} \tag{2}$$
试求$Z = X - Y$的密度函数。

6. 设二维随机变量(X, Y)的联合密度函数为$p(x, y) = \frac{1}{2}[\phi_1(x, y) + \phi_2(x, y)]$, 其中$\phi_1$,$\phi_2$分别是二维正态分布$N(0, 0, 1, 1, 1/3)$和$N(0, 0, 1, 1, -1/3)$的概率密度函数。

(1)求X、Y的边际密度函数;
(2)求X、Y的相关系数;
(3)问X、Y是否独立？

7. 设二维随机变量(X,Y)服从二维正态分布$N(0,0,1,1,\rho)$。
(1)求$E(max(X,Y))$;
(2)求$X-Y$与XY的协方差及相关系数。

8．设随机变量$X \sim N(0,1)$，Y各以1/2的概率取值±1，X与Y相互独立。

令$Z=XY$，证明：
(1)$Z \sim N(0,1)$;
(2)X与Z既不相关也不独立。（注：此题说明不相关性不蕴含独立性）

9．设随机变量X、Y独立同$\lambda=1$的指数分布。试证：$X+Y$与$\frac{X}{X+Y}$相互独立。