第7节 含电介质的静电场的边值问题

1. 一般方程（或称为通解方程）

物理本质的数学表述，电场所符合的一般方程：

$$\begin{cases} \nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho \\ \nabla\times\boldsymbol{E}=0 \\ \boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E} \end{cases}$$

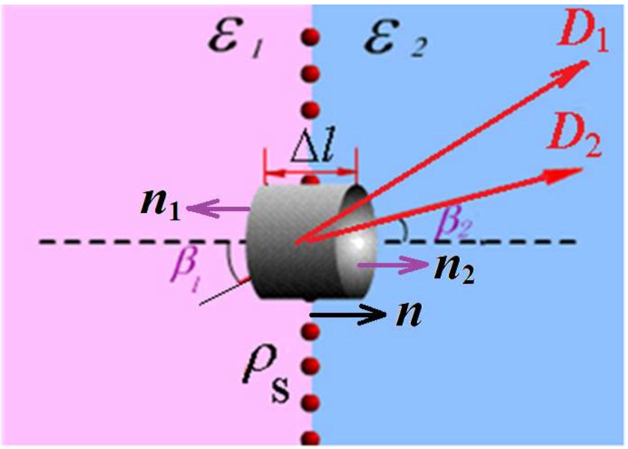
2. 不同介质区域分界面上的交界面条件

两种介质的交界面有两个侧面，分别属于两种介质。

界面上$\boldsymbol{E}$与$\boldsymbol{D}$不连续，有跳变。微分方程不成立，但积分方程成立。

下图两个区域中有ε_1、$\boldsymbol{D}_1$、 ε_2、$\boldsymbol{D}_2$，设界面上有自由面电荷密度ρ_s（一般理想介质界面上无ρ_s， 但介质有漏电时会有）。

包含界面上一点做一小圆柱高斯面，应用$\boldsymbol{D}$的高斯定理的积分形式。小圆柱底面积为 ΔS，让高$\Delta l\to 0$，所以只需计算底面上的积分，有：



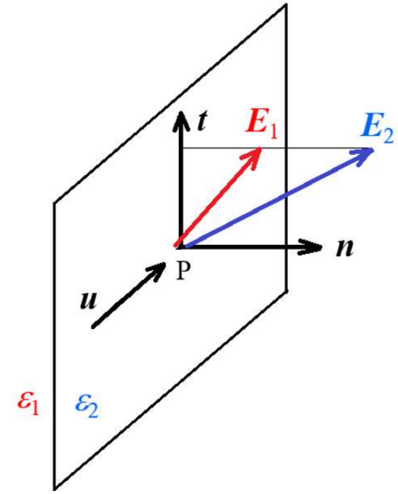
$$-D_{1n}\Delta S+D_{2n}\Delta S=\rho_s\Delta S$$

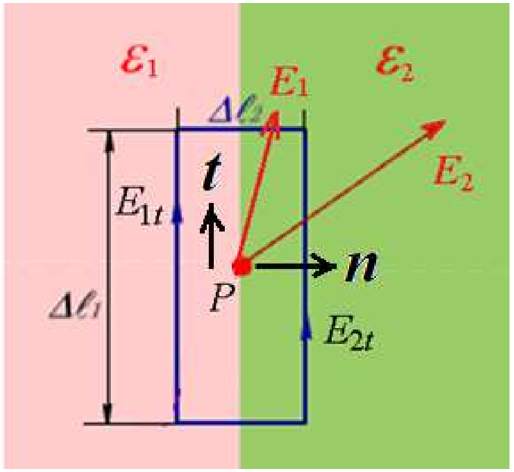
$$D_{2n}-D_{1n}=(\boldsymbol{D}_2-\boldsymbol{D}_1)\cdot\boldsymbol{n}=\rho_s$$

界面两侧$\boldsymbol{D}$的法向分量之差等于界面上的自由面电荷密度。（$\boldsymbol{n}$从1到2）

可见：若1区为导体，则D_{1n}=0，因此，导体外表面的$D_{2n}=\rho_s$ (C/m^2)。

定义$\boldsymbol{E}$的切向矢量位$\boldsymbol{t}$的方向，如图所示；并定义界面的法向$\boldsymbol{n}$为从区域1指向区域2.





在介质分界面上应用环路定律：围绕分界面上点 P作一小矩形环路， 竖边长为Δl_1、宽为Δl_2，让$\Delta l_2 \to 0$，所以只需计算两个Δl_1上的积分：$\oint_l \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = 0$　　$\boldsymbol{E}_1 \cdot \boldsymbol{t} \Delta l_1 - \boldsymbol{E}_2 \cdot \boldsymbol{t} \Delta l_1 = 0$

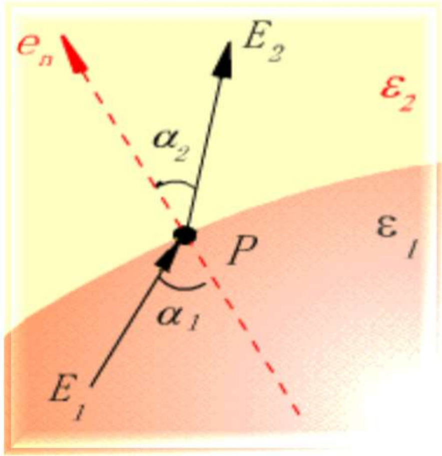
因此有：　$\boldsymbol{E}_1 \cdot \boldsymbol{t} - \boldsymbol{E}_2 \cdot \boldsymbol{t} = 0$ 分界面两侧 E 的切向分量连续。

由于界面的法向更容易确定，故应借助于$\boldsymbol{n}$来表示切向的连续性。

取 $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{u}$，则有 $\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{t} = \boldsymbol{E} \cdot (\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{n})$

因此上式可写为　$\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{E}_1 \times \boldsymbol{n} - \boldsymbol{E}_2 \times \boldsymbol{n}) = 0$，由于矢量 $(\boldsymbol{E}_1 \times \boldsymbol{n} - \boldsymbol{E}_2 \times \boldsymbol{n})$ 本身就是$\boldsymbol{u}$方向的矢量，故一定有 $\boldsymbol{E}_1 \times \boldsymbol{n} - \boldsymbol{E}_2 \times \boldsymbol{n} = 0$ 或$\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{E}_1 = \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{E}_2$

界面上场强的折射定律



$$E_{1t} = E_{2t} \rightarrow E_1 \sin\alpha_1 = E_2 \sin\alpha_2$$

在交界面上不存在面自由电荷时，

$$D_{1n} = D_{2n} \rightarrow \varepsilon_1 E_1 \cos\alpha_1 = \varepsilon_2 E_2 \cos\alpha_2$$

两式相除的 **折射定律** $\dfrac{\tan\alpha_1}{\tan\alpha_2} = \dfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$

电力线与等位线在交界面上一定会有折线特征。

在交界面上$\boldsymbol{E}$与$\boldsymbol{D}$都不连续。在不存在面自由电荷的截面上有：

$$\boldsymbol{E}_1 = E_{1t}\boldsymbol{t} + E_{1n}\boldsymbol{n} = E_{2t}\boldsymbol{t} + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}E_{2n}\boldsymbol{n}, \quad \boldsymbol{D}_1 = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}D_{2t}\boldsymbol{t} + D_{2n}\boldsymbol{n}$$

3. 边界条件

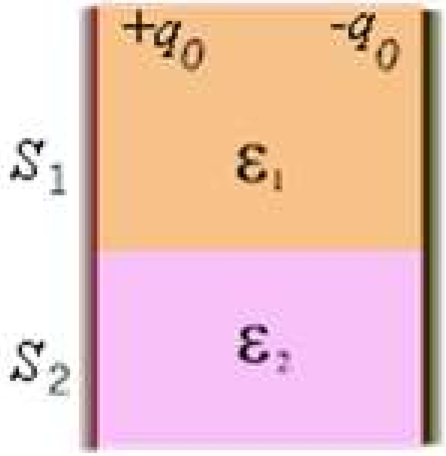
在场域外边界上$\boldsymbol{E}$的切向或法向分量给定之一；对于给定$\boldsymbol{E}$的切向边界，除了任选一条之外其它的要施加高斯通量定理约束条件。

4. 边值问题：以上三项合成的方程组为电场的边值问题。

给定边界条件的微分方程组称为边值问题。

交界面条件的一种应用

例：平行板电容器，已知S_1, S_2, ε_1和ε_2。已知极板上总电荷q_0；求电场强度。（大物例15.2）



解：画出电力线线。

对分界面$\boldsymbol{E}$只有切向，故两种介质中的$\boldsymbol{E}$相等，但$\boldsymbol{D}$不相等。

设S_1、S_2上的电荷面密度分别为ρ_{s1}、ρ_{s2}，先求出两电荷密度。

由于$D_1=\rho_{s1}$、$D_2=\rho_{s2}$；$E_1=\rho_{s1}/\varepsilon_1$、$E_2=\rho_{s2}/\varepsilon_2$。

将电荷密度表示成总电荷q_0与面积的关系。

$$q_1+q_2=q_0 \qquad \rho_{s1}S_1+\rho_{s2}S_2=q_0$$

$$E_{1t}=E_{2t} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\rho_{s1}}{\varepsilon_1}=\frac{\rho_{s2}}{\varepsilon_2}$$

解得：$\rho_{s1}=\dfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1S_1+\varepsilon_2S_2}q_0 \qquad \rho_{s2}=\dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1S_1+\varepsilon_2S_2}q_0 \qquad E_1=E_2=\dfrac{1}{\varepsilon_1S_1+\varepsilon_2S_2}q_0$

该题若极板间加电压U呢？（结论：加电压下E的介质无关）

第8节 静电场电位的边值问题

作业：习题22

（见最后一页的说明）

1. 电位的一般方程

既然只要引入φ就能使场无旋，那再用φ表示场的旋度方程既可得表示电场一般方程的φ满足的一般方程。

$$\begin{cases} \nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho \\ \nabla\times\boldsymbol{E}=0 \\ \boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E} \end{cases}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\nabla\cdot(\varepsilon\boldsymbol{E})=-\nabla\cdot(\varepsilon\nabla\varphi)=\rho$$

$$-\nabla\cdot(\varepsilon\nabla\varphi)=-\nabla\varepsilon\cdot\nabla\varphi-\varepsilon\nabla\cdot\nabla\varphi=-\nabla\varepsilon\cdot\nabla\varphi-\varepsilon\nabla^2\varphi=\rho$$

此为φ的一般方程。对于线性均匀介质有 $\nabla\varepsilon=0$，故有：

$$\nabla^2\varphi=-\rho/\varepsilon \qquad\qquad \nabla\cdot\nabla=\nabla^2=\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

称为泊松方程；

一个方程表示$\boldsymbol{E}$的两个矢量方程，且为常规偏微分方程，因此，解φ比解$\boldsymbol{E}$的边值问题要容易。

2. φ的分界面条件

（n从j到i）

$$\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{D}_i-\boldsymbol{D}_j)=\rho_s$$

$$\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{E}_i-\boldsymbol{E}_j)=0$$

先推导用电位φ表示的$\boldsymbol{E}$的切向连续界面条件。

在交界面上电位φ一定连续，即$\varphi_i=\varphi_j$，

因为若两个电位不相等有跳变，而该点两侧之间的间距为零，这样电位的变化率就是无限大，电场强度法向分量就是无限大。

再者，如果电位连续，则界面两侧电位沿着界面切向的导数就一定相等，电场强度的切向就一定相等。

法向界面条件直接用φ表示D_n即得：

$$\varepsilon_j\frac{\partial\varphi_j}{\partial n}-\varepsilon_i\frac{\partial\varphi_i}{\partial n}=\rho_s$$

3. 电位的边界条件

（n从j到i）

对于齐次法向边界条件 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{E}=E_n=0$

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{E}=-\boldsymbol{n}\cdot\nabla\varphi=-\frac{\partial\varphi}{\partial n}=0 \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial n}=0$$

此称为第二类边界。电力线组成的面为齐次第二类边界面。

一般是场的对称面，只计算一半场域时作为边界面的情况。

再看$\boldsymbol{E}$的齐次切向边界条件 $\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}=0$，因 $|\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}|=E_t=\partial\varphi/\partial t=0$

φ在S上的切向导数为零表明其为等位面，

故为了满足$\boldsymbol{E}$的齐次切向边界条件，设φ为常数即可：$\varphi_i=C_k$

只要C_k是任意常数便可，k表示各齐次切向边界。称为第一类边界。

- φ需设一个参考点，那就任选一个第一类边界为电位参考点（面）；
- 接电压源的导体边界为已知$\varphi=U_{0m}$，对此不需施加通量约束条件。
- 对C_k未知的第一类边界称为<u>悬浮导体边界</u>，记为$\boldsymbol{S}_f$，需加高斯通量定理：

$$\iint_S \boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iint_S D_n \mathrm{d}S=-\iint_S \varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial n}\mathrm{d}S=-q$$

$\boldsymbol{S}$面$\boldsymbol{n}$的方向指向场域外。

<u>对于导体面一定要视为第一类边界。所有边界上必须加第一或第二类边界条件之一，且只能加之一。</u>

4. 线性介质电位的边值问题

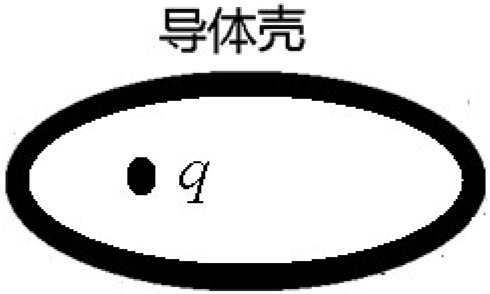
$$\begin{cases}\nabla^2\varphi_k=-\rho_k/\varepsilon_k & \in V_k\\ \varphi_i=\varphi_j & \in \boldsymbol{S}_{\mathrm{int}}\\ \varepsilon_j\dfrac{\partial\varphi_j}{\partial n}-\varepsilon_i\dfrac{\partial\varphi_i}{\partial n}=\rho_s & \in \boldsymbol{S}_{\mathrm{int}}\\ \varphi=0 \qquad \text{（}n\text{从}j\text{到}i\text{）} & \in \boldsymbol{S}_{1\mathrm{r}}\\ \varphi=U_{0m} & \in \boldsymbol{S}_1\\ \varphi=C_{\mathrm{unk}} & \in \boldsymbol{S}_f\\ \oint\!\!\!\oint_S \varepsilon\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}\mathrm{d}S=q & \in \boldsymbol{S}_f\\ \qquad\text{（}n\text{指向场域外）} & \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial n}=0 & \in \boldsymbol{S}_2\end{cases}$$

U_{0m}已知，C_{unk}未知。

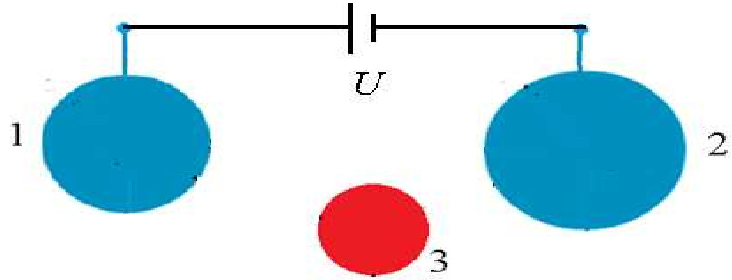
悬浮导体边界实例

实际问题中会有悬浮导体现象，即导体不接地也不与其它已知电压源连接，悬浮在场域中。如下面的三种情况：(a)已知导体上的总电荷，(b)屏蔽导体壳，(c)导体3。

（a）



（b）



（c）

- 悬浮导体表面的电位为未知常数，各点的电荷面密度一般也未知，但悬浮导体上的总电荷已知。故悬浮导体表面的边界条件为特殊的第一类边界，需加高斯通量定理作为附加边界条件。
- 对简单结构导体，有时可以看出或近似认为电荷均匀分布，但此时也应加第一类边界条件，不应加第二类条件：$d\varphi/dn=-\rho_s/\varepsilon$。
- 因此时电荷是结果，是通过事先判断场而得到的电荷分布。

要求给出边值问题时的四步曲：

1）在每个子区域中分别设定电位函数，可用下标编号标识；

2）分别给出各函数所满足的方程（泊松或拉普拉斯方程）；

3）列写各交界面上电位的两个交界面条件；

4）给出场域外边界上的边界条件（每部分给一类）。

唯一性定理：给定充必边界条件的电位微分方程的解是唯一的。

由唯一性定理可得推论：

1）对于电位（或其它场量）的两个场问题，只要它们的源相同（等效于场域内满足的方程与界面条件相同），且边界条件相同，则这两个问题的解就一定相同，两个问题本质上就是同一个问题，因边值问题相同。

2）对一个问题，若能建立另一个场模型，使得该模型的场量在场域内所满足的方程、交界面条件、边界条件与原问题相同，那这个模型的解就一定与原问题的解相同。这是下一节介绍的镜像法的理论依据和实施方法理论基础。

5. 电位边值问题的两种解法

1）显示函数通解法

对一维问题，泊松方程变为常微分方程，通解很容易得到。
这是静电场中的一大类计算问题。

对二维问题，可以利用分离变量法得到通解，但特解不易得到。

2）积分形式通解法

$R = |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|$

可以证明，φ的泊松方程的积分形式通解为：

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \iiint_V \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{4\pi\varepsilon R}\mathrm{d}V' - \frac{1}{4\pi}\oint\!\!\oint_S [\varphi(\boldsymbol{r}')\frac{\partial}{\partial n'}(\frac{1}{R}) - \frac{\partial\varphi(\boldsymbol{r}')}{\partial n'}\frac{1}{R}]\mathrm{d}S'$$

无限大均匀空间中标量源产生的位函数或泊松方程的特解为：

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint_V \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{R}\mathrm{d}V'$$

$$\mathrm{d}\varphi(\boldsymbol{r}) = \frac{\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}V'}{4\pi\varepsilon R} \qquad \varphi(\boldsymbol{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon R}$$

6. 电位求解实例

先看解边值问题法，因为这是最重要的方法；然后是利用电场结果求电位法。自由空间电位求解的电荷积分解法不再赘述。

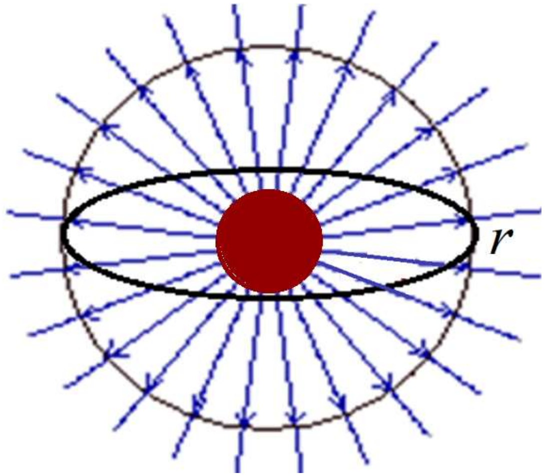
方法1：解边值问题法

利用该方法我们只能求解可以简化为一维的简单问题。
形成边值问题的关键是建立计算场域与给定边界条件。

例1：有一半径为a的球形区域内均匀分布有电荷ρ，介电常数为ε_1，电荷区域外为无限大真空空间，给出电位的边值问题并求解。

解：先画场图或分析场分布特性！关于球心对称，故建立球坐标系，这样便有$\varphi(r)$；求解场域为一根射线。

两端点为场域边界，边界条件为：
设无限远处电位为零；
由于采用了球坐标系，对于原点r=0处需施加特殊边界条件：电位值有限。
在两个区域中设两个电位函数，
球内为$\varphi_1(r)$、球外为$\varphi_2(r)$。



边值问题为：

$$\begin{cases}\nabla^2\varphi_1(r)=\dfrac{1}{r}\dfrac{\mathrm{d}^2[r\varphi_1(r)]}{\mathrm{d}r^2}=-\rho/\varepsilon_1 & (r<a)\\ \nabla^2\varphi_2(r)=\dfrac{1}{r}\dfrac{\mathrm{d}^2[r\varphi_2(r)]}{\mathrm{d}r^2}=0 & (r>a)\\ \varphi_1(r)=\varphi_2(r) & (r=a)\\ \varepsilon_1\dfrac{\mathrm{d}\varphi_1(r)}{\partial r}=\varepsilon_0\dfrac{\mathrm{d}\varphi_2(r)}{\partial r} & (r=a)\\ \varphi_2(\infty)=0 & \\ \varphi_1(0)\text{为有限值} & \end{cases}$$

两边求两次不定积分可得$\varphi_1(r)$与$\varphi_2(r)$的通解为：

$$\varphi_1(r)=-\frac{\rho}{6\varepsilon_1}r^2+C_1+\frac{C_2}{r}\qquad\qquad \varphi_2(r)=C_3+\frac{C_4}{r}$$

当r=0时φ_1为有限值，故C_2=0；利用无限远处$\varphi_2(\infty)=0$可得C_3=0；利用界面上电位法向导数的关系有：

$$-\frac{\rho}{3}a=-\varepsilon_0\frac{C_4}{a^2}\qquad\qquad C_4=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}a^3$$

利用界面上电位连续界面条件有：

$$-\frac{\rho}{6\varepsilon_1}a^2+C_1=\frac{C_4}{a} \qquad C_1=\frac{\rho}{3\varepsilon_1}a^2+\frac{\rho}{6\varepsilon_0}a^2=\frac{\rho}{3}a^2(\frac{1}{\varepsilon_1}+\frac{1}{2\varepsilon_0})$$

从而得：

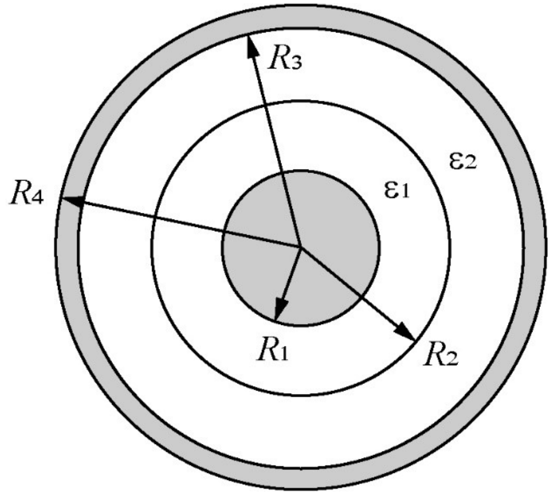
$$\varphi_1(r)=-\frac{\rho}{6\varepsilon_1}r^2+\frac{\rho}{3}a^2(\frac{1}{\varepsilon_1}+\frac{1}{2\varepsilon_0}) \qquad \varphi_2(r)=\frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0 r}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$\boldsymbol{E}_1=-\nabla\varphi_1=-\frac{\partial\varphi}{\partial r}\boldsymbol{r}^0=\frac{\rho r}{3\varepsilon_1}\boldsymbol{r}^0 \quad (r<a) \qquad \boldsymbol{E}_2=-\nabla\varphi_2=-\frac{\partial\varphi}{\partial r}\boldsymbol{r}^0=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{r}^0 \quad (r>a)$$

例2：一导体球带有电荷q，外面同心套导体球壳不带电荷，导体球与球壳之间充满两种介质，界面也同球心；球壳外为空气。

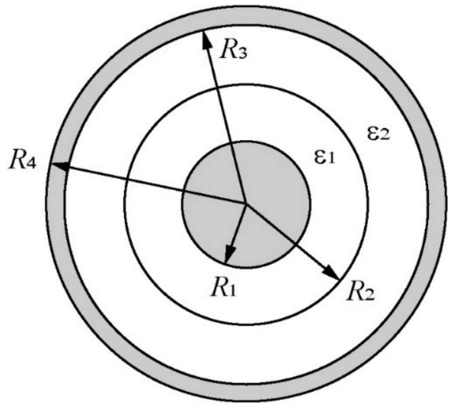
（1）给出电位的边值问题；

（2）若移动导体球使其偏心，给出电位的边值问题；并求球壳外区域的电位以及球壳上的电荷分布。



解（1）：先画场图或分析场分布特性！

- 建立球坐标系，则变为一维$\varphi(r)$。
- 由于导体球壳的存在，可以分成两个子区域分别求解：球壳内区域（记为区域V_1）和球壳外区域。
- V_1有两个分离的导体面，设一个面为电位参考面，另一个面则为悬浮电位面。
- 球壳外区域为开域问题，可设无限远处为电位参考点，则球壳外表面为悬浮电位面。
- 但为了使两个子区域的电位采用相同的参考点，两个子区域可都以导体球壳为电位参考点。



i）区域1中电位的边值问题

设球壳的电位为零，

导体球为悬浮导体；

介质ε_1区为$\varphi_1(r)$、

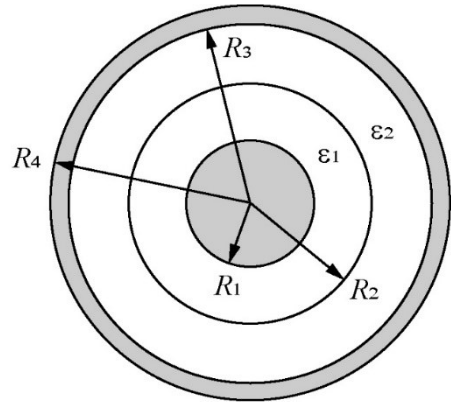
介质ε_2区为$\varphi_2(r)$。

边值问题为：

（设导体球表面的法向指向场域中，即与r的方向相同）

$$\begin{cases} \nabla^2\varphi_1(r) = \dfrac{1}{r}\dfrac{\mathrm{d}^2[r\varphi_1(r)]}{\mathrm{d}r^2} = 0 & (R_1 < r < R_2) \\ \nabla^2\varphi_2(r) = \dfrac{1}{r}\dfrac{\mathrm{d}^2[r\varphi_2(r)]}{\mathrm{d}r^2} = 0 & (R_2 < r < R_3) \\ \varphi_1(R_2) = \varphi_2(R_2) \\ \varepsilon_1 \dfrac{\mathrm{d}\varphi_1(r)}{\mathrm{d}r}\Big|_{r=R_2} = \varepsilon_2 \dfrac{\mathrm{d}\varphi_2(r)}{\mathrm{d}r}\Big|_{r=R_2} \\ \varphi_2(R_3) = 0 \\ \varphi_1(R_1) = C_{\mathrm{un}} \\ -\oiint_S \varepsilon_1 \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial n}\mathrm{d}S = -\oiint_S \varepsilon_1 \dfrac{\mathrm{d}\varphi_1(r)}{\mathrm{d}r}\Big|_{r=R_1}\mathrm{d}S = q \end{cases}$$

（ii）球壳外区域电位的边值问题



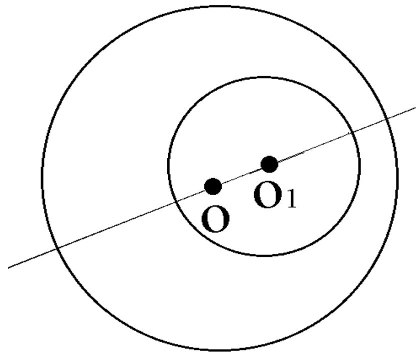
设球壳为参考点，

此时无限远处为电位悬浮边界，无限远处的电荷为$-q$，边值问题为：

$$
\begin{cases}
\nabla^2\varphi_3(r)=\dfrac{1}{r}\dfrac{\mathrm{d}^2[r\varphi_3(r)]}{\mathrm{d}r^2}=0 \\
\varphi_3(R_4)=0 \\
\varphi_3(\infty)=U_{\mathrm{un}} \\
\oiint_S[-\varepsilon_0\dfrac{\mathrm{d}\varphi_3(r)}{\mathrm{d}n}]\mathrm{d}S=\oiint_S[\varepsilon_0\dfrac{\mathrm{d}\varphi_3(r)}{\mathrm{d}r}]\mathrm{d}S=-q
\end{cases}
$$

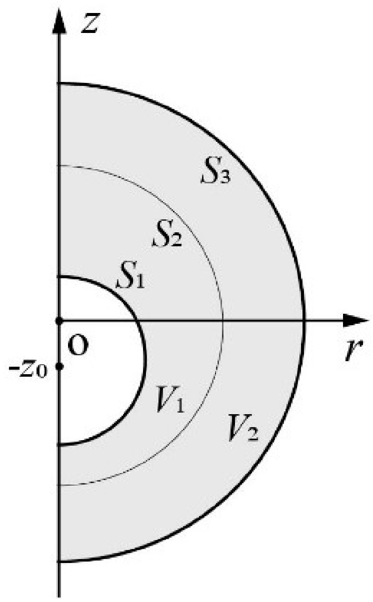
- $\boldsymbol{S}$是一大闭合面，其$\boldsymbol{n}$指向场域内为负$\boldsymbol{r}$方向，包围的电荷为$-q$。
- 由该边值问题可看出，边值问题中与场域外的物体及位置无关，
- 也就是说，导体球及介质是否与导体壳同球心对边值问题无影响，故对于该区域的场便没有影响；
- 进而，该边值问题适用于本题第（2）问的非同心导体球情况。

（2）如果导体球与球壳和介质分界面不同球心



- 场分布关于两球心连线o_1-o轴对称；
- 建立r-z圆柱坐标系，使z轴位于连线o_1-o上，原点位于o点。
- 注意：轴对称场只需求一个子午面上的场，子午面是 $r \geq 0$ 的半无限大面，r<0的区域没有意义，即左半平面一定不是求解场域。
- 在z=0的边界上必为一根电力线，为电场的齐次二类边界，求解场域与边值问题为：

$$
\begin{cases}
\nabla^2\varphi_{1,2}(r,z)=\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial^2[r\varphi_{1,2}(r,z)]}{\partial r^2}+\dfrac{\partial^2\varphi_{1,2}(r,z)}{\partial z^2}=0 & (\text{在}V_1,\ V_2\text{内}) \\
\varphi_1(r,z)=\varphi_2(r,z) & (\text{当}r^2+z^2=R_2^2\ \text{时}) \\
\varepsilon_1\dfrac{\partial\varphi_1(r,z)}{\partial n}=\varepsilon_2\dfrac{\partial\varphi_2(r,z)}{\partial n} & (\text{当}r^2+z^2=R_2^2\ \text{时}) \\
\varphi_2(r,z)=0 & (\text{当}r^2+z^2=R_3^2\ \text{时}) \\
\varphi_1(r,z)=C_{\text{un}} & (\text{当}r^2+(z+z_0)^2=R_1^2\ \text{时}) \\
-\oiint_S \varepsilon_1\dfrac{\partial\varphi_1(r,z)}{\partial n}\mathrm{d}S=q & (\text{当}r^2+(z+z_0)^2=R_1^2\ \text{时}) \\
\dfrac{\partial\varphi_1(r,z)}{\partial r}=\dfrac{\partial\varphi_2(r,z)}{\partial r}=0 & (\text{当}z=0\ \text{时})
\end{cases}
$$



在(1)的(ii)中已给出了球壳外 $r \geq R_4$ 区域φ_3的边值问题为：

$$\begin{cases} \nabla^2 \varphi_3(r) = \dfrac{1}{r}\dfrac{\mathrm{d}^2[r\varphi_3(r)]}{\mathrm{d}r^2} = 0 \\ \varphi_3(R_4) = 0 \\ \varphi_3(\infty) = U \\ \oiint_S [-\varepsilon_0 \dfrac{\mathrm{d}\varphi_3(r)}{\mathrm{d}n}]\mathrm{d}S = \oiint_S [\varepsilon_0 \dfrac{\mathrm{d}\varphi_3(r)}{\mathrm{d}r}]\mathrm{d}S = -q \end{cases}$$

通解为：

$$\varphi_3(r) = C_1 + \frac{C_2}{r}$$

无限远电位为U，得C_1=U；由 $\varphi_3(\infty) = U$ 可得 $C_2 = -UR_4$

$$\varphi_3(r) = U - \frac{UR_4}{r} \qquad \frac{\partial \varphi_3(r)}{\partial r} = \frac{UR_4}{r^2}$$

施加通量源约束，用半径为R的大球面模拟无限远边界，则有：

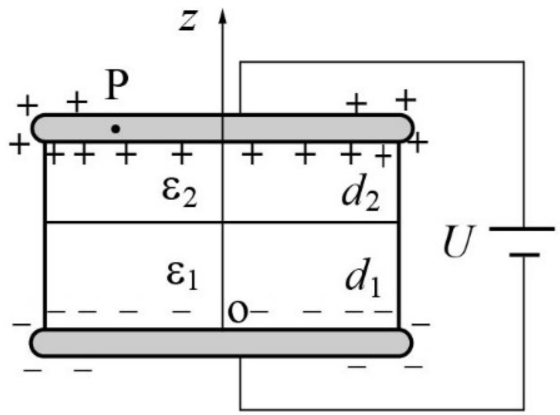
$$\oiint_S [\varepsilon_0 \frac{\mathrm{d}\varphi_3(r)}{\mathrm{d}r}]_{r=R} \mathrm{d}S = \oiint_S \varepsilon_0 \frac{UR_4}{R^2}\mathrm{d}S = \varepsilon_0 \frac{UR_4}{R^2} \oiint_S \mathrm{d}S = \varepsilon_0 \frac{UR_4}{R^2} 4\pi R^2 = 4\pi\varepsilon_0 R_4 U = -q$$

故有：
$$U = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_4} \qquad \varphi_3(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_4}$$

$$E_r = -\frac{\mathrm{d}\varphi(r)}{\mathrm{d}r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad \rho_s = D_r(R_4) = \frac{q}{4\pi R_4^2}$$

方法2：利用电场强度求电位（自学）

例3：两平行导体板构成的电容器，
极板间有两层介质，极板间加有电压源U。
忽略端部效应，求两种介质区域的电位。



解：可认为电压源内有一种力可使正负电荷向两个方向移动。
电荷在电容器内产生电场与电位，当电压等于电源电压时，内外平衡则充电结束。

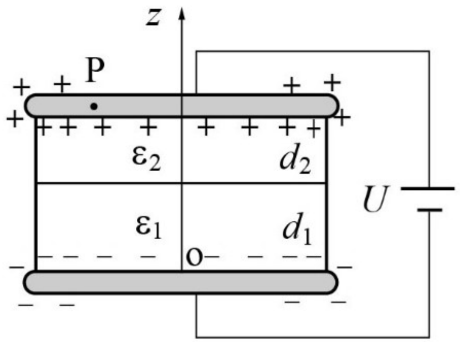
非无限大极板上的电荷分布? P点电场强度的水平分量一定要为零。

为何电荷基本上都分布在两个极板相对的内侧表面上?
可认为这是由于正负极板上的电荷等量异号，相互吸引的结果。
但更严格的解释还是应该从导体内的电场为零来说明。
对于导体内的一点，其一侧有一个面，另一侧有三个面，
若电荷在四个面上都有值，不可能使得导体内z轴方向的电场为零。

基于电荷分布不难画出电力线（电位移$\boldsymbol{D}$线）以及等位线。

忽略端部效应，理解为没有端部。整个场域内从横向看（即z=常数的各点上）场处处相同，这就构成的一维问题$E_z(z)$，且面电荷均匀分布。

先利用高斯通量定理求$D_z(z)$，
然后对电场强度积分求电位$\varphi(z)$。
先设导体表面的面电荷为$\pm\rho_{\mathrm{s}}$。
两种介质区域中的电位移均为：$\boldsymbol{D}(z) = -\rho_{\mathrm{s}}\boldsymbol{k}$。



求极板间电压与电荷ρ_{s}的关系。由于$\boldsymbol{E}$在每种介质中均匀，
故基于电压等于电场强度积分可直接得：

$$U = E_1 d_1 + E_2 d_2 = \rho_s\left(\frac{d_2}{\varepsilon_2} + \frac{d_1}{\varepsilon_1}\right) \qquad \rho_s = \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2 U}{\varepsilon_1 d_2 + \varepsilon_2 d_1}$$

将ρ_{s}的表达式代入$\boldsymbol{D}$中可得已知电压下的电场。

现在求每点电位$\varphi(z)$，设下极板为电位参考点。
求z处的电位时要沿负z轴方向对$\boldsymbol{E}(z)$积分，即$\mathrm{d}\boldsymbol{l}$与z轴方向相反。

$$0 \le z \le d_1 \qquad \varphi_1(z) = \int_{Pz}^{P_0} \boldsymbol{E}_1 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\int_{Pz}^{P_0} E_{1z}\mathrm{d}l = -\int_z^0 E_{1z}\mathrm{d}(-z) = E_{1z}\int_z^0 \mathrm{d}z = -E_{1z}z = \frac{\rho_s}{\varepsilon_1}z$$

$$d_1 \le z \le d_2 \qquad \varphi_2(z) = \int_z^{d_1} E_{2z}\mathrm{d}z + \varphi_1(d_1) = E_{2z}(d_1 - z) + \frac{\rho_s}{\varepsilon_1}d_1 = \frac{\rho_s}{\varepsilon_2}(z - d_1) + \frac{\rho_s}{\varepsilon_1}d_1$$

$$U = \varphi_2(d_1 + d_2) = \rho_s\left(\frac{d_2}{\varepsilon_2} + \frac{d_1}{\varepsilon_1}\right)$$

习题22第二问说明

题干改为：若已知正负极板上分别放置（靠电压源充电）了电荷$\pm\rho_s$，体电荷与第一问相同，用边值问题求极板间电位与电场强度。并用叠加定理证明所求电场强度的正确性，即将问题视为由体电荷与放置的面电荷分别产生的电场，分别用高斯定理求出电场强度，然后叠加。

提示：一个导体电极的两侧面感应的电荷之和为零，但本题在悬浮导体上施加高斯通量定理约束边界条件时，只需要考虑一个侧面，而不是导体极板的总表面，因为另一个侧面没有在场域内。

一个侧面上的总电荷等于感应电荷与放置的电荷之和，而侧面上感应电荷等于体电荷的一半。