

题一 (20分)

随机等可能地从以下英文句子 "SOME DOGS ARE BROWN" 中选一个单词，再从该单词中随机等可能地选一个字母。

- (1) 求选中的字母为 R 的概率；
- (2) 如果选中的字母为 R，求选中的单词为 BROWN 的概率；
- (3) 设 X 为选中的单词的长度（字母数），求 X 的分布列；
- (4) 对所有可能的 k 值，计算条件概率 $P(X = k | X > 3)$ 。

题二 (20分)

随机变量 X 服从参数为 1 的指数分布, 其概率密度函数

$$f(x) = e^{-x} (x \geq 0).$$

令 $Y = [X]$ 为 X 的整数部分, $Z = \{X\}$ 为 X 的小数部分。

- 1). 求 Y 的分布列;
- 2). 求 Z 的概率密度函数;

题三 (30分)

(1) 设 X 服从正态 $N(\mu, \sigma^2)$, 定义 $Y = e^X$.
求 Y 的概率密度函数。

(2) 设 T 时刻某股票价格为

$$S = S_0 \exp((r - \sigma^2/2)T + \sigma\sqrt{T}Z), Z \text{ 服从 } N(0, 1).$$

(S_0 为0时刻股票价格, r, σ 为参数),

求 $\ln S$ 和 S 的概率密度函数。

(3) 求数学期望 $E(S)$.

题四 (30分)

设 X, Y 为相互独立的标准正态随机变量 $N(0,1)$. 将 (X, Y) 作为平面上的点, 设 R, θ 为该点的极坐标 ($R > 0, 0 \leq \theta < 2\pi$), 即

$$\begin{cases} X = R \cos(\theta), \\ Y = R \sin(\theta). \end{cases}$$

- (1) 求 (R, θ) 的联合概率密度函数;
- (2) 求 R 与 θ 的边缘概率密度函数, 并判断 R 与 θ 是否相互独立? 为什么?
- (3) 令 $Z = R^2$, 求 Z 的概率密度函数及数学期望。
- (4) 对上述随机变量 Z , 计算条件概率 $P(Z > 6 | Z > 2)$.