复变函数试题 2022年12月28日, A卷. (共10题，每题10分)

1. 求$max_{|z|\leq r}|\alpha z^n+\beta|$, 并给出取得最大模时$z$的取值范围, z及像$z'=\alpha z^n+\beta$的复数表达式. 这里$r>0,\ \alpha\neq 0,\ \alpha,\ \beta$是复常数，　n 是正整数.

2. 写出$\sin(x+iy)$的实部和虚部，并由此证明：方程$\sin(x+iy)=A+iB$有无穷多个解，这里$x,\ y,\ A,\ B$ 是实数且$A,\ B$是常数.

3. 设C_r是圆周：$|z-z_0|=r>0$, 函数$f(z)$在复平面处处解析，用$f(z)$关于C_r的闭曲线积分公式给出$f(z)$在z_0点的n阶导数的公式(Cauchy 高阶导数公式)，这里n是非负整数.　(2 分).

并由此证明：

(a). 若令$M(r)=\max_{|z-z_0|=r}|f(z)|$, 则$|f^{(n)}(z_0)|\leq \frac{n!M(r)}{r^n}$;　　(4分)

(b). 若存在常数$M>0$，n是非负整数, 使得$|f(z)|\leq M\cdot\left(\sum_{k=0}^{n}|z|^k\right),\forall z\in C$, 则$f(z)$为一次数不超过$n$的多项式.　　(4分)

4. 记$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}c_nz^n$. 叙述幂级数$f(z)$的Abel定理的内容　(2分)及收敛半径($R>0$)的定义(2分), 并分别给出具体例子(每例2分)，说明存在幂级数使其在收敛圆周上(I) 处处发散；(II) 既有收敛的点，又有发散的点；(III) 处处收敛(以上例子中均须给出理由).

5. 求复积分$J_n=\oint_{|z|=2}\frac{1-\cos 6z^7}{z^n}dz$, 这里$n$是正整数.

6. 求复积分$J=\oint_{|z|=2}\frac{z^3e^{\frac{2}{z}}}{1+z}dz$.

7. 求实积分　(1)　$I_1=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a+b\cos\theta}$,　这里$a,\ b$ 是实数，且$a>|b|\geq 0$　(6分),

(2)　$I_2=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{A^2\cos^2\theta+B^2\sin^2\theta}$,　这里$A>0,\ B>0$.　(4分).

8. 求实积分$I_n=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{r^{2n}+x^{2n}}$, 这里$n$是正整数, $r>0$ 是常数.

9. 求将区域$D=\{z:|z-2A|>2A,\ |z-2B|<2B\}$映到单位圆盘$D'=\{w:|w|<1\}$的一个单值解析映射，　这里 $0<A<B$.

10. (1) 写出将单位圆盘$|z|<1$映到单位圆盘$|w|<1$的分式线性映射的一般形式，并证明其满足不变式：

$$\frac{|dw|}{1-|w|^2}=\frac{|dz|}{1-|z|^2}.\qquad (6分)$$

(2) 写出将圆盘$|z-z_0|<r$映到圆盘$|w-w_0|<R$的分式线性映射的一般形式, 使满足$w(z_1)=w_0$, 这里$r>0,\ R>0$是常数, $z_0,\ z_1,\ w_0$是复常数且$|z_1-z_0|<r$, 并写出与(1)对应的准不变式. (写出即可, 不需证明).　　(4分)