

2023 秋季学期

物理实验 B(1)课程资料



目 录

I	课程安排及要求-----	1
II	物理实验课程介绍-----	6
III	物理实验基础知识	
III-1	实验测量误差及数据处理-----	7
III-2	电磁学实验基本仪器介绍-----	28
III-3	光学实验预备知识-----	31
IV	实验讲义	
IV-1	用三线摆、扭摆测量刚体的转动惯量-----	34
IV-2	用玻尔共振仪研究阻尼振动和受迫振动特性-----	39
IV-5	准稳态法测不良导体的导热系数和比热-----	45
IV-4	用传感器测空气的相对压力系数-----	51
IV-3	分光计的调节及三棱镜色散曲线的测定-----	57

I 课程安排及要求

I-1 课程安排

(1) 2023 秋物理实验 B(1)课：**1 次**绪论（理论大课），**5 次**必做实验。

绪论课：第 3 周周日（10 月 8 号）第 5、6 节（**内容相同，只需选上其中一节课**），具体地点请在第 2 周周五前查看网络学堂公告；

实验课：第 4~13 周（下午 1:30~4:50，晚上 **6:30~9:50**），每 2 周一次，分组循环，地点在六教 5~6 层。

(2) 实验分组见网络学堂，牢记自己的循环组号并按规定的时间上课。

(3) 实验题目及房间见表 I-1，分组实验循环顺序见表 I-2。

(4) 实验讲义、资料等上传在网络学堂课程文件夹中，请自行下载。

(5) 关于课程的重要信息、通知等会发布在网络学堂课程公告栏中，请随时关注。

表 I-1 实验房间列表

代 号	实 验 名 称	房间号(六教)
三线摆	用三线摆、扭摆测量刚体的转动惯量	6B506
阻尼	用玻尔共振仪研究阻尼振动和受迫振动的特性	6B602
热导	准稳态法测不良导体的导热系数和比热	6A504
空气	用传感器测空气的相对压力系数	6A509
分光计	分光计的调节和三棱镜色散曲线的测定	6B604(内)

表 I-2 物理实验 B(1)各分组实验循环顺序

循环号	4/5 周	6/7 周	8/9 周	10/11 周	12/13 周
J	三线摆	阻尼	空气	热导	分光计
K	阻尼	空气	热导	分光计	三线摆
L	空气	热导	分光计	三线摆	阻尼
M	热导	分光计	三线摆	阻尼	空气
N	分光计	三线摆	阻尼	空气	热导
H	三线摆	阻尼	空气	热导	分光计
说明：第 10/11 周的实验写 完整报告 ，其余周的实验写 简要报告 。					

I-2 实验课基本要求

1. 课前预习

为课上能够顺利开展实验，需要课前进行预习。认真阅读实验讲义，或者通过查阅书籍文献、观看多媒体视频资料等方式，学习实验的原理和方法；了解实验所用的仪器及其基本功能、操作方法和注意事项；明确实验任务、操作步骤及关键点；根据实验的内容和要求设计数据记录表格、画出实验电路图或光路图等。另外，提前从网络学堂课程文件夹中下载打印预习思考题，做书面解答，课上提交。

2. 课上实验

①按时上课，进入实验室后先在成绩单上签名并提交书面预习作业，然后按照名单上的组内顺序号找到对应的实验桌就坐。结合预习情况可熟悉仪器，但请勿通电。

②遵守学生实验守则，按照实验内容、步骤及要求开展实验，既要注重实验的结果，更要重视实验的过程。首先在实验桌（台）面上合理布置、摆放实验仪器、器材。实验过程中规范操作仪器，仔细观察实验现象、认真测量数据并做好实验记录，深入探讨、研究实验中存在或出现的问题。逐渐养成良好的实验研究作风习惯。鼓励与老师或同学开展交流、讨论，但注意保持实验环境安静。若仪器出现异常情况，应及时关闭电源并向老师报告，在老师的指导下学习如何检查、确认和排除故障。要严肃认真对待实验测量数据。如果确实是读错、记错的，应保留原数据，不要涂抹或删除，做好标记后在旁边空白处重新记录正确的数据，使正、误数据都能够清晰可辨，以供分析实验结果时做参考。在设计表格时可提前预留出修改的余地。另外也不要先随便草记在另外的纸上然后再誊写到数据表格里，这样容易出错，况且也非“原始数据”。如果数据错误过多，则需重新进行观测记录。需要提醒的是不要用铅笔记数据。实验中可能用到高压电、激光、高温或低温液体等，请注意规范操作，保护好个人及他人的人身安全。

③实验结束后，不急于整理仪器。先关闭电源、光源等，然后请老师检查原始数据记录，以防漏测数据或者存在严重错误、失误。经老师检查通过并在原始数据记录上签字后，再还原仪器、整理桌面，最后带好所有个人物品离开实验室。

3. 课后总结报告

课后及时整理数据记录、处理实验数据、书写实验报告。原始数据记录如果比较凌乱，应重新整理，并列入报告中相应的位置。数据处理包括数据计算、物理量之间的函数关系拟合、关系曲线作图以及误差估算等一般应按照实验内容的前后顺序分项进行。数据计算过程要有必要的文字说明，在明确写出计算公式、数据代入式后，即可给出计算的结果，无需罗列每一步演算过程。对于采用相同方法、过程的多次重复计算，只需列举其中的一例说明计算思路方法，然后用列表格的方式给出所有的计算结果即可。作图、表要合理、规范、美观。最后对实验进行综合分析、总结，包括实验结果、测量误差、结论，实验现象、规律或者实验中遇到的问题的分析、解释（富有见解）、说明等。实验报告要求书面工整、条理清晰、内容简洁明了。一份合格的实验报告的最低要求是可以让具有同等知识水平的人能够从中看明白实验者依据什么原理、采用什么方法和仪器、在什么条件下进行了什么实验研究，通过怎样的逻辑分析推理、得出什么结果或者结论。

完整的物理实验报告包括实验报告名称、实验者信息等、实验目的、实验仪器、实验原理、实验内容

步骤、实验数据处理、分析总结以及原始数据记录等内容（参见图I-1 所示实验报告格式模版）。其中，实验目的、仪器、原理、内容步骤几项的总字数要求不超过 1000 字（不含图）。实验原理部分要自己概括提炼总结，不要照抄讲义。物理实验的简要报告不需要写实验原理、内容步骤，重点在数据处理和分析总结部分。实验报告撰写完成后要求转换成 PDF 格式的电子版文档（手写报告可扫描或拍照后整理成一份 PDF 格式文档），在实验结束之后的一周之内提交到网络学堂上相应实验作业箱里。

本学期第 10/11 周的实验要求写完整报告，其余周的实验写简要报告。

<div style="margin-bottom: 10px;"> <div style="border-bottom: 1px solid black; display: inline-block; width: 100px;"></div> 实验报告 </div> <div style="margin-bottom: 10px;"> 姓名：_____ 学号：_____ 实验日期：_____ 实验台号：_____ </div> <div> 【实验目的】 【实验仪器】 （列出所用主要仪器名称、型号、规格等） 【实验原理】 （简要说明实验原理、方法，概括提炼总结，不抄讲义） 【实验内容及步骤】 （列出主要、关键事项，简单明了） 【数据处理】 （按照实验内容整理数据，进行计算、作图、误差分析） 【实验总结】 （实验结果、测量误差、结论，现象、规律或者问题的分析、解释、说明） 【原始数据记录】 （附上原始数据记录） </div>
--

图I-1 物理实验完整报告格式

4.其它事项

(1)普通物理实验教学值班室在六教 6B501，正常工作日都有老师值班。关于课程的任何问题可以在工作日上午到值班室咨询，或者在网络学堂上留言，也可以给教务邮箱 gplab@tsinghua.edu.cn 发信。实验答疑时间、地点安排请查询网络学堂公告（开课后发布）。

(2)如果需要**提前熟悉仪器、课后补做**（当堂未完成内容）**或者进行深入探究**，白天可以在相应实验房间没课的时间段（查看值班室门口白板上张贴的总课表），到值班室登记后进行。注意：实验室周末全

天、工作日晚上不对个人开放！

(3)实验课不得无故迟到、旷课。**迟到超过半小时及以上者不允许上该堂实验课。**无故旷课或因迟到被拒绝上课造成缺课的，可安排**非正常补课**（本次实验满分按 8 分计）。若因生病、事假等正当理由而缺课的，销假后的一周之内凭医院或学校、院系有关部门出具的假条、证明等材料（需负责人签字、盖章）安排**正常补课**。办理补课前请在网络学堂查询实验课表，确认好自己可以选择补课的时段，发送信息至教务邮箱：gplab@tsinghua.edu.cn，由实验室统一安排。**特别提醒：第 13 周周末课程结束后不再安排补课。**

I-3 成绩评定

1. 平时成绩

绪论课满分为 10 分，涵盖出勤情况、填写课堂调查表、完成作业等。

单次实验成绩满分为 10 分。要求写简要报告的实验，预习、操作、报告的分值比例为 1:6:3；要求写完整报告的实验相应分值比例为 1:5:4。评分基本规则如下：

(1) **预习评分**——根据预习书面作业完成情况评分，存在明显错误或抄袭的，扣 0.5~1 分。

(2) **操作评分**——根据实验操作情况及实验内容完成情况评分：

①上课迟到（半小时以内），成绩降一档（注：一档 0.3~0.4 分，下同）；

②不按仪器操作规程操作，造成仪器损伤，成绩降一档；

④实验记录杂乱潦草，成绩降一档；

⑤课内未能完成所要求实验内容而在课后补做完成的，成绩降一档；

⑥实验结束后，未按要求还原实验仪器、整理桌面，成绩降一档；

⑦课上携带他人报告或数据，无论是否参考，一经发现打开，扣 0.5 分；

⑧实验操作严重错误，经教师反复提醒、指导仍然错误操作，造成人身或仪器安全隐患的，扣 1-2 分。

(3) **报告评分**——

①写作规范，0.5 分：书面整洁、无过多错别字、内容简明扼要（完整报告应符合字数限制）、条理清晰，其中任何一项不符可全扣；

②数据处理，2~3 分：内容完整，步骤清晰，计算公式、数据代入式明确，运算正确，列表、作图规范，结果表达规范完整（有效位数、单位、不确定度等），结果合理，现象、规律描述准确、全面。

③分析总结，0.5 分：分析、讨论过程有理有据，具有逻辑性，结果、结论合理；

④对实验中的问题深入思考分析、设计实验进行验证、提出独到见解或合理化建议等，可加分（以抵消其它扣分）；

⑤实验结束一周之内未能提交实验报告的，每迟交一周报告扣 1 分；超过四周后提交的报告不予批改，按未提交实验报告处理，实验成绩最高记 5 分；

特别说明：课上缺席、抄袭或编造数据结果、报告互相雷同等，该次实验成绩按零分记！

2. 课程学期成绩

物理实验课程百分制总成绩由两部分构成：绪论课，占 10%；各次实验分数总和乘以 2，占 90%。

由以上方式计算出的百分制总成绩按表 I-3 中的对应规则转换为等级制后上报注册中心。

特别说明：缺实验课 2 次及以上者，本课程不予及格。

表I-1 百分制转换等级制对应规则表

分值区间	等级	分值区间	等级	分值区间	等级	分值区间	等级
[90, 100]	A	[80, 83)	B	[70, 73)	C	[60, 63)	D
[87, 90)	A-	[77, 80)	B-	[67, 70)	C-	[0, 60)	F
[83, 87)	B+	[73, 77)	C+	[63, 67)	D+		

II 物理实验课程介绍

物理学是研究物质的基本结构、基本运动形式、相互作用及其转化规律的自然科学。其基本理论渗透在自然科学的各个领域，应用于生产技术的各个方面，是其他自然科学和工程技术的基础。在人类追求真理、探索未知世界的过程中，物理学展现了一系列科学的世界观和方法论，深刻影响着人类对物质世界的基本认识、人类的思维方式和社会生活，是人类文明的基石，在人才的科学素质培养中具有重要的地位。物理学本质上是一门实验科学，物理学规律的研究都以严密的实验事实为基础，并且不断受到实验的检验，在物理学的发展中物理实验一直起着非常重要的作用。物理实验也是其他科学实验的先驱，体现了大多数科学实验的共性，在实验思想、实验方法以及实验技术手段等方面是各学科科学实验的基础；在探索和开拓新的科技领域中，物理实验也是非常有力的工具。

物理实验课是继“大学物理”理论课程之后单独开设的面向理工科类专业（包括医学、软件等专业）本科学生进行科学实验基本训练的实践类公共必修基础课程，是本科生接受系统实验方法和实验技能训练的开端，在本科教育培养计划中与“大学物理”课程处于同等重要地位。

物理实验课覆盖面广，涉及实验基础知识及力学、热学、电磁学、光学实验和近代物理实验等内容，具有丰富的实验思想、方法和手段。不仅给同学们提供综合性很强的基本实验技能训练，也在培养同学们的科学实验能力、严谨的治学态度、活跃的创新意识、理论联系实际和综合能力以及提高科学素质等方面，具有其他实践类课程不可替代的潜移默化作用。因此，学好物理实验对于理工专业学生是十分重要的。

本课程的学习目标：

(1)通过自学讲义、查阅文献资料，能够正确理解实验原理和方法；了解常用实验仪器的基本功能并能够正确地使用和操作仪器，如长度测量仪器、计时仪器、测温仪器、电表、电桥、示波器、信号发生器、分光仪、光谱仪、常用电源和光源等；掌握基本物理量及物性参数的实验测量方法，如长度、质量、时间、热量、温度、压强、压力、电流、电压、电阻、磁感应强度、折射率、里德伯常量、色散等；了解并掌握基本的物理实验思想方法，如比较法、转换法、放大法、模拟法、补偿法、平衡法和干涉、衍射法，以及在近代科学研究和工程技术中广泛应用的其他方法等；掌握基本实验操作技能、技巧，如零位调整、水平/铅直调整、光路的等高共轴调整、消视差调整、逐次逼近调整、根据电路图正确接线、简单的电路故障检查与排除、根据光路图搭建光路等；能够自行设计和完成某些不太复杂的实验任务。

(2)学会正确、完整地记录实验现象和数据，以及常用的实验数据处理方法，包括列表法、作图法和最小二乘法等；能够利用通用的科学计算软件或工具正确处理实验数据、合理评估实验测量误差；能够综合判断、分析实验结果并撰写合格的实验报告。

(3)进一步强化实事求是的科学态度，善于钻研、探索，勇于创新；养成严谨踏实的工作作风以及遵守纪律、团结协作、爱护公物的良好品德，提高自我负责、自我管理的能力。

III 物理实验基础知识

III-1 实验测量误差及数据处理

本篇主要介绍测量误差估计、实验数据处理和实验结果的表示等。所介绍的内容都是初步知识，这些知识不仅在每一个物理实验中都要用到，而且是今后从事科学实验研究所必须了解和掌握的。由于这部分内容牵涉面较广，不可能在一两次的学习中掌握，要求同学首先阅读一遍，对提到的问题有一个初步的了解，以后结合具体的实验再认真阅读、学习有关的部分，通过运用加以掌握。需要说明的是：这方面问题的深入讨论是计量学以及数理统计学的任务，物理实验中只引用其中的某些结论或公式，更详细的探讨和证明留待在其它有关课程（如数理统计等）中去学习。

III-1.1 测量误差

III-1.1.1 测量及其误差基本概念

物理实验是以测量为基础的，研究物理现象、了解物质结构及特性、验证物理学原理都要进行测量。测量可简单地划分为直接测量和间接测量。“直接测量”指用相同量纲的标准量直接和被测量进行比较，无需任何函数计算而直接获得测量值的过程。例如用米尺测量物体的长度，用天平和砝码测量物体的质量，用电流计测电路中的电流等。“间接测量”指先直接测量与被测量之间有确切函数关系的其它物理量，然后按照函数关系通过数学运算而得到该测量值的过程。例如测量固体的密度时，先分别测出其体积和质量，再利用定义式计算出物体的密度。在物理实验中，大部分的测量都是间接测量。

自然界及其变化过程非常复杂，研究中抓住主要的、关键的、根本性的问题，通常采用理论近似或简化等手段抽象出理想模型来进行。而在实践中，实验研究所用的测量仪器的精度总是有限的。实验装置结构如平整度、平行度、配合度、水平度、垂直度、稳定性等，以及实验环境条件如温度、湿度、气流、气压、电磁噪声、机械振动、杂散光等，也不可能完全满足或达到所需的理想要求或条件。另外，实验者的操作习惯、主观偏好、精神状态等也会对实验结果带来一定的影响。所有这些因素都会导致实验的结果与真实情况发生偏离。在实验测量中存在着的这种偏离，称之为测量误差，简称误差。

大量实践证明任何测量都会有误差，误差自始至终存在于一切科学实验和测量过程之中。因此分析测量中可能产生的各种误差，尽可能消除其影响以提高测量精确度，并对测量结果中未能消除的误差的大小作出合理的估计，是物理实验和许多科学实验中必不可少的工作。

物理实验中，测量误差定义为测量值和真实值（简称真值）之间的差值。测量误差的大小反映了测量结果的精确程度，可以用绝对误差表示，也可以用相对误差表示：

$$\text{绝对误差} = \text{测量值} - \text{真值}$$

$$\text{相对误差} = \frac{|\text{绝对误差}|}{\text{真值}} \times 100\%$$

相对误差通常用百分数来表示。被测量的真值是一个理想概念，一般来说真值是不知道的。在实际测量中通常用被测量的理论值、公认值或者更高精度仪器的测量值来代替真值，称为约定真值。

III-1.1.2 测量误差的分类及其特点

在物理实验测量中，根据误差的产生来源及其特性，将其分为系统误差和随机误差，相应地采用不同的方法分别对待处理。

1. 系统误差

在实验测量过程中，由于理论上的近似（如单摆的小角度近似）、原理方法的简化（如伏安法测电阻时忽略电表的内阻）、装置构造偏差及特性（如分光计圆刻度盘偏心、电磁铁的剩磁）、仪表的精度、环境条件的规律性变化（如环境温度随着日照情况变化而升高或降低）以及操作者的习性偏好（如读取仪表读数时总是朝着偏大的方向估读）等系统性因素所引起的这部分误差，为系统误差。

系统误差的特点是在对同一被测量的多次重复测量过程中，其大小保持恒定或者以可预知的方式按一定规律变化。影响因素不变，系统误差也就不变。例如用秒表测量运动物体通过某段路程所需的时间，若秒表走时较快，那么无论测量多少次，每次测得的时间数值总会比实际所用时间数值要大，而且总是偏大一个固定的量值。又如指针式钟表，若数字标度圆盘的圆心与表针转轴的中心不重合，则所指示的时间与实际时间之间的偏差会随着时间的改变而规律性地变化。

发现和减小实验中的系统误差通常是一个比较困难的工作，需要对整个实验所依据的原理、采用的方法、所用仪器装置以及所处环境条件等可能引起误差的各种因素一一进行具体分析。一般来讲，可以从优化实验方案、完善测量原理、改进测量方式、校准测量仪器、控制环境条件、规范操作方法等方面入手来消除系统误差的影响。对于大小、符号或者变化规律能够确定的系统误差（即已定系统误差），可通过完善实验测量原理以及改进操作方法等方式加以修正或消除。例如根据欧姆定律（即伏安法）测量电阻的阻值 R ，假设电流表读数为 I ，电压表读数为 U ，且已知电流表和电压表的内阻分别为 R_I 、 R_V 。此时电表的内阻会影响到测量结果，所造成的误差就是已定系统误差，需要对其进行修正：如果采用的是电流表内接法，则被测电阻的阻值 $R = U/I - R_I$ ；如果采用的是电流表外接法，则 $R = U/(I - U/R_V)$ 。再比如用螺旋测微计（千分尺）测量某一薄片的厚度 h ，假设读数为 x ，而当测微杆与测砧刚好直接接触时的读数即零位误差为 x_0 ，该零位误差 x_0 就是已定系统误差，需要进行修正，修正后的薄片厚度应为 $h = x - x_0$ 。再比如用测微目镜测量微间距时，要沿着同一方向旋转手轮，中途不能反转，这样可以避免丝杠空程所带来误差。对于难以确定或不能确定的系统误差（即未定系统误差），比如由于仪器的测量精度、实验装置的灵敏度所引起的误差等，需要估计出其大概量值，来说明测量结果的准确程度。一个实验结果是否正确，往往就在于系统误差是否已被发现和尽可能地消除，因此对系统误差分析必须慎重对待。

2. 随机误差

对同一物理量在相同条件下进行多次等精度重复测量时，即使已经将系统误差消除到十分微小的程度，也会发现各次的测量数值并不完全相同，而是围绕着某一值发生涨落。涨落的大小和符号随机变化，似乎无规律性可言，但是当测量次数足够多时，会发现这些涨落服从一定的统计分布规律。常见的情况是：正、负涨落出现的次数大致相等，数值较小的涨落出现的次数较多，很大的涨落通常是不出现的。测量次数越多，这种情况表现得越加明显。这样涨落就是测量中的随机误差。

产生随机误差的原因很复杂，关联因素很多，例如测量环境温度、湿度、气压、气流、电网、照明光线等的波动以及机械振动、电磁噪声、噪音等等因素对仪器、装置、实验者的随机微小扰动。总之，随机误差是大量因素随机产生的众多微小扰动（元误差）对测量结果的综合影响。这些因素的影响一般很微小，

无法预知，也难以控制。

需要明确的是，由于实验者粗心大意或者操作不当造成的人为误差（或称为粗大误差），如看错刻度、读错数字、记错数据等，是一种可以避免的差错，不属于测量误差。它往往表现为较大的数值偏差，在数据处理时，应将其从测量数据中剔除。

(1) 随机误差的分布规律

为了简化问题，在下面讨论随机误差分布时，假定测量过程中的系统误差已完全消除。

假设对某一物理量 X 进行了 25 次等精度测量。对测量得到的数据 x 在长度为 Δx 的各区间内出现的次数 Δn 进行统计，结果如表 III-1 所示（这里区间长度 $\Delta x=0.02$ 单位）。

表 III-1 某物理量的重复测量数据统计

x (单位)	10.02~10.04	10.04~10.06	10.06~10.08	10.08~10.10	10.10~10.12	10.12~10.14
出现次数 Δn	2	6	8	5	3	1

以 x 为横坐标，数据出现的次数 Δn 为纵坐标作直方图，如图 III-1 所示。把某区间内出现的测量值的次数 Δn 和测量的总次数 n 之比称为测量结果在该区间中出现的概率（严格讲应称为频率），用符号 P 表示。例如测量结果在区间 $[10.06, 10.08)$ 出现的概率为

$$P = \frac{\Delta n}{n} = \frac{8}{25} = 0.32 \quad x \in [10.06, 10.08)$$

当增加测量次数 n ，缩小统计区间长度 Δx 时，直方图上边缘折线的起伏变小。当测量次数 $n \rightarrow \infty$ ，统计区间长度 $\Delta x \rightarrow 0$ 时，直方图上边缘折线将变为光滑曲线。此时定义测量值的概率密度 $p(x) = \frac{\Delta n}{n \cdot \Delta x}$ ，对应

的概率密度分布曲线如图 III-2 所示。图中阴影部分的面积（积分） $P = \int_x^{x+\Delta x} p(x) dx$ 表示测量值在 x 到 $x+\Delta x$ 之间出现的概率。

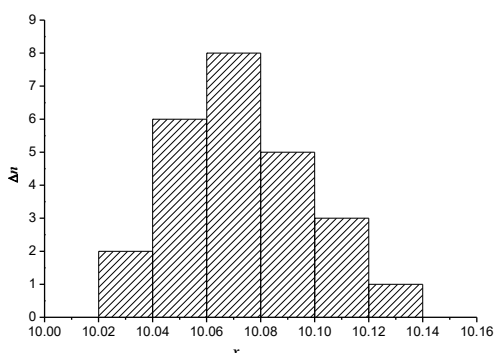


图 III-1 某物理量测量值的统计直方图

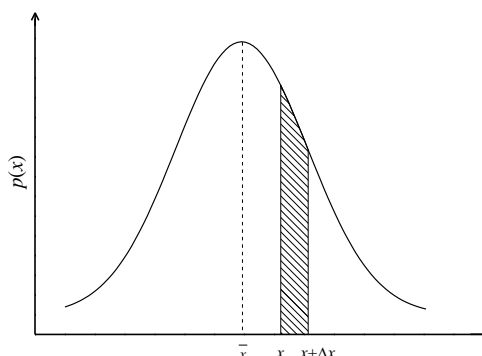


图 III-2 测量值概率密度分布曲线示意图

大量测量实践表明，在对同一物理量 X 的等精度重复测量中，当测量次数 n 足够大时，包含着随机误差的测量数值一般都服从正态分布（或称 Gauss 分布）

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (\text{III-1})$$

表示物理量 X 的实验测量值落在 x 附近单位区间内的概率，即概率密度，对应的分布曲线如图III-3 所示。分布式（图）中 μ 为 X 的数学期望

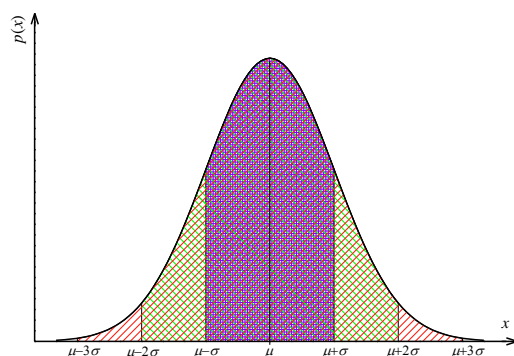
$$\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad (\text{III-2})$$

即为测量次数 n 趋于无穷大时测量数据的算术平均值。 σ 为正态分布的标准差

$$\sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}{n}} \quad (\text{III-3})$$

且分布函数满足归一化条件

$$P = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = 1$$



图III-3 正态分布曲线示意图

从分布曲线上可以看出，曲线的峰位对应着 $x = \mu$ ，说明测量中被测量 X 的值 x 为算术平均值 μ 的概率密度最大。横轴上任意一点 x 到 μ 的距离 $(x - \mu)$ 即为测量值 x 的随机误差。显然，小的随机误差出现的概率密度大，大的随机误差出现的概率密度小。标准差 σ 对应曲线上拐点处的横坐标与 μ 值之间的差值，它是表征测量值分散性的重要参数。 σ 值越小，则曲线越陡峭，峰值越高，说明测量值的离散性小，重复性好，也就意味着随机误差比较集中，绝对值小的误差占居优势。 σ 值越大，则相反。横轴上任意两点之间曲线下的面积（即积分）表示测量值 x 落在这两点区间范围内的概率。如图III-3 所示，在 $(\mu - \sigma)$ 到 $(\mu + \sigma)$ 之间分布曲线下阴影部分的面积就是测量值 x 落在 $(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$ 区间的概率（又称置信概率），亦即随机误差在 $(-\sigma, +\sigma)$ 范围内的概率

$$P = \int_{\mu - \sigma}^{\mu + \sigma} p(x) dx = 68.3\%$$

如将考察区间进一步扩大，则 x 落在 $(\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma)$ 区间即 2 倍标准差范围内的概率就提高到 95.4%， x

落在 $(\mu-3\sigma, \mu+3\sigma)$ 区间即 3 倍标准差范围内的概率为 99.7%。

服从正态分布的随机误差具有下述特点：①单峰性，绝对值小的误差出现的概率比绝对值大的误差出现的概率大；②对称性，大小相等、符号相反的误差出现的概率相同；③抵偿性，正负随机误差通常可以大致抵消，其代数和的绝对值随测量次数的增加而减小，最后趋于零，因而增加测量次数可以减小随机误差对测量结果的影响；④有界性，数值非常大的正负误差出现的概率都趋于零，这也就是在有限次的测量中对偏差很大的数据需要考虑剔除的缘由。

(2) 随机误差的处理

真正的实验不可能进行无限次的测量，科学实验中常用测量列的算术平均值作为被测物理量的真值（约定真值），并用标准偏差来估计测量的随机误差。

①真值的最佳估计值

设对某一物理量 X 在相同条件下进行 n 次独立的等精度测量，得到 n 个测量值 x_1, x_2, \dots, x_n 。在不考虑系统误差时，有限次测量值的算术平均值即为 X 的真值的最佳估计值，这可通过最小二乘法原理来证明（参看后文实验数据处理部分内容）。

根据最小二乘法原理，被测量的最佳估计值应该是能使各次测量值与该估计值之间的差值（即偏差）的平方和取极小的那个值。设真值的最佳估计值为 x_0 ，则偏差的平方和

$$f(x_0) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_0)^2 \quad (\text{III-4})$$

这里将 x_0 看作函数的自变量。若要使 $f(x_0)$ 取极小值，则 $f(x_0)$ 对 x_0 的一阶导数应为 0（二阶导数 $\frac{d^2 f(x_0)}{dx_0^2} = 2n > 0$

自动满足条件），即有

$$\frac{df(x_0)}{dx_0} = -2 \sum_{i=1}^n (x_i - x_0) = 0 \quad (\text{III-5})$$

由此可得

$$x_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{x}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{III-6})$$

式(III-6)说明在不考虑系统误差时，测量列的算术平均值可以作为被测量的真值。测量次数越多，两个值越接近，当测量次数 n 趋于无穷时，算术平均值 \bar{x} 趋近于真值 μ 。因此，可以用测量值的算术平均值 \bar{x} 作为真值 μ 的最佳估计值。后文表述中为了简洁，常略去求和符号的求和范围，例如上式中的 $\sum_{i=1}^n x_i$ 可写为 $\sum x_i$ 。

②标准偏差

每一个测量值 x_i 与平均值 \bar{x} 之间的差值称为残差，即

$$\Delta x_i = x_i - \bar{x}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{III-7})$$

显然，这些残差有正有负，有大有小。常用“方均根”法对它们进行统计，得到的结果称为测量列的标准偏差，用 S_x 表示

$$S_x = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} \quad (\text{III-8})$$

S_x 是标准差 σ 的估计值, 这个公式称为贝塞尔公式。用标准偏差 S_x 表示有限次测量的随机误差, 它反映了测量值的精密度。 S_x 小, 就表示测量值的分布比较密集, 即测量的精密度高; S_x 大, 就表示测量值比较分散, 即测量的精密度低。一般计算器上都有这种统计功能, 可直接得到 S_x 、 \bar{x} 等结果, 无需逐项逐步地进行计算。

如果在相同条件下, 对同一物理量进行多组重复的系列测量, 则每一组系列测量都对应着一个平均值。由于随机误差的存在, 各组测量列的平均值也不尽相同, 而是围绕被测量的真值有一定的分散, 说明平均值具有不可靠性。这种不可靠性用平均值的标准偏差 $S_{\bar{x}}$ 来评定, 表征同一被测量的各组测量列平均值的分散性

$$S_{\bar{x}} = \frac{S_x}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}} \quad (\text{III-9})$$

III-1.1.3 不确定度及测量结果表示

完整的实验测量结果, 除了需要给出被测量的量值及其单位 (如果有的话) 以外, 还应当估计出可能存在的一定概率下的测量误差范围。

在多次重复测量中, 被测量的量值一般取多次测量的平均值 \bar{x} 。若实验中只能或者只需要进行一次测量 (如地震波、闪电信号等的捕捉), 被测量的量值就取该单次测量结果。

对于实验测量中的已定系统误差, 应予以合理修正或者消除; 而对于其它的测量误差, 普通物理实验参考国际、国内标准化组织给出的指导性文件, 采用不确定度来表示。不确定度是对被测量的真值在一定置信概率下所处的量值范围的评定, 表征由于测量误差的存在而对测量结果不能确定的程度。不确定度根据其估算方法的不同分为两种类型: 一种称为 A 类不确定度 (或不确定度的 A 分量), 对应测量中的随机误差, 在多次等精度重复测量中采用数理统计的方法进行估算, 记为 Δ_A ; 另一种称为 B 类不确定度 (或不确定度的 B 分量), 一般与未定系统误差相对应, 采用非数理统计的方法进行估算或者约定而得, 记为 Δ_B 。测量结果的总不确定度 Δ (或合成不确定度) 由这两类置信概率近似相同的不确定度通过“方和根”运算得到, 即

$$\Delta = \sqrt{\Delta_A^2 + \Delta_B^2} \quad (\text{III-10})$$

1. A 类不确定度估算

对于有限次的重复测量, 测量随机误差不再严格服从正态分布规律, 而是服从称之为 t 分布 (又称 Student 分布) 的规律。这种情况下, 对于某一物理量 X 的 n 次等精度测量, 其 A 类不确定度等于平均值的标准偏差 $S_{\bar{x}}$ 乘以分布因子 $t_P(\nu)$, 亦即测量列的标准偏差 S_x 乘以 $t_P(\nu)/\sqrt{n}$, 即

$$\Delta_A = t_P(\nu) S_{\bar{x}} = \frac{t_P(\nu)}{\sqrt{n}} S_x \quad (\text{III-11})$$

分布因子 $t_P(\nu)$ 是与自由度 ν 、置信概率 P 有关的参数, 这里自由度 $\nu = n-1$ 。置信概率 P 及自由度 ν 确定

后, 分布因子 $t_P(\nu)$ (下文在不引起混淆的情况下简写为 t) 的值也就确定了, 可以从专门的数据表中查询得到。物理实验课程规定对测量结果的不确定度评价置信概率 P 取 0.95, 实验中常用到的部分 $t_{0.95}(\nu)$ 因子见表III-2。

表III-2 $t_{0.95}(\nu)$ 因子查询表

自由度 ν	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$t_{0.95}(\nu)$	12.71	4.30	3.18	2.78	2.57	2.45	2.36	2.31	2.26	2.23
自由度 ν	12	15	20	30	40	50	60	70	100	∞
$t_{0.95}(\nu)$	2.18	2.13	2.09	2.04	2.02	2.01	2.00	1.99	1.98	1.96

2. B 类不确定度估算

B 类不确定度的估算是测量不确定度评定中的难点。由于引起 B 类不确定度的误差成分与未定系统误差相对应, 而未定系统误差存在于测量过程的各个环节之中, 因此 B 类不确定度通常包含有多项, 各项通过“方和根”运算合成得到总的 Δ_B 。要不重复、不遗漏地详尽分析 B 类不确定度的产生来源并估算其大小, 这高度依赖于实验者的学识、经验以及分析判断能力。这其中的大多数情况超出了普通物理实验课程的教学目标范围, 本课程中只要求分析那些对测量结果影响较大的或主要的 B 类不确定度来源。

任何实验测量仪器不可能无限准确。与实验仪器的测量准确度有关的一项主要指标就是仪器误差限 (或最大允差), 记为 $\Delta_{\text{仪}}$ 。仪器误差限是指在满足仪器所要求的使用条件下用该仪器进行测量时可能会产生的最大的系统误差, 是引起测量不确定度的一个基本来源。仪器误差限 $\Delta_{\text{仪}}$ 可参照国家标准规定的计量仪表、量具的准确度等级或允许误差范围得出, 或由厂家提供的产品说明书中给出, 或由实验室结合具体情况给出 $\Delta_{\text{仪}}$ 的约定值。例如国家标准规定的 1 级螺旋测微计的仪器误差限 $\Delta_{\text{仪}}$ 为 0.004mm, 50 分度游标卡尺的仪器误差限 $\Delta_{\text{仪}}$ 为 0.02mm; 数字电压表的仪器误差限根据公式 $\Delta_{\text{仪}} = \alpha\%U_x + \beta\%U_m$ 计算得到, 其中 α 为相对项系数, β 为固定项系数, 二者均由说明书给出, U_m 为量程, U_x 是测量读数。考虑到未定系统误差的来源及分布情况的复杂性, 普通物理实验中对 B 类不确定度进行简化约定, 把 $\Delta_{\text{仪}}$ 直接当作不确定度的 B 分量 (对应置信概率 $P=1$), 即

$$\Delta_B = \Delta_{\text{仪}} \quad (\text{III-12})$$

另外, 在利用平衡比较法进行测量的时候, 存在由于仪器装置的灵敏域 (为灵敏度的倒数) 带来的未定系统误差, 记为 Δ_s , 这也是引起测量不确定度的又一个基本来源。例如用物理天平测量物体的质量时, 在很小范围内改变物体 (或者砝码) 的质量, 而天平横梁仍然能够保持水平状态 (平衡指针指在刻度尺的零位), 说明天平并非无限灵敏, 常用天平感量这一参数来表征此特性。灵敏域 Δ_s 一般通过测量得到, 在同时考虑仪器误差限 $\Delta_{\text{仪}}$ 时, 二者通过“方和根”运算合成总的 B 类不确定度 $\Delta_B = \sqrt{(\Delta_{\text{仪}})^2 + (\Delta_s)^2}$ 。

3. 直接测量结果总不确定度合成

对于多次重复的直接测量, 由式(III-11、12 和 10)得到测量结果的在置信概率 $P=0.95$ 下的总的不确定度

$$\Delta = \sqrt{\left(\frac{t_P(\nu)}{\sqrt{n}} S_x\right)^2 + \Delta_{\text{仪}}^2} \quad (\text{III-13})$$

式(III-8、11 和 13)是今后实验中估算不确定度时经常用到的公式，需要熟记。

如果实验测量估算出的 Δ_A 小于 $\Delta_{\text{仪}}$ 的 1/3，或因受条件限制而只进行了一次测量时， Δ 可简单地用仪器误差限 $\Delta_{\text{仪}}$ 来表示。需要明确的是，取 $\Delta = \Delta_{\text{仪}}$ 并不是说只进行一次测量比进行多次重复测量的误差会更小，而是说整个实验中对被测量的测量结果的不确定度的估算要求可以放宽或必须放宽。

有些情况下，相对不确定度更能从总体上反映测量误差对测量结果的影响。相对不确定度定义为

$$E_x = \frac{\Delta}{x} \times 100\% \quad (\text{用百分数表示}) \quad (\text{III-14})$$

最后，采用以下格式表达实验测量结果

$$x = \bar{x} \pm \Delta_x (\text{单位})$$

该结果表达形式表示被测量的真值以 0.95 的置信概率落在 $(\bar{x} - \Delta_x, \bar{x} + \Delta_x)$ 区间范围内。

例 1: 用 1 级螺旋测微计（千分尺）测量一段钢丝的直径 D ，在不同部位径向总共测量 $n=9$ 次，测得的数据见表 III-3。已知 1 级螺旋测微计的仪器误差限 $\Delta_{\text{仪}} = 0.004\text{mm}$ ，测量前后读出的零位误差 $d_0 = -0.003\text{mm}$ （即零位读数）。

表 III-3 钢丝直径测量数据

序号	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$d(\text{mm})$	0.294	0.300	0.303	0.295	0.298	0.293	0.292	0.300	0.305

实验数据的处理过程如下：

① 计算测量数据的平均值

$$\bar{d} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d_i = \frac{1}{9} \sum_{i=1}^9 d_i = 0.2978 \text{ mm}$$

② 计算测量列的标准偏差

$$s_d = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (d_i - \bar{d})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^9 (d_i - 0.2978)^2}{9-1}} = 0.0046 \text{ mm}$$

③ A 类不确定度

$$\Delta_A = \frac{t_{0.95}(\nu)}{\sqrt{n}} \cdot s_d = \frac{t_{0.95}(8)}{\sqrt{9}} \times 0.0046 = \frac{2.31}{\sqrt{9}} \times 0.0046 = 0.0035 \text{ mm}$$

④ B 类不确定度分量

$$\text{简化约定} \quad \Delta_B = \Delta_{\text{仪}} = 0.004 \text{ mm}$$

⑤ “方和根”合成总的不确定度

$$\Delta = \sqrt{\Delta_A^2 + \Delta_B^2} = \sqrt{0.0035^2 + 0.004^2} = 0.0053 \text{ mm}$$

⑥ 修正已定系统误差

$$d = \bar{d} - d_0 = 0.2978 - (-0.003) = 0.3008 \text{ mm}$$

⑦写出测量结果表达式

$$\text{钢丝直径 } d = 0.301 \pm 0.005 \text{ mm}$$

至此得到实验测量结果，即钢丝直径的真值以 0.95 的置信概率落在 (0.296, 0.306)mm 区间。

4. 间接测量结果及其不确定度

大多数的实验测量都是间接测量。间接测量的结果由直接测量结果按照其确定的函数关系通过计算得到，而直接测量结果的误差必然影响到间接测量结果，这种影响的大小利用不确定度传递公式来进行估算。

设间接测量量 φ 与可直接测量的量 x 、 y 和 z 之间存在如下的函数关系

$$\varphi = F(x, y, z)$$

且 x 、 y 和 z 之间相互独立。假设已测得 $x = \bar{x} \pm \Delta_x$ 、 $y = \bar{y} \pm \Delta_y$ 、 $z = \bar{z} \pm \Delta_z$ ，则 φ 的测量平均值

$$\bar{\varphi} = F(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \quad (\text{III-15})$$

另外， x 、 y 和 z 的不确定度 Δ_x 、 Δ_y 和 Δ_z 必然导致 φ 值也存在相应的不确定度 Δ_φ 。由于不确定度相对于测量值都是微小量，因此间接测量结果的不确定度采用全微分公式来进行估算：对各独立变量求偏导，并用各变量的不确定度来替代相应的微分；另外考虑到不确定度合成的统计性质，所有偏微分项采用“方和根”的方式进行合成。由此得到间接测量结果的不确定度估算公式

$$\Delta_\varphi = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x} \cdot \Delta_x\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \cdot \Delta_y\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z} \cdot \Delta_z\right)^2} \quad (\text{III-16})$$

此即不确定度传递公式。测量中需先根据所给定的具体函数关系推导出形式较为简洁的微分表达式，以便于进行数学运算，然后代入各独立变量的测量值及其不确定度，得到 Δ_φ 的值。

另外，定义

$$c_x = \frac{\partial F}{\partial x} \quad (\text{III-17})$$

为 x 变量的不确定度传递系数或灵敏系数（其他各量的不确定度传递系数类似定义）。利用各变量的不确定度传递系数大小，可以判断各独立变量对测量结果的影响大小，从而据此完善测量原理、优化改进测量方法、选择适当仪器、提高测量精度。

利用式 (III-15 和 16) 式，容易推导出间接测量结果的相对不确定度计算表达式

$$E_\varphi = \frac{\Delta_\varphi}{\bar{\varphi}} = \sqrt{\left(\frac{\partial \ln F}{\partial x} \cdot \Delta_x\right)^2 + \left(\frac{\partial \ln F}{\partial y} \cdot \Delta_y\right)^2 + \left(\frac{\partial \ln F}{\partial z} \cdot \Delta_z\right)^2} \quad (\text{III-18})$$

通常，如果 φ 是 x 、 y 、 z 等的加减形式的函数，一般直接用式 (III-16) 计算 Δ_φ 较为简便；如果是乘除形式的函数，一般先采用式 (III-18) 计算相对不确定度 E_φ ，再利用 $\Delta_\varphi = \bar{\varphi} \cdot E_\varphi$ 计算总的的不确定度 Δ_φ 较为简便。

例 2：如图 III-4 所示的金属薄壁圆管，已测得：

$$\text{外径 } D_1 = 3.600 \pm 0.004 \text{ cm}$$

内径 $D_2 = 2.880 \pm 0.004 \text{ cm}$

高度 $h = 2.575 \pm 0.004 \text{ cm}$

处理数据，给出所测圆管的体积 V 。

数据处理过程如下：

①计算圆管体积

$$V = \frac{\pi}{4} (D_1^2 - D_2^2) h = \frac{\pi}{4} (3.600^2 - 2.880^2) \times 2.575 = 9.436 \text{ cm}^3$$

②推导圆管体积取对数后对各独立测量量的偏导数

$$\ln V = \ln \frac{\pi}{4} + \ln (D_1^2 - D_2^2) + \ln h$$

$$\frac{\partial \ln V}{\partial D_1} = \frac{2D_1}{D_1^2 - D_2^2}, \quad \frac{\partial \ln V}{\partial D_2} = -\frac{2D_2}{D_1^2 - D_2^2}, \quad \frac{\partial \ln V}{\partial h} = \frac{1}{h}$$

③计算体积的相对不确定度 E_V

$$\begin{aligned} E_V &= \sqrt{\left(\frac{2D_1}{D_1^2 - D_2^2} \cdot \Delta_{D_1} \right)^2 + \left(-\frac{2D_2}{D_1^2 - D_2^2} \cdot \Delta_{D_2} \right)^2 + \left(\frac{1}{h} \cdot \Delta_h \right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{2 \times 3.600}{3.600^2 - 2.880^2} \times 0.004 \right)^2 + \left(-\frac{2 \times 2.880}{3.600^2 - 2.880^2} \times 0.004 \right)^2 + \left(\frac{1}{2.575} \times 0.004 \right)^2} \\ &= 0.81\% \end{aligned}$$

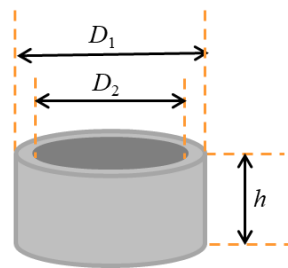
④计算体积的不确定度 Δ_V

$$\Delta_V = V \cdot E_V = 9.436 \times 0.81\% = 0.08 \text{ cm}^3$$

⑤写出测量结果

$$V = 9.44 \pm 0.08 \text{ cm}^3$$

因此，所测金属薄壁圆管的体积为 $V = 9.44 \pm 0.08 \text{ cm}^3$ 。



图III-4 金属薄壁管尺寸示意图

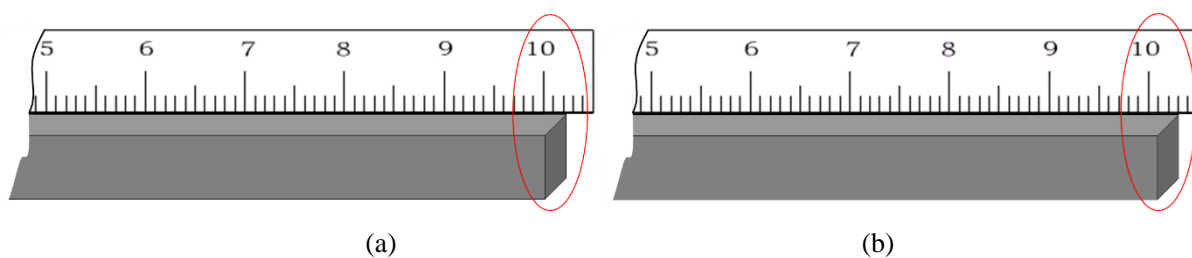
III-1.1.4 有效数字

实验测量得到的结果都是含有误差的数值，特别需要提醒的是对于数据末尾的数字不能随意地取舍。在从仪表上读取、记录数据，以及在数据处理计算过程中和最终表达测量结果时，究竟应该保留几位有效数字，普通物理实验中有一定的规则要求：

(1)原始读数的有效位数

测量中从仪表上直接读取的原始数据的有效位数的多少，与所用仪表的量程、精度等有关。一般来讲，仪器精度越高，选择量程越小，则能够读取的数据的有效位数就越多，反之则越少。不同类型的仪表，有不同的数据读取保留方式：①对于数字显示式、旋钮步进式等类型的仪表，如实验中常用的数字万用表、电阻箱等等，直接读取记录所显示的示数；②对于指针式、刻度类仪表，如模拟电压表、模拟电流表、钢板尺、螺旋测微计等，在读取数据时要读到最小分度的下一位（一般将最小分度格按十等份进行估读）。例如，用量程为 300mm 的毫米分度钢尺（最小分度为 1mm）测量某物体的长度（见图III-5），正确的读法是除了确切地读出钢尺上刻度线所标识的数字之外，还需要在对应位置处相邻刻度线之间再估计读取一位数

字。如图III-5(a)所示（圆圈内）物体长度的读数为 102.2mm，这里的前三个数字 1、0 和 2 是确切数字（或者叫做可靠数字），而末位的 2 是估计读取出来的数字（叫做存疑数字）。特别当读取数据的位置“刚好位于”某一刻度线时，初学者往往只读取该刻度线标识的数字，而忘记或忽略估读末位数字“0”。如图III-5(b)所示（圆圈内），物体边沿位置刚好与 103mm 刻度线“对齐”，此时的读数应该记录为 103.0mm（即在末位填写 0 以补齐有效位数），不应写成 103mm。这里末尾的“0”反映仪器的测量精度，不能省略。可靠数字和存疑数字都是有效数字。需要注意的是，游标类刻度仪器，如游标卡尺、分光计度盘等，读到游标分度值的整数倍即可，不能再进行估读。



图III-5 钢板尺读数示意图

(2)运算过程中的有效位数

任何存疑数字与其他数据运算的结果，均为存疑数据。实验数据处理过程中中间计算结果的有效位数的保留与算法有关，严格来讲需要根据原始数据的误差（可疑位）及其传递情况来确定，物理实验中做简化处理：

①加减运算结果的末位和参与运算的数据的最高可疑位对齐。例如 $11.4 + 2.56$ ，参与运算的数据 11.4 和 2.56 的可疑位分别是十分位和百分位，最高可疑位是十分位，计算结果 13.96 的有效位数应保留到的十分位上，下一位数字四舍五入，最后结果应为 14.0。

②乘除运算结果的有效位数和参与运算的数据中有效位数最少的一个的保持相同，或者再多保留一位，例如 $2.000 \div 0.99$ ，参与运算的数据 2.000 和 0.99 分别有四位和两位有效数字，有效位数最少的是 0.99，计算结果有效位数与之保持一致，记为 2.0，或者比其多取一位，记为 1.98。

③复杂数学函数如乘方、开方、幂指数、对数等，运算结果的有效位数与原数据的有效位数保持一致或多取一位，特别的是三角函数运算结果的有效位数与以弧度为单位的原数据的有效位数至少保持一致。严格的取舍规则要根据误差的传递情况来定。

④计算过程中用到的常数或常量如 π 、 g 、 c 、 e 、 m_e 、 h 、 R 等，取位比参与运算的数据中有效位数最少的一个数据的有效位数多取一位。

现代的计算手段已相当先进、方便，计算器、计算机（科学数据处理软件）等工具非常普及，计算精度非常高。在利用这些计算工具进行实验数据的处理过程中，可以不考虑数据的有效位数问题，以免因过多截取有效位数带来额外的附加误差。对于需要明确列出的中间计算结果，根据基本规则可以适当多保留几位有效数字，但不应把计算工具所显示的数字全都写下来。

(3)实验测量结果的有效位数

实验测量结果用 $x = \bar{x} \pm \Delta_x$ (单位) 的形式来表达, 有时也需要给出相对不确定度 E_x 。普通物理实验课程规定: 不确定度 Δ_x 一般取两位有效数字, 当首位数字不小于 3 时可以简化只保留一位; 表达式中平均值 \bar{x} 的有效位数取决于不确定度 Δ_x , 要求 \bar{x} 的末位和 Δ_x 的末位对齐; 相对不确定度 E_x 保留两位有效数字。例如前文例 2 中计算得到的薄壁圆管的体积 $V = 9.43571070 \cdots \text{cm}^3$, 对应的不确定度 $\Delta_V = 0.0764 \cdots \text{cm}^3$ 。不确定度的首位数字为 7, 大于 3, 因此简化保留一位有效数字, 次位采用四舍五入法, 即有 $\Delta_V = 0.08 \text{cm}^3$ 。由此可以看出 V 数值的百分位上的已存在误差, 该位上的数字 3 已经是不精确的, 保留更多的位数已经没有任何意义, 因而测量值数据末位与不确定度的末位对齐即可, 同样采用四舍五入法保留其有效数字, 结果应记为 $V = 9.44 \pm 0.08 \text{cm}^3$ 。这里的 9.44 的前两位是准确数字 (或可靠数字), 最后一位数是存疑数字, 总共是三位有效数字。

测量结果的有效位数在一定程度上反映了测量的准确性, 有效数字位数越多, 表明测量的准确度就越高。例如, 用不同精度的量具测量同一物体的厚度 d 时, 比较相对不确定度 E_d 的大小:

用钢尺测量, $d = 6.2\text{mm}$, 仪器误差限 0.5mm , 则 $E_d = 8.1\%$

用 50 分度游标卡尺测量, $d = 6.36\text{mm}$, 仪器误差限 0.02mm , 则 $E_d = 0.31\%$

用螺旋测微计测量, $d = 6.347\text{mm}$, 仪器误差限 0.004mm , 则 $E_d = 0.063\%$

由此可见, 测量数据多一位有效数字, 相对不确定都差不多减小一个数量级。因此取几位有效数字是件严肃的事, 不能任意取舍。

关于有效数字, 还应注意以下几点:

① 对于较大或较小的数值, 为了便于表示、识别和记忆, 通常写成 a 与 10 的 n 次幂的乘积形式, 即 $a \times 10^n$ (这里 $1 \leq |a| < 10$, a 不为分数形式, n 为整数), 这种表示数字的方法叫做科学记数法。例如地球的平均半径 6371km 可写作 $6.371 \times 10^3\text{km}$ 或者 $6.371 \times 10^6\text{m}$, 无论何种形式, 有效位数不变, 都是四位有效数字。

② 有效数字的位数跟小数点的位置无关, 单位的 SI 词头改变时, 有效数字的位数不应发生变化。例如, 重力加速度 980cm/s^2 , 以 “ m/s^2 ” 为单位时记作 9.80m/s^2 , 与记为 9.8m/s^2 是不同的。前者有三位有效数字, 而后的有效数字只有两位。若写为 0.00980km/s^2 , 则数值前面小数点定位所用的 “0” 不是有效数字, 应从第一个非 “0” 的数字算起, 仍为三位有效数字。

③ 如果实验中没有估算不确定度, 则最后测量结果的有效数字位数按运算过程中的保留规则来确定。

III-1.2 实验数据处理基本方法

实验测量的目的不只是为了得到物理量的量值, 更重要的是要找出各物理量之间的依赖关系和变化规律以便确定它们的内在联系。对实验数据进行科学分析处理是实现上述目的的重要手段。本节介绍几种基本的实验数据处理方法: 列表法、作图法、最小二乘法 (回归法)。

1. 列表法

直接从仪器或量具上读取的、未经任何数学处理的数据就是实验测量的原始数据, 它是实验的第一手资料, 是后续进行进一步计算、分析并获得实验结果的原始依据。正确、完整地记录原始数据是顺利完成

实验的保证。

把实验测量原始数据或者分析处理过程中得到的结果数据等列成表格的形式，既可以简单而明确地表示出有关物理量之间的对应关系，便于分析和发现数据的规律性，也有助于检验和发现实验中的问题。数据列表时，根据实验内容、直接测量量及其测量次数、中间过程量或结果等，合理地设计表格结构，既要能够体现相关量之间的对应关系，又便于数据的分析处理。列表的基本要求规则如下（参看下面例表）：

①表格上方要有名称，有多个表格时需要按顺序给表格编号；

②标题栏设置于表格上部行或左侧列，写明各物理量的名称（或代表符号）和单位（或单位制），一般直接测量量靠前安排（左列或上行），计算结果靠后安排（右列或下行）；

③数据栏设置于表格右下方，只写入数据（原始数据或计算结果数据），数据要反映测量结果的有效位数，不再重复写物理量符号或单位（已在标题栏注明）；

④表格名称和表格之间的空白区可注明测试条件、特殊说明、仪器编号（实验台号）等以及实验室给定数据、查询所得数据或者单次测量数据。

例表：

表 2 最小偏向角测三棱镜折射率数据记录处理

分光计编号_____, 三棱镜编号_____, $A =$ _____, $\Delta_{\text{仪}} =$ _____

入射光方位: $\phi_{10} =$ _____, $\phi_{20} =$ _____.

氢谱线 波长 $\lambda(\text{nm})$	ϕ_1	ϕ_2	$\delta_1 = \phi_1 - \phi_{10}$	$\delta_2 = \phi_2 - \phi_{20}$	$\delta = \frac{\delta_1 - \delta_2}{2}$	$\frac{A + \delta}{2}$	$n = \sin \frac{A + \delta}{2} / \sin \frac{A}{2}$
447.1							
471.3							
492.2							
501.6							
587.6							
667.8							
706.6							

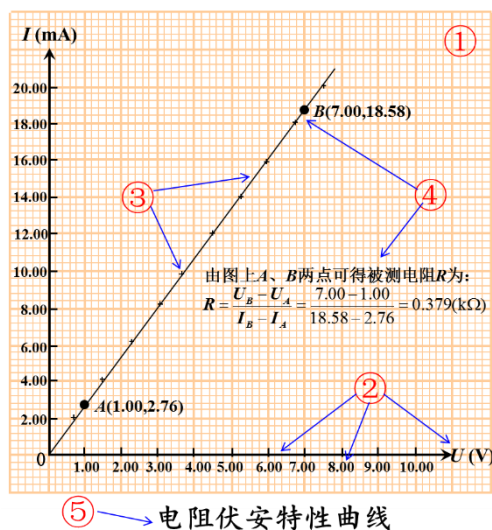
2. 作图法

如果实验的观测对象是互相关联的两个（或两个以上）物理量之间的变化关系，实验的任务就是寻求这些物理量之间互相依存的变化规律。例如，研究单摆周期和摆长的关系，研究金属电阻随温度变化的关系，研究气体压强随温度变化的关系等等。这一类实验中的观测方法是控制其中的某一个变量 x 使之依次取不同的值，然后观测另一个与之关联的变量 y 的对应值，从而得出一列数组 (x_i, y_i) ，这里 $i=1, 2, 3, \dots$ 为测量顺序号。以控制变量 x 为自变量（横坐标），跟随变量 y 为因变量（纵坐标），在坐标系中描出所有以测量数值 (x_i, y_i) 为坐标的数据点，并以这些点为准（参照）描绘出 $y \sim x$ 的关系曲线，这样处理实验数据的方法就是作图法。作图法能够形象、直观地展示出一个物理量随其他物理量的改变而变化的过程，进一步可确定其相互之间的关联函数关系，也容易出现测量中的某些错误（如数据点严重偏离所绘制曲线等）。

为了使作图能够清楚、准确、定量地反映物理量之间的关联变化过程，并利用图线来获得有关的参数或物理量值，作图必须要满足基本的规范要求。实验中既可以用坐标纸手工作图，也可以用计算机软件作图。手工作图要求用铅笔、直尺或曲线板作图，基本过程、规则及要求如下（参看图III-6）：

①选择坐标纸。首先根据物理量之间预计的或确定的函数关系，合理选择坐标纸的类型，物理实验课程中通常用到的是直角坐标纸（如图III-6 所示），一般若函数含有对数运算关系时选用半对数坐标纸，另外还有极坐标纸等。

②确定分度值，建立坐标系。坐标分度值指坐标纸上横向或纵向的最小分度格所代表的量值，如图中直角坐标系的横轴上每一最小分度格（毫米格）代表 0.20V ，纵轴上每一最小分度格代表 0.40mA 。分度值的确定需要根据测量数据的有效位数、数据分布范围以及图线布局等来综合考虑。首先，原则上应尽可能确保测量数据的精度。从图上读出的坐标值的有效位数应与测量数据的有效位数相一致，即测量数据的可靠数字在图上也应该是可靠的，数据的可疑位（或不确定度所在位），在图中应该是估计的，也就是最小分度格对应于测量值可靠数字的最后一位。考虑测量数据的分布区间范围、坐标纸版面幅度大小等因素，作图中必要的时候可以损失有效位数，但绝对不能增加有效位。其次，分度值的数值一般取 1、2 或 5 乘以 10 的整数次幂，而不选 3、6、7 等，以便于作图和读图。纵轴、横轴的分度值无需相同。分度值确定后，以自变量为横轴，因变量为纵轴，用粗实线在坐标纸上画出坐标轴。轴的长度以能够涵盖测量数据区间并在两端略有富裕即可，这样作出的图线基本充满整个坐标区域（参考：约占 80% 左右面积）而不会偏居一侧或缩于一隅，布局显得美观、协调。最后，在轴的末端画上箭头表示其正方向（在坐标轴上的标度能够明显反映轴的正向时，箭头可以不画）；沿坐标轴依次在各个整刻度格（如图中的厘米格）处标注对应的坐标；轴的箭头位置或中部外侧注明对应的物理量的名称（或符号）及单位（要加括号，或用斜杠与名称隔开）。如果测量数据是很大或很小的数值，可将公因子（一般取 10^n ， n 为整数）提取出来统一标注在单位的前面，例如写成 10^{-5}m 的形式。另外，坐标轴的范围不是必须包括原点，除非有特殊要求或需要。



图III-6 作图法处理数据示例

③描点画线。在所建立的坐标系中，用“+”、“×”、“*”、“▽”、“⊙”等符号（一般不用“·”号）描出测量数据点，然后用曲线板沿所描数据点的顺序分布画出平滑曲线，使所描数据点均匀地分布在曲线两侧，且到曲线的距离大致相同。如果是直线，需用直尺画图。仪表的校正曲线是折线，属特例。由于每一个实验点的误差情况不一定相同，因而不强求曲线通过每一个实验点。若曲线正巧穿过某实验点时，可以在该点处断开。如果同一坐标系中需做多条曲线时，各自用不同的描点符号（或者颜色）加以区别。

特别提醒：不要在图上标注每个实验点的测量数据。严格作图还需要在数据点处画出误差棒，物理实验中不做要求。

④说明和标注。需要时，可在图上空白位置区域注明测试条件、从图线上得出的某些参数（如截距、斜率）、曲线特征（极大极小值、拐点和渐近线等）、作图者姓名和作图日期等。如果要从曲线上选点读取坐标进行有关参数计算（如求直线的斜率、截距等），则用特殊记号标记所选择的读数点，并在旁边注明其坐标（如图中直线上用于计算直线斜率和截距的 A、B 两点）。

⑤写出图名称。在图纸下方适当的空白位置处写出图线的名称以及必要的注释说明。如果有多个图，需要将图按次序编号。

采用计算机软件作图时，输入数据后通过点击绘图功能按钮或菜单选项，自动绘制出曲线图，但需要对图进行规范化的设置、调整。参照手工作图要求，图上需要呈现的基本要素有：坐标轴及其名称（所代表的物理量而非笼统的 x 、 y ）、单位、标度，数据点及曲线（同图中有多条曲线时要用不同的数据点符号、线型、颜色等来加以区分），图名称及必要的标注说明。鼓励同学们学习使用计算机软件规范作图。

所做实验数据图要求裁剪或缩放到合适版面大小后编排在实验报告正文的相应段落中，如果图的版面较大，则可以附到报告末尾。

3.最小二乘法（回归法）

手工作图虽然在数据处理中是一个很直观便利的方法，但是在绘制图线的过程中往往会引入人为的附加误差，尤其在根据图线确定参数时，这种误差有时非常明显。为了克服这一缺点，常用一种以最小二乘法为基础的直线拟合方法（或称一元线性回归）来处理实验数据。下面简单介绍实验数据处理中用到的最小二乘法基本原理。

设有两个物理量 X 、 Y ，其中 X 的控制精度或测量精度较高（比如驻波节点的次序、光的干涉条纹移动数目、较高精度仪表测量结果等）， Y 的控制精度或者测量精度较低。假定在实验测量中，以 X 为自变量控制（设置）其值 x 分别取 x_1, x_2, \dots, x_n 时，对应测得因变量 Y 的值 y 依次为 y_1, y_2, \dots, y_n ，共 n 组数据 (x_i, y_i) 。此时 x 值没有误差或者测量误差很小可以忽略，而主要的测量误差都存在于 y 测量值中。

若物理量 X 、 Y 之间是线性关系，显然从实验测量数据列中任意选取两组数据就可得出一条直线，只不过这条直线的误差有可能很大。直线拟合的目的就是用数学分析的方法从这些观测到的数据中求出一个偏差平方和为最小的经验式

$$y = a + bx \quad (\text{III-19})$$

其中 a 和 b 分别为直线的截距和斜率。按照这一经验公式作出的直线虽不一定能通过每一个实验点，但是它以最接近这些实验点的方式平滑地穿过它们。明显，对于每一个值 x_i ，相应的测量值 y_i 和由经验式确定的值 $y'_i = a + bx_i$ 之间会存在一个差值 δy_i ，称其为测量值 y_i 的偏差，即

$$\delta y_i = y_i - y'_i = y_i - (a + bx_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (\text{III-20})$$

偏差 δy_i 的大小和正负号反映了实验测量点在经验式所确定的直线两侧分布的离散情况。显然，偏差 δy_i 的值与参数 a 和 b 的取值有关。要确定 a 和 b 的取值，应当顾及所有实验测量值的影响而又要避免正负偏差

求和时相互抵消，因此考虑计算偏差的平方和 $\sum_{i=1}^n \delta_{y_i}^2$ 的大小（以下为表述简洁略去求和符号的求和范围标注，简记为 $\sum \delta_{y_i}^2$ ）。如果 a 和 b 的取值使得偏差的平方和 $\sum \delta_{y_i}^2$ 为最小，则此时的值即为所要求的 a 和 b 的值，该值所确定的 y 和 x 之间的线性关系式就是最佳经验式。此即最小二乘法的基本原理。

以 S 表示 δ_{y_i} 的平方和

$$S = \sum \delta_{y_i}^2 = \sum [y_i - (a + bx_i)]^2 \quad (\text{III-21})$$

这里所有 y_i 和 x_i 都是已知的测量值，而 a 和 b 为待定参数，因此 S 实际上是 a 和 b 的函数。要使 S 取最小值，则其对 a 和 b 的一阶偏导数都应该为零，即

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial a} = -2 \sum (y_i - a - bx_i) = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial b} = -2 \sum (y_i - a - bx_i) x_i = 0 \end{cases} \quad (\text{III-22})$$

令

$$\left. \begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{n} \sum x_i \\ \bar{y} &= \frac{1}{n} \sum y_i \\ \overline{x^2} &= \frac{1}{n} \sum x_i^2 \\ \overline{xy} &= \frac{1}{n} \sum x_i y_i \end{aligned} \right\} \quad (\text{III-23})$$

则原方程组可整理为

$$\begin{cases} a + b\bar{x} = \bar{y} \\ a\bar{x} + b\overline{x^2} = \overline{xy} \end{cases} \quad (\text{III-24})$$

由此得到方程组的解

$$\begin{cases} b = \frac{\bar{x} \cdot \bar{y} - \overline{xy}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} \\ a = \frac{\overline{xy} \cdot \bar{x} - \overline{x^2} \cdot \bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} = \bar{y} - b\bar{x} \end{cases} \quad (\text{III-25})$$

另外有 S 分别对 a 和 b 的二阶偏导数

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 S}{\partial a^2} = 2n > 0 \\ \frac{\partial^2 S}{\partial b^2} = 2 \sum x_i^2 > 0 \end{cases} \quad (\text{III-26})$$

因此，以上求得的 a 和 b 对应 S 的最小值。将此 a 和 b 的值代入直线方程 $y = a + bx$ ，即得到最佳经验式。这里，由于自变量只有 x 一个，故称为一元线性回归。

对于物理量 X 、 Y 之间的线性关系的假定是否合理，在待定参数确定后还需要根据相关系数来进行检验。相关系数的定义为

$$r = \frac{\sum(\Delta x_i \cdot \Delta y_i)}{\sqrt{\sum(\Delta x_i)^2 \cdot \sum(\Delta y_i)^2}} \quad (\text{III-27})$$

式中 $\Delta x_i = x_i - \bar{x}$, $\Delta y_i = y_i - \bar{y}$ 。它是从函数 $\varphi = x \pm y$ 的形式定义的（推导从略）。

当 X 和 Y 为互相独立的变量时, Δx_i 和 Δy_i 的取值和符号彼此无关（即无相关性），因此有

$$\sum(\Delta x_i \cdot \Delta y_i) = 0$$

则相关系数 $r = 0$ 。若 X 和 Y 之间并不相互独立，而是存在线性关系，这时 Δx_i 和 Δy_i 的取值和符号不再无关而是有关（即具有相关性）。例如设函数形式为 $x \pm y = 0$ ，即 $y = \mp x$ ，显然 y 和 x 之间完全线性相关，则 Δx_i 和 Δy_i 之间就会有如 $\Delta y_i = \mp \Delta x_i$ 的关系，将这一关系代入式(III-27)，得到的相关系数

$$r = \frac{\sum[\Delta x_i \cdot (\mp \Delta x_i)]}{\sqrt{\sum(\Delta x_i)^2 \cdot \sum(\pm \Delta x_i)^2}} = \mp \frac{\sum(\Delta x_i)^2}{\sum(\Delta x_i)^2} = \mp 1$$

这里正号表示正相关，符号表示负相关。

相关系数的绝对值 $|r|$ 总是在 0 与 1 之间。从相关系数的这一特性可以判断实验数据是否符合线性关系。如果 $|r|$ 很接近于 1，则各实验点均在一条直线上。普物实验中 $|r|$ 如果达到 0.999，就表示实验数据的线性关系良好，各实验点聚集在一条直线附近。相反，若相关系数 $|r|$ 趋近于零甚至等于零，则说明实验数据非常分散，无线性关系。因此用直线拟合法处理数据时，除了给出 a 、 b 两个参数外，还应给出相关系数 r 。相关系数 r 也可以用以下较为简洁的式子来计算

$$r = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sqrt{(\overline{x^2} - (\bar{x})^2)(\overline{y^2} - (\bar{y})^2)}} \quad (\text{III-28})$$

该式与定义式(III-27)等价，其中 $\overline{y^2} = \frac{1}{n} \sum y_i^2$ 。

非线性回归是一个复杂的问题，并无固定解法，但若某些非线性函数经过适当变换后转换为线性关系时，仍可用线性回归方法来处理。例如对函数 $y = ae^{-bx}$ （这里 a 、 b 为待定参数），两边取对数得到 $\ln y = \ln a - bx$ ，于是有 $\ln y$ 与 x 之间为线性关系，这样仍可用线性回归法对 $\ln y$ 和 x 进行拟合，最终确定出参数 a 、 b 的值从而得到 y 与 x 之间的最佳经验式。

上面介绍了用最小二乘法求经验公式中的参数 a 和 b 的方法，是一种直线拟合法。它在科学实验中的运用十分广泛，特别是有了计算器后，计算工作量大大减小，计算精度也相当高，现在利用计算机进行运算速度更快，因此它是非常有用又很方便的方法。用这种方法计算的 a 、 b 参数值是“最佳的”，而且唯一，但并不是没有误差，它们的误差估算比较复杂。一般地说，如果一系列测量值的偏差 δy_i 大（即实验点对直线的偏离大），那么由这列数据求出的 a 、 b 值的误差也大，由此确定的经验公式可靠程度就低；如果一系列测量值的偏差 δy_i 小（即实验点对直线的偏离小），那么由这列数据求出的 a 、 b 值的误差也就小，由此确定的经验公式可靠程度就高。直线拟合中的误差估计问题比较复杂，这里就不再介绍，实验中用到时再临时给出。

回归计算的具体过程较为复杂、繁琐，物理实验中只要求会用计算器或计算机数据处理软件等的拟合

功能直接得出最终的结果即可。建议同学们学习一些较为通用的数据处理工具软件，如 Excel、Origin、Matlab 等。一般数据处理软件（如 Origin）在画出曲线图的同时，也给出拟合计算结果，包括拟合参数及其标准偏差、相关系数等。需要留意的是通常给出的拟合有效性检验参数是相关系数的平方 r^2 而非相关系数 r 。

例3：表III-4为一组实验测量数据记录（不考虑单位）。用最小二乘法进行处理，拟合直线 $y=a+bx$ ，求出参数 a 、 b 和相关系数 r ，写出最佳经验式。

表III-4 实验测量数据

序号 i	1	2	3	4	5	6	7	8
x	20.34	20.91	21.58	22.15	22.73	23.27	23.80	24.32
y	24.1	31.0	39.1	46.0	53.0	59.8	66.1	72.7

解：从实验数据的有效位数判断， x 的精度较高， y 的精度相对较低，因此以 x 为自变量， y 为因变量进行拟合计算。利用计算器进行逐项计算，根据表中数据有：

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum x_i = 22.3875, \bar{y} = \frac{1}{n} \sum y_i = 48.975, \overline{x^2} = \frac{1}{n} \sum x_i^2 = 502.91385$$

$$\overline{y^2} = \frac{1}{n} \sum y_i^2 = 2653.27, \overline{xy} = \frac{1}{n} \sum x_i y_i = 1117.32025, \bar{x}\bar{y} = 1,096.4278125$$

代入计算式，有

$$b = \frac{\bar{x} \cdot \bar{y} - \overline{xy}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} = \frac{22.3875 \times 48.975 - 1117.32025}{22.3875^2 - 502.91385} = 12.19$$

$$a = \bar{y} - b\bar{x} = 48.975 - 12.191465 \times 22.3875 = -223.96$$

$$r = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sqrt{(\overline{x^2} - \bar{x}^2)(\overline{y^2} - \bar{y}^2)}} = \frac{1117.32025 - 22.3875 \times 48.975}{\sqrt{(502.91385 - 22.3875^2) \times (2653.27 - 48.975^2)}} = 0.99998$$

相关系数 $r = 0.99998$ 趋近于 1，说明 y 和 x 之间线性相关性很好，最佳经验式为： $y = -223.96 + 12.19x$ 。

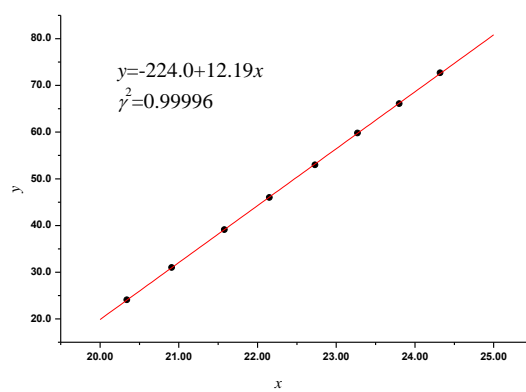
另外利用 excel 软件进行直线拟合，在表格中输入数据后，采用以下指令进行计算，可以得到同样的结果：

$$a := \text{INTERCEPT}(\text{known_y's}, \text{known_x's}) = -223.96$$

$$b := \text{SLOPE}(\text{known_y's}, \text{known_x's}) = 12.191$$

$$r := \text{CORREL}(\text{known_y's}, \text{known_x's}) = 0.99998$$

拟合直线如下图III-7 所示：



图III-7 例3 拟合直线图

练习题与思考题

1. 指出下列各数是几位有效数字。

- (1) 0.0001; (2) 0.0100; (3) 1.0000; (4) 980.12300;
(5) 1.35; (6) 0.0135; (7) 0.173; (8) 0.0001730。

2. 改正下列错误，写出正确答案。

- (1) 0.10830 的有效数字为六位。
(2) $P=31690 \pm 200\text{kg}$ 。
(3) $d=10.430 \pm 0.32\text{cm}$ 。
(4) $t=18.5476 \pm 0.3123\text{cm}$ 。
(5) $D=18.652 \pm 1.4\text{cm}$ 。
(6) $h=27.300 \times 10^4 \pm 2000\text{km}$ 。
(7) $R=6371\text{km}=6371000\text{m}=637100000\text{cm}$ 。

(8) 最小分度值为 1 分 (1') 的测角仪测得角度刚好为 60 度整，不确定度为 2 分，测量结果表示为 $\theta=60^\circ \pm 2'$ 。

3. 推导圆柱体体积 $V=\frac{\pi d^2 h}{4}$ 的相对不确定度合成公式 $E_V=\frac{\Delta V}{V}$ (方和根合成)。

4. 计算 $\rho=\frac{4M}{\pi D^2 H}$ 的结果及不确定度 $\Delta\rho$ ，并分析直接测量值 M 、 D 、 H 的不确定度对间接测量值 ρ 的影响 (即合成公式中哪一项的单项不确定度的影响大?)。其中 $M=236.124 \pm 0.004\text{g}$ ， $D=2.345 \pm 0.005\text{cm}$ ， $H=8.21 \pm 0.03\text{cm}$ 。

5. 利用单摆测重力加速度 g ，当摆角很小时有 $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ 的关系。式中 l 为摆长， T 为周期，它们的测量结果

分别为 $l=97.69 \pm 0.03\text{cm}$ ， $T=1.9842 \pm 0.0005\text{s}$ ，求重力加速度 g 及其不确定度 Δg 。

6. 选择题或填空题

(1) 设下列各式等号前的各个数是某些测量中直接测量结果的量值，等号后的数是相应的间接测量结果的量值，从参与运算的各量的有效数字来判断，哪些题的结果有效位数是明显不合理的，写出它们的题号。

- A. $35.780+2.4=38.2$ B. $92.5-88.330=4.1700$
C. $6.40 \div 8.0000=0.800$ D. $(0.729)^{1/3}=0.9$ (1/3 为精确数) 【 】

(2) 设下列各式等号前的各个数是某些测量中直接测量结果的量值，等号后的数是相应的间接测量结果的量值，从参与运算的量的有效数字来判断，哪些题的结果有效位数基本是合理的，写出它们的题号。

- A. $92.5-88.330=4.170$ B. $(0.9801)^{1/2}=0.9900$
C. $0.99 \times 2.000=2$ D. $125.0+0.1234=125.1$ 【 】

(3) 对某一被测量进行测量时，下列各例中哪些因素可能使测量结果主要产生系统误差【 】，哪些因素可能使测量结果主要产生随机误差【 】

A. 螺旋测微计微分套筒圆周上的刻线 (50 格) 和固定套筒上纵刻线不在同一曲面上，读数时有一定的视差；

- B. 磁电式电压表放置在离其它铁磁体很近的地方，使内部磁场变弱且不均匀，对电压测量的影响；
- C. 天平的左右臂臂长不等，对质量测量的影响；
- D. 电流表的零点(位)不对，但在测量结果中已扣除了零位影响；
- E. 望远镜未调消视差，对瞄准和读数的影响；
- F. 水银温度计的玻璃毛细管各处粗细不匀而产生的示值误差分量；
- G. 在海拔高、重力加速度小的地区使用水银气压计测大气压，已作重力加速度修正；
- H. 对某种测量，读数时要估读到最小分度(格)的 $1/10$ ，而估读不准，可能产生的误差。

III-2 电磁学实验基本仪器

这里介绍电磁学实验中常用的一些仪器,如直流电源、电表(包括电流表和电压表)、变阻器及电阻箱,以及电磁学实验中一般应遵循的操作规则。在做电磁学实验以前,应认真阅读这部分内容,并做好后面的电表测量误差练习题。

1.电磁学实验常用仪器

(1)直流电源

实验室常用的模拟式直流电源有直流稳压电源、干电池和直流稳流电源。直流稳压电源电压稳定,内阻小,使用方便,其输出电压有固定的,也有连续可调的。干电池电压稳定,内阻也小,但其容量(一般以安培小时计算)有限,要经常注意更换。直流稳流电源在一定的负载阻值范围内,能给出一定的恒定电流,电流大小连续可调。

选用电源时除了应注意它的输出电压是否符合需要外,也须注意取用的电流或负载电阻是否在电源的额定值之内。如果电流超额,即电源过载,电源将急剧发热而损坏。使用电压源时特别要防止其输出端短路。

(2)直流电表

实验室用的直流电表大多是磁电式仪表,目前数字式仪表的应用也日趋广泛。

直流电表的主要规格指量程、准确度等级和内阻。量程指电表可测的最大电流或电压值。电表内阻,一般在仪表说明书上已给出,或由实验室测出。设计线路和使用电表时必须了解电表的规格。

电表的误差是其主要技术指标之一,可分为基本误差和附加误差两部分。电表的基本误差是由其内部特性决定的。电表的基本误差 γ 用它的绝对误差 ΔA 和量程 A_m 之比来表示,即

$$\text{基本误差 } \gamma = \frac{\text{绝对误差 } \Delta A}{\text{量程 } A_m} \times 100\%$$

标准规定,如果电表的准确度等级指数为 K ,在一定条件下,基本误差极限不大于 $\pm K\%$ 。电表的附加误差在普通物理实验中考虑起来比较困难。

本实验室约定:在教学实验中,一般只考虑基本误差的影响,可按下式简化误差的计算

$$|\Delta A| \leq A_m \cdot K\% = \Delta_{\text{允}} \quad (\text{III-29})$$

国家标准规定,电表一般分 7 个准确度等级,即 0.1, 0.2, 0.5, 1.0, 1.5, 2.5, 5.0 (共 7 个级别)。电表出厂时一般已将级别标在表盘上。

鉴定电表是否合格,主要就是判断电表是否已达到它所标明的准确度等级;首要任务是:在电表的全部标有数字的分度线上,按一定程序在一定条件下测量,看电表示值和实际值的最大误差是否满足(III-29)式。

读取电表示值时,可能产生一定的读数误差。要尽量减小读数产生的附加误差,就要准确读数。眼睛要正对指针。1.0 级以上的电表都配有镜面,读数时要使眼睛、指针及指针的像三者一条直线上,以尽量减少由于读数而引起的附加误差。要使估计位的读数误差不大于 $(1/3 - 1/5)\Delta A$ 。一般读到仪表最小分度的 $1/4 - 1/10$,就可以使读数的有效位数符合电表准确度等级的要求。

被测量值 x 一定时, 为了减小 $\Delta_{\text{仪}}/x$ 的值, 使用电表时应让指针偏转尽量接近于满量程。此外, 使用直流电表时还要注意电表的极性, 正端应接在高电位处, 负端应接在低电位处; 在线路中电流表应串联, 电压表则应并联。若接错, 将会损坏仪表。

电表表盘上常用一些符号表明电表的技术性能和规格, 例如

磁电式		直流	—	绝缘试验电压	 500V
水平放置		交直流两用		II 级防外磁场	
竖立放正		准确度等级		内阻表示法	Ω / V

另外, 实验中常用到数字式仪表。数字式仪表的量程、准确度、输入电阻等都在仪器说明书或有关实验的说明中给出, 使用前应先阅读这些材料。数字式仪表的仪器误差限 $\Delta_{\text{仪}}$ 常用计算式为:

$$\Delta_{\text{仪}} = \alpha\% \times \text{读数} + \beta\% \times \text{量程}$$

其中 α 为误差相对项系数, β 为误差固定项系数。固定项误差 ($\beta\% \times \text{量程}$) 反映在显示数字的最末位, 一般简化取 3 或 5 等即可。例如某品牌四位半数字万用表 (最多可显示 5 位有效数字, 最高位最大显示 1, 标识为 $4\frac{1}{2}$ 表), 20V 量程对应的 $\alpha=0.8$, 测量电压时显示的示数假设为 15.376V, 则对应的仪器测量误差限

$$\Delta_{\text{仪}} = 0.8\% \times 15.376 + 0.005 = 0.123 + 0.005 = 0.128\text{V}, \text{ 式中的 } 0.005 \text{ 就是固定项误差。}$$

(3) 滑线变阻器

滑线变阻器是将电阻丝均匀绕在绝缘瓷管上制成的。它有两个固定的接线端, 并有一滑动端可在电阻线圈上滑动。在线路中常用它作为可变阻值的串联电阻器或组成分压电路, 分别起控制电流或调节电压的作用。

变阻器的主要规格是电阻值和额定电流。电阻值指整个变阻器的总电阻。额定电流即变阻器允许通过的最大电流。使用时通常应根据外接负载来选用规格适当 (即阻值和额定电流均合适) 的变阻器。

(4) 电阻箱

电阻箱一般是由电阻温度系数较小的锰铜线绕制的精密电阻串联而成, 通过十进位旋钮可使阻值改变。电阻箱的主要规格是总电阻、额定电流 (或额定功率) 和准确度等级。如实验室常用的 ZX21 型六位十进式电阻箱, 其六个旋钮下的电阻全部使用上时的总电阻为 99999.9 Ω 。如果只需要 0.1—0.9 Ω (或 9.9 Ω) 的阻值变化, 则应该接 “0” 和 “0.9 Ω ” (或 “9.9 Ω ”) 两接线柱, 这样可避免电阻箱其余部分的接触电阻和导线电阻对低电阻带来的不可忽略的误差。本实验室所用的 ZX21 型电阻箱各档阻值的额定电流如下:

步进电阻 (Ω) (旋钮倍率)	0.1	1	10	100	1000	10000
额定电流 (A)	1	0.5	0.15	0.05	0.015	0.005

有些电阻箱或变阻器上只标明了额定功率 P , 其额定电流可用公式 $I = \sqrt{P/R}$ 算出。

物理实验课约定: 在通常的教学实验条件下, 0.1 级电阻箱的阻值不确定度 Δ_R 用下式简化地表示

$$\Delta_R = 0.1\%R + 0.005 (N+1) \quad (\text{III-30})$$

式中 Δ_R 的单位是 Ω ， N 是实际所用的十进电阻盘的个数。例如，用“0”和“9.9 Ω ”两接线柱时 N 值取2。

2.电磁学实验接线规则

(1)合理安排仪器。接线时必须有正确的线路图。参照线路图，通常把需要经常操作的仪器放在近处，需要读数的仪表放在眼前，根据走线合理、操作方便、实验安全的原则布置仪器。

(2)按回路接线法接线和查线。按线路图，从电源正极开始，经过一个回路，回到电源负极。再从已接好的回路中某段分压的高电位点出发接下一个回路，然后回到该段分压的低电位点。这样一个回路、一个回路地接线。查线时也这样按回路查线。这是电磁学实验接线和查线的基本方法。接线时还要注意走线美观整齐。

(3)预置安全位置。在接通电源前，应检查变阻器滑动端（或电位器旋钮）是否已放在安全位置，例如使电路中电流最小或电压最低的位置。有些电磁学实验还需要检查电阻是否已放到预估的阻值等。自己检查线路和预置安全位置后，应请教师复查，才能接通电源。

(4)接通电源时要作瞬态试验。先试通电源，及时根据仪表示值等现象判断线路有无异常。若有异常，应立即断电进行检查。若情况正常，就可以正式开始做实验，调节线路至实验的最佳状态。

(5)拆线时应先切断电源再拆线，严防电源短路。最后将仪器还原，导线整理整齐。

练习题

1.现有一个1.0级，500mA量程的模拟式电流表，分别求出测量时读数为50mA，250mA，或500mA处的 Δ_I 和 Δ_I/I ，并以此说明使用电表时应如何选择量程。

2.指出下列几种说法中正确的一种。

A. 用磁电式电表测量，测量读数的基本误差限和被测量的大小有关；

B. 用磁电式电表测量，测量读数的基本误差限和被测量的大小无关；

C. 用数字电压表测量电压，测量读数的基本误差限和被测量的大小无关。 【 】

3.用量程为2.5A、准确度等级为1.5的电流表，测量某稳定电流，如电表指针恰好指在1A的整格分度线上，下列说法中哪一种是正确的？

A. 用此电表测量时相对误差的绝对值不大于1.5%；

B. 电表的基本误差限为 $2.5 \times 1.5\% = 0.0375 \approx 0.038A$ ；

C. 测量结果的不确定度为 $1 \times 1.5\% = 0.015A$ ；

D. 电表的基本误差限为 $1 \times 1.5\% = 0.015A$ 。 【 】

4.用量程为15mA、准确度等级为1.5级电流表，测量某恒流源输出电流 I ，电表表盘共有60分度(格)，当指针恰好指在30分度(格)线上时，测量结果为

A. $I = 7.50 \pm 0.23 \text{ mA}$ ； B. $I = 7.500 \pm 0.225 \text{ mA}$ ；

C. $I = 7.50 \pm 0.11 \text{ mA}$ ； D. $I = 7.500 \pm 0.113 \text{ mA}$ 。 【 】

III-3 光学实验预备知识

光学实验是普通物理实验的一个重要部分。这里主要介绍光学实验中经常用到的知识和调节技术。初学者在做光学实验以前，应认真阅读这些内容，并且在实验中遵守有关规则，灵活运用有关知识。

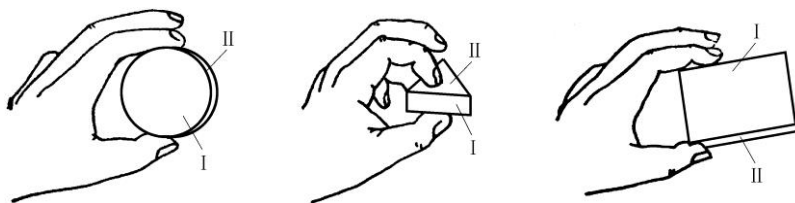
1. 光学元件和仪器的维护

透镜、棱镜等光学元件大多数是用光学玻璃制成的，它们的光学表面都经过仔细的研磨和抛光，有些还镀有一层或多层薄膜。对这些元件或其材料的光学性能（例如折射率、反射率、透射率等）都有一定的要求，而它们的机械性能和化学性能可能很差，若使用和维护不当，则会降低光学性能甚至损坏报废。造成损坏的常见原因有：摔坏、磨损、污损、发霉、腐蚀等。为了安全使用光学元件和仪器，必须遵守以下规则：

(1) 必须在了解仪器的操作和使用方法后方可使用。

(2) 轻拿轻放，勿使仪器或光学元件受到冲击或震动，特别要防止摔落。不使用的光学元件应随时装入专用盒内并放在桌面的里侧。

(3) 切忌用手触摸元件的光学表面。用手拿光学元件时，只能接触其磨砂面，如透镜的边缘、棱镜的上下底面等（如图III-8）。



图III-8 手持光学元件的方式

I—光学面 II—磨砂面

(4) 光学表面上如有灰尘，可用实验室专备的干燥脱脂棉轻轻拭去或用橡皮球吹掉。

(5) 光学表面上若有轻微的污痕或指印，可用清洁的镜头纸轻轻拂去，但不要加压擦拭，更不准用手帕、普通纸片、衣角袖口等擦拭。若表面有严重的污痕或指印，应由实验室人员用丙酮或酒精清洗。所有元件的镀膜光学表面均不能触碰或擦拭。不要对着光学元件说话、打喷嚏等，以防止唾液或其他溶液溅落在光学表面上。

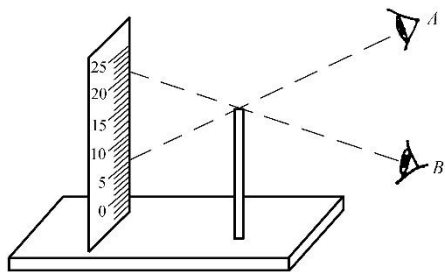
(6) 调整光学仪器时，要耐心细致，一边观察一边调整，动作要轻、慢，严禁盲目及粗鲁操作。

(7) 仪器用毕应放回箱（盒）内或加罩，防止落上灰尘。

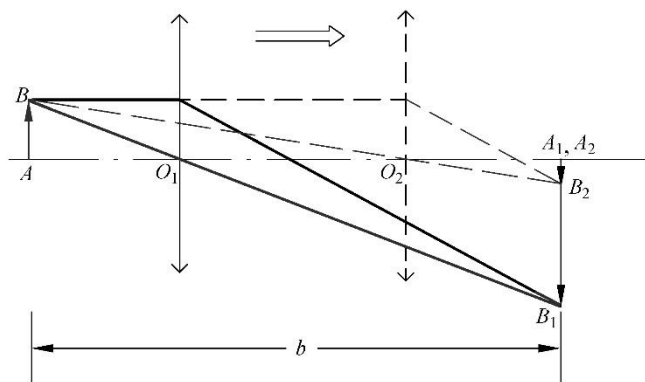
2. 消视差

光学实验中经常要测量像的位置和大小。经验告诉我们，要测准物体的大小，必须将量度标尺与被测物体紧贴在一起。如果标尺远离被测物体，读数将随眼睛的位置不同而有所改变，难以测准，如图III-9所示。可是在光学实验中被测物往往是一个看得见摸不着的像，怎样才能确定标尺和待测像是紧贴在一起的呢？利用“视差”现象可以帮助我们解决这个问题。为了认识“视差”现象，读者可作一简单实

验：双手各伸出一只手指，并使一指在前一指在后相隔一定距离，且两指互相平行。用一只眼睛观察，当左右（或上下）晃动眼睛时（眼睛移动方向应与被观察手指垂直），就会发现两指间有相对移动，这种现象称为“视差”。而且还会看到，离眼近者，其移动方向与眼睛移动方向相反；离眼远者则与眼睛移动方向相同。若将两指紧贴在一起，则无上述现象，即无“视差”。由此可以利用视差现象来判断待测像与标尺是否紧贴。若待测像和标尺间有视差，说明它们没有紧贴在一起，则应该轻微调节像或标尺位置，并同时微微晃动眼睛观察，直到它们之间无视差后方可进行测量。这一调节步骤，我们常称之为“消视差”。在光学实验中，“消视差”常常是测量前必不可少的操作步骤。



图III-9 视差引起读数误差示意图



图III-10 共轴调节的光路图

3.共轴调节

光学实验中经常要用到一个或多个透镜成像。为了获得质量好的像，必须使各个透镜的主光轴重合（即共轴）并使物体位于透镜的主光轴附近。此外透镜成像公式中的物距、像距等都是沿主光轴计算长度的，为了测量准确，必须使透镜的主光轴与带有刻度的导轨（或光学平台）平行。为达到上述要求的调节我们统称为共轴调节。调节方法如下：

(1)粗调，将光源、物和透镜靠拢，调节它们的取向和高低左右位置，凭眼睛观察，使它们的中心处在一条和导轨平行的直线上，使透镜的主光轴与导轨平行，并且使物（或物屏）和成像平面（或像屏）与导轨垂直。这一步因单凭眼睛判断，调节效果与实验者的经验有关。故称为粗调。通常应再进行细调（要求不高时可只进行粗调）。

(2)细调，这一步骤要靠其他仪器或成像规律来判断和调节。不同的装置可能有不同的具体调节方法。下面介绍物与单个凸透镜共轴的调节方法。

使物与单个凸透镜共轴实际上是指将物上的某一点调到透镜的主光轴上。要解决这一问题，首先要知道如何判断物上的点是否在透镜的主光轴上，这可根据凸透镜成像规律来进行判断。

如图III-10所示，当物 AB 与像屏之间的距离 b 大于 $4f$ （ f 为凸透镜的焦距）时，将凸透镜沿光轴移到 O_1 或 O_2 位置都能在屏上成像，一次成放大像 A_1B_1 ，另一次成缩小像 A_2B_2 。物点 A 位于光轴上，则两次像的 A_1 和 A_2 点都在光轴上而且重合。物点 B 不在光轴上，则两次像的 B_1 和 B_2 点一定都不在光轴上，而且不重合。但是，小像的 B_2 点总是比大像的 B_1 点更接近光轴。据此可知，若要将 B 点调到凸透镜光轴上，

只需记住像屏上小像的 B_2 点位置（屏上贴有坐标纸供记录位置时作参照物），调节透镜（或物）的高低左右，使 B_1 向 B_2 靠拢。这样反复调节几次直到 B_1 与 B_2 重合，即说明 B 点已调到透镜的主光轴上了。

若要调多个透镜共轴，则应先将物上 B 点调到一个凸透镜的主光轴上，然后，同样根据轴上物点的像总在轴上的道理，逐个增加待调透镜，调节它们使之逐个与第一个透镜共轴。

IV 实验讲义

IV-1 用三线摆、扭摆测量刚体的转动惯量

转动惯量是刚体转动惯性的量度，它与刚体的质量分布和转轴的位置有关。对于形状简单的均匀刚体，测出其外形尺寸和质量，就可以计算其转动惯量。对于形状复杂、质量分布不均匀的刚体，通常利用转动实验来测定其转动惯量。三线摆法和扭摆法是其中的两种办法。为了便于与理论计算值比较，实验中的被测刚体均采用形状规则的刚体。

一、实验目的

- (1) 加深对转动惯量概念和平行轴定理等的理解；
- (2) 了解用三线摆和扭摆测转动惯量的原理和方法；
- (3) 学习电子天平、游标高度尺和多功能数字测量仪等仪器的使用，掌握质量和周期等量的测量方法。

二、实验装置和原理

1. 三线摆

图 1 是三线摆示意图。上、下圆盘均处于水平，悬挂在横梁上。横梁由立柱和底座（图中未画出）支承着。三根对称分布的等长悬线将两圆盘相连。上圆盘可以固定不动。拧动旋钮就可以使下圆盘绕中心轴 OO' 作扭摆运动。当下圆盘的摆角很小并且忽略空气摩擦阻力和悬线扭力的影响时，根据能量守恒定律或者刚体转动定律都可以推出下圆盘绕中心轴 OO' 的转动惯量 J_0 为

$$J_0 = \frac{m_0 g R r}{4\pi^2 H} T_0^2 \quad (1)$$

式中， m_0 为下圆盘的质量； r 和 R 分别为上下悬点离各自圆盘中心的距离，本实验中就是上下圆盘的半径； H 为平衡时上下圆盘间的垂直距离； T_0 为下圆盘的摆动周期； g 为重力加速度。北京地区重力加速度为 $9.80 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ 。

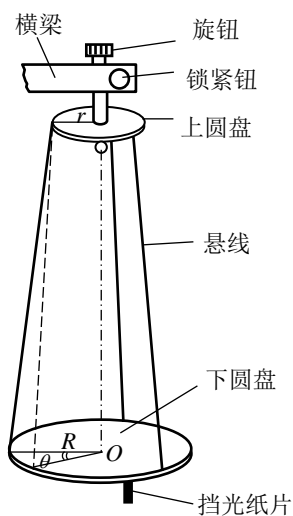


图 1 三线摆示意图

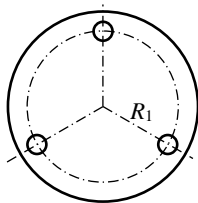
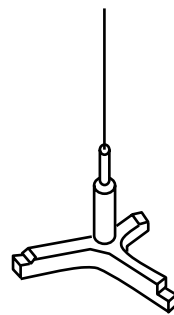


图 2 三孔均匀分布图



3 三爪盘扭摆

将质量为 m 的待测刚体放在下圆盘上，并使它的质心位于中心轴 OO' 上。测出此时的摆动周期 T 和上下圆盘间的垂直距离 H_1 ，则待测刚体和下圆盘对中心轴的总转动惯量 J_1 为

$$J_1 = \frac{(m_0 + m)gRr}{4\pi^2 H_1} T^2 \quad (2)$$

待测刚体对中心轴的转动惯量 J 与 J_0 和 J_1 的关系为

$$J = J_1 - J_0 \quad (3)$$

利用三线摆可以验证平行轴定理。平行轴定理指出：如果一刚体对通过质心的某一转轴的转动惯量为 J_c ，则这刚体对平行于该轴、且相距为 d 的另一转轴的转动惯量 J_x 为

$$J_x = J_c + md^2 \quad (4)$$

式中， m 为刚体的质量。

实验时，将三个同样大小的钢球放置在均匀分布于半径为 R_1 的圆周上的三个孔上，如图 2 所示。测出三个球对中心轴 OO' 的转动惯量 J_x 。如果测得的 J_x 值与由 (4) 式右边计算得的结果比较时的相对误差在测量误差允许的范围内 ($\leq 5\%$)，则平行轴定理得到验证。

在实验中，质量用电子天平测量，两圆盘间的垂直距离用游标高度尺测量，摆动周期用配有光电接收装置的多功能数字测量仪测量。

2. 扭摆

将一金属丝上端固定，下端悬挂一刚体就构成扭摆。图 3 所示扭摆的悬挂物为三爪盘。在三爪盘上施加一外力矩，使之扭转一角度 θ 。由于悬线上端是固定的，悬线因扭转而产生弹性恢复力矩。外力矩撤去后，在弹性恢复力矩 M 作用下盘作往复扭动。忽略空气阻尼力矩的作用，根据刚体转动定理有

$$M = J_0 \ddot{\theta} \quad (5)$$

式中， J_0 为刚体对悬线轴的转动惯量， $\ddot{\theta}$ 为角加速度。弹性恢复力矩 M 与转角 θ 的关系为

$$M = -K\theta \quad (6)$$

式中， K 称为扭转模量。它与悬线长度 L ，悬线直径 d 及悬线材料的切变模量 G 有如下关系：

$$K = \frac{\pi G d^4}{32L} \quad (7)$$

扭摆的运动微分方程为

$$\ddot{\theta} = -\frac{K}{J_0} \theta \quad (8)$$

可见，圆盘作简谐振动。其周期 T_0 为

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{J_0}{K}} \quad (9)$$

若悬线的扭转模量 K 已知，则测出盘的摆动周期 T_0 后，由 (9) 式就可计算出盘的转动惯量。若 K 未知，可利用一个对其质心轴的转动惯量 J_1 已知的附加物体加到盘上，并使其质心位于扭摆悬线上，组成复合体。此复合体对以悬线为轴的转动惯量为 $J_0 + J_1$ ，复合体的摆动周期 T 为

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J_0 + J_1}{K}} \quad (10)$$

由 (9) 式和 (10) 式可得

$$J_0 = \frac{T_0^2}{T^2 - T_0^2} J_1 \quad (11)$$

$$K = \frac{4\pi^2}{T^2 - T_0^2} J_1 \quad (12)$$

测出 T_0 和 T 后就可以计算盘的转动惯量 J_0 和悬线的切变模量 G 。

本实验中的附加物为一组直径不同的金属圆环，可以嵌套在三爪盘的台阶上。圆环对悬线轴的转动惯量 J_1 由下式

$$J_1 = \frac{m_1}{8} (D_1^2 + D_2^2) \quad (13)$$

式中， m_1 为圆环的质量； D_1 和 D_2 分别为圆环的内直径和外直径。

三、实验任务

1. 用三线摆测定下圆盘对中心轴 OO' 的转动惯量和大钢球对其质心轴的转动惯量。要求测得的大钢球的转动惯量值与理论计算值 ($J = \frac{2}{5}mr_1^2$, r_1 为球半径) 之间的相对误差不大于 5%。

2. 用三线摆验证平行轴定理。

3. 用扭摆测定三爪盘的转动惯量和悬线的切变模量。

四、实验注意事项

1. 课上先阅读电子天平和多功能数字测量仪的使用说明书，了解它们的结构及使用方法。

2. 测量前，根据水平仪的指示，调整三线摆底座台面的水平，凭借高度尺调整三线摆下圆盘的水平。测量时，摆角 θ 尽可能小些，以满足小角度近似。防止三线摆和扭摆在摆动时发生晃动，以免影响测量结果。

3. 测量周期时应合理选取摆动次数计总时长，以减少每个周期分摊的仪器不确定度。对于三线摆，测得 R 、 r 、 m_0 和 H 后，由 (1) 式推出 J_0 的相对误差公式，使误差公式中的 $2\Delta_{T_0}/T_0$ 项对 $2\Delta_{J_0}/J_0$ 的影响比其他主要误差项的影响小作为依据来确定摆动次数。对于扭摆，因不确定度传递公式稍显复杂，建议测量 20 个周期的时长。

五、思考题

1. 三线摆在摆动过程中要受到空气的阻尼，振幅会越来越小，它的周期是否会随时间而变？

2. 在三线摆下圆盘上加上待测物体后的摆动周期是否一定比不加时的周期大？

3. 证明三线摆的机械能为 $\frac{1}{2}J_0\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\frac{m_0gRr}{H}\theta^2$ ，并求出运动的微分方程，从而导出转动惯量公式 (1)。

六、附录：转动惯量和扭转模量公式的证明

1. 三线摆转动惯量公式 $J = \frac{mgRr}{4\pi^2 H} T^2$ 的证明

如附图 1 所示。当质量为 m 的悬盘偏离平衡位置向某一方向转动一角度 θ 时，整个圆盘的质心位置将沿 OO' 升高 h 。设圆盘在平衡位置时的势能为 0，则由于圆盘升高而增加的势能 E_p 为

$$E_p = mgh$$

当圆盘转回平衡位置时， $E_p=0$ ，而其转动动能

$$E_p = \frac{1}{2} J \omega_0^2$$

式中 J 为悬盘转动惯量， ω_0 为平衡位置上的瞬时角速度。

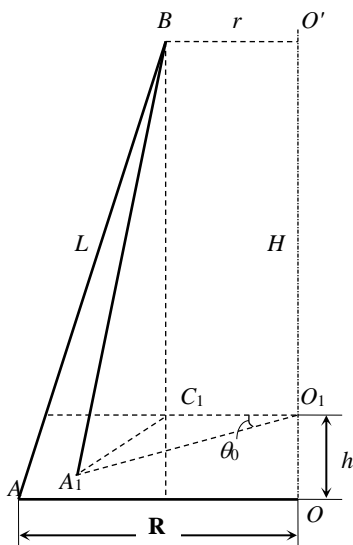
如果不考虑运动过程中的阻力，按机械能守恒定律可得

$$mgh = \frac{1}{2} J \omega_0^2 \quad (\text{附 1})$$

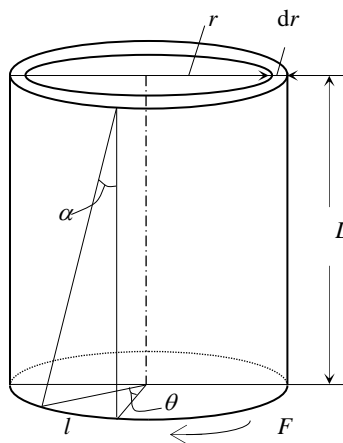
当扭转的角度足够小时，可把圆盘的扭转摆动当作准简谐振动，则圆盘的最大角速度为

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \theta_0 \quad (\text{附 2})$$

θ_0 为悬盘的最大角位移， T 为悬盘的运动周期。



附图 1 三线摆的扭角



附图 2 切变模量计算示意图

从三线摆附图 1 可看出，摆盘转动 θ_0 角后，摆盘中心从 O 升高到 O_1 ，摆盘边上 A 点升高至 A_1 。在悬线 L 很长且转角 θ_0 很小时，由几何关系可知：

$$L^2 = H^2 + (R-r)^2 = (H-h)^2 + R^2 - 2Rr \cos \theta_0 + r^2$$

略去 $h^2/2$ ，且当 θ_0 较小时，取 $1 - \cos \theta_0 \approx \theta_0^2/2$ 得

$$h = \frac{Rr\theta_0^2}{2H} \quad (\text{附 3})$$

将式(附 2)、式(附 3)代入式(附 1)，得到

$$J = \frac{mgRr}{4\pi^2 H} T^2 \quad (\text{附 4})$$

或

$$J = \frac{g}{4\pi^2} \frac{mRr}{H} T^2$$

式中 $g/4\pi^2$ 为常量, 其中 g 为当地的重力加速度; Rr/H 为恒量, 其中 R 为下圆盘悬线中心与圆心的距离 (下圆盘半径), r 为上圆盘悬线中心与盘心的距离 (上圆盘有效半径), H 为上下两盘间距离, 此三量为仪器的三个参数, 测量过程中不变。 m 为摆动系统质量, T 为扭摆周期。若测得 m 、 R 、 r 、 H 及 T , 就可求得悬盘或置于悬盘上的物体的转动惯量。

2. 扭摆扭转模量 $K = G \frac{\pi d^4}{32L}$ 的证明

将扭摆的悬丝看作长为 L , 半径为 r 的圆柱形弹性固体, 上端固定, 下端可绕轴扭转。设在切向外力矩的作用下, 该弹性体底面相对上平面转过 θ 角。根据胡克定律, 当切向力 F 作用在一面积 S 上时, 切向应力 F/S 与切变角 α 成正比, 其比值称为切变模量 G ,

$$G = \frac{F/S}{\alpha} \quad (\text{附 5})$$

弹性体发生形变后, 内部出现弹性力 F' , 与外力平衡, 则

$$F' = -F = -G \cdot \alpha \cdot S$$

现在我们讨论悬丝的扭转系数和切变模量的关系。假定我们在悬丝中切出一个半径为 r , 厚为 dr , 长度与悬丝相同为 L 的圆筒形体积元, 如附图 2。该体积元下端面的恢复力矩即为

$$dM' = -G\alpha(2\pi r \cdot dr) \cdot r$$

在 θ 较小的情况下, 可以认为

$$r\theta = L\alpha$$

因而

$$\alpha = \frac{\theta}{L} r$$

故

$$dM' = -G \left(\frac{\theta}{L} r \right) (2\pi r \cdot dr) \cdot r \quad (\text{附 6})$$

将上式积分即可得出悬丝下端产生的总的恢复力矩

$$M' = \int_0^r \left(-G \frac{\theta}{L} \cdot 2\pi r^3 \right) \cdot dr = -G \frac{\pi r^4}{2L} \theta = -G \frac{\pi d^4}{32L} \theta$$

因 $M' = -K\theta$, 故

$$K = G \frac{\pi d^4}{32L}$$

IV-2 用玻尔共振仪研究阻尼振动和受迫振动特性

振动是自然界最普遍的运动形式之一，是物理量随时间作周期性变化的运动。阻尼振动和受迫振动在物理和工程技术中得到广泛的重视。本实验借助玻尔共振仪研究机械阻尼振动和受迫振动的特性。

一、实验目的

- (1) 观测阻尼振动，学习测量振动系统基本参数的方法；
- (2) 研究受迫振动的幅频特性和相频特性，观察共振现象；
- (3) 观测不同阻尼对受迫振动的影响。

二、实验原理

1. 有粘滞阻尼的阻尼振动

对于弹簧与摆轮组成的振动系统（如图 1 所示），设摆轮转动惯量为 J ，粘滞阻尼的阻尼力矩大小定义为角速度 $d\theta/dt$ 与阻尼力矩系数 γ 的乘积，弹簧劲度系数为 k ，弹簧的反抗力矩为 $-k\theta$ 。忽略弹簧的等效转动惯量，则转角 θ 的运动方程

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} + \gamma \frac{d\theta}{dt} + k\theta = 0 \quad (1)$$

记 ω_0 为无阻尼时自由振动的固有角频率，其值为 $\omega_0 = \sqrt{k/J}$ ，定义阻尼系数 $\beta = \gamma/(2J)$ ，则式(1)变为

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\beta \frac{d\theta}{dt} + \omega_0^2 \theta = 0 \quad (2)$$

对于弱阻尼即 $\beta^2 - \omega_0^2 < 0$ 的情况，阻尼振动运动方程(1)的解为

$$\theta(t) = \theta_1 \exp(-\beta t) \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} t + \phi_1) \quad (3)$$

式中为 θ_1 摆幅， ϕ_1 为初始相位。由上式可知，阻尼振动角频率为 $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ ，相应的阻尼振动周期为

$$T_d = 2\pi/\omega_d = 2\pi/\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}。$$

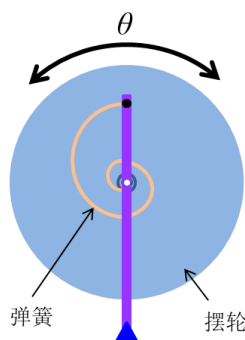


图 1 弹簧与摆轮组成的振动系统

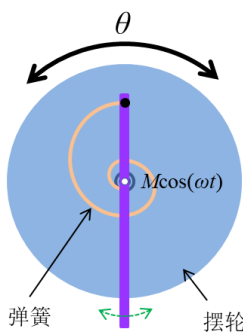


图 2 周期外力矩作用下的受迫振动

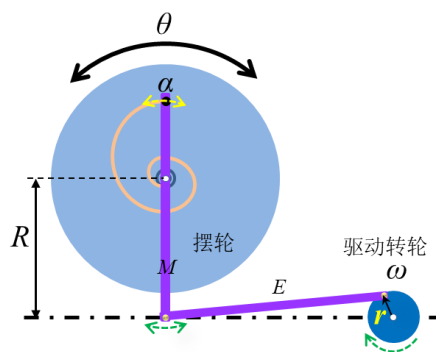


图 3 玻尔共振仪转轮驱动示意图

2. 周期外力矩作用下的受迫振动

在周期外力矩 $M \cos(\omega t)$ 激励下（见图 2）的运动方程和方程的通解分别为

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} + \gamma \frac{d\theta}{dt} + k\theta = M \cos(\omega t) \quad (4)$$

$$\theta(t) = \theta_i \exp(-\beta t) \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} t + \phi_i) + \theta_m \cos(\omega t - \phi) \quad (5)$$

通解(5)是形如式(3)的阻尼振动和频率同激励源频率的简谐振动的叠加。阻尼振动项反映一定初始条件后的过渡过程， $t \rightarrow \infty$ 则该项为 0。一般 $t \gg \tau$ 之后（ τ 为阻尼振动振幅衰减到 e^{-1} 即 36.8% 时所用的时间），就有稳态解

$$\theta(t) = \theta_m \cos(\omega t - \phi) \quad (6)$$

稳态解的振幅和相位差分别为

$$\theta_m = \frac{M/J}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \quad (7)$$

$$\phi = \arctan \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (8)$$

式(8)中相位差 ϕ 的取值范围为 $0 < \phi < \pi$ ，反映摆轮振动总是滞后于激励源支座的振动。

3. 转轮驱动下的受迫振动运动方程及解

利用转轮连杆结构对摆盘施加周期性驱动力矩，如图 3 所示玻尔共振仪驱动原理。当连杆 E 的长度和摇杆 M 的长度远大于连杆在转轮上的连接点到转轮轴心的距离 r 时，若驱动转轮的以角速度 ω 匀速旋转，可以证明，系统调节对称后，弹簧支座（摇杆 M 上与弹簧的连接处）的偏转角的一阶近似式可以写成

$$\alpha(t) = \alpha_m \cos(\omega t) = \frac{r}{R} \cos(\omega t) \quad (9)$$

α_m 是摇杆摆幅， R 是图 3 中连杆 E 与摇杆 M 的接点到摇杆和摆轮共同的转轴中心的距离。由于弹簧的支座在运动，运动支座是激励源。弹簧总转角为 $\theta - \alpha(t) = \theta - \alpha_m \cos(\omega t)$ ，仿照式(4)，在固定坐标系中摆轮转角 θ 的运动方程为

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} + \gamma \frac{d\theta}{dt} + k(\theta - \alpha_m \cos(\omega t)) = 0 \quad (10)$$

上式可以改写成

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} + \gamma \frac{d\theta}{dt} + k\theta = k\alpha_m \cos(\omega t) \quad (4')$$

该式和弹簧支座固定、摆轮受周期外力矩 $M \cos(\omega t)$ 作用时的运动方程在形式上完全一致，等效外激励力矩的振幅为 $k\alpha_m$ 。方程(4')的通解与稳态解的形式分别同(5)和(6)式；这表明图 3 的装置是一个十分巧妙的设计，得到了与周期外力矩作用下相同形式的解。（这和一般文献描述的常用的支座周期运动激励的方程不同，因一般情况下粘滞阻尼力矩正比于以支座方位为极坐标极轴的角速度，而实验用玻尔共振仪中电磁阻尼线圈 K 是固定不动的，参见图 5）。稳态解的相位差表达式仍为式(8)，而式(7)变为

$$\theta_m = \frac{\alpha_m \omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} \quad (7')$$

由 θ_m 的极大值条件 $\partial\theta_m/\partial\omega=0$ 可知, 当外激励角频率 $\omega=\sqrt{\omega_0^2-2\beta^2}$ 时, 系统发生共振, θ_m 有极大值, 其

$$\text{值为 } \omega = \frac{\alpha_m \omega_0^2}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}。$$

引入参数 $\zeta = \beta/\omega_0 = \gamma/(2\sqrt{kJ})$, 称为阻尼比。振幅 θ_m 和相位差 ϕ 是支座振幅 α_m 、阻尼比 ζ 和频率比 ω/ω_0 的函数 (自己推导), 它们随频率比变化的曲线分别叫做幅频特性曲线和相频特性曲线 (参见图 4)。测定并分析这些曲线, 有助于对受迫振动规律的深入理解。

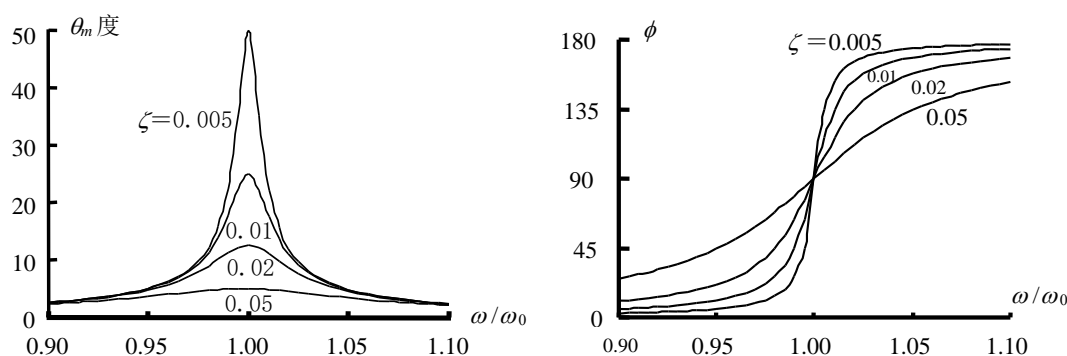


图 4 $\alpha_m=8$ 度, $\omega_0=4$ rad/s 时 $\zeta=0.005$ 、0.01、0.02 和 0.05 的幅频、相频特性曲线

4. 描述阻尼振动的常用参量

表 1 方程中参量与符号

方程中的参量	转动惯量	劲度系数	阻尼力矩系数	固有角频率	外激励角频率
符号	J	k	γ	$\omega_0 = \sqrt{k/J}$	ω

表 2 文献中描述阻尼振动的常用参量及其计算公式

名 称	符号及公式	定 义 或 说 明
1 阻尼系数	$\beta = \gamma/(2J)$	标准定义, 但机械、力学文献中常用上表中的 γ 。
2 阻尼比	$\zeta = \gamma/(2\sqrt{kJ}) = \beta/\omega_0$	damping ratio, 无量纲。
3 阻尼振动周期	$T_d = 2\pi/\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$	$\omega_0 = 2\pi/(T_d\sqrt{1-\zeta^2})$
4 时间常数	$\tau = 2J/\gamma = 1/\beta$	time constant, 阻尼振动的振幅衰减到原来的 $1/e$ 的时间, 单位为 s (秒)。
5 品质因数	$Q \equiv 1/(2\zeta)$ (机械振动系统中的定义)	系统共振锐度或频率选择性的量度。一般定义为系统储能 E 与周期能耗 ΔE 之比 ($E/\Delta E$) 的 2π 倍。
6 对数减缩率	$\Lambda = T_d/\tau = 2\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}$	定义为衰减阻尼振动中相邻两循环的振幅比的自然对数。

三、实验仪器

本实验所用仪器是专门研究振动的玻尔共振仪, 仪器结构如图 5 所示。

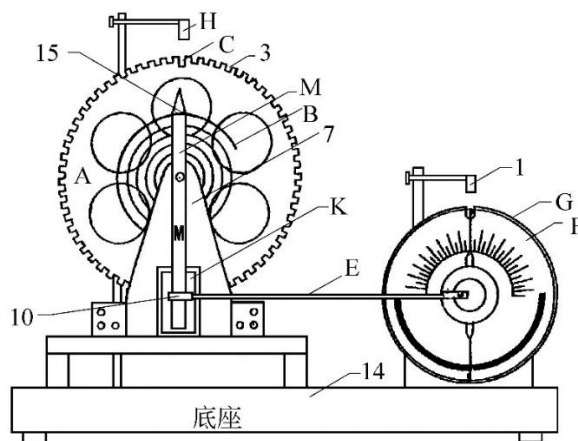


图 5 玻尔共振仪结构示意图

铜质圆形摆轮 A 与弹簧 B 构成待测的振动系统,弹簧 B 的另一端固定在摇杆 M 上的点 15 的位置处。摆轮边沿有一圈周期为 2° 的槽形缺口,光电门 H 通过测定缺口移动的个数来记录振动的幅度,其中有一长缺口 C 是平衡位置的标志,是测量摆轮振动周期的参考点,也是控制闪光灯开关以测量受迫振动与外激励之间的相位差的参考点。外激励是由转速极为稳定且可调的电机的偏心轴通过连杆 E 和摇杆 M 加到振动系统上。由于连杆 E 较长,电机匀速转动时对系统的作用可看作简谐激励,改变电机转速就改变了外激励的周期。带有标志电机位置刻线(0 位标志线)的有机玻璃转盘 F 同电机一同转动。当摆轮 A 的长缺口 C 通过平衡位置时,闪光灯点亮,照亮有机玻璃盘 F 的 0 位标志线,此刻 0 位标志线指示的角度即为外激励超前摆轮振动的角度,亦即摆轮滞后于外激励的角度。闪光灯在长缺口 C 来回通过光电门 H 时都要闪亮,因此每周期闪亮两次。在摆轮完全不受外激励作用且光电门 H 正好处于平衡位置时,闪光灯照亮 0 位标志线的两次示值应完全一致,但由于整体结构的一致性差,这一点并不能处处保证。实际上两次角度示值可能有少许偏差,我们可取其平均值作为被测的角度。由阻尼线圈 K 产生电磁阻尼作用于摆轮。调整线圈电流可改变电磁铁气隙中磁场,从而改变阻尼力矩。阻尼选择旋钮置 0 时,线圈中无电流,是最小阻尼的状态。调节阻尼选择旋钮,能改变线圈中的电流,也就改变了阻尼。由于线圈用直流励磁,可能因材料中的剩磁或磁滞现象而使阻尼状态与旋钮位置不呈单值对应关系,因此在做某一阻尼状态的实验测量过程中不可改变阻尼状态,直至该阻尼状态的实验完全做完。

闪光灯只有在测量受迫振动的相位差时才允许使用,以尽量减少使用次数,延长其寿命。

玻尔共振仪电器控制箱的说明参见实验室资料。

四、实验任务和步骤

1. 调整仪器使玻尔共振仪处于工作状态

关断电机和闪光灯开关,打开电源开关,阻尼开关置于“0”档,光电门 H、I 可以手动微调,避免与摆轮或相位差测量盘接触。手动调整电机偏心轮使有机玻璃转盘 F 上的 0 位标志刻线指示 0 度,亦即通过连杆 E 和摇杆 M 使摆轮处于平衡位置。然后拨动摆轮使其偏离平衡位置约 $120^\circ \sim 150^\circ$,松开手后,检查摆轮的自由摆动情况。正常情况下,振动衰减应该很慢。

2. 测量最小阻尼条件（阻尼开关置于“0”档）下系统的阻尼比 ζ 和固有角频率 ω_0

实际测量的量为振幅值 θ_j 和振动周期 T_d 。具体方法为：光电门选择开关置于“摆轮”位置，拨动摆轮使其偏离平衡位置约 $120^\circ \sim 150^\circ$ 后松手，摆轮开始摆动。由大到小依次读取显示窗中的振幅值 $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots, \theta_j, \dots, \theta_n$ ；周期开关选择“10”（即连续测量10个周期后计时自动停止），按复位钮启动周期测量，停止时读取所显示的时间 $(10T_d)$ 。立即按一下复位钮再次启动周期测量，多次重复此过程，记录每次的显示时间。

(1) 用最小二乘法计算阻尼比 ζ 及其不确定度 Δ_ζ

式(3)两边取对数，有

$$\ln \theta = \ln \left[\theta_1 \cos \left(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} t + \phi_1 \right) \right] - \beta t$$

假设从 t_0 时刻开始连续测量摆轮的最大摆幅，则测量第 j 个摆幅 θ_j 时对应的时间 $t = t_0 + jT_d$ ，于是有

$$\ln \theta_j = \ln \left[\theta_1 \cos \left(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} t_0 + \phi_1 \right) \right] - \beta t_0 - j\beta T_d \quad (11)$$

由此可知， $\ln \theta_j$ 与 j 之间呈线性关系。设因变量为 $y = \ln \theta_j$ ，自变量 $x = j$ ，用最小二乘法拟合直线 $y = a + bx$ ，则斜率

$$b = -\beta T_d = -\beta \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} = -\frac{2\pi}{\sqrt{\zeta^2 - 1}} \quad (12)$$

另外， b 的不确定度 $\Delta_b = t_{0.95}(\nu) S_b$ ，其中 $\nu = n - 2$ 为自由度，标准偏差 $S_b = b \sqrt{\frac{r^2 - 1}{n - 2}}$ ， r 为相关系数（不考虑仪器角度测量的系统误差）。由此可以得到系统的阻尼比 $\zeta \pm \Delta_\zeta$ 。

(2) 通过阻尼比 ζ 和振动周期 T_d 计算固有角频率 $\omega_0 \pm \Delta_{\omega_0}$

通过 $\omega_0 = 2\pi / (T_d \sqrt{1 - \zeta^2})$ 可得到系统的固有角频率。在阻尼比很小的情况下，可以用阻尼振动角频率代替 ω_0 。不确定度的估算中，时间测量的仪器误差限取 $\Delta_{t_k} = \text{读数} \times 10^{-5} + 0.003$ （单位：s）。

应该指出，原理上我们认为弹簧的劲度系数 k 为常数，与摆角无关，因此 ω_0 为常数。实际上由于制造工艺和材料性能的影响， k 随着角度的改变有微小的变化，使不同振幅时系统的固有频率有微小的变化。有时需要考虑这些变化，如共振点附近受迫振动相频特性与 ω_0 的关系，这时需要测出固有角频率与不同振幅的相关数据，减少实验值与理论值的偏差。

3. 测量较强阻尼条件下的阻尼比 ζ

选择其它2种阻尼挡位（2、3档位或2、4档位），类似上述的方法测量较强阻尼条件下的阻尼比 ζ 。由于阻尼较强时的振动次数少，因此只要求振幅 θ_j 的测量次数 n 大于10次。测量时，周期选择开关置于“1”的位置，每次只测量一个振动周期的时间。测量后参考表2，求出不同阻尼条件下系统的时间常数 τ ，并相互比较理解其物理含义。

4. 测定受迫振动的幅频特性和相频特性曲线

选择2个不同阻尼比的阻尼档位（与任务3中的档位选择保持一致），测量摆轮做受迫振动的幅频特性和相频特性曲线。具体操作过程：选择阻尼档位，光电门开关置“强迫力”位置，周期选择开关置“1”；

开启驱动电机开关，调节强迫力周期旋钮改变驱动电机的转动周期 T ，测量记录不同激励周期 T 下摆轮稳定摆动时的振幅 θ ，接着打开（或者按下）闪光灯开关测量摆轮振动与激励源之间的相位差 ϕ 。注意阻尼比较小（“0”和“1”档）时，共振点附近不要测量，以免振幅过大损伤弹簧。每次调节电机转速后，需等待摆轮的摆动经多次摆动达到稳定后，再要测量振幅和周期。要求每条曲线至少有 12 个数据点，其中要包括共振点，即 $\phi \approx \pi/2$ 的点。

五、注意事项

1. 为避免剩磁影响，阻尼开关不要随便拨动；
2. 只有测受迫振动相频特性时才开启仪器面板上的闪光灯开关，读完数据后迅即关闭；
3. 相频特性与幅频特性测量要在振动稳定后进行，可根据测量数据计算 τ 值和达到稳定态 ($e^{-t/\tau} < 0.01$) 所需要的时间；
4. 在共振点附近要注意随时调节 ω ，勿使振幅过大 ($\theta_{\max} < 180^\circ$) 以免损坏玻尔共振仪，在阻尼较小时尤其要小心操作。
5. 几种阻尼状态下的幅频特性曲线和相频特性曲线要画在同一张坐标纸上，以便进行比较。

六、思考题

1. 如何判断受迫振动已处于稳定状态？
2. 从幅频曲线的相对振幅比为 1/2 的点，也可求出 β 值。试用你作出的幅频特性曲线进行计算，把结果与实验任务 3 的结果相比较。
3. 实验中如何判断达到共振？共振频率是多少？

IV-3 准稳态法测不良导体的导热系数和比热

热传导、对流和热辐射是热量传递的三种基本方式。而在热传导中，导热系数和比热是材料物性的重要参数，它们的测定对于建筑、航天、航空、化工、热工等领域的工程设计都具有重要意义。本实验采用的准稳态测量方法主要用于不良导体导热系数与比热的测量，相对于一般的稳态测量方法，其优点在于测量时间短，重复性、稳定性好，结果较准确。

一、实验目的

1. 了解准稳态法测量不良导体的导热系数和比热的原理，并通过快速测量学习掌握该方法。
2. 掌握使用热电偶测量温度的方法。

二、实验原理

1. 热传导

物体相邻部分间存在温度差，在各部分之间不发生相对位移的前提下，仅依靠分子、原子及自由电子等微观粒子的热运动而产生的热量传递称为热传导（导热）。考查如图 1 所示的两个表面均维持均匀恒温的平板的一维稳态导热问题，对于 x 方向任意厚度为 dx 的微元层来说，根据傅里叶定律，单位时间内通过该层的导热热量 Q 与该处的温度变化率 dt/dx 及平板面积 F 成正比

$$Q = -\lambda F \frac{dt}{dx} \quad (1)$$

式中，比例系数 λ 即为材料的导热系数（热导率），负号表明热流方向与温度梯度 dt/dx 方向相反。

定义单位时间内通过单位面积的热流量称为热流密度，记为 q ，对于图 1 的情况则有

$$q = \frac{Q}{F} \quad (2)$$

式(1)可写为

$$q = -\lambda \frac{dt}{dx} \quad (3)$$

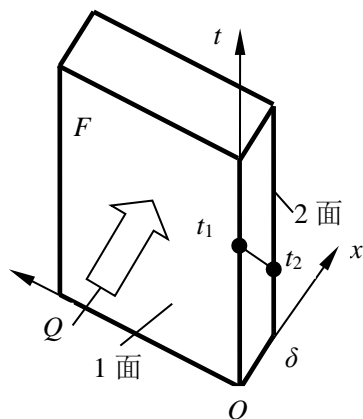


图 1. 通过平板的一维导热

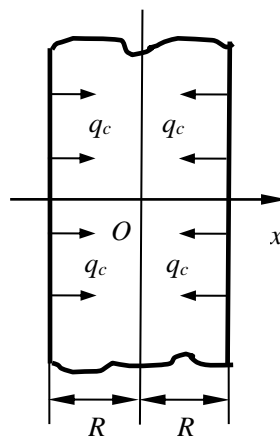


图 2. 无限大平板导热模型

由此可知导热系数的物理意义是，在单位温度梯度影响下物体产生的热流密度，单位为 $W/(m \cdot K)$ 。

材料的导热系数会随温度变化，除铝、水等少数物质外大部分固体、液体材料的导热系数随温度升高而下降，气体的导热系数随温度升高而升高。

2. 一维导热模型

本实验采用较简单的一维无限大平板导热模型进行 λ 的测量。如图 2 所示，假设有厚度为 $2R$ 的无限大平板，原始温度为 t_0 ，从平板的两端面以功率相同的、能产生均匀热流的加热器加热，表面热流密度的大小恒定为 q_c ，显然板内温度分布必以中心截面为对称面，则我们可依下述数学分析方法写出 x 正方向热传导的微分方程，并依据该模型所限定的初始与边界条件，求出在任何瞬时沿 x 方向的温度分布函数 $t(x, \tau)$ ， τ 为时间变量。

3. 热传导方程及方程解

对应于图 2 所示的一维方向传热方程为

$$\frac{\partial t(x, \tau)}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 t(x, \tau)}{\partial x^2} \quad (0 < x < R, \tau > 0) \quad (4)$$

初始条件

$$t(x, \tau)_{\tau=0} = t_0 \quad (5)$$

边界条件

$$q_c = \lambda \left. \frac{\partial t(x, \tau)}{\partial x} \right|_{x=R} \quad (6)$$

$$\left. \frac{\partial t(x, \tau)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad (7)$$

式中 $a = \lambda / (c\rho)$ 为热扩散率，单位 m^2/s 。其中 c 为比热，单位 $\text{J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$ ； ρ 为密度，单位 kg/m^3 。

式(6)限定加热器在样品表面产生的热流密度不随时间改变，式(7)限定平板的中心面处两加热器产生的热流密度大小相等，方向相反，中心面为绝热面。

利用分离变量法可以解出方程的解为

$$t(x, \tau) - t_0 = \frac{q_c}{\lambda} \left[\frac{a\tau}{R} - \frac{R^2 - 3x^2}{6R} + R \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{\mu_n^2} \cos\left(\mu_n \frac{x}{R}\right) \exp(-\mu_n^2 F_0) \right] \quad (8)$$

式中 $\mu_n = n\pi$ ， $n=1, 2, 3, \dots$ ， $F_0 = \frac{a\tau}{R^2}$ 为傅里叶数（无量纲）， t_0 ——初始温度

经过一定时间，当 $F_0 = \frac{a\tau}{R^2} > 0.5$ 时，式(8)中的级数求和项变得很小，可以忽略，式(8)变为

$$t(x, \tau) - t_0 = \frac{q_c R}{\lambda} \left[\frac{a\tau}{R^2} + \frac{x^2}{2R^2} - \frac{1}{6} \right] \quad (9)$$

由式(9)可以看出，当加热时间 τ 使 $F_0 > 0.5$ 后，任一时刻样品各点温度随 x 按抛物线变化，样品内各点的温升速率相同并保持不变，样品内两点间温差恒定，这种热传导状态称为准稳态。准稳态下样品表面与中心面的温度差，其表达式为

$$\Delta t = t(R, \tau) - t(0, \tau) = \frac{q_c R}{2\lambda} \quad (10)$$

由式(10)可以导出准稳态下导热系数的测量公式为

$$\lambda = \frac{q_c R}{2\Delta t} \quad (11)$$

当用有限截面积的平板进行实验时，样品中心区域的导热可近似看成一维的。经误差分析可以证明当样品横向尺寸为厚度的 6 倍以上时，将测温点置于样品的中心区域，非无限大平板误差可以忽略。

由比热的定义，当样品的横向截面积为 F （即热流通过的面积）时，则有以下关系式

$$q_c F = c \rho R F \frac{dt}{d\tau} \quad (12)$$

由此可得比热为

$$c = \frac{q_c}{\rho R \frac{dt}{d\tau}} \quad (13)$$

式中 ρ 为样品密度， $dt/d\tau$ 为准稳态下样品的温升速率，可以由中心面 $t(0, \tau) \sim \tau$ 关系曲线求得。

4. q_c 的计算

q_c 需通过通电加热器的电功率进行计算。因平面薄膜加热器（薄膜加热器由粘附在绝缘材料上的薄膜电阻构成，通电时忽略其电阻变化，其热容也忽略不计）的热量向两个方向传导，为准确计算流向样品中心的热流密度，利用对称性设置样品架，如图 3 所示，则向样品中心传导的热流密度为加热器电功率的一半，即

$$q_c = \frac{U_{\text{加热}}^2}{2Fr} \quad (14)$$

式中 $U_{\text{加热}}$ 为加热器所加电压（装置中两个相同的电热薄膜加热器并联接到加热电源）， r 为单个加热器的电阻。

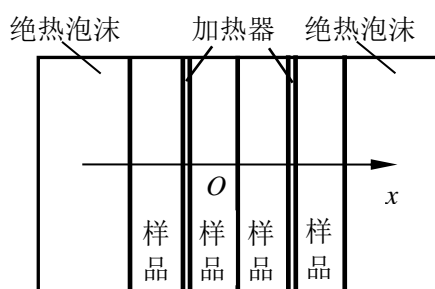


图 3 四块样品对称放置示意图

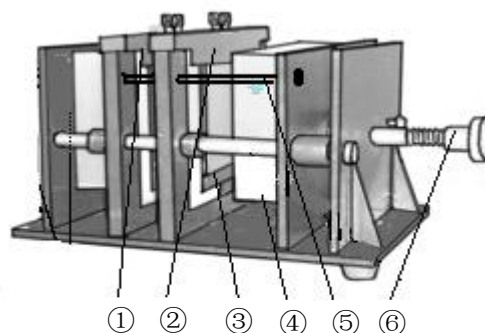


图 4 样品台装置

三、实验仪器

1. 样品台装置

如图 4 所示，样品台装置包含

- ①—中心面横梁：承载中心面的热电偶；
- ②—加热面横梁：承载加热面的热电偶；
- ③—加热薄膜：给样品加热；

④—隔热泡沫层：防止散热，从而保证实验精度；

⑤—锁定杆：实验时锁定横梁，防止在未松开螺杆⑥时取出热电偶导致热电偶损坏；

⑥—螺杆旋钮：推动隔热层压紧或松动实验样品和热电偶

实验时平板型试样 4 块、薄膜加热器两片、热电偶 2 只、泡沫绝热体两块可以按图 3 在样品台上装好夹紧，尽量使实验条件符合理论推导模型。

2. 测温系统

实验采用铜-康铜热电偶测温，以得到需要的温差及温升速率。热电偶测温原理如下。

由 A、B 两种不同的导体两端相互紧密的连接在一起，组成一个闭合回路，如图 5a 所示。当两接点温度不等 ($T \neq T_0$) 时，回路中就会产生电动势，从而形成电流，这一现象称为热电效应（又称塞贝克效应 *seebeck effect*），回路中产生的电动势称为温差电动势。如将回路

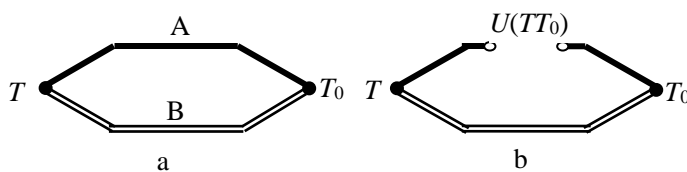


图 5 热电偶测温原理

断开，则会产生开路电压 $U(TT_0)$ ，如图 5b 所示，而且 $U(TT_0)$ 与 T 、 T_0 差值有关，可以近似表述为

$$U(TT_0) = k_1(T - T_0) + k_2(T - T_0)^2 \quad (15)$$

当温差较小时，可以忽略二次项按线性看待。

实验时热电偶的测温端应安装在正方形样品中心点附近，为减小因热电偶造成的样品间隙，热电偶采用直径 0.1mm 的铜-康铜丝制造，同时为减少室温波动等对测温的影响，温度或温度差的测量均采用两只同样的热电偶反向串联方式连线，具体如图 6 所示，热电偶冷端浸在温度恒定为 t_c 的恒温水槽中（思考：恒温水槽内温度 t_c 的大小对测量结果有何影响）。由图 6 同样可知，利用一块数字毫伏表及一个双刀双掷换向开关可以测量加热面与中心面温差 $U_1(t_2t_1)$ （换向开关位于位置 B）、中心面与冷端的温差 $U_2(t_1t_c)$ （换向开关位于位置 A）。在本实验涉及的温区内，铜-康铜热电偶的温差电势与其两端温差呈线性关系，其斜率 k_1 为 $40\mu\text{V}/^\circ\text{C}$ 。

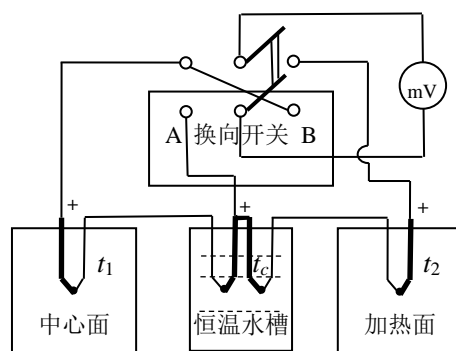


图 6 热电偶测温系统
(各热电偶正端由粗线示意)

3. 直流稳压电源

实验采用直流稳压电源给两个加热薄膜供电，样品台上两个加热薄膜已并联，为使测量准确，实验时加热电压控制在 15~20V 范围内，电流不超过 0.5A，并注意实验时加热电源先开机调到适当电压后预热几分钟。

4. 数字万用表

实验中电压的测量使用数字万用表。利用其直流电压 20V 测量档，在接通加热器的前后各测一次加热电压，取平均使用；利用其直流电压 200mV 档测量热电偶输出的加热面与中心面温差 $U_1(t_2t_1)$ 及中心面与冷端的温差 $U_2(t_1t_c)$ ，读数要求至 0.001mV。

5. 秒表

计时仪器采用秒表。

四、实验步骤

1. 阅读实验室内仪器说明书,学习数字万用表的使用,完成附录给出的各测量任务及相应的数据处理。

2. 按图 4 装好样品、加热器、热电偶并旋紧螺杆旋钮使样品、加热器、热电偶之间间隙尽量小,注意样品初温应保持为室温,不要用手大面积长时间接触试样。需要换样品时应先旋松螺杆旋钮⑥,待仪器各部分冷至室温后再换装新样品重新做实验,注意拆装样品时加热面热电偶严禁从装置上取下以防损坏。实验室提供的被测样品为有机玻璃(密度: 1196kg/m^3),一套四块,几何尺寸长与宽为 90mm 厚度 10mm。

3. 打开直流稳压电源、数字万用表电源预热十多分钟,预设加热电压到适当值(15—20V),并用万用表直流电压档测量实验前的加热电压。

4. 用万用表电阻档检查四只热电偶是否完好(热电偶电阻约几欧姆),检查加热器是否完好(单个加热器电阻约 110 欧姆,两者并联后电阻约 55 欧姆),并准确测量、记录加热器电阻值。

5. 电路连线:反向串接测温热电偶与冷端热电偶,并按图 6 所示连接换向开关、数字万用表。

6. 获取温度测量数据

测量初始温度 t_0 (使用温度计)及初始温差 $U_1(t_2t_1)$ (如果初始温差不为零,应当做已定系统误差,应修正)、初始中心面温度 $U_2(t_1t_c)$ 。

接通加热电源与加热器,同时开始计时,每隔 1 分钟测一次加热面与中心面温差 $U_1(t_2t_1)$ 及中心面与冷端的温差 $U_2(t_1t_c)$,共测 25 分钟左右,数据处理时应判断系统达到准稳态的时间,用准稳态区的数据来求导热系数和比热(请考虑为什么不是时间越长实验数据越好?)。

7. 断开加热电源,拆下数字万用表,按步骤 3 再次测量实验后的加热电压,与实验前的加热电压取平均使用。

五、数据处理

用坐标纸画出 $U_1(t_2t_1)\sim\tau$ 、 $U_2(t_1t_c)\sim\tau$ 曲线,从图线判断出现准稳态的时间,得出温差、温升速率,进而求出导热系数、比热。估计进入准稳态时中心面的温度。对准稳态出现后 $U_1(t_2t_1)\sim\tau$ 、 $U_2(t_1t_c)\sim\tau$ 曲线走势进行分析解释。

如果考虑薄膜加热器的热容、边缘绝热条件没满足等,热流密度按电功率的 85%来修正,请重新计算给出该条件下的导热系数与比热。

六、附录:数字万用表使用练习

认真查阅数字万用表使用手册相关内容,完成以下测量任务,并给出完整的测量结果(注意测量应根据被测对象正确选择输入端子、功能按键、测量量程,使得到的测量结果有效位数尽量多,如果被测量大小无法估计则从高量程开始测量并逐步调整)。

1. 交流电压及频率测量;
2. 电阻直接测量:二端法测量电阻 R 大小;
3. 二极管测量:测量二极管的正向导通电压;

4. 电容测量

IV-4 用传感器测空气相对压力系数

传感器是利用某种效应将一被测量变换成易于测量的量（通常为电学量）的器件，它处于测量装置的输入端。传感器的种类十分繁多，应用极其广泛，温度传感器和压力传感器是两种最基本的传感器。本实验根据理想气体的查理定律，分别用铜电阻温度传感器和硅压阻式差压传感器测量定容气体的温度和压强，从而测定空气的相对压力系数（也称相对压强系数）。

一、实验目的

1. 加深对理想气体状态方程和查理定律的理解；
2. 初步了解铜电阻温度传感器和硅压阻式差压传感器的工作原理并掌握其使用方法；
3. 学习用作图法和计算机作直线拟合法处理实验数据。

二、实验原理

1. 理想气体的查理定律

理想气体状态方程在定容条件下简化为查理定律

$$p = \frac{p_0 T}{T_0} = p_0 \frac{T_0 + t}{T_0} = p_0 (1 + \alpha_p t) \quad (1)$$

式中， t 为气体的摄氏温度， $T_0 = 273.15\text{K}$ ， p_0 和 p 分别为气体在温度为 0°C 和 $t^\circ\text{C}$ 时的气体压强； α_p 为相对压力系数，定义为 $\alpha_p = \frac{\Delta p}{p_0 \Delta t}$ 。对于理想气体 $\alpha_p = \frac{1}{T_0} = 3.66 \times 10^{-3} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ 。实际气体（如空气）可近似看作理想气体，其相对压力系数与理想气体的相差甚小。

根据查理定律可制作定容气体温度计。定容气体温度计是复现热力学温标的重要仪器，也可用于低温测量。工业中使用的压力式气体温度计有些就是定容气体温度计。精心设计和制作的、准确度和灵敏度都很高的定容气体温度计可用于检定其他类型的温度计。

2. 铜电阻温度传感器

利用金属（如铂、铜）或半导体材料的电阻随温度按一定规律变化的特性而制成的温度计称为电阻温度计。在 $-50 \sim 100^\circ\text{C}$ 范围内，铜丝的电阻值 R 与温度 t 有良好的线性关系

$$R = R_0 (1 + \alpha_R t) \quad (2)$$

式中 R_0 为 0°C 时的电阻值， α_R 称为电阻温度系数。本实验中使用的铜丝电阻的 $\alpha_R = 4.26 \times 10^{-3} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ 。当铜丝电阻中通以恒定的电流 I 时，铜丝电阻两端的电压 U_t 与温度 t 有如下关系：

$$U_t = U_{R_0} (1 + \alpha_R t) \quad (3)$$

U_{R_0} 为 0°C 时的电压， $U_{R_0} = IR_0$ 。若测出了在纯水沸点时铜丝电阻的电压 U_{t_b} 并根据大气压强查出沸点温度 t_b ，则利用（3）式可求得 t 为

$$t = \frac{U_t}{U_{t_b}} \left(\frac{1}{\alpha_R} + t_b \right) - \frac{1}{\alpha_R} \quad (4)$$

3. 扩散硅压阻式差压传感器

半导体材料（如单晶硅）因受力而产生应变时，由于载流子的浓度和迁移率的变化而导致电阻率发生变化的现象称为压阻效应。压阻式差压传感器就是利用压阻效应制成的。早期使用的 PPT-1 型扩散硅压阻式差压传感器的结构如图 1 所示。为简单计，剖面图中未画出引线。它的核心是硅膜片，这种膜片是利用制作集成电路的方法，在单晶硅基片上通过硼的扩散以形成如图 2 所示的十字形四端应变片。由于硅膜片是各向异性的，十字形四端应变片应设置在剪切应力最大的位置和剪切压阻系数最大的方向上。当膜片受应力时，如果将一恒定电压 E 加在 M 和 N 两端上，在剪切应力作用下，从 A 和 B 两端会输出一与压差 Δp 成线性关系的电压 U_p ，

$$U_p = U_0 + k_p \Delta p \quad (5)$$

U_0 为压差为零时的输出电压，系数 k_p 一般为一常数。若传感器的接口 D （参考压力腔）通大气，接口 C （正压力腔）通被测介质，则有

$$p = p_c + \frac{U_p - U_0}{k_p} \quad (6)$$

p_c 为大气压强。该压阻式差压传感器可用于非腐蚀性气体和液体的压力或压差的测量，测量范围 $0 \sim 1.3 \times 10^5$ 帕斯卡，综合精度为 0.3%。扩散型差压传感器具有体积小、灵敏度高、稳定性好等优点。十字形四端应变片与传统的四电阻电桥（在硅膜片上的特定方位上用扩散法形成四个电阻并连成一桥路）式应变片相比，可靠性和一致性更好。随着科技的发展，差压传感器的性能、外型及型号经常改变，需要时可参阅有关资料。

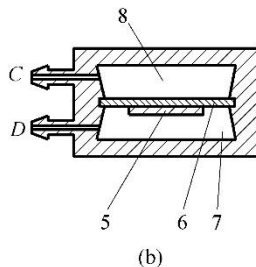
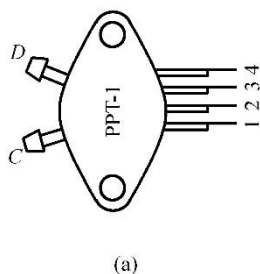


图 1 差压传感器结构示意图 (a) 外形、(b) 剖面示意图

1, 3—电源线（1 为正） 2, 4—输出（2 为正） 5—硅膜片
6—固定片 7—参考压力腔 8—正压力腔 C、D—接口

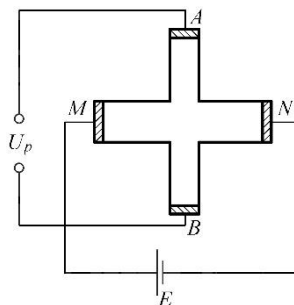


图 2 十字形四端应变片

三、实验装置简介

图 3 是实验装置主要部分的示意图，图 4 为实验装置图。被测介质是封装在玻璃泡 A 内的空气。 A 泡浸没在容器内的纯净水中，由磁力加热搅拌器或“热得快”加热水来控制水温。差压传感器的接口 D 通大气，接口 C 经过玻璃细管和真空三通活塞与 A 泡相连。 E (约 10V) 是差压传感器的恒压源。 J 是铜丝电阻的恒流源（可调）。为了减少引线电阻对测量的影响，铜丝电阻采用了四端接法。量程为 200mV 的 4 位半数字电压表通过换向开关 K 可分别测量铜丝电阻上电压 U_i 和差压传感器的输出电压 U_p ，单位为 mV。大气压强 p_c 从室内数字大气压力表上读出。如果将数字电压表显示的输出电压 U 按气体温度来标定，则 A 泡、

差压传感器和数字电压表就组成一台定容气体温度计。

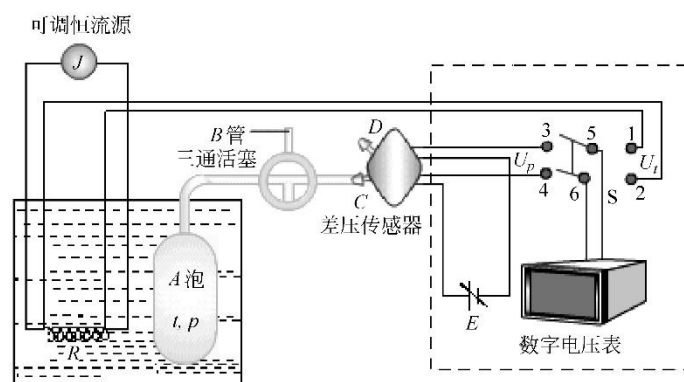


图 3 实验装置示意图

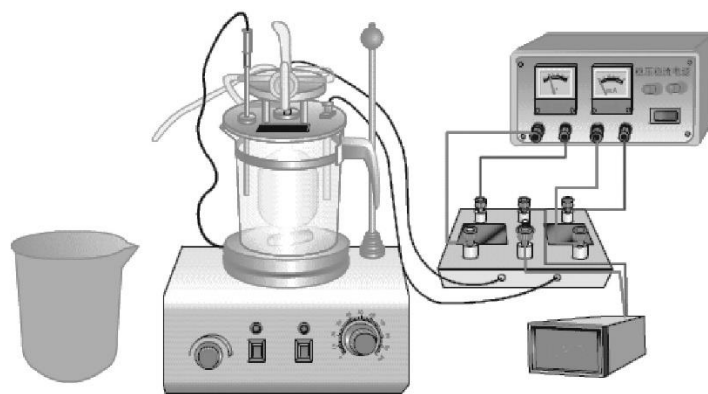


图 4 实验装置图

四、实验步骤及注意事项

1. 差压传感器的定标

定标就是按一定的计量标准来确定计量器具或其指示数值所表示的量值的过程。差压传感器的定标就是准确的测定其常量 U_0 和 k_p 。定标时仍用数字电压表来测量 U_p 。定标装置如图 5 所示。

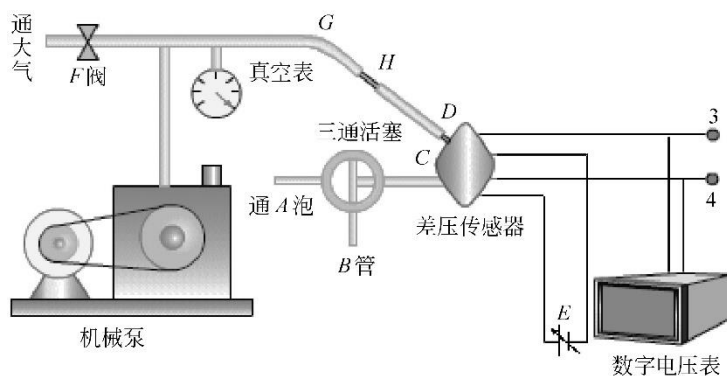


图 5 差压传感器定标装置示意图

先**缓慢**转动三通活塞（另一只手扶住活塞外壳），使差压传感器的 C 口与 B 管相通而与 A 泡断开，这时 C 通大气。将塑料软管 G 接在接头 H 上使 D 口与机械泵相连（图中已画成相连）。将数字电压表接在差压传感器的输出端 3 和 4 上。启动机械泵，从 D 口抽气。待电压表读数稳定（应最大）时，此时 D 口气压可视为零，压差 $\Delta p = p_c$ ，差压传感器的输出电压记为 U_m 。然后停机械泵，从接头 H 上拔去塑料管 G ，使 D 口也通大气。此时， $\Delta p = 0$ ，电压表的读数即为 U_0 。由（5）式可求得

$$k_p = \frac{U_m - U_0}{p_c} \quad (7)$$

2. 测量若干组 (U_t , U_p) 值

按图 3 接线，**缓慢**转动三通活塞使 C 口与 A 泡相通。调节恒流源 J ，使电流处于 1.5~2.5mA 区间的某一定值，此后实验中不要再调。记录室温下铜丝的电压值 U_t 和差压传感器的输出电压值 U_p 。然后开启加热搅拌器加热，根据所需数据组数（至少 8 组数据）按估计的铜丝电压间隔，依次加热至温度恒定后记录 (U_t , U_p) 值。最后记录水沸腾时的各电压值 (U_{t_b} , U_{p_b})。

3. 实验前后用数字大气压力表上各测一次大气压 p_c ，同时记下室温值。

4. 实验注意事项

(1) 实验加热时需用独立的加热电源给水浴中的加热器供电，可以调整电流大小以实现加热或控温；用磁力搅拌器来搅拌，注意转速适中即可。

(2) 实验时如需换水，要先将加热器电源断开，“热得快”不能干烧，再将玻璃系统拿下放在备用的空烧杯上，把水浴杯内的水直接倒入实验室准备的热水回收桶，以便晾凉后再次使用。注意磁搅拌子别倒掉。

(3) 差压传感器和玻璃制品易损坏，操作时要小心。转动三通活塞时操作时要一只手轻轻扶住三通外壳使其稳定不动，另一只手缓慢转动三通手柄，以防损坏装置、伤手，或造成气路接口的密封胶开裂漏气。

(4) 停泵后应立即将塑料管 G 从接头 H 上拔下，让机械泵抽气口通大气。否则，机械泵油会流出泵体进入真空系统，造成污损。

(5) 实验完毕，将加热电源的电流旋钮、搅拌子转速调节旋钮旋至最小位置，关断各电源开关。

五、系统误差分析

式（1）仅适用于定容、定质量的理想气体。由于①空气只近似为理想气体；②A 泡壁上的气体吸附量随温度而变，且泡内可能有水蒸气混入；③A 泡的容积因热胀冷缩而变；④与 A 泡相连的 C 管等部分中的气体温度不均匀等原因，实验中存在着较明显的系统误差。下面主要分析③和④两因素的影响。

设 A 泡至 C 口之间的细管部分的体积为 v ，A 泡体积为 V ，并假定体积 v 内的气体的温度近似为室温 t_1 。可列出气体初态和末态的参量如下：

	初 态	末 态
A 泡内气体	V, p_1, T_1	$V[1+\beta(T-T_1)], p, T$
v 内气体	v, p_1, T_1	v, p, T_1

其中， β 为 A 泡玻璃的体膨胀系数，约 $1.2 \times 10^{-5} \text{K}^{-1}$ 。由于气体的总量不变，利用理想气体状态方程可写出

$$\frac{p_1 V}{T_1} + \frac{p_1 v}{T_1} = \frac{pV[1 + \beta(T - T_1)]}{T} + \frac{pv}{T_1}$$

即

$$\frac{pV}{T} = \frac{p_1 V}{T_1} \left(1 + \frac{v}{V} \right) \left\{ 1 + \frac{T}{V} \left(\frac{v}{T_1} + \frac{V\beta(T - T_1)}{T} \right) \right\}^{-1}$$

由于 $v/V \ll 1$, $\beta(T - T_1) \ll 1$, 将右式展开并且略去高阶小量后得

$$p = \frac{p_1 T}{T_1} \left[1 - \left(\beta + \frac{v}{VT_1} \right) (T - T_1) \right] \quad (8)$$

式(8)表明 p 与 T 之间不是严格的线性关系。考虑到这一点, 本实验中在 20°C 左右时, 按以下经验公式对 α_p 的测得值进行修正:

$$\delta\alpha_p = \left(0.018 + \frac{5v}{V} \right) \times 10^{-3} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1} \quad (9)$$

六、实验数据处理

1. 根据大气压强值查表(参看附录), 利用直线内插值法得到水的沸点值 t_b 。
2. 计算差压传感器标定参数 k_p 。
3. 由 (U_t, U_p) 数据计算对应的 (t, p) 值; 利用(1)式对 (t, p) 用最小二乘法进行直线拟合, 给出拟合图, 求出 α_p 值, 同时记下相关系数 r 。要求相关系数 r 大于 0.999, 若达不到要求, 应寻找原因重新测量。
4. 仪器的 $v/V=0.02$, 由(9)式对 α_p 值进行修正。
5. 数据表格可参考下表:

$t_b=$	仪器常数 $\frac{v}{V}=$		
传感器常数 $U_0=$	$k_p=$		
$U_t\text{ (mV)}$	$t=\frac{U_t}{U_{t_b}}\left(\frac{1}{\alpha_R}+t_b\right)-\frac{1}{\alpha_R}(\text{°C})$	$U_p\text{(mV)}$	$p=p_c+\frac{U_p-U_0}{k_p}\text{ (Pa)}$
Ut_1		Up_1	
Ut_2		Up_2	
\vdots		\vdots	
Ut_b	t_b	Up_b	

七、思考题

1. 差压传感器定标时, 若先测 U_0 后测 U_m , 应如何操作? 若传感器 D 口有漏气, 对定标结果有何影响?
2. 对水加热时, 为什么要控制好热平衡? 升温过快有什么问题?
3. 转动三通活塞时应注意什么? 若需要换水时应如何操作?

4. 实验中保持水沸腾时, 若数字表 U_p 的读数单调下降, 可能是什么问题?

附录: 沸点与大气压强对照表

$p_c(\text{mmHg})$	740	741	742	743	744	745	746	747	748	749
$p_c(\times 10^5 \text{Pa})$	0.9866	0.9879	0.9892	0.9906	0.9919	0.9932	0.9946	0.9959	0.9972	0.9986
$t_b(^{\circ}\text{C})$	99.26	99.30	99.34	99.37	99.41	99.45	99.48	99.52	99.56	99.59
$p_c(\text{mmHg})$	750	751	752	753	754	755	756	757	758	759
$p_c(\times 10^5 \text{Pa})$	0.9999	1.0012	1.0026	1.0039	1.0052	1.0066	1.0079	1.0092	1.0106	1.0119
$t_b(^{\circ}\text{C})$	99.63	99.67	99.70	99.74	99.78	99.82	99.85	99.89	99.93	99.96
$p_c(\text{mmHg})$	760	761	762	763	764	765	766	767	768	769
$p_c(\times 10^5 \text{Pa})$	1.0132	1.0146	1.0159	1.0172	1.0186	1.0199	1.0212	1.0226	1.0239	1.0252
$t_b(^{\circ}\text{C})$	100.00	100.04	100.07	100.11	100.15	100.18	100.22	100.26	100.30	100.33
$p_c(\text{mmHg})$	770	771	772	773	774	775	776	777	778	779
$p_c(\times 10^5 \text{Pa})$	1.0266	1.0279	1.0292	1.0306	1.0319	1.0332	1.0346	1.0359	1.0372	1.0386
$t_b(^{\circ}\text{C})$	100.37	100.41	100.44	100.48	100.52	100.55	100.59	100.63	100.66	100.70

IV-5 分光计的调节及三棱镜色散曲线的测定

光线入射到光学元件（如平面镜、三棱镜、光栅等）上，会发生反射、折射或衍射。分光计是用来精确测量入射光和出射光之间偏转角度的一种仪器，它的装置较为精密，结构比较复杂，调节要求也较高，对初学者来说有一定难度。但只要注意了解其基本结构和工作原理，严格按调节要求和步骤耐心进行调节，一定能较好地达到要求。分光计的基本部件和调节原理与其他更为复杂的光学仪器（如摄谱仪、单色仪等）有许多相似之处，学习和使用分光计也为今后使用精密光学仪器打下良好的基础。

一、实验目的

1. 了解分光计的原理与构造，学会调节分光计；
2. 用最小偏向角法测定玻璃的折射率；
3. 掌握三棱镜顶角的两种测量方法。

二、实验原理

1. 分光计的结构及调节原理

分光计的结构如图 1 所示，分光计主要由平行光管 7、望远镜 2、度盘 15 和载物台 6 构成。度盘采用游标结构，由刻度盘(主度盘)和游标盘组成。该仪器有一竖直旋转轴（即分光计的主轴 5），主度盘、游标盘平面垂直于主轴。度盘、游标盘、望远镜、载物台等均可绕主轴旋转，通过不同的锁定螺钉、调节螺钉可以实现相应部件的同步旋转（联动）、止动以及微动。

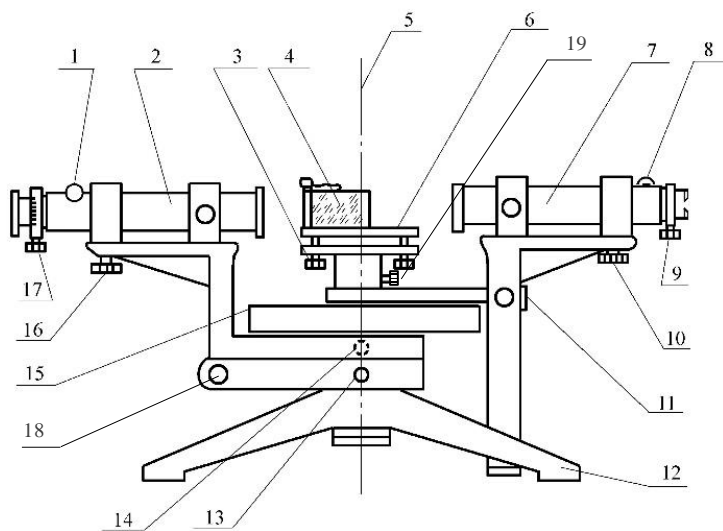


图 1 分光计的结构示意图

1. 望远镜物镜聚焦调节手轮
2. 望远镜
3. 载物台调平螺钉
4. 三棱镜
5. 分光计主轴线
6. 载物台
7. 平行光管
8. 平行光管聚焦调节手轮
9. 平行光管狭缝锁紧螺钉
10. 平行光管调水平（俯仰角）调节螺钉
11. 游标盘止动螺钉
12. 底座
13. 望远镜止动螺钉
14. 望远镜与刻度盘联动螺钉（背面）
15. 刻度盘与游标盘
16. 望远镜调水平（俯仰角）螺钉
17. 望远镜目镜套筒锁紧螺钉
18. 望远镜转动微调螺钉
19. 载物台锁定螺钉

要利用分光计准确测量光学元件上入射光与出射光之间的偏转角，必须使入射光与出射光均为平行光束，且入射光线、出射光线以及反射面或折射面的法线都与分光计的刻度盘平行（亦与主轴垂直）。因此，分光计调整的目标为：平行光管发出平行光（入射光），望远镜适合于观察平行光（出射光），平行光管光轴、望远镜光轴及载物台上的光学元件法线均垂直于主轴。下面介绍各主要部件的构成与调节原理。

(1) 望远镜

分光计中的望远镜采用的是自准直望远镜（如图 2 所示），它由物镜、刻线分划板和目镜组成，分别装在三个套管上，彼此可以相对滑动以进行聚焦调节。中间的一个套筒里装有一块分划板 3，其上刻有“十”形刻线，分划板 3 下部与小棱镜 6 的一个直角面紧贴，使刻划板上的刻线与该直角面共面。在棱镜 6 的此直角面上刻有一个“+”形透光的叉丝 5，套筒上正对棱镜 6 的另一直角面处开有小孔并装一小照明灯。小灯发出的光 4 进入小孔后经小棱镜 6 的斜面反射后照亮“+”形透光叉丝 5。如果叉丝所在平面（亦即“十”形刻线所在平面）正好处在物镜 2 的焦面上，则从叉丝发出的光经物镜 2 后成为一平行光束。如果正前方有一平面镜 1 将这束平行光反射回来，再经物镜 2 后成像于其焦平面上，那么当望远镜的目镜 7 也聚焦到该焦平面上时，则从目镜 7 中就可以同时看到“十”形刻线 3 和“+”形叉丝的反射像 8，并且不应该有视差。这就是用自准直法调节望远镜适合于观察平行光的原理。如果望远镜的光轴与平面镜的法线平行（亦即与平面镜镜面垂直），则在目镜 7 里看到的“+”形反射像 8 的中心交叉点应与“十”形刻线 3 的上交叉点重合（为什么？注意分划板上“十”形刻线的较长下横线垂直通过望远镜的中心轴线，较短上横线与“+”形透光叉丝的横丝分别位于望远镜光轴的上下对称位置）。

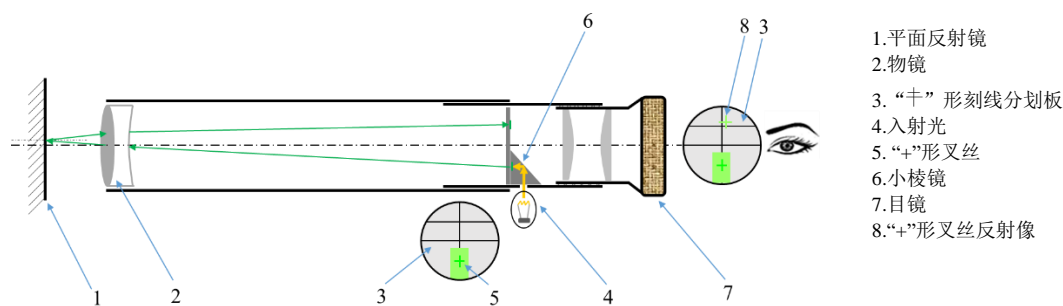


图 2 自准直望远镜结构及光路示意图

(2) 平行光管

平行光管由狭缝和透镜组成，结构如图 3 所示。狭缝与透镜之间的距离可以通过伸缩狭缝套筒来调节。只要将狭缝调到透镜的焦平面上，则从狭缝发出的光经透镜后就成为平行光。狭缝的刀口是经过精密研磨制成的，为避免损伤狭缝，只有在望远镜中看到狭缝像的情况下才能调节狭缝的宽度。



图 3 平行光管结构示意图

1. 狭缝 2. 狭缝宽度调节螺钉 3. 凸透镜

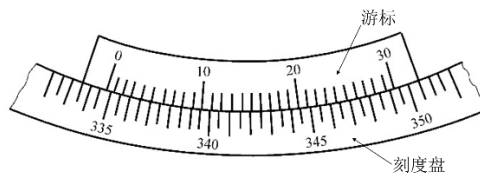


图 4 刻度盘与游标盘读数示例

(3) 刻度盘与游标盘

分光计的刻度盘垂直于分光计主轴并且可绕主轴转动。为消除刻度盘的偏心差，采用两个相差 180° 的

位置读数（参看附录）。刻度盘的分度值为 0.5 度，0.5 度以下则需要用游标来读数。游标上的 30 格与刻度盘上的 29 格对应的角度相等，故游标的最小分度值为 1 分（记为 1'）。读数方式与游标卡尺的读数方式类似。读数时应首先看游标零刻线所指的位置。例如图 4 所示情形，游标零刻线所对应刻度盘上的位置读数比 $334^{\circ}30'$ 稍大一点，而游标上的第 17 格恰好与刻度盘上的某一刻度对齐，因此该角度位置读数为 $334^{\circ}30' + 17' = 334^{\circ}47'$ 。

2. 用最小偏向角法测玻璃的折射率

一束平行的单色光，入射到三棱镜的 AB 面，经折射后由另一面 AC 射出，如图 5 所示。入射光和 AB 面法线的夹角 i 称为入射角，出射光和 AC 面法线的夹角 i' 称为出射角。出射光相对于入射光的方向偏转的角度 Δ 称为偏向角。可以证明，当入射角 i 等于出射角 i' 时，入射光和出射光之间的夹角最小，称为最小偏向角 δ 。

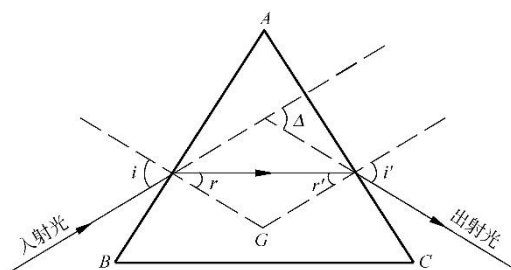


图 5 单色光经三棱镜折射

由图 5 可知，光线偏向角 $\Delta = (i - r) + (i' - r')$ ，其中 r 和 r' 的含义见图 5 所示。当 $i = i'$ 时，由折射定律有 $r = r'$ ，这时用 δ 代替 Δ 得

$$\delta = 2(i - r) \quad (1)$$

又因 $r + r' = 2r = \pi - G = \pi - (\pi - A) = A$ ，所以

$$r = \frac{A}{2} \quad (2)$$

由式(1)和式(2)得

$$i = \frac{A + \delta}{2}$$

由折射定律有

$$n = \frac{\sin i}{\sin r} = \frac{\sin \frac{A + \delta}{2}}{\sin \frac{A}{2}} \quad (3)$$

由式(3)可知，只要测出三棱镜顶角 A 和最小偏向角 δ ，就可以计算出棱镜玻璃对该波长的单色光的折射率。

3. 色散及色散曲线的拟合

当入射光不是单色光时，虽然入射角对各种波长的光都相同，但出射角并不相同，表明折射率也不相同。对于一般的透明材料来说折射率随波长的减小而增大；如紫光波长短，折射率大，光线偏折也大，而

红光波长长，折射率小，光线偏折小。折射率随波长的不同而改变的现象称为色散。对一种玻璃材料所作出的折射率 n 和波长 λ 的关系曲线称为它的色散曲线。不同材料的色散曲线是不同的，一般可采用平均色散 $n_F - n_C$ 或色散本领 V

$$V = \frac{n_F - n_C}{n_D - 1} \quad (4)$$

来表示某种玻璃色散的程度。其中 n_C 、 n_D 和 n_F 分别表示玻璃对夫琅和费谱线中 C 线、 D 线和 F 线的折射率。这三条线的波长分别是 $\lambda_C=656.3\text{nm}$ 、 $\lambda_D=589.3\text{nm}$ 、 $\lambda_F=486.1\text{nm}$ 。

用经验公式来表示可见光范围内玻璃材料的折射率与波长之间的关系时，可以选取适当的数学模型来尝试并比较（如比较典型的公式有： $n^2 = A_0 + A_1\lambda^2 + A_2\lambda^{-2} + A_3\lambda^{-4} + A_4\lambda^{-6} + A_5\lambda^{-8}$ ，实验研究时可以通过对七组以上实验数据进行处理，设 $y=n^2$ ， $x_1=\lambda^2$ ， $x_2=\lambda^{-2}$ ， $x_3=\lambda^{-4}$ ， $x_4=\lambda^{-6}$ ， $x_5=\lambda^{-8}$ ，则可以把一元高次方程的拟合转化为 $y \sim x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$ 的多元线性回归问题，并利用计算机来处理数据，拟合色散曲线，得到经验公式）。

需要说明的一点是各种不同的光学仪器对色散的要求也是不同的。例如照相机、显微镜等的镜头要求色散小，则色差小。而摄谱仪和单色仪中的棱镜则要求色散大，使各种波长的光分得较开，以提高仪器分辨本领。

4. 三棱镜顶角的测量原理

(1) 用自准直法测定三棱镜顶角。由图 6 可知，只要测出三棱镜两个光学面的法线之间的夹角 ϕ ，即可求得顶角 $A=180^\circ - \phi$ 。

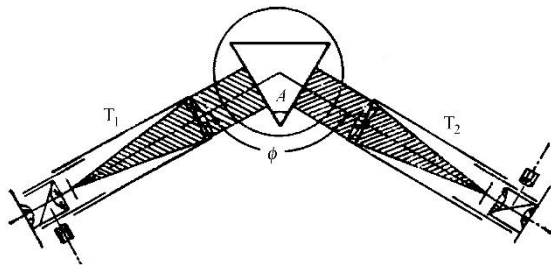


图 6 自准直法测三棱镜顶角光路图

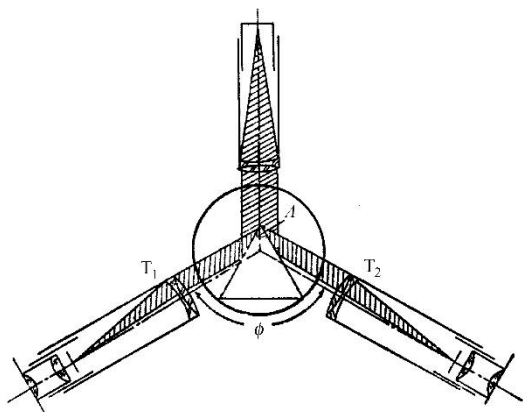


图 7 平行光法测三棱镜顶角光路图

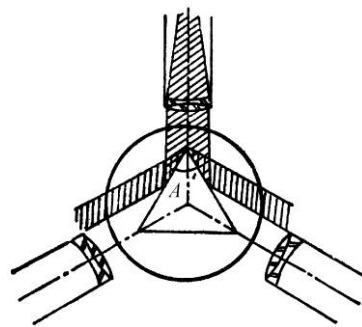


图 8 三棱镜位置不合适

(2) 用平行光法测定三棱镜顶角。一束平行光被三棱镜的两个光学面反射后，只要测出两束反射光之间的夹角 ϕ 即可求得顶角 $A = \frac{1}{2}\phi$ ，如图 7。放置三棱镜时，应使三棱镜顶点靠近载物台中心！否则，反射光将不能进入望远镜中，如图 8 所示。

三、实验仪器

实验用到的主要仪器：分光计，平面反射镜（双反镜），玻璃三棱镜，汞灯、氦光谱管及其电源。

操作过程中注意：

①拿光学元件（平面镜、三棱镜等）时，要轻拿轻放，以免损坏，切忌用手触摸光学面。

②分光计是较精密的光学仪器，要倍加爱护，在止动螺丝未松开的情况下禁止强行转动相应部件，也不要随意调节狭缝；转动分光计的望远镜时，切勿手握照明灯管套或者望远镜镜筒来转动，应手持望远镜的支架进行操作；在精细测量时需要利用望远镜转动微调螺丝来配合进行准确定位（参见图 1：18）。

③灯管通有高压电，禁止触摸高压线路上裸露的任何金属部件。一般光源开启后需预热一段时间才能正常、稳定发光。光源不要频繁开启关闭，在开启以后保持通电，不再需要光源时关闭电源。

④汞灯在本实验中主要用于分光计的调节，光谱中含有紫外光，请勿长时间注视灯光。

⑤氦光谱管是将稀薄的氦气（气压为 600Pa 至 700Pa）封闭在玻璃管内制成。管的两端各装一个电极，两电极间加高电压后产生放电并且发光，通过三棱镜分光可得到氦的线光谱（参看表 1 和图 9）。

表 1 氦光谱的波长值 单位：nm（ $=10^{-9}\text{m}$ ）

波长	447.1	471.3	492.2	501.6	587.6	667.8	706.6
颜色	蓝紫	蓝	蓝绿	浅绿	黄	大红	暗红



图 9 经玻璃棱镜分光的氦光谱图照片

四、实验任务及操作要点

1. 分光计的调节

分光计的调节比较复杂，需要仔细认真、按步骤一步一步地来调节。调节前，应对照实物和结构图熟悉仪器，了解各个调节螺钉和锁定螺钉的作用。检查确认载物台表面的三条径向刻痕与其下方的三颗调平螺钉的方位分别对应。锁定望远镜目镜套筒锁紧螺钉（参见图 1：17），松开游标盘止动螺钉、望远镜止动螺钉、望远镜与刻度盘联动螺钉、载物台锁定螺钉（依次参见图 1：11、13、14、19）。调节时要先粗调再细调。粗调凭眼睛观察判断，调节望远镜和平行光管的俯仰角（分别参见图 1：16、10），尽量使其光轴与刻度盘平行；调节载物台下方的调平螺钉（参见图 10 的 S1、S2 和 S3），使其与下面的支撑平台之间留出 2mm 左右的间隙，并与刻度盘平行（即与主轴垂直）。细调过程步骤如下：

1-1. 调节望远镜

(1) 调节望远镜适合于观察平行光

①旋转目镜聚焦调节手轮（参见图 2：7），将目镜聚焦到刻划板上，看清“十”形刻线。

②参考图 10(a)或(b)所示方式将平面反射镜放置在载物台。缓慢转动载物台下方的支撑柱，带动反射镜转动至镜面正对望远镜（注：下文所述转动反射镜面的操作，均是通过转动载物台下方的支撑柱来带动镜面旋转），通过目镜观察，视场中除了下部方形绿色亮斑外（参见图 2：5），还应看到镜面反射回来的绿色亮圆斑（可能比较模糊，也可能是较清晰明亮的绿色“+”反射像，参见图 2：8）。若总是找不到绿色亮斑，很可能是粗调还未达到要求，应重新粗调望远镜光轴、载物台与刻度盘的平行程度。

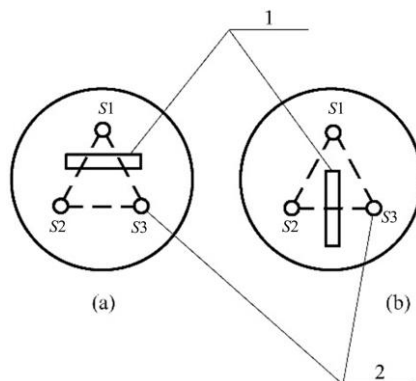


图 10 平面镜在载物台上的放置位置

1.平面镜 2.载物台调平螺钉（S1、S2、S3）

③找到绿色亮斑后进行物镜聚焦。缓慢转动望远镜物镜聚焦调节手轮（参见图 1：1），改变叉丝套筒到物镜的距离，使套筒中的分划板位于物镜的焦平面上。这时就可以从目镜中看到比较清晰的绿色“+”形反射像。当绿色“+”形反射像与“十”形刻线无视差时（为什么要求无视差？），则望远镜已适合于观察平行光。

(2) 调节望远镜光轴垂直于分光计主轴

当平面镜法线与望远镜光轴平行时，绿色“+”形反射像的中心点与“十”形刻划线的上交点完全重合，将平面镜旋转 180° 之后，如果仍然完全重合，则说明望远镜光轴已垂直于分光计主轴了（为什么？）。初始调节时二者一般情况下并不重合，需要仔细反复调节才能实现。调节时应先从望远镜中看到平面镜反射的“+”形像（此时不一定和叉丝上交点重合），再转动平面镜 180° 找到另一镜面反射的“+”形像后，再分别就每个镜面发射的“+”形像所在的位置仔细调节。最简单的调节方法是采取渐近法：假设平面镜按图 10(a)所示方位放置。当“+”形像与“十”形刻线上交点不重合时，可先调解载物台下的调平螺钉（比如只调节螺钉 S1，而螺钉 S2、S3 不动），使“+”形反射像中心点与“十”形刻线上交叉点之间的距离减小一半，再调节望远镜的俯仰角调平螺钉，使像与“十”形刻线上交点重合；然后转动镜面 180° 后，重复同样的调节过程（若与前一操作对应，这里应调节螺钉 S1 和望远镜俯仰角调平螺钉。注意此时三个载物台调节螺钉的方位也转了 180° ，螺钉 S1 转到了原位置的对面，需盯住不要搞混淆）。如此反复调节几次，便可很快调好。

思考：若反射镜的两个反射面反射得到的绿“+”像都位于“十”形刻划线的上横线的上方，想想最大可能的原因是什么，该怎样调节？若两次情况下的绿“+”像分居于“十”形刻划线的上横线的上下两侧，又是什么原因，如何调节？

需要提醒的是，至此可能会出现从目镜里看到的分划板“十”形刻划线相对倾斜的情况。此时，先松开

望远镜目镜套筒锁定螺钉（参见图 1：17），然后来回缓慢转动平面镜（或者望远镜），同时观察绿“+”像在视场里的左右移动情况。这时，轻轻旋转目镜套筒（**非目镜聚焦手轮！**），使绿“+”像的中心点沿“十”形刻划线的上横线移动。这样，“十”形刻划线的竖线与分光计转轴平行，自然，两条横线与转轴垂直（同时与刻度盘平行）。最后，锁紧望远镜目镜套筒锁定螺钉。注意，这一过程可能会破坏望远镜物镜的聚焦状态，需适当进行物镜聚焦调节，使绿“+”反射像清晰。

1-2 调节载物台法线

用手直接拿起平面镜，相对于原方位转 90° 放置在载物台上。比如，前面是按图 10(a)所示方位放置的话，此刻应该是按图 10(b)所示的方位放置。然后转动镜面正对望远镜，同样采用逐步逼近的方法，调节载物台调平螺钉，使两个镜面反射回来的绿色“+”反射像的中心点与“十”形刻划线的上交叉点均能够重合。

注意：前面调节过的载物台调平螺钉和望远镜俯仰角调节螺钉这一步不能多动！假如上一步调节用到的是调平螺钉 S1，则这一步只能调节螺钉 S2 和 S3。这样，载物台的法线就平行于分光计的转轴，或者说载物台平面垂直于分光计的转轴（为什么？）。

1-3. 调节平行光管

(1) 调节平行光管使其产生平行光

用已适合于观察平行光的望远镜作为标准调节平行光管。开启汞灯电源，取下平面镜，调整分光计底座方位（或汞灯位置）使平行光管正对汞灯。转动望远镜正对平行光管进行观察，同时缓慢转动平行光管聚焦手轮（参见图 1：8），前后移动狭缝套筒调节狭缝和透镜间的距离，即平行光管聚焦，使狭缝位于平行光管透镜的焦平面上。准确聚焦时，从望远镜中看到清晰的狭缝像（**注意：是边缘清晰的狭缝像，而不是模糊的亮条**），且狭缝像与“十”形刻划线之间无视差。此时，平行光管发出的光即是平行光。

(2) 调节平行光管光轴垂直于分光计主轴

仍用光轴已垂直于主轴的望远镜为标准调节平行光管。松开平行光管狭缝套筒锁定螺钉（参见图 1：9），缓慢旋转分光计狭缝套筒，同时利用平行光管调平螺钉调节平行光管的俯仰角度（参见图 1：10），使从望远镜目镜里看到的狭缝像与“十”形刻划线的下横线重合，则说明平行光管的光轴与分光计转轴垂直。然后，旋转狭缝套筒，使狭缝像与“十”形刻划线的竖线重合后，此时平行光管光轴与望远镜光轴共线。锁定平行光管狭缝套筒锁定螺钉。需要提醒的是，此调节过程可能造成平行光管聚焦状态的破坏，应适当调节平行光管聚焦手轮，重新调焦使狭缝像清晰。

最后，适当调节狭缝的宽度，本实验中狭缝像的宽度目测约为 0.5mm 左右即可；转动游标盘，使两个游标位于左右两侧以方便读数操作的位置后，然后锁定游标盘；锁紧望远镜与刻度盘的联动螺钉，使刻度盘随望远镜同步转动。至此，分光计调节完毕。具体使用中，在载物台上放置光学元件后，一般还需要根据所用光学元件、测量内容及光路要求，进行一些相关的调节操作。

1-4. 调节三棱镜两个光学面的法线垂直于分光计主轴

将三棱镜放在载物台上。为了便于调节三棱镜的两个光学面的法线，可按图 11 所示放置三棱镜。然后利用已调节好的望远镜通过调节载物台的调平螺丝 S1、S2 或 S3，用自准直法校准三棱镜的两个光学面的法线（**切勿调节望远镜调平螺钉！**），使它们都能与望远镜的光轴平行，亦即与分光计主轴垂直（若不垂直，应怎样调节？）

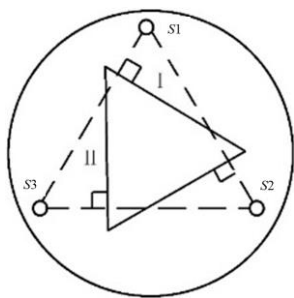


图 11 三棱镜在载物台上的位置

调节螺钉 S1, 可改变 I 面法线方向, 而不改变 II 面法线方向

调节螺钉 S2, 可改变 II 面法线方向, 而不改变 I 面法线方向

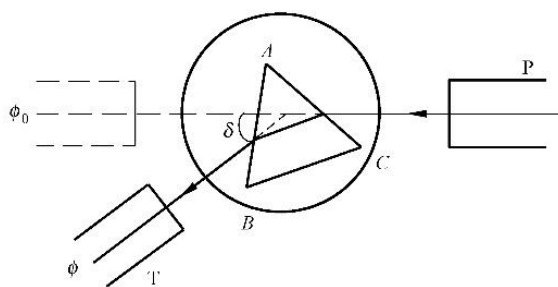


图 12 观察最小偏向角示意图

P—平行光管 T—望远镜 A—三棱镜顶角

2. 测量三棱镜顶角

利用三棱镜两个光学面的反射作用, 分别用自准直法、平行光法测量三棱镜的顶角。如果时间不允许, 本次实验可从两种方法选一甚或不测量三棱镜顶角。不测时, 顶角可作为已知数据由实验室给出。

3. 测量氢光管谱线的最小偏向角 δ

(1) 观察识别谱线。关闭汞灯, 开启氢灯电源, 轻轻移动分光计底座使平行光管正对氢灯管, 能够从望远镜中看到清晰明亮的狭缝像。按图 12 所示位置放好三棱镜, 先直接裸眼观察找到透过三棱镜的彩色光线出射的方位, 然后将望远镜转到眼睛所观察的位置, 就能从望远镜里看到不同颜色的谱线, 如图 9 所示。转动望远镜仔细观察, 应可看到九条谱线。对照光谱图, 识别各条谱线。

(2) 确定最小偏向角。稍微转动三棱镜 (**注意: 是通过转动载物台的支撑柱来带动三棱镜转动, 而非直接转动载物台或者三棱镜**), 同时从望远镜里观察谱线移动的方向, 判断谱线的偏向角的大小改变与三棱镜转向之间的对应关系; 然后, 超使得谱线偏向角减小的方向继续缓慢转动三棱镜, 同时转动望远镜跟踪某条选定的谱线。当三棱镜转到某个位置时, 该谱线不再移动; 继续沿原方向转动三棱镜时, 该谱线反而向相反方向移动, 即偏向角反而变大, 这个转折位置就是最小偏向角的位置。此时, 转动望远镜将“十”形刻划线的竖线对准此条谱线。仔细检查, 确认望远镜已处在最小偏向角位置。然后锁定望远镜止动螺钉, 利用望远镜转动微调螺钉将“十”形刻划线的**竖线准确对准到该条谱线的中心** (分别参见图 1: 13、18), 读出此时出射光的角方位 (左右游标对应位置都要读数), 从而可与入射光方位相减得到该谱线的最小偏向角 δ 。之后, 继续转动三棱镜和望远镜, 测量其它谱线的最小偏向角。**注意: 测量时每条谱线都要调为最小偏向角位置; 需要大角度转动望远镜时, 一定要松开望远镜止动螺钉。**

必做内容: 实验要求测出表 1 所列的全部七条谱线中的至少三条较为明亮谱线对应的最小偏向角, 然后利用公式 (3) 计算出三棱镜对不同波长光线的折射率, 并列表比较三棱镜玻璃材料的色散特性。

选做内容: 表 1 所列谱线中的其余谱线进行测量。计算出折射率后利用画出三棱镜玻璃材料的色散关系曲线, 并利用多项式拟合 $n \sim \lambda$ 关系表达式。从色散曲线上读出或利用拟合得到的色散关系式计算出 C 线、D 线和 F 线的折射率, 给出三棱镜玻璃材料的平均色散和色散本领 V 。

预习本实验时, 请同时学习课程资料 III-3 光学实验预备知识。

五、数据记录表格（参考）

1. 三棱镜顶角测量数据记录

测量序号	1		2		3	
	左游标	右游标	左游标	右游标	左游标	右游标
第一位置 T_1						
第二位置 T_2						
$\phi_I = T_1 - T_2 ^{①}$						
$\phi = \frac{1}{2}(\phi_I + \phi_{II})$						

① 在计算 ϕ 时，若望远镜由位置 T_1 到 T_2 经过了刻度盘零点，则应按下式计算： $\phi_I = 360^\circ - |T_1 - T_2|$ 。

2. 最小偏向角测三棱镜折射率数据记录

实验台号_____，三棱镜编号_____， $A =$ _____， $\Delta_{\text{仪}} =$ _____

入射光方位 $\phi_{\text{左}0} =$ _____， $\phi_{\text{右}0} =$ _____

氢谱线 波长(nm)	$\phi_{\text{左}}$	$\phi_{\text{右}}$	$\delta_1 = \phi_{\text{左}} - \phi_{\text{左}0}$	$\delta_2 = \phi_{\text{右}} - \phi_{\text{右}0}$	$\delta = \frac{\delta_1 + \delta_2}{2}$	$\frac{A + \delta}{2}$	$n = \sin \frac{A + \delta}{2} / \sin \frac{A}{2}$
447.1							
471.3							
492.2							
501.6							
587.6							
667.8							
706.6							

表中脚标左、右分别表示左、右游标读数

六、思考题

1. 当转动载物台 180° 反复调节使望远镜光轴垂直于分光计主轴时，载物台是否也同时调好到垂直于主轴了？为什么？
2. 根据本实验的原理怎样测量光波波长？
3. 试画出光路图进行分析，为什么望远镜光轴与平面镜法线平行时，在目镜内应看到“+”形反射像的中心与“十”形刻划线的上方交点相重合？

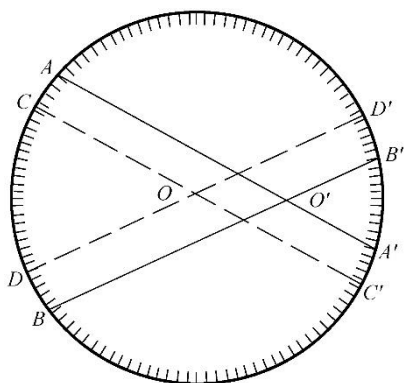
七、附录 圆刻度盘的偏心差

用圆（刻）度盘测量角度时，为了消除圆度盘的偏心差，必须由相差为 180° 的两个游标分别读数。圆度盘是绕仪器主轴转动的，由于仪器制造时不容易做到圆度盘中心准确无误地与主轴重合，这就不可避免地会产生偏心差。圆度盘上的刻度均匀地刻在圆周上，当圆度盘中心与主轴重合时，由相差 180° 的两个游标读出的转角刻度数值相等。而当圆度盘偏心时，由两个游标读出的转角刻度数值就不相等了；所以如果只用一个游标读数就会出现系统误差。如附图 1 所示，用弧 AB 的刻度读数，则偏大，用弧 A'B' 的刻度读数

又偏小，由平面几何很容易证明

$$\frac{(AB + A'B')}{2} = CD = C'D'$$

亦即由两个相差 180° 的游标上读出的转角刻度数值的平均值就是圆度盘真正的转角值。



附图 1 因圆刻度盘中心 O 与主轴 O' 不重合而产生的偏心差