

第四次作业

6. 设 A_1, A_2, A_3 相互独立, 且 $P(A_i) = 2/3, i=1, 2, 3$. 试求 A_1, A_2, A_3 中

(1) 至少出现一个的概率;

(2) 恰好出现一个的概率;

(3) 最多出现一个的概率.

$$(1) P_1 = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{26}{27}$$

$$(2) P_2 = 3 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$$

$$(3) P_3 = 3 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{7}{27}$$

13. 投掷一枚骰子, 问需要投掷多少次, 才能保证至少有一次出现点数为 6 的概率大于 $1/2$?

$$1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n > \frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{5}{6}\right)^n < \frac{1}{2}$$

当 $n \geq 4$ 时, 上式成立, 即投掷 4 次便可以

17. 某血库急需 AB 型血, 要从身体合格的献血者中获得, 根据经验, 每百名身体合格的献血者中只有 2 名是 AB 型血的.

(1) 求在 20 名身体合格的献血者中至少有一人是 AB 型血的概率;

(2) 若要以 95% 的把握至少能获得一份 AB 型血, 需要多少位身体合格的献血者?

$$(1) P(A) = 1 - \left(\frac{98}{100}\right)^{20} = 0.3324$$

$$(2) 1 - \left(\frac{98}{100}\right)^n \geq 0.95$$

$$\left(\frac{98}{100}\right)^n \leq 0.05$$

当 $n \geq 149$ 时, 上式成立, 即需要 149 位

19. 甲、乙两选手进行乒乓球单打比赛, 已知在每局中甲胜的概率为 0.6, 乙胜的概率为 0.4. 比赛可采用三局二胜制或五局三胜制, 问哪一种比赛制度对甲更有利?

$$P(A) = 0.6^2 + 2 \times 0.6 \times 0.4 = 0.648$$

不一定有三盘, 不可 $2 \times 0.6^2 \times 0.4$
甲 乙

$$P(B) = 0.6^3 + 3 \times 0.6^2 \times 0.4 + 3 \times 0.6 \times 0.4^2 = 0.682$$

$P(B) > P(A)$, 即五局三胜制对甲更有利

4. 有3个盒子,第一个盒子装有1个白球、4个黑球;第二个盒子装有2个白球、3个黑球;第三个盒子装有3个白球、2个黑球.现任取一个盒子,从中任取3个球.以 X 表示所取到的白球数.

(1) 试求 X 的概率分布列;

(2) 取到的白球数不少于2个的概率是多少?

$$P(X=i) = P(A_1)P(i|A_1) + P(A_2)P(i|A_2) + P(A_3)P(i|A_3), \quad i=0,1,2,3$$

$$P(X=0) = \frac{1}{3} \times \frac{C_4^3}{C_5^3} + \frac{1}{3} \times \frac{C_3^3}{C_5^3} + \frac{1}{3} \times \frac{0}{C_5^3} = \frac{1}{6}$$

$$P(X=1) = \frac{1}{3} \times \frac{C_1^1 C_4^2}{C_5^3} + \frac{1}{3} \times \frac{C_2^1 C_3^2}{C_5^3} + \frac{1}{3} \times \frac{C_3^1 C_2^2}{C_5^3} = \frac{1}{2}$$

$$P(X=2) = \frac{1}{3} \times \frac{0}{C_5^3} + \frac{1}{3} \times \frac{C_2^2 C_3^1}{C_5^3} + \frac{1}{3} \times \frac{C_3^2 C_2^1}{C_5^3} = \frac{1}{10}$$

$$P(X=3) = \frac{1}{3} \times \frac{0}{C_5^3} + \frac{1}{3} \times \frac{0}{C_5^3} + \frac{1}{3} \times \frac{C_3^3}{C_5^3} = \frac{1}{30}$$

X	0	1	2	3
P	$\frac{5}{30}$	$\frac{15}{30}$	$\frac{9}{30}$	$\frac{1}{30}$

8. 设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1/4, & 0 \leq x < 1, \\ 1/3, & 1 \leq x < 3, \\ 1/2, & 3 \leq x < 6, \\ 1, & x \geq 6. \end{cases}$$

试求 X 的概率分布列及 $P(X < 3)$, $P(X \leq 3)$, $P(X > 1)$, $P(X \geq 1)$.

$$\begin{aligned} P(X=1) &= P(1) - P(1-0) \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{12} \end{aligned}$$

X	0	1	3	6
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$

$$P(X < 3) = F(3-0) = \frac{1}{3}$$

$$P(X \leq 3) = F(3) = \frac{1}{2}$$

$$P(X > 1) = 1 - F(1) = \frac{2}{3}$$

$$P(X \geq 1) = 1 - F(1-0) = \frac{3}{4}$$

11. 从 1, 2, 3, 4, 5 五个数中任取三个, 按大小排列记为 $x_1 < x_2 < x_3$, 令 $X = x_2$, 试求:

(1) X 的分布函数;

(2) $P(X < 2)$ 及 $P(X > 4)$.

$$X = 2, X = 3, X = 4$$

$$P(X=2) = \frac{C_1^1 C_1^1 C_3^1}{C_5^3} = \frac{3}{10}$$

$$P(X=3) = \frac{C_2^1 C_1^1 C_2^1}{C_5^3} = \frac{4}{10}$$

$$P(X=4) = \frac{C_3^1 C_1^1 C_1^1}{C_5^3} = \frac{3}{10}$$

$$\Rightarrow F(x) = \begin{cases} 0 & , x < 2 \\ \frac{3}{10} & , 2 \leq x < 3 \\ \frac{7}{10} & , 3 \leq x < 4 \\ 1 & , 4 \leq x \end{cases}$$

$$P(X < 2) = 0, P(X > 4) = 0$$