4.4. 已知: $q=50kg/s$, $v=1.5m/s$

求: P, 功率是否等于动能

解: 根据动量定理:

$$I=Ft$$
$$F=\frac{I}{t}$$
$$F=\frac{qt(v-0)}{t}$$
$$F=qv$$

$$P=Fv$$
$$P=qv\cdot v$$
$$P=qv^2$$
$$P=50\times1.5^2$$
$$P=112.5(W)$$

$$E_k=\frac{1}{2}mv^2$$
单位时间
$$E_k=\frac{1}{2}qv^2$$
$$E_k=\frac{1}{2}\times50\times1.5^2$$
$$E_k=56.25(J)$$

$P\neq E_k$

因为有部分能量轉換为热量.

4.6. 已知: 木块质量M, 子弹质量m, 子弹速度v, 距离s', s_1

求: $\Delta E_{k木}$, $\Delta E_{k子}$, $W_子$, $W_木$, 证明子弹和木块的总机械能的增量等于一对摩擦力沿相对位移s'做的功.

解: (1) 根据动量守恒

$$mv=(M+m)V$$
$$V=\frac{mv}{M+m}$$

$\Delta E_{k子}=W_子$

根据动能定理:

$$\Delta E_{k子}=-f_子(s_1+s')=\frac{1}{2}mV^2-\frac{1}{2}mv^2$$
$$=\frac{1}{2}m\left(\frac{mv}{M+m}\right)^2-\frac{1}{2}mv^2$$
$$=\frac{1}{2}mv^2\left[\left(\frac{m}{M+m}\right)^2-1\right]\cdots\cdots①$$

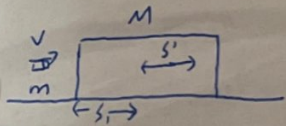
$\Delta E_{k木}=W_木$

根据动能定理:

$$\Delta E_{k木}=f_木s_1=\frac{1}{2}MV^2$$
$$=\frac{1}{2}M\left(\frac{mv}{M+m}\right)^2\cdots\cdots②$$

(2) 总机械能增量 $=\Delta E_{k子}+\Delta E_{k木}$

$$\left[-f_子(s_1+s')\right]+f_木s_1=\left(\frac{1}{2}mV^2-\frac{1}{2}mv^2\right)+\left(\frac{1}{2}MV^2\right)$$



$f_子=f_木$

$$f_子s'=\left(\frac{1}{2}mV^2+\frac{1}{2}MV^2\right)-\frac{1}{2}mv^2$$

因此总机械能的增量等于一对摩擦力沿位移s'做的功

4.8. 已知: 弹力度系数为k, 平衡位置为竖直y轴的原点, 相应位移为弹性势能和重力势能的零点

证明: 当物体的坐标位置为y时, 弹性势能和重力势能之和为$\frac{1}{2}ky^2$.

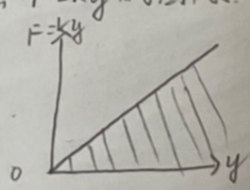
证: 当小球静止时:

$$F=F_弹=G$$
$$=ky_0=mg$$

当小球在竖直方向经过y下运动时:

$$F=F_弹-mg$$
$$=k(y+y_0)-mg$$
$$=ky+mg-mg$$
$$=ky$$

畫出 $F=ky$ 的图像.



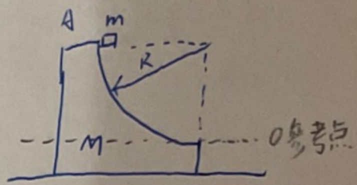
弹性勢能和重力勢能之和为 $F=ky$ 作的功

即图中阴影部分:

$$E=W=\frac{1}{2}ky^2$$

4.13 设物体质量为 m，圆弧槽质量为 M，半径为 R，张角为 $\frac{\pi}{2}$

求：$V_{物}$，$V_{槽}$，A，N.



解：根据机械能守恒，刚离开槽时有

(1) $$mgR-0=\frac{1}{2}mV_{物}^2+\frac{1}{2}MV_{槽}^2 \quad \cdots\cdots ①$$

根据动量守恒

$$mV_{物}=MV_{槽} \quad \cdots ②$$

联立①.②得：

$$\begin{cases} mgR=\frac{1}{2}mV_{物}^2+\frac{1}{2}MV_{槽}^2 \\ V_{物}=\frac{MV_{槽}}{m} \end{cases} \Rightarrow$$

$$mgR=\frac{1}{2}m\left(\frac{MV_{槽}}{m}\right)^2+\frac{1}{2}MV_{槽}^2$$

$$mgR=\frac{M^2V_{槽}^2}{2m}+\frac{1}{2}MV_{槽}^2$$

$$mgR=V_{槽}^2\left(\frac{M^2}{2m}+\frac{1}{2}M\right)$$

$$mgR=V_{槽}^2\left(\frac{M^2+Mm}{2m}\right)$$

$$V_{槽}^2=mgR\left[\frac{2m}{M(M+m)}\right]$$

$$V_{槽}=m\sqrt{\frac{2gR}{M(M+m)}}$$

$$V_{物}=\frac{MV_{槽}}{m}$$

$$=\frac{M}{m}m\sqrt{\frac{2gR}{M(M+m)}}$$

$$=\sqrt{\frac{2MgR}{M+m}}$$

(2) $$A=\frac{1}{2}MV_{槽}^2$$

$$=\frac{1}{2}M\cdot m^2\frac{2gR}{M(M+m)}$$

$$=\frac{m^2gR}{M+m}$$

(3) $$V'=V_{物}+V_{槽}$$

$$=\sqrt{\frac{2MgR}{M+m}}+m\sqrt{\frac{2gR}{M(M+m)}}$$

由牛顿第二定律.

$$N-mg=\frac{mv'^2}{R}$$

$$N=\frac{mv'^2}{R}+mg$$

$$N=\left(3+\frac{2m}{M}\right)mg$$

4.17. 已知：太阳质量为 M，行星质量为 m，近日点距离 r_1，远日点距离 r_2.

证明：行星在轨道上运动的总能量 $E=-\frac{GMm}{r_1+r_2}$

证明：设行星在近日点的速度为 v_1，远日点的速度为 v_2.

根据角动量守恒：

$$mr_1v_1=mr_2v_2 \quad \cdots\cdots ①$$

根据机械能守恒：

$$\frac{1}{2}mv_1^2-\frac{GMm}{r_1}=\frac{1}{2}mv_2^2-\frac{GMm}{r_2} \quad \cdots\cdots ②$$

联立①.②

$$\begin{cases}\frac{1}{2}mv_2^2=\frac{1}{2}mv_1^2-\frac{GMm}{r_1}+\frac{GMm}{r_2}\\ v_1=\frac{r_2v_2}{r_1}\end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2}mv_2^2=\frac{1}{2}m\left(\frac{r_2v_2}{r_1}\right)^2-\frac{GMm}{r_1}+\frac{GMm}{r_2}$$

$$=\frac{GMm}{r_2}\frac{r_1}{(r_1+r_2)}$$

行星运动总能量：

$$E=\frac{1}{2}mv_2^2-\frac{GMm}{r_2}=-\frac{GMm}{r_2}\left(1-\frac{r_1}{r_1+r_2}\right)=-\frac{GMm}{r_2}\left(\frac{r_2}{r_1+r_2}\right)=-\frac{GMm}{r_1+r_2}$$

4.18、已知质量 m 为 500kg，高度为 1400km，36000km，

求 ΔE_1，ΔE_2，Δv_1，Δv_2

解：在停泊轨道上的总能量：

$$E_a=-\frac{GMm}{2r_1}$$

在霍曼轨道上的总能量：

$$E_b=-\frac{GMm}{r_1+r_2}$$

在同步卫星上的总能量：

$$E_c=-\frac{GMm}{2r_2}$$

$r_1=1400+6400=7800\text{km}$

$r_2=36000+6400=42300\text{km}$

$$\Delta E_1=E_b-E_a$$

$$=-\frac{GMm}{r_1+r_2}-\left(-\frac{GMm}{2r_1}\right)$$

$$=-GMm\left(\frac{1}{r_1+r_2}-\frac{1}{2r_1}\right)$$

$$=-6.67\times10^{-11}\times5.98\times10^{24}\times500\times\left(\frac{1}{7800\times10^3+42300\times10^3}-\frac{1}{2\times7800\times10^3}\right)$$

$$=8.8\times10^9(J)$$

$$\Delta E_2=E_c-E_b$$

$$=-\frac{GMm}{r_1+r_2}-\left(-\frac{GMm}{2r_1}\right)$$

$$=1.62\times10^9(J)$$

在停泊轨道上的速率：

$$V_a = \sqrt{\frac{GM}{r_1}} = \sqrt{\frac{6.61\times10^{-11}\times5.98\times10^{24}}{7800\times10^3}} = 7150(m/s) = 7.15(km/s)$$

在霍曼轨道近地点速率.

$$E_b = \frac{1}{2}mv_b^2 - \frac{GMm}{r_1}$$

$$-\frac{GMm}{r_1+r_2} = \frac{1}{2}mv_b^2 - \frac{GMm}{r_1}$$

$$v_b^2 = \left(-\frac{GMm}{r_1+r_2} + \frac{GMm}{r_1}\right)\times\frac{2}{m}$$

$$v_b^2 = 9.29(km/s)$$

在霍曼轨道远地点速率：

$$v_b r_1 = v_c r_2$$

$$v_c = \frac{v_b r_1}{r_2}$$

$$v_c = \frac{9.29\times7800}{42300} = 1.71(km/s)$$

在同步轨道上的速率：

$$Vd = \sqrt{\frac{GM}{r_2}} = \sqrt{\frac{6.67\times10^{-11}\times5.98\times10^{24}}{42300\times10^3}} = 3070(m/s) = 3.07(km/s)$$

$$\Delta V_1 = V_b - V_a = 9.29 - 7.15 = 2.14(km/s)$$

$$\Delta V_2 = V_d - V_c = 3.07 - 1.71 = 1.36(km/s)$$

4.24 证明：把两体问题化为单体问题後，一质点在另一质点参考系中的动能等于两质点质点的内动能

证明：约化动能为

$$E_{k\cdot r}=\frac{1}{2}\mu v_{21}^2=\frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}(v_2-v_1)^2$$

两点内动能为

$$E_{kin}=\frac{1}{2}m_1v_1'^2+\frac{1}{2}m_2v_2'^2=\frac{1}{2}m_1(v_1-v_c)^2+\frac{1}{2}m_2(v_2-v_c)^2 \cdots\cdots ①$$

$$v_c=\frac{m_1v_1+m_2v_2}{m_1+m_2}$$

将 v_c 代入①

$$E_{kin}=\frac{1}{2}m_1\frac{m_2^2(v_2-v_1)^2}{(m_1+m_2)^2}+\frac{1}{2}m_2\frac{m_1^2(v_2-v_1)^2}{(m_1+m_2)^2}=\frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}(v_2-v_1)^2$$ 即 $E_{k\cdot r}$.

4.25 設：质量为 M, m，劲度系数为 k，速度为 v_0.

求：x_{max}.

解：根据机械能守恒

$$\frac{1}{2}\mu v_{mM}^2=\frac{1}{2}kx_{max}^2$$

因为 $\mu=\frac{mM}{m+M}$，$v_{mM}=v_0$

$$\frac{1}{2}\frac{mM}{m+M}v_0^2=\frac{1}{2}kx_{max}^2$$

$$x_{max}^2=\frac{mMv_0^2}{(m+M)k}$$

$$x_{max}=\sqrt{\frac{mM}{(m+M)k}}\,v_0$$

4.26. 已知质子质量为m_p，氦核质量$M=4m_p$，速率为v_0

求：r_{min}

解：两电荷 e(质子) 和 2e(氦核) 相距 r 时的势能：

$$E_p = \frac{k2e\cdot e}{r} = \frac{2ke^2}{r}$$

根据动量定理

$$-m_p v_0 + M v_0 = m_p v + M V$$

$$V = \frac{-m(v_0+v)+Mv_0}{M}$$

根据能量守恒：

$$\frac{2ke^2}{r} + \frac{1}{2}m_p v^2 + \frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}m_p v_0^2 + \frac{1}{2}Mv_0^2$$

把 V 代入上式

$$E_k = \frac{1}{2}m_p v^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{M}[-m_p(v_0+v)+Mv_0]^2$$

$$E_{min} = \frac{dE_k}{dv} = 0.$$

$$v = \frac{M-m}{M+m_p}v_0$$

$$V = \frac{M-m}{M+m_p}v_0 \text{ 代入}$$

$$v = V = \frac{4m_p - m_p}{4m_p+m_p}v_0 = \frac{3}{5}v_0$$

$$r_{min} = \frac{5}{4}\frac{ke^2}{m_p v_0^2}$$