第6章

拉普拉斯变换

拉普拉斯 Pierre Simon Laplace (1749 — 1827)

- 法国数学家，天文学家
- 最有代表性的专著有《天体力学》、《宇宙体系论》和《概率分析理论》
- 在数学和物理学方面的重要贡献：拉普拉斯变换和拉普拉斯方程
- 英国电气工程师赫维赛德（ Oliver Heaviside ）（ 1850 — 1925 ）提出的解决电路瞬态计算的运算微积分（运算术），行之有效而缺乏严格的证明。
- 拉普拉斯提出的积分为之提供了严密的基础。

问题：

引出了拉普拉斯变换

- 为什么要引入拉普拉斯变换？
  - 信号分析中遇到了原有方法无法解决的问题
  - 原有分析方法有什么缺陷
  - 新的方法能更高效地解决问题
- 傅里叶变换的局限
  - 狄利克雷条件→$f(t)$在$(-\infty, +\infty)$区间绝对可积
  - 阶跃函数、三角函数等不满足绝对可积的条件，经典意义上的傅立叶变换不存在
  - 引入奇异函数后，使得傅立叶变换能够扩展到一些非绝对可积的函数(比方说$\cos(t)$)
  - 傅立叶变换中包含奇异函数，使得运算不方便

拉普拉斯变换的优点：

- 求解微分方程时，可自动地将初始条件包含进去；
- 可把微分、积分的运算转化为代数运算；
- 对指数函数、某些超越函数、有不连续点的函数处理很简便；
- 可引入系统函数的概念，通过分析零极点，可以直观地分析系统的性能。

本章主要内容

- 拉普拉斯变换的概念和性质
- 逆变换
- 用拉普拉斯变换求解线性常系数微分方程和线性时不变电路
- 系统函数
- 系统频率响应特性

- 傅立叶变换中存在的主要问题：
  - **$f(t)$在$(-\infty, +\infty)$区间绝对可积的问题**

$$F(\omega)=\mathscr{F}\left[f(t)\right]=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t$$

$f(t)$ 发散

$\Downarrow$

衰减因子 $\mathrm{e}^{-\sigma t}$ $\quad\sigma>0$

$\Downarrow$

$f(t)\mathrm{e}^{-\sigma t}$ $\Rightarrow$ **绝对可积**

双边拉普拉斯变换及其收敛域

对于函数 $f(t)$，给它乘以一个衰减因子 $e^{-\sigma t}$，若能使 $f(t)e^{-\sigma t}$ 绝对可积，则存在傅立叶变换

$$F_b(\omega)=\mathcal{F}\left[f(t)e^{-\sigma t}\right]=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-\sigma t}e^{-j\omega t}\mathrm{d}t$$

令 $\sigma+j\omega=s$，有

$$F_b(s)=F_b(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-st}\mathrm{d}t$$

双边拉普拉斯正变换

$$F_b(s) = F_b(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

由傅立叶逆变换 $\mathcal{F}^{-1}\left[F_b(\omega)\right] = ?$

$$\mathcal{F}^{-1}\left[F_b(\omega)\right] = f(t)\mathrm{e}^{-\sigma t} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_b(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_b(\omega)\mathrm{e}^{\sigma t}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega$$

令$s=\sigma+\mathrm{j}\omega \rightarrow \mathrm{j}d\omega=ds$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi\mathrm{j}}\int_{\sigma-\mathrm{j}\infty}^{\sigma+\mathrm{j}\infty} F_b(s)\mathrm{e}^{st}\mathrm{d}s$$

双边拉普拉斯逆变换

双边拉普拉斯变换定义：

- 正变换： $F_b(s)=\mathscr{L}_b\left[f(t)\right]=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$
- 逆变换： $f(t)=\mathscr{L}_b^{-1}\left[F_b(s)\right]=\dfrac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}F_b(s)\mathrm{e}^{st}\mathrm{d}s$

双边拉普拉斯变换是把时域信号变换到复频域，$s=\sigma+j\omega$为复频率， s 取值的范围称为s 平面。

Laplace Transform

双边拉普拉斯变换的收敛域

首先，衰减因子 $e^{-\sigma t}$ 并不总是起衰减作用。

- 当$\sigma>0$ 时，它在 $t>0$ 区间起衰减作用，而在$t<0$ 区间起发散作用；
- 当$\sigma<0$ 时，它在 $t<0$ 区间起衰减作用，而在$t>0$区间起发散作用。

因此，双边拉普拉斯变换依然存在积分收敛问题。

把 $f(t)$ 分成两个区间讨论积分收敛问题，即

$$f(t)=\begin{cases} f_1(t) & t\geq 0 \\ f_2(t) & t<0 \end{cases}$$

$f(t)$ 的双边拉普拉斯变换可表示为

$$F_b(s)=\int_{-\infty}^{0} f_2(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t+\int_{0}^{\infty} f_1(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

称前项积分为 $f(t)$ 的左边拉氏变换，
称后项积分为 $f(t)$ 的右边拉氏变换。

$$F_b(s)=\int_{-\infty}^{0} f_2(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t+\int_{0}^{\infty} f_1(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

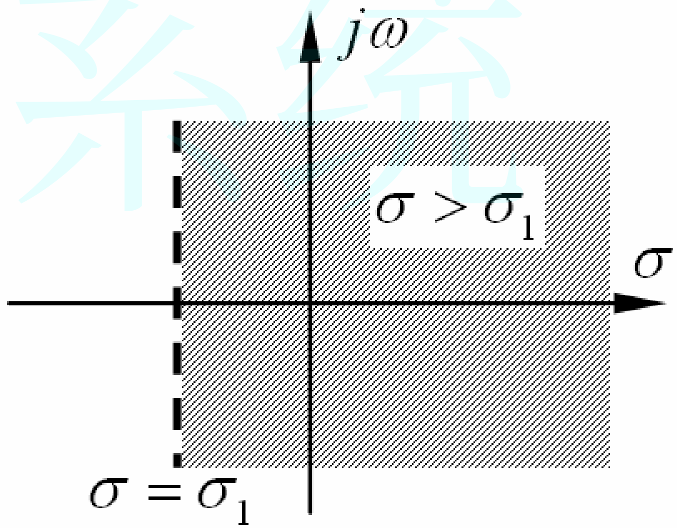
在 $t>0$ 区间(右边拉普拉斯变换)

若$t\rightarrow+\infty$时，$f_1(t)$不是以高于指数阶的速度发散

必然存在$\sigma>\sigma_1$，使得函数 $f(t)\mathrm{e}^{-\sigma t}$ 在$(0,+\infty)$区间绝对可积。

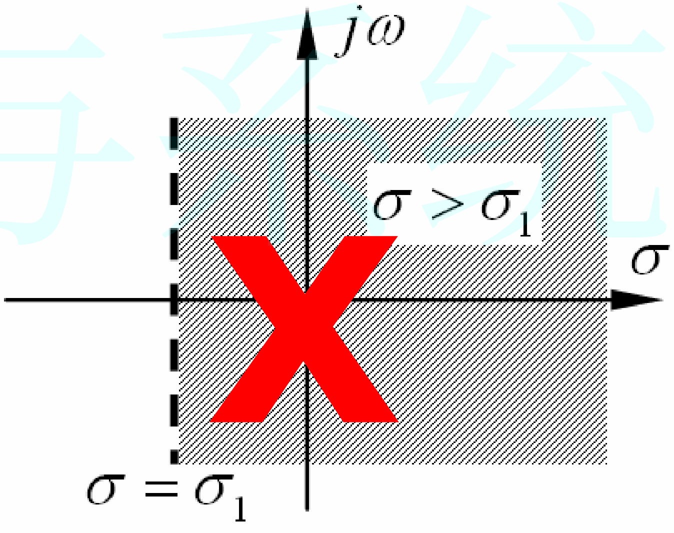
第二项 $\int_{0}^{\infty} f_1(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$ 收敛，$f(t)$的右边拉氏变换存在。

称$\sigma>\sigma_1$是 $f(t)$的右边拉氏变换的**收敛域**。



例如 $f_1(t)=\mathrm{e}^{t^2}$

不存在这样的σ_1，满足当$\sigma>\sigma_1$时，使 $\int_0^{\infty} f_1(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$ 收敛，所以$f_1(t)$的右边拉氏变换不存在。



$$F_b(s)=\int_{-\infty}^{0} f_2(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t+\int_{0}^{\infty} f_1(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

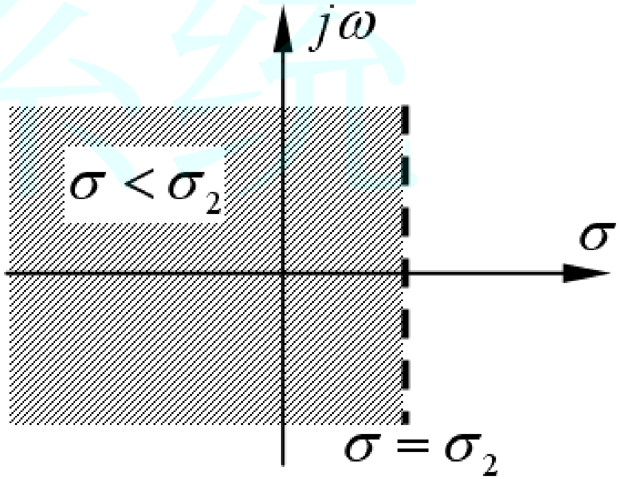
同样，对于$t<0$的左边拉氏变换(第一项)

若$t\to-\infty$时，$f_2(t)$不是以高于指数阶的速度发散

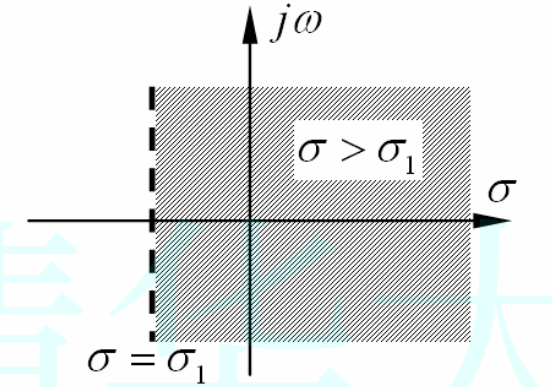
必然存在$\sigma<\sigma_2$，使得函数 $f(t)\mathrm{e}^{-\sigma t}$ 在$(-\infty, 0)$区间绝对可积。

第一项 $\int_{0}^{\infty} f_2(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$ 收敛，$f(t)$的左边拉氏变换存在。

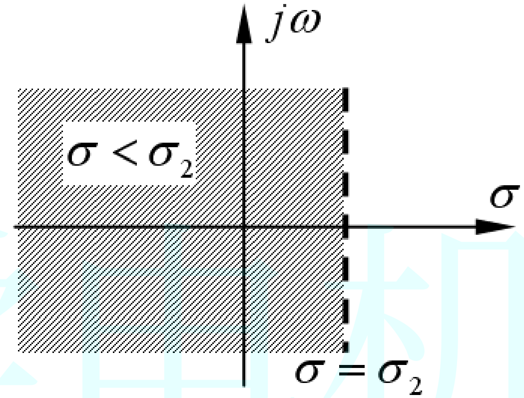
称$\sigma<\sigma_2$是 $f(t)$的左边拉氏变换的**收敛域**。



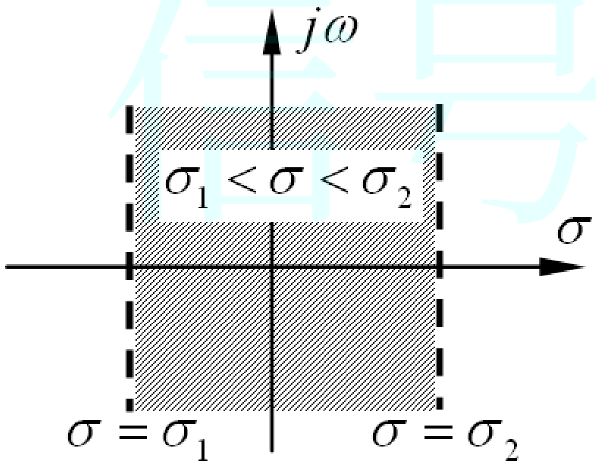
很显然，要使f(t)的双边拉氏变换存在，必须其左边拉氏变化和右边拉氏变换都存在。



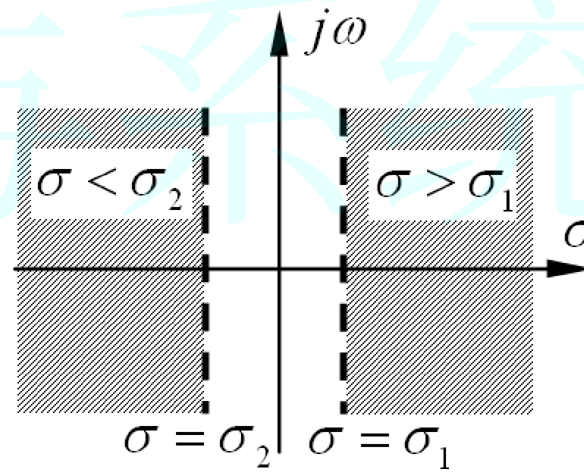
右边



左边

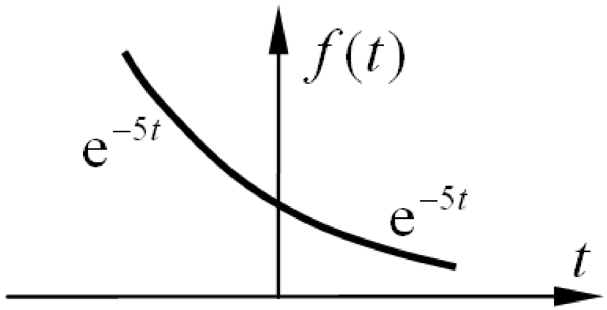


存在



不存在

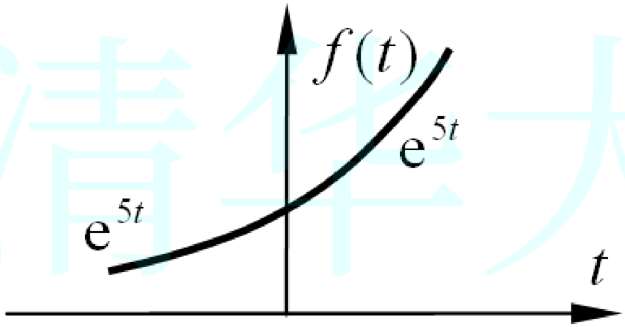
例　判断如图所示各信号的双边拉氏变换是否存在，以及存在时的收敛域。



右边拉普拉斯变换的收敛域： $\sigma > -5$

左边拉普拉斯变换的收敛域： $\sigma < -5$

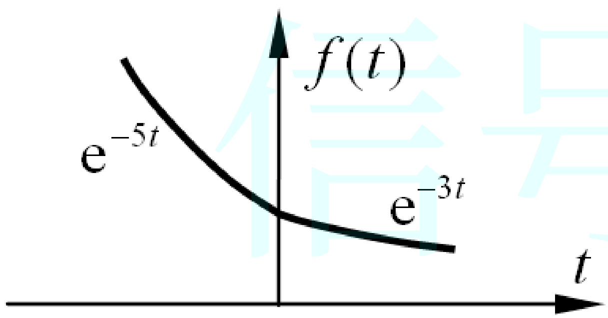
无公共收敛域，双边拉普拉斯变换不存在



右边拉普拉斯变换的收敛域： $\sigma > 5$

左边拉普拉斯变换的收敛域： $\sigma < 5$

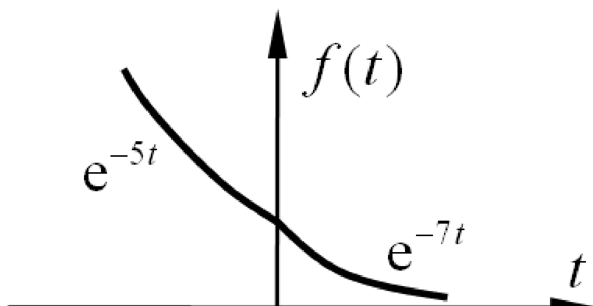
无公共收敛域，双边拉普拉斯变换不存在



右边拉普拉斯变换的收敛域： $\sigma > -3$

左边拉普拉斯变换的收敛域： $\sigma < -5$

无公共收敛域，双边拉普拉斯变换不存在



右边拉普拉斯变换的收敛域： $\sigma > -7$

左边拉普拉斯变换的收敛域： $\sigma < -5$

双边拉普拉斯变换存在，收敛域 $-7 < \sigma < -5$

拉普拉斯变换及其收敛域

实际中大量遇到的是因果信号，即信号$f(t)$只出现在$t \geq 0$的时间区间，可表示为

$$f(t) = f(t)u(t)$$

将此式代入双边拉普拉斯变换，得到单边拉普拉斯变换，简称为拉普拉斯变换。拉普拉斯正变换：

$$F(s) = \mathcal{L}\left[f(t)\right] = \int_{0_-}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

拉普拉斯逆变换：

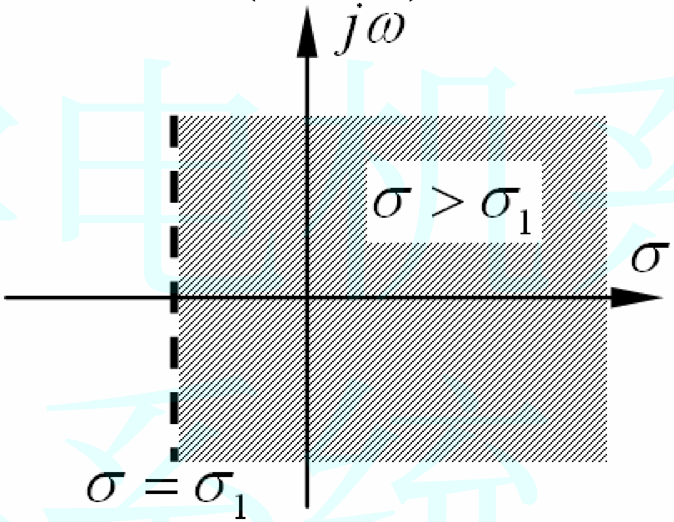
$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[F(s)\right] = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)\mathrm{e}^{st}\mathrm{d}s$$

这实际是右边拉普拉斯变换

- 收敛域

若$t\to+\infty$时，$f_1(t)$不是以高于指数阶的速度发散

必然存在$\sigma>\sigma_1$，使得函数 $f(t)e^{-\sigma t}$在$(0,+\infty)$区间绝对可积。



称$\sigma>\sigma_1$是$f(t)$的右边拉氏变换的**收敛域**。

$$F(s)=\mathscr{L}\left[f(t)\right]=\int_{0_-}^{\infty}f(t)e^{-st}dt$$

- 积分下限0_-
  - 变换中包含t=0时刻的状态跳变
- 拉普拉斯变换的实际应用非常广泛，双边拉普拉斯变换的应用则很少。

几种简单函数拉氏变换的收敛域

- (1) 能量有限的时限信号

  —— 收敛域为整个s平面；

- (2) $u(t)$ —— σ> 0 $\lim_{t\to\infty} e^{-\sigma t} = 0$

- (3) t^m —— σ> 0 $\lim_{t\to\infty} t^m \cdot e^{-\sigma t} = 0$

常见信号的拉普拉斯变换

1. 指数函数

指数函数 $f(t)=\mathrm{e}^{-\alpha t}$ 的拉普拉斯变换为

$$F(s)=\mathcal{L}\left[\mathrm{e}^{-\alpha t}\right]=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\alpha t}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=-\left.\frac{\mathrm{e}^{-(s+\alpha)t}}{s+\alpha}\right|_0^{\infty}=\frac{1}{s+\alpha}$$

2. 单位阶跃函数

单位阶跃函数 $f(t)=u(t)$ 的拉普拉斯变换为

$$F(s)=\mathcal{L}[u(t)]=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=-\left.\frac{\mathrm{e}^{-st}}{s}\right|_0^{\infty}=\frac{1}{s}$$

3. t 的整数次幂函数

幂函数 $f(t)=t^n$（n 为整数）的拉普拉斯变换为

$$F(s)=\mathcal{L}\left[t^n\right]=\int_0^{\infty} t^n \mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t$$

用分部积分法得

$$\int_0^{\infty} t^n \mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t=-\frac{t^n}{s}\mathrm{e}^{-st}\Big|_0^{\infty}+\frac{n}{s}\int_0^{\infty} t^{n-1}\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t=\frac{n}{s}\int_0^{\infty} t^{n-1}\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t$$

即 $$\mathcal{L}\left[t^n\right]=\frac{n}{s}\mathcal{L}\left[t^{n-1}\right]$$

由此得 $$\mathcal{L}\left[t^n\right]=\frac{n!}{s^{n+1}}$$

$$\mathcal{L}\left[t\right]=\frac{1}{s^2}$$

4. 冲激函数

冲激函数 $f(t)=\delta(t)$ 的拉普拉斯变换为

$$F(s)=\mathcal{L}\left[\delta(t)\right]=\int_0^{\infty}\delta(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=1$$

如果冲激出现在 $t=t_0$ 时刻 $(t_0>0)$，则有

$$\mathcal{L}\left[\delta(t-t_0)\right]=\int_0^{\infty}\delta(t-t_0)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{-st_0}$$

常用信号的拉氏变换，书表6-1

$u(t)$	$\frac{1}{s}$
$e^{-\alpha t}u(t)$	$\frac{1}{s+a}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$\delta(t)$	1
$\delta(t-t_0)$	e^{-st_0}
$\cos\omega_0 t\cdot u(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega_0^2}$
$\sin\omega_0 t\cdot u(t)$	$\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$

拉普拉斯变换的零极点

一般情况下，一个信号的拉普拉斯变换可以表示为两个s有理多项式之比

$$F(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=K\frac{s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0}=K\frac{\prod_{j=1}^{m}(s-z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)}$$

其中K，a_i和b_i都为实数，m和n为正整数。

- 当$s=z_j$时，有$N(s)=0$，从而$F(s)=0$，故称z_j为$F(s)$的零点。

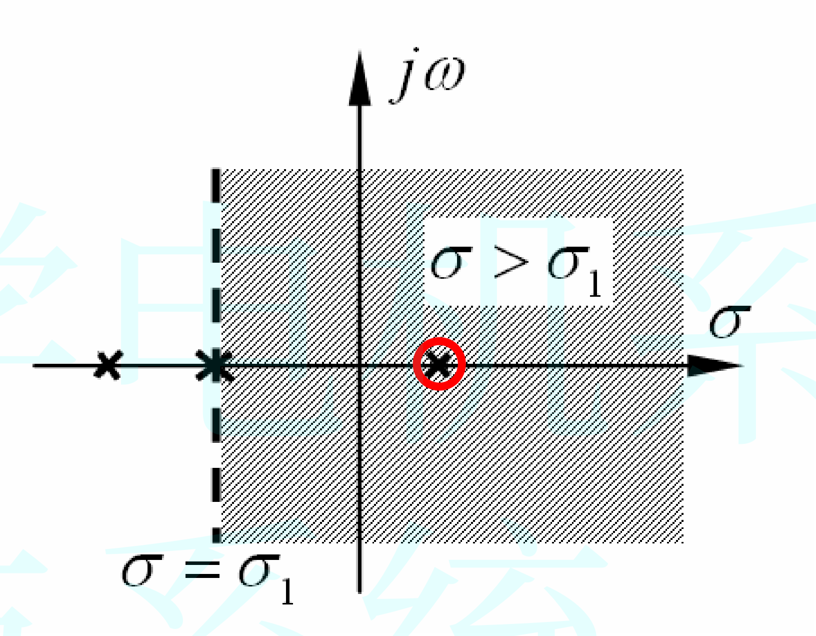
  如果z_j是$N(s)$的k阶重根，则称z_j为$F(s)$的k阶零点。

- 当$s\to p_i$时，有$D(s)\to 0$，$F(s)\to\infty$，故称p_i为$F(s)$的极点。

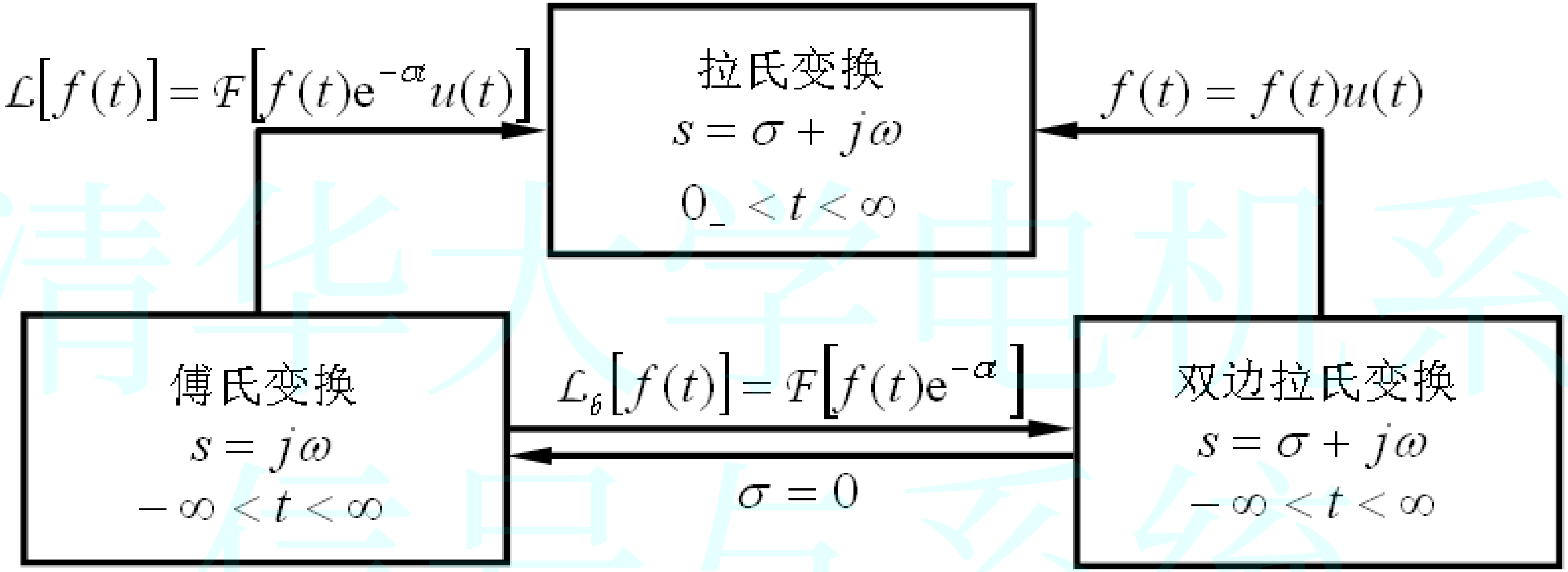
  如果p_i是$D(s)$的k阶重根，则称p_i为$F(s)$的k阶极点。

收敛域与极点的关系

- $F(s)$的收敛域中一定不包含任何极点
- $F(s)$的收敛边界一定是一条平行于虚轴的直线，且通过s平面中最右边的极点



拉普拉斯变换与傅立叶变换的关系



双边拉普拉斯正变换

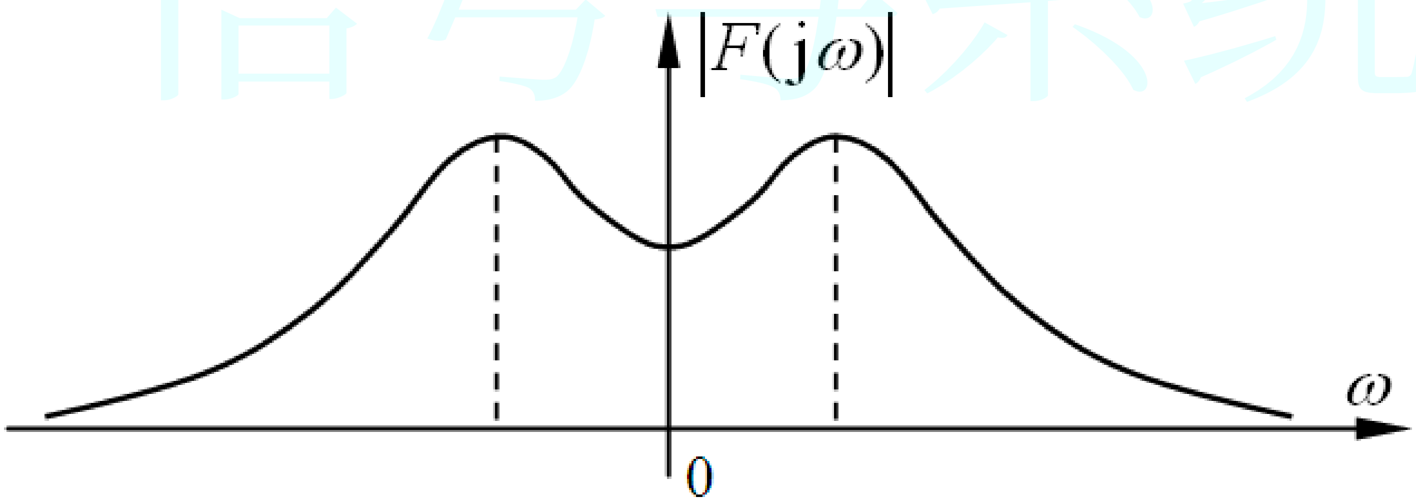
$$F_b(s) = \mathcal{L}_b\left[f(t)\right] = \mathcal{F}\left[f(t)e^{-\sigma t}\right]$$

例：单边指数衰减余弦信号 $f(t)=\mathrm{e}^{-\alpha t}\cos\omega_0 t\cdot u(t)$ 的傅里叶变换。

情况 1：$\alpha<0$，$f(t)$ 单边发散振荡，傅里叶积分不收敛，经典和扩展意义上的傅里叶变换都不存在。

情况 2：$\alpha>0$，$f(t)$ 单边衰减振荡，傅里叶积分收敛，经典意义的傅里叶变换存在

$$F(\omega)=\mathscr{F}\left[f(t)\right]=\frac{\alpha+j\omega}{(\alpha+j\omega)^2+\omega_0^2}$$



$$f(t)=\mathrm{e}^{-\alpha t}\cos\omega_0 t\cdot u(t)\quad(\alpha>0)$$

$$F(\omega)=\mathcal{F}[f(t)]=\frac{\alpha+j\omega}{(\alpha+j\omega)^2+\omega_0^2}$$

$$e^{-\alpha t}u(t)\Longleftrightarrow\frac{1}{\alpha+\mathrm{j}\omega}$$

$$\cos\omega_0 t\Longleftrightarrow\pi[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]$$

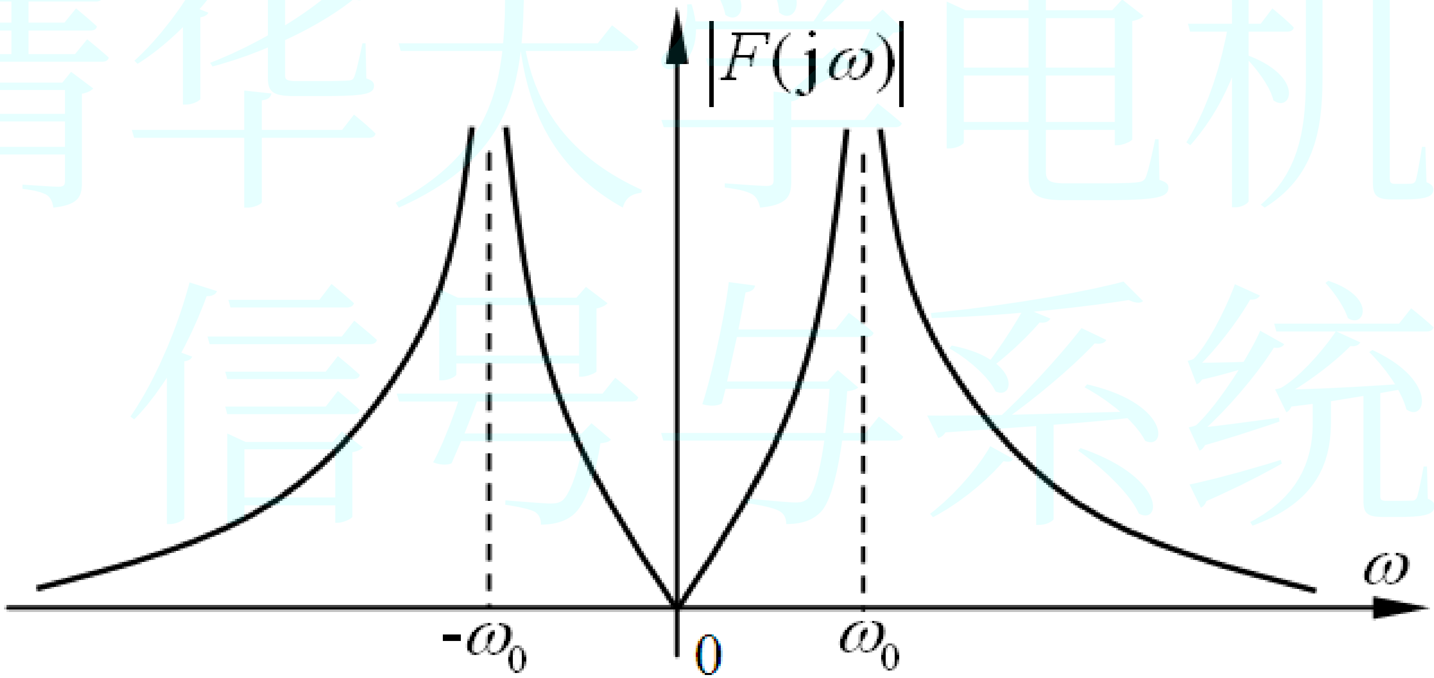
时域相乘，频域卷积

$$F(\omega)=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{\alpha+\mathrm{j}\omega}\right]*\left[\pi[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\alpha+\mathrm{j}(\omega-\omega_0)}+\frac{1}{\alpha+\mathrm{j}(\omega+\omega_0)}\right]$$

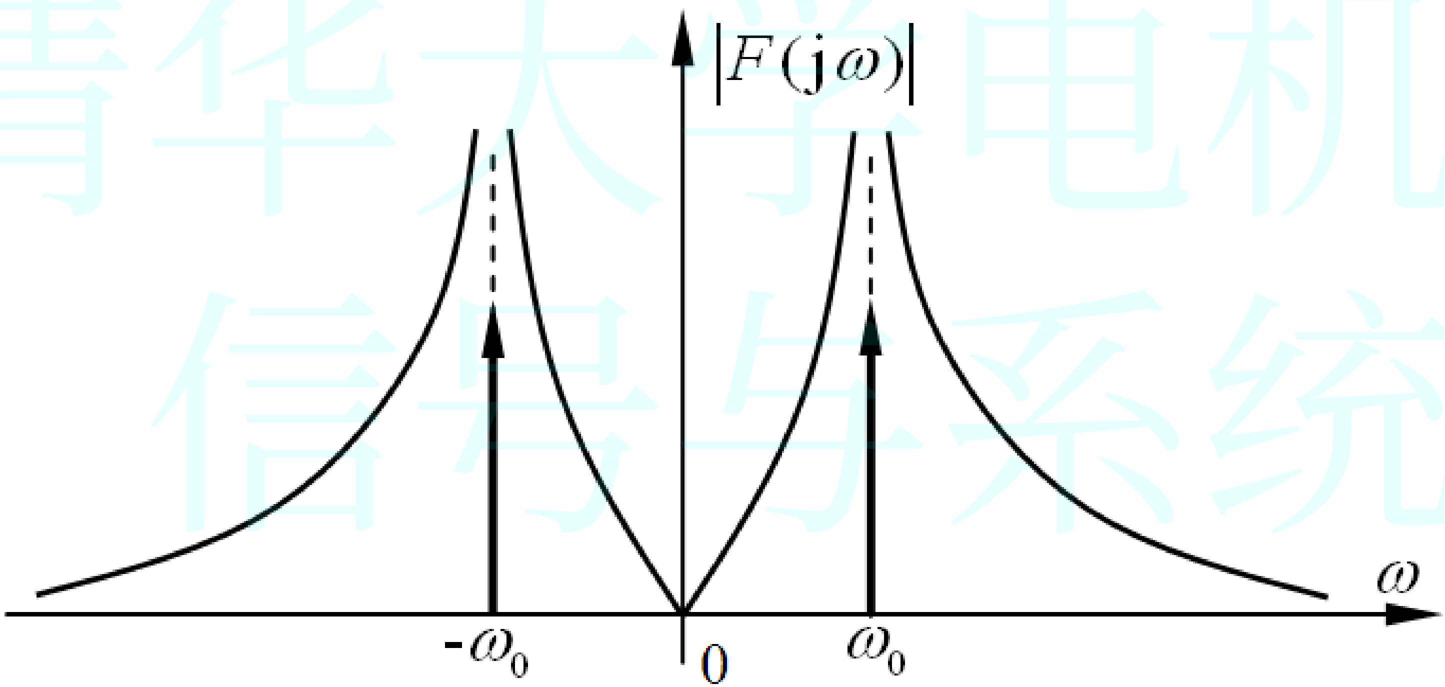
情况 3：$\alpha \to 0$（从0+趋于），$f(t)$趋于无衰减振荡，傅里叶积分收敛，经典意义的傅里叶变换存在

$$F(\omega)=\mathcal{F}\left[f(t)\right]=\left.\frac{\alpha+j\omega}{(\alpha+j\omega)^2+\omega_0^2}\right|_{\alpha\to 0}=\frac{j\omega}{\omega_0{}^2-\omega^2}$$



情况 4：$\alpha=0$，$f(t)$ 无衰减振荡，傅里叶积分不收敛，经典意义的傅里叶变换不存在，扩展意义上的傅里叶变换存在

$$F(\omega)=\mathcal{F}\left[f(t)\right]=\frac{j\omega}{\omega_0^2-\omega^2}+\frac{\pi}{2}\left[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)\right]$$



$$f(t)=\mathrm{e}^{-\alpha t}\cos\omega_0 t\cdot u(t)\ (\alpha>0)$$

例：单边指数衰减余弦信号 $f(t)=\mathrm{e}^{-\alpha t}\cos\omega_0 t\cdot u(t)$（$\alpha>0$）的拉普拉斯变换和傅立叶变换的关系。

$$F(\omega)=\mathcal{F}\left[f(t)\right]=\frac{\alpha+j\omega}{(\alpha+j\omega)^2+\omega_0^2}$$

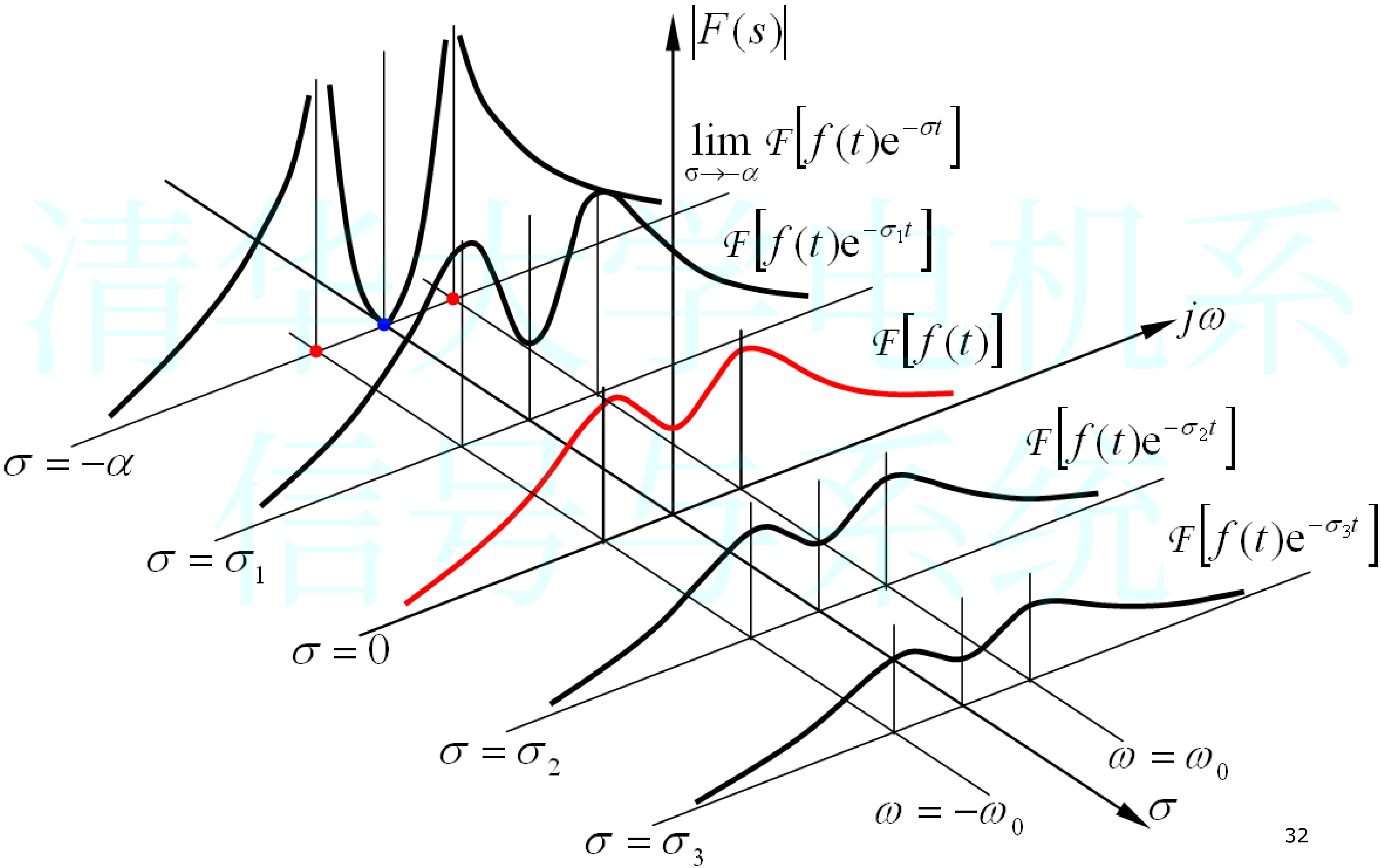
$$e^{-\alpha t}\cos\omega_0 t\cdot u(t)$$

$$F(s)=\mathcal{F}\left[f(t)\mathrm{e}^{-\sigma t}\right]=\frac{(\alpha+\sigma)+j\omega}{\left[(\alpha+\sigma)+j\omega\right]^2+\omega_0^2}$$ 收敛域 $\sigma>-\alpha$

$$F(s)=\mathcal{L}\left[f(t)\right]=\frac{\alpha+s}{(\alpha+s)^2+\omega_0^2}$$ 收敛域 $\sigma>-\alpha$

- 取收敛域内不同的衰减系数σ进行傅立叶变换，所有这些傅立叶变换的集合构成拉普拉斯变换
- 傅立叶变换是一个随角频率ω变化的一维复函数，拉普拉斯变换则是随 $s=\sigma+j\omega$ 变化的二维复函数。

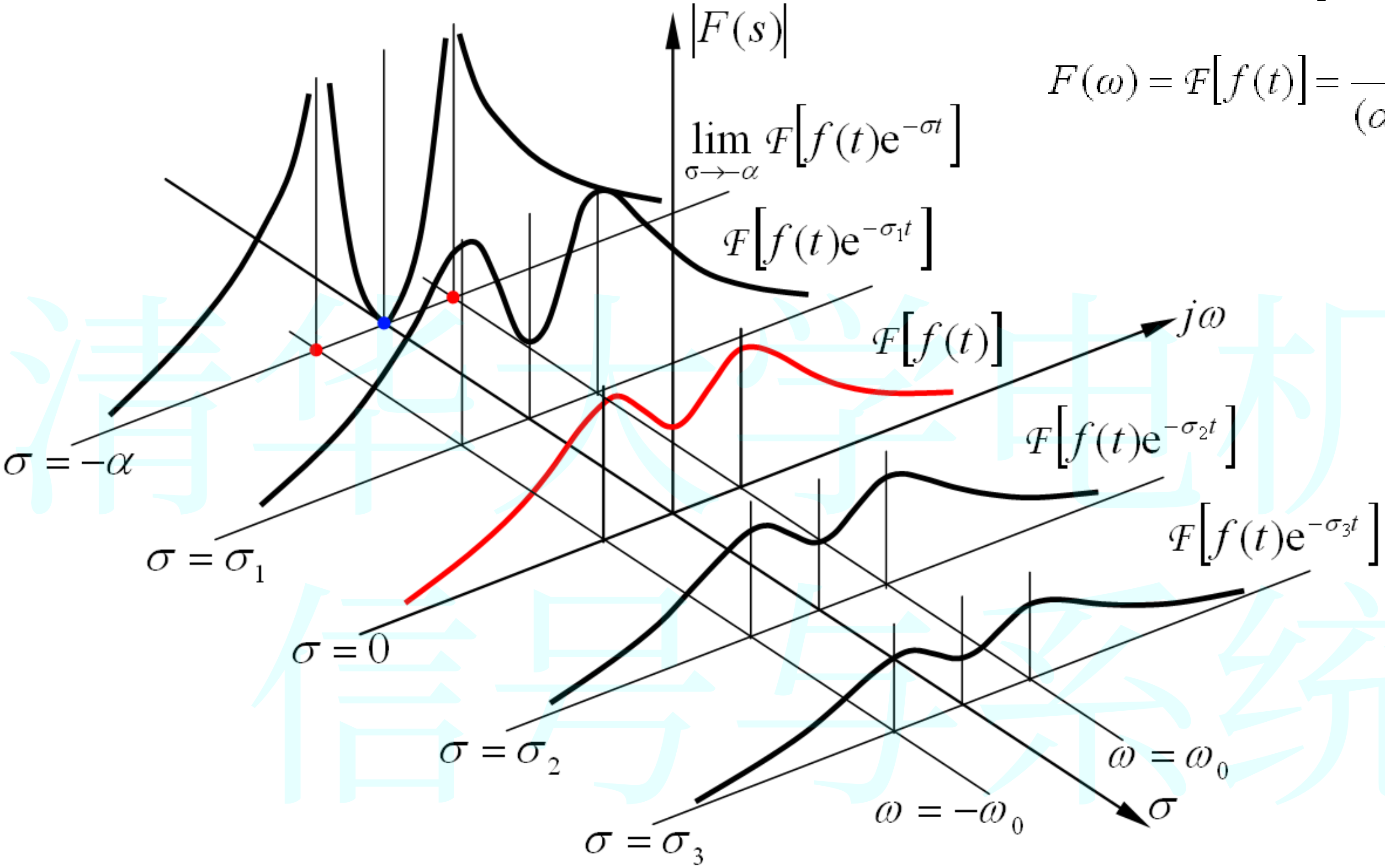
$F(s)$的模$|F(s)|$在s平面上的变化



$F(s)$ 的模 $|F(s)|$ 在 s 平面上的变化

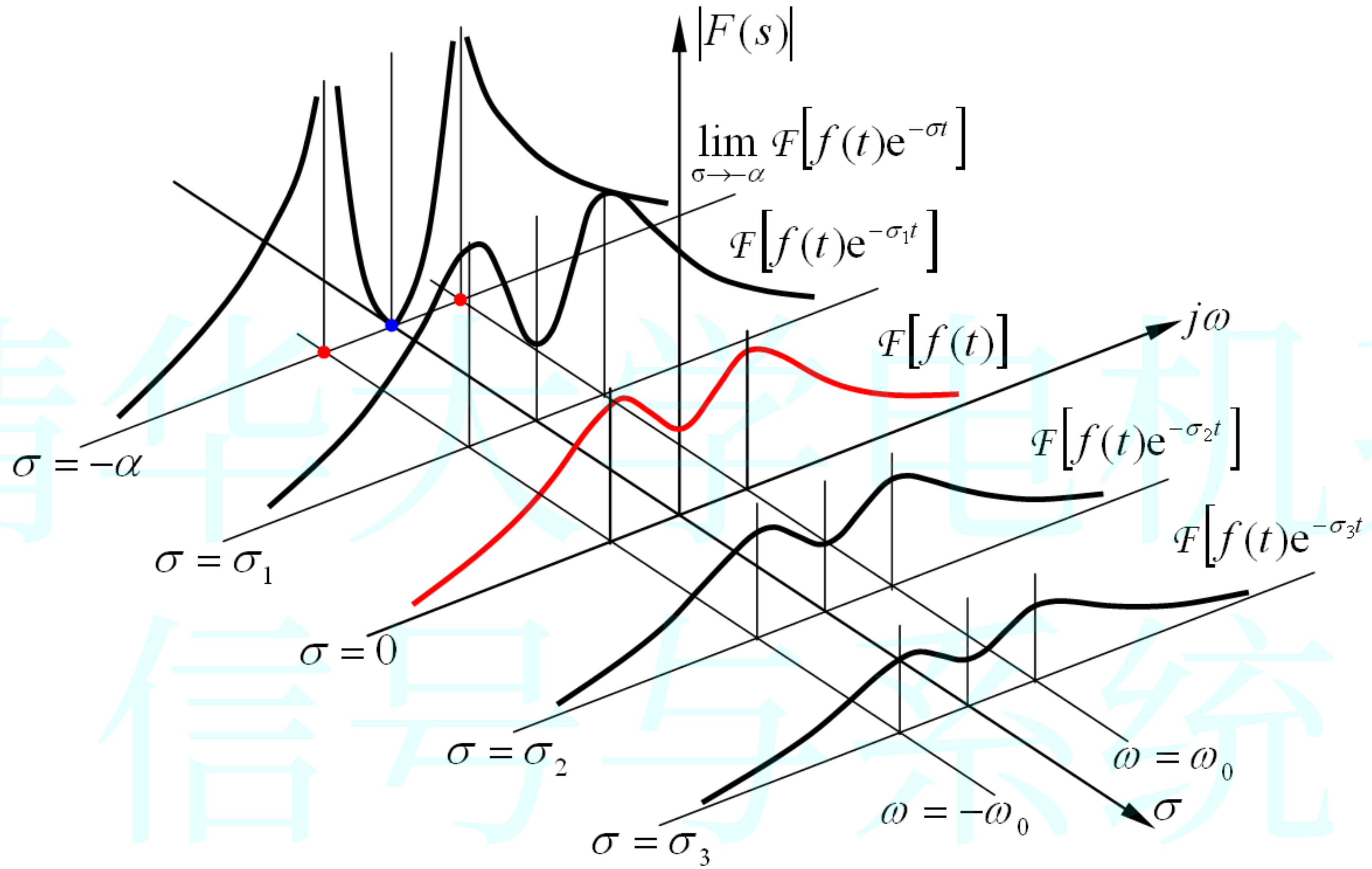
$$F(s)=\mathcal{F}\left[f(t)\mathrm{e}^{-\sigma t}\right]=\frac{(\alpha+\sigma)+j\omega}{\left[(\alpha+\sigma)+j\omega\right]^2+\omega_0^2}$$

$$F(\omega)=\mathcal{F}\left[f(t)\right]=\frac{\alpha+j\omega}{(\alpha+j\omega)^2+\omega_0^2}$$



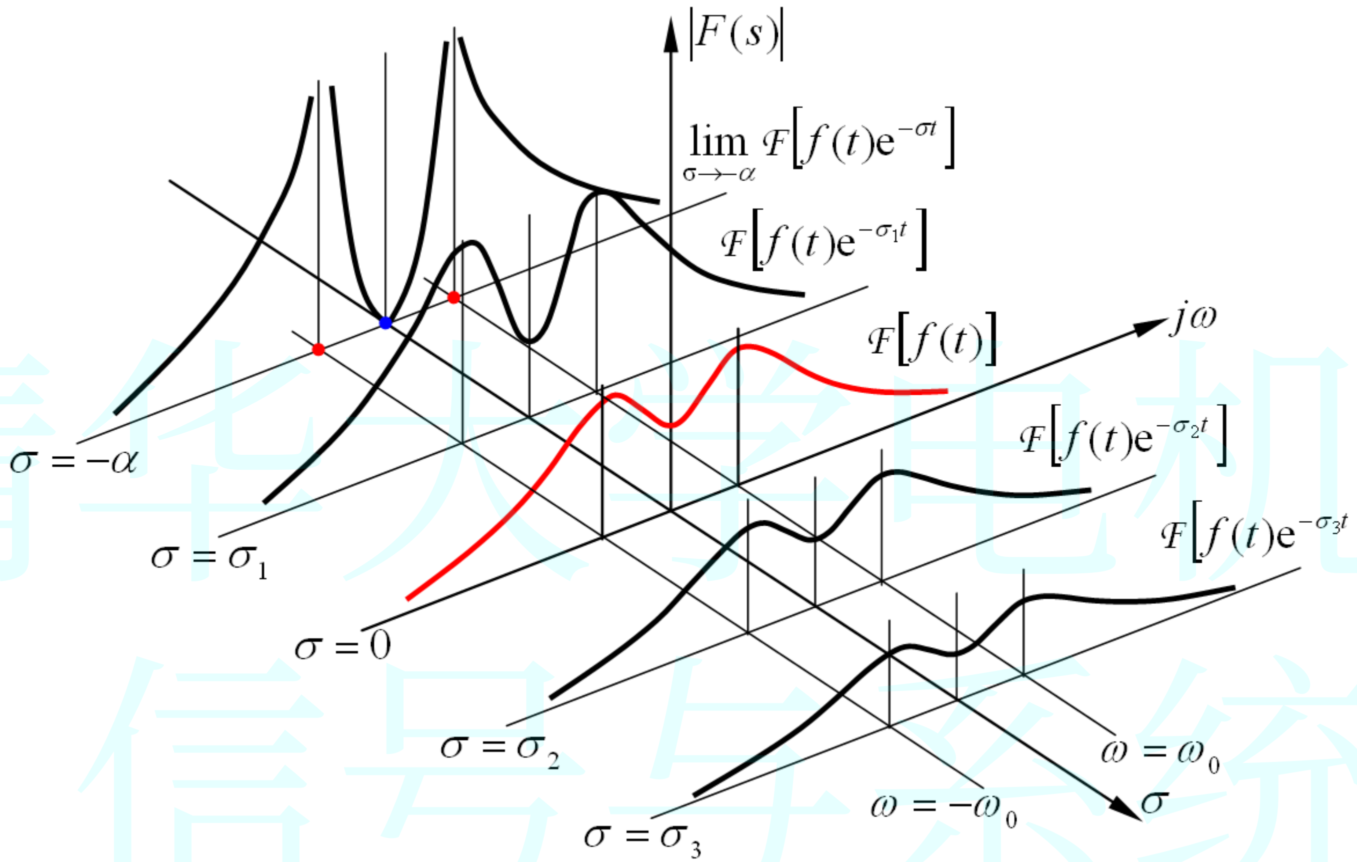
（1）在拉普拉斯变换中取 $s=j\omega$，即取 $\sigma=0$，则得 $f(t)$ 的傅立叶变换。$\sigma=0$ 是 s 平面的虚轴，因此拉普拉斯变换 $F(s)$ 在 s 平面虚轴上的取值是 $f(t)$ 的傅立叶变换。

$F(s)$ 的模 $|F(s)|$ 在 s 平面上的变化



（2）在拉普拉斯变换中取任意 $\sigma=\sigma_i$（$\sigma_i>0$），此时 $f(t)\mathrm{e}^{-\sigma_i t}$ 与 $f(t)$ 相比衰减速度增大，$f(t)\mathrm{e}^{-\sigma_i t}$ 的傅立叶变换存在。$\sigma=\sigma_i$（$\sigma_i>0$）是在虚轴右边的平行于虚轴的直线，拉普拉斯变换 $F(s)$ 在此直线上的取值是 $f(t)\mathrm{e}^{-\sigma_i t}$（$\sigma_i>0$）的傅立叶变换。

$F(s)$的模$|F(s)|$在s平面上的变化



（3）在拉普拉斯变换中取任意$\sigma=\sigma_i$（$-\alpha<\sigma_i<0$），此时$f(t)e^{-\sigma_i t}$与$f(t)$相比衰减速度减小，但仍然是绝对可积的，$f(t)e^{-\sigma_i t}$的傅立叶变换存在。$\sigma=\sigma_i$（$-\alpha<\sigma_i<0$）是在虚轴左边的平行于虚轴的直线，拉普拉斯变换$F(s)$在此直线上的取值是$f(t)e^{-\sigma_i t}$（$-\alpha<\sigma_i<0$）的傅立叶变换。

（4）如果$\sigma \le -\alpha$，则$f(t)\mathrm{e}^{-\sigma t}$不再绝对可积，$f(t)\mathrm{e}^{-\sigma_i t}$的傅立叶积分不收敛，$f(t)$的拉普拉斯积分也不收敛，因此$f(t)$的拉普拉斯变换的收敛域是$\sigma > -\alpha$的区域，不包括$\sigma = -\alpha$。

注意：当$\sigma \to -\alpha$时，有

$$f(t)\mathrm{e}^{-\sigma t} \to \cos\omega_0 t \cdot u(t)$$

$$\mathcal{F}\left[f(t)\mathrm{e}^{-\sigma t}\right] \to \frac{j\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

$$\boxed{F(s) = \mathcal{F}\left[f(t)\mathrm{e}^{-\sigma t}\right] = \frac{(\alpha+\sigma)+j\omega}{\left[(\alpha+\sigma)+j\omega\right]^2+\omega_0^2}}$$

$$F(s) = \mathcal{L}\left[f(t)\right] = \frac{\alpha+s}{(\alpha+s)^2+\omega_0^2}$$

而当$\sigma = -\alpha$时，有

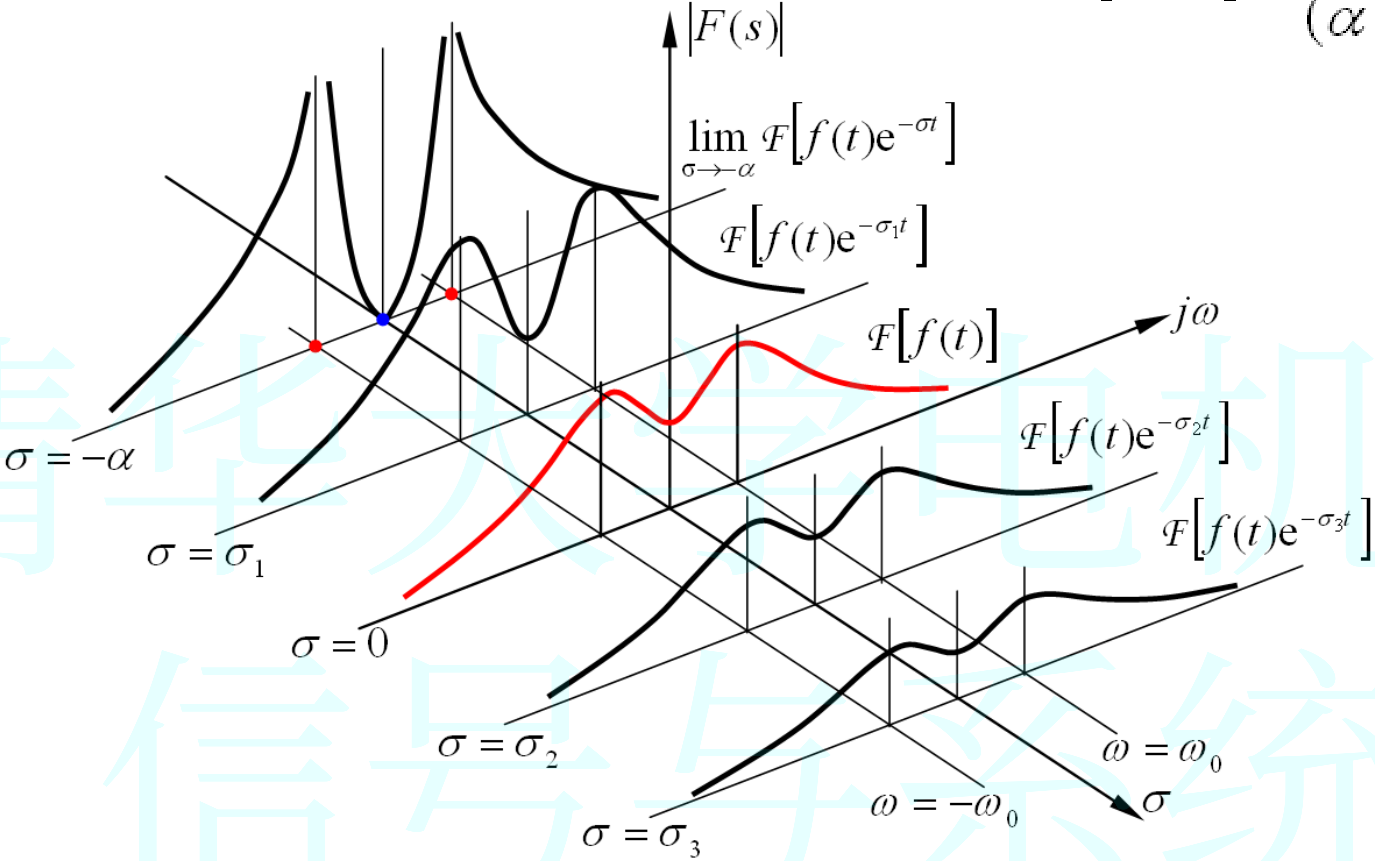
$$f(t)\mathrm{e}^{-\sigma t} = \cos\omega_0 t \cdot u(t)$$

$$\mathcal{F}\left[f(t)\mathrm{e}^{-\sigma t}\right] = \frac{j\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} + \frac{\pi}{2}\left[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)\right]$$

后者是扩展意义上的傅立叶变换，包含冲激函数。拉普拉斯变换的收敛域不包含收敛边界，因此拉普拉斯变换中没有冲激函数。

$F(s)$的模$|F(s)|$在s平面上的变化

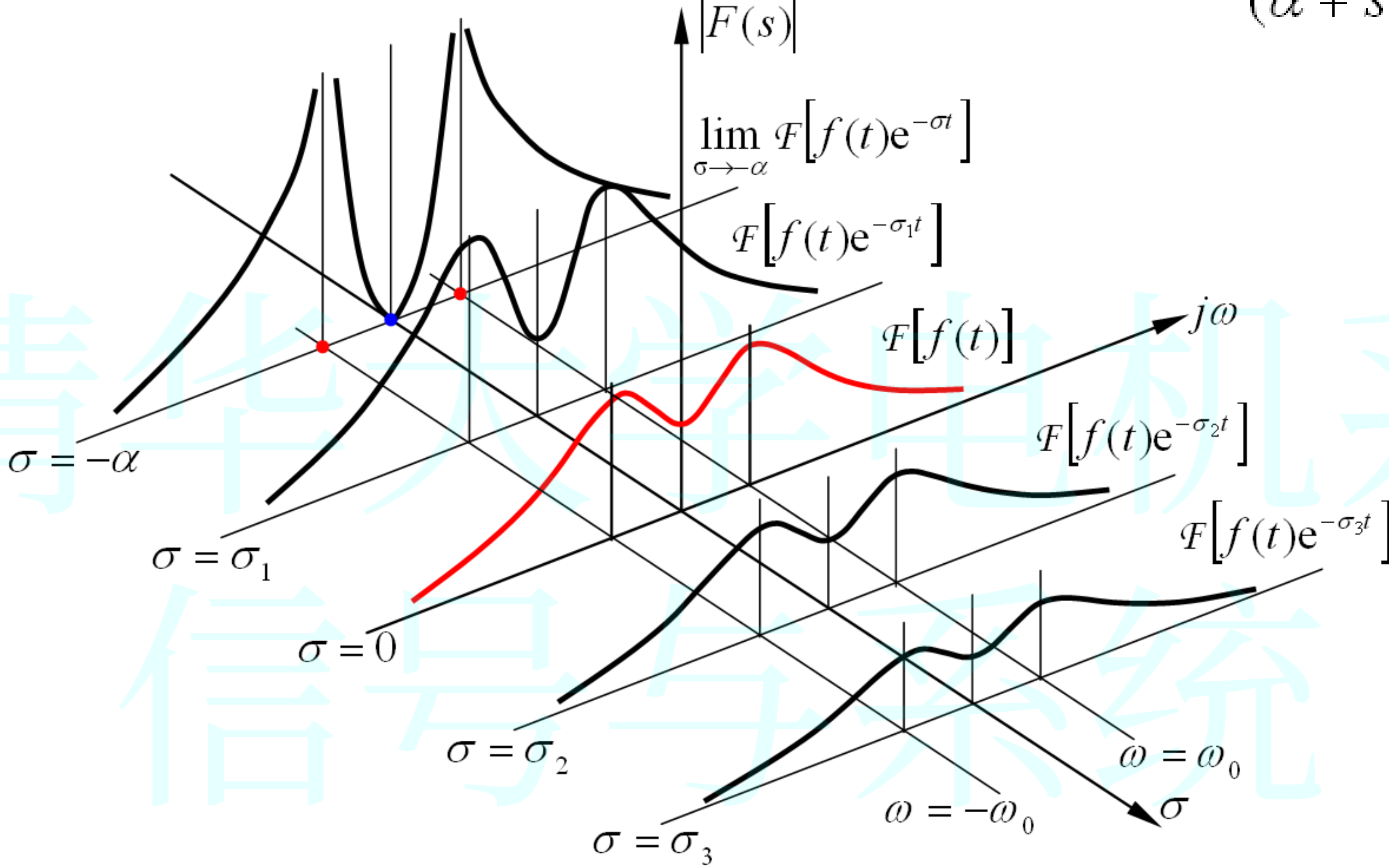
$$F(s)=\mathcal{L}\left[f(t)\right]=\frac{\alpha+s}{(\alpha+s)^2+\omega_0^2}$$



（5）当$s\to-\alpha\pm j\omega_0$时，$|F(s)|\to\infty$，因此$p_{1,2}=-\alpha\pm j\omega_0$是$F(s)$的极点，$F(s)$有两个极点。极点坐标表明了信号$f(t)=\mathrm{e}^{-\alpha t}\cos\omega_0 t\cdot u(t)$的衰减系数和频率两个特征参数。

$F(s)$的模$|F(s)|$在s平面上的变化

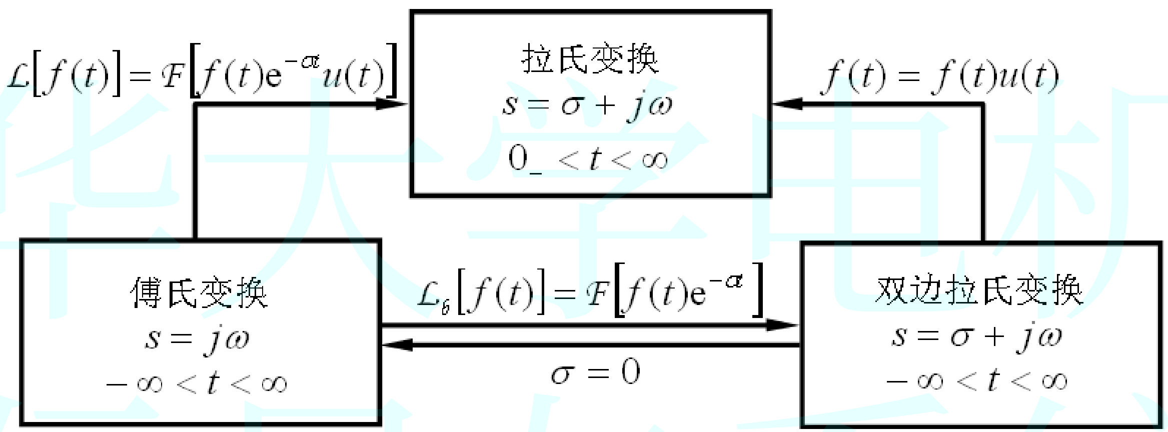
$$F(s)=\mathcal{L}[f(t)]=\frac{\alpha+s}{(\alpha+s)^2+\omega_0^2}$$



（6）当$s\to-\alpha$时，$|F(s)|\to 0$，因此$z_1=-\alpha$是$F(s)$的零点，$F(s)$有一个零点。

由信号拉普拉斯变换求傅立叶变换

拉普拉斯变换与傅立叶变换的关系



如果 $f(t)$ 是因果信号，则其傅立叶变换的积分区间减小为 $(0_-,\infty)$，和拉普拉斯变换的积分区间相同，此时如果 $f(t)$ 的傅立叶变换存在，则可由拉普拉斯变换求得。

设 $f(t)$ 的拉普拉斯变换是 $F(s)$，如果 $F(s)$ 的收敛边界在 s 平面虚轴的左边，收敛域包含虚轴，则 $f(t)$ 的傅立叶变换 $F(\omega)$ 存在，可以直接由 $F(s)$ 做变量替换求得，有

$$F(\omega) = F(s)\big|_{s=j\omega}$$

如果 $F(s)$ 的收敛边界在 s 平面虚轴的右边，收敛域不包含虚轴，则 $f(t)$ 的傅立叶变换不存在。

如果 $F(s)$ 的收敛边界是 s 平面的虚轴，则 $f(t)$ 经典意义上的傅立叶变换不存在，但扩展意义上的傅立叶变换存在，其中包含冲激函数。设 $F(s)$ 虚轴上有 N 个单极点，则 $F(s)$ 可表示为以下形式

$$F(s) = F_l(s) + \sum_{i=1}^{N} \frac{k_i}{s - j\omega_i}$$

$$F(s)=F_l(s)+\sum_{i=1}^{N}\frac{k_i}{s-j\omega_i}$$

其中 $\sum_{i=1}^{N}\frac{k_i}{s-j\omega_i}$ 表示 $F(s)$ 中对应于虚轴上 N 个单极点的部分，$F_l(s)$ 表示 $F(s)$ 中的剩余极点的部分。

上式的逆变换为： $f(t)=f_l(t)+\sum_{i=1}^{N}k_i e^{j\omega_i t}u(t)$

$$\mathcal{F}[f(t)]=F_l(s)\big|_{s=j\omega}+\sum_{i=1}^{N}k_i\left\{\delta(\omega-\omega_i)*\left[\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}\right]\right\}$$

$$=F_l(s)\big|_{s=j\omega}+\sum_{i=1}^{N}\frac{k_i}{j(\omega-\omega_i)}+\sum_{i=1}^{N}k_i\pi\delta(\omega-\omega_i)$$

$$=F(s)\big|_{s=j\omega}+\pi\sum_{i=1}^{N}k_i\delta(\omega-\omega_i)$$

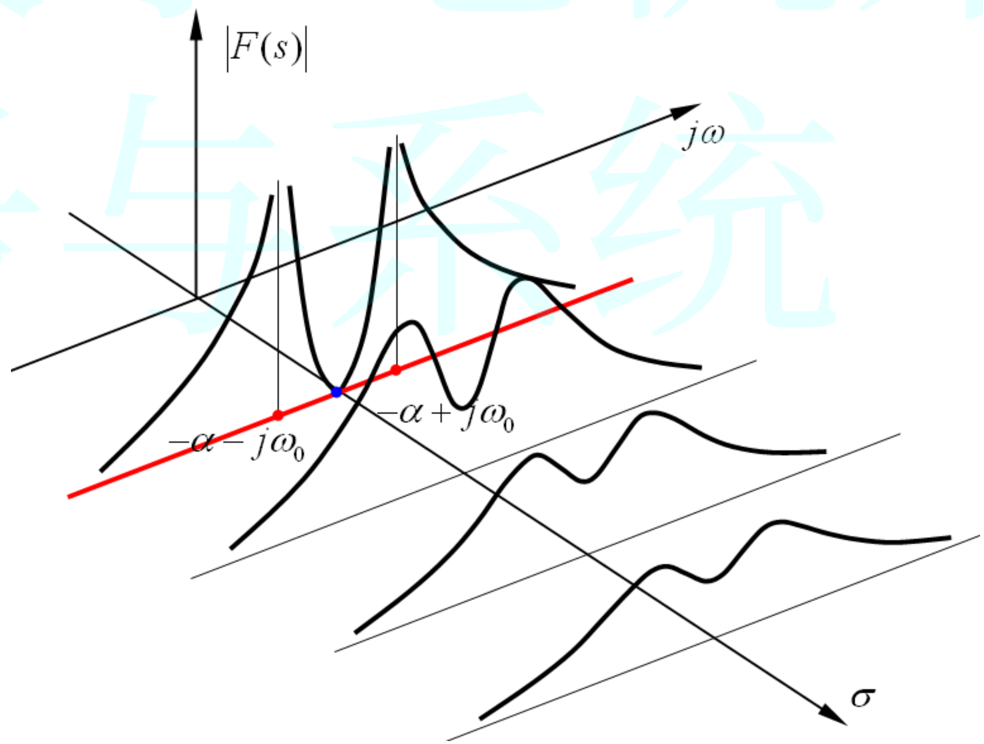
此式显示，除了做变量替换外，还需要在虚轴上的极点处补上冲激函数。

例：单边指数衰减余弦信号 $f(t)=\mathrm{e}^{-\alpha t}\cos\omega_0 t\cdot u(t)$ 的拉普拉斯变换，以及与傅里叶变换的关系。

情况 1：$\alpha<0$，$f(t)$ 单边发散振荡，拉普拉斯变换存在

$$F(s)=\mathcal{L}\left[f(t)\right]=\frac{\alpha+s}{(\alpha+s)^2+\omega_0^2}$$

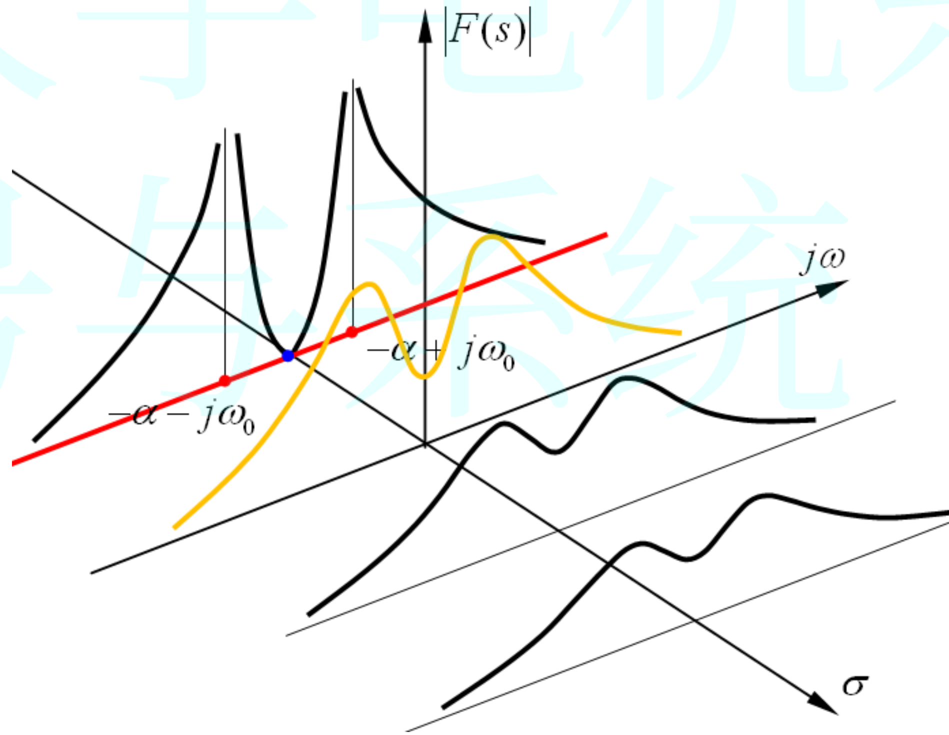
收敛域 $\sigma>-\alpha$，收敛边界在 s 平面的右半面，不包含虚轴，$f(t)$ 的傅里叶变换不存在。



情况 2：$\alpha>0$，$f(t)$单边衰减振荡，拉普拉斯变换存在

$$F(s)=\mathcal{L}[f(t)]=\frac{\alpha+s}{(\alpha+s)^2+\omega_0^2}$$

收敛域$\sigma>-\alpha$，收敛边界在s平面的左半面，包含虚轴，$f(t)$的傅里叶变换存在，求取方法：对拉普拉斯变换做变量替换$s=j\omega$，即取虚轴上的拉普拉斯变换。

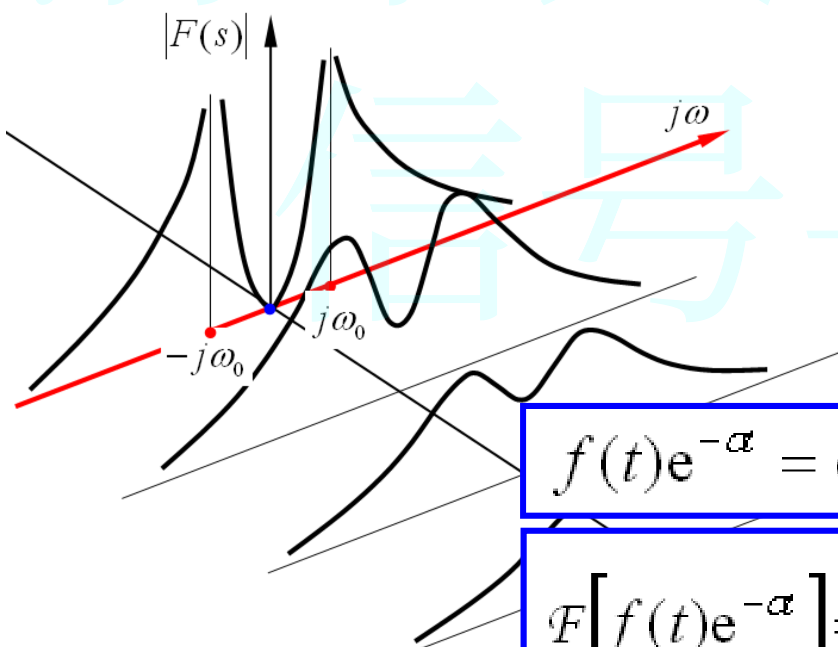


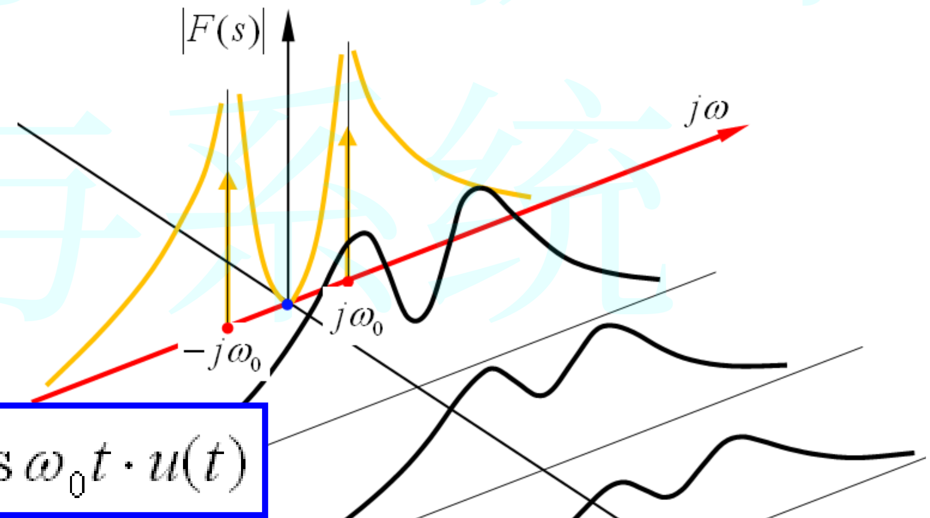
情况 3： $\alpha = 0$ ， $f(t)$ 单边等幅振荡，拉普拉斯变换存在

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \frac{s}{s^2+\omega_0^2} \quad = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+j\omega} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s-j\omega}$$

收敛域 $\sigma > 0$ （收敛域不包含虚轴），收敛边界是 s 平面的虚轴，$f(t)$ 经典意义的傅里叶变换不存在，扩展意义的傅里叶变换存在。

扩展意义傅里叶变换求取方法：变量替换 $s = j\omega$ ，即取虚轴上的拉普拉斯变换，同时补充脉冲函数。





$$\boxed{f(t)\mathrm{e}^{-\sigma t} = \cos\omega_0 t \cdot u(t)}$$

$$\boxed{\mathcal{F}\left[f(t)\mathrm{e}^{-\sigma t}\right] = \frac{j\omega}{\omega_0^2-\omega^2} + \frac{\pi}{2}\left[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)\right]}$$

傅里叶变换性质

线性	$\mathcal{F}[f_i(t)] = F_i(\omega)$	$\mathcal{F}\left[\sum_{i=1}^{N} A_i f_i(t)\right] = \sum_{i=1}^{N} A_i F_i(\omega)$
奇偶虚实特性	实偶函数 实奇函数	实偶函数 虚奇函数
对称特性	$\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$	$\mathcal{F}[F(t)] = 2\pi f(-\omega)$
尺度特性	$\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$	$\mathcal{F}[f(at)] = \frac{1}{\lvert a\rvert} F(\frac{\omega}{a})$
时移特性	$\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$	$\mathcal{F}[f(t \pm t_0)] = F(\omega)\mathrm{e}^{\pm j\omega t_0}$
频移特性	$\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$	$\mathcal{F}\left[f(t)\mathrm{e}^{\pm j\omega_0 t}\right] = F(\omega \mp \omega_0)$
时域微分特性	$\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$	$\mathcal{F}\left[\frac{\mathrm{d}^n f(t)}{\mathrm{d}t^n}\right] = (j\omega)^n F(\omega)$
频域微分特性	$\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$	$\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{\mathrm{d}^n F(\omega)}{\mathrm{d}\omega^n}\right] = (-jt)^n f(t)$
时域积分特性	$\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$	$\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\mathrm{d}\tau\right] = \frac{F(\omega)}{j\omega} + \pi F(0)\delta(\omega)$
时域卷积特性	$\mathcal{F}[f_1(t)] = F_1(\omega)$ $\mathcal{F}[f_2(t)] = F_2(\omega)$	$\mathcal{F}[f_1(t) * f_2(t)] = F_1(\omega)F_2(\omega)$
频域卷积特性	$\mathcal{F}[f_1(t)] = F_1(\omega)$ $\mathcal{F}[f_2(t)] = F_2(\omega)$	$\mathcal{F}[f_1(t)f_2(t)] = \frac{1}{2\pi} F_1(\omega) * F_2(\omega)$

拉普拉斯变换的性质

1. 线性特性

如果$\mathcal{L}[f_1(t)] = F_1(s)$，$\mathcal{L}[f_2(t)] = F_2(s)$，有

$$\mathcal{L}[Af_1(t) + Bf_2(t)] = AF_1(s) + BF_2(s)$$

2. 时域平移特性

如果$\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$，则当$t_0 > 0$时，有

$$\mathcal{L}[f(t-t_0)u(t-t_0)] = \mathrm{e}^{-st_0}F(s)$$

$$\mathcal{F}[f(t \pm t_0)] = F(\omega)\mathrm{e}^{\pm j\omega t_0}$$

3. s域平移特性

如果$\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$，有

$$\mathcal{L}\left[f(t)\mathrm{e}^{-s_0 t}\right] = F(s+s_0)$$

$$\mathcal{F}\left[f(t)\mathrm{e}^{\pm j\omega_0 t}\right] = F(\omega \mp \omega_0)$$

题一　求下列函数的拉氏变换

$$f_1(t)=(t-1)u(t) \qquad\qquad f_2(t)=t\cdot u(t-1)$$

[解] 拉氏变换和傅氏变换在时移定理存在差异。

$$F_1(s)=L[(t-1)u(t)]=\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s}$$

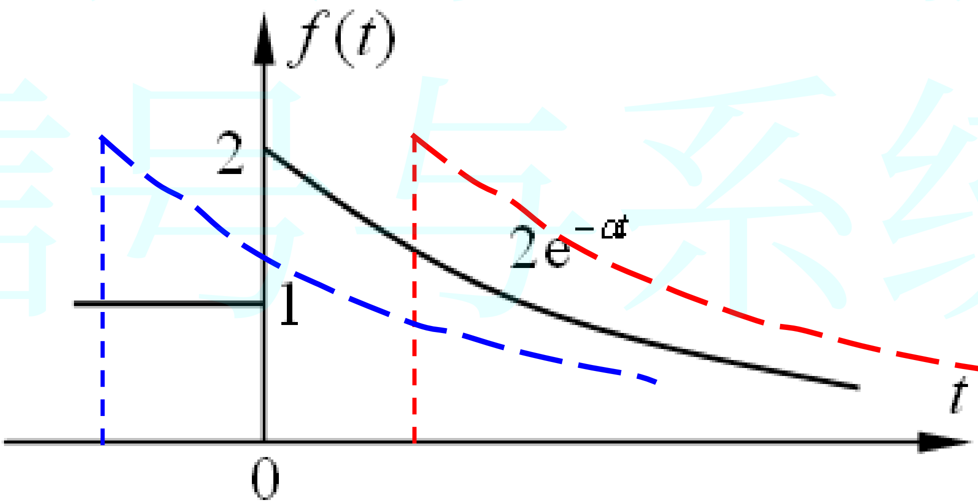
$$F_2(s)=L\left[(t-1)u(t-1)+u(t-1)\right]=\frac{e^{-s}}{s^2}+\frac{e^{-s}}{s}$$

时移定理的进一步说明 $L\left[f\left(t-t_0\right)u(t-t_0)\right]=F\left(s\right)e^{-st_0}$

时移定理 $L\left[f\left(t-t_0\right)\right]=F\left(s\right)e^{-st_0}$ **?**

的成立条件是: 若t_0>0, 则在区间[-t_0 , 0]内应有 $f(t)$=0;

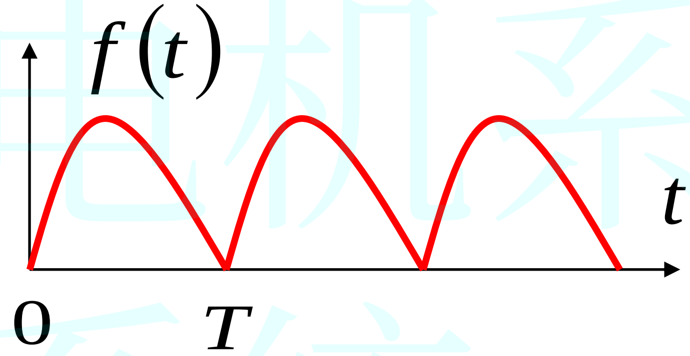
若t_0<0, 则在区间[0, -t_0]内应有 $f(t)$=0;



［例1］ 求半边周期函数$f(t)$的拉氏变换

［解］ $$f(t)=f_0(t)+f_0(t-T)+f_0(t-2T)+\cdots$$

设 $\mathcal{L}\left[f_0(t)\right]=F_0(s)$



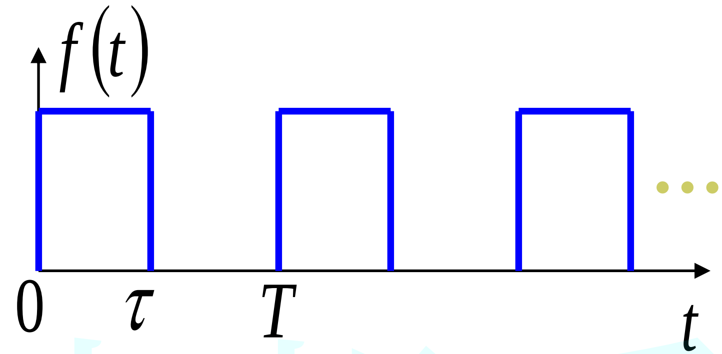
由时移特性

$$F(s)=F_0(s)\left[1+e^{-sT}+e^{-2sT}+\cdots\right]$$

$$=F_0(s)\sum_{n=0}^{+\infty}e^{-sT}=F_0(s)\cdot\frac{1}{1-e^{-sT}}$$

利用无穷级数求和

矩形周期信号拉氏变换



应用前面的结果

$$f_1(t)=u(t)-u(t-\tau)$$

第一周期的信号

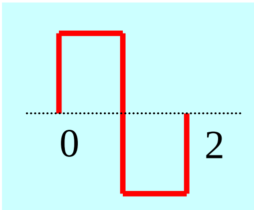
$$F_1(s)=\frac{1}{s}\left(1-e^{-s\tau}\right)$$

第一周期的拉氏变换

$$F(s)=\frac{F_1(s)}{1-e^{-sT}}=\frac{1-e^{-s\tau}}{s\left(1-e^{-sT}\right)}$$

利用时移特性
利用无穷级数求和

[例4] 求指数衰减的周期方波信号的拉氏变换

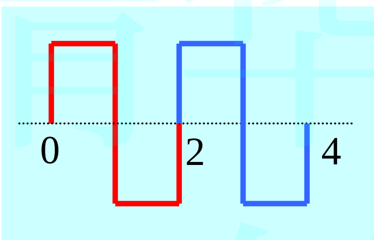


$$u(t)-2u(t-1)+u(t-2)$$

单对称方波

$$\frac{1}{s}\left(1-2e^{-s}+e^{-2s}\right)$$

半边周期延拓

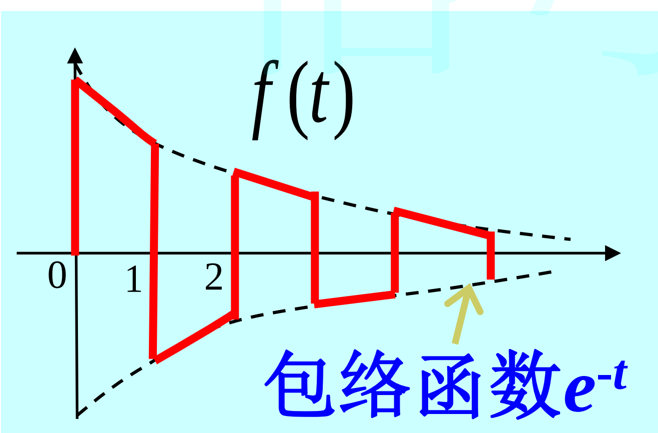


周期对称方波

T=2

$$\frac{1}{s}\left(1-e^{-s}\right)^2\frac{1}{1-e^{-2s}}$$

乘衰减指数



指数衰减的周期方波

$$\frac{1}{(s+1)}\frac{\left(1-e^{-(s+1)}\right)}{\left(1+e^{-(s+1)}\right)}$$

［例2］单边正弦、余弦信号的拉氏变换

$$\cos\omega t\cdot u(t)$$

$$f(t)=u(t)\frac{e^{j\omega t}+e^{-j\omega t}}{2}$$

$$F(s)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-j\omega}+\frac{1}{s+j\omega}\right)$$

$$=\frac{s}{s^2+\omega^2}$$

$$\sin\omega t\cdot u(t)$$

$$f(t)=u(t)\frac{e^{j\omega t}-e^{-j\omega t}}{2j}$$

$$F(s)=\frac{1}{2j}\left(\frac{1}{s-j\omega}-\frac{1}{s+j\omega}\right)$$

$$=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

［例3］衰减余弦信号的拉氏变换

$$f(t) = e^{-\beta t}[\cos\omega t \cdot u(t)]$$

$$F_0(s) = \mathcal{L}[\cos\omega t \cdot u(t)] = \frac{s}{s^2+\omega^2}$$

$$F(s) = \frac{s+\beta}{(s+\beta)^2+\omega^2}$$

频移特性

4. 时域微分特性

如果 $\mathcal{L}[f(t)]=F(s)$，有

$$\mathcal{F}\left[\frac{\mathrm{d}^n f(t)}{\mathrm{d}t^n}\right]=(j\omega)^n F(\omega)$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t)\right]=sF(s)-f(0_-)$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}^2t}f(t)\right]=s^2F(s)-sf(0_-)-f'(0_-)$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}^nt}f(t)\right]=s^nF(s)-s^{n-1}f(0_-)-s^{n-2}f'(0_-)-\cdots-f^{n-1}(0_-)$$

拉普拉斯变换的时域微分特性考虑了信号在 $t=0$ 时刻的奇异性，包含了信号的 0_- 状态。

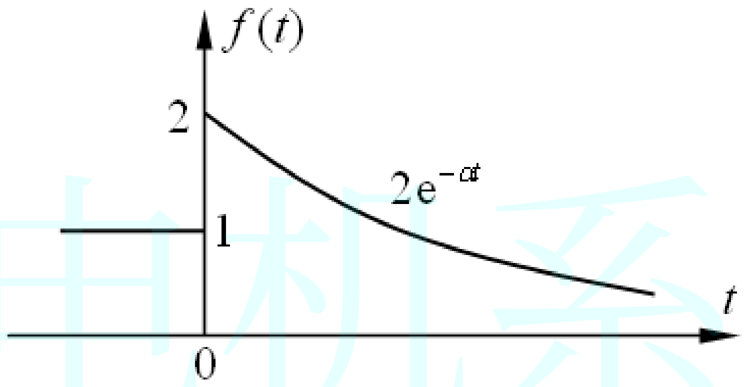
证明

$$\mathcal{L}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t)\right]=\int_{0_-}^{\infty}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t)\right]\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

$$=f(t)\mathrm{e}^{-st}\Big|_{0_-}^{\infty}+s\int_{0_-}^{\infty}f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

$$=sF(s)-f(0_-)$$

- 已知图示信号$f(t)$的波形，求 $\mathcal{L}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t)\right]$



解：方法一

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t)=\delta(t)-2\alpha \mathrm{e}^{-\alpha t}\cdot u(t)$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t)\right]=1-\frac{2\alpha}{s+\alpha}=\frac{s-\alpha}{s+\alpha}$$

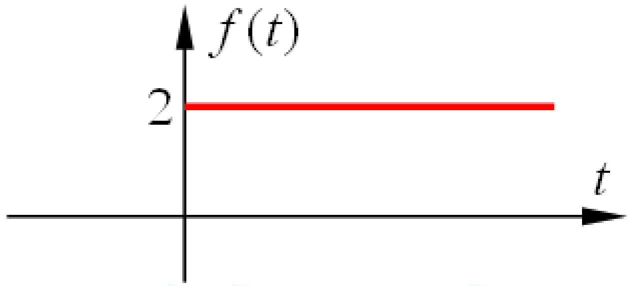
方法二

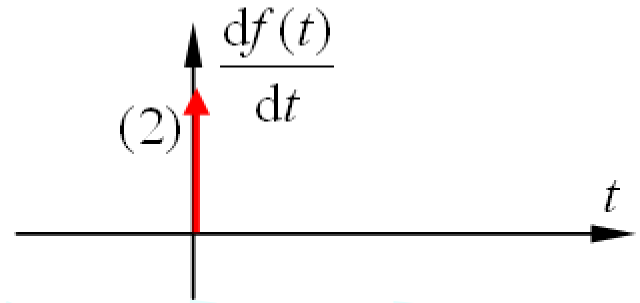
$$\mathcal{L}[f(t)]=\frac{2}{s+\alpha}$$

可见，拉普拉斯变换考虑了信号$f(t)$的0_状态，以及$f(t)$在 $t=0$时的跳变。

根据时域微分特性，有

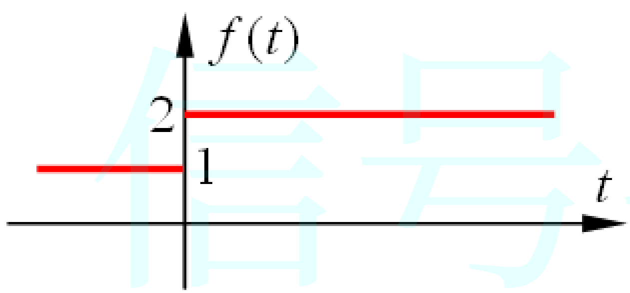
$$\mathcal{L}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t)\right]=sF(s)-f(0_{-})=s\frac{2}{s+\alpha}-1=\frac{s-\alpha}{s+\alpha}$$

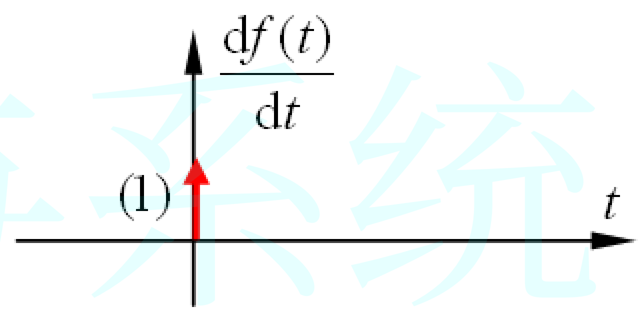




$$\mathcal{L}\left[f(t)\right]=\frac{2}{s}$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\right]=sL\left[f(t)\right]-f(0_{-})=2$$





$$\mathcal{L}\left[f(t)\right]=\frac{2}{s}$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\right]=sL\left[f(t)\right]-f(0_{-})=1$$

5. 时域积分特性

如果 $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$，有

$$\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\mathrm{d}\tau\right] = \frac{F(\omega)}{j\omega} + \pi F(0)\delta(\omega)$$

$$\mathcal{L}\left[\int_{-\infty}^{t} f(x)\mathrm{d}x\right] = \frac{1}{s}F(s) + \frac{1}{s}f^{(-1)}(0_-)$$

其中

$$f^{(-1)}(0_-) = \int_{-\infty}^{0_-} f(x)\mathrm{d}x$$

如果 $f(t)$ 是因果信号，则 $f^{(-1)}(0_-) = 0$，有

$$\mathcal{L}\left[\int_{-\infty}^{t} f(x)\mathrm{d}x\right] = \frac{1}{s}F(s)$$

证明

$$\mathcal{L}\left[\int_{-\infty}^{t} f(x)\mathrm{d}x\right] = \mathcal{L}\left[\int_{-\infty}^{0_-} f(x)\mathrm{d}x + \int_{0_-}^{t} f(x)\mathrm{d}x\right]$$

$$= \mathcal{L}\left[f^{(-1)}(0_-)\right] + \int_{0_-}^{\infty}\left[\int_{0_-}^{t} f(x)\mathrm{d}x\right]\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{f^{(-1)}(0_-)}{s} - \left[\frac{\mathrm{e}^{-st}}{s}\int_{0_-}^{t} f(x)\mathrm{d}x\right]_{0_-}^{\infty} + \frac{1}{s}\int_{0_-}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{s}F(s) + \frac{f^{(-1)}(0_-)}{s}$$

例：已知流经电容的电流$i_C(t)$的拉氏变换为$I_C(s)$，求电容电压$v_C(t)$的拉氏变换。

解：$i_C(t)=C\dfrac{d}{dt}v_C(t)$ 或 $v_C(t)=\dfrac{1}{C}\int_{-\infty}^{t}i_C(\tau)d\tau$

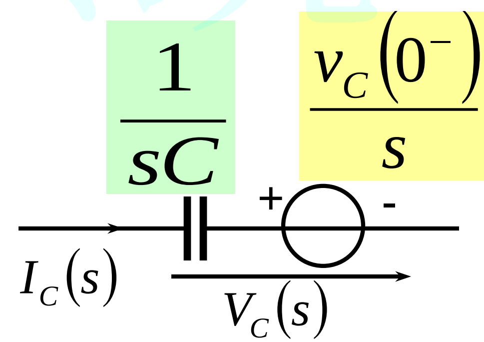
$$V_C(s)=\mathcal{L}\left[\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t}i_C(\tau)d\tau\right]$$

$$=\frac{I_C(s)}{Cs}+\frac{i_C^{(-1)}(0)}{Cs} \qquad i_C^{(-1)}(0)=\int_{-\infty}^{0_-}i_C(\tau)d\tau$$

它的物理意义是电容两端的起始电荷量，所以

$$\frac{i_C^{(-1)}(0)}{C}=V_C(0_-)$$

$$V_C(s)=\frac{I_C(s)}{Cs}+\frac{v_C(0_-)}{s}$$



6. 时域卷积特性

$$\mathscr{F}\left[f_1(t) * f_2(t)\right] = F_1(\omega)F_2(\omega)$$

如果 $\mathcal{L}\left[f_1(t)\right] = F_1(s)$， $\mathcal{L}\left[f_2(t)\right] = F_2(s)$，有

$$\mathcal{L}\left[f_1(t) * f_2(t)\right] = F_1(s)F_2(s)$$

7. 初值定理

设信号 $f(t)$ 及其导数 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t)$ 的拉普拉斯变换存在，且 $\mathcal{L}\left[f(t)\right] = F(s)$，则

$$\lim_{t\to 0_+} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$$

证明

$$sF(s) - f(0_-) = \mathcal{L}\left[\frac{\mathrm{d}}{dt}f(t)\right]$$

$$= \int_{0_-}^{0_+}\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t + \int_{0_+}^{\infty}\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

$$= f(0_+) - f(0_-) + \int_{0_+}^{\infty}\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

$$sF(s)-f(0_-)=f(0_+)-f(0_-)+\int_{0_+}^{\infty}\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

当 $s\to\infty$ 时，存在极限

$$\lim_{s\to\infty}\int_{0_+}^{\infty}\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\int_{0_+}^{\infty}\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\left[\lim_{s\to\infty}\mathrm{e}^{-st}\right]\mathrm{d}t=0$$

因此有

$$\lim_{s\to\infty}sF(s)=f(0_+)=\lim_{t\to 0_+}f(t)$$

若$F(s)$不是真分式,应化为真分式:

$$F_1(s)=F(s)-k$$

$$f(0_+)=\lim_{s\to\infty}s[F(s)-k]=\lim_{s\to\infty}[sF(s)-ks]=\lim_{t\to 0_+}f(t)$$

$F(s)$中有常数项，说明 $f(t)$中有 $\delta(t)$项。

8. 终值定理

设信号 $f(t)$ 及其导数 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t)$ 的拉普拉斯变换存在，且 $\mathcal{L}[f(t)]=F(s)$，如果 $f(t)$ 的终值 $f(\infty)=\lim_{t\to\infty}f(t)$ 存在，则有

$$\lim_{t\to\infty}f(t)=\lim_{s\to 0}sF(s)$$

注意，对于 $\cos\omega t$ 和 $\sin\omega t$ 这样的函数，$t\to\infty$ 时的极限不存在，所以不能应用终值定理。

证明

在初值定理证明中有关系式

$$sF(s)=f(0_+)+\int_{0_+}^{\infty}\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

取 $s\to 0$ 的极限，有

$$\begin{aligned}\lim_{s\to 0}sF(s)&=f(0_+)+\lim_{s\to 0}\int_{0_+}^{\infty}\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t\\&=f(0_+)+\lim_{t\to\infty}f(t)-f(0_+)\\&=\lim_{t\to\infty}f(t)\end{aligned}$$

- 下列象函数反变换 $f(t)$ 的初值和终值。

$$F(s)=\frac{s^2+2s+1}{(s-1)(s+2)(s+3)}$$

解：初值：

$$f(0^+)=\lim_{t\to 0^+} f(t)=\lim_{s\to\infty} s\frac{s^2+2s+1}{(s-1)(s+2)(s+3)}=1$$

终值：

$$f(\infty)=\lim_{t\to \infty} f(t)=\lim_{s\to 0} s\frac{s^2+2s+1}{(s-1)(s+2)(s+3)}=0$$

由于$F(s)$在s平面的右半平面上有一个极点p_1=1，所以$f(t)$不存在终值。

- 下列象函数反变换 $f(t)$ 的初值和终值。

$$F(s)=\frac{s^3+s^2+2s+1}{s^3+6s^2+11s+6}=\frac{s^3+s^2+2s+1}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

解：初值：

$$f(0^+)=\lim_{t\to 0^+} f(t)=\lim_{s\to\infty} s\frac{s^3+s^2+2s+1}{s^3+6s^2+11s+6}=\infty$$

$$F(s)=1+\frac{-(5s^2+9s+5)}{s^3+6s^2+11s+6}$$

$$f(0^+)=\lim_{t\to 0^+} f(t)=\lim_{s\to\infty} s\frac{-(5s^2+9s+5)}{s^3+6s^2+11s+6}=-5$$

终值：

$$f(\infty)=\lim_{t\to\infty} f(t)=\lim_{s\to 0} s\frac{s^3+s^2+2s+1}{s^3+6s^2+11s+6}=0$$

拉氏逆变换

复变积分，直接求解繁琐。

拉氏逆变换的定义：$f(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}F_b(s)\cdot e^{st}ds$

部分分式法：

用拉氏变换分析LTI系统时，大多$F(s)$为有理函数，将高阶的有理函数化为低阶有理函数之和，再通过查表的方法，找出$F(s)$的LT反变换。

留数法：

通过复变函数的理论，求围线内极点留数的方法，来求解复变积分。

拉普拉斯逆变换——部分分式法

一个信号的拉普拉斯变换通常可以表示为两个s的有理多项式之比

$$F(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=K\frac{s^{m}+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1 s+b_0}{s^{n}+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}$$

当$m<n$时为有理真分式；当$m\geq n$时为假分式。通过长除法可以把一个假分式变成为一个s多项式和一个有理真分式之和，即

$$F(s)=c_{m-n}s^{m-n}+c_{m-n-1}s^{m-n-1}+\cdots+c_1 s+c_0+\frac{N_1(s)}{D(s)}$$

式中各项s幂函数对应于时域的冲激函数及其各阶导数。因此，剩下的问题是求一个s有理真分式的拉普拉斯逆变换。

设 $F(s)$ 是真分式，其分母多项式 $D(s)$ 可以分解为 n 个因子的乘积，即

$$F(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=K\frac{N(s)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}$$

式中 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 是分母多项式 $D(s)$ 的根，即 $F(s)$ 的极点。

$\Downarrow$

根据极点的不同形式，*F*(*s*)可分解为不同形式的典型部分分式的和。

$\Downarrow$

分别求取各部分方式对应的时域信号，再把这些信号叠加，即得*F*(*s*)的原函数*f*(*t*)。

1. 极点为单根

如果$F(s)$含有k个互不相同的实数极点，则这些极点可分解为如下形式的部分分式

$$F_{pa}(s)=\frac{A_1}{s-p_1}+\frac{A_2}{s-p_2}+\cdots+\frac{A_p}{s-p_k}$$

$F_{pa}(s)$表示$F(s)$中对应这些极点的部分。各部分分式的系数为

$$A_i=(s-p_i)F(s)\Big|_{s=p_i}$$

$F_{pa}(s)$对应的时域函数为

$$f_{pa}(t)=A_1\mathrm{e}^{p_1t}+A_2\mathrm{e}^{p_2t}+\cdots+A_k\mathrm{e}^{p_kt}$$

［例］ $$F(s)=\frac{1}{(s+1)(s+2)}=\frac{k_1}{s+1}+\frac{k_2}{s+2}$$

解：

$$k_1=F(s)(s+1)\big|_{s=-1}=1$$

$$k_2=F(s)(s+2)\big|_{s=-2}=-1$$

$$F(s)=\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2}$$

所以

$$f(t)=\left(e^{-t}-e^{-2t}\right)u(t)$$

如果$F(s)$含有复数极点，则一定成对共轭出现。假设$F(s)$含有一对共轭极点$p_{1,2}=\alpha\pm j\beta$，则对应的部分分式为

$$F_{pa}(s)=\frac{A}{s-\alpha-j\beta}+\frac{B}{s-\alpha+j\beta}$$

部分分式的系数为

$$A=(s-\alpha-j\beta)F(s)\big|_{s=\alpha+j\beta}$$

$$B=(s-\alpha+j\beta)F(s)\big|_{s=\alpha-j\beta}$$

A和B也是共轭关系。$F_{pa}(s)$对应的时域函数为

$$f_{pa}(t)=Ae^{(\alpha+\mathrm{j}\beta)t}+Be^{(\alpha-\mathrm{j}\beta)t}$$

$$=e^{\alpha t}(C\cos\beta t+D\sin\beta t)$$

例：

$$\text{求}F(s)=\frac{s^2+3}{(s+2)(s^2+2s+5)}\text{的逆变换}f(t)\text{。}$$

解：

$$F(s)=\frac{s^2+3}{(s+1+\mathrm{j}2)(s+1-\mathrm{j}2)(s+2)}$$

$$=\frac{K_0}{s+2}+\frac{K_1}{s+1-\mathrm{j}2}+\frac{K_2}{s+1+\mathrm{j}2}$$

$$K_0=(s+2)F(s)\Big|_{s=-2}=\frac{7}{5}$$

$$K_1=\frac{s^2+3}{(s+2)(s+1+\mathrm{j}2)}\Bigg|_{s=-1+\mathrm{j}2}=\frac{-1+\mathrm{j}2}{5}\qquad K_2=K_1^*$$

$$f(t)=\frac{7}{5}\mathrm{e}^{-2t}+2\mathrm{e}^{-t}\left[-\frac{1}{5}\cos(2t)-\frac{2}{5}\sin(2t)\right]\quad(t\geq 0)$$

以上过程较繁琐，可将$F(s)$分成以下的形式(配平方)

$$\frac{As+D}{s^2+bs+c}=A\cdot\frac{s+\gamma}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$$

$$\frac{s+\gamma}{(s+\alpha)^2+\beta^2}=\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\beta^2}-\frac{\alpha-\gamma}{\beta}\frac{\beta}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$$

$$e^{-\alpha t}\cos\beta t\cdot u(t)$$

$$\frac{\alpha-\gamma}{\beta}e^{-\alpha t}\sin\beta t\cdot u(t)$$

$$\boxed{f(t)=e^{-\alpha t}\cos(\beta t)-\frac{\alpha-\gamma}{\beta}e^{-\alpha t}\sin(\beta t)\qquad(t\geq 0)}$$

关键：由待定系数法，确定系数**A, D, b, c**。

2. 极点为重根

如果$F(s)$含有k阶重复的实数极点，即$p_1 = p_2 = \cdots = p_k$，这些极点可分解为如下形式的部分分式

$$F_{pa}(s) = \frac{A_1}{(s-p_1)^k} + \frac{A_2}{(s-p_1)^{k-1}} + \cdots + \frac{A_k}{s-p_1}$$

各部分分式的系数为

$$A_1 = (s-p_1)^k F(s)\Big|_{s=p_1}$$

$$A_2 = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[(s-p_1)^k F(s)\right]\right]_{s=p_1}$$

$$A_3 = \left[\frac{1}{2!}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}\left[(s-p_1)^k F(s)\right]\right]_{s=p_1}$$

$$A_k = \left[\frac{1}{(k-1)!}\frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}s^{k-1}}\left[(s-p_1)^k F(s)\right]\right]_{s=p_1}$$

$$\mathscr{L}\left[t^n\right] = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

$$\mathscr{L}\left[t^n \cdot e^{p_1 t}\right] = \frac{n!}{(s-p_1)^{n+1}}$$

$F_{pa}(s)$ 对应的时域函数为

$$f_{pa}(t)=\frac{A_1}{(k-1)!}t^{k-1}\mathrm{e}^{p_1t}+\frac{A_2}{(k-2)!}t^{k-2}\mathrm{e}^{p_1t}+\cdots+A_k\mathrm{e}^{p_1t}$$

$F(s)$ 也可能含有 k 阶重复的共轭复数极点，此处不再详细介绍。

问题1

如果$F(s)$的收敛边界是s平面的虚轴，则$f(t)$经典意义上的傅立叶变换不存在，但扩展意义上的傅立叶变换存在，其中包含冲激函数。设$F(s)$虚轴上有N个单极点，则$F(s)$可表示为以下形式

$$F(s)=F_l(s)+\sum_{i=1}^{N}\frac{k_i}{(s-j\omega_i)^n}$$

上式的逆变换为：

$$f(t)=f_l(t)+\sum_{i=1}^{N}k_i e^{j\omega_i t}u(t)$$

$$\mathscr{L}\left[t^n\right]=\frac{n!}{s^{n+1}}$$

$$\mathscr{L}\left[t^n\cdot e^{p_1 t}\right]=\frac{n!}{(s-p_1)^{n+1}}$$

$$\mathcal{F}[f(t)]=F_l(s)\big|_{s=j\omega}+\sum_{i=1}^{N}k_i\left\{\delta(\omega-\omega_i)*\left[\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}\right]\right\}$$

$$=F_l(s)\big|_{s=j\omega}+\sum_{i=1}^{N}\frac{k_i}{j(\omega-\omega_i)}+\sum_{i=1}^{N}k_i\pi\delta(\omega-\omega_i)$$

$$=F(s)\big|_{s=j\omega}+\pi\sum_{i=1}^{N}k_i\delta(\omega-\omega_i)$$

例：有重根存在，求逆变换

$$F(s)=\frac{s^2}{(s+2)(s+1)^2}=\frac{k_1}{s+2}+\frac{k_2}{s+1}+\frac{k_3}{(s+1)^2}$$

k_1 为单根系数， k_3为重根最高次系数

$$k_1=(s+2)\frac{s^2}{(s+2)(s+1)^2}\bigg|_{s=-2}=4$$

$$k_3=(s+1)^2\frac{s^2}{(s+2)(s+1)^2}\bigg|_{s=-1}=1$$

如何求k_2？

设法使部分分式只保留k_2，其他分式为0

如何求k_2?

$$K_2 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[(s+1)^2 F(s)\right] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[\frac{s^2}{s+2}\right] \qquad s=-1$$

$$= \frac{2s(s+2)-s^2}{(s+2)^2} = \frac{s^2+4s}{(s+2)^2}$$

此时令$s=-1$, $\quad k_2 = \left.\frac{s^2+4s}{(s+2)^2}\right|_{s=-1} = -3$

逆变换

$$F(s)=\frac{4}{s+2}+\frac{-3}{s+1}+\frac{1}{(s+1)^2}$$

所以 $f(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[F(s)\right]=4e^{-2t}-3e^{-t}+te^{-t}\quad(t\geq 0)$

$$F(s)=\frac{s^2}{(s+2)(s+1)^2}=\frac{k_1}{s+2}+\frac{k_2}{s+1}+\frac{k_3}{(s+1)^2}$$

拉普拉斯变换求解线性系统

如前所述，一个输入为$e(t)$、输出为$r(t)$的线性时不变系统可以用一个线性常系数微分方程来描述

$$\frac{\mathrm{d}^n r(t)}{\mathrm{d}t^n}+a_{n-1}\frac{\mathrm{d}^{n-1} r(t)}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+a_1\frac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t}+a_0 r(t)$$

$$=b_m\frac{\mathrm{d}^m e(t)}{\mathrm{d}t^m}+b_{m-1}\frac{\mathrm{d}^{m-1} e(t)}{\mathrm{d}t^{m-1}}+\cdots+b_1\frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t}+b_0 e(t)$$

求解此n阶微分方程，需要n个初始条件：$r(0_-),r'(0_-),r''(0_-),\cdots,r^{(n-1)}(0_-)$。

对此方程两边取拉普拉斯变换，有

$$\left[s^n R(s)-s^{n-1}r(0_-)-\cdots-sr^{(n-2)}(0_-)-r^{(n-1)}(0_-)\right]$$

$$+a_{n-1}\left[s^{n-1}R(s)-s^{n-2}r(0_-)-\cdots-sr^{(n-3)}(0_-)-r^{(n-2)}(0_-)\right]$$

$$+\cdots\cdots$$

$$+a_1\left[sR(s)-r(0_-)\right]$$

$$+a_0R(s)$$

$$=b_m s^m E(s)+b_{m-1}s^{m-1}E(s)+\cdots+b_1 sE(s)+b_0E(s)$$

整理得

$$
\begin{aligned}
&(s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0)R(s) \\
&- r(0_-)s^{n-1} \\
&- \left[r'(0_-) + a_{n-1}r(0_-)\right]s^{n-2} \\
&- \cdots\cdots \\
&- \left[r^{(n-2)}(0_-) + a_{n-1}r^{(n-3)}(0_-) + a_{n-2}r^{(n-4)}(0_-) + \cdots + a_2 r(0_-)\right]s \\
&- \left[r^{(n-1)}(0_-) + a_{n-1}r^{(n-2)}(0_-) + a_{n-2}r^{(n-3)}(0_-) + \cdots + a_1 r(0_-)\right] \\
&= \left[b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0\right]E(s)
\end{aligned}
$$

在复频域为代数方程，可简写为

$$D(s)R(s) - B(s) = N(s)E(s)$$

或 $$R(s) = \frac{N(s)}{D(s)}E(s) + \frac{B(s)}{D(s)}$$

令 $$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

有 $$R(s)=H(s)E(s)+\frac{B(s)}{D(s)}$$

式中右边第一项是系统零状态响应，第二项是系统的零输入响应，有

$$R_{zs}(s)=H(s)E(s)$$

$$R_{zi}(s)=\frac{B(s)}{D(s)}$$

$$R(s)=R_{zs}(s)+R_{zi}(s)$$

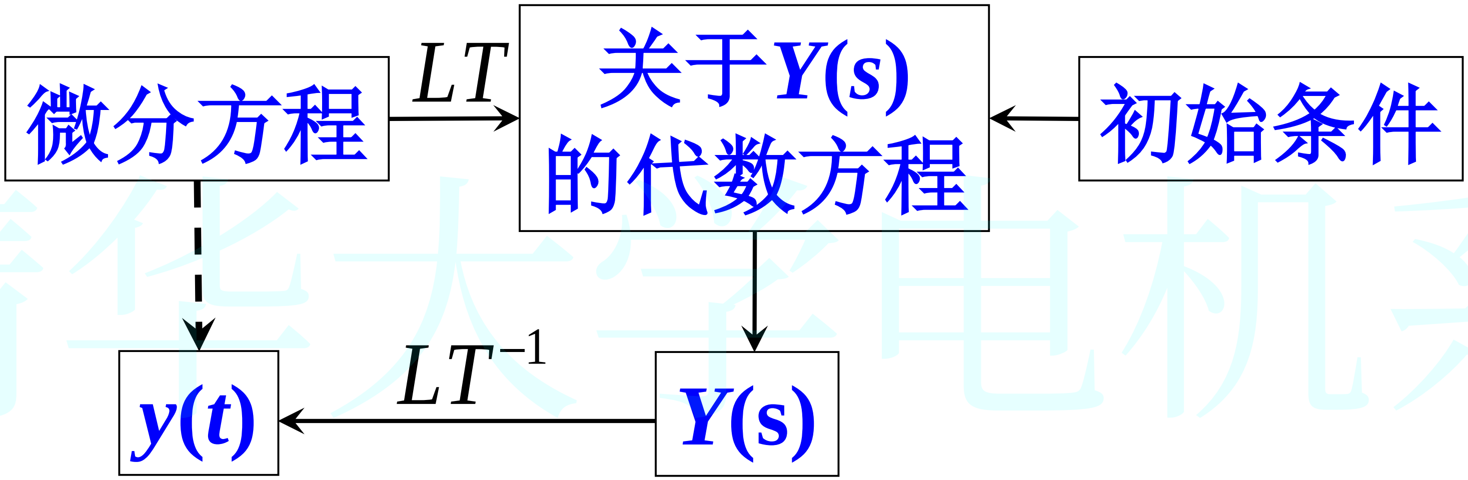
当系统为零初始状态时，$B(s)=0$，因此 $R_{zi}(s)=0$。

进行拉普拉斯逆变换，可求系统时域响应

$$r_{zs}(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[R_{zs}(s)\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[H(s)E(s)\right]$$

$$r_{zi}(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[R_{zi}(s)\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{B(s)}{D(s)}\right]$$

$$r(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[R(s)\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[R_{zs}(s)+R_{zi}(s)\right]$$


微分方程
LT
关于Y(s)
的代数方程
初始条件
y(t)
LT−1
Y(s)

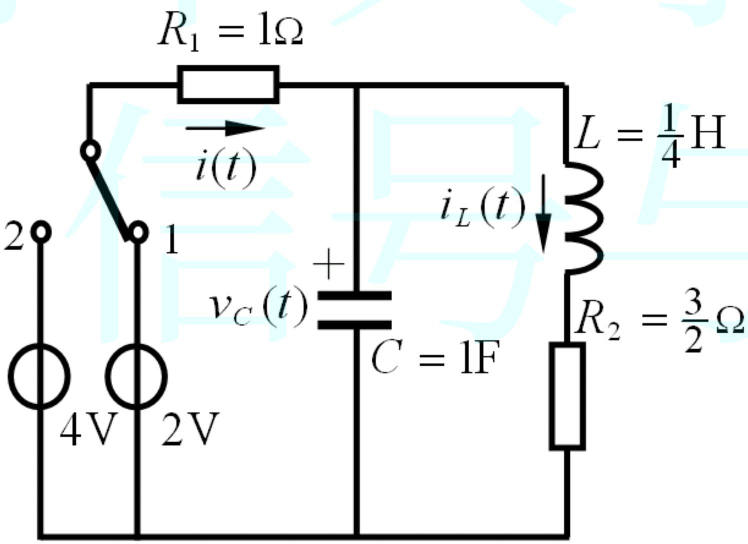
例 1　用拉普拉斯变换求解下列方程（第二章电路题）。

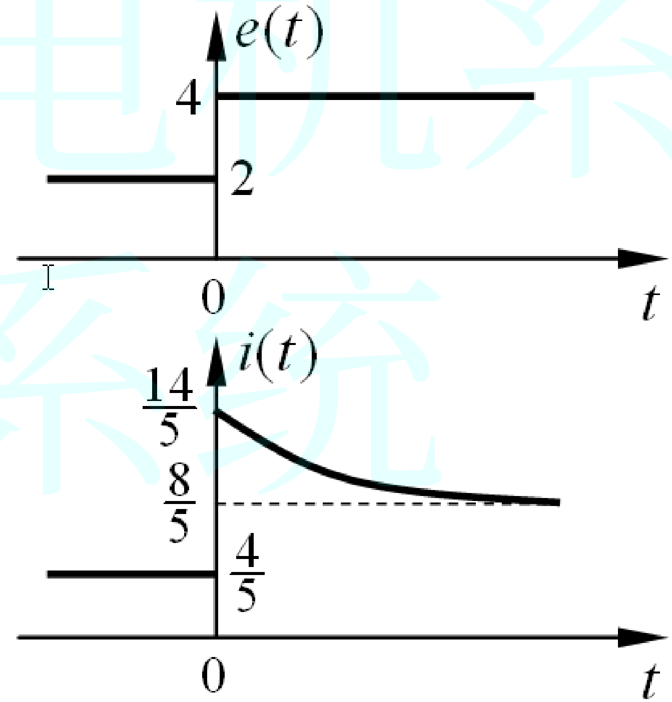
解：已知电路系统的微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}i(t)+7\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i(t)+10i(t)=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}e(t)+6\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e(t)+4e(t)$$

系统初始状态为：$i(0\_)=\frac{4}{5}\mathrm{A}$；$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i(0\_)=0\mathrm{A/s}$

系统激励为 $e(t)=2+2u(t)$，有





系统激励为 $e(t)=2+2u(t)$，有

$$e(0\_)=2\text{V}\;;\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e(0\_)=0\text{V/s}\;;\quad E(s)=L[e(t)]=\frac{4}{s}$$

$$i(0\_)=\frac{4}{5}\text{A}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i(0\_)=0\text{A/s}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}i(t)+7\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i(t)+10i(t)=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}e(t)+6\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e(t)+4e(t)$$

对微分方程两边取拉普拉斯变换，得

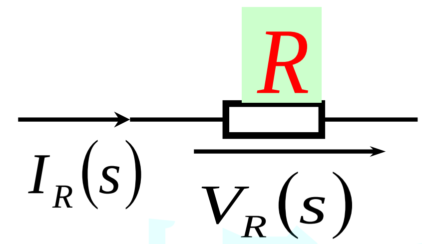
$$\left[s^2I(s)-\frac{4}{5}s\right]+7\left[sI(s)-\frac{4}{5}\right]+10I(s)=\left[s^2E(s)-2s\right]+6\left[sE(s)-2\right]+4E(s)$$

$$\Rightarrow\quad I(s)=\frac{14s^2+88s+80}{5s(s^2+7s+10)}=\frac{14s^2+88s+80}{5s(s+2)(s+5)}=\frac{8}{5}\frac{1}{s}+\frac{4}{3}\frac{1}{s+2}-\frac{2}{15}\frac{1}{s+5}$$

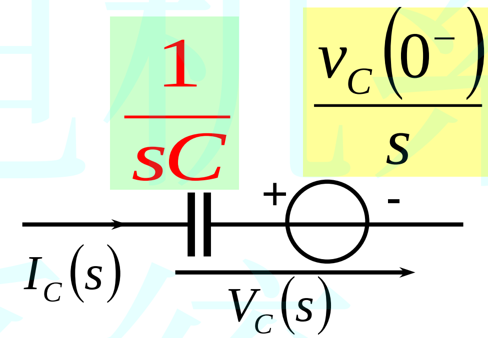
$$\Rightarrow\quad i(t)=\frac{8}{5}+\frac{4}{3}\mathrm{e}^{-2t}-\frac{2}{15}\mathrm{e}^{-5t}\qquad t\geq 0$$

不列写微分方程，直接将电路化为s域模型（回路分析）

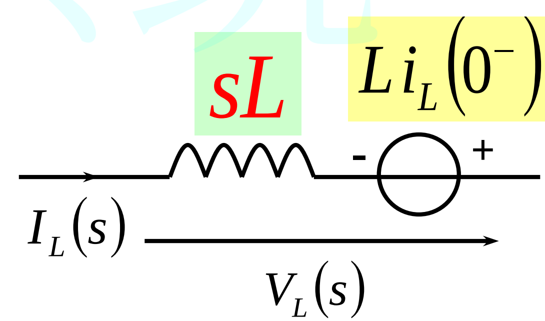
电阻
$$\begin{cases} v_R(t) = R \cdot i_R(t) \\ V_R(s) = R \cdot I_R(s) \end{cases}$$

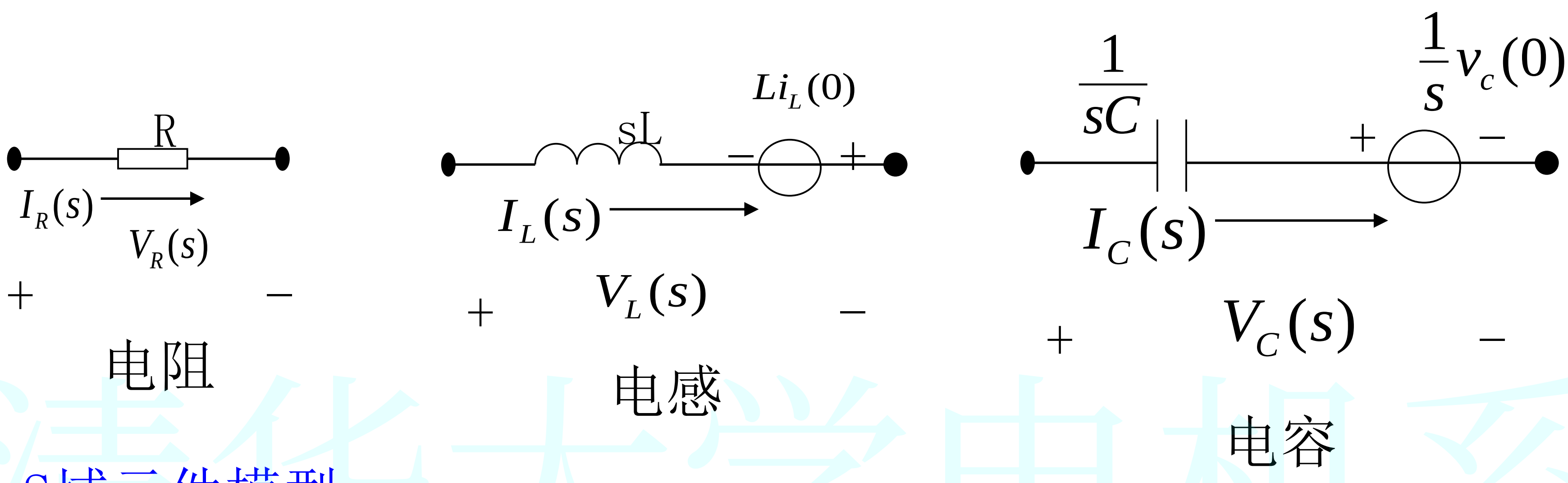


电容
$$\begin{cases} i_C(t) = C \dfrac{du_C(t)}{dt} \\ V_C(s) = \dfrac{1}{sC} I_C(s) + \dfrac{V_C(0^-)}{s} \end{cases}$$

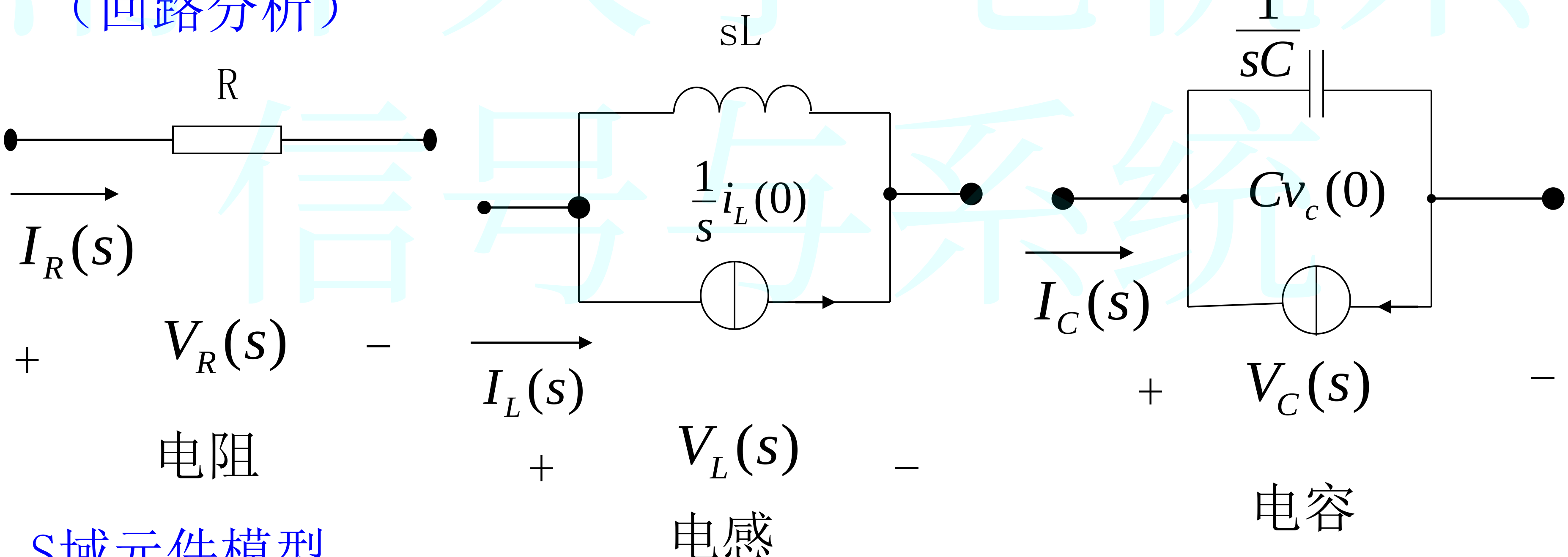


电感
$$\begin{cases} v_L(t) = L \dfrac{di_L(t)}{dt} \\ V_L(s) = sLI_L(s) - Li_L(0^-) \end{cases}$$





S域元件模型
（回路分析）



S域元件模型
（结点分析）

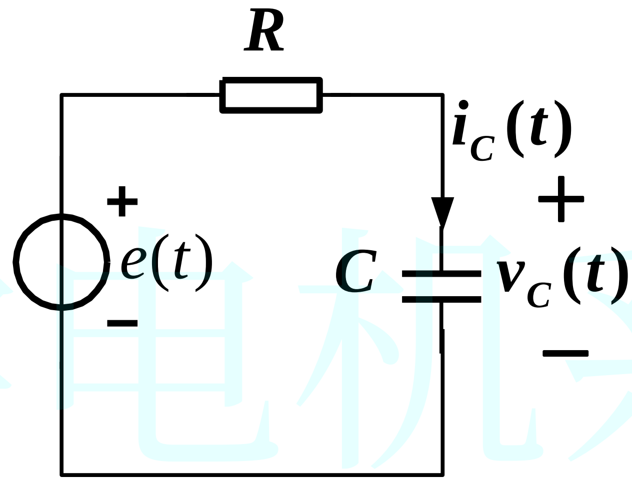
求响应的步骤

- 画0_-等效电路，求起始状态；
- 画s域等效模型；
- 列s域方程（代数方程）；
- 解s域方程，求出响应的拉氏变换$V(s)$或$I(s)$；
- 拉氏反变换求$v(t)$或$i(t)$。

例

已知 $e(t)=\begin{cases}-E & t<0\\ E & t>0\end{cases}$

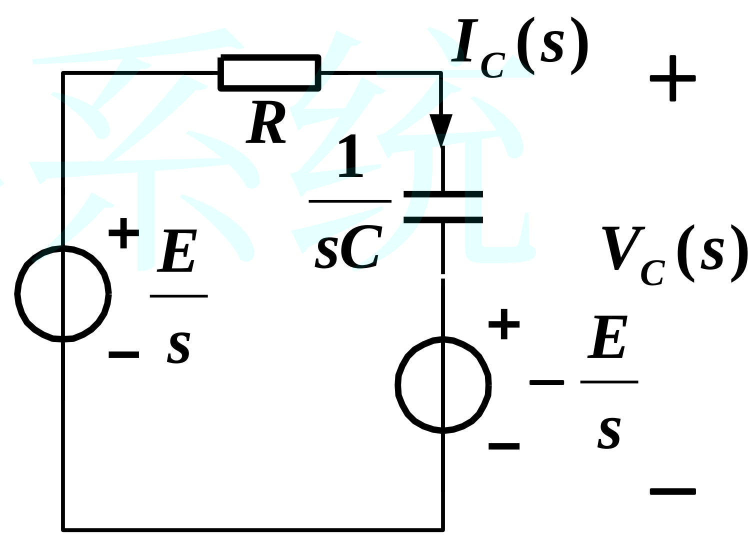
利用s域模型求$v_C(t)=?$



解答

$$e(t)=-E\,u(-t)+E\,u(t)$$

$$v_C(0_-)=-E$$



列s域方程:

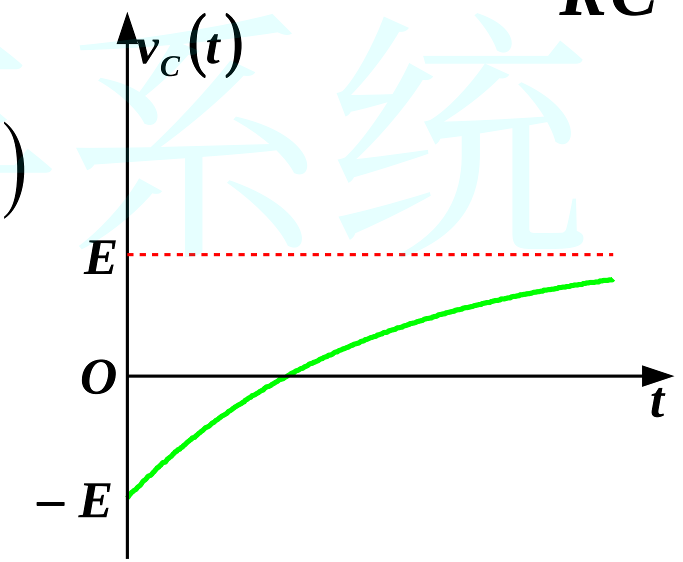
$$I_C(s)\left(R+\frac{1}{sC}\right)=\frac{E}{s}+\frac{E}{s}$$

所以 $$I_C(s)=\frac{2E}{s\left(R+\frac{1}{sC}\right)}$$

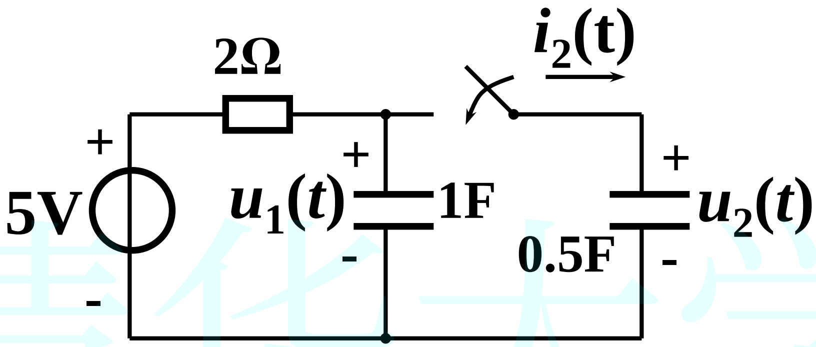
$$V_C(s)=I_C(s)\cdot\frac{1}{sC}+\frac{-E}{s}$$

$$V_C(s)=\frac{E}{s}-\frac{2E}{s+\frac{1}{RC}}$$

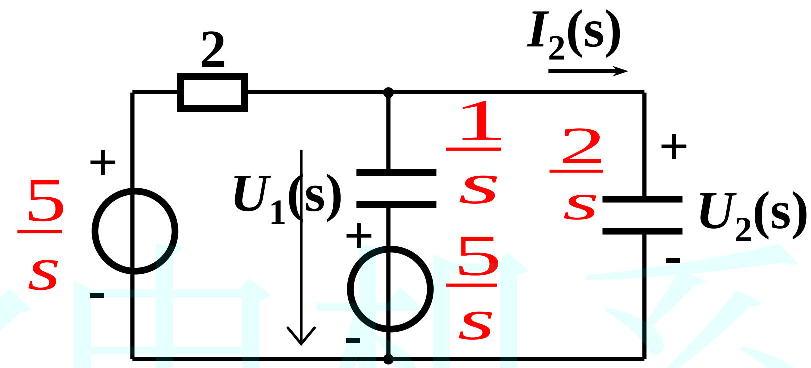
$$v_C(t)=E\left(1-2\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\right)\quad(t\geq 0)$$



［例］求$i_2(t)$和$u_2(t)$。已知$u_2(0^-)=0$，开关在$t=0$时闭合。



图a



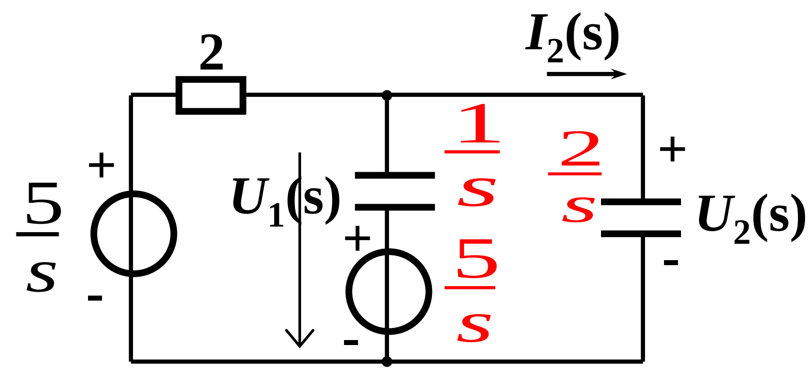
图b

［解］ 由图a，求出$u_1(0-)=5V$，画出运算电路图b。

应用节点电压法 $$\left(\frac{1}{2}+s+\frac{s}{2}\right)U_2(s)=\frac{5}{2s}+5$$

则 $$U_2(s)=\frac{10s+5}{3s\left(s+\frac{1}{3}\right)}=\frac{5}{s}-\frac{\frac{5}{3}}{s+\frac{1}{3}}$$

$$\frac{\left(\frac{5}{s}-U_2(s)\right)}{2}=\frac{U_2(s)}{\frac{2}{s}}+\frac{U_2(s)-\frac{5}{s}}{\frac{1}{s}}$$



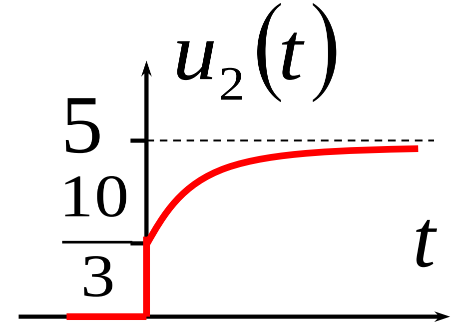
图*b*

$$\left(\frac{1}{2}+s+\frac{s}{2}\right)U_2(s)=\frac{5}{2s}+5$$

$$U_2(s)=\frac{10s+5}{3s\left(s+\frac{1}{3}\right)}=\frac{5}{s}-\frac{\frac{5}{3}}{s+\frac{1}{3}}$$

$$U_2(s)=\frac{5}{s}-\frac{\frac{5}{3}}{s+\frac{1}{3}}$$

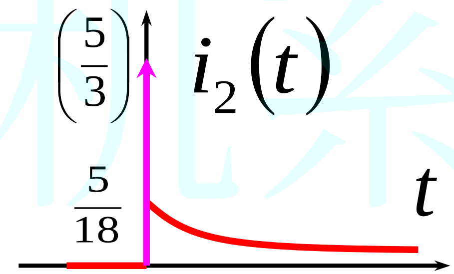
$$I_2(s)=\frac{s}{2}U_2(s)=\frac{5}{3}+\frac{5}{18\left(s+\frac{1}{3}\right)}$$



拉氏反变换

$$u_2(t)=\left(5-\frac{5}{3}e^{-\frac{t}{3}}\right)u(t)$$

$$i_2(t)=\frac{5}{3}\delta(t)+\frac{5}{18}e^{-\frac{t}{3}}u(t)$$



注意到，$u_2(0^+)=10/3V$，而$u_2(0^-)=0$，电容电压在$t=0$处发生了跃变。这是冲激电流 $\frac{5}{3}\delta(t)$ 对电容器充电的结果。

$$u_C(0^+)=\frac{1}{0.5}\int_{0^-}^{0^+}\frac{5}{3}\delta(t)dt=\frac{10}{3}V$$

系统函数

已知线性时不变系统的微分方程

$$r^{(n)}(t)+a_{n-1}r^{(n-1)}(t)+\cdots+a_1 r^{(1)}(t)+a_0 r(t)$$
$$=b_m e^{(m)}(t)+b_{m-1}e^{(m-1)}(t)++b_1 e^{(1)}(t)+b_0 e(t)$$

取零初始状态下方程两边的拉普拉斯变换，得

$$s^n R_{zs}(s)+a_{n-1}s^{n-1}R_{zs}(s)+\cdots+a_1 sR_{zs}(s)+a_0 R_{zs}(s)$$
$$=b_m s^m E(s)+b_{m-1}s^{m-1}E(s)++b_1 sE(s)+b_0 E(s)$$

令 $$H(s)=\frac{b_m s^n+b_{m-1}s^{n-1}+\cdots+b_1 s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}$$

有 $$R_{zs}(s)=H(s)E(s)$$

定义 $H(s)$ 为线性时不变系统的系统函数，系统零状态响应的拉普拉斯变换 $R_{zs}(s)$ 是系统函数 $H(s)$ 和系统激励的拉普拉斯变换 $E(s)$ 的乘积。

前面已经学习过，系统的零状态响应$r_{zs}(t)$是系统激励$e(t)$和系统单位冲激响应$h(t)$的卷积

$$r_{zs}(t)=e(t)*h(t)$$

两边进行拉普拉斯变换，根据拉普拉斯变换的时域卷积特性，有

$$R(s)=E(s)H(s)$$

其中$H(s)$是系统单位冲激响应的拉普拉斯变换

$$H(s)=\mathcal{L}\left[h(t)\right]$$

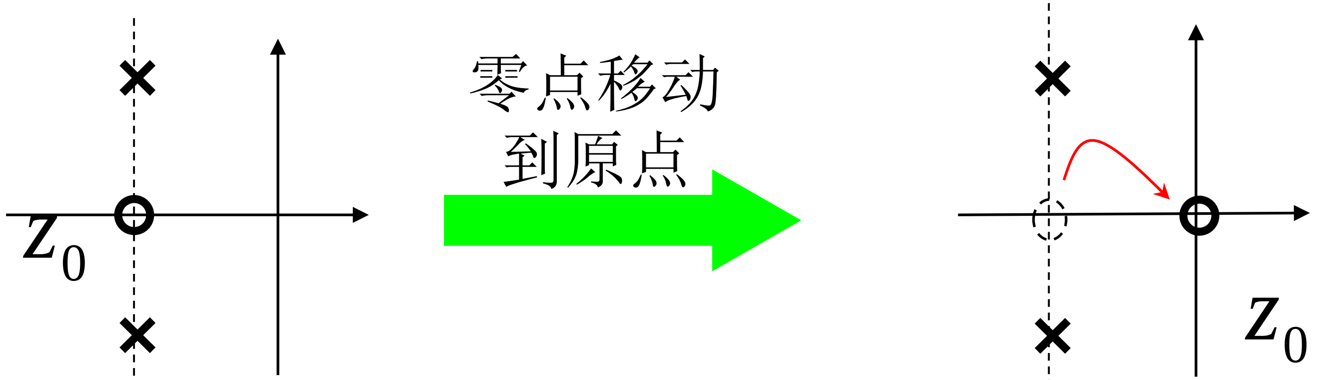
由此可见，系统函数也是系统单位冲激响应的拉普拉斯变换。

由系统函数的极点分布分析系统响应的特征

$$H(s)=K\frac{\prod_{j=1}^{m}(s-z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)}$$

- 系统函数的极点决定了系统单位冲激响应$h(t)$所包含的所有特征分量，极点给出了各分量的频率和衰减。
- 系统函数的零点只影响$h(t)$各特征分量的幅值和初始相位，但不影响频率和衰减。

零点的影响



$$H(s)=\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$$

$$\hat{H}(s)=\frac{s}{(s+a)^2+\omega^2}$$

$$h(t)=e^{-at}\cos\omega t$$

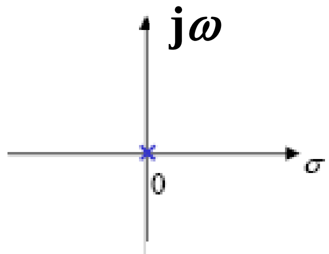
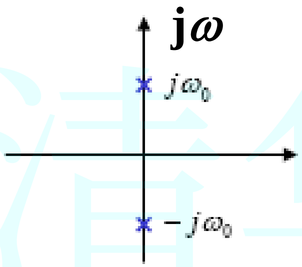
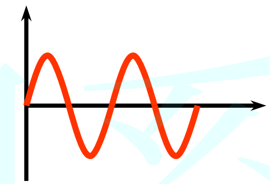
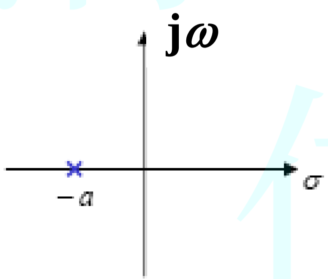
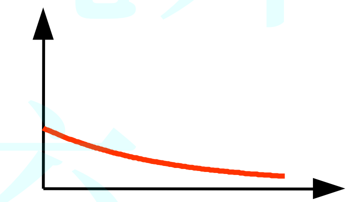
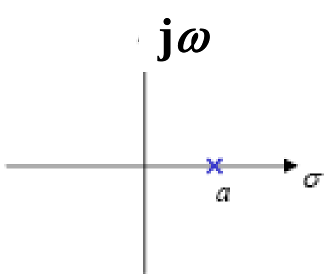
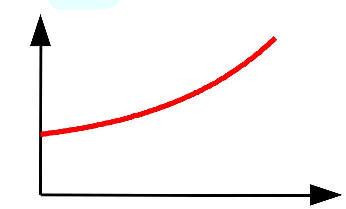
$$\hat{h}(t)=e^{-at}\sqrt{1+\left(\frac{a}{\omega}\right)^2}\cos(\omega t+\varphi)$$

$$\varphi=tg^{-1}\left(\frac{a}{\omega}\right)$$

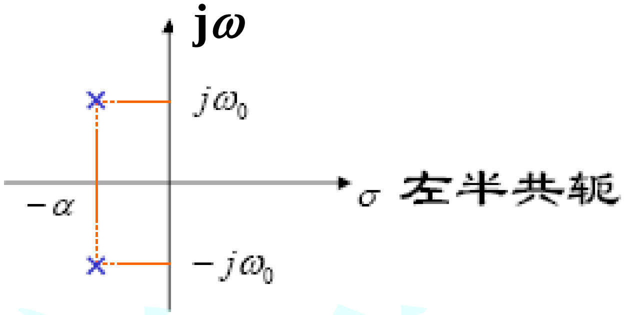
零点的分布只影响时域函数的幅度和相移，不影响振荡频率.

幅度多了一个因子

多了相移

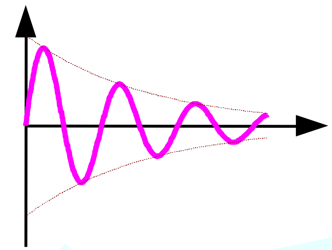
极点位置		$H(s)$	$h(t)$	时域波形
	原点	$\dfrac{1}{s}$	$u(t)$	
	虚轴共轭	$\dfrac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$	$\sin\omega_0 t$	
	左半	$\dfrac{1}{s+a}$	e^{-at}	
	右半	$\dfrac{1}{s-a}$	e^{at}	

极点位置　　$H(s)$　　$h(t)$　　时域波形

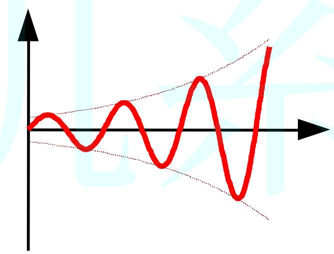


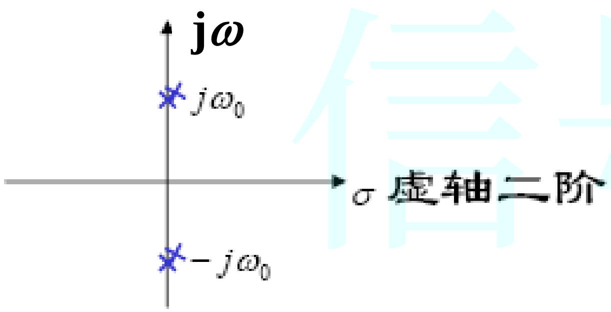
$$\frac{\omega_0}{(s+\alpha)^2+\omega_0^2}$$

$$e^{-at}\sin\omega_0 t$$



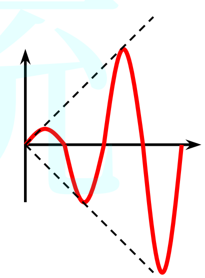
α<0,在右半共轭



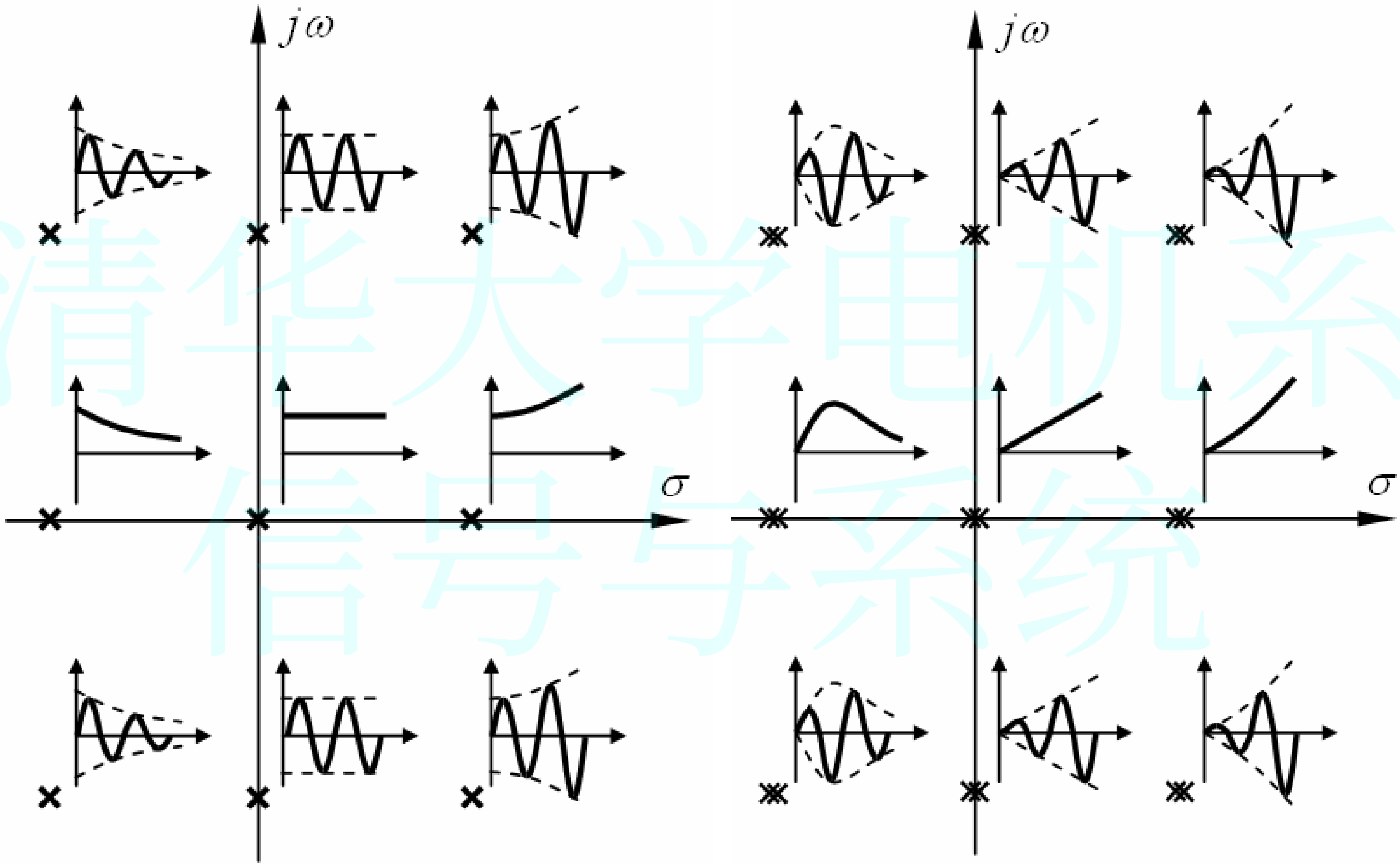


$$\frac{2\omega_0 s}{\left(s^2+\omega_0^2\right)^2}$$

$$t\sin\omega_0 t$$



s 平面不同位置（单阶和二阶）极点对应的系统单位冲激响应特征示意图



结论：

极点在s左半平面，$h(t)$呈衰减形式——稳定

极点在s右半平面，$h(t)$呈增长形式——不稳定

极点在虚轴
- 一阶——临界稳定（等幅振荡）
- $\geq$二阶——增长

因此，从s平面观察时域情况，关键是极点的分布。

零点的影响：不影响h(t)函数波形特性，只影响幅值和相位。

系统函数有可能出现零点和极点相消的情况

$$H(s)=K\frac{\prod_{j=1}^{m}(s-z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)}$$

(1)如果存在零、极点相消，系统单位冲激响应中将不出现相消极点所对应的特征分量，系统的零状态响应中也将不出现相消极点所对应的自由响应分量

(2)系统的零输入响应（自由响应）中仍出现此分量。

$$r^{(n)}(t)+a_{n-1}r^{(n-1)}(t)+\cdots+a_1r^{(1)}(t)+a_0r(t)$$
$$=b_me^{(m)}(t)+b_{m-1}e^{(m-1)}(t)++b_1e^{(1)}(t)+b_0e(t)$$

$$H(s)=\frac{b_ms^n+b_{m-1}s^{n-1}+\cdots+b_1s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0}$$

由系统函数的极点分布分析系统的稳定性

一个系统，如果对任意的有界输入，系统的输出也是有界的，则称该系统是有界输入有界输出（BIBO）稳定的系统，简称稳定系统。

对所有的激励信号$e(t)$

$$\left|e(t)\right| \le M_{\mathrm{e}}$$

其响应$r(t)$满足

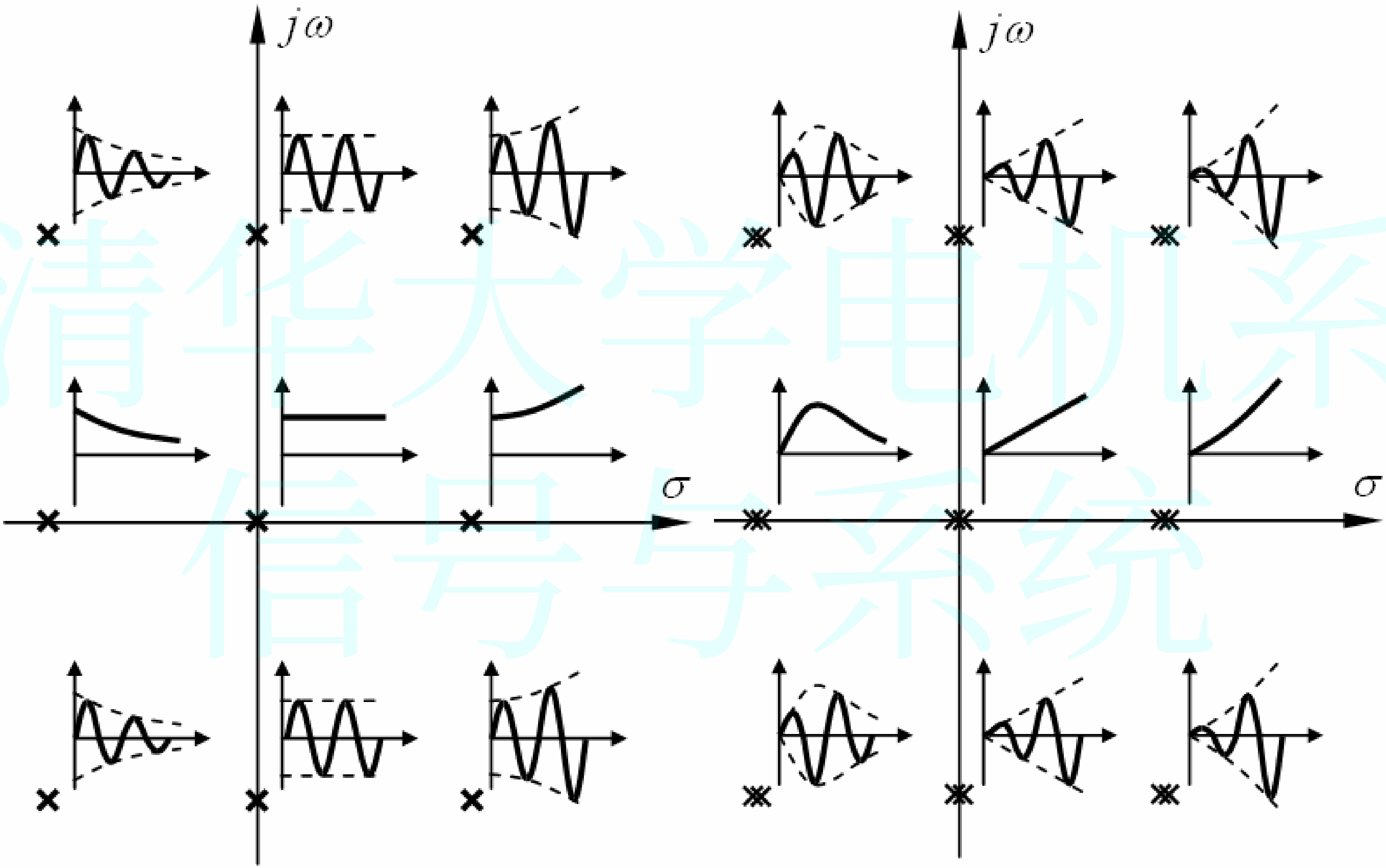
$$\left|r(t)\right| \le M_{\mathrm{r}}$$

则称该系统是稳定的。式中，$M_{\mathrm{e}}, M_{\mathrm{r}}$为有界正值。

稳定系统的充分必要条件是（绝对可积条件）：

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|h(t)\right|\mathrm{d}t \le M \quad M\text{为有界正值。}$$

s平面不同位置（单阶和二阶）极点对应的系统单位冲激响应特征示意图



由$H(s)$的极点位置判断系统稳定性

1．稳定系统

若$\boldsymbol{H(s)}$的全部极点位于$\boldsymbol{s}$平面的左半平面（不包括虚轴），则可满足

$$\lim_{t\to\infty} h(t) = 0$$

系统是稳定的。

例如 $\dfrac{1}{s+p}$， $p > 0$ 系统稳定；

$$\frac{1}{s^2 + ps + q} \qquad p > 0, q > 0 \qquad \text{系统稳定。}$$

2. 不稳定系统

如果$H(s)$的极点位于s右半平面，或在虚轴上有二阶（或以上）极点

$$\lim_{t\to\infty} h(t) \to \infty$$

系统是不稳定系统。

3. 临界稳定系统

如果$H(s)$极点位于s平面虚轴上，且只有一阶。

$t\to\infty, h(t)$为非零数值或等幅振荡。

系统频率响应特性

如果系统单位冲激响应 $h(t)$ 的傅立叶变换存在，称为系统的频率响应特性

$$H(\omega)=\mathcal{F}[h(t)]$$

零状态响应 $r(t)$ $\longrightarrow$ $r(t)=e(t)*h(t)$

$$R(\omega)=E(\omega)H(\omega)$$

$$|R(\omega)|e^{j\phi_r(\omega)}=|E(\omega)|e^{j\phi_e(\omega)}|H(\omega)|e^{j\phi_h(\omega)}=|E(\omega)||H(\omega)|e^{j[\phi_e(\omega)+\phi_h(\omega)]}$$

有

$$\boxed{\begin{aligned}|R(\omega)|&=|E(\omega)||H(\omega)|\\ \phi_r(\omega)&=\phi_e(\omega)+\phi_h(\omega)\end{aligned}}$$

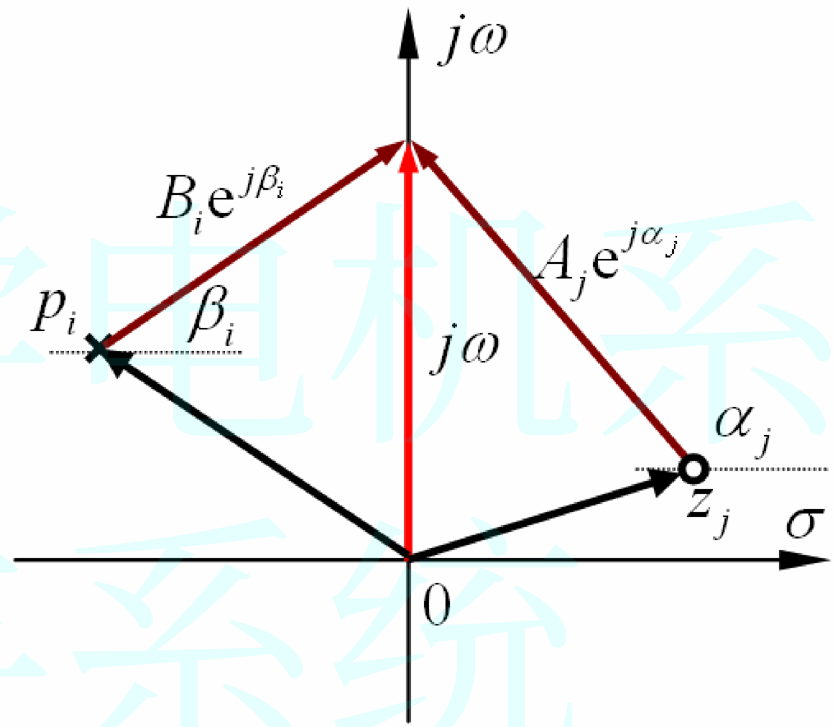
- 信号经过一个系统时，系统对信号影响包括：对各频率分量的幅值进行了加权，对各频率分量相位进行了平移。
- $H(\omega)$ 描述了系统对不同频率分量的影响，所以称为系统的频率响应特性
- 系统稳定时，H(s)在虚轴上的取值，即为系统的频率响应特性：

$$H(\omega)=H(s)\big|_{s=j\omega}$$

由系统函数的零极点分布分析系统的频率响应特性

根据系统函数$H(s)$的零极点分布可以用几何方法分析系统的频率响应特性。已知系统函数

$$H(s)=K\frac{\prod_{j=1}^{m}(s-z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)}$$



系统的频率响应特性为

$$H(\omega)=H(s)\big|_{s=j\omega}=K\frac{\prod_{j=1}^{m}(j\omega-z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(j\omega-p_i)}$$

将复变量$(j\omega-z_j)$和$(j\omega-p_i)$写成极座标的形式

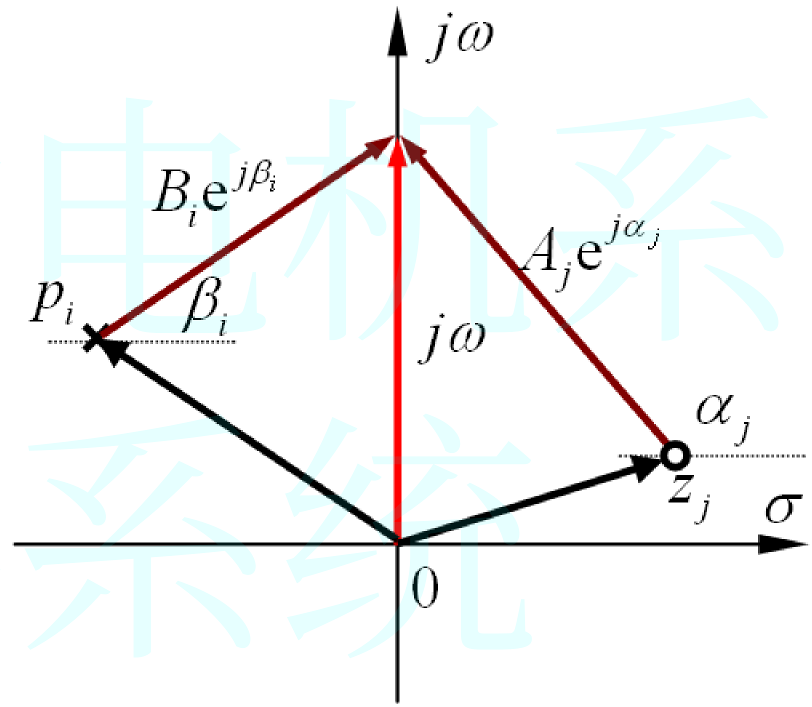
$$j\omega-z_j=A_j\exp(j\alpha_j)$$

$$j\omega-p_i=B_i\exp(j\beta_i)$$

则
$$H(\omega)=K\frac{\prod_{j=1}^{m}A_j}{\prod_{i=1}^{n}B_i}\exp\left[j(\sum_{j=1}^{m}\alpha_j-\sum_{i=1}^{n}\beta_i)\right]=|H(\omega)|\exp[j\phi(\omega)]$$

其中
$$|H(\omega)|=K\frac{\prod_{j=1}^{m}A_j}{\prod_{i=1}^{n}B_i}$$

$$\phi(\omega)=\sum_{j=1}^{m}\alpha_j-\sum_{i=1}^{n}\beta_i$$

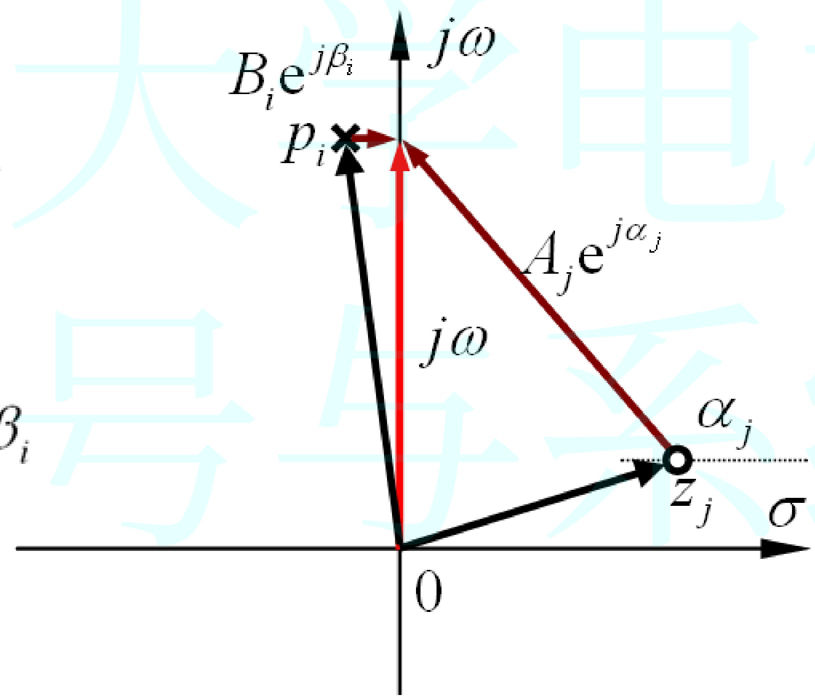


$j\omega$ 是一个起点在原点的变化向量，当 ω 从 $-\infty$ 变化到 ∞ 时，$j\omega$ 的终点沿着虚轴从 $-\infty$ 变化到 ∞，$|H(\omega)|-\omega$ 关系为系统频率响应特性的幅频特性；$\phi(\omega)-\omega$ 关系即为系统频率响应特性的相频特性。

如果系统有一个很靠近虚轴的零点 $z_j = \sigma_j + j\omega_j$，则频率变化到 $\omega = \omega_j$ 附近时，由于 A_j 的值比较小，系统的幅频特性将有一个波谷。如果系统有一个很靠近虚轴的极点 $p_i = \sigma_i + j\omega_i$，则频率变化到 $\omega = \omega_i$ 附近时，由于 B_i 的值比较小，系统的幅频特性将有一个波峰。

$$|H(\omega)| = K\frac{\prod_{j=1}^{m} A_j}{\prod_{i=1}^{n} B_i}$$

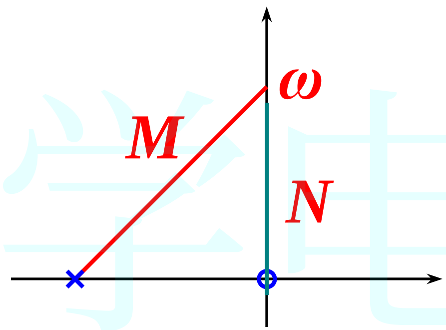
$$\phi(\omega) = \sum_{j=1}^{m}\alpha_j - \sum_{i=1}^{n}\beta_i$$

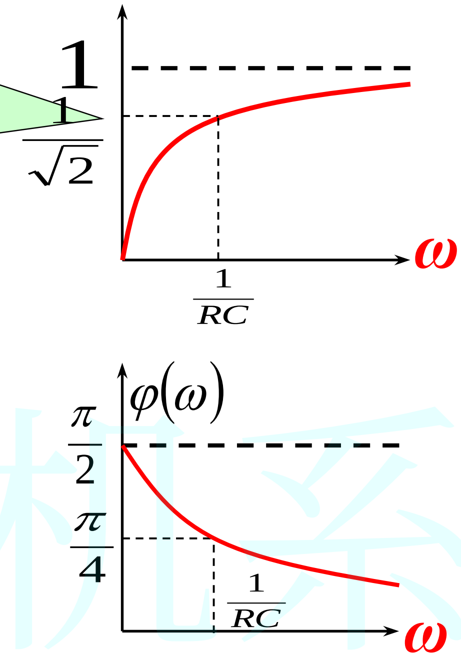


[例1] 微分电路

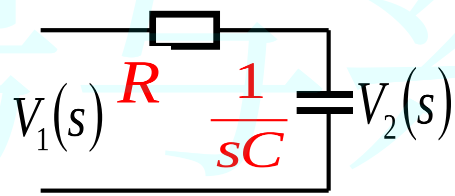
$$V_2(s)=\frac{R}{R+1/sC}\cdot V_1(s)$$

$$\frac{V_2(s)}{V_1(s)}=\frac{s}{s+1/RC}$$

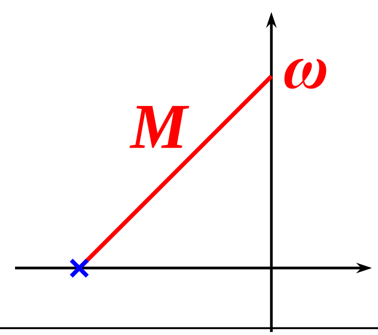


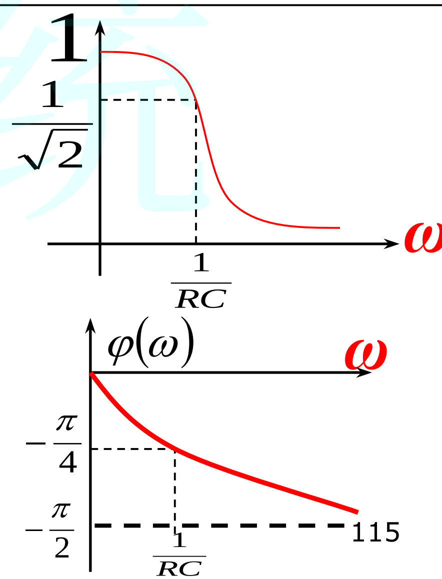


[例2] 积分电路



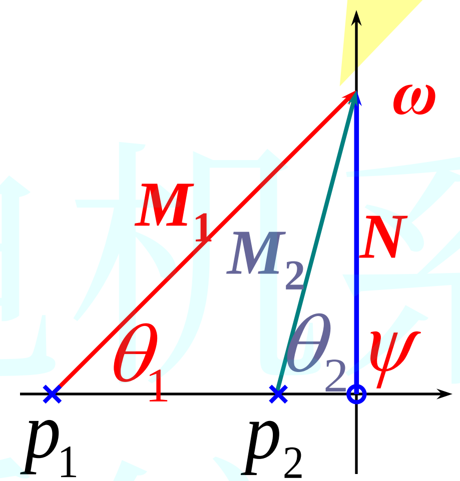
$$\frac{V_2(s)}{V_1(s)}=\frac{\frac{1}{RC}}{s+\frac{1}{RC}}$$





[例3] $H(s)=\dfrac{s}{(s+p_1)(s+p_2)}$， $p_1 >> p_2$

由同类性质元件构成的二阶系统，它们的极点都落在实轴上。



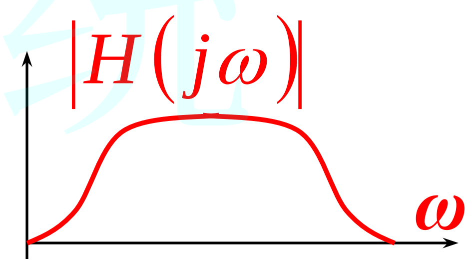
$$|H(j\omega)|=\frac{N}{M_1 \cdot M_2}$$

$$\varphi(\omega)=\psi-(\theta_1+\theta_2)$$

- 当ω较低时，M_1几乎不随ω变化，

  即 $|H(j\omega)| \approx kN/M_2$

  开始时N很小，然后 $N \approx M_2$(高通)



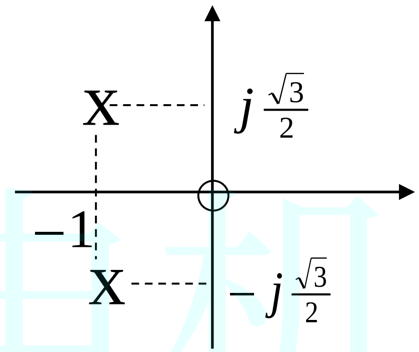
- 在中频段， $N \approx M_2$
- 当ω较高时，$|H(j\omega)| \approx 1/M_1$(低通)

已知某系统函数H(s)的零极点分布如图.

若 $h(0^+)=2$,

$e(t)=\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\cdot u(t)$

求系统稳态响应.



[解]　写出系统函数

$$H(s)=\frac{ks}{(s+1)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$h(0^+)=\lim_{s\to\infty}s\frac{ks}{(s+1)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=k=2$$

$$H(s)=\frac{2s}{(s+1)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

若 $e(t)=E_m\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t$

$$H(j\omega)=|H(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)}$$

则系统稳态响应 $r(t)=|H(j\omega_0)|E_m\sin[\omega_0 t+\varphi(\omega_0)]$

$$H\left(j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=H(s)\Big|_{s=j\frac{\sqrt{3}}{2}}=\cdots=\frac{\sqrt{3}}{2}e^{j30^\circ}$$

$$r(t)=\frac{\sqrt{3}}{2}E_m\sin\left[\frac{\sqrt{3}}{2}t+30^\circ\right]$$

频响特性

$$e(t)=E_m\sin\omega_0 t \quad\Rightarrow\quad E(s)=\frac{E_m\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$$

$$R(s)=\frac{E_m\omega_0}{S^2+\omega_0^2}\cdot H(s)$$

假设$H(s)$极点都是一阶的

$$=\underbrace{\frac{K_{-j\omega_0}}{s+\mathrm{j}\omega_0}+\frac{K_{j\omega_0}}{s-\mathrm{j}\omega_0}}_{\text{强迫}}+\underbrace{\frac{K_1}{s-p_1}+\frac{K_2}{s-p_2}+\frac{K_3}{s-p_3}+\ldots+\frac{K_n}{s-p_n}}_{\text{自由}}$$

$$K_{-\mathrm{j}\omega_0}=(s+\mathrm{j}\omega_0)R(s)\Big|_{s=-\mathrm{j}\omega_0}=\frac{E_m\omega_0H(-j\omega_0)}{-2\mathrm{j}\omega_0}$$

$$K_{\mathrm{j}\omega_0}=(s-\mathrm{j}\omega_0)R(s)\Big|_{s=\mathrm{j}\omega_0}=\frac{E_m\omega_0H(j\omega_0)}{2\mathrm{j}\omega_0}$$

$$H(j\omega_0)=H_0e^{j\varphi_0}\Rightarrow H(-j\omega_0)=H_0e^{-j\varphi_0}$$

$$\Rightarrow \frac{K_{-j\omega_0}}{s+j\omega_0}+\frac{K_{j\omega_0}}{s-j\omega_0}=\frac{E_m H_0}{2j}\left[-\frac{e^{-j\phi_0}}{s+j\omega_0}+\frac{e^{j\phi_0}}{s-j\omega_0}\right]$$

$$L^{-1}\left(\frac{K_{-j\omega_0}}{s+j\omega_0}+\frac{K_{j\omega_0}}{s-j\omega_0}\right)=\frac{E_m H_0}{2j}\left[-e^{-j\phi_0}e^{-j\omega_0 t}+e^{j\phi_0}e^{j\omega_0 t}\right]$$

系统的完全响应为 ：

$$=E_m H_0\sin(\omega_0 t+\phi_0)$$

$$r(t)=L^{-1}[R(s)]=E_m H_0\sin(\omega_0 t+\varphi_0)+\sum_{i=1}^{n}K_i e^{p_i t}$$

对于稳定系统，极点应分布在S平面左半平面

→ 稳态响应即第一项

$$r_{ss}(t)=E_m H_0\sin(\omega_0 t+\varphi_0)$$

$$e(t)=E_m\sin\omega_0 t$$

结论：

正弦激励下，稳态响应仍为同频率的正弦信号。

其中 $\begin{cases}\text{幅频变化} & |H(j\omega_0)|=H_0\\ \text{相位变化} & \phi_0\end{cases}$