写出$\sin(x+iy)$的实部和虚部，并由此证明：方程$\sin(x+iy)=A+iB$有无穷多个解，这里x, y, A, $B\in R$且A, B是常数.

解. 由定义

$$\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i},$$

令$z=x+iy$, 得

$$\begin{aligned}\sin(x+iy) &= \tfrac{e^{i(x+iy)}-e^{-i(x+iy)}}{2i}\\ &= \tfrac{e^{ix-y}-e^{-ix+y}}{2i}\\ &= \tfrac{(\cos x+i\sin x)e^{-y}-(\cos x-i\sin x)e^{y}}{2i}\\ &= \tfrac{e^{-y}+e^{y}}{2}\sin x+i\tfrac{e^{y}-e^{-y}}{2}\cos x.\end{aligned}$$

由此可得

$$Re(\sin(x+iy))=\frac{e^{-y}+e^{y}}{2}\sin x,\qquad Im(\sin(x+iy))=\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}\cos x.$$

这时方程$\sin(x+iy)=A+iB$ 成为

$$\frac{e^{-y}+e^{y}}{2}\sin x=A,\qquad \frac{e^{y}-e^{-y}}{2}\cos x=B. \tag{0.1}$$

以下分别对$B=0$ 及$B\neq 0$进行讨论.

(1). $B=0$. 这时由(0.1)的第二式可知$y=0$或者$\cos x=0$.

(I). 当$|A|\leq 1$时，可取$y=0$, 这时(0.1)的第一式成为$\sin x=A$. 此方程有无穷多解$x=x_k=\arcsin A+2k\pi$, $k\in Z$. 这时方程$\sin(x+iy)=A+iB=A$ 有无穷多解$z=z_k=x_k=\arcsin A+2k\pi$, $k\in Z$.

(II). 当$|A|>1$时, 由(0.1)可知必有$\cos x=0$, $y\neq 0$. 这时有$|\sin x|=1$ 且当$A<-1$时，$\sin x=-1$, $x=x_k=\frac{-\pi}{2}+2k\pi, k\in Z$. 而当$A>1$ 时，$\sin x=1$, $x=x_k=\frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in Z$. 代入到(0.1)式的第一式，可得$\frac{e^{-y}+e^{y}}{2}=|A|>1$. 令$f(y)=\frac{e^{-y}+e^{y}}{2}$, $y\neq 0$. 因$f(y)$是y的偶函数，故可只讨论$y\in(0,+\infty)$的情况. 因$f'(y)=\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}>0, \forall y>0$. 又因$f(0)=1<|A|$, $f(+\infty)=+\infty$, 可得唯一$y_A>0$, 使得$f(\pm y_A)=|A|>1$.

这时方程(0.1)有无穷多解$z=z_k=x_k\pm iy_A=(\pm\frac{\pi}{2}+2k\pi)\pm iy_A$, $k\in Z$.

(2). $B\neq 0$. 这时由(0.1)知$y\neq 0$, 消去x后可得

$$\frac{4A^2}{(e^{y}+e^{-y})^2}+\frac{4B^2}{(e^{y}-e^{-y})^2}=1,\quad y\neq 0. \tag{0.2}$$

记

$$g(y)=\frac{4A^2}{(e^y+e^{-y})^2}+\frac{4B^2}{(e^y-e^{-y})^2},\quad y\neq 0.$$

则$g(y)$是y的连续偶函数，故可只讨论$y\in(0,+\infty)$即可. 因$B\neq 0$, 知$g(0^+)=+\infty$, $g(+\infty)=0$, 由连续函数介值定理可知存在$y_1>0$, 满足$g(\pm y_1)=1$. 将$y=\pm y_1$ 代入(0.1)中任一式, 再利用(0.2), 可解得$x=x_k$, $k\in Z$. 这时, 方程(0.1)有无穷多解$z=z_k=x_k\pm iy_1$, $k\in Z$.

试题二解答完毕.