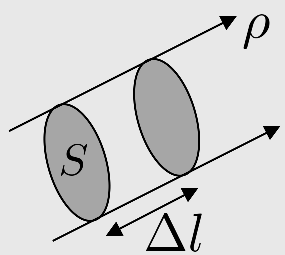
第二章 恒定电场（教材）

恒定电场的含义： $$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{E}}{\mathrm{d}t}=0$$

恒定电流的电场： $$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=I_{\mathrm{const}}\neq 0$$



$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}=0 \qquad I=\frac{\rho S\Delta l}{\Delta t}=\rho S v$$

如何产生电流?

1）运流电流（非导电媒质）

2）传导电流（导电媒质） $\boldsymbol{E}$ $\frac{\partial B}{\partial t}=0$

3）位移电流 $\frac{\partial D}{\partial t}=0$

第二章 导体中的恒定电流场

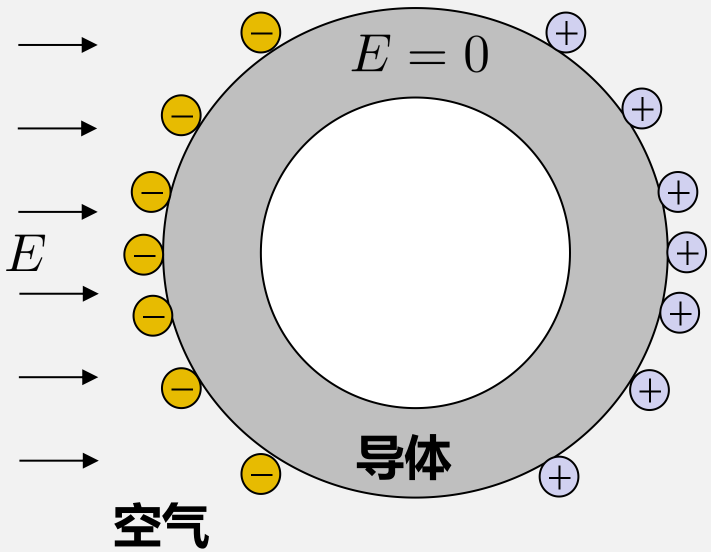
作业：第2章习题：5

1. 电流场研究的是什么问题?
2. 其场源为何?
3. 其物理量为何?
4. 基本方程为何?
5. 交界面条件为何?
6. 非完纯导体（或称为非理想介质）的交界面条件为何?
7. 静电场与电流场比拟的含义为何?
8. 电阻的求法?
9. 接地电阻的含义?
10. 直导线中通有直流时，电流在导线截面上为何是均匀分布?
11. 对于弯曲的导线（如圆弧形），为何靠内圆弧处的电流密度一定要大于靠外圆弧的电流密度?

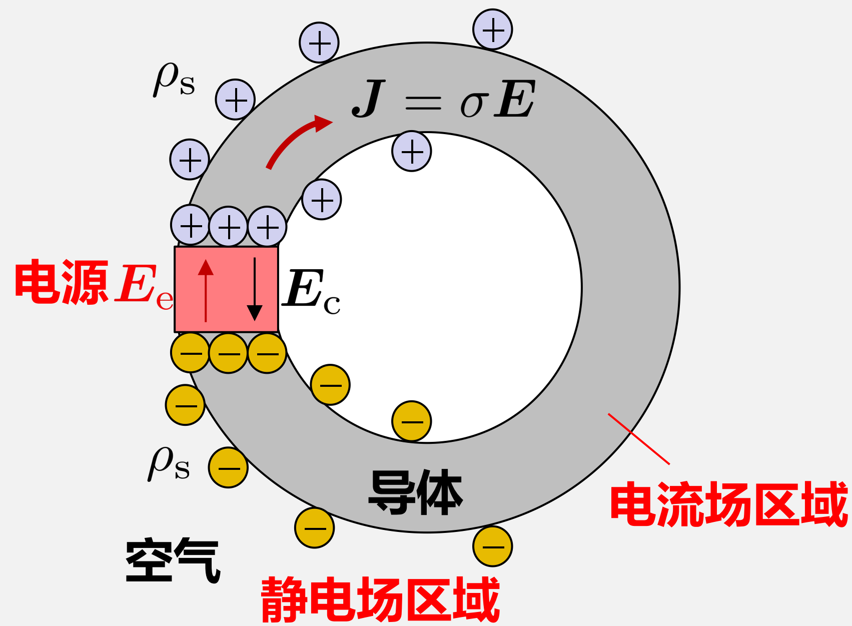
对思考题10、11题的提示：电场的闭合环路积分一定为零。

第二章 导体中的恒定电流场

恒定电流场研究的问题



第1章分析：
介质中的静电场；
导体内电场为零。



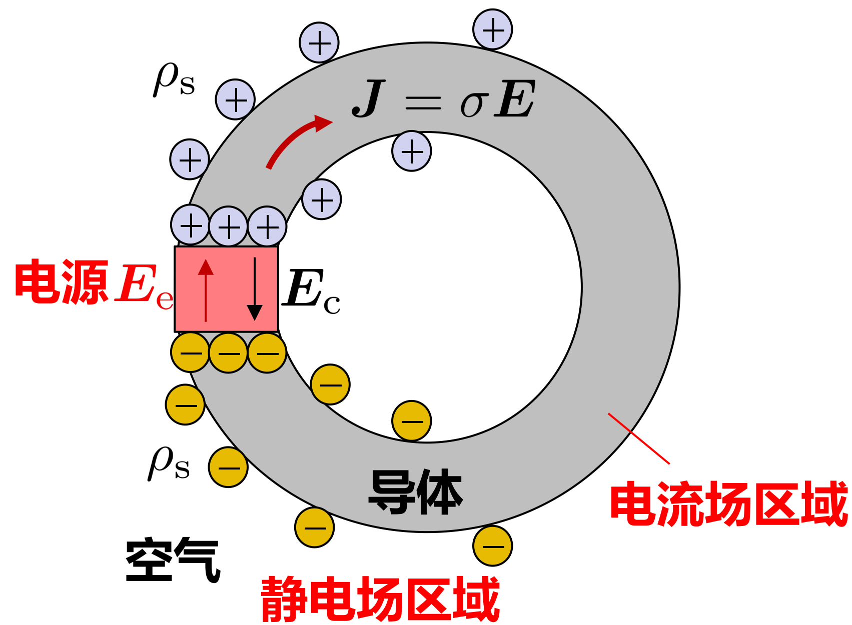
第2章分析：
导体或导电媒质中的恒定电流场(直流)；
分析导体内有直流时的电流密度场。

通有直流电流的导电媒质内与周围媒质中存在磁场，这是第3章的内容。

第二章 导体中的恒定电流场

导电媒质周围电介质中存在静电场

- 分析导体内的电场不必同时考虑外面的静电场，因导体内的电场和电流场模型可从整个空间分离出来；可分离的原因是导体表面的边界条件已知，即电场或电流密度的法向为零。矢量场在边界上已知其法向，则场就可被确定，解就唯一。



- 此时作为静电场区域边界的导体面上场量的法向与切向都未知。故要求外面的静电场需要先利用导体内的恒定电流场解出导体表面的场的切向分量作为边界条件。但本章不关注该静电场。

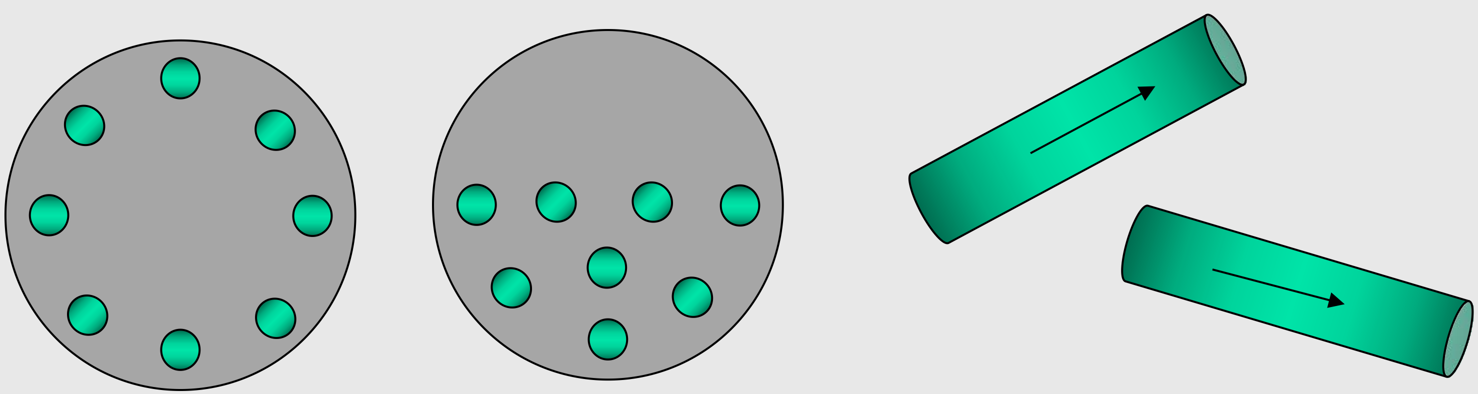
第二章 导体中的恒定电流场

恒定电流场的物理量——J

1. 电流的定义： 电流是电荷受电场力的作用而定向运动，定义正电荷运动方向为电流的方向。电流强度的定义为（一般说的电流是指电流强度或大小）：单位时间内通过某一曲面的电荷量，即

$$I = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}\Big|_S = \iint_S \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}S$$

只有对一个面积电流I才有定义或意义，且面要定一个方向。

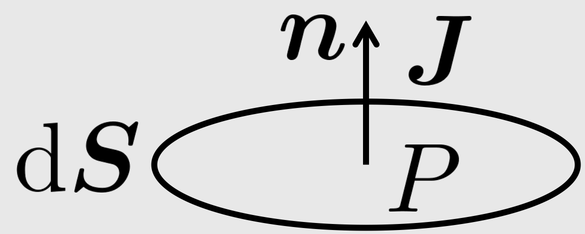


第二章 导体中的恒定电流场

恒定电流场的物理量——$\boldsymbol{J}$

2. 电流密度的定义：在具有电流的导体内，取点P，设该点处正电荷移动的方向为n，以n为法向做一个小面积dS，若其上流过的电流为dI，则该点的电流密度为：

$$\boldsymbol{J} = \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}S}\boldsymbol{n}$$



电流密度是**矢量**，是空间每点的函数，表示电流的分布。

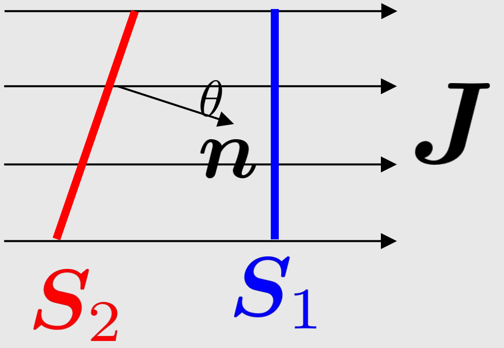
空间流动的电流的电流密度是面密度，单位为A/m^2。

第二章 导体中的恒定电流场

恒定电流场的物理量——$\boldsymbol{J}$

若有平面 S_2，其法向与J的方向成 θ 角，其上流过的电流仅等于$S_2\cos\theta$ 面积上的电流，故 $I=JS_2\cos\theta$；与S_1面的电流相同。

对于S面上不均匀的电流密度，电流为：



$$I=\iint_S \boldsymbol{J}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

电流是电流密度矢量的通量。

I 是标量，但可称为“有向”标量，其方向与定义的S的方向一致。

第二章 导体中的恒定电流场

恒定电流场的物理量——J, E

利用材料的电阻率ρ来描述其对电子运动的阻力，单位：欧米；

ρ的倒数σ称为电导率，单位：西门子/米(S/m)。

实验表明每一点电流密度与电场强度成正比：

$$J = \sigma E$$

材料的本构方程

A/m² 1/(Ωm) V/m

欧姆定律的微分形式！

$$I = \frac{1}{R} U$$

第二章 导体中的恒定电流场

恒定电流场的物理量——J, E

在有电源产生的局外等效电场强度E_e的情况下有：

$$\boldsymbol{J} = \sigma(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{E}_e)$$

在电源内E_e与E的方向相反

导体的电导率并非常数，其与温度有关。

大多数纯金属的电阻率温度系数约为0.004/摄氏度，即每增加一度电阻率增加0.4%;则100度比常温的电阻率约增加30%。

而温度又与电流引起的功耗有关，所以电导率是电流与电流作用时间的函数,达到热平衡后与时间再无关系。

本章不考虑电阻率随电流的变化现象。

第二章 导体中的恒定电流场

恒定电流场的基本方程（纯导电媒质）

由电荷守恒定律得恒定电流连续性定理

在电荷既不产生也不消失只有移动现象的空间（此为条件），电荷守恒定律为闭合面上电流密度的积分等于其内电荷时变量的负值，即：

$$\oiint \boldsymbol{J}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$$ S 取外法向

$$\underbrace{\oiint \boldsymbol{J}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iiint_V \nabla\cdot \boldsymbol{J}\,\mathrm{d}V}_{\text{高斯公式}} = -\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = -\iiint_V \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}V$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{J} = -\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} \Longrightarrow \nabla\cdot\boldsymbol{J} = 0$$

电荷守恒定律的微分形式　　　　恒定场中电流密度管状等通量性

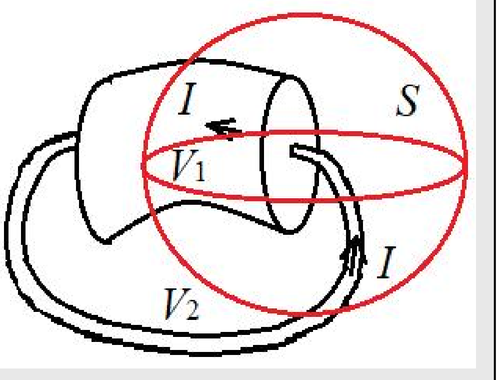
第二章 导体中的恒定电流场

恒定电流场的基本方程（纯导电媒质）

对恒定电流场，电流密度一定具有管状等通量性，即电流密度的闭合面积分一定为零吗?

在理论分析模型中，有时只取了实际问题的一部分场域，舍掉了其它有电流的场域，如图若只分析V_1而舍掉V_2区域，这使得原本与V_1和V_2区域相交的闭合面S上就不体现V_2区域的电流了，闭合面积分就不等于零了，就等于从V_1端面流进场域内的总电流，即

$$\oint_S \boldsymbol{J}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=I$$



该电流视为外接电流源的电流。该式类似于静电场的高斯通量定理。

第二章 导体中的恒定电流场

恒定电流场的基本方程（纯导电媒质）

推导旋度方程，可闭合环路的线积分。

$$\boldsymbol{E}_{\Sigma} = \boldsymbol{E} + \boldsymbol{E}_e$$ 电源内部

路径包含电源 $$\oint_l (\boldsymbol{E} + \boldsymbol{E}_e) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \mathcal{E}$$

路径不经过电源 $$\oint_l \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0$$

$$\oint_l \underbrace{\boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_S (\nabla \times \boldsymbol{E}) \cdot \mathrm{d}S}_{\text{斯托克斯公式}} = 0 \Rightarrow \nabla \times \boldsymbol{E} = 0$$

恒定电流场仍为电荷产生，保守场、无旋场。

第二章 导体中的恒定电流场

恒定电流场的基本方程（纯导电媒质）

微分形式

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J} = 0$$

积分形式

$$\oint_l \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0$$

$$\oiint \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0$$

$$\boldsymbol{J} = \sigma \boldsymbol{E}$$

第二章 导体中的恒定电流场

电位的引入及其满足的方程

$\nabla \times \boldsymbol{E} = 0$ 故仍可引入电位函数： $\boldsymbol{E} = -\nabla\varphi$

将上式代入$\nabla \cdot \boldsymbol{J} = 0$，并结合$\boldsymbol{J} = \sigma\boldsymbol{E}$

$$\nabla \cdot (\sigma\boldsymbol{E}) = \sigma\nabla \cdot \boldsymbol{E} + \boldsymbol{E} \cdot \nabla\sigma = -\sigma\nabla \cdot \nabla\varphi = 0$$

在均匀线性导电媒质中电位满足拉普拉斯方程： $\nabla^2\varphi = 0$

虽然在电流场与静电场中，电位与电场强度的关系相同，

但其表示的散度方程不同，分别是两种场中的电位；

两种电位的界面条件截然不同。

第二章 导体中的恒定电流场

恒定电流场的分界面条件（法向）

$$\oiint \boldsymbol{J}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=0$$

$$-J_{1n}\Delta S+J_{2n}\Delta S=0$$

左侧通量　　右侧通量

$$J_{1n}=J_{2n} \qquad \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{J}_1=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{J}_2$$

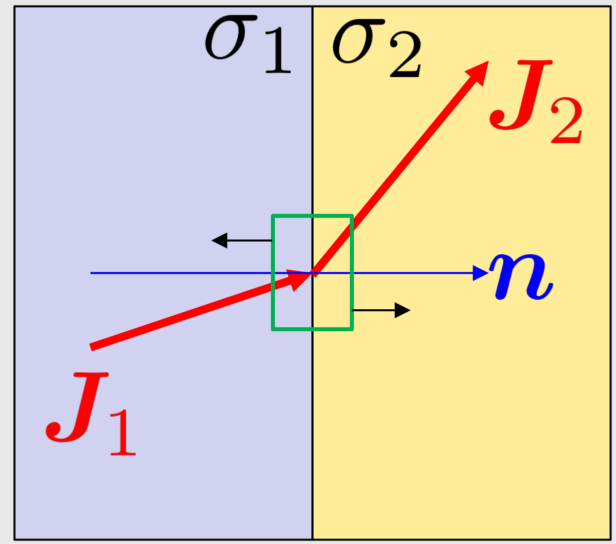
J 的法向分量连续

$$\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi$$

$$\boldsymbol{E}=\frac{\boldsymbol{J}}{\sigma}$$

$$\sigma_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}=\sigma_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}$$

电位形式



第二章 导体中的恒定电流场

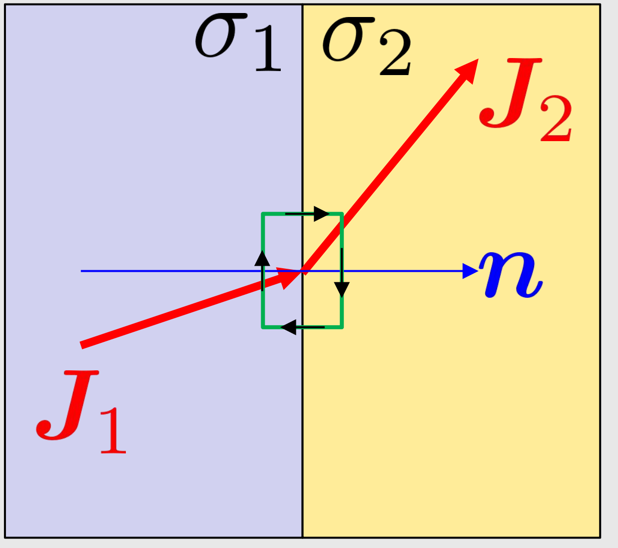
恒定电流场的分界面条件（切向）

$$\oint_l \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0$$

$$E_{1t}\Delta h - E_{2t}\Delta h = 0$$

左侧通量　　右侧通量

$$E_{1t} = E_{2t} \qquad \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{E}_1 = \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{E}_2$$



E **的切向分量连续**

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi_1 = \varphi_2$$

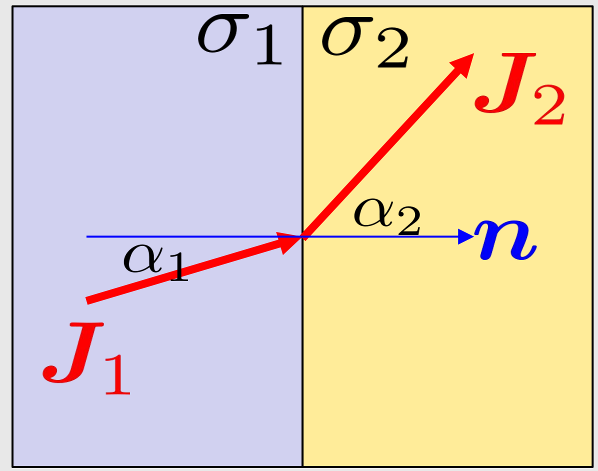
电位形式

第二章 导体中的恒定电流场

恒定电流场的分界面条件（折射定律）

$$J_{1n} = J_{2n}$$
$$E_{1t} = E_{2t}$$
$$\boldsymbol{J} = \sigma \boldsymbol{E}$$

$$\Rightarrow \frac{\tan\alpha_1}{\tan\alpha_2} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$$



当$\sigma_1 >> \sigma_2$时，α_2约为0°，此时区域2中J垂直界面

顺便指出：对于非完纯导体(有介质特性)，电流连续一定成立，故一定有：$J_{n1}=J_{n2}$。 $D_{n1}=D_{n2}$是否成立不一定，得看界面上是否有面电荷。一般情况下界面上是会有面电荷的，故 $D_{n1} \neq D_{n2}$。

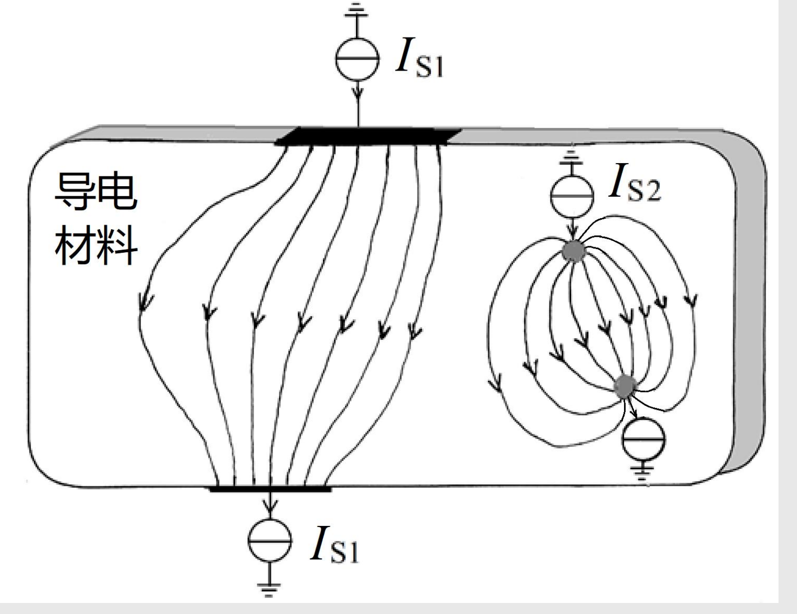
因此，第一步只管电流场求解，不管静电场；第二步再由解得的E和介电常数求D，再由D求电荷分布，对此将在后面分析。

第二章 导体中的恒定电流场

恒定电流场的边界条件

在外面为电介质的导体边界S_2上，
电流不能流出，导体侧表面是
一根根电流线，故有：

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{J}=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{E}=0$$



在电源与导电区域的连接处，
认为是由良导体做成的电极进行连接，
根据折射率可知，电流密度垂直进入场域，即

$$\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{J}=\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}=0$$

第二章 导体中的恒定电流场

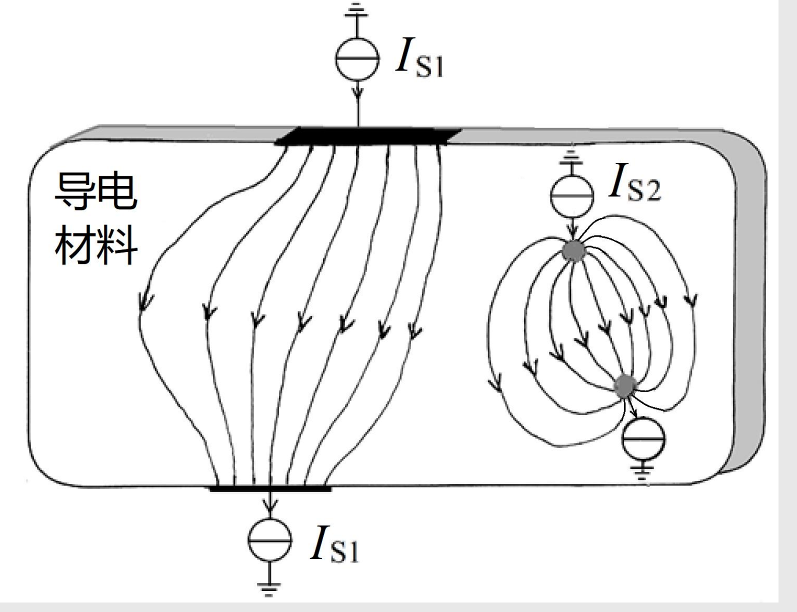
恒定电流场的边界条件

在齐次第一类边界S_1上，除任选一个S_1作为参考边界外，其它S_1上还要施加电流约束：

$$\iint_S \boldsymbol{J}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=I_S$$ S的法向n指向场域内

对于电位，需设参考点（边界），对电位未知的S_1需施加电流约束

$$-\iint_S \sigma\frac{\partial\varphi}{\partial n}\mathrm{d}S=I_S$$

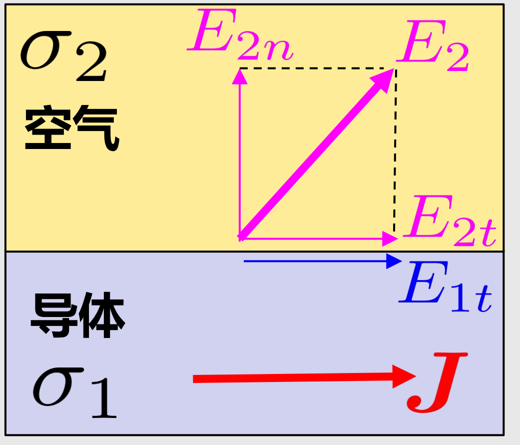


两种边界条件均可使导体中的场有唯一解，导体内与导体外的电场计算可以分离分开求解。

第二章 导体中的恒定电流场

恒定电流场的边值问题

由以上一般方程、界面条件和边界条件可得导体内电场与电位的边值问题形式。



顺便给出空气侧的边界条件：

$$J_{2n} = J_{1n} = 0$$

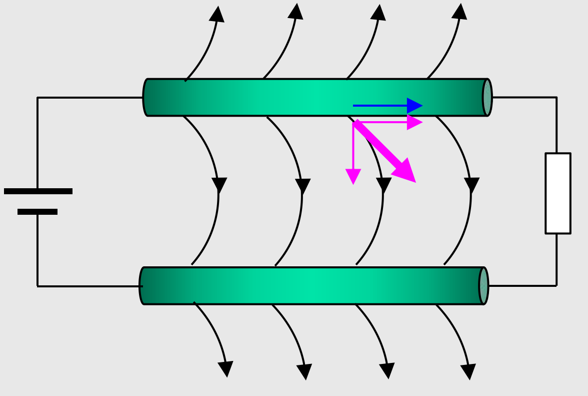
$$E_{2n} = J_{2n} / \sigma_2 = 0/0 \neq 0$$

$$E_{2n} = D_{2n} / \varepsilon_2 = \rho_s / \varepsilon_2$$

$$E_{2t} = E_{1t} = J_{1t} / \sigma_1 \neq 0$$

导体表面不是等位面。

导体外空气中的电场分布实例：



多选题 1分

设置

1）导电媒质内有恒定电流时，其内各点的电荷为零

A 正确

B 不正确

2）两导电媒质界面上电荷为零

E 正确

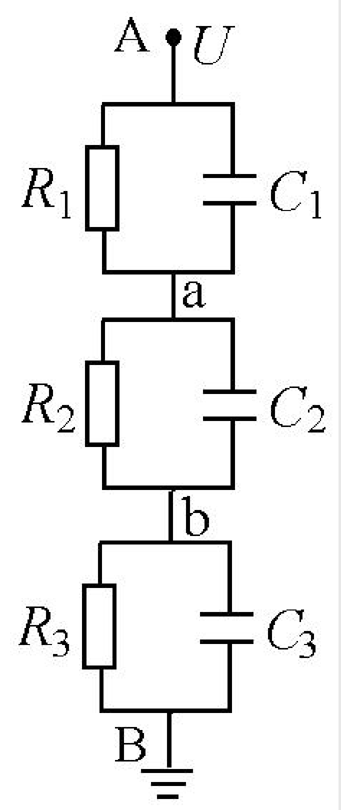
F 不正确

提交

第二章 导体中的恒定电流场

恒定电流场与静电场耦合问题

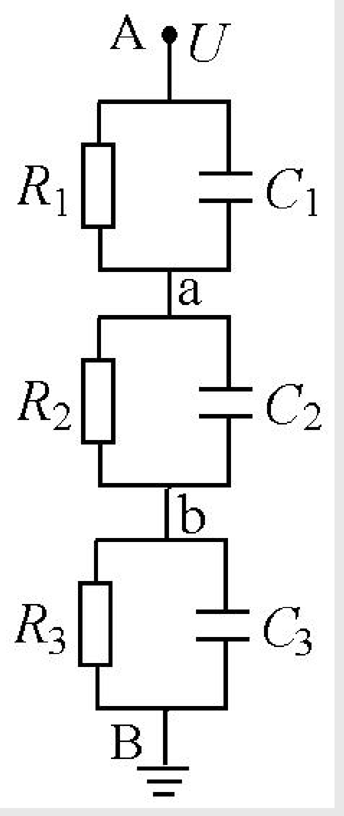
- 这类问题是电荷（电压）与介质决定电场强度E，E与电导率决定电流密度J，从而决定电流I。
- 若给定激励电流源I时，可先求解J，然后计算E，之后结合介电常数计算电位移D，由D可计算电荷分布。
- 在给定电压下，可先设I，求出E后计算电压U，得到U与I的关系，从而得到U表示的E与J。
- 这种问题从电路看是电阻与电容的并联。
- 直流下电容相当于开路，电压由电流与电阻确定，与电容无关，但电荷分布与电容有关。
- 对于非均匀媒质，或分块均匀的媒质，可表示成多组电容与电阻的并联然后再串联接直流电源的情况。



第二章 导体中的恒定电流场

恒定电流场与静电场耦合问题

- 只有电容时，a点两侧极板电荷之和一定为零，b点类似。
- 当电阻与电容都存在时，a和b点的电压取决于电阻分压。
- R_1与R_2上的电压也即电容上的电压与各自电容的乘积等于极板电荷，a点两侧极板的电荷之和不一定为零，此时a点处便有电荷积累，该点即为两媒质的交界面。



示例什么情况下，a、b处没有电荷积累?

$$R_1 : R_2 : R_3 = \frac{1}{C_1} : \frac{1}{C_2} : \frac{1}{C_2}$$

对于既有导电特性又有介质特性的材料，介质与导体特性同时存在，第1、2章内容均涉及，为本章重要部分。

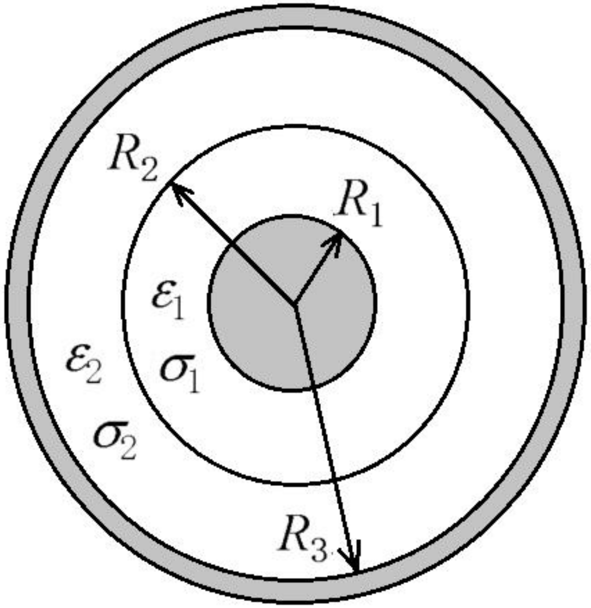
例1 同轴电缆中两层非理想电介质填充，电导率分别为σ_1和σ_2 ,介电常数分别为ε_1和ε_2。已知电缆内外导体间的单位长的漏电流为I 。

（1）计算电缆内的电场强度；

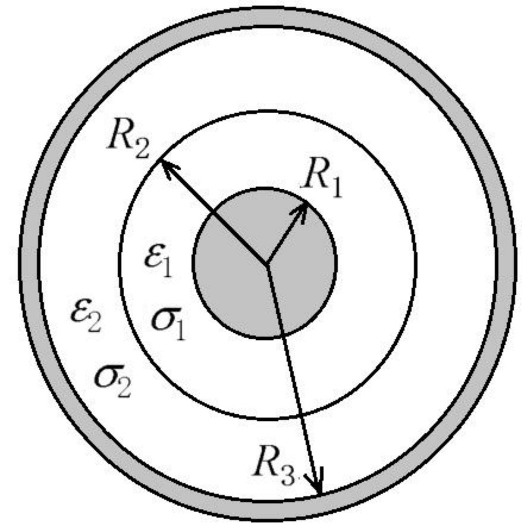
（2）计算两种介质分界面和导体表面上的自由电荷。

思路：此为恒定电流场与静电场同时存在的问题，**对这类问题先计算恒定电流场，再计算静电场，**因此时界面上会有自由电荷未知量，无法先求D。

为求电流场，先画电流密度线。由于对称结构，J仅有径向，仅为r的函数 $J_r(r)$。



(1）计算电缆内的电场强度；



由于已知电流I，故利用类似静电场中高斯定理的方法易求得电流密度。

利用 $\oint\!\!\oint_S \boldsymbol{J}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = I$ **取单位长圆柱面为积分面S。**

两底面的积分为零。

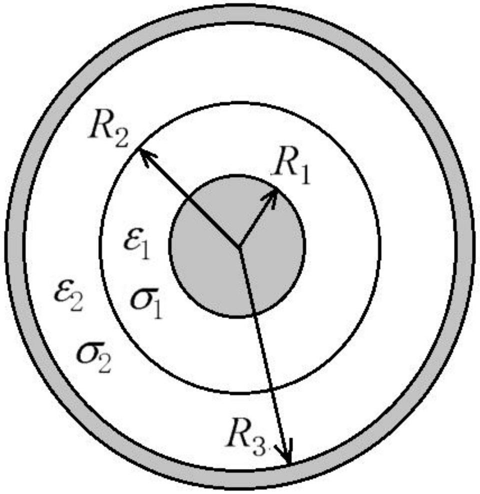
对圆柱面则有：

$$\oint\!\!\oint_S \boldsymbol{J}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oint\!\!\oint_S J\mathrm{d}S = J\oint\!\!\oint_S \mathrm{d}S = J2\pi r = I$$

故两区域均有： $J = \dfrac{I}{2\pi r}$

1区有： $E_1 = \dfrac{I}{2\pi\sigma_1 r}$ **2区有：** $E_2 = \dfrac{I}{2\pi\sigma_2 r}$

（2）计算两种介质分界面和导体表面上的自由电荷。



为了求媒质分界面上的电荷，需要利用：

$$\rho_S = D_{2n} - D_{1n} \quad \boldsymbol{n}\text{是从媒质1指向2}$$

现在求静电场的电位移*D*。电场强度*E*已求得，故有：

因此有： $D_1 = \varepsilon_1 E_1$， $D_2 = \varepsilon_2 E_2$；

电位移在分界面上只有法向，故介面上的电荷面密度为：

$$\rho_{S\text{-}R2} = D_2(R_2) - D_1(R_2) = \varepsilon_2 E_2(R_2) - \varepsilon_1 E_1(R_2)$$

$$= \varepsilon_2 \frac{I}{2\pi\sigma_2 R_2} - \varepsilon_1 \frac{I}{2\pi\sigma_1 R_2} = \left(\frac{\varepsilon_2}{\sigma_2} - \frac{\varepsilon_1}{\sigma_1}\right)\frac{I}{2\pi R_2}$$

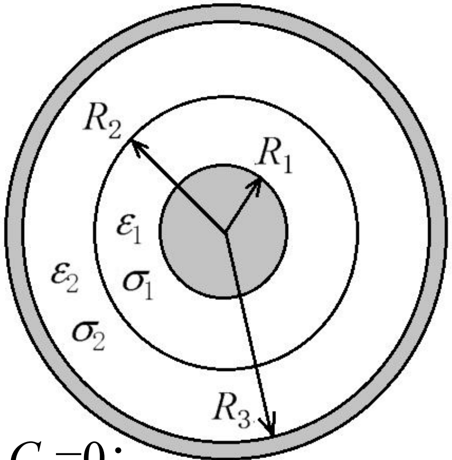
芯线表面电荷： $q_{S\text{-}R1} = \rho_{S\text{-}R1} 2\pi R_1 = D_1(R_1) 2\pi R_1$

$$= \varepsilon_1 \frac{I}{2\pi\sigma_1 R_1} 2\pi R_1 = \frac{\varepsilon_1}{\sigma_1} I$$

外皮表面电荷： $q_{S\text{-}R3} = -\frac{\varepsilon_2}{\sigma_2} I$ **三个面的电荷总和为零。**

例2 同轴电缆中两层非理想电介质填充，电导率分别为σ_1和σ_2，介电常数分别为ε_1和ε_2。**若已知的是电缆内外导体间的电压为U_S，求电场强度。**

思路1： 对于已知电压的情况可以利用边值问题求解。



圆柱坐标系下电位的边值问题为：

$$
\begin{cases}
\nabla^2\varphi_1(r)=\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}[r\varphi_1(r)]=0\\
\nabla^2\varphi_2(r)=\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}[r\varphi_2(r)]=0\\
\varphi_1(R_2)=\varphi_2(R_2)\\
\sigma_1\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial n}\Big|_{r=R_2}=\sigma_2\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial n}\Big|_{r=R_2}\\
\varphi(R_3)=0\\
\varphi(R_1)=U_S
\end{cases}
$$

其通解为：

$$\varphi_1(r)=C_1\ln r+C_2$$
$$\varphi_2(r)=C_3\ln r+C_4$$

由R_3处的边界条件可得：$C_4=0$；

由R_1处的边界条件、电位连续的界面条件、法向导数界面条件分别得：

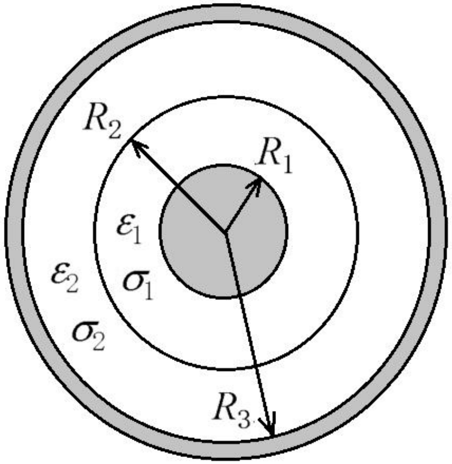
$$U_S=C_1\ln R_1+C_2 \qquad C_1\ln R_2+C_2=C_3\ln R_2$$
$$\sigma_1 C_1=\sigma_2 C_3$$

由此可求得C_1、C_2与C_3。

得到电位后求梯度可得电场强度。

例2 同轴电缆中两层非理想电介质填充，电导率分别为σ_1和σ_2 ,介电常数分别为ε_1和ε_2。若已知的是电缆内外导体间的电压为U_S， 求电场强度。

思路2：先设电流求电流场。



设从芯线单位长流出的电流I。

两区域均有： $J = \dfrac{I}{2\pi r}$

1区有：$E_1 = \dfrac{I}{2\pi\sigma_1 r}$

2区有：$E_2 = \dfrac{I}{2\pi\sigma_2 r}$

将E的表达式中的I用U替换

$$U = \int_{R_1}^{R_3} E\,\mathrm{d}r = \int_{R_1}^{R_2} E_1\mathrm{d}r + \int_{R_2}^{R_3} E_2\mathrm{d}r = \frac{I}{2\pi\sigma_1}\ln\frac{R_2}{R_1} + \frac{I}{2\pi\sigma_2}\ln\frac{R_3}{R_2}$$

$$I = 2\pi U / [\frac{1}{\sigma_1}\ln\frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{\sigma_2}\ln\frac{R_3}{R_2}]$$

将此式代入上面的E_1和E_2的表达式中可得所求。

例3 对于具有非均匀电导率σ和介电常数ε的导电媒质，极板间加直流电压后产生电流，证明媒质内可能有自由电荷。

证明： 由高斯通量定理：

$$\rho=\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\nabla\cdot(\varepsilon\boldsymbol{E})\quad=\varepsilon\nabla\cdot\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}\cdot\nabla\varepsilon=\varepsilon\nabla\cdot(\frac{\boldsymbol{J}}{\sigma})+\frac{\boldsymbol{J}}{\sigma}\cdot\nabla\varepsilon$$

$$=\varepsilon[\frac{1}{\sigma}\underbrace{\nabla\cdot\boldsymbol{J}}_{0}+\boldsymbol{J}\cdot\nabla\frac{1}{\sigma}]+\frac{1}{\sigma}\boldsymbol{J}\cdot\nabla\varepsilon\quad=\varepsilon\boldsymbol{J}\cdot\nabla\frac{1}{\sigma}+\frac{1}{\sigma}\boldsymbol{J}\cdot\nabla\varepsilon$$

$$=\boldsymbol{J}\cdot(\varepsilon\nabla\frac{1}{\sigma}+\frac{1}{\sigma}\nabla\varepsilon)=\boldsymbol{J}\cdot\nabla\frac{\varepsilon}{\sigma}$$

只要$\nabla\frac{\varepsilon}{\sigma}$的值不正好等于零就有自由体电荷。

可见，两个参数一个均匀一个不均匀就定有自由体电荷；
两个参数都均匀就没有体电荷。

上面用到了矢量恒等式： $\nabla\cdot(u\boldsymbol{A})=u\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\cdot\nabla u$

第二章 导体中的恒定电流场

第二章1-3节小结

1. 电流场研究的是什么问题? ⇨ 导体中的恒定电流场
2. 其场源为何? ⇨ 电压源、电流源
3. 其物理量为何? ⇨ ***J*, *E***
4. 基本方程为何?

⇨ $\nabla\times E=0\quad \nabla\cdot J=0\quad \boldsymbol{J}=\sigma\boldsymbol{E}\quad \nabla^2\varphi=0$

5. 交界面条件为何?

⇨ $J_{1n}=J_{2n}\qquad E_{1t}=E_{2t}$

$$\sigma_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}=\sigma_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}\qquad \varphi_1=\varphi_2$$