A

清华大学试题专用纸

考试课程：概率论与数理统计　考试时间：2018 年 1 月 15 日 19：00—21：00

姓名______________学号 20____________班级________.

一 填空题（每空 3 分，共 30 分；答案均写在试卷上，注意标清题号）

1. 设事件 A,B 满足 $P(B)=0.4$，$P(\bar{A}|B)=0.7$，$P(\bar{A}|\bar{B})=0.3$，则 $P(B|A)=$________________。

2. 设 $X\sim N(1,4)$，$P(X<a)=\Phi(2)$。则 $a=$____________________。

3. 随机变量 X 服从泊松分布，且已知 $P(X=1)=P(X=2)$，求 $P(X=4)=$____________________。

4. 二维随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为 $p(x,y)=\dfrac{1}{6\sqrt{3}\pi}\exp\left\{\dfrac{-2}{3}\left[\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{xy-x}{6}+\dfrac{(y-1)^2}{4}\right]\right\}$， 令 $U=3X+1$，$V=5-2Y$，则 U 和 V 的相关系数=__________________________。

5. (X,Y) 的联合密度函数 $p(x,y)=\begin{cases}\dfrac{e^{-(x+y)/2}}{4}, & x,y>0\\ 0, & 其他\end{cases}$， $Z=\begin{cases}Y, & 若\ X\ge Y\\ 3X, & 若\ X<Y\end{cases}$，则 $E(Z)=$_______。

6. 二元连续型随机变量 (X,Y) 的密度函数为 $p(x,y)=\begin{cases}1/4, & 0<|y|<x<2\\ 0, & 其他\end{cases}$，则条件密度函数 $p_{X|Y}(x|y)$ 为______________________________，条件期望 $E(X|Y)$ 为______________________________。

7. 二维随机变量 $(X,Y)\sim N(0,0,1,1,0.5)$，$E(X^2|X+Y=0)=$__________________________。

8. 设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，利用切比雪夫不等式估计，$P\{|X-\mu|\le 3\sigma\}\ge$__________________________。

9. $X_1,\cdots,X_n$ 为期望 $\dfrac{1}{\lambda}$ 的指数分布总体的简单随机样本，已知 $X=2\lambda(X_1+\cdots+X_n)\sim\chi^2(2n)$，则参数 λ 的置信水平 $1-\alpha$ 的双侧置信区间为____。

二. (10 分) 有两枚硬币 A 与 B，其中硬币 A 为均匀硬币，硬币 B 抛出正面的概率为 $1/4$。在时刻 $t=0$ 时，抛硬币 A，如果出现正面，那么在时刻时 $t=1$ 仍旧抛硬币 A，否则改抛硬币 B。一般地，如果 $t=n$ 时出现正面，则下一次抛硬币 A，否则抛硬币 B。记 p_n 为 $t=n$ 时所抛硬币出现正面的概率。

（1）试求 p_n 的递推公式，并计算 p_1 和 p_2；

（2）若已知 $t=2$ 时出现正面，问 $t=1$ 时硬币出现正面的概率。

三.（8 分）随机变量 $X\sim N\left(0,\sigma^2\right)$，求随机变量 $Y=|X|/2$ 的概率分布函数、密度函数和期望。

四.（10 分） 甲、乙约定在下午 4 点至 5 点之间见面。甲到达后会耐心等待至乙到达，若没有等到乙，甲也会坚持到 5 点整再离去；而乙到达时若没见到甲，则不会等待，马上离去。假设两人的到达时间相互独立，均服从 4 点至 5 点之间的均匀分布。求甲的等待时间的期望（以小时为单位）。

五.（10 分）已知二元随机变量 $\left(X,Y\right)$ 的联合分布列为

$X\backslash Y$	1	2
1	4/9	2/9
2	2/9	1/9

，设 $U=\max\left(X,Y\right)$, $V=\min\left(X,Y\right)$。

求 $\left(U,V\right)$ 的联合分布列和相关系数。

六.（8 分）（1）写出一个随机变量具有无记忆性的概率表达式；

（2）利用重期望公式和几何分布的无记忆性，计算参数为 p 的几何分布随机变量的期望和方差。

七．（12 分）总体 X 服从期望为 $1/\lambda$ 的指数分布，$X_1,\cdots,X_n$ 为该总体的简单随机样本。定义 $Y_k=\begin{cases}X_k, & \text{当} X_k<T \text{时}\\ T, & \text{当} X_k\ge T \text{时}\end{cases}$，记 $Y_1,\cdots,Y_n$ 中取值为 T 的随机变量的个数为 Z。

（1）求 Z 的分布；

（2）利用 Z 的取值给出参数 λ 的估计量；

（3）若样本容量为 3，X_1,X_2,X_3 的一组观测值为 84, 102，99， 用最大似然法求总体期望的估计值。

八.（12 分）设某工厂生产一种产品，它的一个指标参数服从正态分布 $N\left(\mu,3^2\right)$， $\mu\le 10$ 为优级。利用简单随机样本 $X_1,\cdots,X_n$ 对参数 μ 做如下假设检验，$H_0:\mu\le 10$ VS $H_1:\mu>10$，设定显著性水平 $\alpha=0.1$。

（1）写出 $n=36$ 时，拒绝域的范围；

（2）$\mu=12$ 时，若出错是第几类错误？如要控制这类错误的发生概率不超过 0.1，n 至少为多少；

（3）计算 $n=36$ 条件下，$\bar{x}=11$ 的 p 值。

备注 1. 解答中标准正态随机变量的分布函数和密度函数分别可用 $\Phi(x)$ 和 $\varphi(x)$ 表示

备注 2. $\Phi(1.28)=0.9$, $\Phi(1.44)=0.925$, $\Phi(1.65)=0.95$, $\Phi(1.96)=0.975$, $\Phi(2.33)=0.99$

备注 3. 正态、χ^2、t 等分布所需取值，均用（下侧）分位数表示，例如 $X\sim\chi^2\left(n\right)$，则 $P\left(X<\chi_\alpha{}^2\left(n\right)\right)=\alpha$