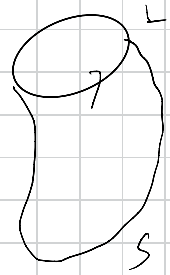
第二十一章

21.1 试证明麦克斯韦方程组在数学上含有电荷守恒的意思，即证明：如果没有电流出入给定的体积，那么这个体积内的电荷就保持恒定。（提示：由方程组(21.1)之第Ⅰ式得 $q=\varepsilon_0\Phi_e$，并根据第Ⅳ式求 $\frac{d\Phi_e}{dt}$ 值，这时应用口袋形曲面并令它的口（即积分路径 L）缩小到零。）



证：取口袋形面 S，当没有电流过 S 时，则无电流过 L，由Ⅳ式，

有 $\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{r} = \frac{1}{c^2}\cdot\frac{d}{dt}\int_S \vec{E}\cdot d\vec{s}$ ……①

当洞口收缩，$L=0$ 时，$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{r}=0$，此时①中 $\frac{d}{dt}\oint \vec{E}\cdot d\vec{s}=0$，此时 S 为封闭面

由Ⅰ有 $\oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0} \Rightarrow \frac{dq_{in}}{\varepsilon_0 dt} = \frac{d}{dt}\oint \vec{E}\cdot d\vec{s}=0 \Rightarrow$ q_{in} 不随 t 变化而变化，电荷守恒

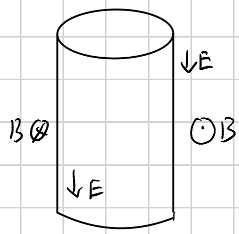
*21.11 一圆柱形导体，长为 l，半径为 a，电阻率为 ρ，通有电流 I（图 21.17）而表面无电荷，证明：

(1) 在这导体表面上，坡印亭矢量处处都与表面垂直并指向导体内部，如图所示。（注意：导体表面外紧邻处电场与导体内电场的方向和大小都相同。）

(2) 坡印亭矢量对整个导体表面的积分等于导体内产生的焦耳热的功率，即

$$\int \mathbf{S}\cdot d\mathbf{A} = I^2R$$

式中 $d\mathbf{A}$ 表示圆柱体表面的面积元，R 为圆柱体的电阻。此式表明，按照电磁场的观点，导体内以焦耳热的形式消耗的能量并不是由电流带入的，而是通过导体周围的电磁场输入的。



解：(1) $\vec{B}$，$\vec{E}$ 如图所示，由 $\vec{S}=\vec{E}\times\vec{B}/\mu_0$ 知 $\vec{S}$ 与 $\vec{B}$，$\vec{E}$ 垂直，且指向导体内部

(2) 由 $B=\frac{\mu_0 I}{2\pi a}$，$E=\rho J=\rho\cdot\frac{I}{\pi a^2}$，$A=2\pi a l$

有 $\int_A \vec{S}\cdot d\vec{A} = -\int_A \frac{EB}{\mu_0}\,dA = -\frac{\mu_0 I}{2\pi a}\cdot\frac{\rho I}{\mu_0\pi a^2}\cdot 2\pi a l = -\frac{I^2\rho l}{\pi a^2} = -I^2R$