第12讲
用状态方程和输出方程求解二阶电路
单位冲激响应

纸笔计算器

25日交S2

1 状态变量、状态方程和输出方程

2 用状态方程和输出方程求解二阶电路

3 单位阶跃函数与单位阶跃响应（课前）

4 单位冲激函数

5 单位冲激响应

物理→数学

本讲重难点

- 状态/输出方程的列写方法
- 用状态/输出方程求解二阶电路
  - 响应形式
  - 任意支路量的初值
  - 任意支路量一阶导的初值
- 单位冲激响应的求解

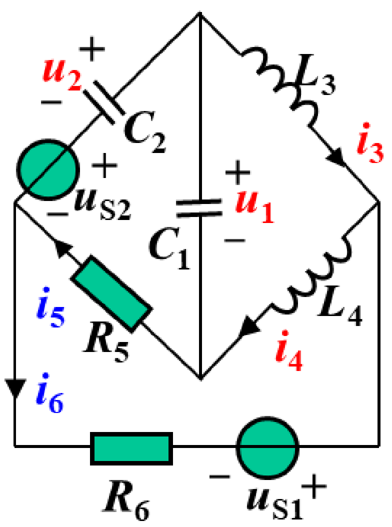
1　状态变量与状态方程
—分析动态电路的另一种方法

为什么要用另一种方法来分析动态电路?

原因 1: 方程列写上的需要（例：求$i_6(t)$）

原因 2: 容易描述多输入多输出系统

例同时关心：i_5和i_6

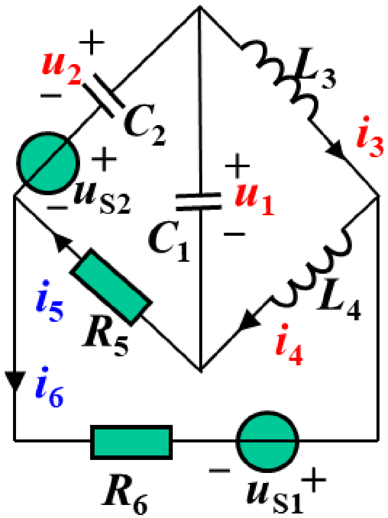


Principles of Electric Circuits Lecture 12 Tsinghua University 2023

3

1 状态变量与状态方程
—分析动态电路的另一种方法

(1) 状态变量



分析动态过程的独立变量。

选定系统中一组**最少数量**的变量 $X=[x_1,x_2,\ldots x_n]^T$，如果当 $t=t_0$ 时这组变量 $X(t_0)$ 和 $t\geq t_0$ 后的输入 $e(t)$ 为已知，就可以确定 t_0 及 t_0 以后**任何时刻**系统的**响应** $Y(t)$。

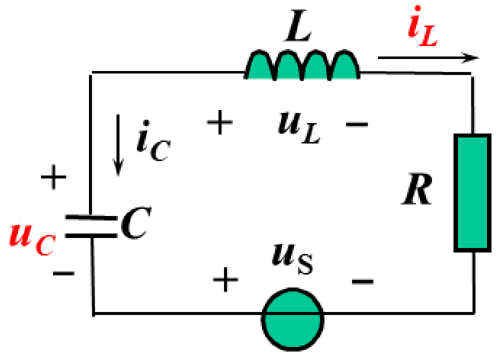
$$\left.\begin{matrix} X(t_0) & \\ e(t) & t\geq t_0 \end{matrix}\right\} Y(t) \qquad t\geq t_0$$

称这一组最少数目的变量为**状态变量**。

（2） 状态方程—求解状态变量的微分方程

列状态方程

----用状态变量和激励的线性组合来表示状态变量的微分



设 u_C ，i_L 为状态变量

试列一下（用u_C, i_L和独立源的线性组合表示u_C, i_L的微分）

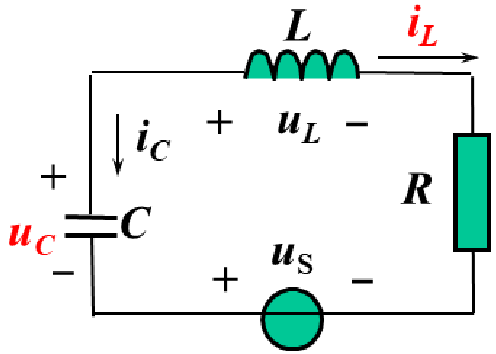
纸笔写写画画-投稿

Principles of Electric Circuits Lecture 12 Tsinghua University 2023

(2) 状态方程—求解状态变量的微分方程

列状态方程

----用状态变量和激励的线性组合来表示状态变量的微分



设 u_C ，i_L 为状态变量

$$C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}=i_C=-i_L$$

$$L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}=u_L=u_C+u_S-Ri_L$$

整理为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{1}{C}i_L\\[2ex]\dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}=\dfrac{1}{L}u_C-\dfrac{R}{L}i_L+\dfrac{1}{L}u_S\end{cases}$$

状态方程

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{C} i_L \\ \dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{L} u_C - \dfrac{R}{L} i_L + \dfrac{1}{L} u_S \end{cases}$$

特点

(1) 一阶微分方程组

(2) 左端为状态变量的一阶导数

(3) 右端为状态变量和输入量的线性组合

矩阵形式

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} \\ \dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{1}{C} \\ \dfrac{1}{L} & -\dfrac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{L} \end{bmatrix} u_S$$

式中

$$[\boldsymbol{x}] = [\boldsymbol{x}_1 \ \boldsymbol{x}_2 \ \cdots \ \boldsymbol{x}_n]^{\mathrm{T}}$$

$$[\dot{x}] = [\dot{x}_1 \ \dot{x}_2 \ \cdots \dot{x}_n]^{\mathrm{T}}$$

$$[\boldsymbol{u}] = [\boldsymbol{u}_1 \ \boldsymbol{u}_2 \ \cdots \ \boldsymbol{u}_r]^{\mathrm{T}}$$

一般形式 $\dot{x} = [A][x] + [B][u]$

根据该方程和初值即可求解出 t_1 时刻的状态变量值。

注：左侧状态变量导数的顺序和右端状态变量的顺序一致

几点说明：

(1) 过渡过程就是一个稳定的能量状态过渡到另一个稳定能量状态的过程。线性电路中的能量状态完全由电感电流和电容电压决定，因而很自然地选择它们为决定电路状态的量。

(2) 状态变量的个数等于独立的储能元件个数。

(3) 一般选择u_C和 i_L为状态变量。

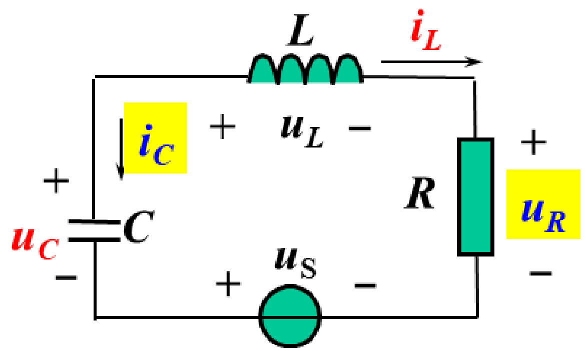
也可以选q 和ψ为状态变量。

状态变量的选择不唯一。

(3) 输出方程 —用状态变量表示输出的代数方程

设输出变量为u_R、i_C

如何用状态变量和激励的线性组合表示输出变量?

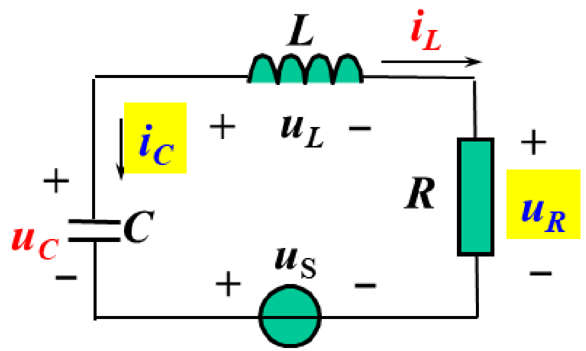


试列一下（用u_C, i_L和独立源的线性组合来表示u_R, i_C）
纸笔写写画画-投稿

Principles of Electric Circuits Lecture 12 Tsinghua University 2023

(3) 输出方程 —用状态变量表示输出输出的代数方程

设输出变量为u_R、i_C



如何用状态变量和激励的线性组合表示输出变量?

$$u_R = Ri_L \qquad i_C = -i_L$$

$$\begin{bmatrix} u_R \\ i_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & R \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_S(t)$$

可用于描述输出为u_R、i_C的两输出系统

一般形式 $[y]=[C][x]+[D][u]$

根据该方程即可求解出t_1时刻的输出变量值。

特点 (1) 代数方程

(2) 用状态变量和输入量的线性组合表示输出量

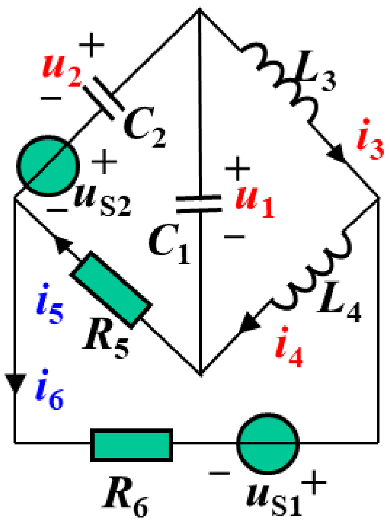
单选题 1分

关于状态方程和输出方程，下面正确的描述是

- A 都是微分方程(组)
- B 都是代数方程(组)
- C 等号的右边都是状态变量和独立源的线性组合
- D 状态方程和输出方程在等号左边的变量数一样

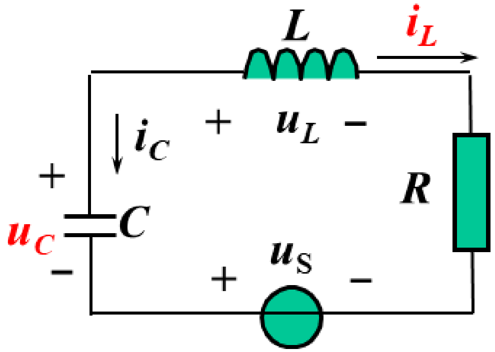
多输入多输出系统怎么处理

- 找到状态变量和输出变量（对电路来说比较好办）
- 列出状态方程（本讲）
- 列写输出方程（本讲）
- 求解出状态变量（后续课程）
- 求解出输出变量（容易）



(4) 列写状态方程和输出方程的方法

$$\begin{cases} C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}=i_C=-i_L \\ L\dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}=u_L=u_C+u_S-Ri_L \end{cases}$$



状态方程的特点:

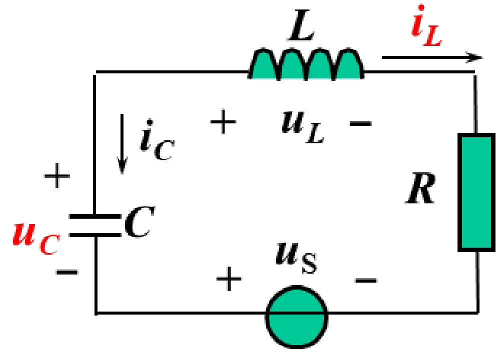
用电容电压、电感电流和独立源的线性组合来表示电容电流和电感电压

是否有系统性的做法?
此处可以有弹幕

Principles of Electric Circuits Lecture 12 Tsinghua University 2023

(4) 列写状态方程和输出方程的方法

$$
\begin{cases}
C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = i_C = -i_L \\
L\dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} = u_L = u_C + u_S - Ri_L
\end{cases}
$$



状态方程的特点：

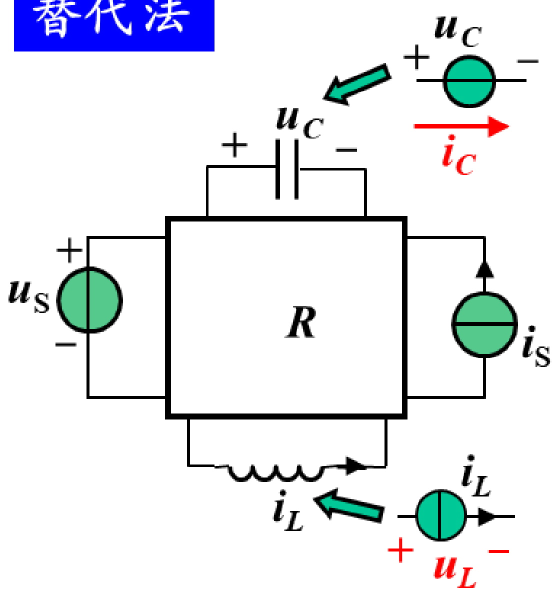
用电容电压、电感电流和独立源的线性组合来表示电容电流和电感电压

电容替代为电压源，电感替代为电流源

→电阻电路

→求该电压源电流和电流源电压

替代法



(1) 将电源、电容、电感均抽到网络外，网络内仅包含电阻。

(2) 电容用电压源替代，电感用电流源替代，**构成电阻电路**。

(3) 求i_C , u_L。

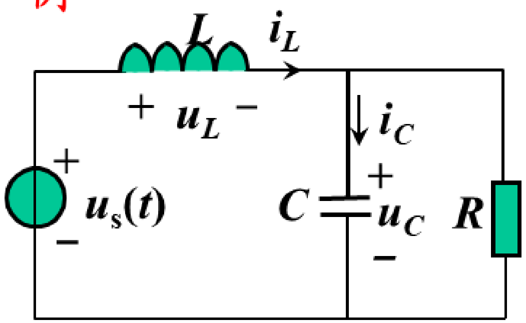
(4) 等号两边同除以C或L。

则 u_S、i_S、u_C、i_L共同作用下的 i_C , u_L为：

$$i_C = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} \qquad u_L = L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}$$

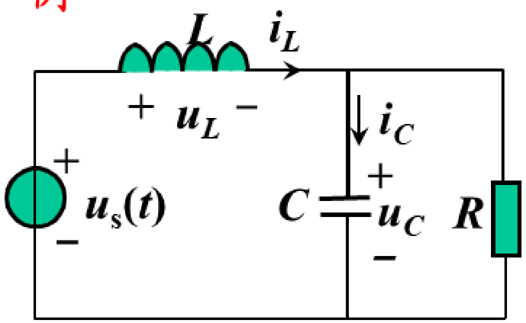
$$\begin{bmatrix} i_C \\ u_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_S \\ i_S \end{bmatrix}$$

例

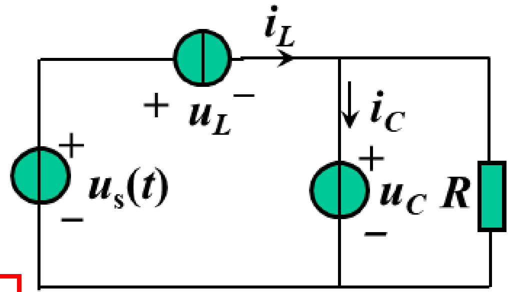


替代定理
将电容看作电压源
电感看作电流源

例



替代定理
将电容看作电压源
电感看作电流源



求解
流过电容电压源电流
电感电流源上电压

$$C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}=i_C=i_L-\frac{u_C}{R}$$

$$L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}=u_L=u_s-u_C$$

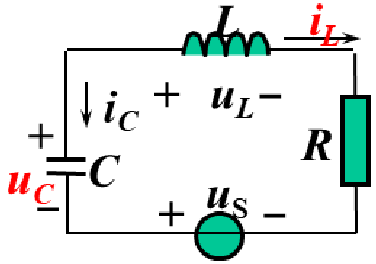
$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{1}{RC}u_C+\dfrac{1}{C}i_L\\[2ex]\dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{1}{L}u_C+\dfrac{1}{L}u_s\end{cases}$$

2 用状态方程求解二阶电路

回顾

- 求响应形式（过/临/欠/无）
  - （零输入下）*RLC*串联、*RLC*并联
  - 零输入下非*RLC*串/并联怎么办→L12
- 求稳态值→ 得通解表达式
  - 电阻电路
- 求初值
  - 电阻电路
- 求导数初值
  - 将支路量用独立源、u_C、i_L来表示→0^+电路求i_C、u_L
  - L12（根据输出方程和状态方程）
- 用初值和导数初值确定通解待定系数

问题1：如何利用状态方程求特征根?



$$\frac{d^2u_C}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{du_C}{dt}+\frac{1}{LC}u_C=0$$

$$\begin{bmatrix}\frac{du_C}{dt}\\ \frac{di_L}{dt}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -\frac{1}{C}\\ \frac{1}{L} & -\frac{R}{L}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_C\\ i_L\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{L}\end{bmatrix}u_S$$

特征方程

$$p^2+\frac{R}{L}p+\frac{1}{LC}=0$$

求系数矩阵特征值的方程

$$|\lambda I-A|=0$$

$$\begin{vmatrix}\lambda & \frac{1}{C}\\ -\frac{1}{L} & \lambda+\frac{R}{L}\end{vmatrix}=0 \Rightarrow \lambda^2+\frac{R}{L}\lambda+\frac{1}{LC}=0$$

用这两种方法得到的系统自由分量变化形式是一样的

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}\lambda-a & -b\\ -c & \lambda-d\end{vmatrix}=0$$

$$\lambda^2-(a+d)\lambda+(ad-bc)=0$$

数学解释

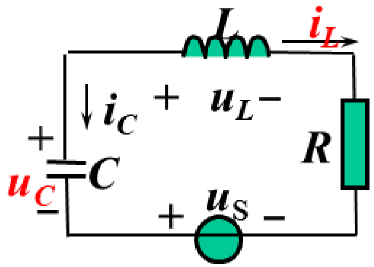
$$\dot{x}_1=ax_1+bx_2$$
$$\dot{x}_2=cx_1+dx_2$$

$$x_2=\frac{\dot{x}_1}{b}-\frac{ax_1}{b}$$

$$\frac{\ddot{x}_1}{b}-\frac{a\dot{x}_1}{b}=cx_1+d\left(\frac{\dot{x}_1}{b}-\frac{ax_1}{b}\right)$$

$$\ddot{x}_1-(a+d)\dot{x}_1+(ad-bc)x_1=0$$

物理解释



$$\frac{d^2u_C}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{du_C}{dt}+\frac{1}{LC}u_C=0$$

$$\begin{bmatrix}\frac{du_C}{dt}\\ \frac{di_L}{dt}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -\frac{1}{C}\\ \frac{1}{L} & -\frac{R}{L}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_C\\ i_L\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{L}\end{bmatrix}u_S$$

$$p^2+\frac{R}{L}p+\frac{1}{LC}=0$$

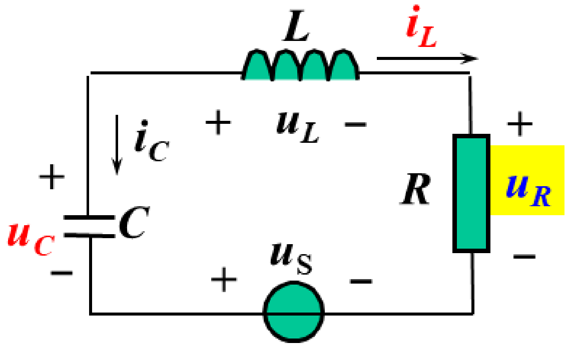
$$\lambda^2+\frac{R}{L}\lambda+\frac{1}{LC}=0$$

状态变量（u_C ，i_L）的变化规律反映了系统能量的变化

任何支路量（输出量）的变化都是状态变量的线性组合

状态矩阵特征根反映了任意支路量的变化趋势

问题2：如何利用输出方程、状态方程求任意支路量的导数初值?



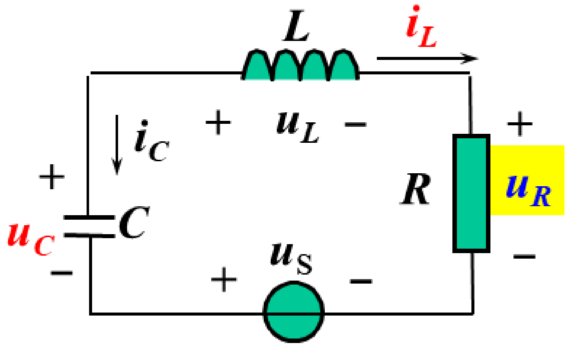
$$\begin{bmatrix} \dfrac{du_C}{dt} \\ \dfrac{di_L}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{1}{C} \\ \dfrac{1}{L} & -\dfrac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{L} \end{bmatrix} u_S$$

以待求支路量为输出的输出方程 $u_R = Ri_L$

→求导，得待求支路量的导数初值 $\left.\dfrac{du_R}{dt}\right|_{t=0^+} = R\left.\dfrac{di_L}{dt}\right|_{t=0^+}$

→利用状态方程得一阶导数初值

问题2：如何利用输出方程、状态方程求任意支路量的导数初值?



$$\begin{bmatrix} \frac{du_C}{dt} \\ \frac{di_L}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} u_S$$

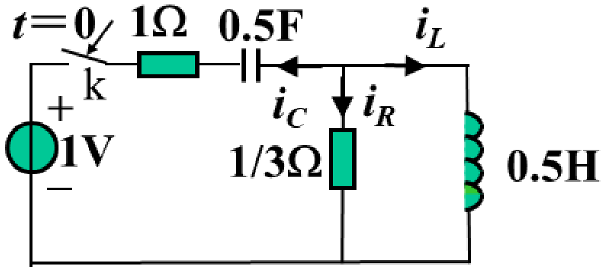
以待求支路量为输出的输出方程 $u_R = Ri_L$

→求导，得待求支路量的导数初值 $\left.\frac{du_R}{dt}\right|_{t=0^+} = R\left.\frac{di_L}{dt}\right|_{t=0^+}$

→利用状态方程得一阶导数初值

$$\left.\frac{du_R}{dt}\right|_{t=0^+} = R\left(\frac{1}{L}u_C\Big|_{t=0^+} - \frac{R}{L}i_L\Big|_{t=0^+} + \frac{1}{L}u_S\Big|_{t=0^+}\right)$$

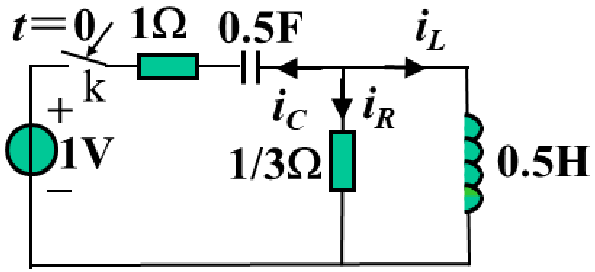
换路定理



例：求电阻电流的零状态响应i_R。

Step1 求状态方程和输出方程

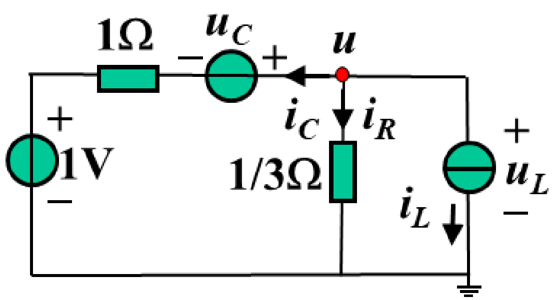
替代定理
将电容看作电压源
电感看作电流源



例：换路前$u_C(0^-)=0, i_L(0^-)=0$

求电阻电流的零状态响应i_R。

Step1 求状态方程和输出方程



$$(1+3)u = u_C + 1 - i_L$$

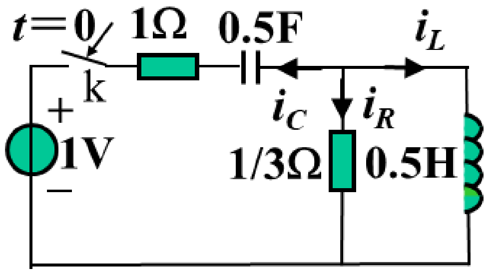
$$u = 0.25u_C - 0.25i_L + 0.25$$

$$i_C = -u_C + u - 1 = -0.75u_C - 0.25i_L - 0.75$$

$$u_L = u = 0.25u_C - 0.25i_L + 0.25$$

输出方程　　　　状态方程

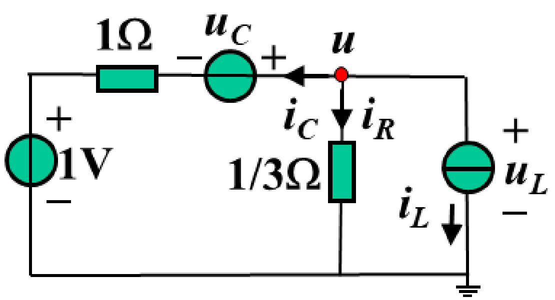
$$\boxed{\begin{pmatrix}\dot{u}_C \\ \dot{i}_L\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1.5 & -0.5 \\ 0.5 & -0.5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_C \\ i_L\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1.5 \\ 0.5\end{pmatrix}}$$



例： 换路前$u_C(0^-)=0, i_L(0^-)=0$

求电阻电流的零状态响应i_R。

Step1 求状态方程和输出方程



$$(1+3)u = u_C + 1 - i_L$$

$$u = 0.25u_C - 0.25i_L + 0.25$$

$$i_C = -u_C + u - 1 = -0.75u_C - 0.25i_L - 0.75$$

$$u_L = u = 0.25u_C - 0.25i_L + 0.25$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} \dot{u}_C \\ \dot{i}_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.5 & -0.5 \\ 0.5 & -0.5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_C \\ i_L \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}}$$

输出方程

$$\boxed{i_R = 3u = 0.75u_C - 0.75i_L + 0.75}$$

Step2 求全解

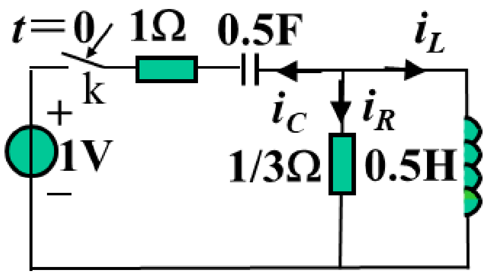
$$A=\begin{pmatrix}-1.5 & -0.5\\ 0.5 & -0.5\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix}p+1.5 & 0.5\\ -0.5 & p+0.5\end{vmatrix}=p^2+2p+1=0$$

$$\Downarrow$$

$$p_1=p_2=-1$$

稳态电路

试画一下？
纸笔写写画画-投稿



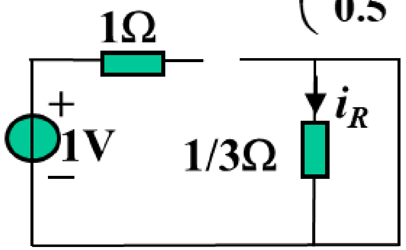
$$\begin{pmatrix}\dot{u}_C\\ \dot{i}_L\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1.5 & -0.5\\ 0.5 & -0.5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_C\\ i_L\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1.5\\ 0.5\end{pmatrix}$$

Step2 求全解

$$A=\begin{pmatrix}-1.5 & -0.5\\ 0.5 & -0.5\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix}p+1.5 & 0.5\\ -0.5 & p+0.5\end{vmatrix}=p^2+2p+1=0$$

$$\Downarrow$$

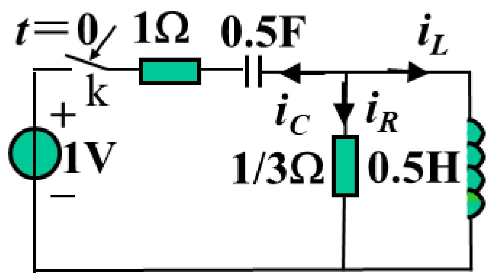
$$p_1=p_2=-1$$



稳态电路

$$i_R(\infty)=0$$

$$\boxed{i_R=\left(A_1+A_2t\right)\mathrm{e}^{-t}\quad t\geq 0^+}$$



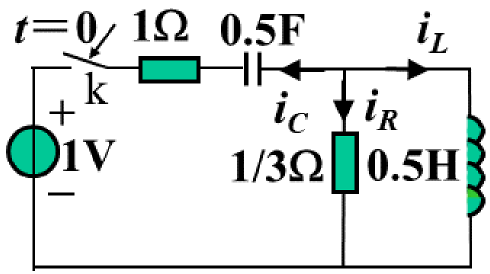
$$\begin{pmatrix}\dot{u}_C\\ \dot{i}_L\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1.5 & -0.5\\ 0.5 & -0.5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_C\\ i_L\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1.5\\ 0.5\end{pmatrix}$$

Step3　求初值和一阶导初值

已知换路前$u_C(0^-)=0, i_L(0^-)=0$

$$u_C(0^+) = u_C(0^-) = 0\ \mathrm{V}$$

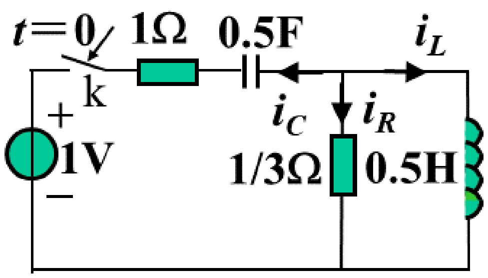
$$i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0\ \mathrm{A}$$



$$\begin{pmatrix} \dot{u}_C \\ \dot{i}_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.5 & -0.5 \\ 0.5 & -0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_C \\ i_L \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

$$i_R = 0.75u_C - 0.75i_L + 0.75$$

Step3　求初值和一阶导初值



已知换路前$u_C(0^-)=0, i_L(0^-)=0$

$$u_C(0^+)=u_C(0^-)=0\text{ V}$$

$$i_L(0^+)=i_L(0^-)=0\text{ A}$$

$$\begin{pmatrix}\dot{u}_C\\ \dot{i}_L\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1.5 & -0.5\\ 0.5 & -0.5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_C\\ i_L\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1.5\\ 0.5\end{pmatrix}$$

$$i_R(0^+)=0.75\text{ A}$$

$$i_R=0.75u_C-0.75i_L+0.75$$

雨课堂 Rain Classroom

单选题 1分

$$\left.\frac{\mathrm{d}i_R}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0^+} = \qquad \mathrm{A/s}$$

“红包”

A -1.5

B 0.5

C 0.75

D -0.75

$$\begin{pmatrix} \dot{u}_C \\ \dot{i}_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.5 & -0.5 \\ 0.5 & -0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_C \\ i_L \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

$$i_R = 0.75u_C - 0.75i_L + 0.75$$

$$u_C(0^+) = u_C(0^-) = 0\ \mathrm{V}$$

$$i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0\ \mathrm{A}$$

$$u_C(0^+)=0\ \text{V}$$
$$i_L(0^+)=0\ \text{A}$$

$\xrightarrow{\text{状态方程}}$

$$\begin{cases}\dot{u}_C(0^+)=\left(-1.5u_C-0.5i_L-1.5\right)\Big|_{t=0^+}=-1.5\ \text{V/s}\\ \dot{i}_L(0^+)=\left(0.5u_C-0.5i_L+0.5\right)\Big|_{t=0^+}=0.5\ \text{A/s}\end{cases}$$

输出方程

$$\boxed{i_R(0^+)=\left(0.75u_C-0.75i_L+0.75\right)\Big|_{t=0^+}}$$
$$\boxed{=0.75\ \text{A}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\dot{i}_R(0^+)&=\left(0.75\dot{u}_C-0.75\dot{i}_L\right)\Big|_{t=0^+}\\&=-1.5\ \text{A/s}\end{aligned}}$$

比起上节课方法，这种方法无需画0^+电路，
而且适用于高阶电路

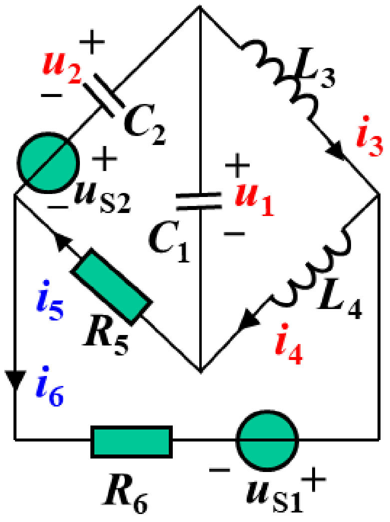
Step4 求待定系数

$$\begin{cases}i_R=\left(A_1+A_2t\right)e^{-t}\quad t>0^+\\ i_R(0^+)=0.75\text{A}\\ \dot{i}_R(0^+)=-1.5\ \text{A/s}\end{cases}$$

$$i_R=0.75\left(1-t\right)e^{-t}\text{A}\quad t>0^+$$

状态方程+输出方程求解二阶电路

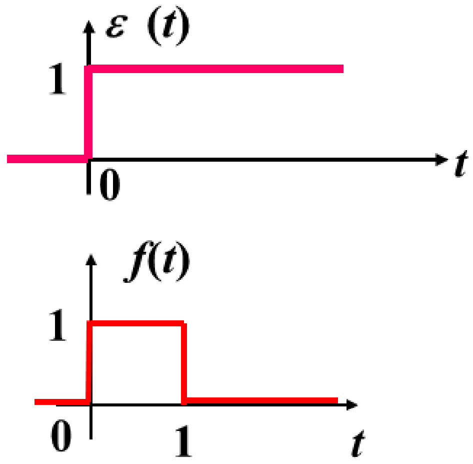
- 求响应形式
  - 状态方程→（电阻电路）→求系数矩阵特征值
- 求稳态值→得通解表达式
  - 电阻电路
- 求初值
  - 输出方程（电阻电路）→带入初值
- 求导数初值
  - 输出方程（电阻电路）→求导→带入状态方程→换路定理
- 用初值和导数初值确定通解待定系数



已知$u_1(0)$、$u_2(0)$、$i_3(0)$、$i_4(0)$，求 $i_6(t)$。

3 单位阶跃函数与单位阶跃响应

单位阶跃函数(unit step) $\varepsilon(t)$



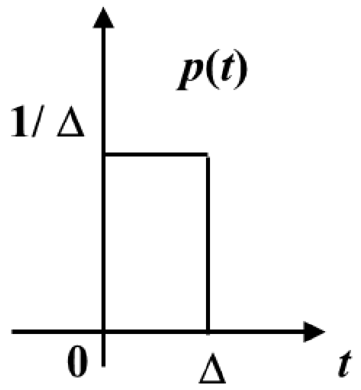
$$\varepsilon(t)=\begin{cases}0 & (t<0)\\ 1 & (t>0)\end{cases}$$

$$f(t)=\varepsilon(t)-\varepsilon(t-1)$$

其余课前推送均已学习

4 单位冲激函数

（1） 单位脉冲函数(unit pulse function) $p(t)$

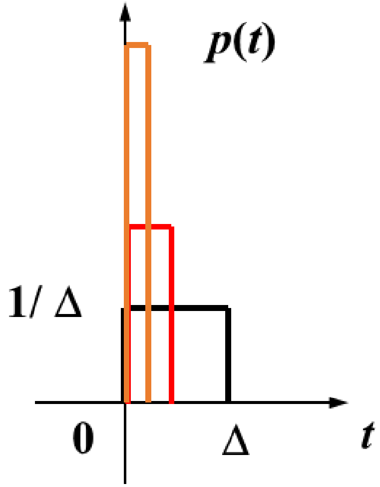


如何用单位阶跃函数来表示单位脉冲函数?

$$p(t)=\frac{1}{\Delta}\left[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-\Delta)\right]$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(t)\mathrm{d}t=1$$

（2） 单位冲激函数 $\delta(t)$



$$p(t)=\frac{1}{\Delta}\left[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-\Delta)\right]$$

$$\Delta\to 0 \qquad \frac{1}{\Delta}\to\infty$$

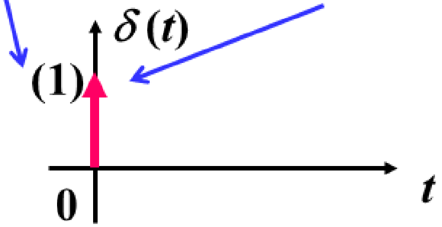
$$\boxed{\lim_{\Delta\to 0} p(t)=\delta(t)}$$

定义

$$\begin{cases} \delta(t)=\begin{cases}0 & (t<0)\\ 0 & (t>0)\end{cases} \\ \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\mathrm{d}t=1 \end{cases}$$

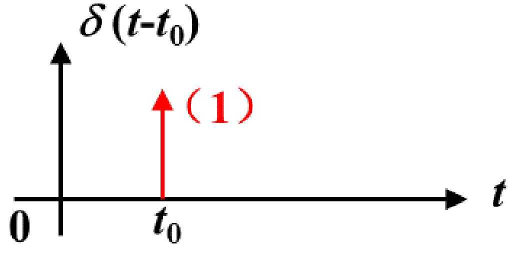
表示积分值

表示无穷大数值



（3） 单位冲激函数的延迟 $\delta(t-t_0)$

$$\begin{cases} \delta(t-t_0)=0 \quad (t \neq t_0) \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)\mathrm{d}t = 1 \end{cases}$$



雨课堂 Rain Classroom

单选题 1分

$$\int_{-1}^{1} \delta(t-2)\mathrm{d}t =$$

A 0

B 1

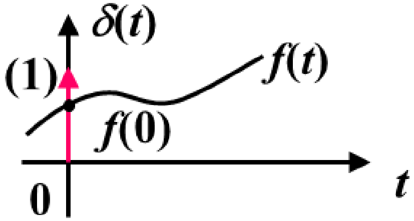
C 2

39

（4） δ函数的筛分性

$$\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{f(t)\delta(t)}_{f(0)\delta(t)}\mathrm{d}t = f(0)\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\mathrm{d}t = f(0)$$

* $f(t)$在 $t=0$处连续



同理有：$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)\mathrm{d}t = f(t_0)$ * $f(t)$在 t_0 处连续

例 $$\int_{-\infty}^{\infty}(\sin t + t)\delta(t-\frac{\pi}{6})\mathrm{d}t = \sin\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}+\frac{\pi}{6} = 1.02$$

单选题 1分

$$\int_{0^-}^{t} f(t-\tau)\delta(\tau)\mathrm{d}\tau =$$

$$t > 0^+$$

A $f(\tau)$

B $f(t)$

C $f(t-\tau)$

这一结论下节课会用到

41

（5）$\delta(t)$与$\varepsilon(t)$的关系

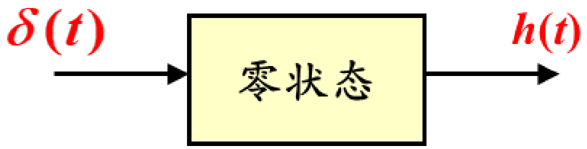
$$t \le 0^- \quad \int_{-\infty}^{t} \delta(t)\mathrm{d}t = 0$$

$$t > 0^+ \quad \int_{-\infty}^{t} \delta(t)\mathrm{d}t = 1$$

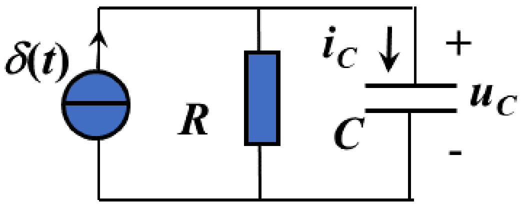
$$\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\mathrm{d}\tau = \varepsilon(t) \Longleftrightarrow \frac{\mathrm{d}\varepsilon(t)}{\mathrm{d}t} = \delta(t)$$

5 单位冲激响应

单位冲激响应：单位冲激激励在电路中产生的**零状态响应**。



例



$u_C(0^-)=0$

已知如图（零状态）。

求响应$u_C(t)$、$i_C(t)$。

分两个时间段来考虑冲激响应

$$t\begin{cases} 0^- \longrightarrow 0^+ & \text{冲激电流（冲激电压）作用(可能)使电容（电感）瞬间获得能量} \\ & \text{求 } u_C(0^+),\, i_L(0^+) \\ 0^+ \longrightarrow \infty & \text{零输入响应} \end{cases}$$

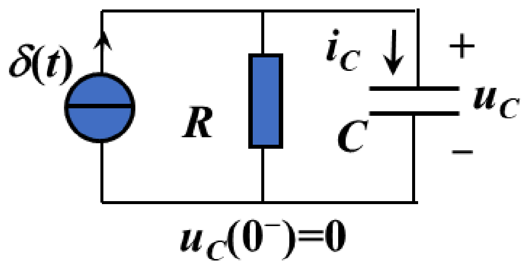
两个统领后续内容的前提：

（1）数学上，等号左右必须有相同变化速度的函数，才能平衡

（2）物理上最快只能实现由瞬间(近似)无穷大功率带来储能元件能量的突变
不能实现瞬间储能元件无穷大能量，即最多u_C/i_L跳变，不会u_C/i_L冲激

45

方法1　列写方程，把冲激源的作用表现在方程里
从0^-~0^+范围求积分



1. t 在 0^- ⟶ 0^+间

$$C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+\frac{u_C}{R}=\delta(t)$$

u_C 不可能是冲激函数，否则KCL不成立

$$\int_{0^-}^{0^+}C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t+\underbrace{\int_{0^-}^{0^+}\frac{u_C}{R}\mathrm{d}t}_{=0}=\underbrace{\int_{0^-}^{0^+}\delta(t)\mathrm{d}t}_{=1}$$

法1步骤($0^-\sim0^+$部分):
(1)列写$0^-\sim0^+$的方程
(2) $0^-\sim0^+$积分求$u_C(0^+)$
(3)微分关系求i_C

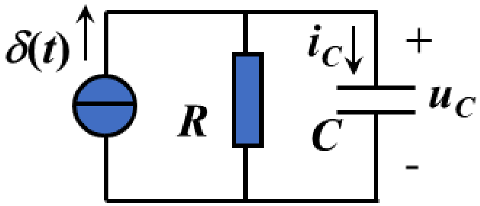
$$C[u_C(0^+)-u_C(0^-)]=1$$

注意：对高阶，不是太好分析

$$u_C(0^+)=\frac{1}{C}\neq u_C(0^-)$$

电容中的冲激电流使电容电压发生跳变

$$i_C=C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}=\delta(t)$$



另一个思路：

$$u_C(0^+) = u_C(0^-) + \frac{1}{C}\int_{0^-}^{0^+} i_C(\tau)\mathrm{d}\tau$$

求$u_C(0^+)$的关键是：0^-~0^+中i_C有没有冲激

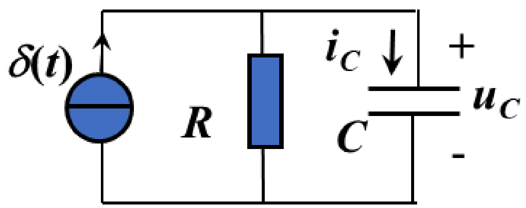
u_C如果有跳变
是由于外加冲激引起的

因此关键是：外加的冲激源是否会产生带冲激的i_C
(无论有限值u_C是什么，这个电压都不会产生冲激的i_C)

冲激源作用时，怎么看待C？

方法2　$\delta(t)$作用的那个瞬间，用替代定理，
将C视作某个有限值（比如0值)电压源(电路体系中不会有冲激电容电压)，
然后用叠加定理的思想，看C上是否有冲激电流

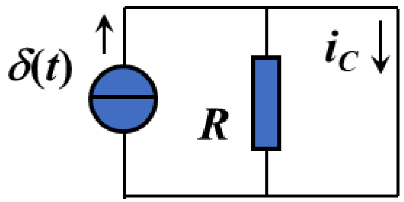
0^-~0^+时有限值u_C产生有限值i_C，对$u_C(0^+)$无影响



法2：$\delta(t)$作用的那个瞬间，C视作0值电压源

$u_C(0^-)=0$

1. t 在 $0^- \longrightarrow 0^+$间



$i_C(0)=\delta(t)$

$$u_C(0^+)=u_C(0^-)+\frac{1}{C}\int_{0^-}^{0^+} i_C\mathrm{d}t=0+\frac{1}{C}\int_{0^-}^{0^+}\delta(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{C}$$

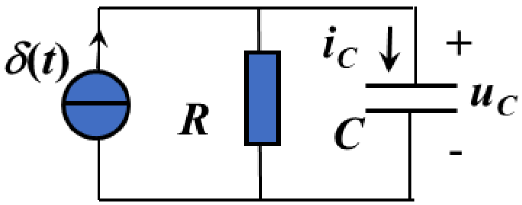
不等

$$u_C(0^-)=0$$

法2步骤：
(1) 画$\delta(t)$作用时电路(C短路)
(2) 求 i_C
(3) 积分关系求u_C

电容电压
发生跳变

外加冲激源引起的跳变



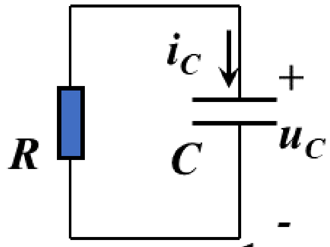
$u_C(0^-)=0$

t 在 $0^- \longrightarrow 0^+$ 间

不一定非得在$\delta(t)$作用的那个瞬间C视作0值电压源

任意有限值电压源，求得的结果都一样

2. $t>0^+$ 零输入响应 （RC放电）



$$u_C(0^+)=\frac{1}{C}$$

求响应$u_C(t)$、$i_C(t)$

$$u_C(t)=\frac{1}{C}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\quad t\geq 0^+$$

$$i_C(t)=-\frac{u_C}{R}=-\frac{1}{RC}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\quad t\geq 0^+$$

$$\begin{cases} u_C(t)=\dfrac{1}{C}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t) \\ i_C(t)=\delta(t)-\dfrac{1}{RC}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t) \end{cases}$$

单位冲激响应的求解方法

法1：列方程求积分法

法2：短路开路法

法3：单位阶跃响应求导法 ⟶ 课后推送