主观题 1分

设置

1. 电容的定义为何？
2. 部分电容的用途为何或何时要用部分电容？
3. 部分电容的定义为何？
4. 如何计算电容与部分电容？
5. 如何测量电容与部分电容？

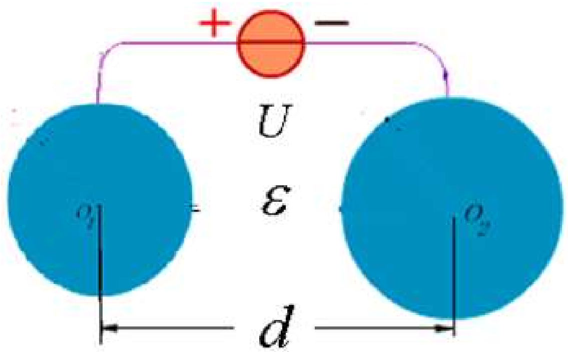
作答

作业25、36、37（均设几何轴为电轴）

第10节 电容与部分电容

1. 两导体或两电极电容的定义与求解

- 两个导体电极与其之间的介质构成电容。
- 在两电极上连接电压源U时，
  为使电极间形成与电压源相同的电压，
  从静电场的角度看，会在两电极上生成
  等量异号电荷，产生电压U时维持平衡。



- 电容是描述电容器在施加一定电压下所产生电荷的大小。
- 充电后断开电源，电荷仍保持在电极上，储存电荷与电场能。
- 为生成电压U，不同的电极形状、间距、介质特性(极化影响)，所需的电荷量不同。故电容值只与这三个因素有关。
- 而（线性）电容与加不加电压无关，求线性电容不要问工作电压。
- 电容是两电极间固有存在的参数。
- 两两电极间都存在电容，含实际装置中无用的寄生电容。

A) 电容的定义：

在两个原无电荷的电极间施加电压U时，电极上产生等量异号电荷$\pm q$，则定义q/U为该一对电极形成的电容的电容值，即：

$$\boxed{C=\frac{q}{U}\qquad (F,\mu F,pF)}$$

B) 电容的计算方法：

1）加电荷求电压法：设导体上带有电荷q，用高斯定理求$\boldsymbol{E}$、用线积分求U，得$q/U=C$。

适用于电荷放置到电极上分布已知或可被镜像等效的情况。

多数情况电荷分布未知，此法无效，除非对电荷分布做近似处理。

2）加电压求电荷法：设导体间的电压U，解拉普拉斯方程得φ、取梯度求$\boldsymbol{E}$、由导体表面的$D_n=\rho_S$积分求q（$\boldsymbol{n}$指向导体外），得$q/U=C$。

适用于任意情况。

3）电场能量法：设U(可设为1)，求φ、$\boldsymbol{E}$、由整个空间E^2的体积分求电场能量W_e，据 $W_e=\frac{1}{2}CU^2=\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$ 求电容C；或加电荷求能量。

例1：由三块平行导体板构成的系统，如果从两侧的导体板引出两个端子，求这两个端子间的电容（忽略端部效应）。

解：该系统由三个导体组成。求两个导体间的电容时，另一个导体定为悬浮导体，其对电场和电容构成一定影响。

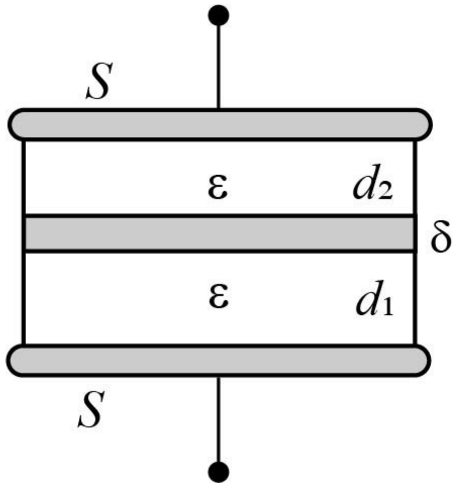
利用加电荷求电压法。在两极板上设电荷±q，下正上负；

由于忽略端部效应，故近似认为电荷均匀分布，$\rho_S=q/S$。

两介质区域的电位移均为$D=q/S$。沿电场方向求积分得电压为：

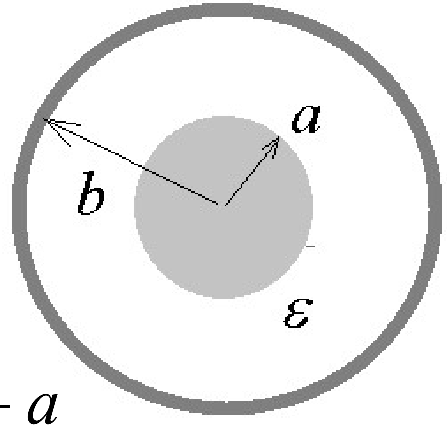
$$U=\int_0^{d_1}E\mathrm{d}l+\int_{d_1+\delta}^{d_1+\delta+d_2}E\mathrm{d}l=Ed_1+Ed_2=\frac{q}{S\varepsilon}(d_1+d_2)$$

$$C=\frac{q}{U}=\varepsilon\frac{S}{d_1+d_2}$$



可见，中间导体板的效果相当于减小了上下两个极板的间距。

例2：求导体球与同心导体球壳构成的电容器的电容。



解：设内导体的电荷为q，外导体为-q，

电荷均匀分布，故：

$$\oint_S \boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = q\ ,\quad \boldsymbol{D}=\frac{q}{4\pi r^2}\boldsymbol{r}^0,\quad \boldsymbol{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon r^2}\boldsymbol{r}^0$$

电压：$$U=\int_a^b E\mathrm{d}r=\frac{q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)=\frac{q}{4\pi\varepsilon}\cdot\frac{b-a}{ab}$$

电容：$$C=\frac{q}{U}=\frac{4\pi\varepsilon ab}{b-a}$$

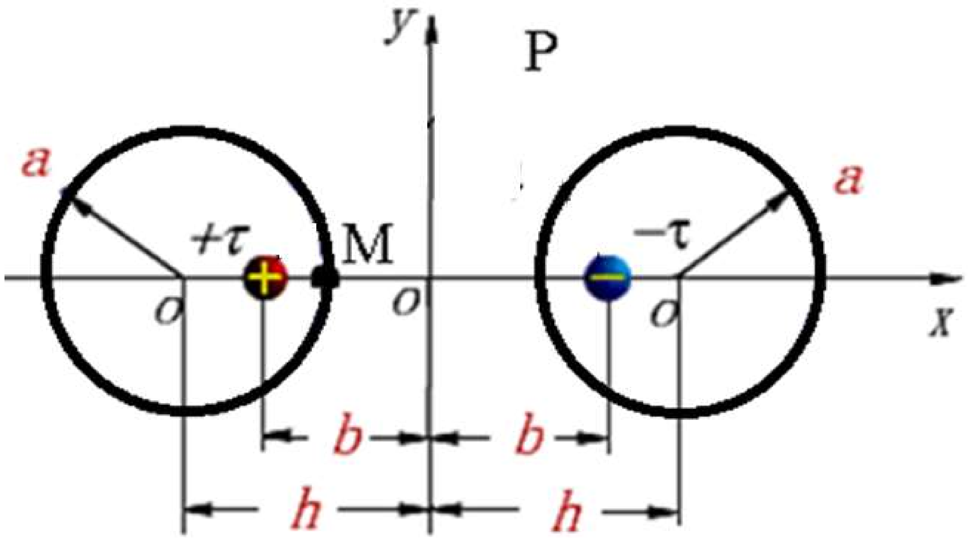
$b\ \rightarrow\ \infty\quad C=4\pi\varepsilon a=q/\varphi$（孤立导体球对无限远处电极的电容）

导体球与球壳内表面的两半径越接近，C越大。

而电压一定下，两半径越接近，E越大、介质可能被击穿。

现没有介电常数大、且绝缘强度高的介质。储能仍是大难题。

例3：求两半径均为a、相距$2h$的圆柱导线间单位长度的电容（要考虑电荷非均匀分布）。



解：设两导体的线电荷密度为±τ，利用电轴法可得M点电位：

$$b^2 = h^2 - a^2$$

$$\varphi_M = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{b+(h-a)}{b-(h-a)} = U/2$$

故电容为：
$$C = \frac{\tau}{U} = \pi\varepsilon / \ln\frac{b+h-a}{b-(h-a)}$$

例4：求偏心电缆单位长的电容，已知电缆的芯线外半径为a_1，外皮内半径为a_2，两轴间距为d，绝缘材料的电容率为ε。

解：设两导体的线电荷密度为$\pm\tau$。利用电轴法求电压。

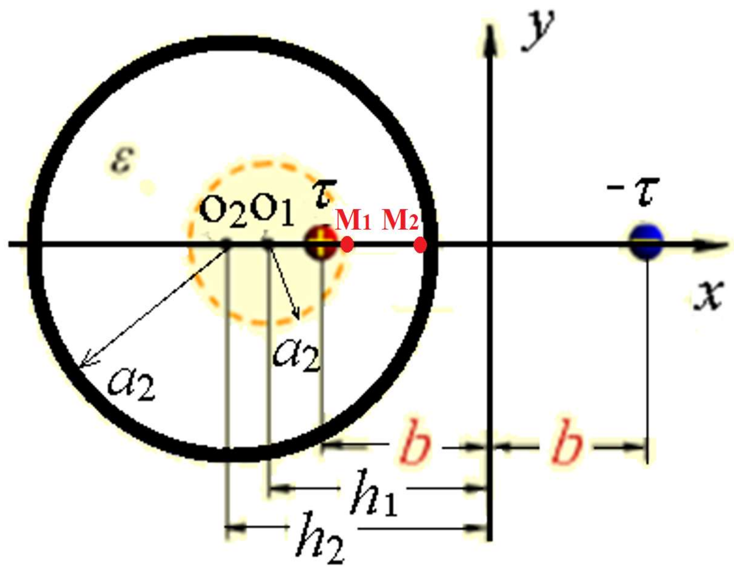
1）画出电轴；2）确定y轴；3）解b、h_1、h_2

$$\begin{cases} b^2 = h_1^2 - a_1^2 \\ b^2 = h_2^2 - a_2^2 \\ d = h_2 - h_1 \end{cases}$$

由此可解得：

$$h_1 = \frac{a_2^2 - a_1^2 - d^2}{2d}, \quad h_2 = \frac{d^2 - a_1^2 + a_2^2}{2d}$$

$$b = \sqrt{h_1^2 - a_1^2}$$

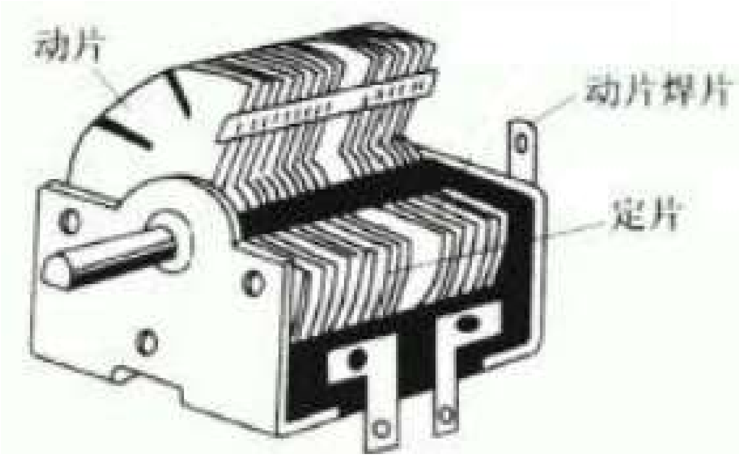


计算x轴上两个电极表面上点M_1与M_2间的电压为：

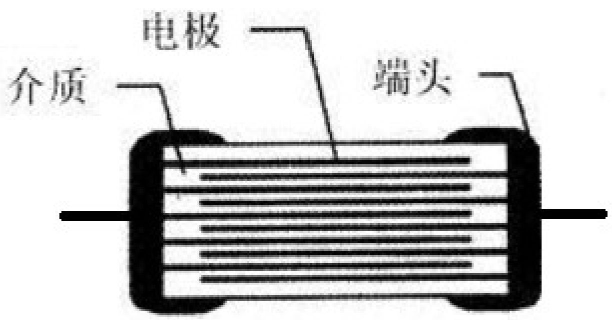
$$U = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{b+(h_1-a_1)}{b-(h_1-a_1)} - \frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{b+(h_2-a_2)}{b-(h_2-a_2)} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{[b+(h_1-a_1)][b-(h_2-a_2)]}{[b-(h_1-a_1)][b+(h_2-a_2)]}$$

$$C = 2\pi\varepsilon / \ln\frac{[b+h_1-a_1][b-h_2+a_2]}{[b-h_1+a_1][b+h_2-a_2)]}$$

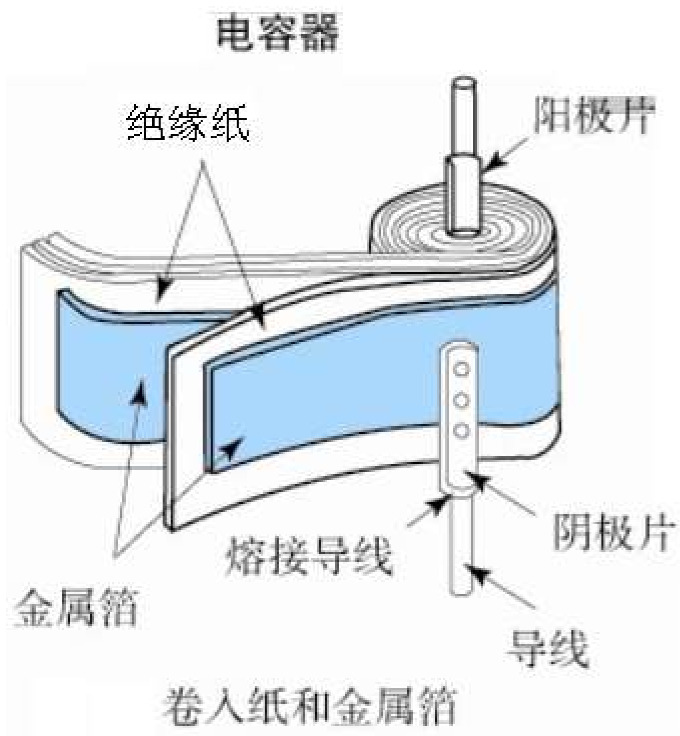
D) 实际电容器件结构



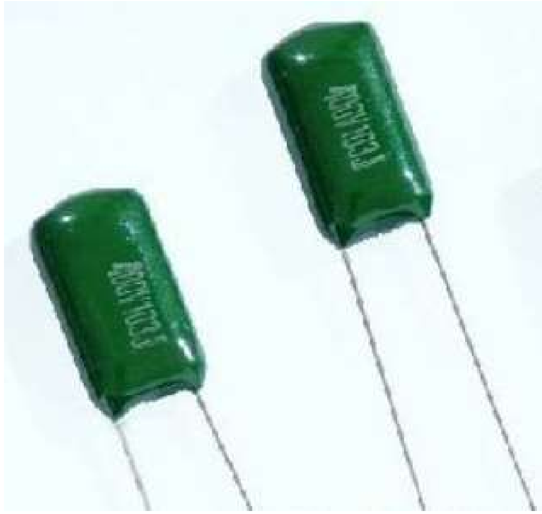
可变电容，典型用途为收音机选台。
多片并联结构。



定值片式

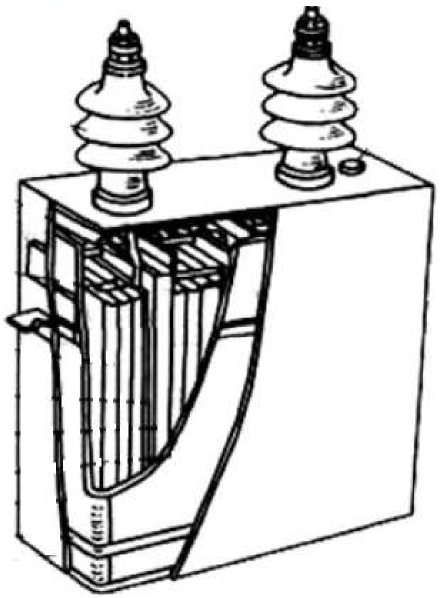


卷绕式

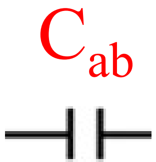


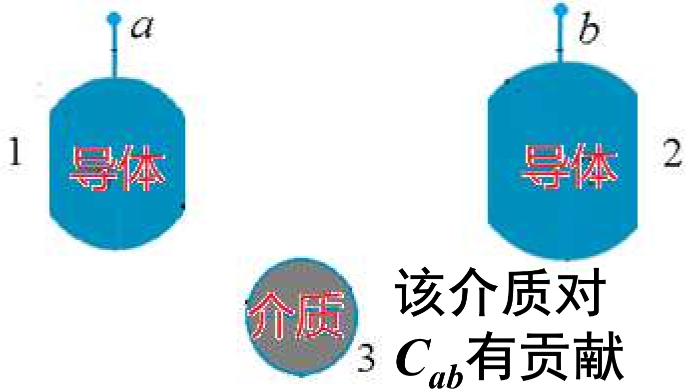
耐压400V
电解电容
有正负极，
接反介质易爆裂

电力电容器（主要是高耐压，电容值并不大）



电容的“演变”



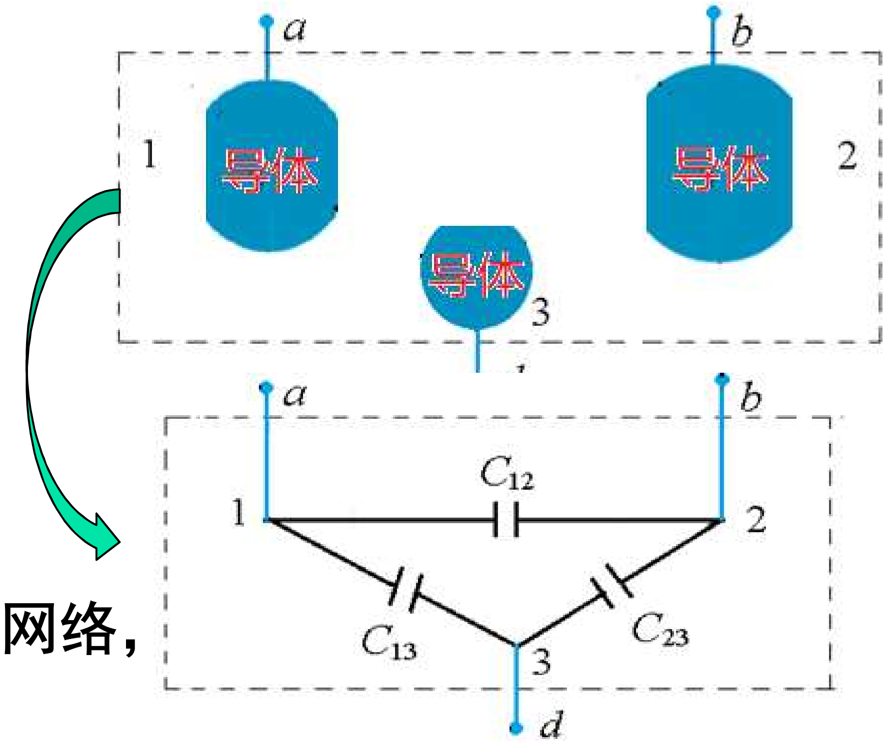


该介质对
C_{ab}有贡献

两端子系统

三端子系统:

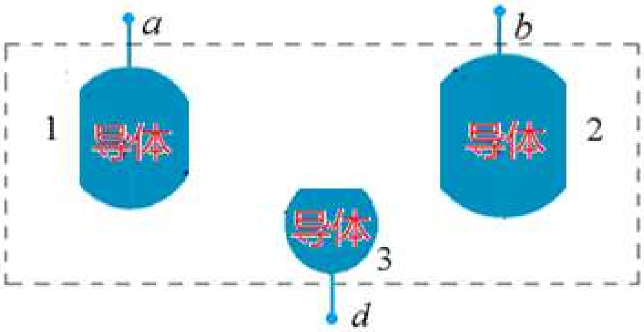
导体3对
C_{ab}有影响

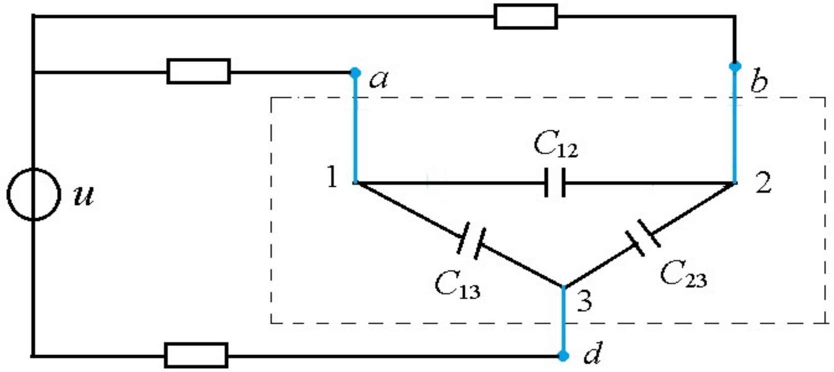


三导体间构成的三端子电容网络，
每个电容称为**部分电容**。

2. 多端子系统的部分电容

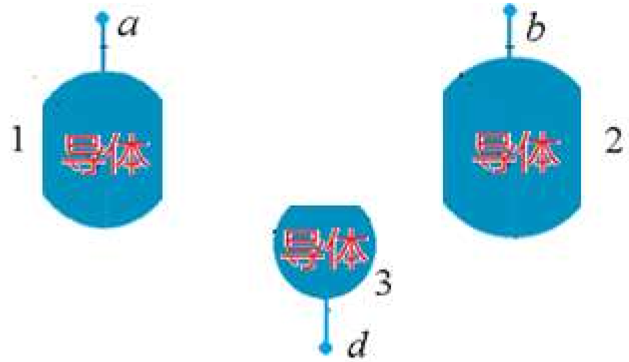
（1）多端子系统的部分电容之含义与用途

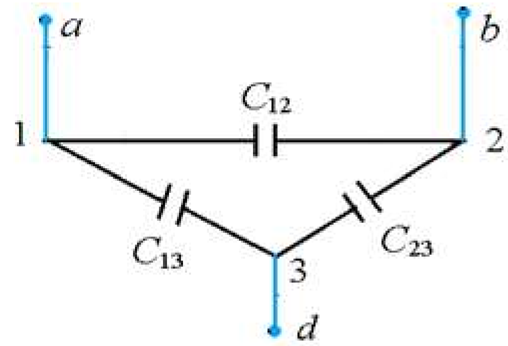




形成或构成多端子电容网络，描述多端子间的电压与电荷关系。

- 若n(>2)个导体与外电路连接（如图中的abd三个端子），那导体系统就构成了一个电容网络。要想求解该网络，需要已知每个部分电容值。
- 这种为电路分析求解参数的任务是最基本的场与路的关系问题。
- 这种电容网络或部分电容的定义是有条件的，为电荷独立系统条件，即工作中全部导体上的电荷总和要时时为零。若网络连接不满足该条件，下面讨论的部分电容就不成立了。
- 当然两导体电容也应有电荷独立系统条件。





两电极电容C_{ab}等于部分C_{12}与另两个部分电容串联后的并联，故有：$C_{12} \neq C_{ab}$，且$C_{12} < C_{ab}$ 。

- C_{ab}等于导体1上的所有电荷与U_{12}之比（导体3无电荷情况）。
- 若在三个导体间都被电压源充电（或与外电路连接）情况下，导体1上的一部分电荷与U_{12}之比等于C_{12}，其上的另一部分电荷与U_{13}之比为C_{13}。这种导体上部分电荷与电压之比的关系称为部分电容。

部分电容也是电容，其极板上（只看图中电容C_{ij}的极板，而不看导体）的电荷也是等于其电容值乘以电压。

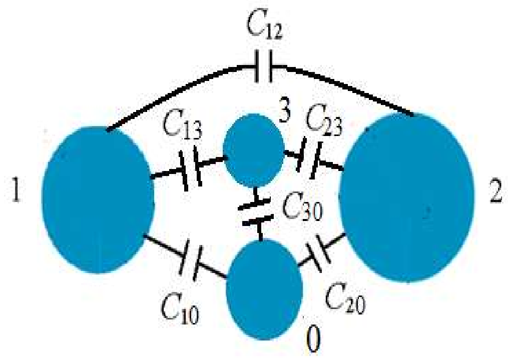
因此，对导体1，其总电荷等于C_{12}和C_{13}上的电荷之和，即各导体上的总电荷等于与之相连的各个部分电容与其电压乘积之和（此概念就是部分电容的定义式）：$q_1 = C_{12}U_{12} + C_{13}U_{13}$

（2） 多导体系统的部分电容的定义

对于原无电荷的n+1个电极，设编号为：0、1、2•••n， 在各电极与0号导体间施加不同数值的电压源U_{k0}，则任意两导体间便会有电压U_{kj}，若在各电极上产生的电荷为q_k，

则定义下列方程中系数C_{kj}为该系统的部分电容：

$$
\begin{aligned}
q_1 &= C_{10}U_{10} + C_{12}U_{12} + C_{13}U_{13} + \dots\dots\dots\dots + C_{1k}U_{1k} + \dots\dots + C_{1n}U_{1n} \\
q_2 &= C_{20}U_{20} + C_{21}U_{21} + C_{23}U_{23} + \dots\dots\dots\dots + C_{2k}U_{2k} + \dots\dots + C_{2n}U_{2n} \\
&\quad \dots\dots \quad \dots\dots \quad \dots\dots \\
q_k &= C_{k0}U_{k0} + C_{k1}U_{k1} + . + C_{kj}U_{kj} + . + C_{k(k-1)}U_{k(k-1)} + \dots\dots + C_{kn}U_{kn} \\
&\quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
q_n &= C_{n0}U_{n0} + C_{n1}U_{n1} + C_{n2}U_{n2} + \dots\dots\dots\dots\dots\dots + C_{nk}U_{nk} + \dots\dots + C_{n(n-1)}U_{n(n-1)} \\
q_0 &= q_1 + q_2 + \dots\dots + q_n
\end{aligned}
$$



每个方程表示一导体的电荷q_k等于其相连的所有部分电容上的电荷之和，即 $\sum C_{kj}U_{kj}$。n个电极电容网络共有$n(n-1)/2$个部分电容。

计算：设一组电压解出n个电荷不足以解出$n(n+1)$个部分电容；可任取n组电压求出各自对应的电荷，形成$n(n+1)$个方程构成方程组。但存在一种组合形式可使求解变得很简单：每种组合就设一个电极对参考电极的电压有值，其它电极的电压都为零。

（3）部分电容的计算

（a）设电压求电荷法

$$q_1 = C_{10}U_{10} \qquad\qquad + C_{12}U_{12} + C_{13}U_{13} + \ldots\ldots\ldots\ldots + C_{1k}U_{1k} + \ldots\ldots + C_{1n}U_{1n}$$

$$q_2 = C_{20}U_{20} + C_{21}U_{21} \qquad\qquad + C_{23}U_{23} + \ldots\ldots\ldots\ldots + C_{2k}U_{2k} + \ldots\ldots + C_{2n}U_{2n}$$

$$\cdots\cdots \quad \cdots\cdots \quad \cdots\cdots$$

$$q_k = C_{k0}U_{k0} + C_{k1}U_{k1} + . + C_{kj}U_{kj} + . + C_{k(k-1)}U_{k(k-1)} \qquad\qquad + \ldots\ldots + C_{kn}U_{kn}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$q_n = C_{n0}U_{n0} + C_{n1}U_{n1} + C_{n2}U_{n2} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + C_{nk}U_{nk} + \ldots\ldots + C_{n(n-1)}U_{n(n-1)}$$

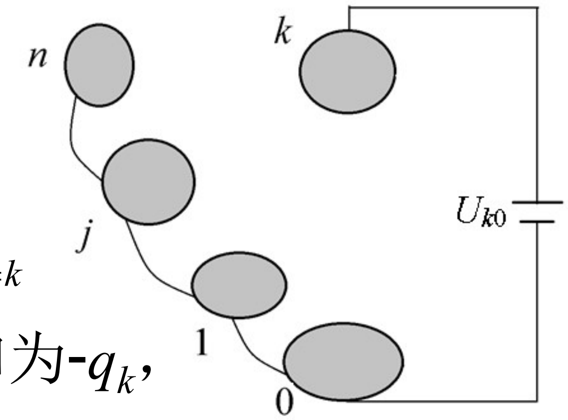
为求第k列的所有电容C_{jk}，可设电极k与参考电极间加电压U_{k0}，设其它电极对参考电极的电压设为零。

这样，除电极k之外，其它电极间的电压均为零，

定义式中右侧仅剩下第k列元素，

求出此时的电荷，则有第k列的所有电容：

$$C_{jk} = \frac{q_j}{U_{jk}} = \frac{q_j}{U_{0k}} = -\frac{q_j}{U_{k0}}\Bigg|_{\text{除电极}k\text{之外其它电极均短接，}j=0,1,2,n;\,j\neq k}$$



物理意义：k上有电荷q_k，其它电极的电荷之和为-q_k，且各电极上电荷大小与相应的部分电容成正比，激发出了电极k与其它电极的面--面耦合关系。

（b）设电荷求电压法（一般需近似假设已知导体上电荷分布）

设导体电极1到n上分别带有电荷q_k，0号电极上的电荷为 $-\sum_{k=1}^{n} q_k$

则各导体对参考电极的电压为：

$$
\begin{cases}
U_{10} = \alpha_{11}q_1 + \alpha_{12}q_2 + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + \alpha_{1k}q_k + \cdots\cdots + \alpha_{1n}q_n \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
U_{j0} = \alpha_{j1}q_1 + \alpha_{j2}q_2 + \cdots + \alpha_{jj}q_j \cdots + \alpha_{jk}q_k + \cdots\cdots + \alpha_{jn}q_n \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
U_{n0} = \alpha_{n1}q_1 + \alpha_{n2}q_2 + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + \alpha_{nk}q_k + \cdots\cdots + \alpha_{nn}q_n
\end{cases}
$$

矩阵形式：

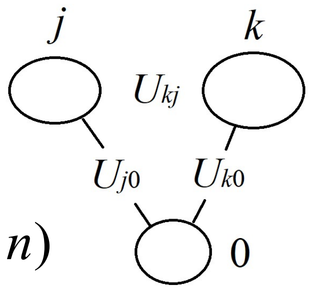
$$[U_0] = [\alpha][q]$$

α_{jk}称为电位系数；易知，对于线性介质模型，α_{jk}等于导体k上带有单位电荷即q_k=1与参考电极上的负单位电荷产生的导体j对参考电极的电压（考虑了电荷独立特性），此时其它导体上只有感应电荷；当然也等于导体k上带有电荷q_k与参考导体上的-q_k产生的导体j对参考电极的电压$U_{j0}^{q_k}$除以q_k，即

$$\alpha_{jk} = \left.\frac{U_{j0}^{q_k}}{q_k}\right|_{\text{除}\pm q_k\text{外其它导体电荷为零，但有感应电荷}}$$

此时是上面的方程只剩下第k列。

现在推导电位系数与部分电容的关系，或由α计算部分电容的方法。就是向部分电容定义式“靠拢”。由上面的方程可得：



$$[q]=[\alpha]^{-1}[U_0]=[\beta][U_0]$$

或 $$q_k=\beta_{k1}U_{10}+\beta_{k2}U_{20}+\cdots+\beta_{kk}U_{k0}+\cdots+\beta_{kn}U_{n0},\ (k=1,2,\ldots,n)$$

β称为感应系数。类似求一列部分电容法, 可设电压U_{k0}直接求β_{kj} 。

为将上式中对参考电极的电位变为两两电极间的电压（$U_{kj}=U_{k0}-U_{j0}$），可将上式第一项减去$\beta_{k1}U_{k0}$，第二项减$\beta_{k2}U_{k0}$，第j项减$\beta_{kj}U_{k0}$；并在第k项再加上减去的这些项，这样便有：

$$\begin{aligned}q_k&=\beta_{k1}(U_{10}-U_{k0})+\beta_{k2}(U_{20}-U_{k0})+(\beta_{k1}+\beta_{k2}+\cdots+\beta_{kk}\cdots+\beta_{kn})U_{k0}+\cdots+\beta_{kn}(U_{n0}-U_{k0})\\&=-\beta_{k1}U_{k1}-\beta_{k2}U_{k2}-\cdots+(\beta_{k1}+\beta_{k2}+\cdots+\beta_{kk}+\cdots+\beta_{kn})U_{k0}-\cdots-\beta_{kn}U_{kn}\\&=C_{k1}U_{k1}+C_{k2}U_{k2}+\cdots\cdots+C_{k0}U_{k0}+\cdots+C_{kn}U_{kn}\end{aligned}$$

对照部分电容的定义式可得：

导体**k**对参考导体的部分电容 $C_{k0}=(\beta_{k1}+\beta_{k2}+\cdots+\beta_{kk}+\cdots+\beta_{kn})$

其它导体间的部分电容 $C_{k1}=-\beta_{k1},C_{k2}=-\beta_{k2},\cdots,C_{kn}=-\beta_{kn}$

且有： $C_{kj}=C_{jk}$

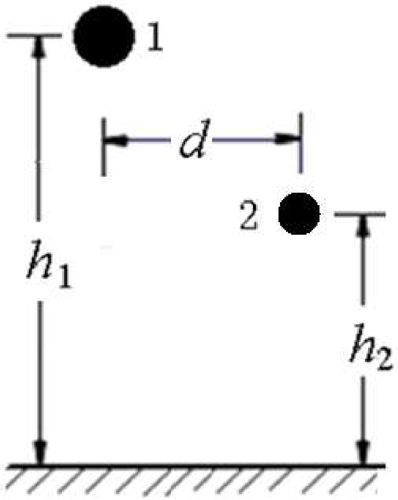
例：设同塔双回输电线路高处是500kV三相交流输电线路，低处是另一悬空线路，导线半径为R_1与R_2，其它具体尺寸略。

(1) 给出计算导线与导线以及导线与大地间电容电流的电路图；

(2) 计算电路中的部分电容(仅考虑单相)；

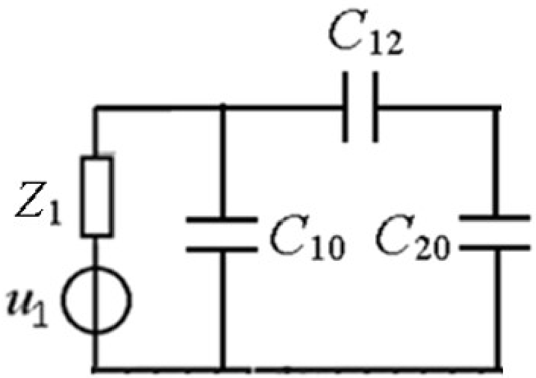
(3) 计算500kV导线在下方导线上感应产生的电压；

(4) 若下方导线不存在，该导线位置处的电压（与(3)有何区别?）。



线路与大地结构图

答：电路图为



解：（2）

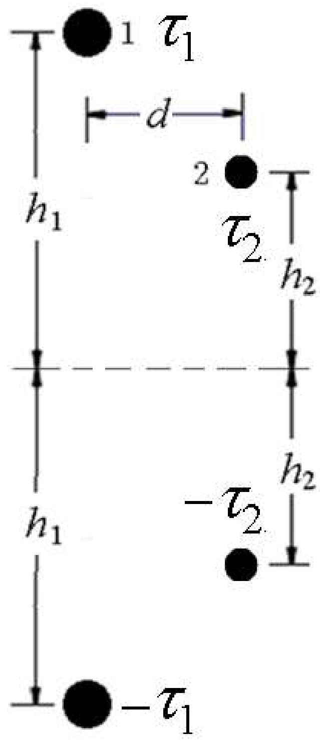
设电荷求部分电容：设导体1与导线2上单位长分别带有电荷τ_1与τ_2，则大地上带有电荷为$-(\tau_1+\tau_2)$。先利用镜像法建立镜像模型。

电位系数为：

$$\alpha_{11} \approx \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{2h_1-R_1}{R_1} \approx \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{2h_1}{R_1}$$

导线1与大地带单位异号电荷时导线1上的电位。

所做近似：电荷在导线上均匀分布、忽略了导体2上的感应电荷、电位点近似！



镜像模型

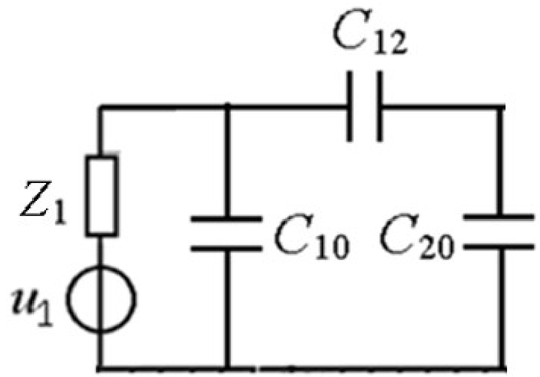
$$\alpha_{22} \approx \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{2h_2}{R_2} \qquad \alpha_{12} \approx \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left[\frac{(2h_2+h_1-h_2)^2+d^2}{(h_1-h_2)^2+d^2}\right]^{1/2}$$

求感应系数： $[\beta]=[\alpha]^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix}\alpha_{22} & -\alpha_{12}\\ -\alpha_{21} & \alpha_{11}\end{bmatrix}$ $\qquad \Delta=\alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{12}^2$

求部分电容：

$$C_{10}=\beta_{11}+\beta_{12}=\frac{\alpha_{22}-\alpha_{12}}{\Delta}$$

$$C_{20}=\beta_{22}+\beta_{21}=\frac{\alpha_{11}-\alpha_{21}}{\Delta} \qquad C_{12}=C_{21}=-\beta_{12}$$

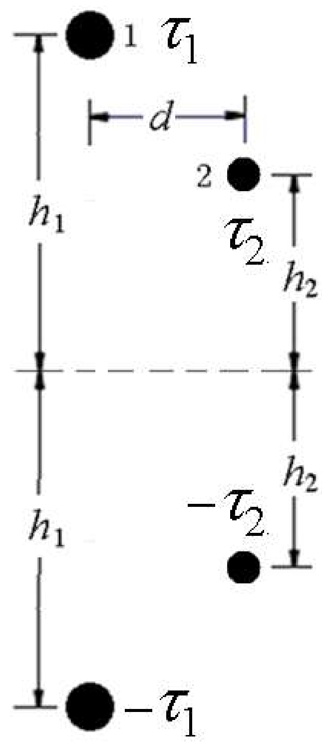


(3) 求导线2的电压

利用电容分压得：

$U_{2i}/U_1=C_{12}/(C_{12}+C_{20})$，$U_{2i}=U_1C_{12}/(C_{12}+C_{20})$。

代入部分电容与电位系数的关系也可得$U_{2i}=U_1\alpha_{12}/\alpha_{11}$。



(4) 求导线2处的电压

$U_{2P}=\tau_1\alpha_{12}$ 利用 $U_1=\dfrac{\tau_1}{2\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{2h_1-R_1}{R_1}=\tau_1\alpha_{11}$

代入可得与上相同的结果。

这是因为在上面忽略了导线2上感应电荷的场之缘故。

导线很细时才可以忽略导线2上的感应电荷。