第17讲　互感

一场赏心悦目的电路探索之旅

今天课后会有调查问卷

1 互感和互感电压

2 同名端

3 互感的去耦等效

纸笔计算器

本讲重难点

- 根据绕向确定同名端
- 根据同名端确定感应电压正负号
- 去耦等效
  - 串联
  - 并联
  - 单点联

包括时域和相量域

1 互感和互感电压（Mutual Inductance）

复习——电感(inductance)

由电磁感应定律

$$e=-\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}=-L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

$$u=-e=L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

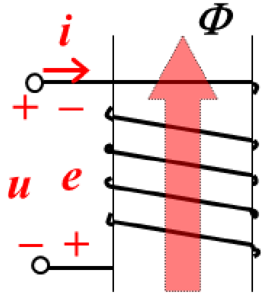
自己电流变化对自己电压的影响

i，Φ 右螺旋

$\Phi \rightarrow \Psi=N\Phi$

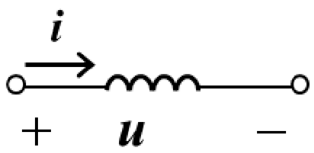
e，Φ 右螺旋

u，i 关联



$$L \overset{\mathrm{def}}{=} \frac{\psi}{i}$$

$$\boxed{L \propto N^2}$$

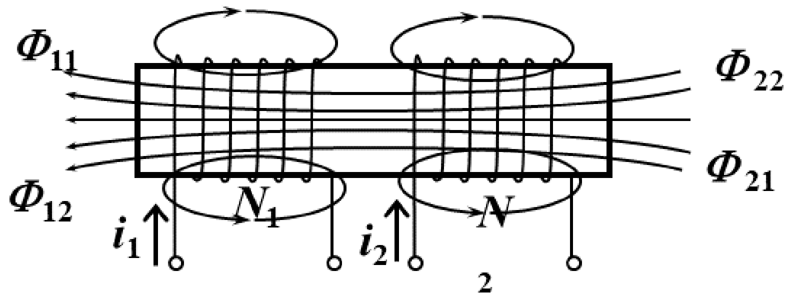


$$u=L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

电感确定u-i关系无需考虑线圈绕向

单选题 1分

Φ_{21}的意思是？



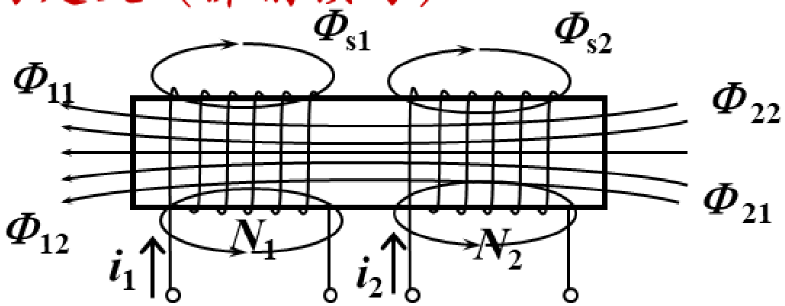
A 线圈1产生的磁通

B 线圈1产生，过线圈2截面的磁通

C 线圈2产生的磁通

D 线圈2产生，过线圈1截面的磁通

(1) 互感的定义（课前预习）



线圈1的自感 $L_1 = \dfrac{\Psi_{11}}{i_1}$　　$L_2 = \dfrac{\Psi_{22}}{i_2}$ 线圈2的自感

线圈1对2的互感 $M_{21} = \dfrac{\Psi_{21}}{i_1}$　　$M_{12} = \dfrac{\Psi_{12}}{i_2}$ 线圈2对1的互感

$\boxed{M \propto N_1 N_2}$　　单位 亨 (H)

(2) 互感的性质

a） 对于线性电感 $M_{12}=M_{21}=M$

b） 互感系数M只与两个线圈的几何尺寸、匝数、相互位置和周围的介质磁导率有关。

(3) 耦合系数k (*coupling coefficient*)

$$k \overset{\text{def}}{=} \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$$

$$k \le 1$$

互感不大于两个自感的几何平均值。

$$L_1 = \frac{N_1 \Phi_{11}}{i_1}$$

$$L_2 = \frac{N_2 \Phi_{22}}{i_2}$$

$$M_{21} = \frac{N_2 \Phi_{21}}{i_1}$$

$$M_{12} = \frac{N_1 \Phi_{12}}{i_2}$$

$$M_{12}=M_{21}=M$$

$$\Phi_{11}= \Phi_{S1}+ \Phi_{21}$$

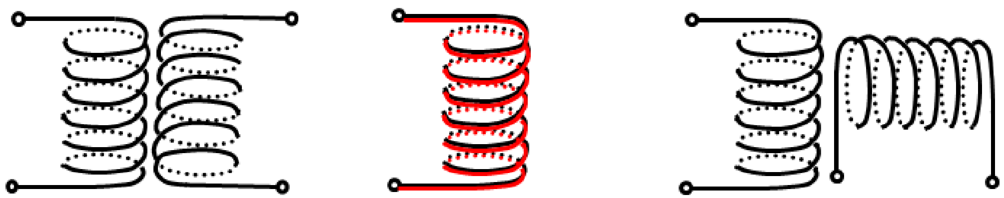
$$\Phi_{22}= \Phi_{S2}+ \Phi_{12}$$

(3) 耦合系数k (*coupling coefficient*)

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} \leq 1$$

全耦合： $k = 1$ ⇨ $\Phi_{S1} = \Phi_{S2} = 0$

互感现象
- 利用——变压器，信号和功率的传递
- 避免——合理布置线圈以减少干扰



$k<1$ $k=1$ $k=0$

单选题 1分

对于两个有耦合的电感线圈，假定其自(电)感分别为2mH和8mH，两者间可能的最大互(电)感为

A 2mH

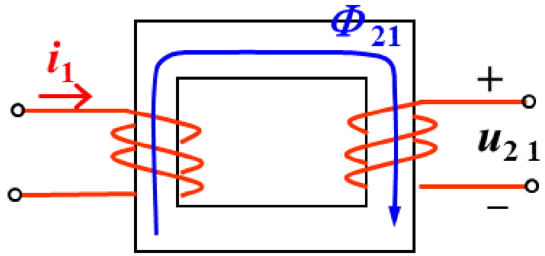
B 4mH

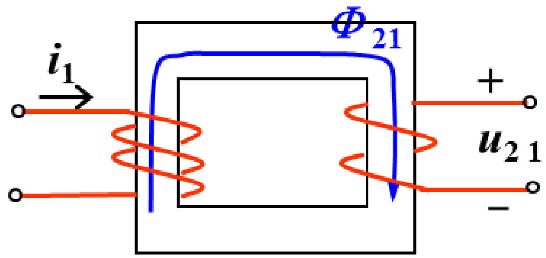
C 6mH

D 8mH

(4) 互感电压

己侧电流变化对
对侧电压的影响





i_1，Φ_{21} 右手螺旋定则

Φ_{21}, e_{21} ,右手螺旋定则

i_1，Φ_{21} 右手螺旋定则

Φ_{21}, e_{21} ,右手螺旋定则

由电磁感应定律

$$e_{21}=-\frac{\mathrm{d}\psi_{21}}{\mathrm{d}t}=-M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$$

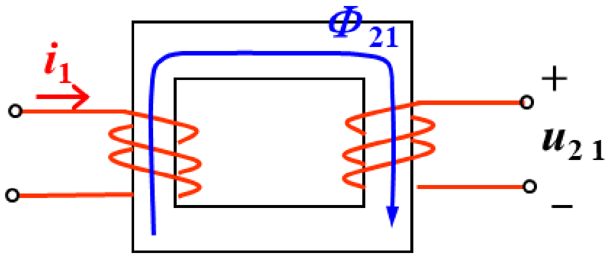
$$u_{21}=-e_{21}=M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$$

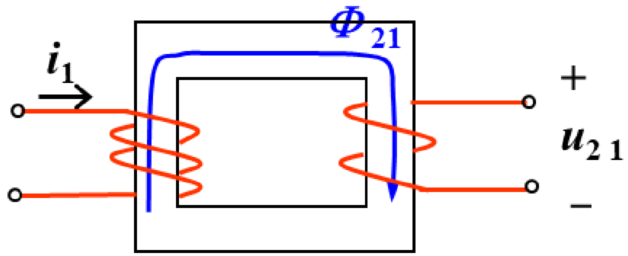
$$e_{21}=-\frac{\mathrm{d}\psi_{21}}{\mathrm{d}t}=-M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$$

$$u_{21}=e_{21}=-M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$$

互感电压的方向与
互感线圈的绕向有关！！

难道需要画绕向才能定电压吗？





$$u_{21} = M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$$

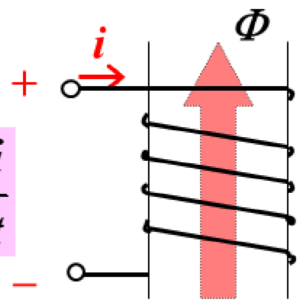
$$u_{21} = -M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$$

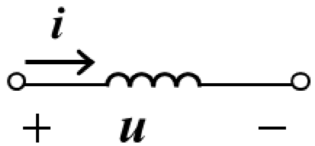
此处可以有弹幕或投稿

问题1： 如何规定i_1和u_{21}的参考方向关系，使得互感电压总是正的?

OR i_1的方向和u_{21}的方向有一个怎样的约定的时候，u_{21}总是正的?

$$u = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$



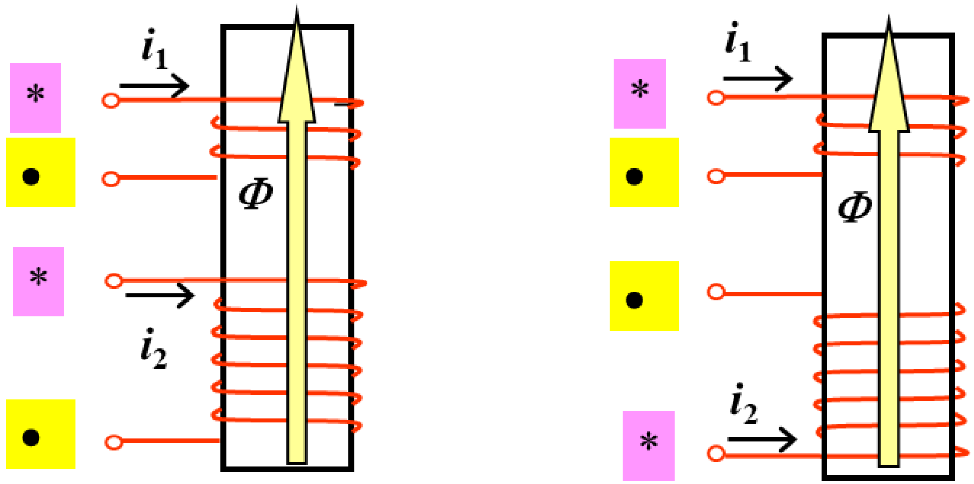


$$u = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

3 同名端（Dot Convention）

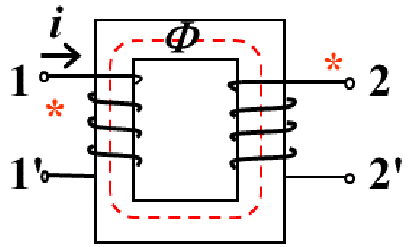
同名端：当两个电流分别从两个线圈的对应端子流入 ，其所产生的磁场相互加强时，则这两个对应端子称为同名端。

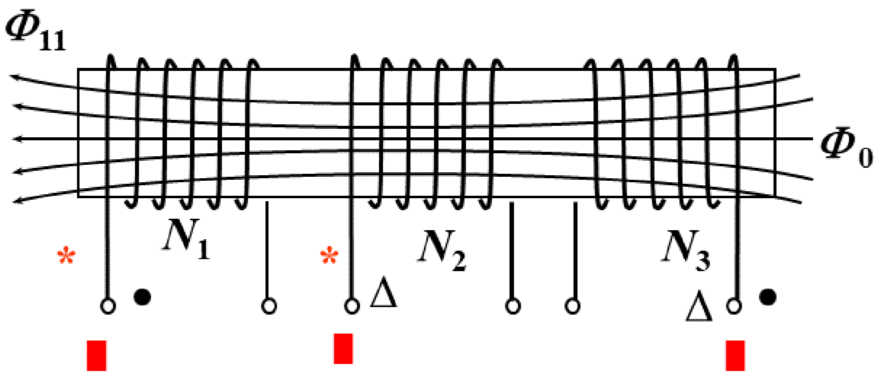
问题2：如何根据绕法确定同名端?



注意：线圈的同名端必须两两确定。

例1

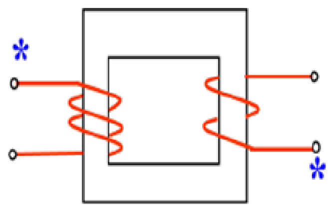




如果3个绕组根据线圈之间的两组关系可以确定另一组关系，则可以用3个点来代替6个点。

单选题 1分

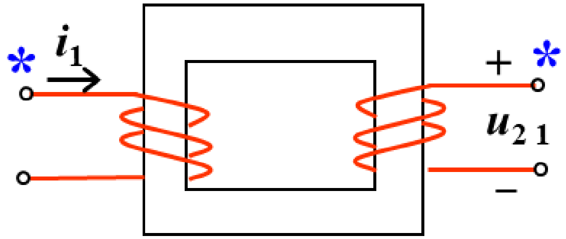
如图标注的同名端是



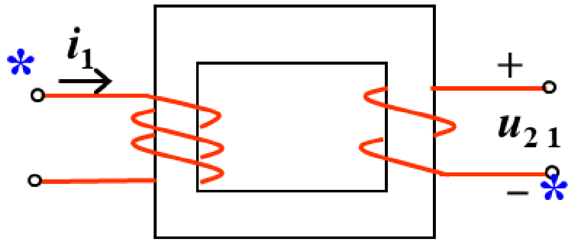
A 正确的

B 错误的

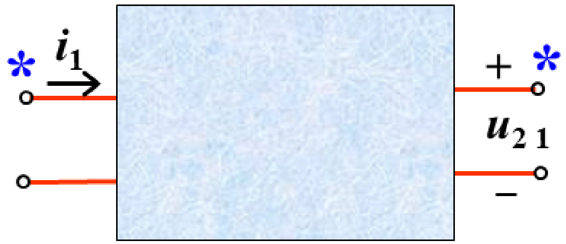
问题3：如何根据同名端确定互感电压？



$$u_{21} = M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$$

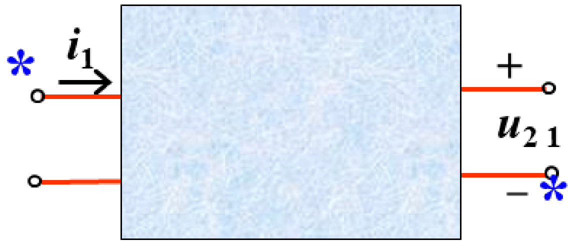


$$u_{21} = -M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$$



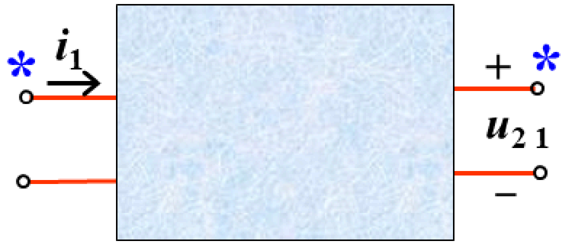
$$u_{21} = M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$$

标注同名端后，无需绕向即可确定电压



$$u_{21} = -M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$$

规律：



$$u_{21}=M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$$

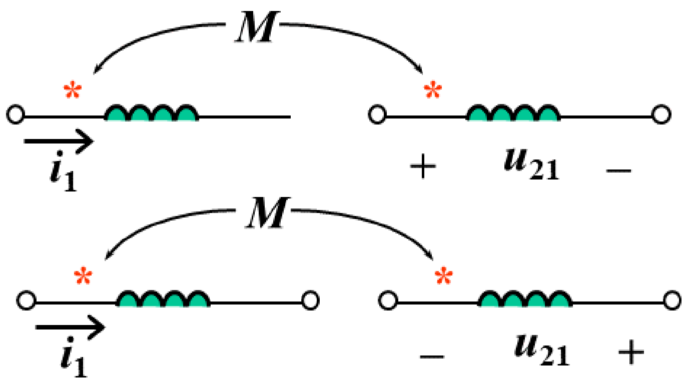
标注同名端后，无需绕向即可确定电压

$$u_{21}=-M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$$

规律： 如果电流参考方向从同名端流入，互感电压参考方向在同名端为正。 则 $u=M\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$

重要！！

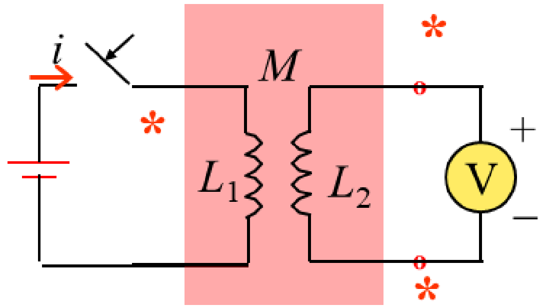
例 2



$$u_{21} = M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$$

$$u_{21} = \boxed{-}M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$$

问题4：当两组线圈装在黑盒里，只引出四个端线，如何确定其同名端?
即如何在黑箱电感中用互感电压测量并确定同名端



电源接一组线圈
直流电压表接另一组线圈

合 **K**，$i\uparrow$，　$\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}>0$

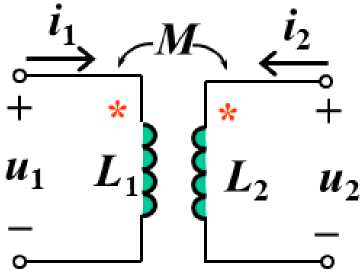
如果电压表+极接至同名端

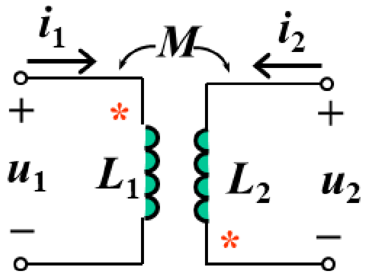
$$u_{21}=M\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}>0$$ 电压表正偏

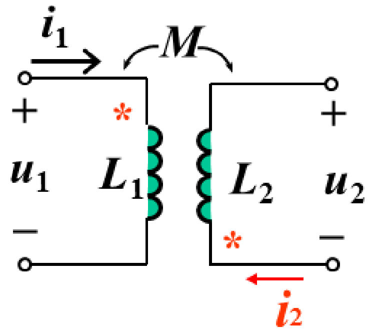
如果电压表+极接至非同名端

$$u_{21}=-M\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}<0$$ 电压表反偏

例3





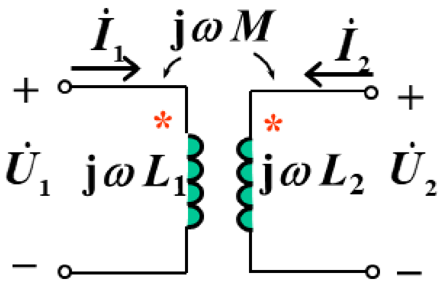


时域形式

$$u_1 = L_1 \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + M \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \qquad u_1 = L_1 \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} - M \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \qquad u_1 = L_1 \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + M \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$

$$u_2 = M \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + L_2 \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \qquad u_2 = -M \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + L_2 \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \qquad u_2 = -M \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} - L_2 \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$

在正弦稳态分析中，其相量形式的方程为

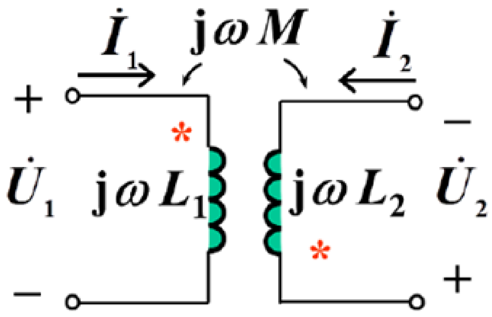


$$\dot{U}_1 = \mathrm{j}\omega L_1 \dot{I}_1 + \mathrm{j}\omega M \dot{I}_2$$

$$\dot{U}_2 = \mathrm{j}\omega M \dot{I}_1 + \mathrm{j}\omega L_2 \dot{I}_2$$

单选题 1分

下列公式正确的是
“红包”



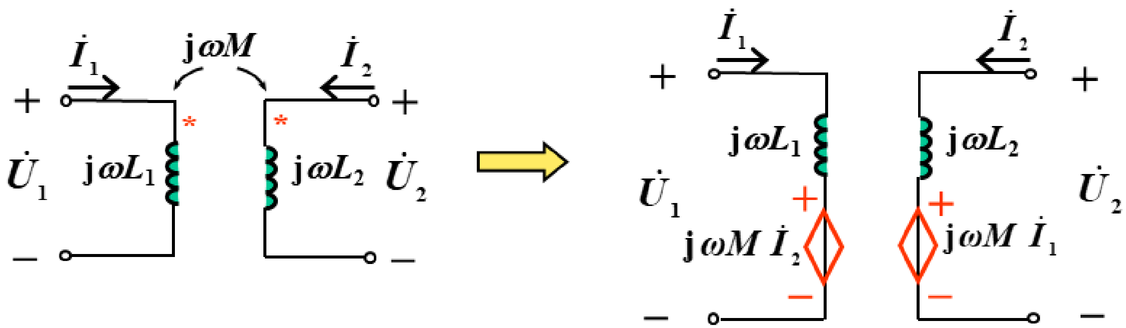
A
$$\dot{U}_1 = j\omega L_1\dot{I}_1 + j\omega M\dot{I}_2$$
$$\dot{U}_2 = j\omega M\dot{I}_1 + j\omega L_2\dot{I}_2$$

B
$$\dot{U}_1 = j\omega L_1\dot{I}_1 - j\omega M\dot{I}_2$$
$$\dot{U}_2 = j\omega M\dot{I}_1 - j\omega L_2\dot{I}_2$$

C
$$\dot{U}_1 = j\omega L_1\dot{I}_1 - j\omega M\dot{I}_2$$
$$\dot{U}_2 = j\omega M\dot{I}_1 + j\omega L_2\dot{I}_2$$

D
$$\dot{U}_1 = -j\omega L_1\dot{I}_1 - j\omega M\dot{I}_2$$
$$\dot{U}_2 = -j\omega M\dot{I}_1 + j\omega L_2\dot{I}_2$$

互感线圈的等效电路

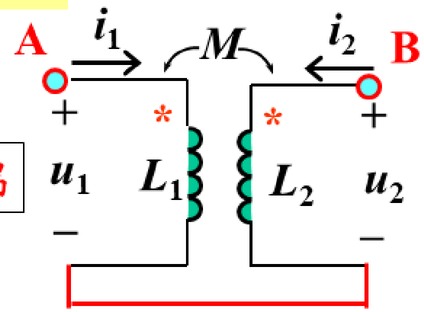


CCVS

$$
\begin{cases}
\dot{U}_1 = \mathrm{j}\omega L_1 \dot{I}_1 + \mathrm{j}\omega M \dot{I}_2 \\
\dot{U}_2 = \mathrm{j}\omega L_2 \dot{I}_2 + \mathrm{j}\omega M \dot{I}_1
\end{cases}
$$

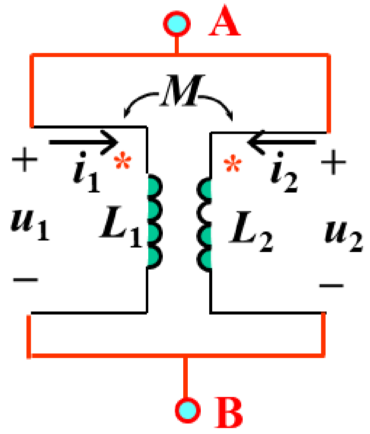
3 互感的去耦等效

串联



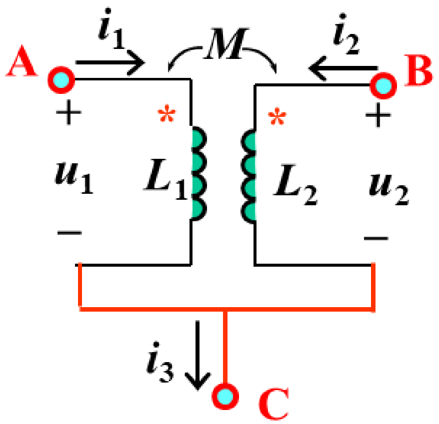
4端→2端

并联



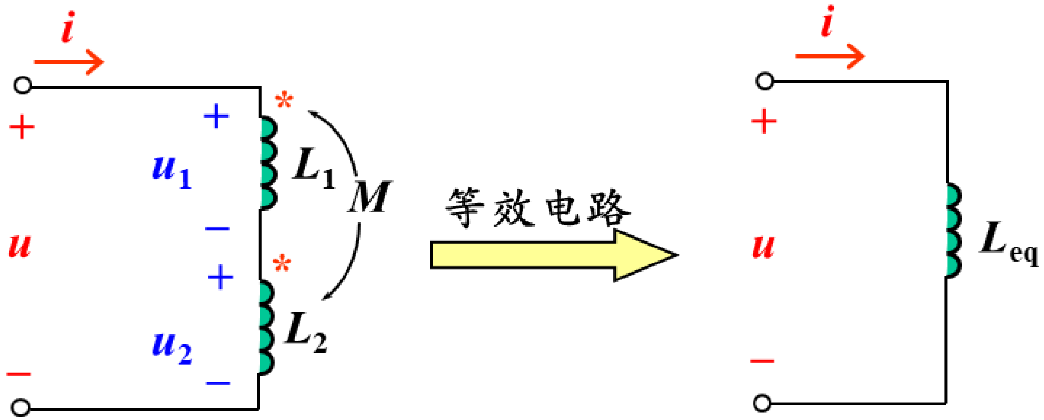
4端→2端

单公共节点联



4端→3端

(1) 互感线圈的串联　同名端顺串连接

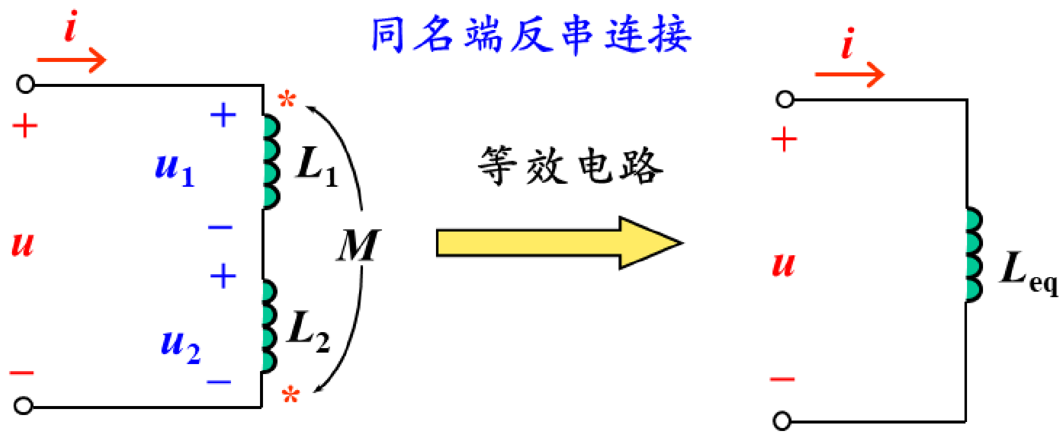


$$u = L_1\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \boxed{+M\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}} + L_2\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \boxed{+M\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}}$$

$$= (L_1 + L_2 + 2M)\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

$$= L_{eq}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

$$L_{eq} = L_1 + L_2 + 2M$$



$$u = L_1\frac{di}{dt} - M\frac{di}{dt} + L_2\frac{di}{dt} - M\frac{di}{dt}$$

$$= (L_1 + L_2 - 2M)\frac{di}{dt}$$

$$= L_{eq}\frac{di}{dt}$$

$$\boxed{L_{eq} = L_1 + L_2 - 2M}$$

问题5：你手头有一个电感测量装置（比如交流电桥），如何测量两线圈之间的互感值?

$$L_{顺} = L_1 + L_2 + 2M \qquad L_{反} = L_1 + L_2 - 2M$$

此处可以有弹幕或投稿

$$L_{顺} = L_1 + L_2 + 2M \qquad L_{反} = L_1 + L_2 - 2M$$

* 顺接一次，反接一次，就可以测出互感：

$$M = \frac{L_{顺} - L_{反}}{4}$$

* 全耦合 $M = \sqrt{L_1 L_2}$

当 $L_1 = L_2 = L$ 时，$M = L$

$$L_{eq} = \begin{cases} 4M & \text{顺串} \\ 0 & \text{反串} \end{cases}$$

单选题 1分

两电感线圈同名端顺串连接时电感值为10mH，同名端反串连接时电感值为2mH。则其互感为

A 8 mH

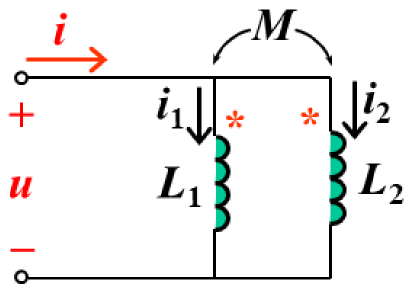
B 2 mH

C 4 mH

D 5 mH

(2) 互感线圈的并联

同名端在同侧



$$\begin{cases} u = L_1 \dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + M\dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \\ u = L_2 \dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + M\dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} \\ i = i_1 + i_2 \end{cases}$$

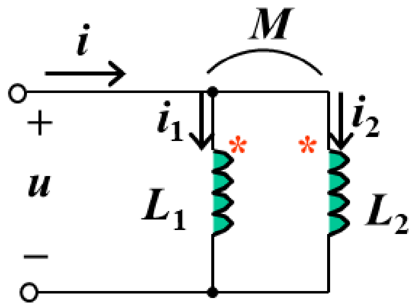
消去i_1和i_2，解得u, i的关系

$$u = \frac{(L_1L_2 - M^2)}{L_1 + L_2 - 2M}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

$$L_{eq} = \frac{(L_1L_2 - M^2)}{L_1 + L_2 - 2M}$$

记不住

同名端在同侧互感并联电路的去耦等效分析



$$\begin{cases} u = L_1 \dfrac{di_1}{dt} + M\dfrac{di_2}{dt} \\ u = L_2 \dfrac{di_2}{dt} + M\dfrac{di_1}{dt} \end{cases}$$

$i_2 = i - i_1$

$i_1 = i - i_2$

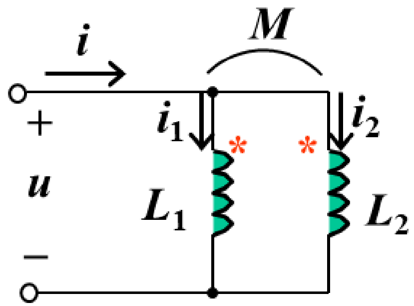
$$\begin{cases} u = (L_1 - M)\dfrac{di_1}{dt} + M\dfrac{di}{dt} \\ u = (L_2 - M)\dfrac{di_2}{dt} + M\dfrac{di}{dt} \end{cases}$$

画等效电路

（投稿）

同名端在同侧互感并联电路的去耦等效分析

强调L_1-M,L_2-M,M都不是真电感



$$\begin{cases} u = L_1\dfrac{di_1}{dt} + M\dfrac{di_2}{dt} \\ u = L_2\dfrac{di_2}{dt} + M\dfrac{di_1}{dt} \end{cases}$$

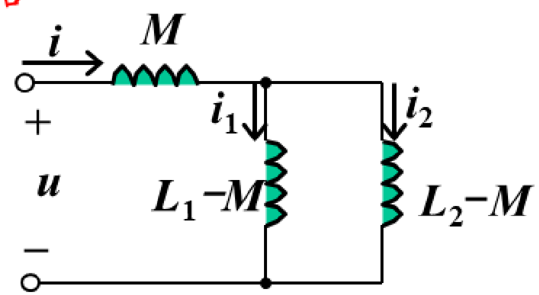
$i_2 = i - i_1$

$i_1 = i - i_2$

$$\begin{cases} u = (L_1 - M)\dfrac{di_1}{dt} + M\dfrac{di}{dt} \\ u = (L_2 - M)\dfrac{di_2}{dt} + M\dfrac{di}{dt} \end{cases}$$

画等效电路

（投稿）

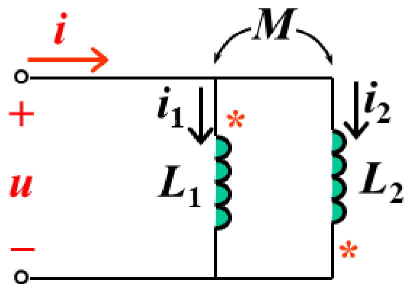


$(L_1 - M)//(L_2 - M) + M$

$$L_{eq} = \frac{(L_1L_2 - M^2)}{L_1 + L_2 - 2M}$$

于歆杰等，关于全耦合的一道习题的讨论，电气电子教学学报，2012(课外推送)

同理可推得同名端在异侧互感并联电路的去耦等效分析

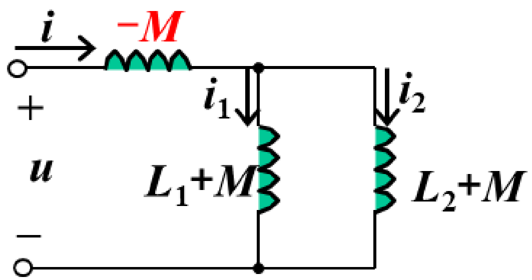


$$\begin{cases} u=(L_1+M)\dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}-M\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \\ u=(L_2+M)\dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}-M\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \end{cases}$$

等效电路

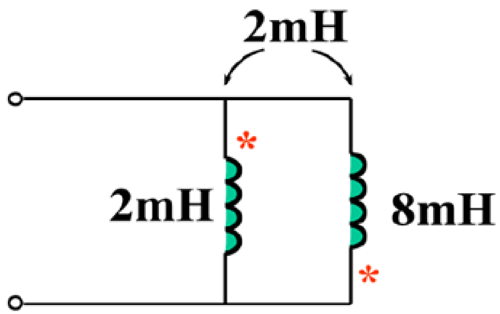
$$(L_1+M)//(L_2+M)-M$$

$$L_{\mathrm{eq}}=\frac{(L_1L_2-M^2)}{L_1+L_2+2M}$$



单选题 1分

该端口的去耦等效电感为



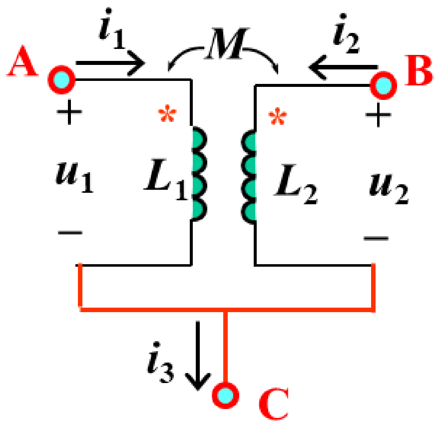
A 0.857 mH

B 0.962 mH

C 4.857 mH

D 2 mH

(3) 有一个公共节点互感线圈的去耦等效电路



2个同名端都靠近
（远离）公共节点

$$u_{AC}=u_1 \qquad i_3=i_1+i_2$$

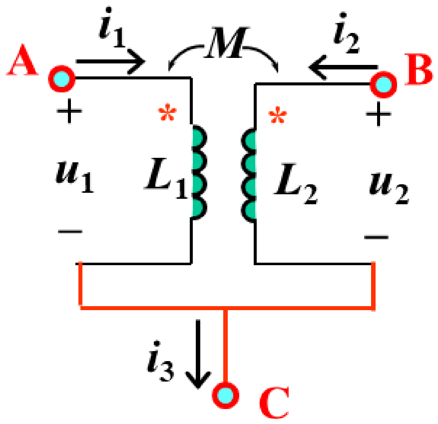
$$=L_1\frac{di_1}{dt}+M\frac{di_2}{dt}$$

$$=(L_1-M)\frac{di_1}{dt}+M\frac{di_3}{dt}$$

$$u_{BC}=u_2 \qquad i_3=i_1+i_2$$

$$=L_2\frac{di_2}{dt}+M\frac{di_1}{dt}$$

$$=(L_2-M)\frac{di_2}{dt}+M\frac{di_3}{dt}$$

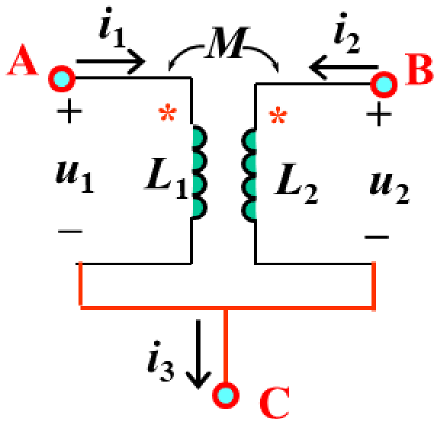


等效电路

$$u_{AC} = (L_1 - M)\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_3}{dt}$$

$$u_{BC} = (L_2 - M)\frac{di_2}{dt} + M\frac{di_3}{dt}$$

$$i_3 = i_1 + i_2$$

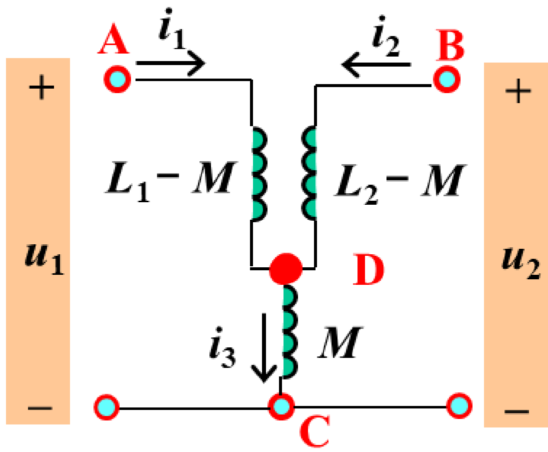


$$u_{AC} = (L_1 - M)\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_3}{dt}$$

$$u_{BC} = (L_2 - M)\frac{di_2}{dt} + M\frac{di_3}{dt}$$

$$i_3 = i_1 + i_2$$

等效电路



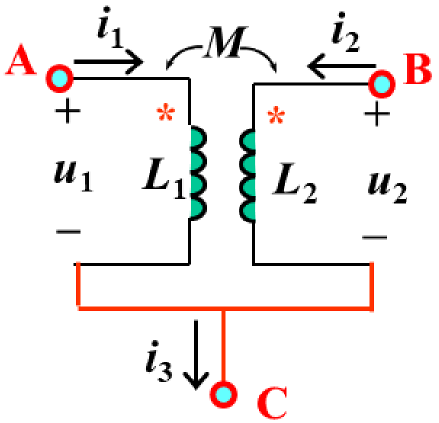
强调:

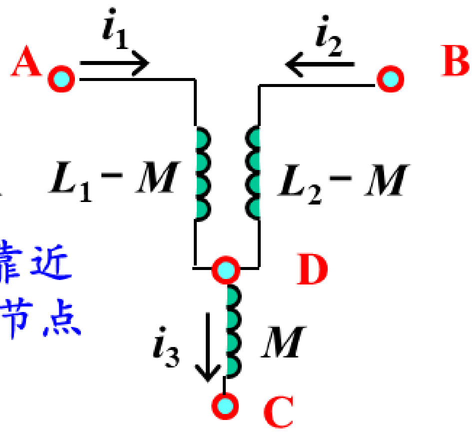
多了个节点D

$u_1 = u_{AC} \neq u_{AD}$

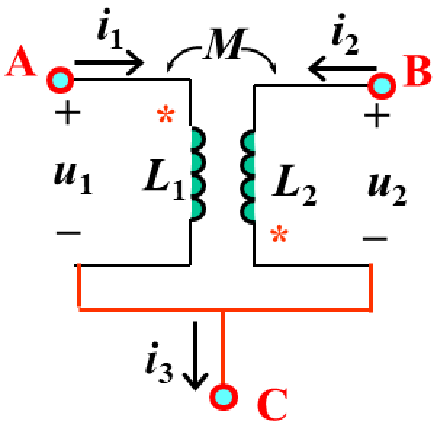
$u_2 = u_{BC} \neq u_{BD}$

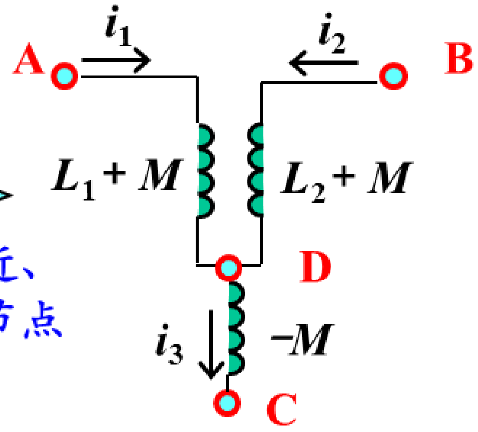
L_1-M, L_2-M, M 都不是真电感





2个同名端都靠近
（远离）公共节点

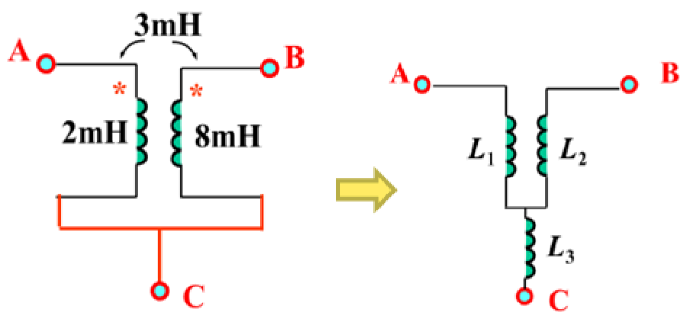




同名端1个靠近、
1个远离公共节点

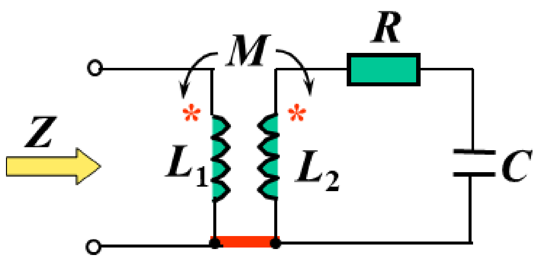
单选题 1分

如图所示，去耦等效电路中，L_1的感值为



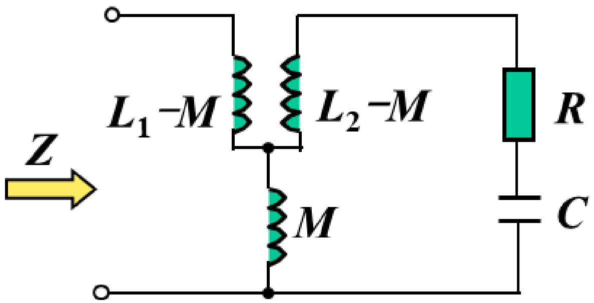
- A 1mH
- B －1mH
- C 5mH
- D 3mH

例1 已知如图，求入端阻抗 Z=?

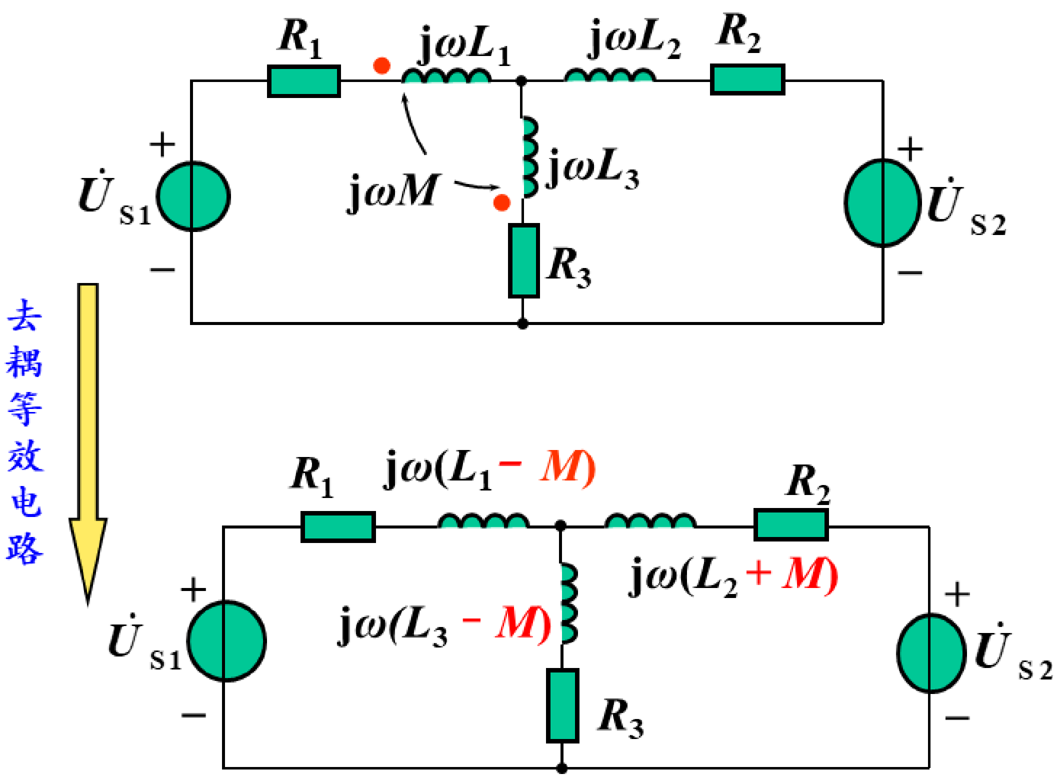


法一 端口加压求流

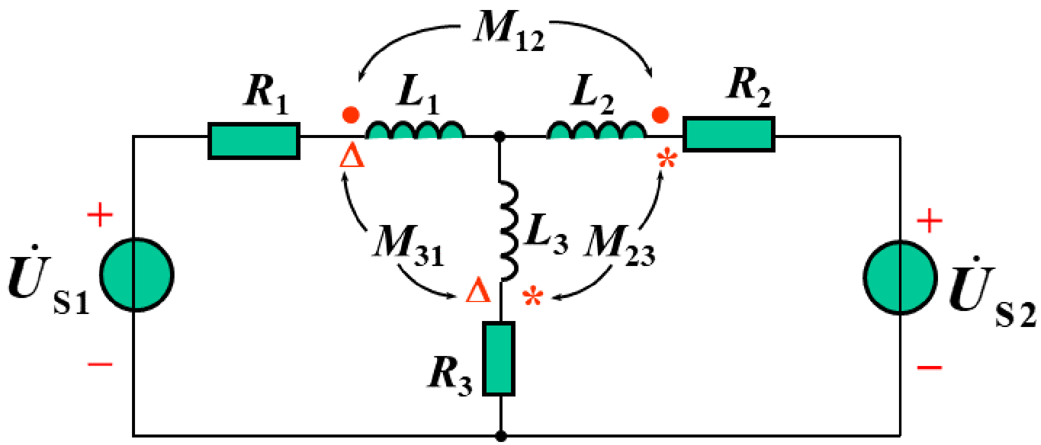
法二 去耦等效



例2 画出下图电路的去耦等效电路。

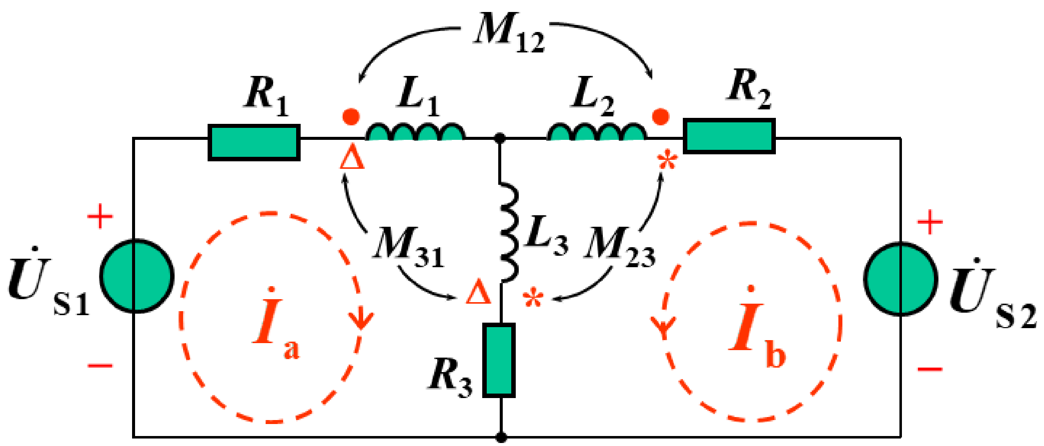


例3 列写电路的回路电流方程。



法1： 直接列写

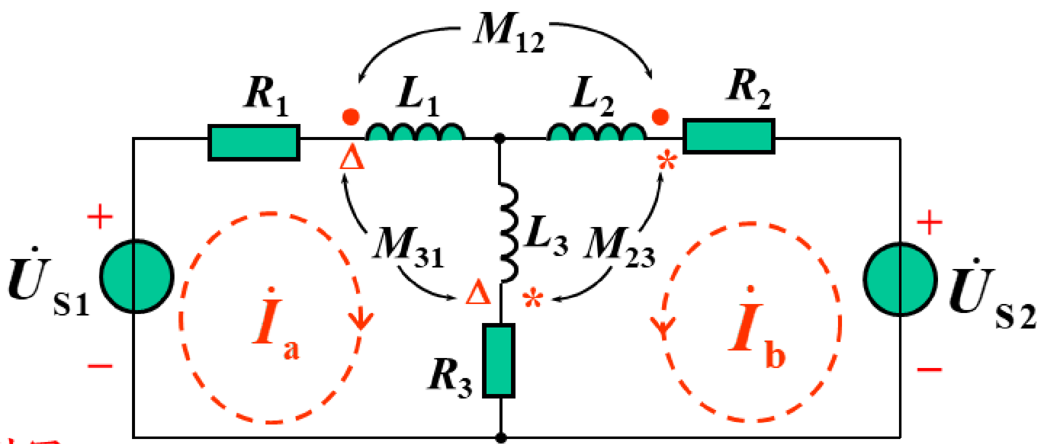
法2： 去耦等效



法1：直接列写
先不考虑互感
再补充互感电压

$$(R_1 + j\omega L_1 + j\omega L_3 + R_3)\dot{I}_a + (R_3 + j\omega L_3)\dot{I}_b$$

$$= \dot{U}_{S1}$$

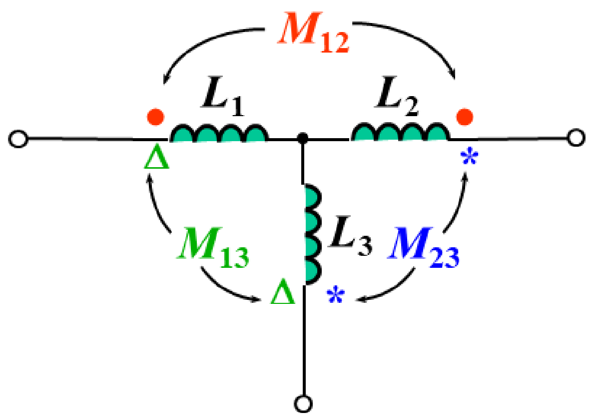


法1：直接列写

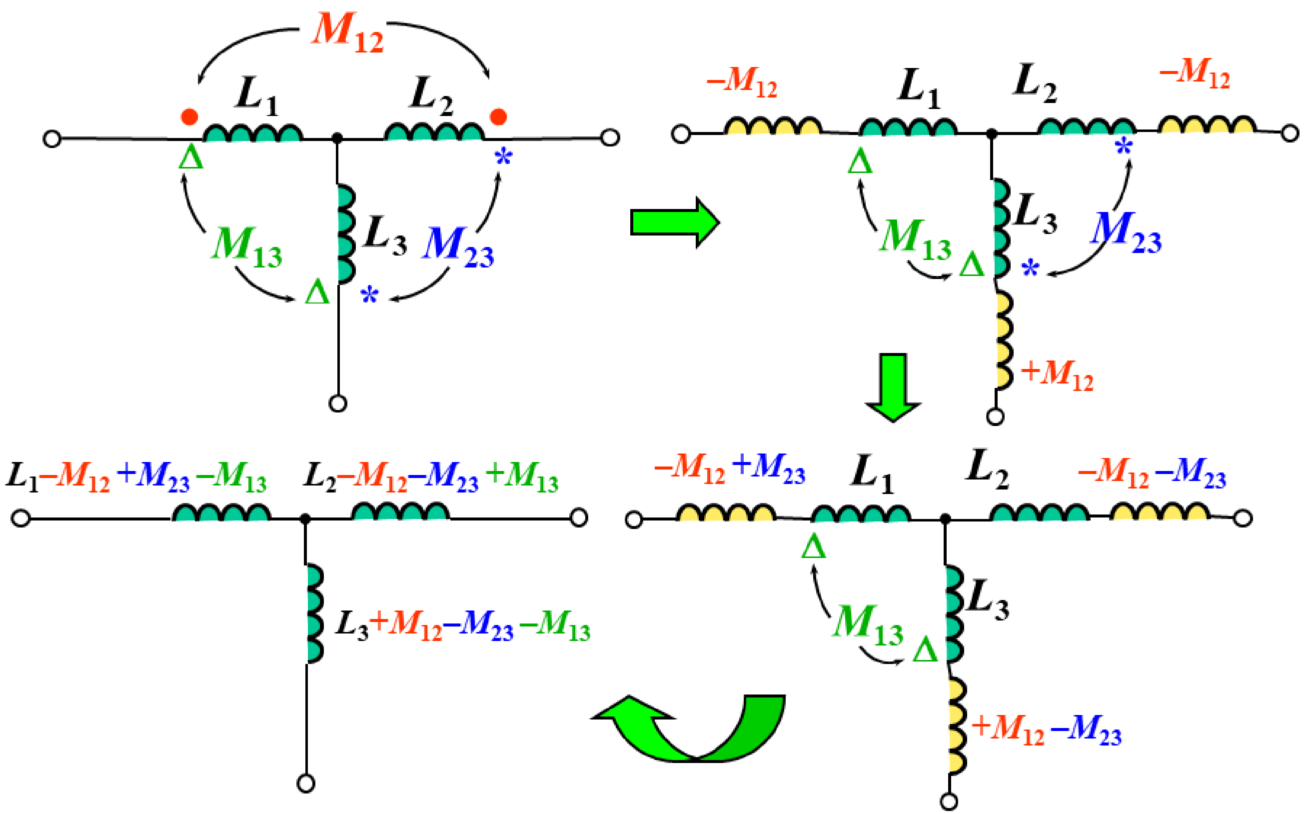
$$\begin{cases}(R_1+\mathrm{j}\omega L_1+\mathrm{j}\omega L_3+R_3)\dot{I}_a+(R_3+\mathrm{j}\omega L_3)\dot{I}_b \\ -\mathrm{j}\omega M_{31}\dot{I}_a-\mathrm{j}\omega M_{31}\dot{I}_a+\mathrm{j}\omega M_{12}\dot{I}_b-\mathrm{j}\omega M_{23}\dot{I}_b-\mathrm{j}\omega M_{31}\dot{I}_b=\dot{U}_{S1} \\ (R_2+\mathrm{j}\omega L_2+\mathrm{j}\omega L_3+R_3)\dot{I}_b+(R_3+\mathrm{j}\omega L_3)\dot{I}_a \\ +\mathrm{j}\omega M_{12}\dot{I}_a-\mathrm{j}\omega M_{31}\dot{I}_a-\mathrm{j}\omega M_{23}\dot{I}_a-\mathrm{j}\omega M_{23}\dot{I}_b-\mathrm{j}\omega M_{23}\dot{I}_b=\dot{U}_{S2}\end{cases}$$

注意：① 不丢互感电压项；② 互感电压的正、负。

法2　去耦等效电路(一对一对消)



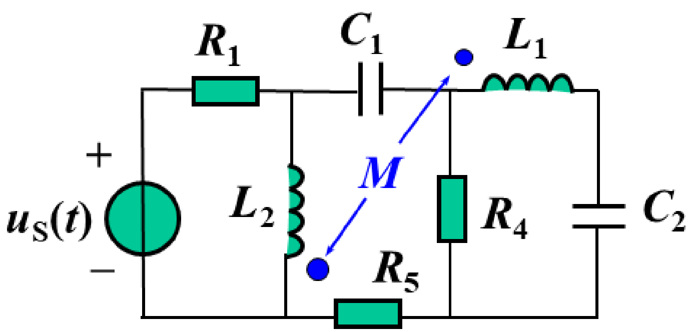
法2　去耦等效电路(一对一对消)



Principles of Electric Circuits Lecture 17 Tsinghua University 2023

44

去耦等效不是万能的



没有公共点

怎么办?