第十二章

12.6　一个电偶极子的电矩为 $p=ql$，证明此电偶极子轴线上距其中心为 $r(r\gg l)$ 处的一点的场强为 $E=2p/4\pi\varepsilon_0 r^3$。

证：$E = E_+ - E_- = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0(r-\frac{l}{2})^2} - \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0(r+\frac{l}{2})^2}$

$$= \frac{2qrl}{4\pi\varepsilon_0(r^2-\frac{l^2}{4})^2}$$

$$\approx \frac{2pr}{4\pi\varepsilon_0\cdot r^4}\text{，故 }\vec{E} = \frac{2p}{4\pi\varepsilon_0\cdot r^3}$$

12.8　两根无限长的均匀带电直线相互平行，相距为 $2a$，线电荷密度分别为 $+\lambda$ 和 $-\lambda$，求每单位长度的带电直线受的作用力。

解：其中一条带电直线在另一带电直线的电场均为

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}\text{（方向垂直于直线）}$$

故另一直线受到 $F = E\lambda = \dfrac{\lambda^2}{4\pi\varepsilon_0 a}$（垂直于直线）

12.10　如图 12.24，一个细的带电塑料圆环，半径为 R，所带线电荷密度 λ 和 θ 有 $\lambda=\lambda_0\sin\theta$ 的关系。求在圆心处的电场强度的方向和大小。

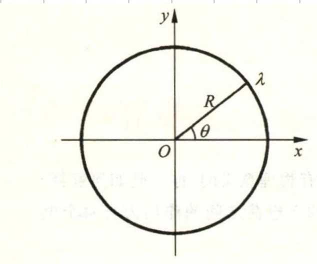


图 12.24　习题 12.10 用图

解：圆上 $dq = \lambda\cdot Rd\theta = \lambda\sin\theta Rd\theta$

故 $dE = \dfrac{dq}{4\pi\varepsilon_0\cdot r^2} = \dfrac{\lambda\sin\theta\cdot d\theta}{4\pi\varepsilon_0\cdot R}$

此时 x 轴上的电场分量为 $dE_x = \dfrac{\lambda_0\sin\theta\cos\theta d\theta}{4\pi\varepsilon_0\cdot R}$

y 轴上的电场分量为 $dE_y = \dfrac{\lambda_0\sin^2\theta\cdot d\theta}{4\pi\varepsilon_0 R}$

故 $E_x = \int dE_x = \int_0^{2\pi}\dfrac{\lambda_0\sin2\theta d\theta}{8\pi\varepsilon_0\cdot R} = 0$

$E_y = \int dE_y = \int_0^{2\pi}\dfrac{-\lambda_0\sin2\theta d\theta}{4\pi\varepsilon_0 R} = -\dfrac{\lambda_0}{4\varepsilon_0 R}$

因此，$\vec{E} = E_x\cdot\vec{i} + E_y\cdot\vec{j} = -\dfrac{\lambda_0}{4\varepsilon_0 R}\vec{j}$

12.16 地球表面上方电场方向向下，大小可能随高度改变（图 12.26）。设在地面上方 100 m 高处场强为 150 N/C，300 m 高处场强为 100 N/C。试由高斯定律求在这两个高度之间的平均体电荷密度，以多余的或缺少的电子数密度表示。

解：设有一个底面大小为 S，高度由100m到300m的封闭面，那么面内电荷

$$q = \varepsilon_0 \oint E \cdot dS = \varepsilon_0 \cdot S \cdot (E_1 - E_2)$$

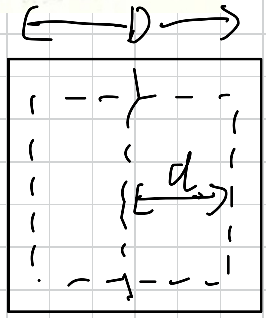
故每单位体积内有电子

$$n = \frac{q}{S \cdot h \cdot e} = \frac{\varepsilon_0 \cdot S \cdot (E_1 - E_2)}{S \cdot (h_2 - h_1) \cdot e} = \frac{8.85 \times 10^{-12} \times (150-100)}{(300-100) \times 1.6 \times 10^{-19}} = 1.38 \times 10^{7} (1/m^3)$$

面内电子带正电荷，即缺少电子。

密度 $$\rho = \frac{q}{Sh} = \frac{\varepsilon_0 \cdot S \cdot (E_1 - E_2)}{S(h_2 - h_1)} = \frac{8.85 \times 10^{-12} \times (150-100)}{300-100} = 2.2125 \times 10^{-12} (C/m^3)$$

12.20 一无限大均匀带电厚壁，壁厚为 D，体电荷密度为 ρ，求其电场分布并画出 E-d 曲线。d 为垂直于壁面的坐标，原点在厚壁的中心。



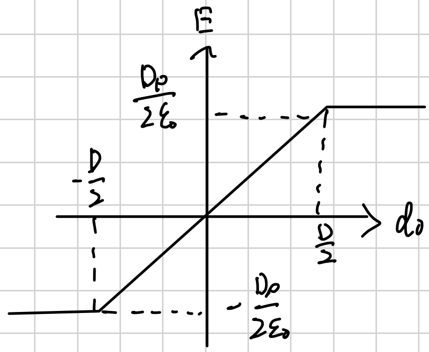
解：如右图所示，取距离厚壁中心为 d 的高斯面，有

$$q = \varepsilon_0 \cdot E \cdot 2S$$

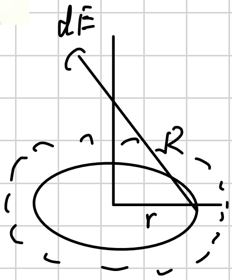
当高斯面仍在壁内，即 $d < \frac{D}{2}$ 时，$q = 2d \cdot S\rho$，$E = \frac{q}{2\varepsilon_0 S} = \frac{d\rho}{\varepsilon_0}$

否则，$q = D \cdot S \cdot \rho$，$E = \frac{D\rho}{2\varepsilon_0}$，

故 E-d 曲线如下图：



12.21 一大平面中部有一半径为 R 的小孔，设平面均匀带电，面电荷密度为 σ_0，求通过小孔中心并与平面垂直的直线上的场强分布。



解：由电场叠加原理：

$$dq = \sigma \cdot 2\pi r \cdot dr,\quad dE_{盘} = \frac{x\,dq}{4\pi\varepsilon_0 (r^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sigma x \cdot r\,dr}{2\varepsilon_0 (r^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

即 $$E_{盘} = \int dE_{盘} = \frac{\sigma x}{2\varepsilon_0} \cdot \int_0^R \frac{r\,dr}{(r^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \cdot \left(1 - \frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}}\right)$$

故 x 处合电场为 $$E = E_{板} - E_{盘} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}}\right) = \frac{\sigma x}{2\varepsilon_0\sqrt{R^2+x^2}}$$

12.23 通常情况下中性氢原子具有如下的电荷分布：一个大小为 $+e$ 的电荷被密度为 $\rho(r) = -Ce^{-2r/a_0}$ 的负电荷所包围，a_0 是“玻尔半径”，$a_0 = 0.53\times10^{-10}$ m，C 是为了使电荷总量等于 $-e$ 所需要的常量。试问在半径为 a_0 的球内净电荷是多少？距核 a_0 远处的电场强度多大？

解：负电荷总量 $$e = \int_0^\infty \rho(r)\cdot 4\pi r^2 dr = \int_0^\infty 4\pi C e^{-\frac{2r}{a}} \cdot r^2 dr = \pi C a_0^3 \Rightarrow C = \frac{e}{\pi a_0^3}$$

半径 a_0 球内净电量为

$$q = e - \int_0^{a_0} \rho(r)\cdot 4\pi r^2 dr = e - \int_0^{a_0} \frac{4e}{a_0^3} \cdot e^{-\frac{2r}{a_0}} \cdot r^2 dr = 5e\cdot e^{-2} = 5\times1.6\times10^{-19}\times e^{-2} = 1.08\times10^{-19}\,C$$

距核为 a_0 处场强 E

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a_0^2} = \frac{5e e^{-2}}{4\pi\varepsilon_0 a_0^2} = \frac{1.08\times10^{-19}}{4\pi\, 8.85\times10^{-12}\times(0.53\times10^{-10})^2} = 3.46\times10^{11}\,V/m$$

12.26 τ 子是与电子一样带有负电而质量却很大的粒子。它的质量为 3.17×10^{-27} kg，大约是电子质量的 3 480 倍，τ 子可穿透核物质，因此，τ 子在核电荷的电场作用下在核内可作轨道运动。设 τ 子在铀核内的圆轨道半径为 2.9×10^{-15} m，把铀核看作是半径为 7.4×10^{-15} m 的球，并且带有 $92e$ 且均匀分布于其体积内的电荷。计算 τ 子的轨道运动的速率、动能、角动量和频率。

解：$$\rho = \frac{92e}{\frac{4}{3}\pi r_0^3} = \frac{92\times1.6\times10^{-19}}{\frac{4}{3}\times\pi\times(7.4\times10^{-15})^3} = 8.67\times10^{24}\,(C/m^3)$$

$$E = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} = \frac{8.67\times10^{24}\times2.9\times10^{-15}}{3\times8.85\times10^{-12}} = 9.47\times10^{20}\,(V/m)$$

① $$v = \sqrt{\frac{Ee\cdot r}{m}} = \sqrt{\frac{9.47\times10^{20}\times1.6\times10^{-19}\times2.9\times10^{-15}}{3.17\times10^{-27}}} = 1.18\times10^{7}\,(m/s)$$

② $$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\times3.17\times10^{-27}\times(1.18\times10^{7})^2 = 2.20\times10^{-13}\,(J)$$

③ $L = mvr = 3.17\times10^{-27}\times1.18\times10^{7}\times2.9\times10^{-15} = 1.08\times10^{-34}(kg\cdot m^2/s)$

④ $\nu = \frac{v}{2\pi r} = \frac{1.18\times10^{7}}{2\pi\times2.9\times10^{-15}} = 6.48\times10^{20}(Hz)$

12.27 设在氢原子中，负电荷均匀分布在半径为 $r_0=0.53\times10^{-10}$ m 的球体内，总电量为 $-e$，质子位于此电子云的中心。求当外加电场 $E=3\times10^{6}$ V/m(实验室内很强的电场)时，负电荷的球心和质子相距多远？(设电子云不因外加电场而变形)此时氢原子的“感生电偶极矩”多大？

解：氢原子负电荷密度 $\rho = \frac{-e}{\frac{4}{3}\pi r_0^3} = \frac{-1.6\times10^{-19}}{\frac{4}{3}\pi(0.53\times10^{-10})^3} = -2.57\times10^{11}(C/m^3)$

正负电荷平衡，故 $\frac{\rho r}{3\varepsilon_0}e + Ee = 0$

即 $r = \frac{3\varepsilon_0 E}{\rho} = \frac{3\times8.85\times10^{-12}\times3\times10^{6}}{2.57\times10^{11}} = 3.10\times10^{-16}(m)$

故电偶极矩 $p = er = 1.6\times10^{-19}\times3.10\times10^{-16} = 4.96\times10^{-35}(C\cdot m)$

12.29 在图 12.28 所示的空间内电场强度分量为 $E_x=bx^{1/2}$，$E_y=E_z=0$，其中 $b=800\ N\cdot m^{-1/2}/C$。试求：

(1) 通过正立方体的电通量；

(2) 正立方体的总电荷是多少？设 $a=10$ cm。

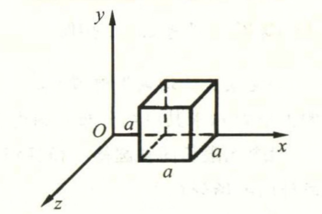


图 12.28 习题 12.29 用图

解：$\Phi_C = E_{2a}\cdot a^2 - E_a\cdot a^2 = b(2a)^{\frac{1}{2}}a^2 - ba^{\frac{1}{2}}a^2$

$= (\sqrt{2}-1)b\cdot a^{\frac{5}{2}}$

$= 1.05(N\cdot m^2/C)$

$q = \varepsilon_0\Phi_C = 8.85\times10^{-12}\times1.05 = 9.29\times10^{-12}C$

12.31 证明：电矩为 $\boldsymbol{p}$ 的电偶极子在场强为 $\boldsymbol{E}$ 的均匀电场中，从与电场方向垂直的位置转到与电场方向成 θ 角的位置的过程中，电场力做的功为 $pE\cos\theta=\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{E}$。

证：电偶极子受力矩 $M = pE\sin\theta$，转动 $d\theta$ 角时做功 $-Md\theta = -pE\sin\theta d\theta$

故 $W = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} -Md\theta = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} -pE\sin\theta d\theta = pE\cos\theta = \vec{p}\cdot\vec{E}$