思考题：

1. 静电场分析的是什么材料中、什么源产生的电场？
2. 电场强度$\boldsymbol{E}$的定义与单位是什么？
3. 研究电场的主要实际或实用目的是什么？
4. 描述静电场的基本方程形式为何？
5. 静电场的边值问题形式为何？
6. 无限大均匀空间中静电场边值问题的积分形式的解为何？
7. 不定积分不存在的定积分如何计算？
8. 积分方程组为何不容易求解？

第一章：静止电荷的电场

《场论》应用到静电场中构成静电场理论。其它各章类似。

- 本章分析静止电荷的电场，称为静电场，并考虑电介质与导体对电场的影响以及电场对电介质与导体的影响。
- 计算电场的实际目的主要是看绝缘材料中电场是否高于绝缘强度。
- 电场的效应是对电荷有作用力，会使电荷在自由空间或导体中移动或流动，各点电荷流动方向与速度便构成电流场，即电荷流动的场，这是第2章的内容。
- 除电荷的电场之外，时变的磁场也会产生电场，称其为感应电场。可将电荷的电场称为库仑电场（由于电荷的单位是库仑）。
- 两种电场的源不同，但两种电场对电荷的作用力相同，因此在导体中产生电流场的电场含这两种电场。
- 先介绍电场再介绍电场作用形成的电流场是第1和第2章存在的一种逻辑关系。感应电场是时变电磁场章节中的内容。

- 电荷可能以体密度ρ的形式分布在空间；更多的实际问题是以面电荷ρ_S的形式分布在导体电极外表面上。
- 电介质中的电荷一定是用一种方式放置在那里的，一定是已知量。
- 导体电极上的电荷一般是被外加电压源充电的结果，电压已知，而电荷未知。
- 可以认为，静电场理论也适用于时变电荷的库仑电场。
- 将利用函数表示的场的解答称为解析解，寻找解析解的是解析法；
- 数值计算是得到数值解，数值解的特点是离散性，解的形式是场域内很多离散点上的场量，而不是场函数。

第1节 电场强度$\boldsymbol{E}$与库仑定律

1. 电场强度$\boldsymbol{E}$的定义

静电场的源为静止（不运动）的标量源--电荷体密度ρ（单位：C/m^3)。静止的电荷产生的电场称为静电场，这里也假设电荷的值不变。可以认为时变电荷的库仑电场也符合本章给出的静电场的规律或特性。

一点的电场强度$\boldsymbol{E}$定义为位于该点静止的单位正电荷所受的电场力。

量纲：N/C，常用单位：V/m，伏/米，电气工程常用kV/m 。

2. 自由空间中静电场的边值问题

带有充必边界条件的具有唯一特解的微分方程称为边值问题。

带有已知边界条件的描述场的一般方程方程称为场的边值问题。

自由空间中静电场的边值问题：

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \rho(\boldsymbol{r}) / \varepsilon_0 \\ \nabla \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = 0 \\ E_t(\boldsymbol{r})\big|_{r\to\infty} = 0 \end{cases}$$

一维只需解一个方程

电容率：

ε_0=8.85×10^{-12}法拉/米。

第1节解此方程组（有两种解法）

积分方程：

$$\begin{cases} \oiint_s \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \dfrac{1}{\varepsilon_0} \iiint_V \rho \mathrm{d}V = \dfrac{q}{\varepsilon_0} \\ \oint_l \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0 \end{cases}$$

第2节解此方程组

3. 静电场边值问题的具体函数通解法

课程只要求会解一维问题，但要求会写三维边值问题。

例**1-1**：一个厚度为d的导体板围成的正方体区域中分布有电荷：

$$\rho(x, y, z)=\cos(\pi x/a)\cos(\pi y/a)\cos(\pi z/a)$$

其中a为正方体的边长，坐标原点设在正方体中心；壳内部区域的介电常数为ε_0，壳外空间为空气，无电荷。(1) 求壳内区域的电场，（2）给出导体壳外部区域的边值问题。

解：由于导体表面为齐次第一类边界E_t=0，故导体壳内部与外部可以分别求解。在三维模型中需要联立散度方程与旋度方程进行求解。（1）对于导体壳内区域，边值问题为：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial E_x}{\partial x}+\dfrac{\partial E_y}{\partial y}+\dfrac{\partial E_z}{\partial z}=\rho/\varepsilon=\cos(\pi x/a)\cos(\pi y/a)\cos(\pi z/a)/\varepsilon & \in V \\ \dfrac{\partial H_z}{\partial y}-\dfrac{\partial H_y}{\partial z}=0,\ \dfrac{\partial H_x}{\partial z}-\dfrac{\partial H_z}{\partial x}=0,\ \dfrac{\partial H_y}{\partial x}-\dfrac{\partial H_x}{\partial y}=0 & \in V \\ E_t=0 & \in \boldsymbol{S}_1 \end{cases}$$

通过观察源函数的特点与散度方程的形式：

$$\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}=\rho/\varepsilon=\cos(\pi x/a)\cos(\pi y/a)\cos(\pi z/a)/\varepsilon$$

可以看出满足以上边值问题的解为：

$$E_x(x,y,z)=\frac{a}{3\varepsilon\pi}\sin(\pi x/a)\cos(\pi y/a)\cos(\pi z/a)$$
$$E_y(x,y,z)=\frac{a}{3\varepsilon\pi}\cos(\pi x/a)\sin(\pi y/a)\cos(\pi z/a)$$
$$E_z(x,y,z)=\frac{a}{3\varepsilon\pi}\cos(\pi x/a)\cos(\pi y/a)\sin(\pi z/a)$$

容易验证上面的解满足散度方程与旋度方程以及边界条件。

（2）对壳外表面到无限远区域，导体表面上除了边界条件E_t=0之外，还需要施加通量源约束，导体壳外表面上感应的总电荷q等于壳内部区域电荷ρ的体积分。

4. 静电场边值问题的积分形式通解法

由矢量格林第二公式与格林函数概念，可得在S围成的区域V内静电场的微分方程组（边值问题）的解为：

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\iiint_V \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{4\pi\varepsilon}\nabla'\frac{1}{R}\mathrm{d}V'-\frac{1}{4\pi}\{\oiint_S \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')\nabla'\frac{1}{R}\mathrm{d}S'+\oiint_S[\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')]\times\nabla'\frac{1}{R}\mathrm{d}S'\}$$

库仑定律（积分形式通解法只需掌握库仑定律）

由以上边值问题的通解，得自由空间静电场边值问题的解为：

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_{V'}\frac{\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}V'}{R^2}\boldsymbol{R}^0$$

起初库仑通过实验得到的场与源的此关系。

- 对自由空间或无限大线性均匀介质空间中电荷的电场，可利用库仑定律来求解。
- 如果不是无限大线性均匀介质空间，则库仑定律无效。
- 线性介质中源产生的场符合叠加定理，即各源的场可叠加。

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=-\iiint_{V'}\frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{4\pi\varepsilon_0}\nabla'\frac{1}{R}\,\mathrm{d}V'=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_{V'}\frac{\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}V'}{R^2}\boldsymbol{R}^0$$

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'$$

$$\begin{cases}\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\dfrac{\rho}{\varepsilon_0} & (1)\\ \nabla\times\boldsymbol{E}=0 & (2)\end{cases}$$

（扩充内容：）

现证明上面的表达式是静电场微分方程组的解。

只要代入方程中方程成立即得证。

利用格林函数与δ函数的筛选性，可得：

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=-\iiint_{V'}\frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{4\pi\varepsilon}\nabla'\cdot\nabla'\frac{1}{R}\mathrm{d}V'=-\iiint_{V'}\frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{4\pi\varepsilon}\nabla'^2\frac{1}{R}\mathrm{d}V'$$

$$=-\iiint_{V'}\frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{4\pi\varepsilon}[-4\pi\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')]\,\mathrm{d}V'=\rho(\boldsymbol{r})/\varepsilon$$

注意到一个函数的梯度再取旋度一定等于零，则有：

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\iiint_{V'}\frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{4\pi\varepsilon_0}\nabla'\times\nabla'\frac{1}{R}\,\mathrm{d}V'=0$$

（证毕。扩充毕）

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_{V'}\frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2}\boldsymbol{R}^0\mathrm{d}V'=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_{V'}\frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{R^2}\boldsymbol{R}^0\mathrm{d}V'$$

体积微元dV中的电荷的电场： $\mathrm{d}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\dfrac{\rho(\boldsymbol{r}')}{4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2}\boldsymbol{R}^0\mathrm{d}V'$

无限大空间中点电荷的场强为：$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2}\boldsymbol{R}^0$

电荷可有面分布（如导体表面），形成面电荷ρ_{s}，单位是C/m^2;
将面压缩成线，便形成线电荷τ，单位是C/m，其为理想模型。
注意：体电荷ρ区的面上并没有面电荷ρ_{s}，因为面的体积为零。

对任意分布的面电荷有：

$$\mathrm{d}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\frac{\rho_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{r}')}{4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2}\boldsymbol{R}^0\mathrm{d}S'$$

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint_{S'}\frac{\rho_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2}\boldsymbol{R}^0\mathrm{d}S'$$

对任意分布的线电荷有：

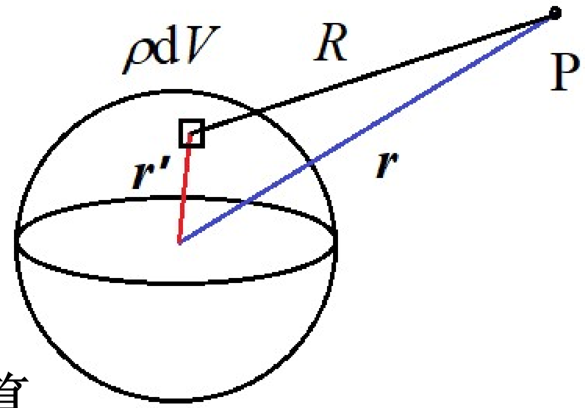
$$\mathrm{d}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\frac{\tau(\boldsymbol{r}')}{4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2}\boldsymbol{R}^0\mathrm{d}l'$$

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{l'}\frac{\tau(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2}\boldsymbol{R}^0\mathrm{d}l'$$

例1-1：自由空间中一个半径为a的球内均匀充满电荷，电荷密度为ρ，总量为q，求球内外区域的电场强度。

利用库仑定律求解

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{P}}(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_{V'}\frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{R^2}\boldsymbol{R}^0\mathrm{d}V'$$



在球坐标系中，将$\boldsymbol{r}$和$\boldsymbol{r}'$用三个坐标分量表示；特别是要将矢量积分表示为三个分量的积分，或各分量分别计算。

由于对称性可以，场只有$\boldsymbol{r}$方向的分量E_r，$E_\alpha=E_\theta=0$, 且有：

$$E_{r\mathrm{P}}(\boldsymbol{r})=\frac{\rho}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^a\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2}\boldsymbol{e}_R\cdot\boldsymbol{e}_r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}r$$ （投影到$\boldsymbol{r}$方向上）

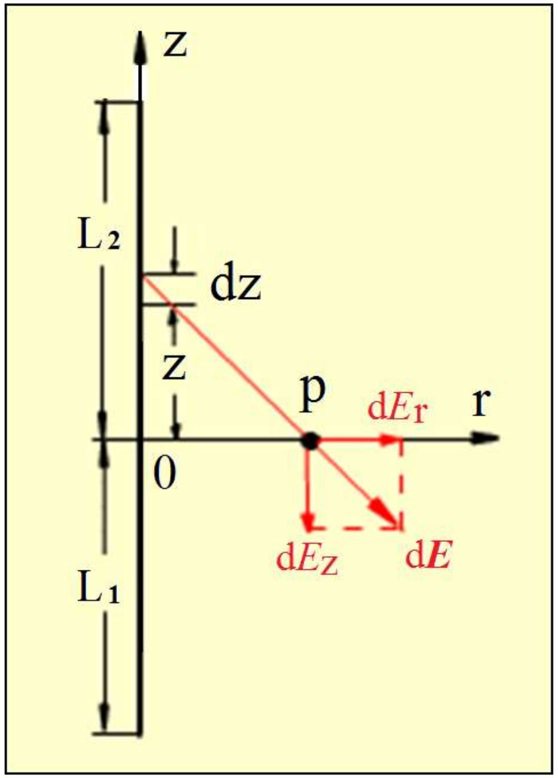
积分不易计算，但可以推断积分结果为：$E_{r\mathrm{P}}(\boldsymbol{r})=\dfrac{\rho}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{r^2}\dfrac{4\pi a^3}{3}=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

对电荷区域内的点也可以通过积分解$\boldsymbol{E}$(略)。

球区域收缩为一点该式也成立。

教材例1-1：真空中有长为L的均匀直线电荷，线密度为τ，求点P 的电场强度。（物理教材例12.4）

建立坐标系



解：此为轴对称场。

位于$(z,0)$处的微元τdz在P点场强：

$$\mathrm{d}\boldsymbol{E}(r,z)=\frac{\tau\,\mathrm{d}z}{4\pi\varepsilon_0(r^2+z^2)}\boldsymbol{R}^0$$

对d$\boldsymbol{E}$向两个坐标上投影得两分量为：

$$\mathrm{d}E_r=\frac{r}{\sqrt{r^2+z^2}}\mathrm{d}E \quad \mathrm{d}E_z=\frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}}\mathrm{d}E$$

查不定积分表

积分得：

$$E_r=\int_{-L_1}^{L_2}\frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0(r^2+z^2)}\cdot\frac{r}{\sqrt{r^2+z^2}}\mathrm{d}z=\frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 r}\left(\frac{L_2}{\sqrt{r^2+L_2^2}}+\frac{L_1}{\sqrt{r^2+L_1^2}}\right)$$

$$E_z=\int_{-L_1}^{L_2}\frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0(r^2+z^2)}\cdot\frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}}\mathrm{d}z=\frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{r^2+L_2^2}}-\frac{1}{\sqrt{r^2+L_1^2}}\right)$$

当$L=\rightarrow\infty$时，由于上下对称，故E_z=0；

对
$$E_r=\frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 r}\left(\frac{L_2}{\sqrt{r^2+L_2{}^2}}+\frac{L_1}{\sqrt{r^2+L_1{}^2}}\right)$$

取极限得：
$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{p}}=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r}\boldsymbol{r}^0$$

此为无限长线电荷在P点产生的电场强度。
此结果可通过下一节的高斯通量定理很方便地得到。

对电荷直接积分求电场的问题，只需要掌握该例题写出积分式前的内容，不要求其它相关计算问题。

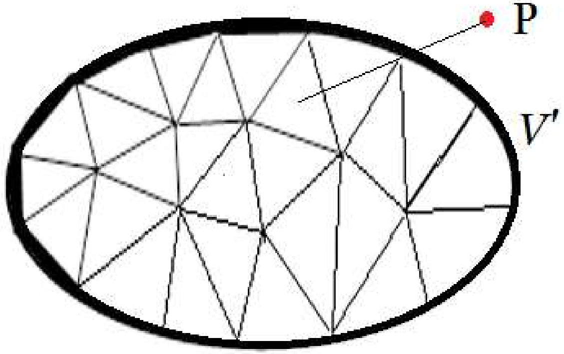
需要记住教材例1-2的结论，即球面上均匀分布的电荷不仅在球心、并且在球内各点产生的场强都为零。

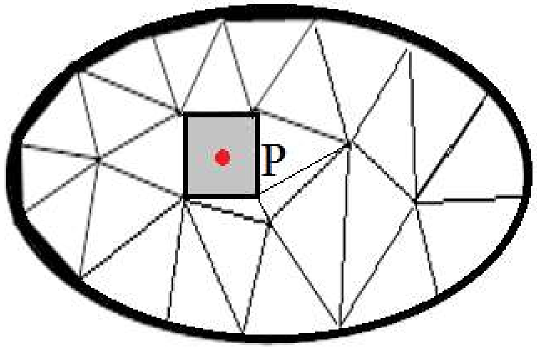
扩充：积分积不出可用数值积分方法近似计算。

扩充：积分积不出可用数值积分方法近似计算，
即对场域进行离散，将积分变为求和近似。

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{P}}(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_{V'}\frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{R^2}\boldsymbol{R}^0\mathrm{d}V'=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{\rho(\boldsymbol{r}_i')}{\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|^2}\boldsymbol{R}^0\Delta V_i'$$

P点场强等于将各小块的总电荷视为位于其中心（重心）的点电荷，然后叠加求场得到结果。





对电荷区域内的场点P，由于R有零点，被积函数有无限大值，需特殊处理。方法是以P点为中心掏空一个对称的区域，如立方体或球，在电荷均匀的情况下该区域对P点场强贡献必为零。若电荷不均匀，该区域需取得较小，也不考虑该区对场的贡献来近似求解。（扩充毕）