设C_r是圆周：$|z-z_0|=r>0$, 函数$f(z)$在复平面处处解析，用$f(z)$关于C_r的闭曲线积分公式给出$f(z)$在z_0点的n阶导数的公式(Cauchy 高阶导数公式)，这里n是非负整数, (2分) 并由此证明：

(a). 若令$M(r)=\max_{|z-z_0|=r}|f(z)|$, 则$|f^{(n)}(z_0)|\le \frac{n!M(r)}{r^n}$; (4分)

(b). 若存在常数$M>0$，n是非负整数, 使得$|f(z)|\le M\left(\sum_{k=0}^n |z|^k\right), \forall z\in C$, 则$f(z)$为一次数不超过$n$的多项式. (4分)

Cauchy 高阶导数公式:

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_{C_r}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz=\frac{n!}{2\pi i}\oint_{|z-z_0|=r}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz,\quad n\in N_0=\{0,1,2,\cdots,\}. \tag{0.1}$$

(a) 令$r>0$, 由Cauchy 积分公式得：(这里用到$z=z_0+re^{i\theta}$, $|z-z_0|=r$, $dz=ire^{i\theta}d\theta$, $|dz|=rd\theta>0$),

$$\begin{aligned}\left|f^{(n)}(z_0)\right| &= \left|\tfrac{n!}{2\pi i}\right|\left|\oint_{|z-z_0|=r}\tfrac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz\right| \\ &\le \tfrac{n!}{2\pi}\oint_{|z-z_0|=r}\left|\tfrac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\right||dz| \\ &= \tfrac{n!}{2\pi}\oint_{|z-z_0|=r}\tfrac{|f(z)|}{|z-z_0|^{n+1}}|dz| \\ &\le \tfrac{n!}{2\pi}\int_0^{2\pi}\tfrac{M(r)}{r^{n+1}}rd\theta \\ &= \tfrac{n!M(r)}{r^n}.\end{aligned}$$

命题(a) 得证.

(b) 当$|f(z)|\le M\cdot(\sum_{k=0}^n|z|^k)$, 令$z_0=0$, 可得$M(r)\le M\cdot(\sum_{k=0}^n r^k)$,

因而由上式, 可得

$$0\le\left|f^{(n+j)}(0)\right|\le\frac{(n+j)!M\cdot(\sum_{k=0}^n r^k)}{r^{n+j}}=(n+j)!M\cdot\left(\sum_{k=0}^n\frac{1}{r^{n+j-k}}\right)\to 0,\quad r\to+\infty,$$

故有$f^{(n+j)}(0)=0,\ j=1,2,\cdots$.

由Taylor 级数可得

$$f(z)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}z^k=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}z^k.$$

这表明$f(z)$是一次数不超过n的多项式. 命题(b)得证.