

第三次作业

3. 掷两颗骰子, 以 A 记事件“两颗点数之和为 10”, 以 B 记事件“第一颗点数小于第二颗点数”, 试求条件概率 $P(A|B)$ 和 $P(B|A)$.

$$P(A) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

4 6
5 5
6 4

$$P(B) = \frac{15}{36}$$

1 5种
2 4
3 3
4 2
5 1
6 0

$$P(AB) = \frac{1}{36}$$

4 6

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{1}{15}, \quad P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{1}{3}$$

9. 已知 $P(\bar{A}) = 0.3, P(B) = 0.4, P(A\bar{B}) = 0.5$, 求 $P(B|A \cup \bar{B})$.

$$P(B|A \cup \bar{B}) = \frac{P[B \cap (A \cup \bar{B})]}{P(A \cup \bar{B})} = \frac{P(AB) \cup \emptyset}{P(A) + P(\bar{B}) - P(A\bar{B})} = \frac{P(A) - P(A\bar{B})}{P(A) + P(\bar{B}) - P(A\bar{B})} = \frac{0.7 - 0.5}{0.7 + 0.6 - 0.5} = 0.25$$

11. 口袋中有 1 个白球, 1 个黑球. 从中任取 1 个, 若取出白球, 则试验停止; 若取出黑球, 则把取出的黑球放回的同时, 再加入 1 个黑球, 如此下去, 直到取出的是白球为止, 试求下列事件的概率:

(1) 取到第 n 次, 试验没有结束;

(2) 取到第 n 次, 试验恰好结束.

$A =$ “第 i 次取到黑球”, $i = 1, 2, \dots$

$$(1) \quad P(A_1 A_2 A_3 \dots A_n) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \dots \times \frac{n-1}{n} \times \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

$$(2) \quad P(A_1 A_2 A_3 \dots \bar{A}_n) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \dots \times \frac{n-1}{n} \times \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$$

13. 甲口袋有 a 个白球、 b 个黑球, 乙口袋有 n 个白球、 m 个黑球.

(1) 从甲口袋任取 1 个球放入乙口袋, 再从乙口袋任取 1 个球. 试求最后从乙口袋取出的是白球的概率;

(2) 从甲口袋任取 2 个球放入乙口袋, 再从乙口袋任取 1 个球. 试求最后从乙口袋取出的是白球的概率.

$A =$ 甲拿 i 个白球到乙口袋, $i = 0, 1, 2$, $B =$ 乙口袋取到白球

$$\begin{aligned} (1) \quad P(B) &= P(A)P(B|A) + P(A_0)P(B|A_0) \\ &= \frac{a}{a+b} \cdot \frac{n+1}{n+1+m} + \frac{b}{a+b} \cdot \frac{n}{n+1+m} \\ &= \frac{an+bn+a}{(a+b)(n+m+1)} \end{aligned}$$

$$(2) P(B_2) = P(A_2) P(B|A_2) + P(A_1) P(B|A_1) + P(A_0) P(B|A_0)$$

$$= \left(\frac{a}{a+b} \times \frac{a-1}{a+b-1} \right) \times \left(\frac{n+2}{n+m+2} \right) + \left(\frac{a}{a+b} \times \frac{b}{a+b-1} \right) \times \frac{n+1}{n+m+2} + \left(\frac{b}{a+b} \times \frac{b-1}{a+b-1} \right) \times \frac{n}{n+m+2}$$

$$= \frac{b(b-1)n + 2ab(n+1) + a(a-1)(n+2)}{(a+b)(a+b-1)(n+m+2)}$$

16. 两台车床加工同样的零件, 第一台出现不合格品的概率是 0.03, 第二台出现不合格品的概率是 0.06, 加工出来的零件放在一起, 并且已知第一台加工的零件比第二台加工的零件多一倍.

(1) 求任取一个零件是合格品的概率;

(2) 如果取出的零件是不合格品, 求它是由第二台车床加工的概率.

A = 第一台机生产的零件, B = 合格品.

$$(1) P(B) = P(A)P(B|A) + P(\bar{A})P(B|\bar{A}) \quad (2) P(\bar{A}|B) = \frac{P(\bar{A}\bar{B}) \times P(\bar{A})}{1 - P(B)} = \frac{0.06 \times \frac{1}{3}}{1 - 0.96} = 0.5$$

$$= \frac{2}{3} \times 0.97 + \frac{1}{3} \times 0.94$$

$$= 0.96$$

18. 学生在做一道有 4 个选项的单项选择题时, 如果他不知道问题的正确答案, 就作随机猜测. 现从卷面上看题是答对了, 试在以下情况下求学生确实知道正确答案的概率:

(1) 学生知道正确答案和胡乱猜测的概率都是 $1/2$;

(2) 学生知道正确答案的概率是 0.2.

A = 会做, B = 做对

$$(1) P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A) + P(\bar{A})P(B|\bar{A})} = \frac{\frac{1}{2} \times 1}{\frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4}} = 0.8$$

$$(2) P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A) + P(\bar{A})P(B|\bar{A})} = \frac{0.2 \times 1}{0.2 \times 1 + 0.8 \times \frac{1}{4}} = 0.5$$

20. 口袋中有一个球, 不知它的颜色是黑的还是白的. 现再往口袋中放入一个白球, 然后从口袋中任意取出一个, 发现取出的是白球, 试问口袋中原来那个球是白球的可能性为多少?

A = 原来是黑球, B = 取出白球

$$P(\bar{A}|B) = \frac{P(B|\bar{A})P(\bar{A})}{P(A)P(B|A) + P(\bar{A})P(B|\bar{A})} = \frac{\frac{2}{3} \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}} = \frac{2}{3}$$