第一章习题

5. 给出等式$z^2=|z|^2$成立的充要条件.

6. (I). 求

$$\max_{|z|\leq r}|z^n+a|,$$

这里 $n\in N=\{1,2,\cdots,\}$, $r>0$, $a\in C$, 并给出取得最大值时，z及$z'=z^n+a$ 的表达式来。

(II). 求

$$\min_{|z|\leq r}|z^n+a|,$$

这里$n\in N=\{1,2,\cdots,\}$, $r>0$, $a\in C$, 并给出取得最小值时，z及$z'=z^n+a$ 的表达式来。

（提示：分以下情况讨论：在(I) 中，$a=0$ 或$a\neq 0$; 在(II) 中，$|a|\leq r^n$; 或$|a|>r^n$.)

11. 证明：对于任意复数z_1,z_2均有

$$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2).$$

并给出对应的几何意义来.

19. 证明若

$$|z_1-z_0|=|z_2-z_0|=|z_3-z_0|=r>0$$

且$\frac{z_1+z_2+z_3}{3}=z_0$，则三角形$\Delta_{z_1z_2z_3}$是正三角.

23. 证明：任意直线方程均可以写成以下形式：

$$\alpha\overline{z}+\overline{\alpha}z+c=0,$$

这里$\alpha\in C,c\in R$.

24. 证明：任意圆的方程均可以写成以下形式：

$$z\overline{z}+\alpha\overline{z}+\overline{\alpha}z+c=0,$$

这里$\alpha\in C, c\in R.$

29. 若复函数$f(z)$在点z_0连续，且$f(z_0)\neq 0$，证明：存在$\delta>0$, 当$|z-z_0|<\delta$时，有$f(z)\neq 0$.
(此题用 $\epsilon-\delta$ 语言证明.)