感应子中频发电机气隙磁导谐波分析法

东风电机厂　　杨烈福

一

在研究感应子中频发电机和其它交流电机的电压波形时，需要用到谐波分析法，即将已知的函数 $y=f(x)$ 展开为傅立叶级数。

对于任何一个函数，只要满足其收敛条件就可以在区间〔$-\pi$，π〕展开为傅立叶级数：

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx) \tag{1}$$

式中 a_0 为恒定分量，a_k、b_k 为傅立叶系数，就是我们通常所说的 K 次谐波的幅值，等于

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx \tag{2}$$

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kxdx \tag{3}$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kxdx \tag{4}$$

如果已知函数为偶函数，即 $f(x)=f(-x)$，其图形对称于纵坐标轴，则可展为余弦级数

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos kx \tag{5}$$

其系数（包括 a_0）为

$$a_k=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\cos kxdx \tag{6}$$

如果已知函数为奇函数，即 $f(-x)=-f(x)$，其图形对称于原点，则可展开为正弦级数

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}b_k\sin kx \tag{7}$$

其系数（包括 a_0）为

$$b_k=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\sin kxdx \tag{8}$$

谐波分析法的关键在于找出函数 $y=(fx)$ 的数学表达式。

但是在实践中，很多情况下函数 $y=f(x)$ 的数学表达式难以确定，然而函数的图形却可以通过计算或者测试描绘出来。例如可以用示波器摄取发电机的电压波形。这种情况下，要对图形进行谐波分析，需要寻求一种近似的方法计算傅立叶系数，把图形近似地表达为傅立叶级数。这种方法，称为实用谐波分析法或近似谐波分析法，其关键在于用近似积分法求出傅立叶系数。

根据定积分的定义：

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\substack{n\to\infty\\ \|\Delta x\|\to 0}}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$$

可以近似地认为（见图 1）

$$\int_a^b f(x)dx\approx\sum_{i=0}^{n-1}f(x_i)\Delta x_i$$

$$=\sum_{i=0}^{n-1}y_i\ \Delta x_i$$

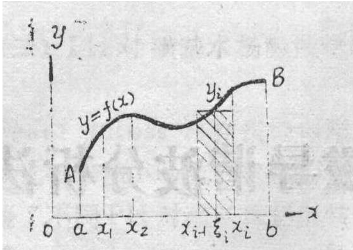


图 1

$$= \sum_{i=0}^{n-1} (y_0 \Delta x_0 + y_1 \Delta x_1 + \cdots \cdots y_i \Delta x_i + \cdots + y_{n-1} \Delta x_{n-1}) \tag{9}$$

如果各个区间为等分， 则 $\Delta x_i = \Delta x = \frac{b-a}{n}$，

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(y_0 + y_1 + y_2 + \cdots y_{n-1}) \tag{10}$$

等分数愈多，所得的结果就愈精确。

假定已知的图形如图 2 所示。在图形上按适当比例画上坐标，横坐标用角度或

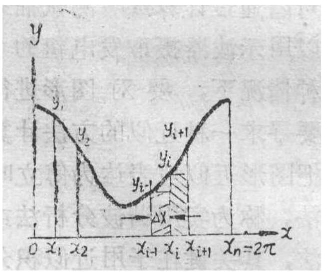


图 2

弧度表示，纵坐标为函数y。

（1）把区间〔0，2π〕分成n 等分（最好按三角函数的特点，取n＝6，12，16,24,…等，使每一等分角度的三角函数值便于记忆)，每一等分的宽度 $\Delta x = \frac{2\pi}{n}$，各等分点的横坐标为 $x_0 = 0, x_1, x_2 \cdots, x_i, \cdots, x_{n-1}, x_n = 2\pi$。

（2）确定各等分点的纵 坐 标 y_0，y_1，$y_2 \cdots$，y_i，…，y_{n-1}，y_n。

（3）求傅立叶系数的近似值：

$$a_0 \approx \frac{2}{n}(y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_i + \cdots + y_{n-1})$$

$$= \frac{2}{n}\sum_{i=0}^{n-1} y_i$$

$$a_k \approx \frac{2}{n}(y_0 \cos kx_0 + y_1 \cos kx_1 + y_2 \cos kx_2 + \cdots + y_i \cos kx_i + \cdots + y_{n-1} \cos kx_{n-1})$$

$$= \frac{2}{n}\sum_{i=0}^{n-1} y_i \cos kx_i; \tag{12}$$

$$b_k \approx \frac{2}{n}(y_0 \sin kx_0 + y_1 \sin kx_1 + \cdots + y_i \sin kx_i + \cdots + y_{n-1} \sin kx_{n-1})$$

$$= \frac{2}{n}\sum_{i=0}^{n-1} y_i \sin kx_i。 \tag{13}$$

从而可写出（1）式所示的傅立叶级数的近似表示式。等分点n 愈多，所得的结果就愈精确。

二

感应子中频发电机的空载电压波形决定于气隙磁场的分布[4]，在设计中要预先计算空载电压波形畸变率时，就要对气隙磁导变化曲线进行谐波分析。

感应子电机气隙磁导的分布曲线十分复杂，难以用一个具体的函数表示。在实际设计中，一般是先计算出磁导变化曲线，然后应用近似谐波分析法进行谐波分解。

转子旋转时，一个定子线圈跨距范围内的气隙磁导λ_t周期性地变化。设转子齿中心线与定子线圈中心线之间的 夹 角 为α_t，用电角度表示，当定子线圈中心线与转子齿中心线重合时，$\alpha_t = 0$，λ_t 为最大值；当$\alpha_t = 180°$时，λ_t为最小值。算出α_t为不同数值时的一系列转子位置下的气隙磁导值λ_t，便可绘出当转子旋转时，一个

定子线圈范围内的气隙磁导随时间变化的曲线$\lambda_t=f(\alpha_t)$（图3），其图形对称于

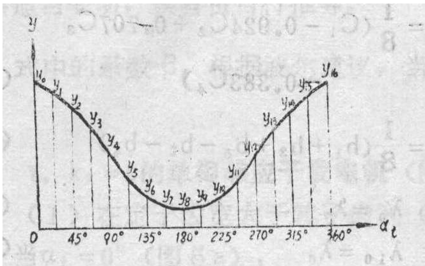


图 3

纵坐标轴，是一个偶函数，可展开为余弦级数。一般情况下，只要算出当$\alpha_t=0°$，45°，90°，135°，180°五种转子位置下的λ_t值，并利用图形的对称性，就可绘制出磁导变化曲线的一个周期。如果算的点愈多，例如每隔22.5°算出$\alpha_t=0°\sim180°$范围内九种转子位置下的磁导值，则更精确。磁导计算采用波尔（Pohl）的磁导分析法[5]（二种形式的感应子电机磁导变化曲线的计算公式见附录）。

得出气隙磁导变化曲线，就可进行谐波分析。

将磁导变化曲线$\lambda_t=f(\alpha_t)$的一个周期〔0，2π〕分成n等分，在图上求出各等分点α_0，α_1，$\alpha_2\cdots\alpha_{n-1}$，$\alpha_n$所对应的坐标值$y_0$，$y_1$，$y_2$，$\cdots y_{n-1}$，$y_n$，应用前述实用谐波分析法，就可以求出磁导曲线中各次谐波的幅值：

$$\lambda_0=\frac{1}{n}(y_0+y_1+y_2+\cdots+y_{n-1}) \quad (14)$$

$$\lambda_k=\frac{2}{n}(y_0\cos k\alpha_0+y_1\cos k\alpha_1+y_2\cos k\alpha_2+\cdots+y_{n-1}\cos k\alpha_{n-1}) \quad (15)$$

等分数n愈多，计算结果就愈精确。一般情况下。取n=16等分，就足够了。

由此得磁导变化曲线的傅立叶级数为

$$\lambda_t=\lambda_0+\sum_{1}^{k}\lambda_k\cos k\alpha_t \quad (16)$$

三

按波尔磁导分析方法经适当变换和整理，推出一套简便实用的感应子电机气隙磁导谐波分析计算法（取n=16），经实践验证足够精确。具体步骤是：

（1）计算出$\alpha_t=0°$、45°、90°、135°、180°五种转子位置下的气隙磁导值λ_t，绘出〔0，180°〕半个周期磁导变化曲线$\lambda_t=f(\alpha_t)$（见图4）。

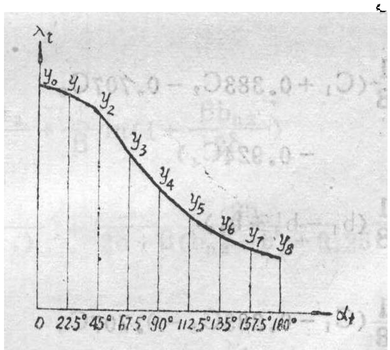


图 4

（2）求出下列角度（见下表）所对应的磁导值λ_t：y_0，y_1，$y_2\cdots$。

α_t	0°	22.5°	45°	67.5°	90°	112.5°	135°	157.5°	180°
λ_t	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8

（3）求出下列有关系数：

$b_1=y_0+y_8$；

$b_2=2(y_1+y_7)$；

$b_3=2(y_2+y_6)$；

$b_4=2(y_3+y_5)$；

$b_5=2y_4$；

$C_1=y_0-y_8$；

$C_2=2(y_1-y_7)$；

$C_3=2(y_2-y_6)$；

$C_4=2(y_3-y_5)$。

（4）求出各次谐波幅值（一般只需求出前面恒定分量λ，基波幅值λ_1，二次谐波幅值$\lambda_2\cdots\lambda_7$等8次就足够精确了）：

$$\lambda_0=\frac{1}{16}(b_1+b_2+b_3+b_4+b_5) \tag{17}$$

$$\lambda_1=\frac{1}{8}(C_1+0.924C_2+0.707C_3+0.383C_4) \tag{18}$$

$$\lambda_2=\frac{1}{8}[b_1+0.707(b_2-b_4)-b_5] \tag{19}$$

$$\lambda_3=\frac{1}{8}(C_1+0.383C_2-0.707C_3-0.924C_4) \tag{20}$$

$$\lambda_4=\frac{1}{8}(b_1-b_3+b_5) \tag{21}$$

$$\lambda_5=\frac{1}{8}(C_1-0.383C_2-0.707C_3+0.924C_4) \tag{22}$$

$$\lambda_6=\frac{1}{8}[b_1-0.707(b_2-b_4)-b_5] \tag{23}$$

$$\lambda_7=\frac{1}{8}(C_1-0.924C_2+0.707C_3-0.383C_4) \tag{24}$$

$$\lambda_8=\frac{1}{8}(b_1+b_3+b_5-b_2-b_4) \tag{25}$$

$$\lambda_9=\lambda_7 \tag{26}$$

$$\lambda_{10}=\lambda_6 \tag{27}$$

$$\lambda_{11}=\lambda_5 \tag{28}$$

更高次谐波的幅值很小，就不需要再分解了。气隙磁导变化曲线的傅立叶展开式为

$$\lambda_t=\lambda_0+\lambda_1\cos\alpha_t+\lambda_2\cos2\alpha_t+\lambda_3\cos3\alpha_t+\cdots\cdots=\lambda_0+\sum_1^k\lambda_k\cos k\alpha_t \tag{29}$$

参考文献

〔1〕М.М.АЛЕКСЕЕВА，《МАШИННЫЕ ГЕНЕРАТОРЫ ПОВЫШЕННОЙ ЧАСТОТЫ》，1967

〔2〕上海市电机综合研究所研究报告《同步发电机电压波形畸变率的研究》1964年

〔3〕樊映川等编《高等数学讲议》

〔4〕东风技讯1980年第10期《感应子中频发电机电势波形的改善》

〔5〕Pohl《JIEE》，1946，P73

附　　录

气隙磁导变化曲线计算的有关公式

下面列出了二种感应子电机，在转子齿中心线与定子线圈中心线之间的夹角 α_t 为不同数值时气隙磁导的计算式子。“气隙磁导”实际上是指气隙磁导计算系数，因两者是成比例的，气隙磁导计算系数乘上某一数值，就是实际的气隙磁导值。

气隙磁导系数的计算是根据波尔（Pohl）的磁导分析法推导出来的，供参考。在某些特殊条件下，例如定、转子齿槽的几何尺寸和边界条件超出了正常范围，则这些式子要作适当变动，读者可自行推导。

式中的系数 β，根据波尔建议，当 $\frac{b_{n2}}{\delta}<10$ 时，取 $\beta=1$；当 $\frac{b_{n2}}{\delta}>10$ 时，取 $\beta=1.1$。

1. $k_Z=2$ 的单相感应子发电机（图 5）

（1）在定子齿宽大于转子齿宽（$b_1>b_2$）的情况下：

当 $\alpha_t=0°$（图 5 a）：

$$\lambda_{(0)}=\frac{b_2}{\delta}+\frac{2}{\beta}\ln\left(1+\frac{\beta(b_1-b_2)}{2\delta}\right)+\frac{1}{\beta}\ln\left(1+\frac{2\beta b_{n1}}{2\delta+\beta(b_1-b_2)}\right) \tag{1}$$

当 $\alpha_t=45°$（图 5 b）：

$$\lambda_{(45)}=\frac{1}{\beta}\ln\left(1+\frac{\beta b_{n1}}{2\delta}\right)+\frac{b_1+b_2-0.25t_2}{2\delta}+\frac{1}{\beta}\ln\left(1+\frac{\beta(b_1-b_2+0.25t_2)}{2\delta}\right)$$
$$+\frac{1}{2\beta}\ln\left(1+\frac{2\beta b_{n1}}{2\delta+\beta(b-b_2+0.25t_2)}\right) \tag{2}$$

当 $\alpha_t=90°$（图 5 c）：

$$\lambda_{(90)}=\frac{b_2-b_{n1}}{2\delta}+\frac{1}{\beta}\ln\left(1+\frac{\beta b_{n1}}{2\delta}\right)+\frac{1}{\beta}\ln\left(1+\frac{\beta(b_{n2}-b_{n1})}{2\delta}\right)$$
$$+\frac{1}{2\beta}\ln\left(1+\frac{2\beta b_{n1}}{2\delta+\beta(b_{n2}-b_{n1})}\right) \tag{3}$$

当 $\alpha_t=135°$（图 5 d）：

$$\lambda_{(135)}=\frac{1}{\beta}\ln\left(1+\frac{\beta b_{n1}}{2\delta}\right)+\frac{b_2-b_{n1}-0.25t_2}{2\delta}+\frac{1}{\beta}\ln\left(1+\frac{\beta b_{n2}}{2\delta}\right)$$
$$+\frac{1}{\beta}\ln\left(1+\frac{\beta(b_1-0.25t_2)}{2\delta+\beta(b_{n2}-b_1+0.25t_2)}\right)+\frac{2b_{n1}}{2\delta+\beta(b_{n2}-b_1+0.25t_2)} \tag{4}$$

当 $\alpha_t=180°$（图 5 e）时：

$$\lambda_{(180)}=\frac{2}{\beta}\ln\left(1+\frac{\beta b_1}{2\delta+\beta(b_{n2}-b_1)}\right)+\frac{2b_{n1}}{2\delta+\beta(b_{n2}-b_1)} \tag{5}$$

（2）在定子齿宽等于转子齿宽（$b_1=b_2$）的情况下：

当 $\alpha_t=0°$ 时，

$$\lambda_{(0)}=\frac{b_2}{\delta}+\frac{1}{\beta}\ln\left(1+\frac{\beta b_{n1}}{\delta}\right) \tag{6}$$

当 $\alpha_t=45°$ 时，$\lambda_{(45)}$ 按(2)式计算。
当 $\alpha_t=90°$ 时，$\lambda_{(90)}$ 按(3)式计算。
当 $\alpha_t=135°$ 时，$\lambda_{(135)}$ 按(4)式计算。

当 $\alpha_t=180°$ 时，

$$\lambda_{(180)}=\frac{2}{\beta}\ln\left[1+\frac{\beta b_1}{2(\delta+\beta b_{n1})}\right]+\frac{b_{n1}}{\delta+\beta b_{n1}} \tag{7}$$

（3）在定子齿宽小于转子齿宽（$b_1<b_2$）的情况下：

当 $\alpha_t=0°$ 时，

$$\lambda_{(0)}=\frac{b_1}{\delta}+\frac{2}{\beta}\ln\left[1+\frac{\beta(b_2-b_1)}{2\delta}\right]+\frac{1}{\beta}\ln\left[1+\frac{\beta(t_1-b_2)}{\delta+0.5\beta(b_2-b_1)}\right] \tag{8}$$

当 $\alpha_t=45°$时，$\lambda_{(45)}$按(2)式计算。

当 $\alpha_t=90°$时，$\lambda_{(90)}$按（3）式计算。

当 $\alpha_t=135°$时，

$$\lambda_{(135)}=\frac{1}{\beta}\ln\left[1+\frac{\beta(0.5b_2-0.25t_1)}{\delta+\beta\Delta}\right]+\frac{\Delta}{\Delta+\beta\Delta}$$

$$+\frac{1}{\beta}\ln\left[1+\frac{\beta(b_1-0.25t_2)}{2\delta+\beta(b_{n2}-b_1+0.25t_2)}\right]+\frac{b_{n1}}{2\delta+\beta(b_{n2}-b_1+0.25t_2)}$$

$$+\frac{1}{\beta}\left[1+\frac{\beta(0.5b_{n2}-\Delta)}{\delta+\beta\Delta}\right] \tag{9}$$

式中 $\Delta=0.25t_1+0.5(b_{n1}-b_2)$。

当 $\alpha_t=180°$时，$\lambda_{(180)}$按(5)式计算。

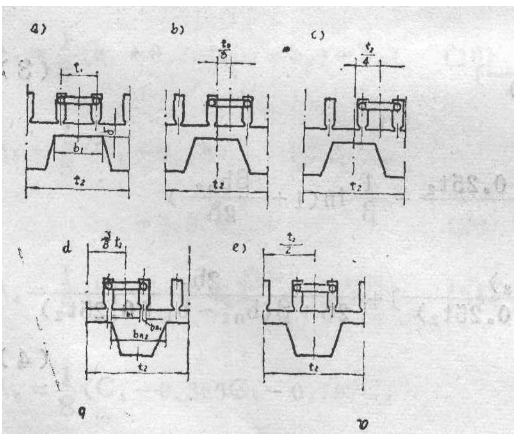


图 5 αt为不同数值时的定、转子相对位置（对应于$K_Z=2$的单相电机）

a) $\alpha t=0°$，b) $\alpha t=45°$，c) $\alpha t=90°$，d) $\alpha t=135°$，e) $\alpha t=180°$

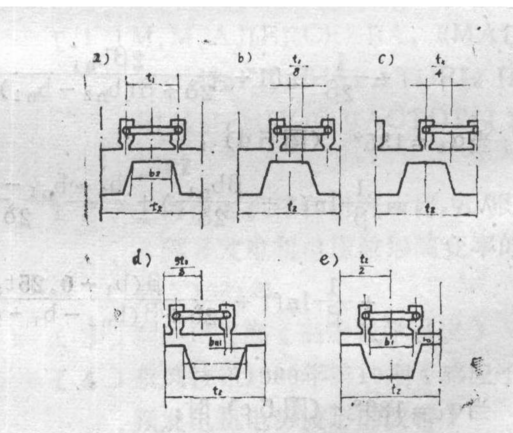


图 6 αt为不同数值时的定、转子相对位置（对应于$K_Z=3$的三相电机）

a) $\alpha t=0°$，b) $\alpha t=45°$，c) $\alpha t=90°$，d) $\alpha t=135°$，e) $\alpha t=180°$

2. $k_Z=3$ 三相感应子发电机气隙磁导变化曲线的计算（6）图

此处均取 $\beta=1$，适用于$\frac{b_{n2}}{\delta}<10$的情况。

当$\alpha_t=0°$（图6a）时，

$$\lambda_{(0)}=\frac{b_1}{\delta}+2\ln(1+\frac{b_{n1}}{2\delta}) \tag{10}$$

当$\alpha_t=45°$(图6b)时，同(2)式取$\beta=1$；

当 $\alpha_t=90°$（图6c）时，

$$\lambda_{(90)}=\ln(1+\frac{b_{n1}}{2\delta})+\frac{b_1+b_2-0.5t_2}{2\delta}+\ln(1+\frac{b_1-b_2+0.5t_2}{2\delta})$$

$$+\frac{1}{2}\ln(1+\frac{b_{n1}}{2\delta+b_1-b_2+0.5t_2}) \tag{11}$$

当 $\alpha_t=135°$（图6d）时，

$$\lambda_{(135)}=\ln[1+\frac{b_2+t_1-0.75t_2}{2\delta+0.75t_2-(b_1+b_2)}]+\frac{0.75t_2-(b_1+b_2)}{2\delta+0.75t_2-(b_1+b_2)}$$

$$+\ln[1+\frac{0.25t_2+b_1}{2\delta+0.75t_2-(b_1+b_2)}]+\ln[1+\frac{b_1-0.25t_2}{2\delta+1.25t_2-(b_1+b_2)}]$$

$$+\frac{b_{n1}}{2\delta+1.25t_2-(b_1+b_2)} \tag{12}$$

（适用于$\frac{3}{8}t_2-\frac{b_1}{2}>\frac{b_2}{2}$，$\frac{3}{8}t_2+\frac{b_1}{2}>\frac{t_2}{2}$的情况）

或 $$\lambda_{(135)}=\frac{0.75t_2-(b_1+b_2)}{2\delta}+\frac{b_{n1}}{2\delta+1.25t_2-(b_1+b_2)}+\ln(1+\frac{b_{n1}}{2\delta})$$

（下转第19页）

《四川机械》1983年第10期要目

刊　　误

本刊今年第４期，目录及32页上“夏乐天”应为夏乐发”，35页右11行“愿”应为“意”，39、40页的页序应互换，65左栏倒12行“示数”应为“示教”。

电产品的结构紧凑，传动系统简化，式样新颖，这也有利于艺术造型设计，使能设计出造型简洁、美观、大方、舒畅、安全的产品。另一方面，艺术造型设计又能促进技术设计的提高。技术设计要符合艺术设计造型的需要，就必须在结构传动系统等上改进，作出新型的设计。例如图 7a 为开式可倾压力机，图 7b 为开式固定台

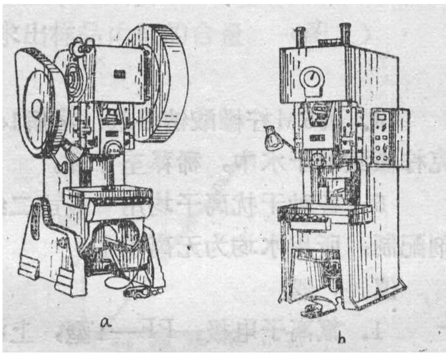
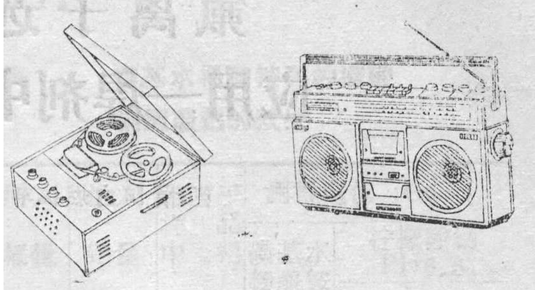


图 7

压力机，其功能基本相同，但造型相差很大。由于传动，结构形式不同，形成两种不同风格的造型型式。前者为曲轴横放式，后者为曲轴纵放式。如果艺术造型设计出图7a的造型，技术设计仍然按传统的曲轴横放结构型式，就不可能获得造型如此简洁的压力机，因此，艺术造型设计又促进了技术设计的提高。又如我们所熟悉的录音机（见图8），其 a 为电子管录音



a）电子管录音机　b）晶体管录音机

图 8

机，其 b 为晶体管录音机。两个产品的造型何以差别如此之大？就是由于科学技术的发展，制造出了体积小、重量轻，效率高、以任何安装方式都能工作的晶体管取代了占据大量空间、安装方式受一定条件限制的电子管，即技术设计获得进步，这就使艺术造型设计有了一个较大的发展，就能设计出各式各样的新颖的电气产品。

因此，技术设计与艺术造型设计是不可分割的整体，处理好两者的辩证统一的关系，就能设计出好产品，就能不断促进机电产品的发展和提高。

（上接第29页）

$$+\ln\left(1+\frac{t_2-b_2}{2\delta}\right)+\ln\left[1+\frac{b_1-0.25t_2}{2\delta+1.25t_2-(b_1+b_2)}\right. \tag{13}$$

（适用于$\frac{3}{8}t_2-\frac{b_1}{2}<\frac{b_2}{2}$；$\frac{3}{8}t_2+\frac{b_1}{2}>\frac{t_2}{2}$的情况）

当 $\alpha_t=180°$（图6e）时，

$$\lambda_{(180)}=\frac{2b_{n1}}{2\delta+t_2-(t_1+b_2)}+2\ln\left[1+\frac{b_1}{2\delta+t_2-(b_1+b_2)}\right] \tag{14}$$