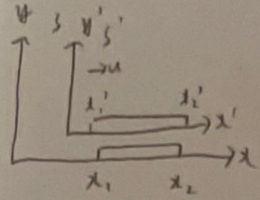
8.3. 已知: $x_2-x_1=1m$, $t_2=t_1$

求: $x_2'-x_1'$

解: 洛伦兹变换得



$$x_2'-x_1' = \frac{x_2-ut_2-x_1+ut_1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

$$= \frac{(x_2-x_1)-u(t_2-t_1)}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \frac{1-0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} > 1m.$$

这是由于在S'系中，两标不是同时打出的

8.5. 已知: S系中 $\Delta x=1m$, $\Delta t=0$, S'系中 $\Delta x'=2m$

求: $\Delta t'$

解: 由洛伦兹变换得:

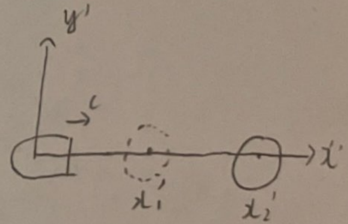
$$\Delta x' = \frac{\Delta x-u\Delta t}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \frac{\Delta x}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \Rightarrow u = c\sqrt{1-\left(\frac{\Delta x}{\Delta x'}\right)^2}$$

$$|\Delta t'| = \left|\frac{\Delta t-\frac{u}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\right| = \left|\frac{0-\frac{u}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\right| = \frac{u}{c^2}\Delta x' = \frac{\Delta x'}{c}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{\Delta x}{\Delta x'}\right)^2} = \frac{2}{3\times10^8}\times\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 5.77\times10^{-9}s$$

8.6. 已知: 飞船中: $\Delta t'=60s$, 飞船速度 $u=\frac{4}{5}c$

求(1)地球与飞船距离 l_0 (2) 飞船收到信号时，地球与飞船距离

解: (1) 以飞船为参考系，光速不变，信号到达地球与返回飞船的距离相等，故所用时间相等，即信号从飞船到地球用了30s，此时，地球与飞船相距 $l_0=30c=9\times10^9m$.



(2) 以飞船为参考系，宇航员发射信号时，两者相距 $l'=(c-\frac{4c}{5})\cdot30=6c$.

在地球参考系中，$l=\frac{l'}{\sqrt{1-(\frac{u}{c})^2}}=\frac{6c}{\sqrt{1-(\frac{4}{5})^2}}=10c$.

当宇航员收到信号时，地球经过的时间 $\Delta t=\frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}=\frac{60}{\sqrt{1-(\frac{4}{5})^2}}=100s$.

这段时间中，从地球测量飞船走过的距离为 $l_1=100\times\frac{4}{5}c=80c$.

总距离为 $l+l_1=10c+80c=90c=2.7\times10^{10}m$.

8.7. 已知：飞船速率 $u=0.8c$，飞船参考系中 $t'=-6\times10^{8}s$，$x'=1.8\times10^{17}m$，$y'=1.2\times10^{17}m$，$z'=0$.

求：地球参考系中，t, x, y, z.

解：洛伦兹变换得：

$$t=\frac{t'+\frac{u}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}=\frac{-6\times10^{8}+\frac{0.8}{3\times10^{8}}\times1.8\times10^{17}}{\sqrt{1-0.8^2}}=-2\times10^{8}s.$$

$$x=\frac{x'+ut'}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}=\frac{1.8\times10^{17}+0.8\times3\times10^{8}\times(-6\times10^{8})}{\sqrt{1-0.8^2}}=6\times10^{16}m.$$

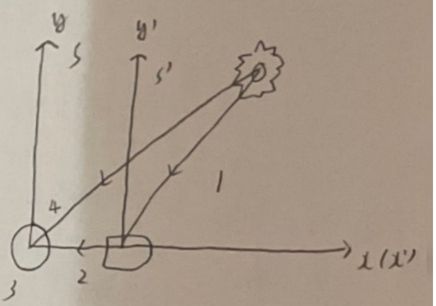
$$y=y'=1.2\times10^{17}m$$

$$z=z'=0.$$

8.8. 已知：$t_1'=-6\times10^{8}s$，$x_1'=1.8\times10^{17}m$，$y_1'=1.2\times10^{17}m$，$z_1'=0$

$t=-2\times10^{8}s$，$x_1=6\times10^{16}m$，$y_1=1.2\times10^{17}m$，$z_1=0$，$u=0.8c$.

求：t_2', t_3, t_4



解：①光到达飞船：$t_2'=t_1'+\Delta t_{12}=t_1+\frac{\sqrt{x_1'^2+y_1'^2}}{c}$

$$=-6\times10^{8}+\frac{\sqrt{(1.8\times10^{17})^2+(1.2\times10^{17})^2}}{3\times10^{8}}$$

$$=1.21\times10^{8}s.$$

②地球收到報告：$t_3=t_2+\Delta t_{23}=\frac{t_2'+\frac{u}{c^2}x_2'}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}+\frac{x_2}{c}=\frac{t_2'}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}+\frac{x_2'+ut_2'}{c\sqrt{1-u^2/c^2}}$ $(x_2'=0)$

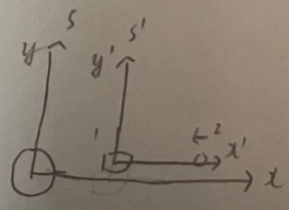
$$=\frac{t_2'}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\cdot\left(1+\frac{u}{c}\right)=\frac{1.21\times10^{8}}{\sqrt{1-0.8^2}}\times(1+0.8)=3.63\times10^{8}s$$

③地球看见超新星：$t_4=t_1+t_{34}=t_1+\frac{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}{c}=-2\times10^{8}+\frac{\sqrt{(6\times10^{16})^2+(1.2\times10^{17})^2}}{3\times10^{8}}=2.47\times10^{8}s.$

8.9. 已知：$v_1=0.6c$，$v_2=-0.8c$，$\Delta t=5s$.

求：v_2'，$\Delta t'$

解：洛伦兹变换得：



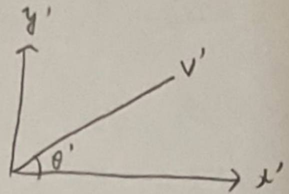
$$v_2'=\frac{v_2-u}{1-\frac{uv}{c^2}}=\frac{-0.8c-0.6c}{1-\frac{(-0.8c)(0.6c)}{c^2}}=\frac{-1.4c}{1+0.48}=-0.95c=-2.84\times10^{8}m/s.$$

$$\Delta t'=\Delta t\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}=\Delta t\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c^2}}=5\times\sqrt{1-0.6^2}=4s.$$

8.10. 已知：θ', $v'=c$.

求 θ, v

解：a)洛伦兹变换，在S系中有：



$$v_x=\frac{v_x'+u}{1+\frac{uv_x'}{c^2}}=\frac{c\cos\theta'+u}{1+\frac{u}{c}\cos\theta'}$$

$$v_y=\frac{v_y'}{1+\frac{v_x'u}{c}}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}=\frac{c\sin\theta'}{1+\frac{u}{c}\cos\theta'}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$$

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=\frac{1}{1+\frac{u}{c}\cos\theta'}\sqrt{u^2\cos^2\theta'+2uc\cos\theta'+c^2}=c$$

8.12. 已知：静质量 m_0, 时间 t_0, 力 $\vec{F}=F\vec{i}$.

求：$t\ll\frac{m_0c}{F}$ 时, v, x, 及 $t\gg\frac{m_0c}{F}$ 时 v, x.

解：F方向不变，物体做直线运动，故

$$v=\int dv=\int_0^t\frac{F}{m}dt=\int_0^t\frac{F\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{m_0}\cdot dt=\frac{Ft\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{m_0}$$

解得：$v=\frac{Ft}{m_0}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{Ft}{m_0c})^2}}$

位移 $x=\int_0^t v\,dt=\int_0^t\frac{Ft}{m_0\sqrt{1+(\frac{Ft}{m_0c})^2}}dt=\frac{m_0c^2}{F}\left(\sqrt{1+(\frac{Ft}{m_0c})^2}-1\right)$

①当 $t\ll\frac{m_0c}{F}$ 时，$\frac{Ft}{m_0c}\ll1$，此时 $v\approx\frac{Ft}{m_0}=at$，$x\approx\frac{m_0c^2}{F}\left(1+\frac{1}{2}(\frac{Ft}{m_0c})^2-1\right)$

$$=\frac{Ft^2}{2m_0}=\frac{1}{2}at^2.$$

②当 $t\gg\frac{m_0c}{F}$ 时，$\frac{Ft}{m_0c}\gg1$，$v=\frac{1}{\frac{m_0c}{Ft}}\cdot\frac{c}{\sqrt{1+(\frac{Ft}{m_0c})^2}}=\frac{c}{\sqrt{(\frac{m_0c}{Ft})^2+1}}\approx c$. $x\approx\frac{m_0c^2}{F}\cdot\frac{Ft}{m_0c}=ct$

8.14. 已知：动能 $E_k=2.8\times10^9 eV$，$m_0=9.11\times10^{-31}kg$.

求：(1) $c-v$ (2) 动量 P. (3) $2\pi R=240m$，圆周向心力 F，偏转磁场 B

解：(1) $E_k=mc^2-m_0c^2$

$$=m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}-1\right) \Rightarrow c^2-v^2=\left(\frac{m_0c^3}{E_k+m_0c^2}\right)^2$$

由于 $c\approx v$，故 $c+v\approx 2c$，所以

$$c-v=\frac{m_0^2c^5}{2(E_k+m_0c^2)^2}=\frac{(9.11\times10^{-31})^2\times(3\times10^8)^5}{2\times(2.8\times10^9\times1.6\times10^{-19}+9.11\times10^{-31}\times(3\times10^8)^2)^2}=5.02\ m/s$$

(2) $$P=\sqrt{\frac{E^2-m_0c^4}{c^2}}=\frac{\sqrt{(E+m_0c)^2(E-m_0c)^2}}{c}=\frac{\sqrt{(E_k+2m_0c^2)\cdot E_k}}{c}=\frac{\sqrt{(2.8\times10^9\times1.6\times10^{-19})^2}}{3\times10^8}=1.49\times10^{-18}m/s$$

(3) $$F=\frac{mv^2}{R}\approx\frac{mc^2}{R}=\frac{E_k+m_0c^2}{R}\approx\frac{E_k}{R}=\frac{2.8\times10^9\times1.6\times10^{-19}}{\frac{240}{2\pi}}=1.17\times10^{-11}N.$$

$$B=\frac{F}{ev}\approx\frac{F}{e\cdot c}=\frac{1.17\times10^{-11}}{1.6\times10^{-19}\times3\times10^8}=0.244\ T.$$

8.19 已知：$\beta=0.5$，$m_0=1.67\times10^{-27}kg$

求：质子相对共同点的动量 P_1 和能量 E_1，质子相对另一质子为原点时的动量 P_2 和能量 E_2.

解：① $$P_1=m_1v_1=\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\cdot\beta c=\frac{1.67\times10^{-27}}{\sqrt{1-0.5^2}}\times0.5\times3\times10^8=2.89\times10^{-19}kg\ m/s.$$

$$E_1=m_1c^2=\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\cdot c^2=\frac{1.67\times10^{-27}}{\sqrt{1-0.5^2}}\times(3\times10^8)^2=1.74\times10^{-10}J.$$

② 质子之间相对速度 $$\beta_2=\frac{\beta-(-\beta)}{1-\beta(-\beta)}=\frac{0.5+0.5}{1+0.5^2}=0.8.$$

$$P_2=m_2V_2=\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta_2^2}}\cdot\beta_2 c=\frac{1.67\times10^{-27}}{\sqrt{1-0.8^2}}\times0.8\times3\times10^8=6.68\times10^{-19}kgm/s$$

$$E_2=m_2c^2=\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta_2^2}}c^2=\frac{1.67\times10^{-27}}{\sqrt{1-0.8^2}}\times(3\times10^8)^2=2.51\times10^{-10}J$$