1. 设$X\sim U(-1,2)$，求$Y=|X|$和$Z=X^2$的密度函数。

X的概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{3} & -1<x<2\\ 0, & \end{cases}$$

Y的分布函数 $F_Y(y)$:

① 当$y<0$时，$F_Y(y)=P\{Y\leq y\}=0$

② 当$y>0$时，$F_Y(y)=P\{|X|\leq y\}=\{-y\leq X\leq y\}=F_X(y)-F_X(-y)$

将 $F_Y(y)$对y求导

$$f_Y(y)=\begin{cases}f_X(y)+f_X(-y) & ,y>0\\ 0 & ,其他\end{cases}$$

当$0<y<1$时，$-1<-y<0$ $\Rightarrow f_X(y)=\frac{1}{3}$，$f_X(-y)=\frac{1}{3}$

即 $f_Y(y)=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

当 $1<y<2$时，$-2<-y<-1$ $\Rightarrow f_X(y)=\frac{1}{3}$，$f_X(-y)=0$

即 $f_Y(y)=\frac{1}{3}$

当 $y>2$时，$f_X(y)=0$，$f_X(-y)=0$

即 $f_Y(y)=0$.

$$\therefore f_Y(y)=\begin{cases}\frac{2}{3} & ,0<y<1\\ \frac{1}{3} & ,1\leq y<2\\ 0 & ,其他\end{cases}$$

3. 设随机变量$X \sim N(\mu,\sigma^2)$，求$E|X-\mu|^k$，k为正整数。

$$E|X-\mu|^k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} |x-\mu|^k e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

令 $y = \frac{(x-\mu)}{\sigma}$，$\sigma dy = dx$，

$$E|X-\mu|^k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \sigma^k |y|^k e^{\frac{-y^2}{2}} dy$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} \sigma^k y^k e^{\frac{-y^2}{2}} dy$$

再令 $\frac{y^2}{2} = t$，$y = (2t)^{\frac{1}{2}}$，$dy = (2t)^{-\frac{1}{2}} dt$

$$原式 = \frac{\sigma^k}{\sqrt{\pi}} 2^{\frac{k}{2}} \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)$$

当k为偶数时，$E|X-\mu|^k = (k-1)!!\sigma^k$

当k为奇数时，$E|X-\mu|^k = (k-1)!!\sigma^k \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}}$

5. 设袋中有 r 个红球和 b 个黑球，现在一次拿一个得不放回地取出，直到取出红球为止，求取球次数的数学期望。

$$P(X=k) = \frac{b}{r+b}\cdot\frac{b-1}{r+b-1}\cdots\frac{b-k}{r+b-k}\cdot\frac{r}{r+b-k-1}, \quad k=1,2,\cdots,b+1$$

$$\therefore E(X) = \sum_{k=1}^{b+1} kP(X=k)$$

$$= r\sum_{k=1}^{b+1} k\cdot\frac{b!}{(b-k-1)!}\cdot\frac{(r+b-k-2)!}{(r+b)!}$$

$$= r\sum_{k=1}^{b+1} k\,\frac{(r-1)!\,b!}{(r+b)!}\cdot\frac{(r+b-k-2)!}{(b-k-1)!\,(r-1)!}$$

$$= \frac{r!\,b!}{(r+b)!}\sum_{k=1}^{b+1} k\cdot C_{r+b-k-2}^{r-1}$$

6. 假设一设备开机后无故障工作的时间X服从参数为 0.2 的指数分布，设备定时开机，出现故障后自动关机，而在无故障情况下工作两小时自动关机，求该设备每次工作时间（从开机到关机）Y的分布函数。

$Y = \min\{X, 2\}$

① $y < 0 \Rightarrow F(y) = 0$

② $y \geq 2 \Rightarrow F(y) = 1$

令 $0 \leq y < 2$,

$F(y) = P\{Y \leq y\} = P\{\min\{X, 2\} \leq y\}$

$= P\{X \leq y\}$

$= 1 - e^{-\frac{y}{5}}$

$$\therefore F(y) = \begin{cases} 0 & , y < 0 \\ 1 - e^{-\frac{y}{5}} & , 0 \leq y < 2 \\ 1 & , y \geq 2 \end{cases}$$