静电场与恒定电流场自测题与解答

1. 证明在线性均匀介质中电位满足泊松方程。

   课件：7-第 7-8 节 电场与电位的边值问题 第 5 页。

2. 如图题 2，有一个二维平行平面场，场域由两个“L”形导体板构成，板的厚度为 d，两导体板之间的区域有两种电介质，介电常数为ε_1与ε_2，电极间加有电压 U，外电极为电位参考电极，写出图中两条线 A、B 与两个电极内表面围成的场域的电位边值问题。

答：设介质ε_1为子区域 1、ε_2为子区域 2，两个子区域的电位分别为φ_1与φ_2，则电位的边值问题为：

$$\begin{cases}\nabla^2\varphi_1(r)=0 & (\text{在子区域1中}) \\ \nabla^2\varphi_2(r)=0 & (\text{在子区域2中}) \\ \varphi_1=\varphi_2 & (\text{在子区域1与子区域2的交界面上}) \\ \varepsilon_1\dfrac{\mathrm{d}\varphi_1}{\partial n}=\varepsilon_2\dfrac{\mathrm{d}\varphi_2}{\partial n} & (\text{在子区域1与子区域2的交界面上}) \\ \varphi_2=0 & (\text{在外电极内侧表面上}) \\ \varphi_1=U & (\text{在内电极内侧表面上}) \\ \dfrac{\mathrm{d}\varphi_1}{\partial n}=\dfrac{\mathrm{d}\varphi_2}{\partial n}=0 & (\text{在}A\text{、}B\text{边界上})\end{cases}$$

3. 如图题 3，非同心球面构成的导体壳（黑色部分），未接地，壳内球面半径为 R，外球面半径为 Ro，两球心距离为 D，内部空气区域中有一点电荷 q，其距内壳内球面球心的距离为 b。导体球壳外区域也为空气，以无限远处为电位参考点，求内球面球心 o 处电位与电场强度。（15 分）

解：先求导体球壳外区域的电位，其等于将 q 置于外球面的球心处的电位。由此可得导体壳外球面的电位为：$\varphi_{\text{导体壳外表面}}=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_o}$。

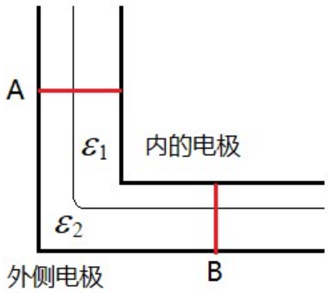
实际上，该电位是导体壳的电位，当然也是导体壳内球面的电位。

然后针对内球面围成的区域采用镜像法求该区域的电位与电场强度。在球心 o 到电荷 q 的射线上，距 o 的距离为 $d=\dfrac{R}{b}R$ 处放置点电荷 $q'=-\dfrac{R}{b}q$。由两个电荷的叠加可求该区域任意点的电场强度与电位，只是要注这样所求电位的结果是以内球面为电位参考点（面），当然也是以导体球壳为电位参考点。

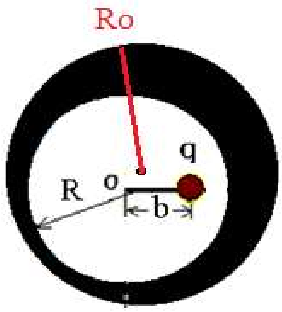
球心 o 处的电位为

$$\varphi_o=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 d}+\frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 b}+\varphi_{\text{导体壳外表面}}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 d}+\frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 b}+\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_o}$$

电场强度为：$E=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 d}+\dfrac{q'}{4\pi\varepsilon_0 b}$ 方向向左。



图题 2



图题 3

4. 对于偏心电缆，电缆芯线圆柱表面的半径为 R，外皮内表面的半径为 Ro，两圆柱轴线间距为 d，芯线与外皮间加有电压 U（外皮为零电位），电缆的绝缘介质的介电常数为ε，求电缆中的最大电场强度。

解：参考图题 3，黑色部分为电缆芯线与外皮内表面围成的区域，即待分析区域。从芯线轴心 o 向外皮轴心做一射线，在射线上放置两个线电荷，τ与$-\tau$，前者位于芯线区域，后者位于外皮之外，设τ与$-\tau$的中点为 y 轴，然后参考课件“8-第 9-10 节-镜像法与电轴法”16 页先求出 b 和 h_1。然后求用电压 U 表示的τ。

最大电场强度点为电缆芯线表面与 x 轴的交点靠近τ的那个点上，记为M点，M点距τ的距离为 $d_{M\tau}= R-(h_1-b)$，该点的电场强度为：

$$E=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 b_{M\tau}}-\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0(2b\text{-}b_{M\tau})}$$ 方向向右。

5. 计算下面两层介质构成的平板电容器的电容，极板面积为 S，极板间距为 d，两种介质各占空间的一半（忽略端部效应）。

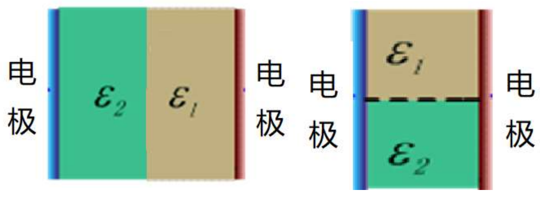
解：(a) 设 q 求电压 U。$D=\rho_S=q/S$，$E_1=D/\varepsilon_1$，$E2=D/\varepsilon_2$，

$U= E_1d_1+ E_2d_2=(E_1+ E_2)d/2=(D/\varepsilon_1 + D/\varepsilon_2)d/2=[q/(\varepsilon_1S) + q/(\varepsilon_2S)]d/2$

$C=q/U=S/[(1/\varepsilon_1+1/\varepsilon_2)d/2]= \varepsilon_1\varepsilon_2S/[(\varepsilon_1+\varepsilon_2)d/2]$

(b) 设 U 求 q。$E=U/d$，$D_1 =\rho_{S1} = \varepsilon_1E= \varepsilon_1 U/d$，$D_{12}=\rho_{S2} = \varepsilon_2E= \varepsilon_2 U/d$，

$q=(\rho_{S1}+\rho_{S1})S/2=(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) U/d\ S/2$，　$C=q/U= (\varepsilon_1+\varepsilon_2)(S/2)/d$



（a）　　（b）

6. 一个无限大空气区域中半径为 a 的导体球上带有电荷 q，求电场力对球面形成的压强。

解：首先求能量，可利用能量的三种表示形式求能量，先利用面电荷与电位的形式求能量，球面的电位相当于将所有电荷都置于球心，故有 $\varphi_a = q/(4\pi\varepsilon_0 a)$，

$$W_e = \frac{1}{2}\iint_S \varphi\rho_S \mathrm{d}S = \frac{1}{2}\varphi_a \iint_S \rho_S \mathrm{d}S = \frac{1}{2}\varphi_a q = \frac{1}{2}\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

$f = -\frac{\partial W_e}{\partial a}\Big|_{q=\text{const}} = \frac{1}{2}\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a^2}$　力为球面膨胀的方向，压强为力除以面积 $p = \frac{1}{2\varepsilon_0}(\frac{q}{4\pi a})^2$

若将球视为导体，其电容为 C=4π$\varepsilon_0 a$，能量为 $W_e == \frac{1}{2}C\varphi^2 = \frac{1}{2}\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a}$

用能量密度做体积分 $W_e = \frac{1}{2\varepsilon_0}\iiint_V D^2 \mathrm{d}V = \frac{1}{2\varepsilon_0}\int_a^\infty (\frac{q}{4\pi r^2})^2 4\pi r^2 \mathrm{d}r = \frac{1}{2}\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a}$

7. 证明直导线中的恒定电流场的电流密度必均匀分布。

证明：根据 $\oint_l \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0$，设导线为圆柱，在过一根半径的两个点做两条平行于轴线的直线作为闭合回路的两条长边，端部再用平行与半径的直线相连，$\boldsymbol{E}$ 的环路积分仅为两条长边上 E 乘边长，且点积的结果是一正一负，故 E_1=E_2; 由于 J=σE，故有 J_1=J_2，电流密度均匀分布。

8. 对教材中的例 2-3（a），若在两个圆弧上放置电极，求两个电极间的电阻；若在两个电极间加电压 U，假设导体的电容率为ε_0，求两个电极上的电荷。

解：（1）设电流 I 求电压 U。电流密度为 $J(r)=I/(hr\theta)$，$E(r)=I/(hr\theta\sigma)$，

$$U = \int_{R_1}^{R_2} E\mathrm{d}r = \frac{I}{\sigma h\theta}\ln\frac{R_2}{R_1} \qquad R = \frac{U}{I} = \frac{1}{\sigma h\theta}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

（2）由上式可得：$I = \frac{U\sigma h\theta}{\ln(R_2/R_1)}$，则有：$E(r) = \frac{I}{\sigma h\theta r} = \frac{U}{r\ln(R_2/R_1)}$

$$\rho_S(R_1) = D(R_1) = \frac{\varepsilon_0 U}{R_1\ln(R_2/R_1)} \qquad \rho_S(R_2) = -D(R_2) = -\frac{\varepsilon_0 U}{R_2\ln(R_2/R_1)} \qquad q = \rho_S\theta Rh$$

9. 对于半径为 R_0 的半球形接地极，其底面与地面重合，如果大地的电阻率为两层结构，分界面是与球形电极同球心的圆面，半径为 R_1，内层与外层的电导率分别为σ_1 和σ_2，求接地电阻。（15 分）

解：设电流 I 求电极表面的电位。电流密度为 $J(r)=I/(2\pi r^2)$，$E_1(r)=I/(2\pi r^2\sigma_1)$，$E_2(r)=I/(2\pi r^2\sigma_2)$，

$$\varphi_{R_0} = \int_{R_0}^{R_1} E_1\mathrm{d}r + \int_{R_1}^{\infty} E_2\mathrm{d}r = \int_{R_0}^{R_1}\frac{I}{2\pi\sigma_1 r^2}\mathrm{d}r + \int_{R_1}^{\infty}\frac{I}{2\pi\sigma_2 r^2}\mathrm{d}r = \frac{I}{2\pi\sigma_1 R_0} - \frac{I}{2\pi\sigma_1 R_1} + \frac{I}{2\pi\sigma_2 R_1}$$

$$R = \frac{\varphi_{R_0}}{I} = \frac{1}{2\pi\sigma_1 R_0} - \frac{1}{2\pi\sigma_1 R_1} + \frac{1}{2\pi\sigma_2 R_1}$$