第12节 静电场的能量

作业：习题：41
用三种能量形式分别求解。

- 静电场对电荷有作用力可以做功，说明电场具有能量。
- 该能量是在电场的建立（特别是将电荷移动到系统）过程中，由外力作功或其它形式的能量转化而来的。
- 静电场的源是电荷，而电位的物理含义是功，所以能量与电荷和电荷所处位置处的电位有关。

  设想一下两个电荷系统的电场能量为何？

  电场是保守场，其储存的能量是势能。
- 另外，电场能量与整个空间电场与介质分布有关，电场能量分布在场域中。且电荷产生电场，电位与电场有关，故能量还应该可由整个空间的电场表示。
- 对应电场问题的电路元件是电容，电容是储存电荷与电场能量的元件，故电场能可用电容表示。

1. 电荷与电位表示的电场能量（能量表示形式1）（大物13.5-13.6）

先分析建立V内电荷ρ的过程所做的功，即电场所储存的电场能量。

现已移入总电荷的k倍(k<1)，即此时电荷密度为$k\rho$，电位为$k\varphi$。

若再移入一小部分电荷$\rho\mathrm{d}k$，对于一个体积微元$\mathrm{d}V$就是移入电荷$\mathrm{d}q=\rho\mathrm{d}k\mathrm{d}V$，需要外力做的功为：

$$\mathrm{d}A_{\Delta k\,\&\,\Delta V} = k\varphi\mathrm{d}q = k\varphi\rho\mathrm{d}k\mathrm{d}V = k\mathrm{d}k\times\varphi\rho\mathrm{d}V$$

求移入整个电荷区域中的电荷增量$\rho\mathrm{d}k$外力所做的功，

这需对上式在V内积分，得：$\mathrm{d}A_{\Delta k} = k\mathrm{d}k\iiint_V \varphi\rho\mathrm{d}V$

求移入ρ的整个过程外力做的功，需对上式的k从0积分到1：

$$W_\mathrm{e} = \int_0^1 k\mathrm{d}k\iiint_V \varphi\rho\mathrm{d}V = \frac{1}{2}\iiint_V \varphi\rho\mathrm{d}V$$

若还有面电荷密度分布的电荷，$W_\mathrm{e} = \frac{1}{2}\iiint_V \varphi\rho\mathrm{d}V + \frac{1}{2}\iint_S \varphi\rho_S\mathrm{d}S$

若只包含带有面电荷的导体，

$$W_\mathrm{e} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\iint_S \varphi_i\rho_{Si}\mathrm{d}S = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\varphi_i\iint_S \rho_{Si}\mathrm{d}S = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\varphi_i q_i$$

再分析点电荷系统建立的过程中外力做功转换成的能量。

先给出一个恒等式：

$$\frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon r}=q_i\frac{q_j}{4\pi\varepsilon r}=q_j\frac{q_i}{4\pi\varepsilon r}=q_i\varphi_{ij}=q_j\varphi_{ji}$$

φ_{ij}表示电荷q_j在电荷i的位置处产生的电位，即双下标的电位是一个电荷在另一点产生的电位。

另，设单下标φ_k表示其它所有电荷在电荷q_k处产生的电位。

然后将q_2从无限远移至距离q_1为r_{12}的P点。据q_1在P点的电位含义可知，外力需做的功为q_2乘q_1在P点产生的电位：

$$\Delta A_2=\frac{q_2 q_1}{4\pi\varepsilon r_{12}}=\frac{1}{2}(q_1\varphi_{12}+q_2\varphi_{21})=\frac{1}{2}(q_1\varphi_1+q_2\varphi_2)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2}q_k\varphi_k$$

φ_1表示其它所有电荷在电荷q_1处产生的电位，φ_2类似。

只有两个电荷时$\varphi_k=\varphi_{ki}$。

再将q_3从无限远移入场内的一个位置上。外力需做功：

$$\Delta A_3 = q_3\left(\frac{q_1}{4\pi\varepsilon r_{13}} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon r_{23}}\right) = q_3\varphi_{31} + q_3\varphi_{32} = q_3\varphi_3 = \frac{1}{2}[q_3\varphi_3 + q_3\varphi_3]$$

利用 $q_i\varphi_{ij} = q_j\varphi_{ji}$ 上式变为：

$$\Delta A_3 = \frac{1}{2}[q_3\varphi_3 + q_3(\varphi_{31} + \varphi_{32})] = \frac{1}{2}[q_3\varphi_3 + (q_1\varphi_{13} + q_2\varphi_{23})]$$

移入q_2和q_3所需做的总功为：

$$\Delta A_2 + \Delta A_3 = \frac{1}{2}(q_1\varphi_{12} + q_2\varphi_{21}) + \frac{1}{2}[q_3\varphi_3 + (q_1\varphi_{13} + q_2\varphi_{23})]$$

$$= \frac{1}{2}[q_3\varphi_3 + (q_1\varphi_{13} + q_1\varphi_{12} + q_2\varphi_{23} + q_2\varphi_{21})]$$

$$= \frac{1}{2}[q_3\varphi_3 + (q_1\varphi_1 + q_2\varphi_2)] = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3} q_k\varphi_k$$ 多个电荷相同。

注意：带电导体与点电荷的能量表达式看上去相同，但电位的含义不同，导体包含自身电荷的电位，点电荷不包含自身的电位。

例1：证明带有电荷$\pm q$的两电极电容C储存的电场能量为：

$$W_e = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$$

此为电场能量的另一种表示形式！

证：**此为带电导体问题。**两极板上分布有电荷，电荷总量分别为$\pm q$。两极板电荷产生的相对于无限远处两极板电位为φ_A与φ_B，电场能为：

$$W_e = \frac{1}{2}\varphi_A q + \frac{1}{2}\varphi_B(-q) = \frac{1}{2}U_{AB}q = \frac{1}{2}U_{AB}\cdot U_{AB}C = \frac{1}{2}CU_{AB}^2$$

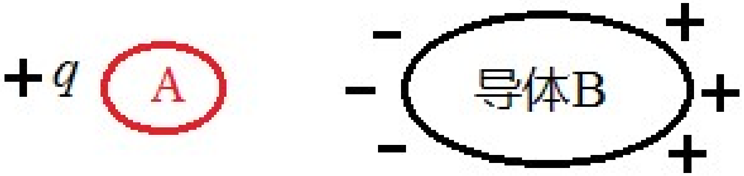
例2：带电荷q的导体A系统中移入另一导体B，电场能量如何变化？

解：导体B会受电场吸力而进入，故是电场做功，故电场能应减小。

导体B上面电荷积分为零，对能量似乎无贡献。

但导体A的电位必然减小（导体B上感应的正负电荷会在A上产生负电位，或若导体为有厚度的球壳套在导体A之外，加球壳后电位会减小），故电场能量会减小。

移入介质也如此。介质是被吸入。



2. 用电场表示的能量形式与能量密度　（大物13.7）

对于有体电荷分布与导体上面电荷分布的系统，其能量为：

$$W_e = \frac{1}{2}\int_V \varphi\rho \mathrm{d}V + \frac{1}{2}\int_S \varphi\rho_s \mathrm{d}S = \frac{1}{2}\int_V \varphi\nabla\cdot\boldsymbol{D}\mathrm{d}V + \frac{1}{2}\int_S \varphi\boldsymbol{D}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

V是有体电荷密度的体积，将其扩展到无限大空间仍成立，

$\boldsymbol{S}$为所有带电导体表面。恒等式：$\varphi\nabla\cdot\boldsymbol{D} = \nabla\cdot(\varphi\boldsymbol{D}) - \boldsymbol{D}\cdot\nabla\varphi$

上式可变为：$W_e = \frac{1}{2}\int_V \nabla\cdot(\varphi\boldsymbol{D})\mathrm{d}V + \frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}\mathrm{d}V + \frac{1}{2}\int_S \varphi\boldsymbol{D}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$

导体面$\boldsymbol{S}$为场域的边界面，且场域边界面的外法向与导体面的外法向相反。现采用导体面的法向，应用散度定理得：

$$\frac{1}{2}\int_V \nabla\cdot(\varphi\boldsymbol{D})dV = -\frac{1}{2}\oint_S \varphi\boldsymbol{D}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

所以有：

$$W_e = -\frac{1}{2}\int_S \varphi\boldsymbol{D}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} + \frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}\mathrm{d}V + \frac{1}{2}\int_S \varphi\boldsymbol{D}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}\mathrm{d}V$$

电场能量 $W_e = \frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}\mathrm{d}V = \int_V w_e \mathrm{d}V$

能量体密度 $w_e = \frac{1}{2}\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E} =$（对各向同性介质）$\frac{1}{2}\varepsilon E^2 = \frac{1}{2\varepsilon}D^2$

凡是电场不为零的空间都储存着电场能量。
上式肯定适用于非均匀介质情况。能量看的是整个场域。

例：真空中半径为$\boldsymbol{a}$的球体内有均匀电荷密度ρ，求系统的电场能量。

解法一：由电荷密度与电位的积分计算

解电位的边值问题或先求电场强度再求电位（无限远处为参考点），可得：

$$\varphi_1 = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left(a^2 - \frac{r^2}{3}\right) \qquad \varphi_2 = \frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0 r}$$

在球内积分：$W_e = \frac{1}{2}\int_V \varphi_1\rho\mathrm{d}V = \frac{1}{2}\cdot\frac{\rho^2}{2\varepsilon_0}\int_0^a \left(a^2 - \frac{r^2}{3}\right)4\pi r^2\mathrm{d}r = \frac{4\pi}{15\varepsilon_0}\rho^2 a^5$

解法二：由能量密度计算

应用高斯定理，得：

$$E_r = \begin{cases} \dfrac{\rho r}{3\varepsilon_0} & r < a \\[2ex] \dfrac{\rho a^3}{3\varepsilon_0 r^2} & r > a \end{cases}$$

$$W_e = \frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}\mathrm{d}V = \frac{1}{2}\int_V \varepsilon_0 E^2 \mathrm{d}V$$

$$W_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\int_0^a \frac{\rho^2 r^2}{9\varepsilon_0{}^2}\cdot 4\pi r^2 \mathrm{d}r + \int_a^\infty \frac{\rho^2 a^6}{9\varepsilon_0{}^2 r^4}\cdot 4\pi r^2 \mathrm{d}r\right) = \frac{4\pi}{15\varepsilon_0}\rho^2 a^5$$

第13节 电场力

作业：习题42

1. 电场力的定义

点电荷： $\boxed{\boldsymbol{f} = q\boldsymbol{E}}$ 分布电荷： $\boxed{\boldsymbol{f} = \int \boldsymbol{E}\mathrm{d}q}$

$\boldsymbol{E}$是除了受力电荷q或dq之外其它电荷所产生的场。

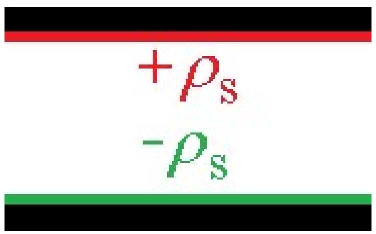
更确切的说是q或dq不存在时，被移走后的场强值。

因为力是两个场的相互作用，这是电场力的本质。

故不能用合成场计算力，必须用移走受力电荷后的场强。

例：充有电荷Q的平行平板电容器，极板面积为S，求正极板所受的电场力。

（忽略端部效应。问为何电荷都在内表面？）



解：电位移D=Q/S，E=D/ε， f=QE=Q^2/($S\varepsilon$)．错！

若求正极板所受力，是要将正极板移走后求负极板在此处产生的场。移走后正极板处的电位移为: $D^- = D/2 = \rho_s/2$

正极板所受的力为：$f = QE = Q\dfrac{\rho_s}{2\varepsilon} = \dfrac{Q^2}{2\varepsilon S}$ 方向向下或向内

根据$\boldsymbol{E}$的方向与电荷的符号可知：两个极板受力均为吸力，使电容增大的力！

- 要利用电场强度$\boldsymbol{E}$的定义求静电场力，对于点电荷或面电荷要去除q或$\mathrm{d}\rho_s$后再求$\boldsymbol{E}$。电荷对其自身位置处的场是有贡献的（且点电荷贡献为无限大）。
- 好在对于体分布电荷没有这样的问题，因为体电荷本点处的电荷对本点的$\boldsymbol{E}$没有贡献。且若电荷分布均匀，则该点周围一个对称区域内的所有电荷对$\boldsymbol{E}$的总贡献也是零。
- 若求介质的受力，还要计算极化电荷，太过复杂或困难。
- 实际上，有一种不基于电荷受力的电场力的计算方法：
  虚功法或虚位移法：假设物体受电场力作用移动一个小距离看电场能量变化多少，由此得到该物体的受力。

2. 求电场力的虚位移法

- 一物体受电场力的作用会有移动或产生位移的趋势。
- 电场使物体位移是对物体做功、结果是电场能量变化。
- 若移动一定距离，能量变化越大则表明对物体的作用力越大。
- 实际上不需要移动一定距离，或根本不需要移动，只要将电场能量对位移求微分或变化率即可得到力的大小（微分的效力）。
- 位移不仅仅指空间变量的变化，物体受力可能会发生旋转、体积或面积膨胀或缩小变化。这些可统称为广义位移坐标。
- 定义广义力是电场企图或可以改变某一个广义坐标的力，
  想求电场使得哪个量变化就将系统的能量对哪个量求导。

（1）电荷不变系统的虚位移法

若**A**号导体受电场力f的作用发生位移dg，系统的电荷保持不变（无外部能源或不接电压源），系统能量关系为：

电场能量的减小量等于电场对导体A所做的功，即：

$$-\mathrm{d}W_e = f\mathrm{d}g$$ 因此有导体受力为：

$$\boxed{f = -\left.\frac{\partial W_e}{\partial g}\right|_{q_k=const}}$$

f的参考方向是使得g增加的方向，即电场做正功。因此，若计算的结果f为正，则确实就是使g增加，反之亦然。

（2）系统接有外电压源的情况（导体的电压不变）

问：接电压源的平板电容，电场对极板做功后，电场能是增是减？

若**A**号导体受电场力作用发生位移d$\boldsymbol{g}$，电场所做的功与电场能量的增量必然都是由外部电源提供,系统的能量关系为：

$$\underset{\text{外源}}{\mathrm{d}W} = \underset{\text{电场能}}{\mathrm{d}W_e} + \underset{\text{电场作功}}{\boldsymbol{f}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{g}}$$

设接有外电压源的n个导体组成的系统，电源电压分别为φ_k恒定。若**A**号导体受电场力发生位移d**g**，外部电源会向系统内提供能量，以提供电荷的形式实现，设给每个导体上提供的电荷是$\mathrm{d}q_i$，
则根据电位的功的含义，可知外源移动这些电荷所做功，
即提供给系统的能量为：

$$\mathrm{d}W = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k \mathrm{d}q_k$$

φ_k为极板的电位

另，由上节电荷与电位表示的能量可知：

电压不变下电荷增加后电场能量的增量为：$\mathrm{d}W_e = \dfrac{1}{2}\sum \varphi_k \mathrm{d}q_k$

故有： $\mathrm{d}W = 2\mathrm{d}W_e \qquad \mathrm{d}W_e = \mathrm{d}W / 2$

可见，电场做功时，外源提供的能量有一半用于提高电场能，另一半用来做功，即

$$\mathrm{d}A = f\mathrm{d}g = \frac{1}{2}\mathrm{d}W = \mathrm{d}W_\mathrm{e}$$

另因此有电场力： $f = \left.\dfrac{\partial W_e}{\partial g}\right|_{\varphi_k\text{保持不变}}$

对电容器，电场力的方向是使得电容**C**增加，

故当电压不变时，根据 $W_e = CU^2/2$ 可知**C**增加电场能会增加；

当电荷不变时，根据 $W_e = q^2/(2C)$ 可知**C**增加电场能会减小。

实际上有：

$$\boxed{f = \frac{\partial W_e}{\partial g}\bigg|_{\varphi_k=const}} \qquad \boxed{f = -\frac{\partial W_e}{\partial g}\bigg|_{q_k=const}}$$

3. 用电容的变化率表示的电场力

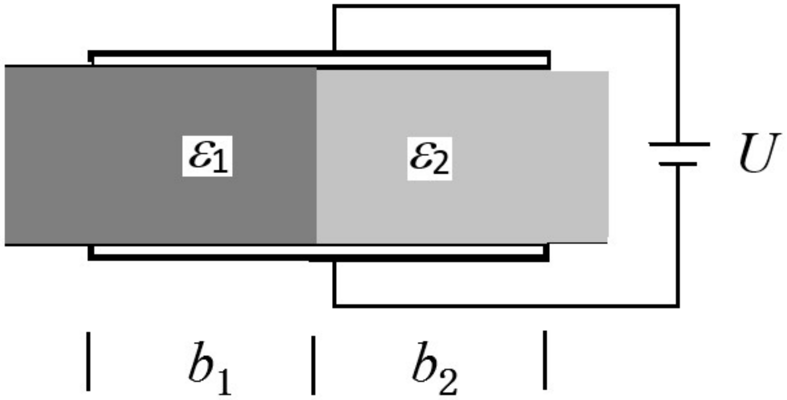
$$f = +\frac{\partial W_e}{\partial g}\bigg|_{U不变} = +\frac{\partial}{\partial g}\left(\frac{1}{2}CU^2\right)\bigg|_{U不变} = \frac{U^2}{2}\frac{\partial(C)}{\partial g}$$

$$f = -\frac{\partial W_e}{\partial g}\bigg|_{q不变} = -\frac{\partial}{\partial g}\left(\frac{q^2}{2C}\right)\bigg|_{q不变} = -\frac{q^2}{2}\frac{\partial}{\partial g}\left(\frac{1}{C}\right) = \frac{q^2}{2C^2}\frac{\partial(C)}{\partial g}$$

以上两个表达式都可以看出：

电场对物体作用力的方向是使电容增大的趋势，无论是否接外源。

例:平行板电容器中有两种介质（$\varepsilon_1>\varepsilon_2$），两介质位于极板中的宽度分别为$b_1$和$b_2$, 极板内侧面间距为$d$，介质交界面的面积为$S$，极板上加有电压$U$，不考虑端部效应，即认为电容器外场为零的情况下，
问：(1)哪种介质试图把另一种介质推出电容器？
(2)计算这个推力，实际上是使得分界面左右移动的力。



解答：(1) 根据受电场力的方向一定是使电容增加的方向可知，
两介质受的电场力都是指向电容器内，
是被吸入电容器内的趋势，
但合力是介电常数大的介质推移小者。
也可从虚位移看若界面左右移动能量是否变化或能量的导数是否有值。

总能量为：$$W_e=\frac{1}{2}\varepsilon_1(\frac{U}{d})^2 b_1 S+\frac{1}{2}\varepsilon_2(\frac{U}{d})^2 b_2 S$$

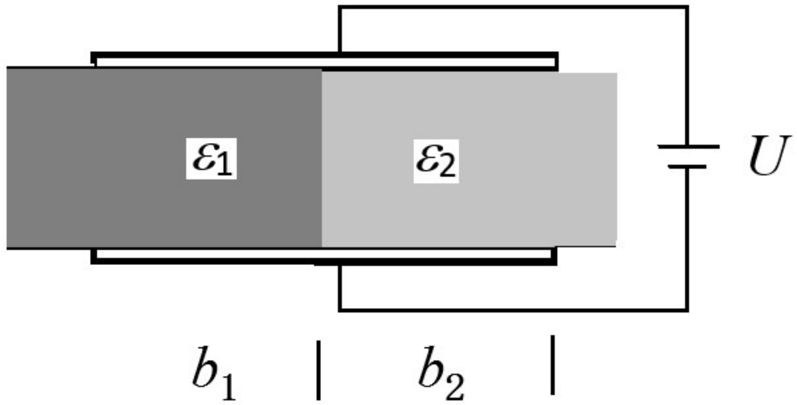
$$f=\frac{\partial W_e}{\partial b_1}\Big|_{\varphi_k=const}=\frac{1}{2}\varepsilon_1(\frac{U}{d})^2 S$$

这个结果错了！
错在何处？

b_1增加时， b_2一定要减小，

因极板宽度b_1+b_2不会改变，

故 b_2是b_1的函数。因此应该为：



$$W_e=\frac{1}{2}\varepsilon_1(\frac{U}{d})^2 b_1 S+\frac{1}{2}\varepsilon_2(\frac{U}{d})^2 b_2 S$$

$$=\frac{1}{2}\varepsilon_1(\frac{U}{d})^2 b_1 S+\frac{1}{2}\varepsilon_2(\frac{U}{d})^2[(b_2+b_1)-b_1]S$$

认为(b_1+b_2)为常数，上式对b_1求导就对了。

$$f=\frac{\mathrm{d}W_{\mathrm{e}}}{\mathrm{d}b_1}\Big|_{U不变}=\frac{1}{2}\varepsilon_1(\frac{U}{d})^2-\frac{1}{2}\varepsilon_2(\frac{U}{d})^2$$

静电场计算方法小结

- 电场计算：电荷积分、高斯通量、由电位、镜像和电轴法
- 电位计算：电荷积分、边值问题、由电场、镜像和电轴法
- 电容和部分电容计算：

  设电荷求电压、设电压求电荷；由电场能量求电容。
- 能量计算：

电位乘电荷积分法、点电荷的电位乘电荷求和法、

能量密度体积分法、电容法。

- 力的计算：

  电场定义法（移走受力电荷的E）、虚位移法、电容增量法。