第10讲 恒定激励下一阶动态电路的求解

1 课前预习回顾

2 初值 ← 重点

3 时间常数

4 直觉解法 ← 重点

5 从另一个角度观察解 ← 隐性重点

数学+物理

纸笔计算器

本讲重难点

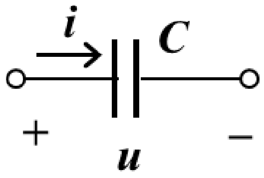
- 任意支路量的初值
- 任意支路量的终值
- 一阶电路的时间常数
- 任意支路量的表达式

三要素

2

1 课前预习回顾

C和L的特性

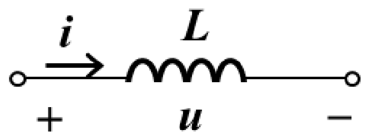


串并特性与电导相同

$$i(t)=C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$

串并特性与电阻相同

$$u(t)=L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$



直流U作用→开路

对偶

直流I作用→短路

$$u(t)=u(0)+\frac{1}{C}\int_0^t i\,\mathrm{d}\tau$$

$$i(t)=i(0)+\frac{1}{L}\int_0^t u\,\mathrm{d}\tau$$

$$w_C=\frac{1}{2}Cu^2$$

动态过程的本质
是能量的变化

$$w_L=\frac{1}{2}Li^2$$

单选题 1分

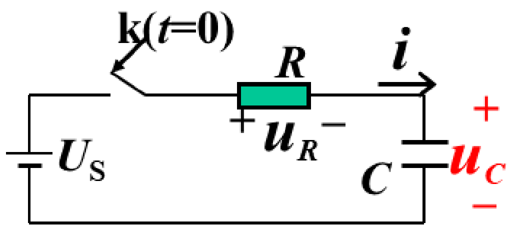
6mF电容和3mF电容串联，对外等效电容为

- A 2mF
- B 9mF
- C 0mF
- D 3mF

按物理→数学的方式规范地求解电路

已知 换路前电容电压$u_C=U_0$

求： 电容电压$u_C(t)$。



$$\begin{cases} u_R + u_C = U_S \\ u_R = iR \\ i = C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} \end{cases} \Rightarrow RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = U_S$$

从物理（电路）到数学（方程）

线性
常系数
常微分方程
非齐次
初值问题

单选题 1分

$$RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=U_\mathrm{S}$$ 对应的特征根为

A $-RC$

B RC

C $1/RC$

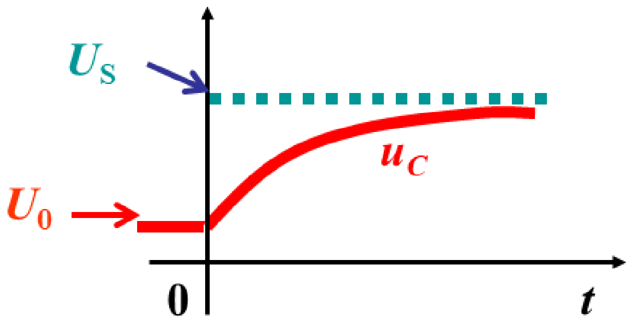
D $-1/RC$

数学求解方程

$$\begin{cases} RC\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=U_S \\ u_C(0)=U_0 \end{cases}$$

换路前电容电压$u_C=U_0$

从物理（电路）到数学（方程）



特征方程 $RCp+1=0$

特征根 $p=-1/RC$

齐次通解 $u''_C=Ae^{-t/RC}$

非齐次特解 $u'_C=U_S$

全解(非齐次通解) $u_C=Ae^{-t/RC}+U_S$

$u_C(0)=U_0$

$A=U_0-U_S$

$$\boxed{u_C=U_S+(U_0-U_S)e^{-t/RC} \quad t\geq 0}$$

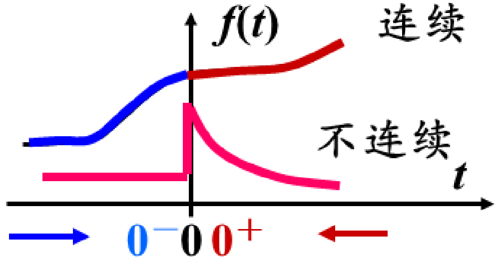
定义 $\tau=-1/p=RC>0$

一阶RC电路的时间常数

(time constant)

2 初值

（1） $t=0^{+}$ 和 $t=0^{-}$ 的概念



设换路发生在 t=0时刻

0^{-} 换路的前一瞬间

0^{+} 换路的后一瞬间

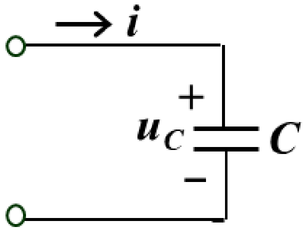
$$f(0^{-})=\lim_{\substack{t\to 0\\ t<0}} f(t) \qquad f(0^{+})=\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} f(t)$$

希望获得 $t=0^{+}$ 时刻支路电压（电流）的初值和导数的初值。

学习动态电路时域分析，要始终关注：什么跳了，什么没跳　　本讲　　L11/L12

（2）换路定理

1)



$$u_C(t)=u_C(0^-)+\frac{1}{C}\int_{0^-}^{t} i(\tau)\mathrm{d}\tau$$

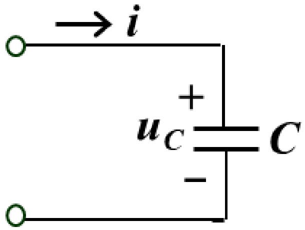
$t=0^+$ $$u_C(0^+)=u_C(0^-)+\frac{1}{C}\int_{0^-}^{0^+} i(\tau)\mathrm{d}\tau$$

如果 $i(\tau)$ 为有限值

$$\int_{0^-}^{0^+} i(\tau)\mathrm{d}\tau \to 0 \quad \longrightarrow \quad \boxed{u_C(0^+)=u_C(0^-)}$$

$$q=C\,u_C \qquad q(0^+)=q(0^-)+\int_{0^-}^{0^+} i(\tau)\mathrm{d}\tau \qquad \boxed{q(0^+)=q(0^-)}$$

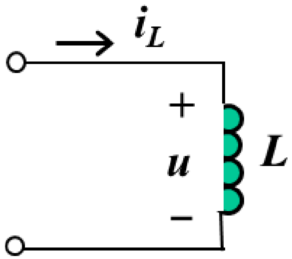
电荷守恒



如果 $i(\tau)$ 为有限值

$$\boxed{u_C(0^+)=u_C(0^-)}$$

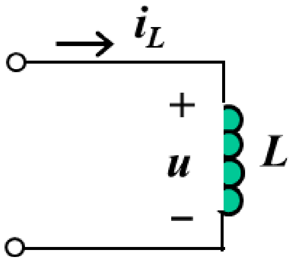
$$\boxed{q(0^+)=q(0^-)}$$



如果 $u(\tau)$ 为有限值

根据对偶原理
什么结论?
弹幕或投稿

2)



$$i_L(t) = i_L(0^-) + \frac{1}{L}\int_{0^-}^{t} u(\tau)\mathrm{d}\tau$$

$t = 0^+$

$$i_L(0^+) = i_L(0^-) + \frac{1}{L}\int_{0^-}^{0^+} u(\tau)\mathrm{d}\tau$$

如果 $u(\tau)$ 为有限值

$$\int_{0^-}^{0^+} u(\tau)\mathrm{d}\tau \to 0 \longrightarrow \boxed{i_L(0^+) = i_L(0^-)}$$

$$\psi = Li_L \quad \psi(0^+) = \psi(0^-) + \int_{0^-}^{0^+} u(\tau)\mathrm{d}\tau \quad \boxed{\psi(0^+) = \psi(0^-)}$$

磁链守恒

换路定理

$$\begin{cases} q(0^+) = q(0^-) \\ u_C(0^+) = u_C(0^-) \end{cases}$$

条件：换路时流经电容的电流为有限值

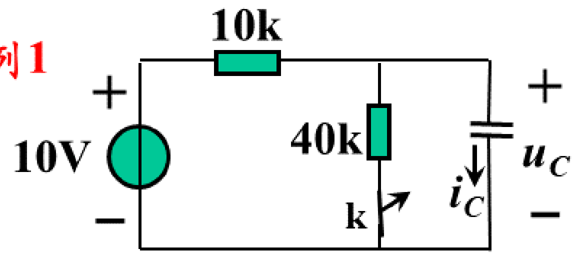
$$\begin{cases} \psi(0^+) = \psi(0^-) \\ i_L(0^+) = i_L(0^-) \end{cases}$$

条件：换路时电感上的电压为有限值

（3）确定电路的初值

此处可以有弹幕

例1

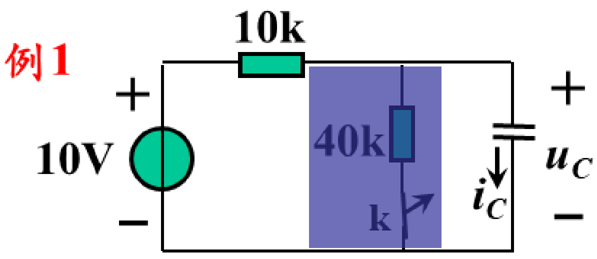


换路前稳态，求电容电流初值$i_C(0^+)$。

换路前 $u_C(0^-)=$ $i_C(0^-)=$

（3）确定电路的初值

例1



换路前稳态，求电容电流初值$i_C(0^+)$。

换路前 $u_C(0^-)= 8V$ $i_C(0^-)=0$

根据换路定理 $u_C(0^+)=u_C(0^-)=8V$

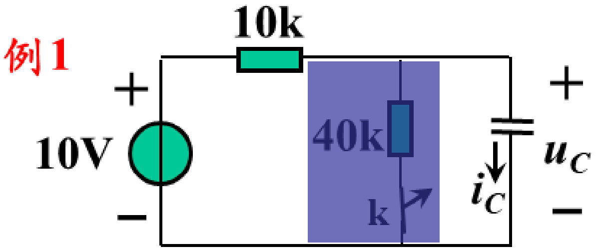
换路后k打开，40k电阻支路开路

如何求i_C 在(0^+) 时刻的值?

此处可以有弹幕/投稿

（3）确定电路的初值

例1



换路前稳态，求电容电流初值$i_C(0^+)$。

换路前 $u_C(0^-)=8\text{V}$ $i_C(0^-)=0$

根据换路定理 $u_C(0^+)=u_C(0^-)=8\text{V}$

如何求i_C在(0^+)时刻的值？

KVL $10\text{k}i_C(0^+)+u_C(0^+)=10$

$$i_C(0^+)=\frac{10-8}{10\text{k}}=0.2\text{mA}$$

结论1： i_C随便跳

$i_C(0^-)=0\neq i_C(0^+)$

结论2：

求初值时电容C可看作独立电压源

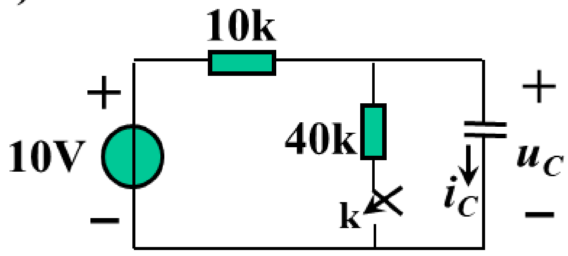
电感L可看作独立电流源

替代定理

单选题 1分

换路前稳态，求电容电流初值$i_C(0^+)$。

开关状态和前页不同



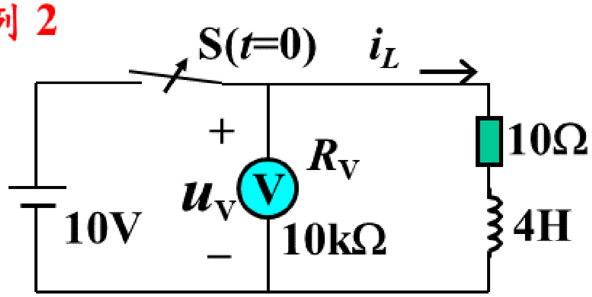
A 0.2mA

B 0.25mA

C －0.25mA

D －0.2mA

例 2

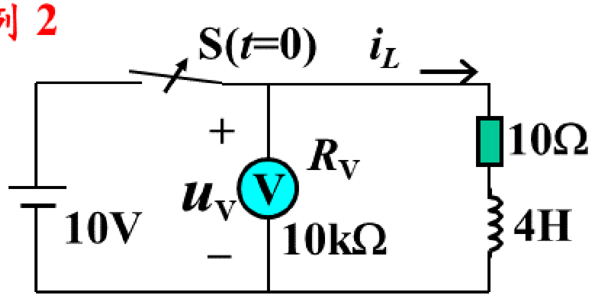


换路前稳态电路

电压表内阻10kΩ，量程为 50V。

t=0 时刻开关S 打开，求电压 $u_V(0^+)$。

例 2



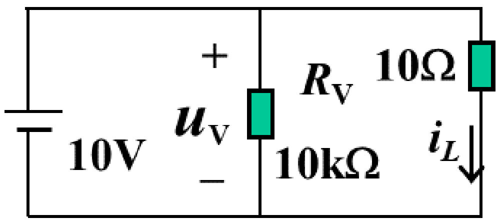
电压表内阻10kΩ，量程为 50V。

t=0 时刻 k 打开，求电压 $u_V(0^+)$ 。

换路前稳态电路

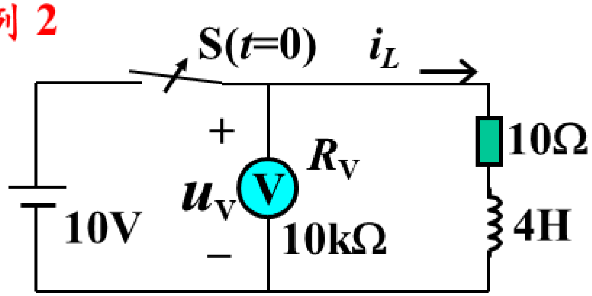
求0^-值（电阻电路）

$$i_L(0^+) = i_L(0^-) = 1\ \mathrm{A}$$



0^+时刻电路

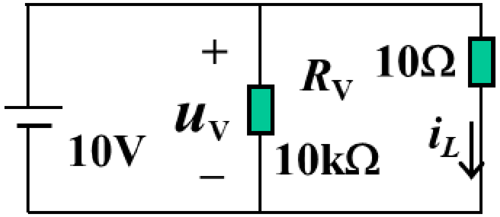
例 2



电压表内阻10kΩ，量程为 50V。

t=0 时刻 k 打开，求电压 $u_V(0^+)$ 。

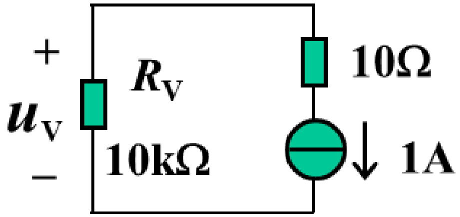
换路前稳态电路



求0^-值（电阻电路）

$$i_L(0^+) = i_L(0^-) = 1\ \text{A}$$

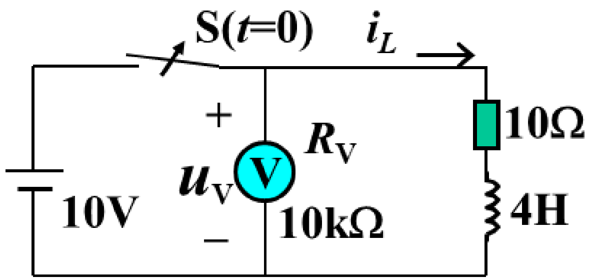
0^+时刻电路



求0^+值（电阻电路）

$$u_V(0^+) = -10000\text{V}$$

那又怎样?



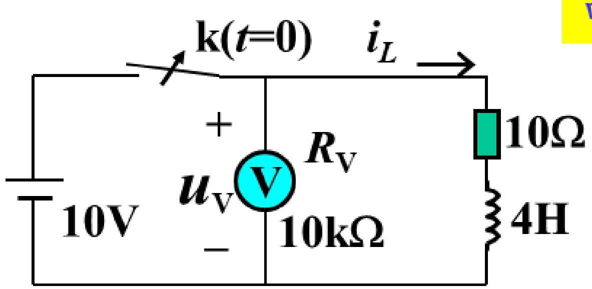
怎么办?

电路中加入什么已经学过的元件能搞定这件事

$u_V(0^+)= -10000\text{V}$

Ⓥ 坏了!

此处可以有弹幕/投稿



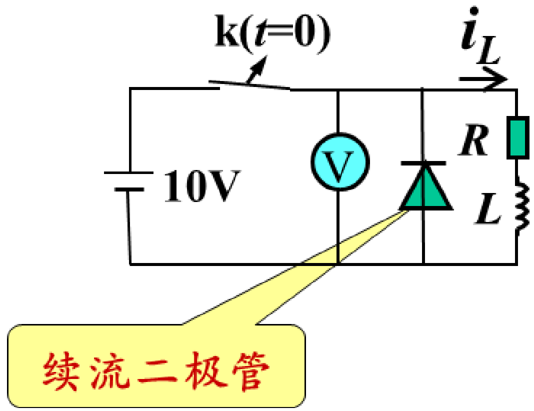
电感线圈突然开路一定是副作用吗?

汽车的点火系统

L11继续讨论

$$u_V(0^+) = -10000\text{V}$$

V 坏了！



小结：求电路初值的步骤

(a) 由换路前的稳态电路求$u_C(0^-)$ 和 $i_L(0^-)$

$\boxed{0^- \text{电路（电阻电路）（电容}C\text{开路、电感}L\text{短路）}}$

(b) 应用换路定理求$u_C(0^+)$ 和 $i_L(0^+)$

$$u_C(0^+) = u_C(0^-)$$

(c) 画 0^+时刻的等效电阻电路

$$i_L(0^+) = i_L(0^-)$$

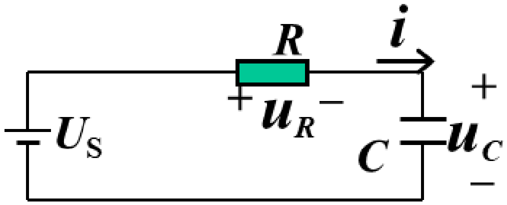
* 保留电路拓扑结构

** 用独立电压源替代电容C、用独立电流源替代电感L

*** 独立电压源值为$u_C(0^+)$、独立电流源值为$i_L(0^+)$

(d) 由0^+电路（电阻电路）求电路中其余支路量0^+时刻的值

3 时间常数



定义 $\tau = -1/p = RC > 0$

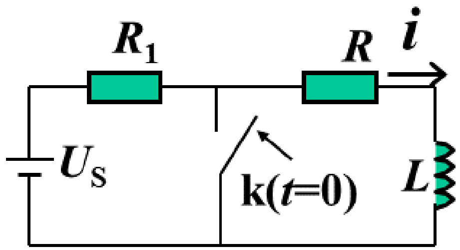
一阶RC电路的时间常数

(time constant)

根据对偶原理，放胆一猜，一阶RL电路的时间常数是？

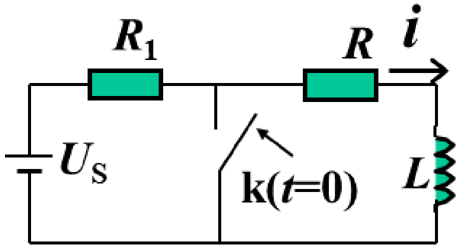
此处可以有弹幕/投稿

求图示电路中电流i。



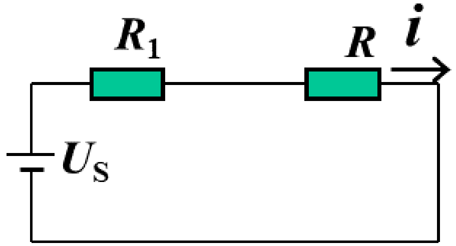
合闸之前:

求图示电路中电流i。



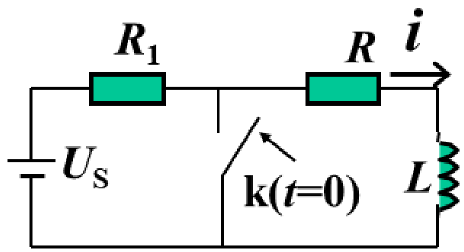
合闸之前:

$$i(0^-)=\frac{U_S}{R_1+R}$$



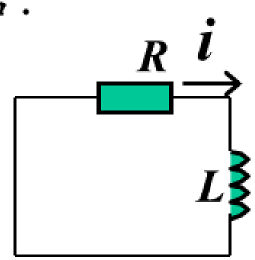
$$i(0^+)=i(0^-)=\frac{U_S}{R_1+R}=I_0$$

求图示电路中电流i。



合闸之前：$i(0^-) = \dfrac{U_S}{R_1 + R}$

合闸以后：



$$i(0^+) = i(0^-) = \frac{U_S}{R_1 + R} = I_0$$

$$\boxed{L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri = 0}$$

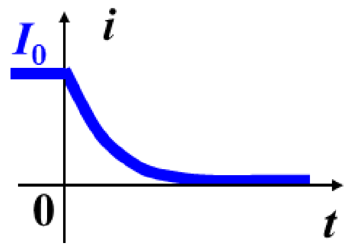
特征方程 $Lp+R=0$　　特征根 $p = -\dfrac{R}{L}$

令 $\tau = -1/p = L/R > 0$ 为一阶RL电路的时间常数

全解　$i(t) = 0 + Ae^{-t/\tau}$

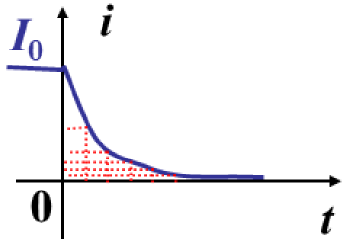
由初值确定A　$A = i(0^+) = I_0$

$$i = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad t \geq 0$$



关于 τ 的讨论

$$i = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad t \geq 0$$



t	0	τ	2τ	3τ	5τ
$i = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$	I_0	$I_0 e^{-1}$	$I_0 e^{-2}$	$I_0 e^{-3}$	$I_0 e^{-5}$
	$\boxed{I_0}$	$\boxed{0.368\, I_0}$	$\boxed{0.135\, I_0}$	$\boxed{0.05\, I_0}$	$\boxed{0.007\, I_0}$

讨论1： 工程上通常认为 $3\tau \sim 5\tau$ 后过渡过程结束。

τ 越小，电压/电流变化越快。 记忆方法

讨论2： 一阶电路的时间常数就是特征根的负倒数

讨论3： 一个电路中每个支路量表达式的时间常数都一样。原因见L12

讨论4： 将一个电路中独立源置零，不影响支路量的时间常数。原因见L12

单选题 1分

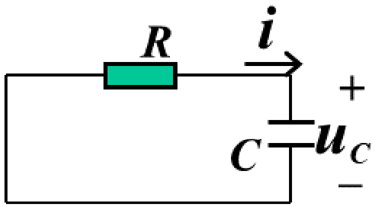
对于$1-e^{-\frac{t}{\tau}}$来说，从0时刻起，τ时间后，上升到____。

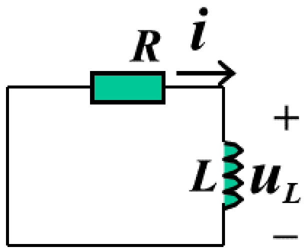
A 0

B 0.368

C 0.632

D 1





$\tau = RC > 0$

$\tau = L/R > 0$

工程上通常认为$3\tau \sim 5\tau$后过渡过程结束。

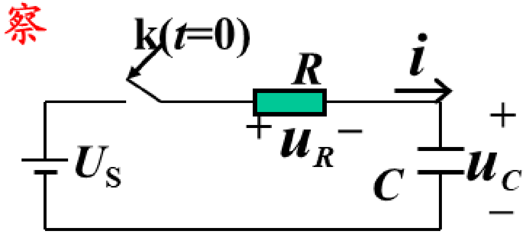
τ越小，电压/电流变化越快。

同样是电阻R，为什么在RC电路中就是越大越慢，在RL电路中就是越大越快？

此处可以有弹幕

4 一阶电路的直觉解法（三要素法）

观察

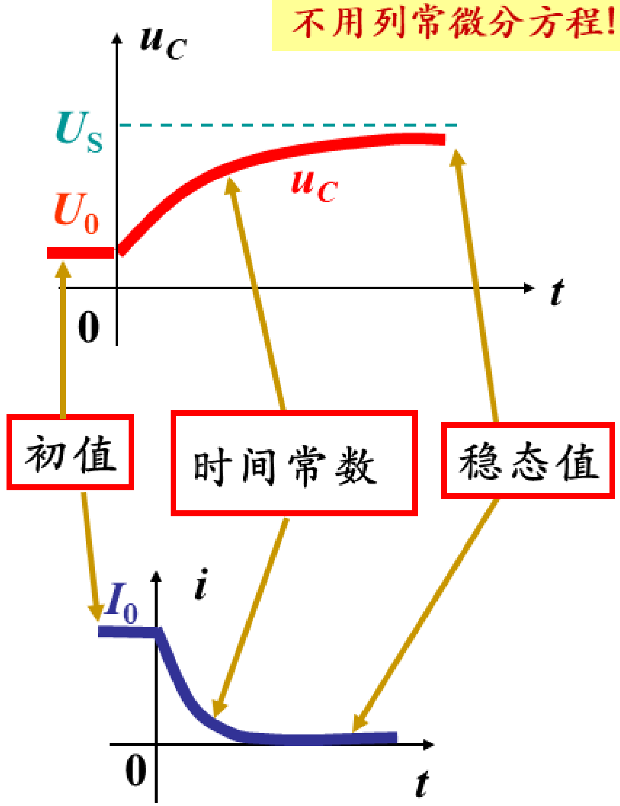


$$RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=U_S$$

$$u_C=U_S+(U_0-U_S)\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\quad t\geq 0$$

如果能够通过求解电路方便地求得这3个值?

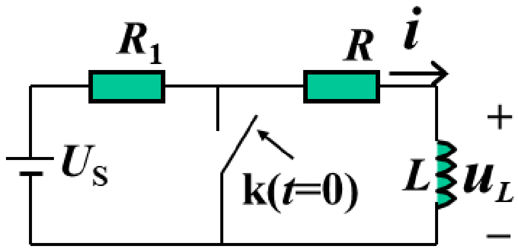
不用列常微分方程!



时间常数>0 → 特解=稳态解

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+Ri=0$$

$$i=0+I_0\mathrm{e}^{-\frac{t}{L/R}}\quad t\geq 0$$



讨论正值*RLC*构成的一阶电路的一般情况

一阶常系数线性常微分方程

任意支路量f的方程 $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}+af(t)=u(t)$

$a>0$

$\boxed{\text{特征根}(-a)<0}$

$\boxed{\text{时间常数}\ \tau=1/a\ >0}$

待定系数

$$f(t)=\text{特解}+A\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} \xrightarrow{t\to\infty} \text{特解}=f(\infty)=\text{稳态解}$$

$$f(t)=f(\infty)+A\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} \xrightarrow{f(0^+)=f(\infty)+A} A=f(0^+)-f(\infty)$$

$$\boxed{f(t)=f(\infty)+[f(0^+)-f(\infty)]\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}}$$

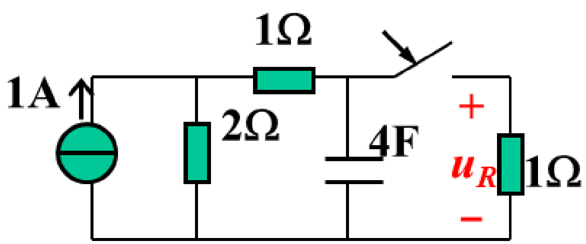
三要素：
- $f(0^+)$ 初值
- $f(\infty)$ 稳态解
- τ 时间常数

优点1：可适用于各支路量

优点2：不列写方程直接获得解

单选题 1分

题图中$u_R(\infty)$=___V



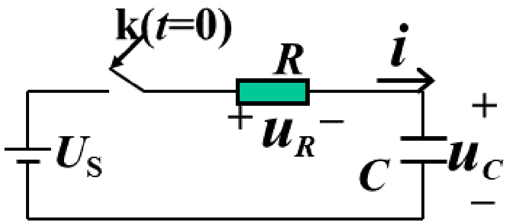
A 0

B 0.5

C 1

D 2

用直觉解法重做前面例



已知：$u_C(0^-)=U_0$

求：电压$u_C(t)$，$u_R(t)$

$$f(t)=f(\infty)+[f(0^+)-f(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} \quad t>0$$

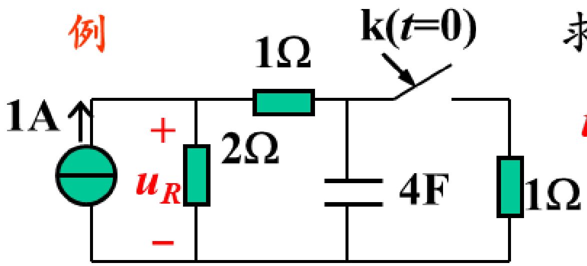
$$u_C(0^+)=u_C(0^-)=U_0 \xleftrightarrow{\text{电阻电路}} u_R(0^+)=U_S-U_0$$

$$u_C(\infty)=U_S \xleftrightarrow{\text{电阻电路}} u_R(\infty)=0$$

$$\tau=RC \xleftrightarrow{\text{电阻电路}} \tau=RC$$

$$u_C=U_S+(U_0-U_S)e^{-\frac{t}{\tau}} \quad t\geq 0 \qquad u_R=(U_S-U_0)e^{-\frac{t}{\tau}} \quad t>0$$

例 求图示电路中电压$u_R(t)$。



$$u_R(t)=u_R(\infty)+[u_R(0^+)-u_R(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}$$

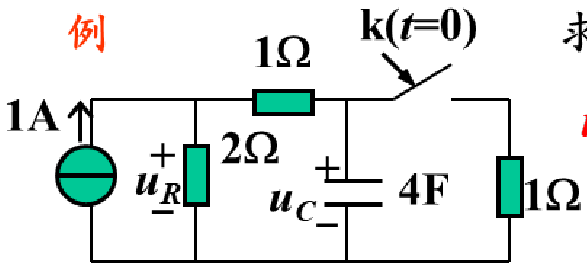
解

0^-电路

（换路前稳态电路）

（第1个电阻电路）

例



求图示电路中电压$u_R(t)$。

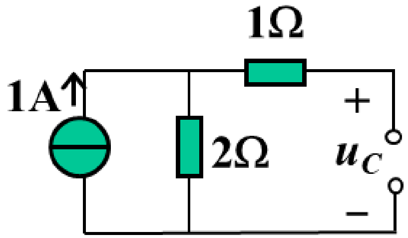
$$u_R(t)=u_R(\infty)+[u_R(0^+)-u_R(\infty)]\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$$

解

0$^-$电路

（换路前稳态电路）

（第1个电阻电路）

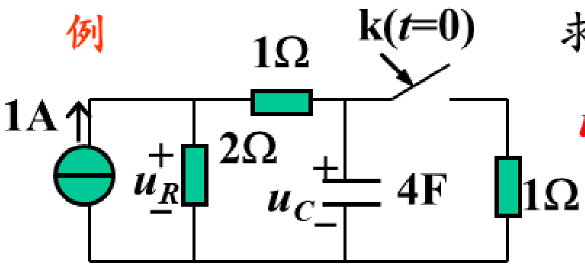


$$u_C(0^-)=2\,\mathrm{V}$$

0$^+$电路

（第2个电阻电路）

例



求图示电路中电压$u_R(t)$。

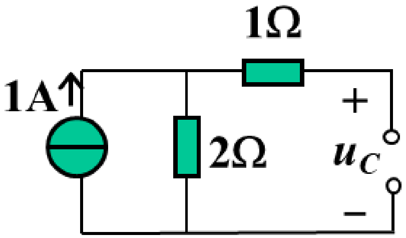
$$u_R(t) = u_R(\infty) + [u_R(0^+) - u_R(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}$$

解

0⁻电路

（换路前稳态电路）

（第1个电阻电路）

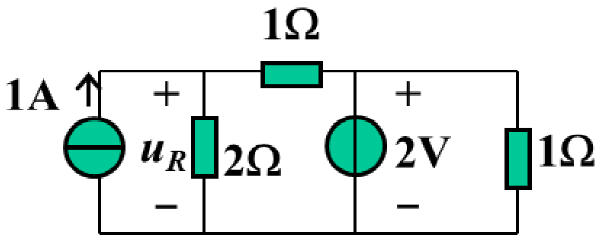


$$u_C(0^-) = 2\,\text{V}$$

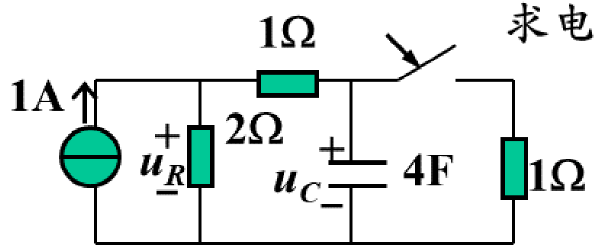
0⁺电路

（第2个电阻电路）

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{1}\right)u_R(0^+) - \frac{1}{1} \times 2 = 1$$



$$\boxed{u_R(0^+) = 2\,\text{V}}$$



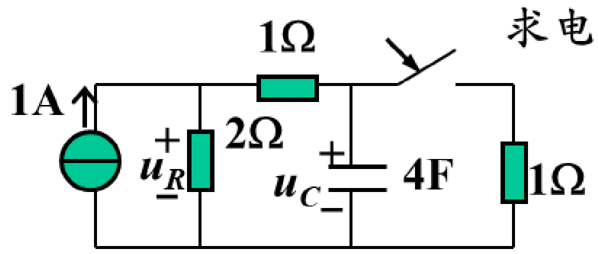
求电压$u_R(t)$。

$$\boxed{u_R(0^+) = 2\,\mathrm{V}}$$

换路后稳态电路

（第3个电阻电路）

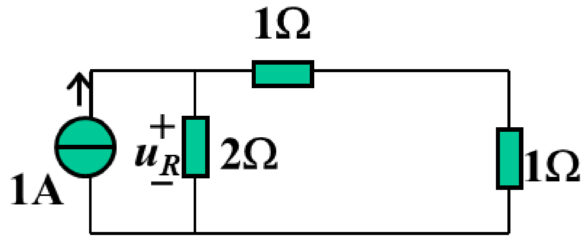
求电压$u_R(t)$。



$$\boxed{u_R(0^+)=2\,\mathrm{V}}$$

换路后稳态电路

（第**3**个电阻电路）

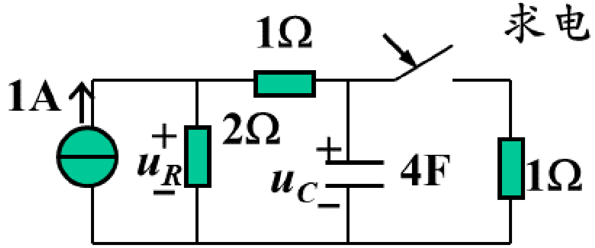


$$\boxed{u_R(\infty)=1\,\mathrm{V}}$$

求时间常数电路

（第**4**个电阻电路）

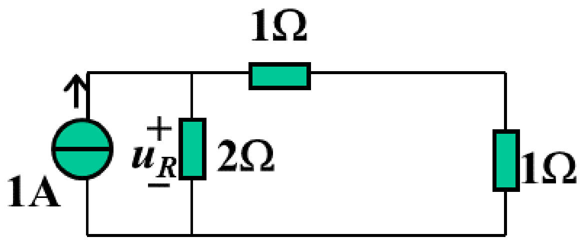
讨论3：　一个电路中独立源置零，不影响支路量的时间常数。原因见L12



求电压$u_R(t)$。

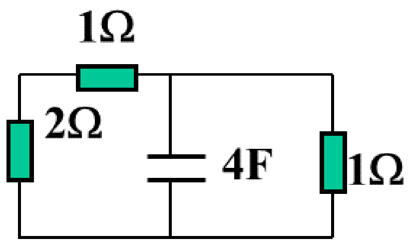
$$\boxed{u_R(0^+) = 2\,\text{V}}$$

换路后稳态电路
（第3个电阻电路）



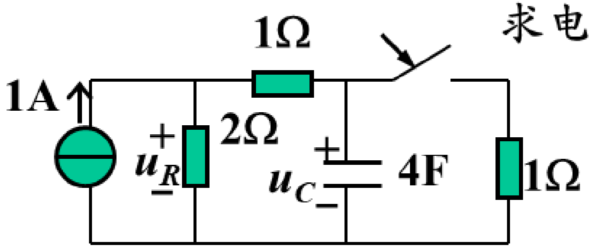
$$\boxed{u_R(\infty) = 1\,\text{V}}$$

求时间常数电路
（第4个电阻电路）



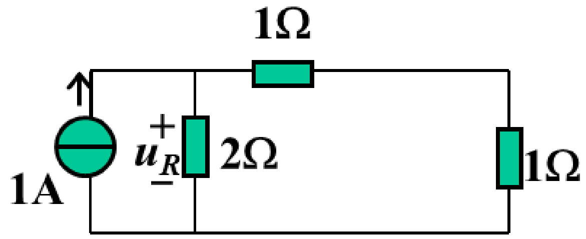
$$\boxed{\tau = \frac{3}{4} \times 4 = 3\ \text{s}}$$

求电压$u_R(t)$。



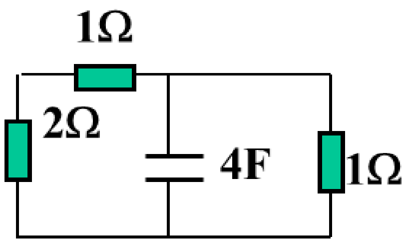
$$\boxed{u_R(0^+) = 2\,\mathrm{V}}$$

换路后稳态电路
（第3个电阻电路）



$$\boxed{u_R(\infty) = 1\,\mathrm{V}}$$

求时间常数电路
（第4个电阻电路）



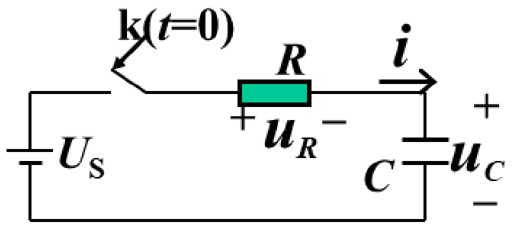
$$\boxed{\tau = \frac{3}{4} \times 4 = 3\,\mathrm{s}}$$

$$u_R(t) = u_R(\infty) + [u_R(0^+) - u_R(\infty)]\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} = 1 + \mathrm{e}^{-\frac{t}{3}}\,\mathrm{V} \quad t > 0$$

关于直觉解法的讨论

- 适用于：　$f(t)=f(\infty)+[f(0^+)-f(\infty)]\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} \quad t>0$
  - 时间常数>0
  - 时间常数、初值、终值比较容易求的场合
    - 直流激励或正弦激励 → L15
  - 可用于求电路任意支路的电压或电流
- 时间常数的概念仅对1阶电路适用

5 从另一个角度观察解

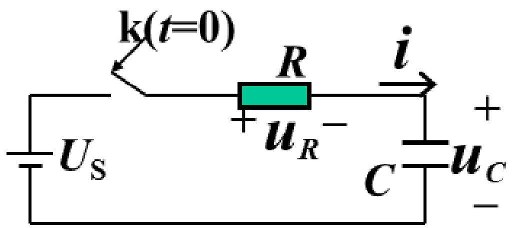


$u_C(0^-)=U_0$ 求：电容电压$u_C(t)$。

$$u_C = U_S + (U_0 - U_S)e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad t \ge 0$$

全响应

激励和响应之间不是线性关系！

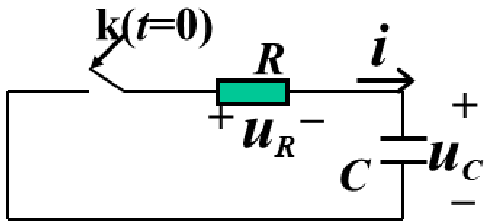


$u_C(0^-)=0$ 零状态(储能元件无初始储能)

$u_C(0^+)=0$ $u_C(\infty)=U_S$ $\tau=RC$

$$u_C = U_S + (0 - U_S)e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad t \ge 0$$

激励和响应之间是线性关系！



$u_C(0^-)=U_0$ 零输入(没有外加电源)

$u_C(0^+)=U_0$ $u_C(\infty)=0$ $\tau=RC$

$$u_C = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad t \ge 0$$

初值和响应之间是线性关系！

Principles of Electric Circuits Lecture 10 Tsinghua University 2023

42

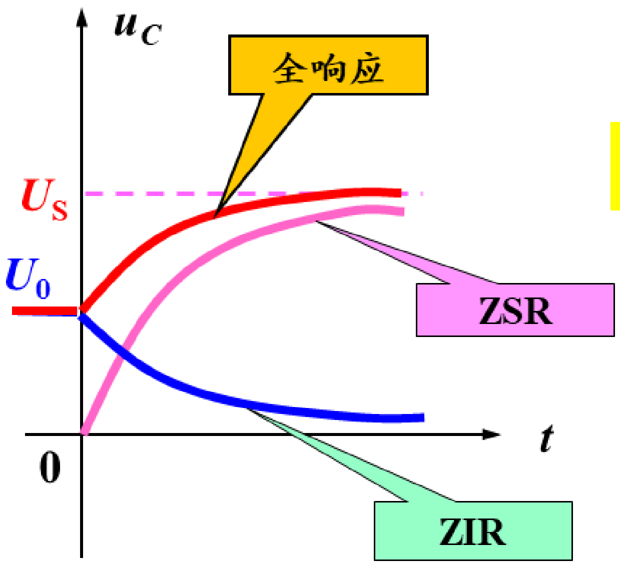
零输入响应(zero-input response) (ZIR)：没有外加激励，由L、C初始储能引起的响应

零状态响应(zero-state response) (ZSR)：L、C没有初始储能，由外加激励引起的响应

$$u_C = U_S(1-e^{-\frac{t}{\tau}}) + U_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (t \geq 0)$$

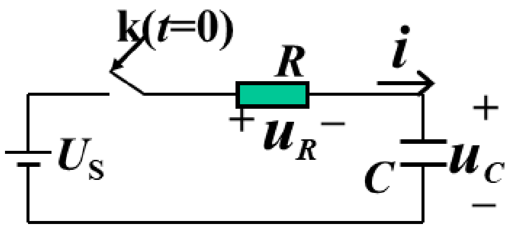
ZSR　　ZIR

$$\begin{cases} u_C(0^-)=0 \\ i_L(0^-)=0 \end{cases}$$



对物理现象的描述

单选题 1分



$u_C(0^-)=U_0$

电阻电压$u_R(t)$的零状态响应是“红包”

A $-U_0\, e^{-\frac{t}{\tau}}$

B $U_S+\left(U_0-U_S\right)e^{-\frac{t}{\tau}}$

C $U_S\, e^{-\frac{t}{\tau}}$

D $\left(U_S-U_0\right)e^{-\frac{t}{\tau}}$

$$u_C(t)=\overbrace{u_C(\infty)}^{\text{强制分量/非齐次特解}}+\overbrace{[u_C(0^+)-u_C(\infty)]\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}}^{\text{自由分量/齐次通解}}$$

数学(部分物理)视角
方程视角

$$=\underbrace{\left[u_C(\infty)-u_C(\infty)\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\right]}_{\text{零状态响应}}+\underbrace{u_C(0^+)\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}}_{\text{零输入响应}}$$

电路视角
能量视角

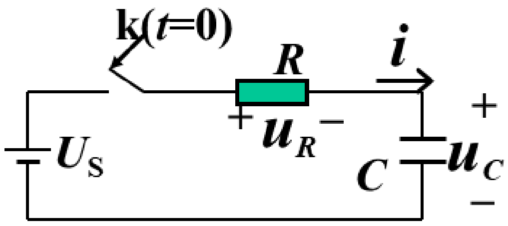
全响应 = 强制分量 + 自由分量
　　　 = 零输入响应 + 零状态响应

为什么要这样划分?

原因1：ZIR 和 ZSR 都是可能出现的过渡过程

原因2：ZSR 对于分析一般激励的响应非常重要

ZSR的激励—响应线性关系



$u_C(0^-)=0$ 零状态

$$u_C = U_S(1-e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad t \geq 0$$

激励	响应
U_S	$u_C = U_S(1-e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad t \geq 0$
$2U_S$	$u_C = 2U_S(1-e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad t \geq 0$
$U_{S1}+U_{S2}$	$u_C = (U_{S1}+U_{S2})(1-e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad t \geq 0$

第13讲解决任意激励下动态电路的过渡过程分析！