作业：习题1、2、12

第1节（计算部分）应用电磁感应定律的计算问题

含两种情况：

（1）已知变化的磁场求感应电场（已做过习题）与感应电动势。

（2）忽略位移电流的磁准静态场情况。

(a)无导体中感应电流情况，已知激磁电流i_0或$\boldsymbol{J}_0$，求磁场$\boldsymbol{B}_0$，然后求变化磁场的感应电场。(b)有导体涡流的问题以后讲。

- 从电路看，外磁场感应的电场称为局外电场，其线积分为电动势e；
- 电动势为描述电源特征的量；
- 流过电感的电流在电感上感应电压$u_L=L\mathrm{d}i/\mathrm{d}t$；互感有$u_M=M\mathrm{d}i/\mathrm{d}t$；
- 流过导体的电流在其电阻上产生电压$u_R=Ri$；
- 导体中的电流密度$\boldsymbol{J}$等于合成电场E乘电导率$J=\sigma E$，E是库仑电场与感应电场（含局外电场与电路内部磁场的感应电场）之和。
- 有磁场变化其周围或空间就有感应电场。
- 时变磁场能否产生感应电流不一定，要看有无导体存在。

1. 已知时变磁场计算感应电场

约束方程为：

$$\begin{cases}\nabla\times\boldsymbol{E}_{\mathrm{i}}=-\dfrac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\\ \nabla\cdot\boldsymbol{E}_{\mathrm{i}}=0\end{cases}\qquad\begin{cases}\oint_l\boldsymbol{E}_{\mathrm{i}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\iint_S(-\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\\ \oiint_S\boldsymbol{E}_{\mathrm{i}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=0\end{cases}$$

$$\oint_l\boldsymbol{E}_{\mathrm{i}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\iint_S(-\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

如何求感应电场$\boldsymbol{E}_{\mathrm{i}}$?

比较该方程组与恒定电流密度$\boldsymbol{J}$的磁场方程组：

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}\qquad\oint_l\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\iint_S\boldsymbol{J}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=I$$

易看出，时变的$\boldsymbol{B}$类似于$\boldsymbol{J}$，时变的磁通类似于电流，

即一个时变的$\boldsymbol{B}$的磁通量管（或一束磁力线）相当于电流I，

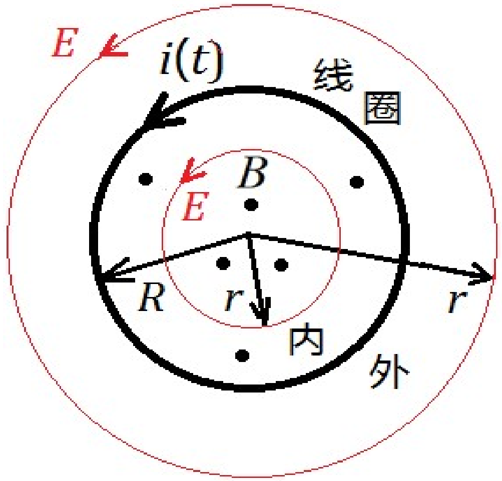
我们可将磁通量管称为磁流i_m，则$\mathrm{d}\boldsymbol{B}/\mathrm{d}t$ 称为磁流密度$\boldsymbol{J}_m$，有

“感应电场的安培环路定律”：

$$\boxed{\oint_l\boldsymbol{E}_{\mathrm{i}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=-\iint_S\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=-\sum i_m}$$

$\boldsymbol{E}_{\mathrm{i}}$的电力线与$\boldsymbol{B}$的磁力线交链。

例1：一无限长直空心密绕螺线管线圈，认为导线区域厚度很薄，线圈截面半径为R，单位长的匝数为N，通有交变电流$i(t)=I_m\sin\omega t$。
求线圈内外的感应电场强度（忽略时变电场产生的磁场，视为磁准）。
解：（大物例**20.2**，上次课的补充作业）



首先要分析场分布。线圈内磁场均匀，磁力线为平行于线圈轴线的直线；线圈外磁场为零。
感应电场的电力线是以轴线为圆心的圆，无散，区域内外均如此（如图中红线所示）；此为二维平行平面场，在一个平面上选极坐标系，则$\boldsymbol{B}_J$只有z方向、$\boldsymbol{E}_i$只有角度α方向分量，且有$E_{i\alpha}(r)$。
其类似于长直载流导线内外的磁场与磁力线。
由安培环路定律做一个一条边在线圈外，一条边在线圈内的单位高度的矩形作为安倍环路，可解得线圈内部区域的磁场为$H=Ni$。
由“感应电场的安培环路定律”，选一条电力线为环路；对线圈内则有：

$$\oint_l \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=E_\alpha 2\pi r=-i_m=-\iint_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=-\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\pi r^2 \qquad E_\alpha=-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}r=-\frac{1}{2}r\mu_0\omega N I_m\cos\omega t$$

对线圈外有：$$\oint_l \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=E_\alpha 2\pi r=-\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\pi R^2 \qquad E_\alpha=-\frac{R^2}{2r}\mu_0\omega N I_m\cos\omega t$$

2. 已知变化的磁场计算回路的感应电动势

回路的磁通变化会产生感应电动势，有几种方式可使得磁通变化？

磁场$\boldsymbol{B}(t)$变化和导体回路的有效面积$\boldsymbol{S}(t)$发生改变。

对于$\boldsymbol{B}$和$\boldsymbol{S}$都变化的问题，将回路磁通视为两函数的乘积，则有：

$$e=\oint_{l}\boldsymbol{E}_{\mathrm{i}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\iint_{S(t)}\boldsymbol{B}(t)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}]=-\iint_{S(t)}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}-\boldsymbol{B}(t)\cdot\iint_{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}S}\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

$$=-\iint_{S(t)}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}(t)}{\mathrm{d}t}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}-\boldsymbol{B}(t)\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{S}(t)}{\mathrm{d}t}$$

第一项表示对$\boldsymbol{B}$求时间微分，积分区域为t时刻的面积；

第二项表示对$\boldsymbol{S}$求时间微分（即考虑回路变化或求磁通的有效面积变化）与面积变化处$\boldsymbol{B}$的点积分。

若$\boldsymbol{B}$均匀可提到积分号外变为：

$$e=-\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t}\cdot\boldsymbol{S}(t)-\boldsymbol{B}(t)\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\mathrm{d}t}\qquad\text{（习题2的基础）}$$

公式中感应电动势与磁通的参考方向为右手螺旋。

对于N匝线圈，各匝电动势之和对应磁链。

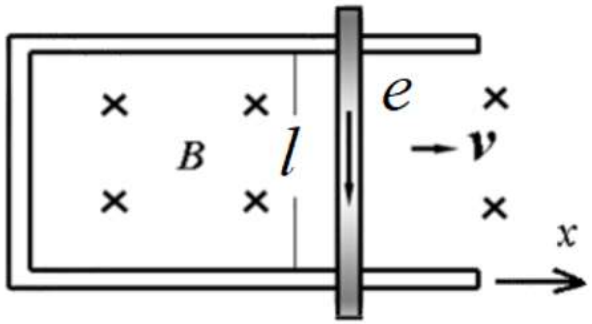
导体有效回路面积变化。包含两种情况：

a）构成闭合导体回路中一段或多段导体运动“切割”磁力线；
或理解为回路形状发生改变，本质上是回路面积发生变化。

b）导体回路旋转使其交链的磁通变化，即对磁通讲回路的有效面积变化。
由于旋转就有导体运动，所以这种情况视为导体切割磁力线也可。

1）均匀磁场中闭合导体回路中一段导体运动切割磁力线

运动导体与左侧导体框形成面积S，根据S变化与速度$\boldsymbol{v}$的关系，并取图示参考方向，有：



$$e=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=-\boldsymbol{B}(t)\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{S}(t)}{\mathrm{d}t}=-B\frac{l\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-lBv$$

导体向右运动为面积增加，磁通增加，此时计算结果电动势e为负，实际方向指向上，其产生逆时针电流试图阻止磁通增加（楞次定律）。

若运动导体上各点$\boldsymbol{E}_{\mathrm{i}}$相等，故$E_{\mathrm{i}}=e/l$，有：$\boxed{\boldsymbol{E}_{\mathrm{i}}=\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}}$ $\boldsymbol{E}_{\mathrm{i}}$的方向向上

$\boldsymbol{E}_{\mathrm{i}}$对导体内电荷有作用力，也可视为运动电荷受磁场力。据运动电荷受磁场力的方向，可知$\boldsymbol{E}_{\mathrm{i}}$的实际方向符合左手定则。

没有形成回路的只一根导线运动会发生什么现象？

2）均匀磁场$\boldsymbol{B}$中线圈旋转

设角速度为ω，线圈面积为 $2R\times l$，半径方向的边长为R。

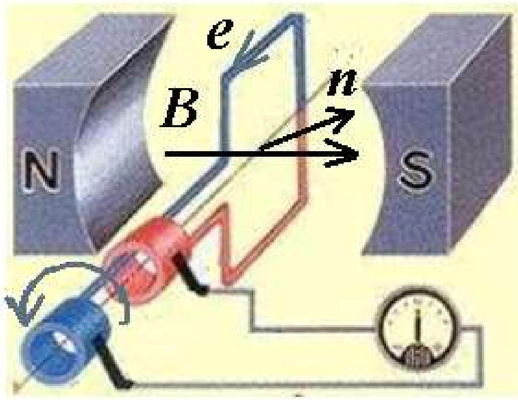
相对于交链的磁通，线圈回路的有效面积为：

$$S_{\Phi}=2Rl\cos\omega t=2Rl\cos[\alpha(t)]$$ ωt为线圈法向与磁场的夹角。

在图示参考方向下，感应电动势为：

$$e=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=-\boldsymbol{B}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\mathrm{d}t}=-B\frac{\mathrm{d}S_{\Phi}}{\mathrm{d}t}=2RlB\omega\sin\omega t$$

利用切割磁力线原理也能得到上面的结果。



两条竖直边不切割磁力线。

两条水平边沿角度方向的线速度为$\boldsymbol{v}=R\omega\boldsymbol{e}_{\alpha}$，

而切割磁力线产生的感应电场是：$\boldsymbol{E}_{\mathrm{i}}=\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$

故有：$\boldsymbol{E}_{\mathrm{i}}=\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}=Bv\sin(\omega t)\boldsymbol{e}_{z}=BR\omega\sin(\omega t)\boldsymbol{e}_{z}$

实际上$v\sin\omega t$ 为垂直于磁力线的线速度。

$$e=2lE_{\mathrm{i}}=2lBv\sin\omega t=2lBR\omega\sin\omega t$$ 与上面的结果相同

由于运动导体产生的电动势称为动生电动势，又称为发电机电势。

磁场随时间变化+回路切割磁力线

在两种电动势的方向选为同方向的情况下，有：

$$e=\oint_l \boldsymbol{E}_{\mathrm{i}}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=-\iint_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}+\oint_l (\boldsymbol{v}\times \boldsymbol{B})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

利用斯托克斯公式将两个闭合环路线积分变为面积分：

$$e=\iint_S \nabla\times \boldsymbol{E}_{\mathrm{i}}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=-\iint_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}+\iint_S \nabla\times(\boldsymbol{v}\times \boldsymbol{B})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

取被积函数相等，可得

带有运动导体的电磁感应定律的微分形式：

$$\boxed{\nabla\times \boldsymbol{E}_{\mathrm{i}}=-\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}+\nabla\times(\boldsymbol{v}\times \boldsymbol{B})}$$

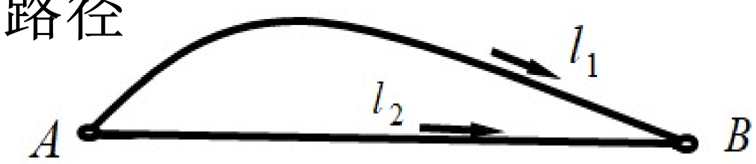
有运动导体时的Maxwell第二方程

如何在已知感应电动势的基础上计算感应电流？

3. 时变场中的电压特性与计算

- 时变电磁场中合成电场$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_{\mathrm{i}}+\boldsymbol{E}_{\mathrm{C}}$的线积分定义为电压。
- 一般都是分析导体中电流对应的电场积分形成的电压问题。两种电场都会在导体内产生电流，故与合成电场关联。
- 因为$\boldsymbol{E}_{\mathrm{i}}$有旋，故两点之间的电压就不唯一了，就与积分路径有关了，即对电压除指明始终点外，还需明确路径。

$$u_{\mathrm{AB}}=\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}}(\boldsymbol{E}_{\mathrm{i}}+\boldsymbol{E}_{C})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$$ 需指定路径



对一个闭合导体回路的感应电压u，选$\boldsymbol{E}$的方向与u相同，有：

$$u=\oint_l\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=-\frac{\mathrm{d}\Phi_{\text{总}}}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mathrm{d}(\Phi_M+\Phi_i)}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mathrm{d}\Phi_M}{\mathrm{d}t}-\frac{\mathrm{d}\Phi_i}{\mathrm{d}t}=e_M-L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$ ，Φ_{M}为互感磁通

概念：导体内的电场$\boldsymbol{E}$与导体内的电流密度关系一定为：$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{J}/\sigma$。

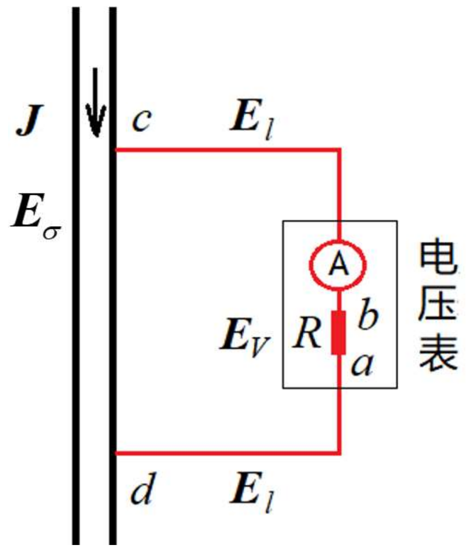
对于一段细导线，认为导线截面S上的电流均匀分布，在导体内有：

$$u_R=\int_l\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=El=\frac{J}{\sigma}l=\frac{i}{\sigma S}l=\frac{l}{\sigma S}i=Ri$$ 对导线闭合回路$u=u_R$则 $$e_M=Ri+L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

电压表结构与测量原理

电压表是由一电流表A与一大电阻R（阻值精确已知）串联组成。测到电流后与电阻R相乘便知R上的电压u_R，取有效值就是V表读数。忽略引线上的压降，可认为V表的电压u_R就是表笔c、d两处的电压。设R中电流对应的电场为E_V，导线上为E_l，定有E_V>>E_l，因为电导率有σ_V<<σ_l，则V表的值为：

$$u_R=\int_{a\text{-}b}E_V\mathrm{d}l\approx\int_{d\text{-}a\text{-}b-c}E_V\mathrm{d}l$$



在时变场中，对电场强度做一个闭合环路积分：

$$u=\int_{d\text{-}a\text{-}b\text{-}c}E_V\mathrm{d}l+\int_{c\text{-}d}E_\sigma\mathrm{d}l=-\frac{\partial\Phi}{\partial t}$$

得电压表上的时变电压为：$u_R=-\dfrac{\partial\Phi}{\partial t}-\displaystyle\int_{c\text{-}d}E_\sigma\mathrm{d}l$

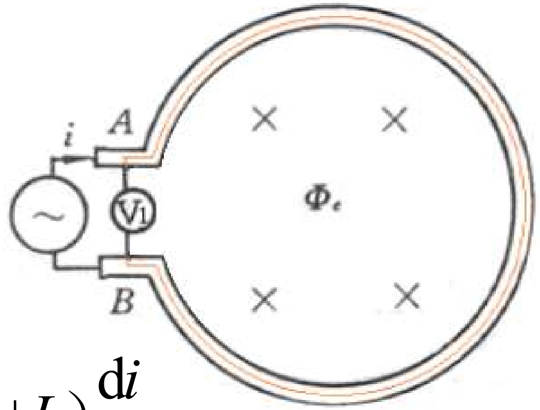
另外，由被测导线内的电流场知：导线内的电流密度J=i/S (导线截面积)，导体内的总电场E_σ=J/σ= $i/(S\sigma)$，则有：

$$\int_{c\text{-}d}\boldsymbol{E}_\sigma\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\frac{l}{\sigma S}i=R_l i$$

即沿导线$\boldsymbol{E}$的线积分等于电阻乘电流。

当然电阻应为交流电阻，其大于直流电阻。

教材例5-1(a)：单匝线圈通正弦电流$i(t)=I_m\sin\omega t$，已知线圈的内电感为L_i，外自感为L_o，导线电阻为R，端口接电压表V_1，求电压表的读数，电压表的A端为正极 。



解：利用一闭合回路的电压公式。

选择闭合回路为：从A出发沿导线中心线（图中红线）到B，然后沿V_1到A。因此有：

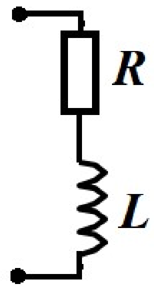
$$u=\oint_l \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}=\int_{A\text{-}B}\boldsymbol{E}_\sigma\cdot d\boldsymbol{l}+\int_{V_1}\boldsymbol{E}_V\cdot d\boldsymbol{l}=-\frac{d\Phi}{dt}=-L\frac{di}{dt}=-(L_o+L_i)\frac{di}{dt}$$

由导线内的电流场知：导线内的电流密度$J=i/S$ (导线截面积)，导体内的总电场$E=J/\sigma= i/(S\sigma)$，则有：
$$\int_{A\text{-}B}\boldsymbol{E}_\sigma\cdot d\boldsymbol{l}=\frac{l}{\sigma S}i=Ri$$

$$-u_{1AB}=\int_{V_1}\boldsymbol{E}_V\cdot d\boldsymbol{l}=-\int_{A\text{-}B}\boldsymbol{E}_\sigma\cdot d\boldsymbol{l}-L\frac{di}{dt}=-Ri-L\frac{di}{dt},$$

$$u_{V1}=Ri+L\frac{di}{dt}$$ 取有效值为电压表读数

由上式可见，线圈的等效电路为一电阻与一电感串联：



教材例5-1(b)： 求V_2的读数（a为正极）。

为求V_2，由于电压表V_2的测量线接在AB两点上，所以可选择闭合回路为：从A出发沿导线中心线（图中红线）到B，然后沿V_2的测量线经表V_2返回到A。此回路所包围的磁通为导线内的磁通，其近似对应内自感。因此有：

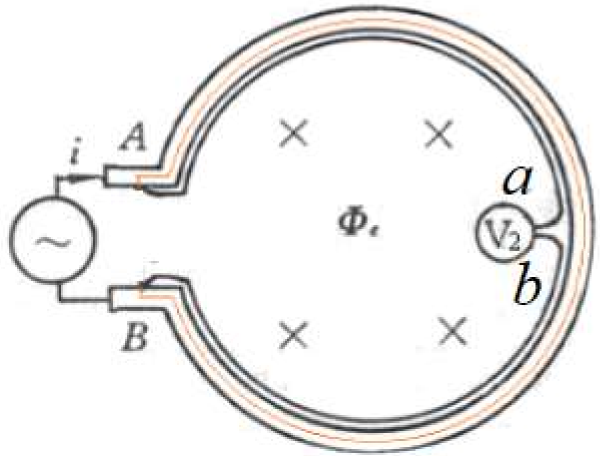
$$\oint_l \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_{\text{a-A}} \boldsymbol{E}_l \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} + \int_{\text{A-B}} \boldsymbol{E}_\sigma \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} + \int_{\text{B-b}} \boldsymbol{E}_l \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} + \int_{V_2} \boldsymbol{E}_V \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_i}{\mathrm{d}t} = -L_{\mathrm{i}}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

$$\int_{\text{A-B}} \boldsymbol{E}_\sigma \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = Ri \qquad -V_{2ba} = \int_{\mathrm{V}_2} \boldsymbol{E}_V \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

忽略电压表接线中的压降，故有：

$$-V_{2ba} = -\int_{\text{A-B}} \boldsymbol{E}_\sigma \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} - L_{\mathrm{i}}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = -Ri - L_{\mathrm{i}}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

$$V_2 = Ri + L_{\mathrm{i}}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$



V_2比V_1少测到了外电感的电压，但无法避免内电感的电压。
这是测量交流电流下电阻压降的困难所在。但可算出内自感扣除其电压。

第4节 非完纯导电媒质中自由电荷的驰豫（扩散）过程

系统从非平衡状态过渡到平衡态的过程称为弛豫过程。

弛豫过程一般是讲系统中微观粒子由于相互作用而交换能量，最后达到稳定分布的过程。

题：设导电媒质的电导率为σ，介电常数为ε。将体密度为ρ_0的一定量的电荷置于导电媒质中，求电荷的驰豫过程，即ρ_0的衰减过程。（忽略感应电场视为电准静态场）

解：为解ρ_0的衰减过程，需寻找电荷密度$\rho(t)$满足的方程。

电准静态场的方程形式：

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \quad (1)$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = 0 \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho \quad (4)$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (5)$$

$$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H} \quad (6)$$

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E} \quad (7)$$

$$\boldsymbol{J} = \sigma \boldsymbol{E} \quad (8)$$

对于电场，可利用方程(2)、(4)、(5)、(7)、(8)联合求解。

设电荷向无限远处移动，电场力和电力线发散，则方程(2)得到满足。

对于放置电荷的区域，电荷扩散形成电流。

利用上面的方程 (5) 和(8)可得：
$$\nabla\cdot\sigma\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\rho}{\partial t}\qquad\text{(i)}$$

利用上面的方程(4)和(7)可得：
$$\nabla\cdot\varepsilon\boldsymbol{E}=\rho\qquad\text{(ii)}$$

对均匀媒质由式(i)和(ii)得：
$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\sigma}{\varepsilon}\rho=0$$

该微分方程中ρ及其导数的形式必相同，这样才能相加为零。因此，ρ一定是指数函数形式，结合ρ的初始条件可得：

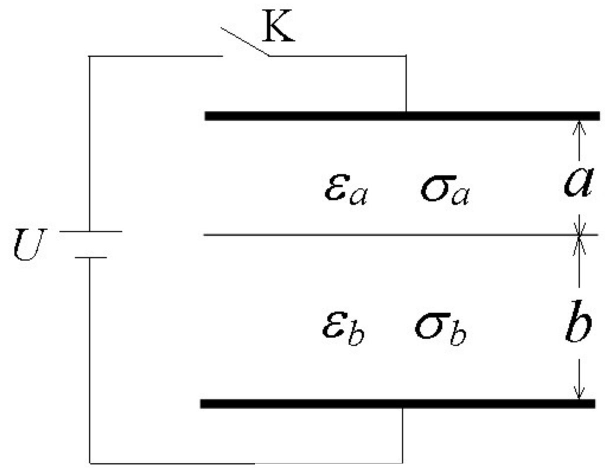
$$\rho(t)=\rho_0\mathrm{e}^{-t/\tau}\qquad\text{时间常数：}\ \tau=\varepsilon/\sigma$$

时间常数表示电荷密度衰减的速度。时间等于一个时间常数时，电荷密度衰减为初值的1/e=36.8%，5个时间常数时衰减为0.7%。

对于铜导体：电导率为5.8x10^7 S/m, 相对介电常数为1，则时间常数为1.5x10^{-19} s。导体内电荷会迅速扩散开。

第5节 非完纯导电媒质分界面上自由电荷的积累过程

两层非理想介质的平行板电容的介质交界面上会积累自由电荷。电荷从零积累到稳态也需要一定时间，该过程也是一个暂态过度过程。视为电准静态场。



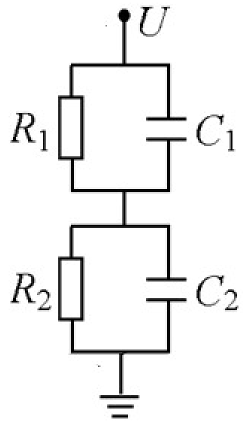
列方程: **(1)** 由于已知电压U，且为电准静态场，故有：$U=aE_a+bE_b$

方程: **(2)** 全电流连续交界面条件方程:

$$\sigma_a E_a + \varepsilon_a \frac{\partial E_a}{\partial t} = \sigma_b E_b + \varepsilon_b \frac{\partial E_b}{\partial t}$$

结合初始条件可解出E，由$\rho_s=D_b-D_a=\varepsilon_b E_b-\varepsilon_a E_a$求电荷得:

$$\rho_s(t) = \frac{\varepsilon_a\sigma_b - \varepsilon_b\sigma_a}{b\sigma_a + a\sigma_b} U(1-\mathrm{e}^{-t/\tau}) \quad \tau = \frac{b\varepsilon_a + a\varepsilon_a}{b\sigma_a + a\sigma_b}$$



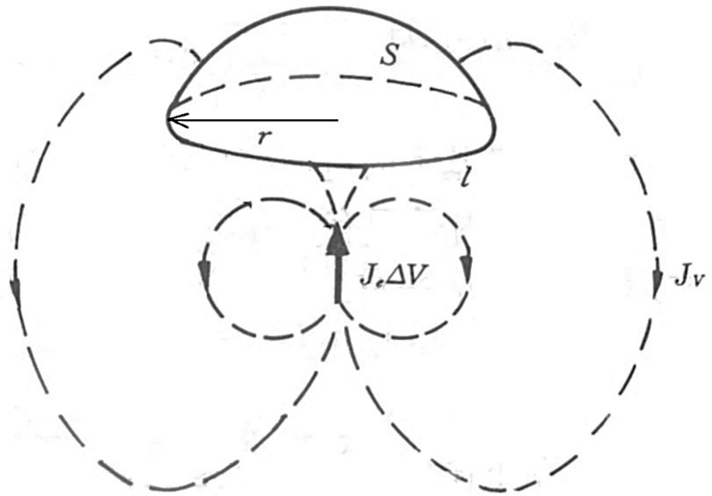
第**4-6**节内容不作为要求。每节就是一个例题。

第6节 生物体内时变偶极子电流源的磁场

人体一些组织由于化学作用有类似时变电动势“电池”的性能。陷在人体导电媒质中的“电池”会产生电流，电流会产生磁场。

陷在导电媒质中的“电池”所产生的电流场与正负电荷偶极子在介质中产生的电场分布相同。设媒质参数为：σ、ε、μ。认为是电准静态场时，求磁场分布。

解：可以利用全电流环路定律计算。



半径为r的圆环为一条磁力线，选其为全电流环路，$\boldsymbol{H}$在其上积分等于其交链的全电流，该电流可以通过球冠面上的电流密度积分得到，即：

$$2\pi rH = \iint_S (\boldsymbol{J}_c + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iint_S (\sigma + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t})\boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$