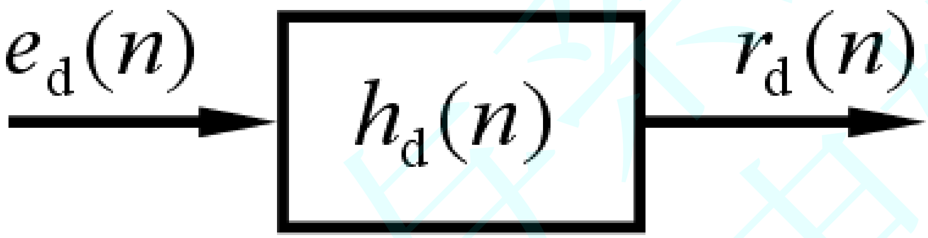
第三章

线性时不变离散时间系统的时域分析

- 差分方程求解方法;
- 单位样值响应;
- 卷积和

什么是离散系统?



- 输入和输出都是离散时间信号的系统——离散时间系统，简称离散系统。

后向形式的 N 阶差分方程

$$
\begin{aligned}
&A_0 r_d(n)+A_1 r_d(n-1)+A_2 r_d(n-2)+\cdots+A_N r_d(n-N)\\
&=B_0 e_d(n)+B_1 e_d(n-1)+B_2 e_d(n-2)+\cdots+B_M e_d(n-M)
\end{aligned}
$$

离散时间系统的差分方程描述

- 为什么要用差分方程来描述？
  - 一些实际物理过程本身具有离散特性，它们的数学模型只能是差分方程
  - 大量的物理过程本身是连续过程

→采用计算机分析，必须进行离散化处理

→离散化后，用差分方程近似描述

例 1　求等比级数 $e_{\mathrm{d}}(n)=Aq^n$ 的前 $n+1$ 项和。

解：前 $n+1$ 项的和为

$$r_{\mathrm{d}}(n)=A+Aq+Aq^2+\cdots+Aq^n$$

$r_{\mathrm{d}}(n)$ 构成一个离散序列，有

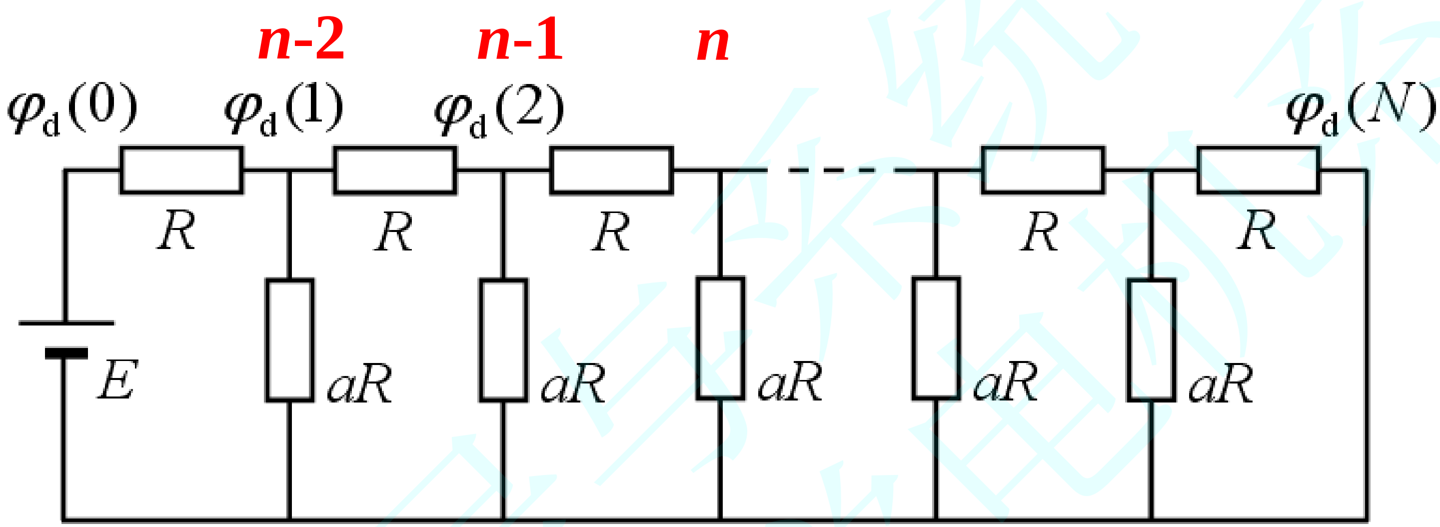
$$r_{\mathrm{d}}(0)=A\,;\qquad r_{\mathrm{d}}(n)=r_{\mathrm{d}}(n-1)+Aq^n$$

由此得一阶差分方程　$r_{\mathrm{d}}(n)-r_{\mathrm{d}}(n-1)=Aq^n$

系统输入 $e_{\mathrm{d}}(n)=Aq^n$

系统输出 $r_{\mathrm{d}}(n)$

例 2　如图所示是一个链形电阻网络，其各节点电位为 $\varphi_{\mathrm{d}}(n)$， $n=0,1,2,\cdots,N$，已知边界条件 $\varphi_{\mathrm{d}}(0)=E$， $\varphi_{\mathrm{d}}(N)=0$，求描述此系统节点电位分布的差分方程。



解：在网络的第 $n-1$ 个节点，根据基尔霍夫电流定律，有

$$\frac{\varphi_{\mathrm{d}}(n-2)-\varphi_{\mathrm{d}}(n-1)}{R}=\frac{\varphi_{\mathrm{d}}(n-1)}{aR}+\frac{\varphi_{\mathrm{d}}(n-1)-\varphi_{\mathrm{d}}(n)}{R}$$

由此得二阶差分方程

$$a\varphi_{\mathrm{d}}(n)-(2a+1)\varphi_{\mathrm{d}}(n-1)+a\varphi_{\mathrm{d}}(n-2)=0 \qquad n=0,1,2,\cdots,N$$

例 3 已知一个连续系统的微分方程

$$\frac{d^2 r_a(t)}{dt^2}+3\frac{dr_a(t)}{dt}+2r_a(t)=\frac{de_a(t)}{dt}+2e_a(t)$$

初始条件为 $r_a(0)$ 和 $r_a'(0)$ 。对系统信号离散化，建立系统差分方程。

解: 以抽样间隔 T_s 对系统激励 $e_a(t)$ 和响应 $r_a(t)$ 抽样，得离散序列 $r_d(n)$ 和 $e_d(n)$ 。

当 T_s 足够小时近似有

$$\frac{de_a(t)}{dt}\approx\frac{e_a(nT_s)-e_a\left[(n-1)T_s\right]}{T_s}=\frac{e_d(n)-e_d(n-1)}{T_s}$$

$$\frac{dr_a(t)}{dt}\approx\frac{r_a(nT_s)-r_a\left[(n-1)T_s\right]}{T_s}=\frac{r_d(n)-r_d(n-1)}{T_s}$$

$$\frac{d^2 r_a(t)}{dt^2}\approx\frac{r_a'(nT_s)-r_a'\left[(n-1)T_s\right]}{T_s}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 r_{\mathrm{a}}(t)}{\mathrm{d}t^2} \approx \frac{r_{\mathrm{a}}'(nT_{\mathrm{s}}) - r_{\mathrm{a}}'[(n-1)T_{\mathrm{s}}]}{T_{\mathrm{s}}}$$

$$\approx \frac{1}{T_{\mathrm{s}}}\left[\frac{r_{\mathrm{d}}(n) - r_{\mathrm{d}}(n-1)}{T_{\mathrm{s}}} - \frac{r_{\mathrm{d}}(n-1) - r_{\mathrm{d}}(n-2)}{T_{\mathrm{s}}}\right]$$

$$= \frac{1}{T_{\mathrm{s}}^2}[r_{\mathrm{d}}(n) - 2r_{\mathrm{d}}(n-1) + r_{\mathrm{d}}(n-2)]$$

将上三式代入微分方程，得二阶差分方程

$$\left(\frac{1}{T_{\mathrm{s}}^2} + \frac{3}{T_{\mathrm{s}}} + 2\right) r_{\mathrm{d}}(n) - \left(\frac{2}{T_{\mathrm{s}}^2} + \frac{3}{T_{\mathrm{s}}}\right) r_{\mathrm{d}}(n-1) + \frac{1}{T_{\mathrm{s}}^2} r_{\mathrm{d}}(n-2)$$

$$= \left(\frac{1}{T_{\mathrm{s}}} + 2\right) e_{\mathrm{d}}(n) - \frac{1}{T_{\mathrm{s}}} e_{\mathrm{d}}(n-1)$$

求解此二阶差分方程需要两个初始条件。由微分方程的初始条件可求差分方程的初始条件 $r_{\mathrm{d}}(0)$ 和 $r_{\mathrm{d}}(-1)$

$$r_{\mathrm{d}}(0)=r_{\mathrm{a}}(0)$$

由 $$r_{\mathrm{a}}'(0)\approx\left[r_{\mathrm{a}}(0)-r_{\mathrm{a}}(-T_{\mathrm{s}})\right]/T_{\mathrm{s}}=\left[r_{\mathrm{d}}(0)-r_{\mathrm{d}}(-1)\right]/T_{\mathrm{s}}$$

得 $$r_{\mathrm{d}}(-1)\approx r_{\mathrm{a}}(0)-T_{\mathrm{s}}r_{\mathrm{a}}'(0)$$

例：$y(n) = x(n)\sin(\frac{2}{7}n + \frac{\pi}{6})$ 线性？时不变？

解：当激励为 $a_1x_1(n)+a_2x_2(n)$ 时

响应

$$y(n)=[a_1x_1(n)+a_2x_2(n)]\sin(\frac{2}{7}n+\frac{\pi}{6})=a_1y_1(n)+a_2y_2(n)$$

当激励为 $x(n-n_0)$ 时

响应为 $$x(n-n_0)\sin(\frac{2}{7}n+\frac{\pi}{6})\neq y(n-n_0)$$

所以激励与响应的关系是线性、时变的。

连续系统与离散系统

- 连续变量函数
- 微分方程
- 卷积积分
- 连续傅里叶变换
- 卷积定理
- 拉氏变换
- ……

- 离散序列
- 差分方程
- 卷积和
- 离散时间傅里叶变换
- 卷积定理
- Z变换
- ……

线性时不变离散系统的差分方程的一般形式

对于单输入单输出线性时不变离散系统，输入$e_d(n)$和输出$r_d(n)$的关系可用线性常系数差分方程来描述，有两种表达形式

后向形式的N阶差分方程

$$A_0r_\mathrm{d}(n)+A_1r_\mathrm{d}(n-1)+A_2r_\mathrm{d}(n-2)+\cdots+A_Nr_\mathrm{d}(n-N)$$
$$=B_0e_\mathrm{d}(n)+B_1e_\mathrm{d}(n-1)+B_2e_\mathrm{d}(n-2)+\cdots+B_Me_\mathrm{d}(n-M)$$

前向形式的N阶差分方程:

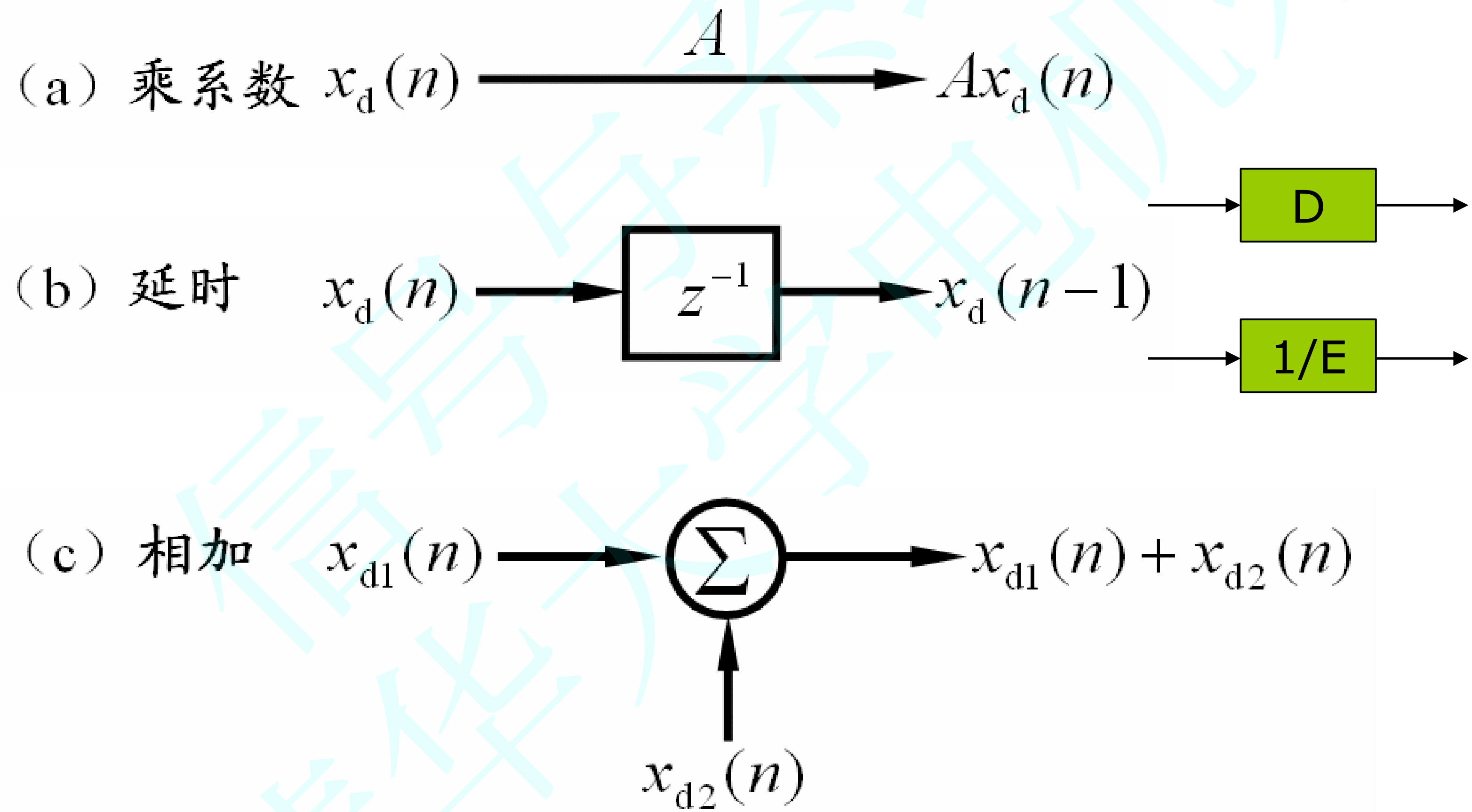
$$A_0r_\mathrm{d}(n+N)+A_1r_\mathrm{d}(n+N-1)+A_2r_\mathrm{d}(n+N-2)+\cdots+A_Nr_\mathrm{d}(n)$$
$$=B_0e_\mathrm{d}(n+M)+B_1e_\mathrm{d}(n+M-1)+B_2e_\mathrm{d}(n+M-2)+\cdots+B_Me_\mathrm{d}(n)$$

求解N阶差分方程需要N个边界条件或初始条件

离散时间系统的框图描述

\#　线性时不变离散时间系统的基本运算和图形表示

线性时不变离散系统的差分方程显示，它包含三种基本运算：



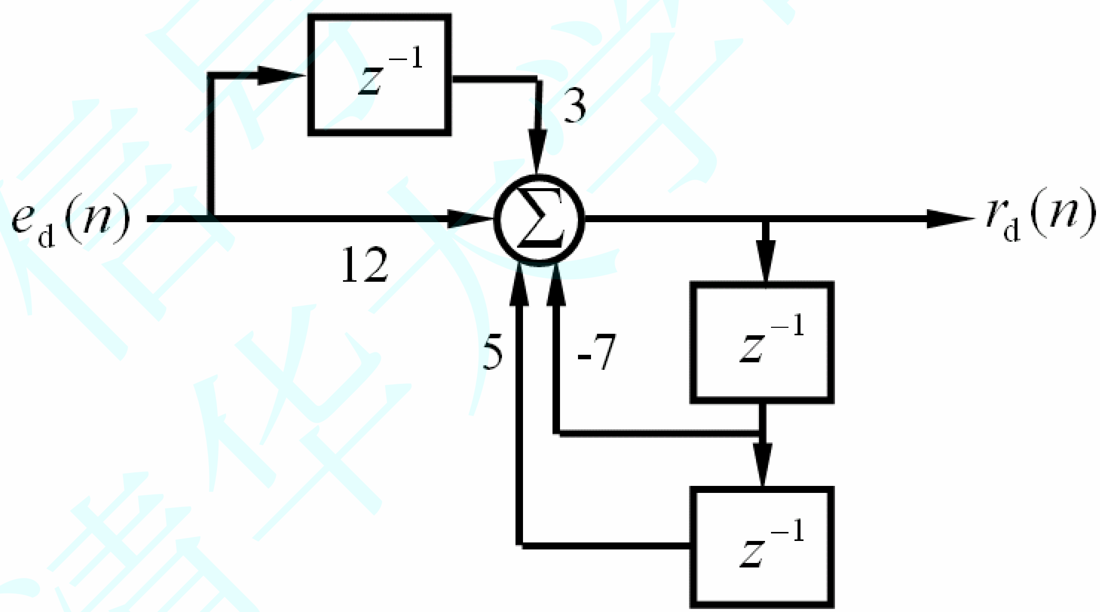
线性时不变离散系统可用基本运算图形组成的框图表示

例 4　用基本运算单元表示以下差分方程所对应的离散系统

$$r_d(n)+7r_d(n-1)-5r_d(n-2)=12e_d(n)+3e_d(n-1)$$

解:

$$r_d(n)=-7r_d(n-1)+5r_d(n-2)+12e_d(n)+3e_d(n-1)$$



线性时不变离散时间系统的时域分析方法

- 时域经典法
  - 齐次解+特解
- 迭代法
  - 系统离散的差分表达方式使得数值迭代成为可能。

$$
\begin{aligned}
&A_0 r_{\mathrm{d}}(n) + A_1 r_{\mathrm{d}}(n-1) + A_2 r_{\mathrm{d}}(n-2) + \cdots + A_N r_{\mathrm{d}}(n-N) \\
&= B_0 e_{\mathrm{d}}(n) + B_1 e_{\mathrm{d}}(n-1) + B_2 e_{\mathrm{d}}(n-2) + \cdots + B_M e_{\mathrm{d}}(n-M)
\end{aligned}
$$

线性常系数差分方程的求解——迭代法

\#　后向形式的 N 阶差分方程

$$A_0 r_d(n) + A_1 r_d(n-1) + A_2 r_d(n-2) + \cdots + A_N r_d(n-N)$$
$$= B_0 e_d(n) + B_1 e_d(n-1) + B_2 e_d(n-2) + \cdots + B_M e_d(n-M)$$

改写为迭代形式

$$r_d(n) = \frac{1}{A_0}\left[B_0 e_d(n) + B_1 e_d(n-1) + B_2 e_d(n-2) + \cdots + B_M e_d(n-M)\right]$$
$$-\frac{1}{A_0}\left[A_1 r_d(n-1) + A_2 r_d(n-2) + \cdots + A_N r_d(n-N)\right]$$

系统当前响应和系统当前激励、前 M 个历史激励和前 N 个历史响应有关。

已知激励序列和 N 个初始状态，如 $r_d(-N), r_d(-N+1), \cdots, r_d(-2), r_d(-1)$，利用迭代公式，可以逐个计算 $r_d(n)$。

系统当前响应 $r_d(n)$ 与系统过去状态有关，还和当前激励和过去激励有关，和未来激励无关，因此是因果的。

前向形式的 N 阶差分方程

$$A_0 r_d(n+N)+A_1 r_d(n+N-1)+A_2 r_d(n+N-2)+\cdots+A_N r_d(n)$$
$$=B_0 e_d(n+M)+B_1 e_d(n+M-1)+B_2 e_d(n+M-2)+\cdots+B_M e_d(n)$$

改写为迭代形式

$$r_d(n+N)=\frac{1}{A_0}\left[B_0 e_d(n+M)+B_1 e_d(n+M-1)+\cdots+B_M e_d(n)\right]$$
$$-\frac{1}{A_0}\left[A_1 r_d(n+N-1)+A_2 r_d(n+N-2)+\cdots+A_N r_d(n)\right]$$

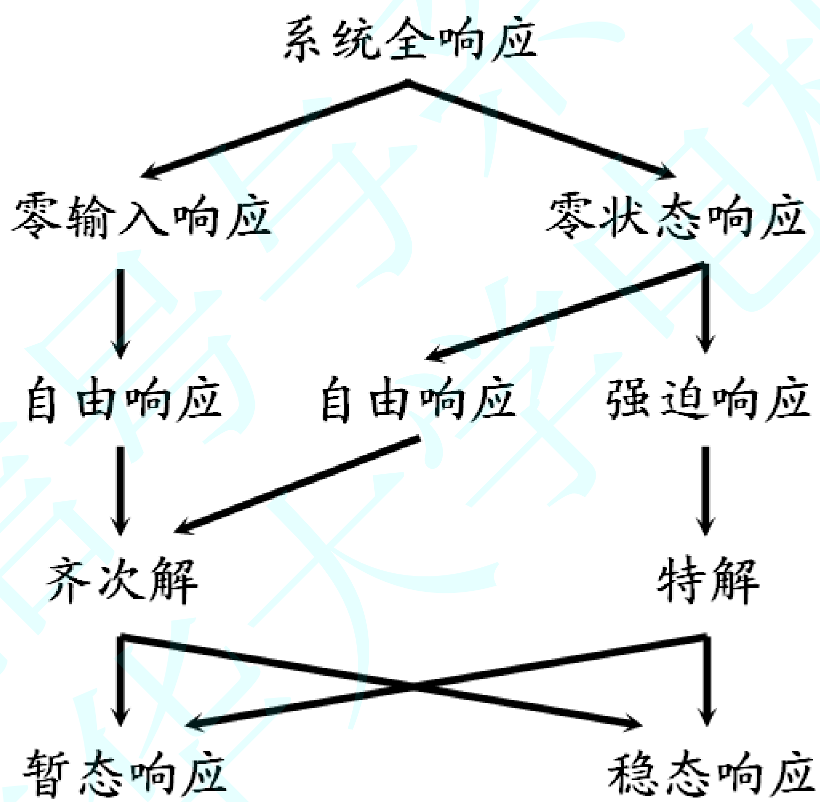
已知激励序列和 N 个初始状态，如 $r_d(0), r_d(1), \cdots, r_d(N-2), r_d(N-1)$，利用迭代公式，可以逐个计算 $r_d(n)$。

如果 $M>N$，系统当前响应 $r_d(n+N)$ 与未来激励有关，是非因果的。

迭代法可以求得系统响应的序列，但不能直接得到系统响应的解析表达式。

线性常系数差分方程的求解——时域经典法

线性差分方程解的构成



（1） 齐次解求解

\# 已知后向差分方程：

$$A_0 r_d(n) + A_1 r_d(n-1) + A_2 r_d(n-2) + \cdots + A_N r_d(n-N)$$
$$= B_0 e_d(n) + B_1 e_d(n-1) + B_2 e_d(n-2) + \cdots + B_M e_d(n-M)$$

令 $e_d(n) = 0$，得齐次差分方程

$$A_0 r_d(n) + A_1 r_d(n-1) + A_2 r_d(n-2) + \cdots + A_N r_d(n-N) = 0$$

\# 已知前向差分方程：

$$A_0 r_d(n+N) + A_1 r_d(n+N-1) + A_2 r_d(n+N-2) + \cdots + A_N r_d(n)$$
$$= B_0 e_d(n+M) + B_1 e_d(n+M-1) + B_2 e_d(n+M-2) + \cdots + B_M e_d(n)$$

$$A_0 r_d(n+N) + A_1 r_d(n+N-1) + A_2 r_d(n+N-2) + \cdots + A_N r_d(n) = 0$$

\# 特征方程和特征根

$$A_0 \lambda^N + A_1 \lambda^{N-1} + A_2 \lambda^{N-2} + \cdots + A_{N-1}\lambda + A_N = 0 \qquad \boxed{A\lambda^n}$$

特征方程的 N 个根称为差分方程的特征根。

时域经典法

（一）、齐次解的求解

特征方程 → 特征根 → 解的形式 → 待定系数

连续时间系统：

微分方程

$$C_0\frac{d^n}{dt^n}r(t)+C_1\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}r(t)+\cdots+C_{n-1}\frac{d}{dt}r(t)+C_nr(t)$$
$$=E_0\frac{d^m}{dt^m}e(t)+E_1\frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}}e(t)+\cdots+E_{m-1}\frac{d}{dt}e(t)+E_me(t)$$

↓

$$C_0\lambda^n+C_1\lambda^{n-1}+\cdots+C_{n-1}\lambda+C_n=0$$

↓

特征根$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\ldots\ \lambda_n$

↓

$$y(t)=\sum_{i=0}^{n}c_ie^{\lambda_it}$$

↓

根据初值确定系数

离散时间系统：

差分方程

$$\sum_{k=0}^{N}a_ky(n-k)=\sum_{r=0}^{M}b_rx(n-r)$$

↓

$$a_0\lambda^N+a_1\lambda^{N-1}+\cdots+a_{N-1}\lambda+a_N=0$$

↓

特征根$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\ldots\ \lambda_N$

↓

$$y(n)=\sum_{i=0}^{N}c_i\lambda_i^n$$

↓

根据初值确定系数

线性常系数差分方程齐次解的形式和特征根的关系

特征根 λ 的形式	齐次解的形式（A,B,C,D,A_i,B_i,C_i,D_i 为待定系数）
λ 为单实根	$A\lambda^n$
λ 为 k 阶重实根	$A_1\lambda^n + A_2 n\lambda^n + A_3 n^2\lambda^n + \cdots + A_k n^{k-1}\lambda^n$
$\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta = \rho \mathrm{e}^{\pm j\theta}$ 一对共轭复根	$A\rho^n \mathrm{e}^{j\theta n} + B\rho^n \mathrm{e}^{-j\theta n}$ 或： $C\rho^n \cos\theta n + D\rho^n \sin\theta n$
$\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta = \rho \mathrm{e}^{\pm j\theta}$ k 阶共轭复根	$(A_1 + A_2 n + \cdots + A_{k-1} n^{k-2} + A_k n^{k-1})\rho^n \mathrm{e}^{j\theta n}$ $+(B_1 + B_2 n + \cdots + B_{k-1} n^{k-2} + B_k n^{k-1})\rho^n \mathrm{e}^{-j\theta n}$ 或： $(C_1 + C_2 n + \cdots + C_{k-1} n^{k-2} + C_k n^{k-1})\rho^n \cos\theta n$ $+(D_1 + D_2 n + \cdots + D_{k-1} n^{k-2} + D_k n^{k-1})\rho^n \sin\theta n$

（2） 典型激励函数对应的特解的形式

激励函数 $e_{\mathrm{d}}(n)$	特解形式（A,B,A_i,B_i 为待定系数）
E（常数）	A
n^M	$A_m n^M + A_{m-1} n^{M-1} + A_{m-2} n^{M-2} + \cdots + A_1 n + A_0$
η^n，η 实数 不是方程特征根	$A\eta^n$
η^n，η 实数 是方程 k 阶特征根	$A_0\eta^n + A_1 n\eta^n + A_2 n^2\eta^n + \cdots + A_k n^k \eta^n$
$\cos\theta n$ 或 $\sin\theta n$ $e^{\pm j\theta}$ 不是方程特征根	$A\cos\theta n + B\sin\theta n$
$\cos\theta n$ 或 $\sin\theta n$，$e^{\pm j\theta}$ 是方程 k 阶共轭特征根	$A_0 \cos\theta n + A_1 n\cos\theta n + \cdots + A_k n^k \cos\theta n$ $+ B_0 \sin\theta + B_1 n\sin\theta n + \cdots + B_k n^k \sin\theta n$
$\rho^n \cos\theta n$ 或 $\rho^n \sin\theta n$ $\rho e^{\pm j\theta}$ 不是方程特征根	$A\rho^n \cos\theta n + B\rho^n \sin\theta n$
$\rho^n \cos\theta n$ 或 $\rho^n \sin\theta n$ $\rho e^{\pm j\theta}$ 是方程 k 阶共轭特征根	$A_0\rho^{\sigma} \cos\theta n + A_1 n\rho^{\sigma} \cos\theta n + \cdots + A_k n^k \rho^{\sigma} \cos\theta n$ $+ B_0\rho^{\sigma} \sin\theta n + B_1 n\rho^{\sigma} \sin\theta n + \cdots + B_k n^k \rho^{\sigma} \sin\theta n$

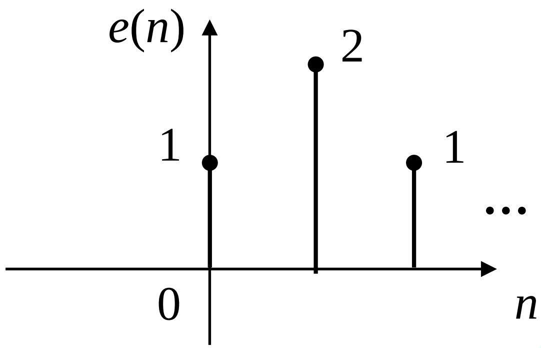
初始状态 $r_\mathrm{d}(-1), r_\mathrm{d}(-2), \cdots r_\mathrm{d}(-N)$

- **初始状态指激励到达前时段的对系统响应有影响的系统状态。**

$$A_0 r_\mathrm{d}(n) + A_1 r_\mathrm{d}(n-1) + A_2 r_\mathrm{d}(n-2) + \cdots + A_N r_\mathrm{d}(n-N)$$
$$= B_0 e_\mathrm{d}(n) + B_1 e_\mathrm{d}(n-1) + B_2 e_\mathrm{d}(n-2) + \cdots + B_M e_\mathrm{d}(n-M)$$

- 对于N阶系统，当前系统状态与前N个历史的系统状态有关，故求解N阶差分方程需要N个初始状态。
  - 当激励是在$n = n_0$时刻开始作用时，初始状态指$r_d(n_0-1)$，$r_d(n_0-2)$，…，$r_d(n_0-N)$。
  - 当激励是在$n = 0$时刻开始作用时，初始状态指$r_d(-1)$, $r_d(-2)$，…，$r_d(-N)$。
- 零初始状态则指N个初始状态全部为零。
- 零初始状态不能理解为激励到达前的无穷时段上都有$r_\mathrm{d}(n) = 0$

零初始状态不能理解为激励到达前的无穷时段上都有$r_{\mathrm{d}}(n) = 0$



$n < 0$ 时，$e(n)=0$

$$r(n) + r(n-1) = e(n+1)$$

$$r(n) + r(n-1) = e(n)$$

（3） 全解求解

\# 全解形式 = 齐次解形式 + 特解

\# 给定的 N 个初始状态（或边界条件）代入全解形式，可得 N 个代数方程，由此确定全解形式中的 N 个待定系数，求得全解。

\# 差分方程没有初始条件跳变问题。

（4） 零输入响应

初始条件：$r_{\mathrm{d}}(-1), r_{\mathrm{d}}(-2), \cdots r_{\mathrm{d}}(-N)$

- 齐次解形式（输入为0）
- 代入边界条件，求出待定系数

边界条件：$r_d(0), r_d(1),\ldots,r_d(N-1)$

（5） 零状态响应

- 特解+齐次解形式 求解过程与全解求解一样
- 代入零状态边界条件，求出待定系数

$$r(n) = \sum_{i=0}^{N} c_i \lambda_i^n \quad + \text{特解}$$

激励通常都是n>0以后施加的，这意味着上述解的表达式也是在n>0以后才成立。

例 $\left.\begin{array}{l} y(n)-0.9y(n-1)=0.05u(n) \\ \text{且}\ y(-1)=0 \end{array}\right\}$ 求全解。

解答

$r-0.9=0 \quad r=0.9$

齐次解

$y_h(n)=C(0.9)^n$

特解

$y_p(n)=D$

代入原方程求特解 $D(1-0.9)=0.05 \quad (n\geq 0)$

所以 $D=0.5$

全解形式

$$y(n)=y_h(n)+y_p(n)=C(0.9)^n+0.5$$

由边界条件定系数

$$y(n)-0.9y(n-1)=0.05u(n)$$

由 $y(-1)=0$ 迭代出

$$n=0 \qquad y(0)=0.05+0.9y(-1)=0.05$$

代入 解 $y(n)=C(0.9)^n+0.5$，得

$$y(0)=0.05=C+0.5$$

所以 $C=-0.45$

所以 $y(n)=-0.45*(0.9)^n+0.5 \qquad n\ge 0$

讨论

$$y(n)-0.9y(n-1)=0.05u(n) \quad \cdots\cdots\cdots \text{❶}$$

$$y(n)-0.9y(n-1)=0.05 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{❷}$$

全 解 形 式 $$\boxed{y(n)=C(0.9)^n+0.5}$$

❷ 成立区间：**(-∞, +∞)**，边界条件可以任意取。***y*(0) or *y*(-1)**

$$y(0)-0.9y(-1)=0.05$$

❶ 成立区间：**[0, +∞)**，边界条件取 ***y*(0)**

$$y(0)-0.9y(-1)=0.05u(0)$$

[1]《差分方程的边界条件和离散系统的初始状态》朱玲赞

[2]《用初始条件直接求解常系数线性差分方程》邓丽华

单位样值响应

激励信号为单位样值函数时的系统零状态响应称为离散系统的单位样值响应，用$h_d(n)$表示。有

$$A_0 h_d(n) + A_1 h_d(n-1) + A_2 h_d(n-2) + \cdots + A_N h_d(n-N)$$
$$= B_0 \delta_d(n) + B_1 \delta_d(n-1) + B_2 \delta_d(n-2) + \cdots + B_M \delta_d(n-M)$$

观察：$n > M$时，激励项恒为零。

求解方法：转化为$n > M$区间的齐次方程求解

(1) 根据零初始条件和单位样值激励，进行M+1步迭代计算，依次求得 $h_d(0), h_d(1), \cdots h_d(M)$

(2) 以这最新的 $h_d(M), h_d(M-1), \cdots h_d(M-N+1)$ 个点的状态作为新的初始条件，求解系统的齐次解。

例 6　求以下差分方程的单位样值响应。

$$r_d(n)-5r_d(n-1)+6r_d(n-2)=e_d(n)-3e_d(n-2)$$

解：单位样值响应满足关系

$$h_d(n)-5h_d(n-1)+6h_d(n-2)=\delta_d(n)-3\delta_d(n-2)$$

其迭代关系为

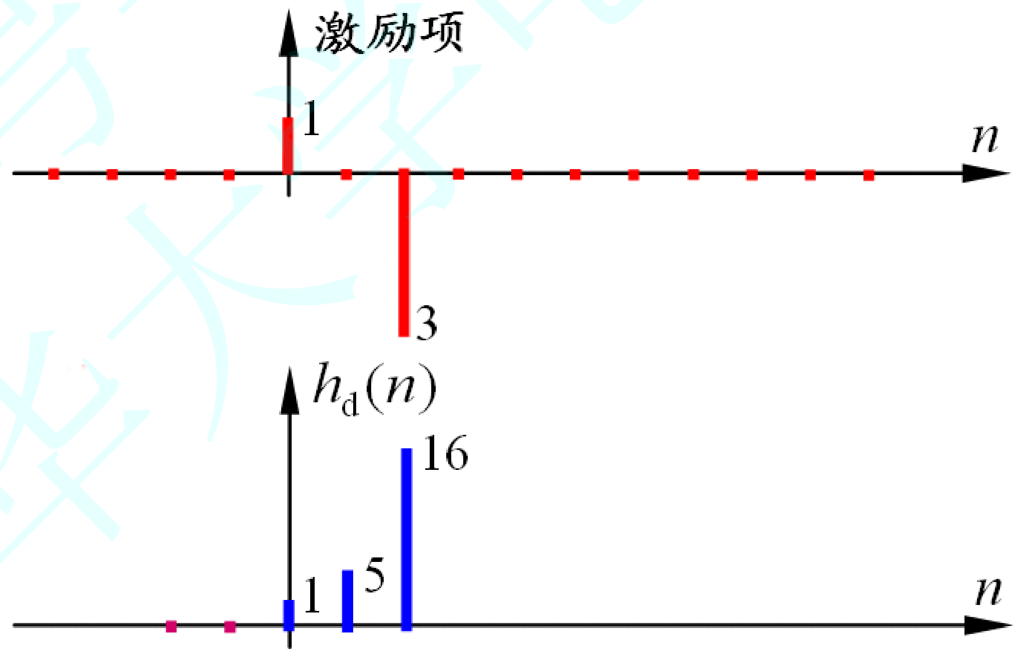
$$h_d(n)=\delta_d(n)-3\delta_d(n-2)+5h_d(n-1)-6h_d(n-2)$$

以零初始条件 $h_d(-1)=0$ 和 $h_d(-2)=0$ 进行迭代，得

$$h_d(0)=1$$

$$h_d(1)=5$$

$$h_d(2)=16$$



在 $n \ge 3$ 区间激励项为零，方程为齐次方程。

以 $h_d(1)=5$ 和 $h_d(2)=16$ 为初始条件，求解齐次方程

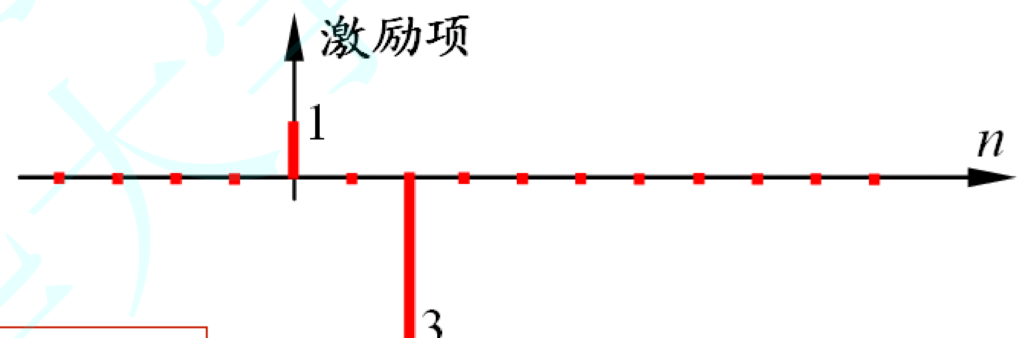
$$h_d(n)-5h_d(n-1)+6h_d(n-2)=0 \qquad n\ge 3$$

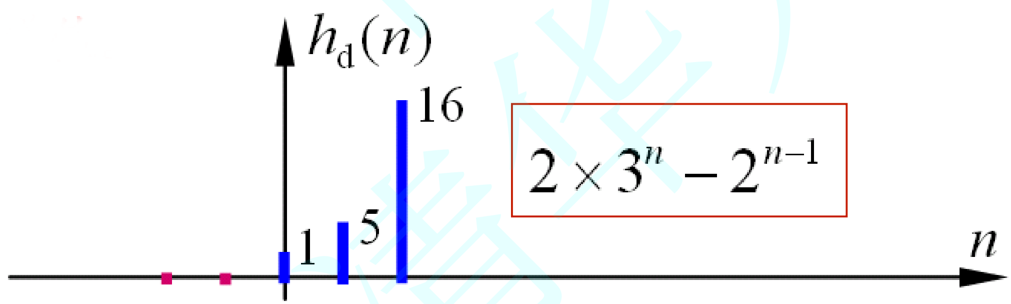
得 $$h_d(n)=2\times 3^n-2^{n-1} \qquad n\ge 3$$

系统单位样值响应为

$$h_d(n)=\delta_d(n)+5\delta_d(n-1)+16\delta_d(n-2)+(2\times 3^n-2^{n-1})u_d(n-3)$$

$$=\delta_d(n)+(2\times 3^n-2^{n-1})u_d(n-1)$$





例 6 求以下差分方程的单位样值响应。

$$r_d(n)-5r_d(n-1)+6r_d(n-2)=e_d(n)-3e_d(n-2)$$

多个激励

只考虑 $e_d(n)$ 激励

$$\alpha_1=2 \quad \alpha_2=3 \qquad h_1(n)=C_1 2^n+C_2 3^n$$

$$h(0)=1,\quad h(-1)=0,\cdots \qquad C_1=-2,\quad C_2=3$$

$$\boxed{h_1(n)=(3^{n+1}-2^{n+1})u(n)}$$

只考虑 $-3e_d(n-2)$ 激励

$$h_2(n)=-3h_1(n-2)$$
$$=-3[3^{n-1}-2^{n-1}]u(n-2)$$

利用LTI

$$h(n)=h_1(n)+h_2(n)$$
$$=(3^{n+1}-2^{n+1})u(n)-3(3^{n-1}-2^{n-1})u(n-2)$$

例: 已知因果系统是一个二阶常系数差分方程，并已知当 $x(n)=u(n)$ 时的零状态响应为:

$$g(n)=(2^n+3\times5^n+10)u(n)$$

（1）求系统单位样值响应

（2）若系统为零状态，求此二阶差分方程

解

$$g(n)=(2^n+3\times 5^n+10)u(n)$$

$$\because \delta(n)=u(n)-u(n-1)$$

$$\therefore h(n)=g(n)-g(n-1)$$

$$=14\delta(n)+(\frac{1}{2}\times 2^n+\frac{12}{5}\times 5^n)u(n-1)$$

由 g(n) 求h(n)

设此二阶系统的差分方程的一般表达式为：

$$y(n)+a_1y(n-1)+a_2y(n-2)=\sum_{r=0}^{?}b_rx(n-r)$$

$$\alpha^2+a_1\alpha+a_2=0$$

特征根： $\alpha_1=2 \quad \alpha_2=5$

$$\alpha^2+a_1\alpha+a_2$$
$$=(\alpha-2)(\alpha-5)$$
$$=\alpha^2-7\alpha+10$$

$$\therefore a_1=-7 \quad a_2=10$$

$$h(n)-7h(n-1)+10h(n-2)=b_0\delta(n)+b_1\delta(n-1)+b_2\delta(n-2)+\cdots$$

$$h(n)=14\delta(n)+(\frac{1}{2}\times 2^n+\frac{12}{5}\times 5^n)u(n-1)$$

$$h(0)=14 \quad h(1)=13 \quad h(2)=62$$

$$n=0 \quad h(0)=14 \quad b_0=14$$

$$n=1 \quad h(1)=13 \quad b_1=13-98=-85$$

$$n=2 \quad h(n)=62 \quad b_2=62-7\times 13+10\times 14=111$$

$$n\geq 3,\ b_i=0$$

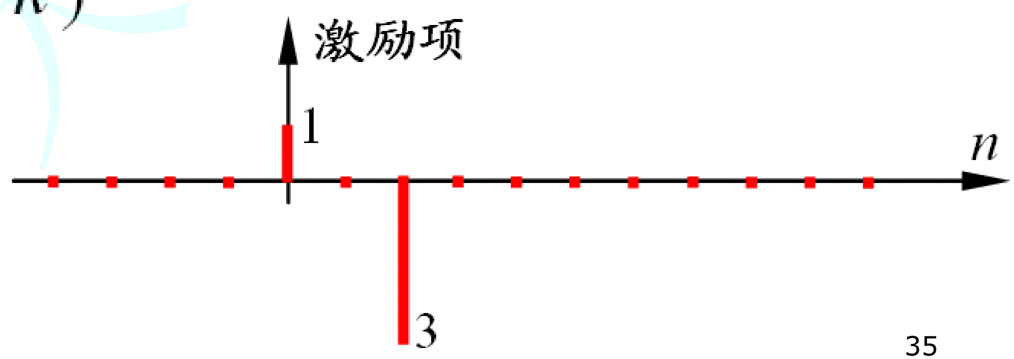
$$\boxed{\begin{aligned}\therefore \quad & y(n)-7y(n-1)+10y(n-2)\\ &=14x(n)-85x(n-1)+111x(n-2)\end{aligned}}$$

卷积和

- 卷积和概念的引出
  - 已知线性时不变离散时间系统的单位样值响应$h_d(n)$，对于任意系统激励$e_d(n)$，求系统的零状态响应$r_d(n)$

$e_d(n)$是否能够分解成单位样值信号的叠加？

$$e_d(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}e_d(k)\delta_d(n-k)$$



$$e_d(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}e_d(k)\delta_d(n-k)$$

每个样值分量为$e_d(k)\delta_d(n-k)$

激励$\delta_d(n)$产生响应$h_d(n)$

激励$\delta_d(n-k)$产生响应$h_d(n-k)$

激励$e_d(k)\delta_d(n-k)$产生响应$e_d(k)h_d(n-k)$

$$r_d(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}e_d(k)h_d(n-k)$$

定义两序列$e_d(n)$和$h_d(n)$的卷积和为

$$r_d(n)=e_d(n)*h_d(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}e_d(k)h_d(n-k)$$

线性时不变离散时间系统在激励$e_d(n)$作用下的零状态响应$r_d(n)$为激励$e_d(n)$与单位样值响应$h_d(n)$的**卷积和**。

$$r_d(n) = e_d(n) * h_d(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e_d(k) h_d(n-k)$$

当系统为因果系统时，卷积和的计算式可简化为

$$r_d(n) = e_d(n) * h_d(n)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{n} e_d(k) h_d(n-k)$$

卷积和求解——图解法

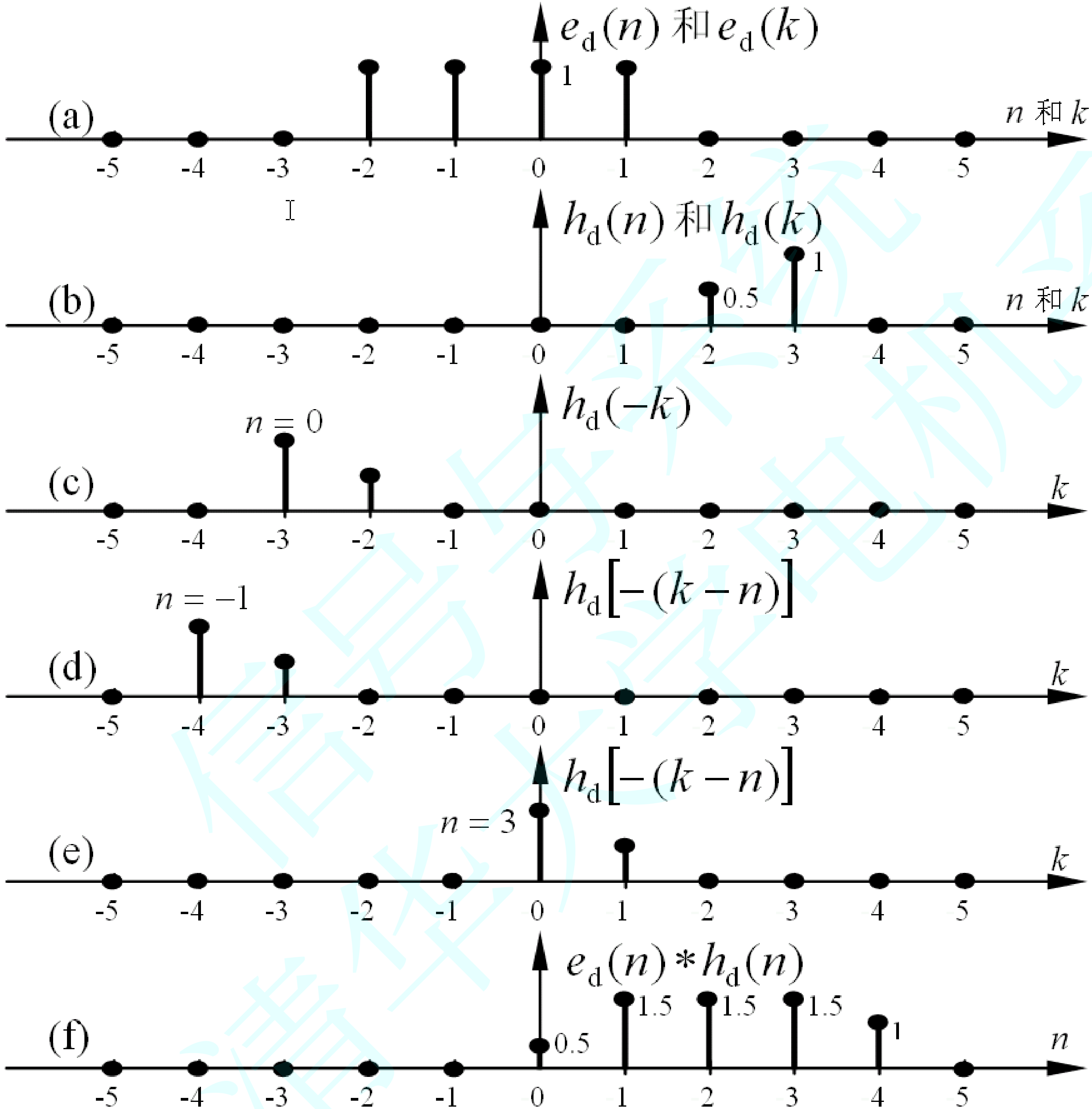
改写卷积和形式

$$r_{\mathrm{d}}(n)=e_{\mathrm{d}}(n)*h_{\mathrm{d}}(n)$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}e_{\mathrm{d}}(k)h_{\mathrm{d}}\left[-(k-n)\right]$$

卷积和的运算包括：反褶、移位、逐点乘、求和。

例 7　图解法求信号 $e_{\mathrm{d}}(n)$ 和 $h_{\mathrm{d}}(n)$ 的卷积和。



$e_d(n)$ 和 $e_d(k)$
(a)
n 和 k
$h_d(n)$ 和 $h_d(k)$
(b)
0.5
n 和 k
$h_d(-k)$
(c)
$n=0$
k
$h_d[-(k-n)]$
(d)
$n=-1$
k
$h_d[-(k-n)]$
(e)
$n=3$
k
$e_d(n)*h_d(n)$
(f)
0.5
1.5
1.5
1.5
n

卷积和求解——列表法

激　励	响　应					
$\delta_d(n)$	$h_d(0)$	$h_d(1)$	$h_d(2)$	$\cdots$	$h_d(m)$	$\cdots$
$e_d(0)\delta_d(n)$	$e_d(0)h_d(0)$	$e_d(0)h_d(1)$	$e_d(0)h_d(2)$	$\cdots$	$e_d(0)h_d(m)$	$\cdots$
$e_d(1)\delta_d(n-1)$		$e_d(1)h_d(0)$	$e_d(1)h_d(1)$	$\cdots$	$e_d(1)h_d(m-1)$	$\cdots$
$e_d(2)\delta_d(n-2)$			$e_d(2)h_d(0)$	$\cdots$	$e_d(2)h_d(m-2)$	$\cdots$
$\vdots$					$\vdots$	$\vdots$
$e_d(k)\delta_d(n-k)$					$e_d(m)h_d(0)$	$\cdots$
$\vdots$						$\vdots$
$e_d(n)$ $\sum_{k=-\infty}^{n} e_d(k)\delta_d(n-k)$	$r_d(0)=$ 上格求和	$r_d(1)=$ 上格求和	$r_d(2)=$ 上格求和	$\cdots$	$r_d(m)=$ 上格求和	$\cdots$

例8：列表法求信号$e_d(n)$和$h_d(n)$的卷积和

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	---
$h_d(n)$	2	3	5	1	0	0	0	0	0	0	---
$e_d(n)$	3	2	2	4	0	0	0	0	0	0	---
$3\delta_d(n)$	6	9	15	3	0	0	0	0	0	0	---
$2\delta_d(n-1)$		4	6	10	2	0	0	0	0	0	---
$2\delta_d(n-2)$			4	6	10	2	0	0	0	0	---
$4\delta_d(n-3)$				8	12	20	4	0	0	0	---
$r_d(n)$	6	13	25	27	24	22	4	0	0	0	---

卷积和的性质

（1） 卷积代数

\# 交换律: $f_{\mathrm{d1}}(n)*f_{\mathrm{d2}}(n)=f_{\mathrm{d2}}(n)*f_{\mathrm{d1}}(n)$

\# 分配律: $f_{\mathrm{d1}}(n)*\left[f_{\mathrm{d2}}(n)+f_{\mathrm{d3}}(n)\right]=f_{\mathrm{d1}}(n)*f_{\mathrm{d2}}(n)+f_{\mathrm{d1}}(n)*f_{\mathrm{d3}}(n)$

\# 结合律: $\left[f_{\mathrm{d1}}(n)*f_{\mathrm{d2}}(n)\right]*f_{\mathrm{d3}}(n)=f_{\mathrm{d1}}(n)*\left[f_{\mathrm{d2}}(n)*f_{\mathrm{d3}}(n)\right]$

（2） 与单位样值函数的卷积和

$$f_{\mathrm{d}}(n)*\delta_{\mathrm{d}}(n)=f_{\mathrm{d}}(n)$$

$$f_{\mathrm{d}}(n)*\delta_{\mathrm{d}}(n-m)=f_{\mathrm{d}}(n-m)$$

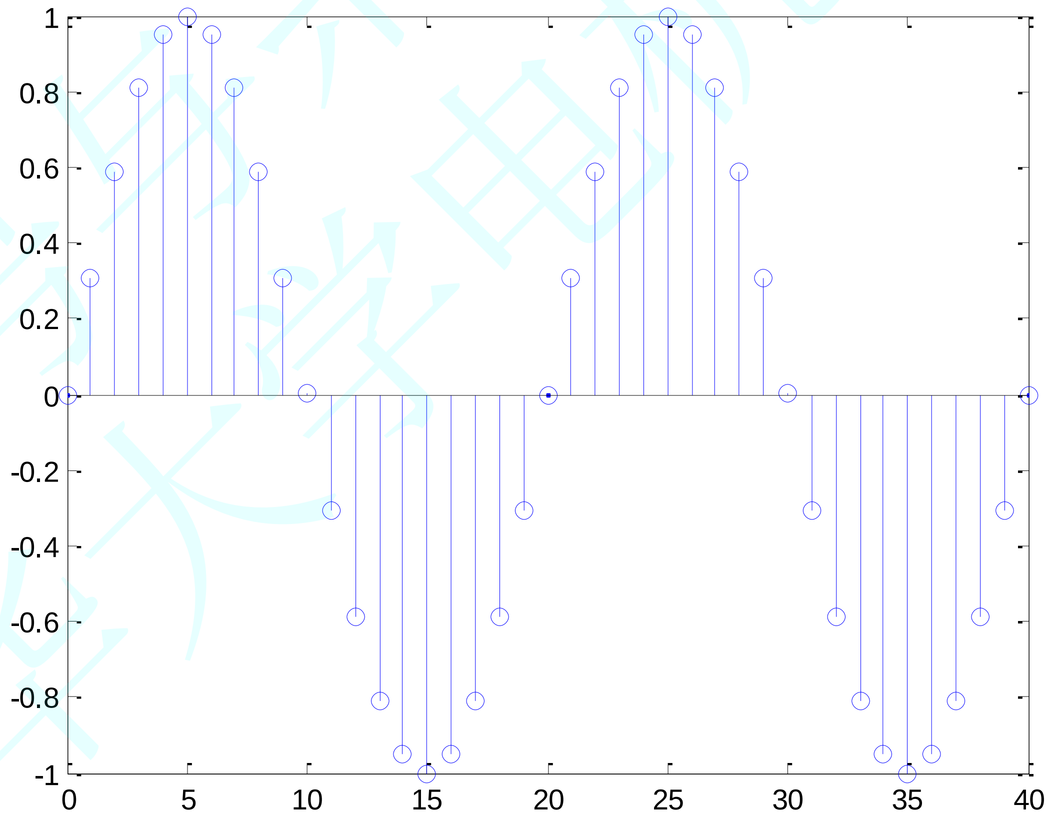
$$f_{\mathrm{d}}(n-m)*\delta_{\mathrm{d}}(n-k)=f_{\mathrm{d}}(n-m-k)$$

Matlab相关函数介绍

二 离散系统常用函数

与plot函数类似，离散点的画图可由stem函数完成。

```
n=[0:1:40];
x=sin(pi*n/10);
stem(n,x);
```



1 卷积和 $y(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}h(m)x(n-m)$

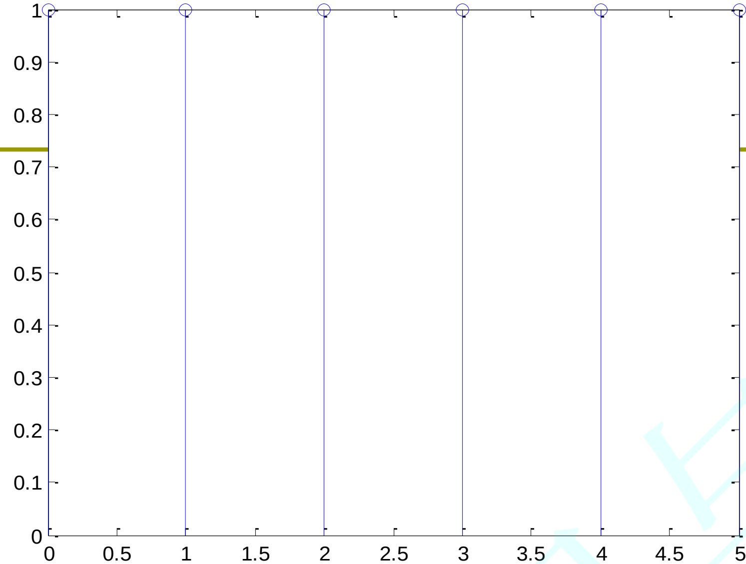
函数conv(h,x)用来计算h(n)与x(n)的卷积和。若h(n)的长度为N_h，x(n)的长度为N_x，那么卷积的结果序列长度为N_h+N_x-1。

例：x(n)=1, 0≤n ≤5；n为其他取值时，x(n)=0。

计算卷积和y(n)=x(n)*x(n)。

解：

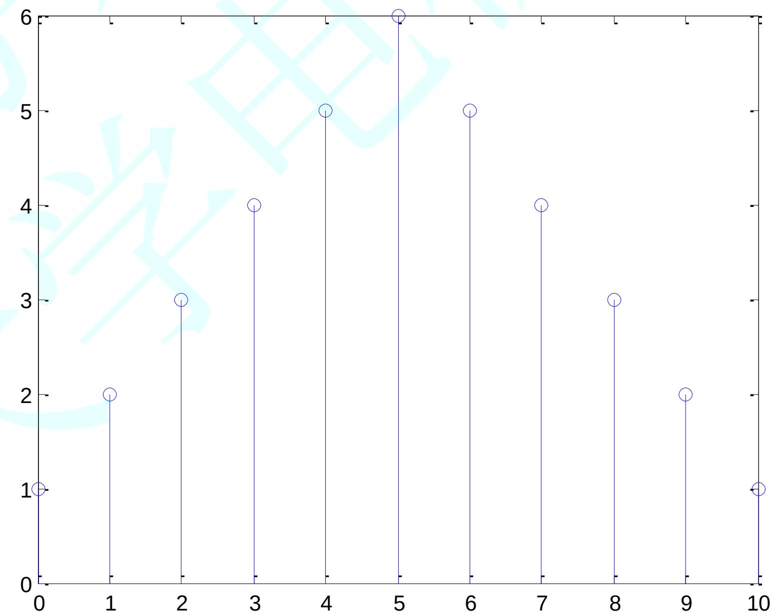
```
n=[0:1:5]; x=ones(1,6);   stem(n,x); pause;
n=[0:1:10]; y=conv(x,x);    stem(n,y);
```



0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1
0 0.5 1 1.5 2 2.5 3 3.5 4 4.5 5

x(n)

y(n)



0 1 2 3 4 5 6
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

2 求差分方程

对于LTI系统的差分方程

$$\sum_{k=0}^{K} a_k y[n-k] = \sum_{m=0}^{M} b_m x[n-m]$$

函数filter(b,a,x)可以很方便地求解出y(n)。

例如：y(n)+2y(n-2)=x(n)-3x(n-1)

首先，写出a,b:

a=[1 0 2]; b=[1 -3];

对于x=[1 1 1 1 1]的解y(n)为

y=filter(b,a,x);

需要注意的是:

- filter函数的计算结果的序列长度与输入信号x(n)在同一范围，长度相等。
- filter函数计算的是零状态响应，初值都默认为0。

filter(b,a,x,zi)