一.计算及填空

已知：$G(\omega)=\mathscr{F}\left[g(t)\right]$，$f(t)=g(t)\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT_s)$，求：$F(\omega)=\mathscr{F}\left[f(t)\right]$

解析：本题考查傅里叶变换的性质。

$$F(\omega)=\mathscr{F}\left[f(t)\right]=\mathscr{F}\left[g(t)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT_s)\right]=\frac{1}{2\pi}G(\omega)*\left(\frac{2\pi}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega-k\frac{2\pi}{T_s}\right)\right)=\frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty}G\left(\omega-k\frac{2\pi}{T_s}\right)$$

知识点：

1. 傅里叶变换频率卷积特性

$$f_1(t)f_2(t)\leftrightarrow\frac{1}{2\pi}F_1(\omega)*F_2(\omega)$$

2. 周期冲激序列的傅里叶变换

$$\delta_p(t)=\sum_{t=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s)\leftrightarrow\Delta_p(\omega)=\frac{2\pi}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-k\frac{2\pi}{T_s})$$

3. 与冲激信号的卷积

$$f(t)*\delta(t-t_0)=f(t-t_0)$$

区别：

延拓周期信号的傅里叶变换

$$f_p(t)=\sum_{t=-\infty}^{\infty}f(t-nT_s)=f(t)*\delta_p(t)$$

$$\updownarrow$$

$$\begin{aligned}F_p(\omega)&=F(\omega)\varDelta_p(\omega)\\&=F(\omega)\omega_1\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-k\omega_1)\\&=\omega_1\sum_{k=-\infty}^{\infty}F(\omega)\big|_{\omega=k\omega_1}\delta(\omega-k\omega_1)\end{aligned}$$

一.计算及填空

已知信号的拉普拉斯变换为 $F(s)=\dfrac{1}{(s-1)(s^2+1)}$ ，求该信号的傅叶变换$F(\omega)$

解析：不存在。$F(s)$ 有一个极点 $s=1$ ，收敛域不包含虚轴，

$f(t)$ 的傅里叶变换不存在

知识点：拉普拉斯变换与傅里叶变换的关系

基于信号拉普拉斯变换和傅立叶变换的关系，一些信号的傅立叶变换可以从拉普拉斯变换求得，条件和方法如下：

（1）如果 $f(t)$ 是非因果信号，则 $f(t)$ 的傅立叶变换的积分区间是 $(-\infty,\infty)$，而 $f(t)$ 的拉普拉斯变换的积分区间是 $(0_-,\infty)$，此时两者没有关系，不能由 $f(t)$ 的拉普拉斯变换求其傅立叶变换。

（2）如果 $f(t)$ 是因果信号，则 $f(t)$ 的傅立叶变换和拉普拉斯变换的积分区间都是 $(0_-,\infty)$，此时能否由 $f(t)$ 的拉普拉斯变换求其傅立叶变换，取决于 $f(t)$ 拉普拉斯变换的收敛域。当 $f(t)$ 的拉普拉斯变换 $F(s)$ 的收敛域包含虚轴时，虚轴上的拉普拉斯变换就是傅立叶变换，直接由 $F(s)$ 做变量替换求得

$$F(\omega)=F(s)\big|_{s=j\omega} \qquad (6-27)$$

（3）当 $F(s)$ 的收敛域不包含虚轴时，$f(t)$ 的傅立叶变换不存在。

一.计算及填空

已知一离散时间 LTI 系统的单位阶跃响应 $g(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^n u_d(n)$（零状态响应），求该系统的单位样值响应 $h_d(n)$

解析：

$h_d(n)=h_d(n)*\delta_d(n)=h_d(n)*u_d(n)-h_d(n)*u_d(n-1)=h_d(n)*u_d(n)-h_d(n)*u_d(n)*\delta_d(n-1)$

$=g(n)-g(n-1)=\delta_d(n)-\frac{1}{2^n}u(n-1)$。

突破点：

$$\delta_d(n)=u_d(n)-u_d(n-1)$$

二.简答题

（1） 信号 $f(t)=t^3u(t)$ 是否奇异信号，什么是奇异信号？

解析：3 阶导数出现跳变点，给定信号是奇异信号；当信号和信号的各阶导数存在不连续点时，该信号为奇异信号。

（2） "对于一个二阶系统，如果系统初始状态存在跳变，指在激励开始作用的 t_0 时刻，由于激励的作用，导致系统响应在 t_0 时刻发生跳变，$r(t_{0+})\neq r(t_{0-})$"。指出以上表述中存在的错误。

解析：对于 n 阶系统 n 个初始状态 $r(t_0), r'(t_0), \cdots, r^{(n-1)}(t_0)$ 中，只要有一个存在跳变，即为初始状态跳变。因此，对于一个二阶系统，由于激励得作用，系统响应再 t_0 时刻发生跳变，$r(t_{0+})\neq r(t_{0-})$ 或 $r'(t_{0+})\neq r'(t_{0-})$

二.简答题

（4） 信号 $f(t)=\delta(t)+3\delta(t-2)$，其直流分量的幅值是多少？直流分量的密度幅值是多少？

解析：对于非周期信号，其每个频率分量的幅值都是无穷小或0，因此直流分量为0，其直流分量的密度幅值 $F(0)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\mathrm{d}t=4$。

知识点：傅里叶变换的概念（起源）

可见，一个绝对可积的非周期信号可分解为频率连续分布的幅值为无穷小的频率分量的叠加。因为各频率分量的幅值为无穷小，因此用幅值谱描述信号的频谱特性有了困难。对于一个确定的能量信号，它存在确定的频谱分布，为了描述这一频谱分布，引出信号频谱密度的概念。

傅里叶变换

三.判断题

（4） （√ ）一个系统的单位冲激响应为$h(t)=\mathrm{Sa}(t-t_0)u(t)$，该系统是因果系统。

知识点：因果系统判断—响应与激励的关系

系统的冲激响应$h(t)$，在$t<0$的条件下，$h(t)=0$，则系统为因果系统。

区别：

$r(t)=e(t+1)$

$r(1)=e(2)$,与未来激励有关

错误判断：

$t_0<0$时，非因果

Sa不是激励信号

三.判断题

（5）　（ ✕ ）一个连续周期信号 $f_p(t)$ 的最高频率分量的频率为 f_m，以 $f_s = 2f_m$ 的抽样频率对它进行抽样，由此抽样所得的离散信号一定可以不失真地恢复 $f_p(t)$。

知识点：临界混叠

图 5－16 所示是对余弦信号 $\cos\omega_0 t$ 进行冲激抽样的情况，抽样角频率为 $\omega_s = 2\omega_0$，满足抽样定理的临界条件。然而，$\cos\omega_0 t$ 的频谱是冲激函数，临界混叠造成了两个冲激脉冲的重合，混叠结果是两个冲激函数相加，冲激函数的强度加倍。尽管如此，混叠后的频谱依然完整地保留了原信号频谱的信息。

图 5－17 所示是对正弦信号 $\sin\omega_0 t$ 进行冲激抽样的情况，抽样角频率为 $\omega_s = 2\omega_0$，满足抽样定理的临界条件。然而，此时从时域看，抽样点的信号值全部为零，因此抽样结果恒为零；从频域看，$\sin\omega_0 t$ 的频谱是纯虚冲激函数，临界混叠造成了两个纯虚冲激脉冲抵消，频谱恒为零，丢失了原信号的所有信息。

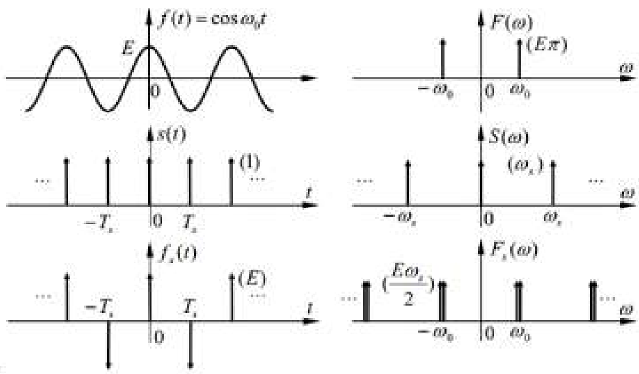


图 5－16 余弦信号的时域抽样及其傅立叶变换

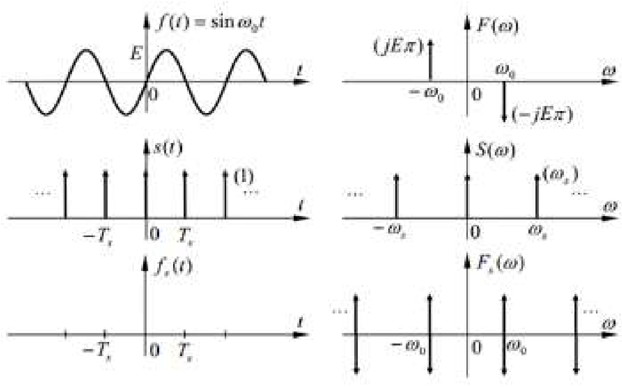


图 5－17 正弦信号的时域抽样及其傅立叶变换

四.计算题（6分）

四（6 分）、已知连续信号 $f(t)$ 的傅立叶变换 $|F(\omega)|$ 如下图所示，最高频率 ω_m。现在需要对 $f(t)$ 进行抽样，并期望抽样后的离散序列能够准确表示 ω_e 以下所有频率的频率分量，试问抽样频率 ω_s 应满足什么条件。

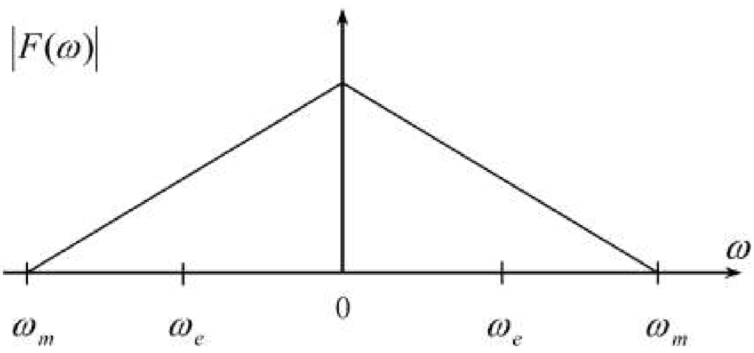
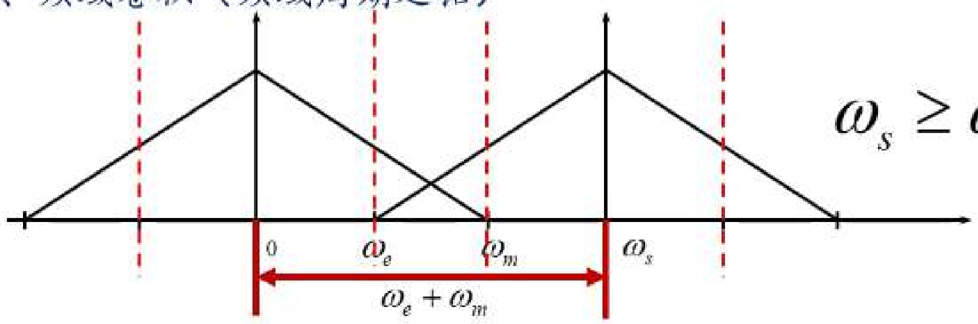


图 1

解析：时域抽样、频域卷积（频域周期延拓）



$$\omega_s \geq \omega_e + \omega_m$$

五.计算题（6分）

五（6分）、已知$F(\omega)=\mathscr{F}\left[f(t)\right]=\dfrac{E\tau}{2}Sa^2(\dfrac{\omega\tau}{4})$，求信号$g(t)=\int_{-\infty}^{t}f(\sigma)\mathrm{d}\sigma$的直流分量的幅值。

解析：利用傅里叶变换的时域积分特性

$G(\omega)=\mathscr{F}\left[g(t)\right]=\dfrac{F(\omega)}{j\omega}+\pi F(0)\delta(\omega)$，因此其直流分量为$\dfrac{1}{2}F(0)=\dfrac{E\tau}{4}$。

知识点：傅里叶变换的积分特性的直流分量

9. 时域积分特性

如果$\mathcal{F}\left[f(t)\right]=F(\omega)$，则有

$$\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{t}f(\tau)\mathrm{d}\tau\right]=\frac{F(\omega)}{j\omega}+\pi F(0)\delta(\omega) \qquad (5-82)$$

式中右边第一项和微分特性是对称的，积分是微分的反过程，微分时乘$j\omega$因子，积分时则除以$j\omega$因子。

式中右边第二项表示一个直流分量，来自于对$f(t)$的积分。当$t=-\infty$时，$\int_{-\infty}^{t}f(\tau)\mathrm{d}\tau=0$；当$t=+\infty$时，$\int_{-\infty}^{t}f(\tau)\mathrm{d}\tau=F(0)$，因此$\int_{-\infty}^{t}f(\tau)\mathrm{d}\tau$有幅值为$\dfrac{1}{2}F(0)$的直流分量，其傅立叶变换是$\pi F(0)\delta(\omega)$。当$f(t)$为奇函数时，有$F(0)=0$，$\int_{-\infty}^{t}f(\tau)\mathrm{d}\tau$的直流分量也为零。

七.计算题（6分）

七（6分）、求如图 3 所示时域波形的傅里叶变换。

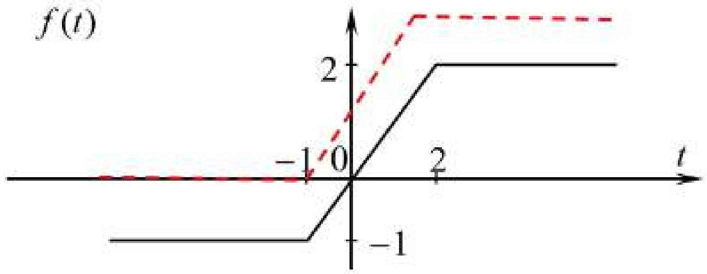
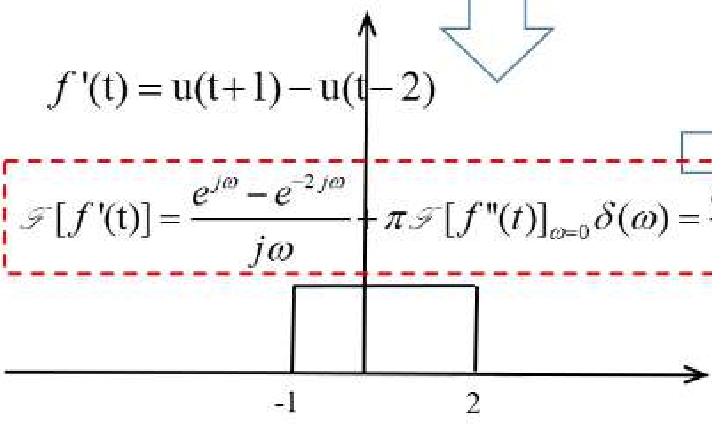


图 3

方法：
1. 利用傅里叶变换定义
2. 写成信号表达式，利用常见信号傅里叶变换和傅里叶变换性质求解
3. **利用傅里叶变换时域积分性质**

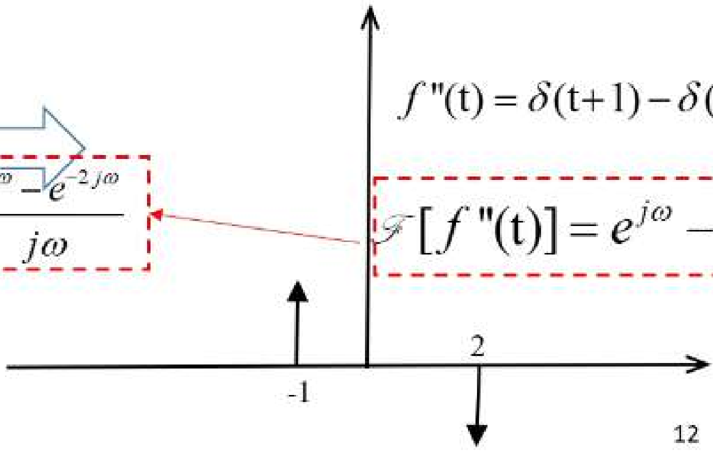
$$f'(t) = u(t+1) - u(t-2)$$

$$\mathscr{F}[f'(t)] = \frac{e^{j\omega} - e^{-2j\omega}}{j\omega} + \pi \mathscr{F}[f''(t)]_{\omega=0}\delta(\omega) = \frac{e^{j\omega} - e^{-2j\omega}}{j\omega}$$



$$f''(t) = \delta(t+1) - \delta(t-2)$$

$$\mathscr{F}[f''(t)] = e^{j\omega} - e^{-2j\omega}$$



七.计算题（6分）

七（6 分）、求如图 3 所示时域波形的傅里叶变换。

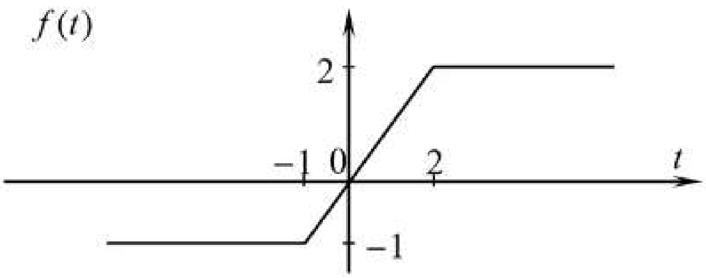


图 3

答案：

$$\frac{e^{-j2\omega}-e^{j\omega}}{\omega^2}+\pi\delta(\omega) \qquad \text{or} \qquad \frac{3}{j\omega}S_a(\frac{3\omega}{2})e^{-j\frac{1}{2}\omega}+\pi\delta(\omega)$$

问题：1）原函数时域表达式写不对；

2）没有充分利用时域积分性质；

3）注意$f(-\infty)$ =-1