作业：

第5章第14题，并在第（4）问增加内容：假如电容极板是圆形，求距电容器内离轴线为$r$处两种介质中的磁场强度。

不要求做第（1）问。

要求：按顺序求解（2）、（3）、（4）问，不能先求（4）后由其结果得到前两问的结果。

提示：

第（2）问：该情况是电导远大于“电纳”，故仅需考虑电流场不需考虑电容效应。相当于对电阻与电容的并联仅考虑电阻，为电流场问题。

第（3）问：仅考虑介质中的库仑电场即可，不考虑漏电流，类似静电场。

第（4）问：视为普遍情况，两个参数特性都要考虑。

关键是想好用哪个界面条件。

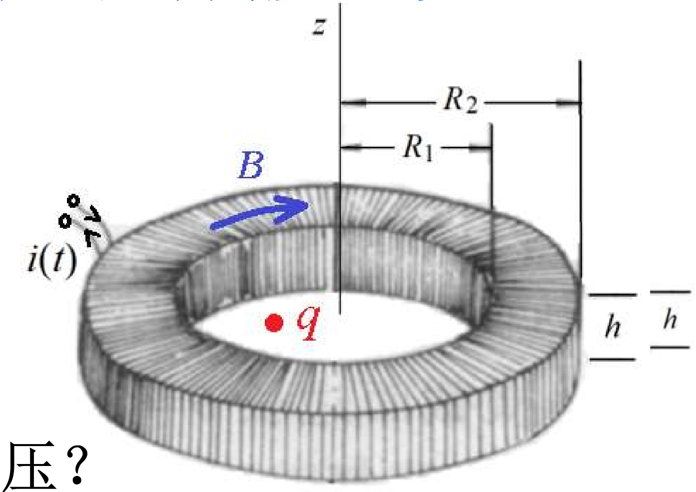
补充作业题：真空中一无限长直空芯密绕的螺线管线圈，单位长度的匝数为$N$，通有电流$i(t)$, 求该电流在芯内和线圈外部距离轴线$r$处产生的感应电场强度。

自己复习总结题：写出时变场的边值问题与两种准静态场的一般方程。

# 第5章 时变电磁场与准静态电磁场

## 思考题 第1节 电磁感应定律 （站在当年法拉第角度思考）

1. 线圈中施加单调上升的电流$i(t)$，
   1）问除重力外，电荷$q$会受到什么力，电荷运动轨迹为何？
   2）如果线圈外面套一个闭合导线，导线内会有电流吗？为何？
   3）将该导线切断在切口处可测得的电压？




2. 如果说磁通变化可以在回路上产生感应电动势，那引起磁通变化的因素或现象有哪些？说可能有2或3种，分别是什么？
   （提示：想想什么是磁通或磁通如何计算？）
3. 什么叫涡流？其方向与感应生成它的磁通的关系为何？
4. 一短直螺线管线圈端部放一块导体，若线圈磁场交变，问导体是受线圈的吸引力还是排斥力？（基于电感判断力的方向）

5. 电路中电感上的电压与电流的关系$u=L\mathrm{d}i/\mathrm{d}t$以及互感电压与电流的关系$u_2=M\mathrm{d}i_1/\mathrm{d}t$是如何体现电磁感应定律的？

（要求将以上关系落实到变化的磁场产生电场上。注意电压或电动势等于电场的线积分）

6. 在实际中，你见过哪些利用电磁感应原理的电磁装置？

变压器：原边磁场感应出副边的电压源（感应电动势）；

电磁加热(习题3)、电磁炉、电磁感应式磁悬浮、感应式线圈炮、发电机、电动机，等等。

## 思考题 第2节 全电流定律（传导电流与位移电流）

（站在当年麦克斯韦角度思考）

1. 变化的电场能产生磁场吗？哪种场模型可以体现该现象？

(先考虑哪里有电荷产生的时变电场)

2. 一个时变电压源接一个非闭合导体回路会产生时变电流吗？

3. 断开处相当于或可等效为何模型？ 电容！

4. 对图1电路，回路$\boldsymbol{l}$上磁场强度的线积分结果等于什么？
可通过双重积分证明此结果：先计算电流在P点的$\boldsymbol{H}$，再对$\boldsymbol{H}$求线积分。

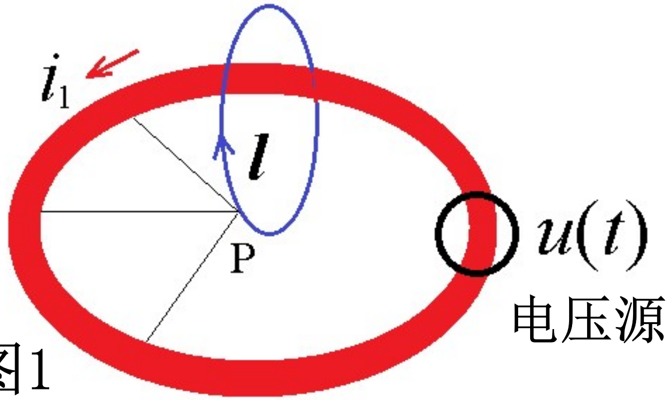



图1

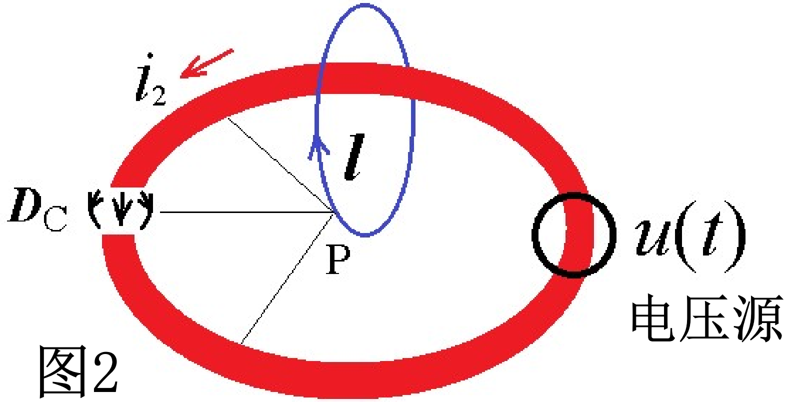
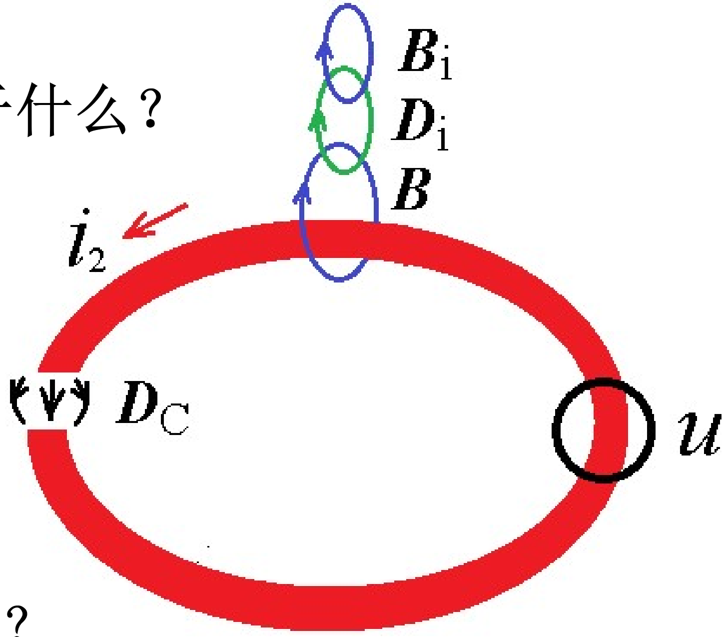



图2

5. 如果将回路断开，形成图2电路，
  1）回路$\boldsymbol{l}$上磁场强度的线积分结果等于什么？
  2）可以通过双重积分证明该结果吗？
  3）产生磁场的积分区域是什么？
  4）导体断开的空间对磁场的贡献与那里用电流$i_2$填充的效果相等吗？




6. 除端口处外，空间有电场吗？
若有是谁产生的，电力线为何？
它能产生磁场吗？若能那磁力线为何？
7. 你看到了几类d$\boldsymbol{D}$/d$t$通量线？何介质中一点上$\boldsymbol{D}$和$\boldsymbol{J}$同时存在？

# 第1节 电磁感应定律--变化的磁场会产生电场（仅理论部分）

电磁感应定律描述时变磁场会产生电场。该电场称为感应电场$\boldsymbol{E}_\mathrm{i}$。
磁场是矢量，其时变量仍为矢量，作为电场的源是一种矢量源。
此矢量源 $\mathrm{d}\boldsymbol{B}/\mathrm{d}t$ 与其场$\boldsymbol{E}_\mathrm{i}$的关系符合旋度关系：$\nabla\times\boldsymbol{E}_\mathrm{i}=-\dfrac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$

对应的积分形式为：$\oint_l \boldsymbol{E}_\mathrm{i}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\iint_S(-\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ （大物中的形式）

且$\boldsymbol{E}_\mathrm{i}$无散：$\nabla\cdot\boldsymbol{E}_\mathrm{i}=0$

电介质和导体中都有此关系，只要磁场变化就会在空间产生电场。
假如空间还有电荷产生的库仑电场$\boldsymbol{E}_\mathrm{C}$，设合成电场为：$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_\mathrm{i}+\boldsymbol{E}_\mathrm{C}$
对合成电场则有约束方程：

$$\boxed{\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}}\quad \nabla\cdot\boldsymbol{E}=\rho/\varepsilon \text{ 或 } \boxed{\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho}$$

法拉第电磁感应定律
仅描述感应电场。
麦克斯韦电磁感应定律
描述合成电场。

因为有：$\nabla\times\boldsymbol{E}_\mathrm{C}=0$ $\quad\nabla\cdot\boldsymbol{E}_\mathrm{i}=0$

这是麦克斯韦电磁场方程组中的两个方程。另外两个方程是什么？

## 第2节 全电流定律---变化的电场会产生磁场

时变电场作为磁场的源通常用 $\mathrm{d}\boldsymbol{D}/\mathrm{d}t$ 表示该源。其可独立闭合，有时与传导电流$\boldsymbol{J}$“衔接”形成闭合矢量源。对这两种情况，在形式上都表示为两源相加：$\boldsymbol{J}+\partial\boldsymbol{D}/\partial t$。

一定要有等通量性： $\boxed{\nabla\cdot(\boldsymbol{J}+\partial\boldsymbol{D}/\partial t)=0}$ $\boxed{\oint\!\!\oint_S(\boldsymbol{J}+\dfrac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=0}$

$\mathrm{d}\boldsymbol{D}/\mathrm{d}t$称为位移电流密度，记为$\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{D}}$（意思是电位移的变化）。

上式称为全电流连续性方程。

由上式并利用高斯通量定理 $\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho$ 可得电荷守恒定律：

$\boxed{\nabla\cdot\boldsymbol{J}=-\dfrac{\partial\rho}{\partial t}}$ 两边取体积分得： $\boxed{\oint\!\!\oint_S\boldsymbol{J}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=-\iiint_V\dfrac{\partial\rho}{\partial t}\mathrm{d}V=-\dfrac{\partial q}{\partial t}}$

合成矢量源产生的磁场$\boldsymbol{H}$符合旋度关系：

$\boxed{\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}+\dfrac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}}$ 全电流定律，积分形式： $\boxed{\oint_l\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\iint_S(\boldsymbol{J}+\dfrac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=i_{JD}}$

称为安倍-麦克斯韦环路定律。

矢量源产生的场无散： $\boxed{\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0}$

这是麦克斯韦电磁场方程组中的另外两个方程+电荷守恒定律方程。

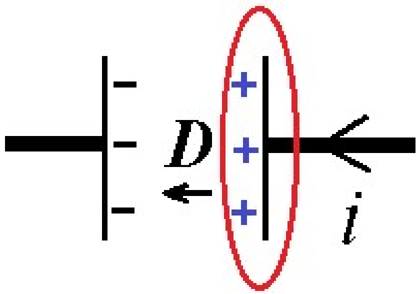
用电荷守恒定律或全电流连续性的积分形式解题。

$$\boxed{i(t)=\oint_S \boldsymbol{J}(t)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=-\frac{\partial q}{\partial t}} \quad \boxed{\oint_S [\boldsymbol{J}(t)+\frac{\partial \boldsymbol{D}(t)}{\partial t}]\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=0}$$

例1：证明电容器（或导体的断口处）中的位移电流等于其导线中的传导电流。

证明：围绕一个极板做一个闭合面，施加电荷守恒定律，流入闭合面的传导电流$i$与闭合面内电荷的时变量关系为：

$$i=\oint_S \boldsymbol{J}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$$




$q$分布在电容的极板表面上，形成电荷面密度$\rho_S$，利用电位移动$D_n=\rho_S$，对极板表面积分得：

$$i=\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=\iint_S \frac{\mathrm{d}\rho_s}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}S=\iint_S \frac{\mathrm{d}D_n}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}S=\iint_S \boldsymbol{J}_D\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=i_D$$

也可用全电流连续性方程直接得到该结果。

用安培-麦克斯韦环路定律解题。

例2: 一半径为$a$的圆形平行板电容器，极板间距为$d$，对电容分别加电压源$u(t)$与电流源$i(t)$，求电容器内、外附近区域距轴线$r$处的感应磁场强度。（忽略感应电场$\boldsymbol{E}_i$仅考虑库仑电场（电准静态场）；忽略边缘效应；认为回路很大，外部电流不影响电容内及其附近区域场的对称性。）

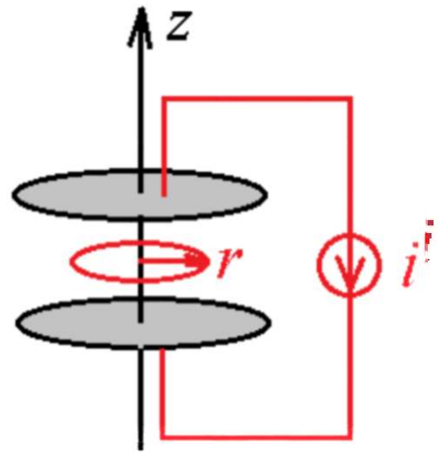
解：先求电容内的位移电流

**(1)** 加电压源时，电容中库仑电场为 $E=\dfrac{u}{d}$ ，位移电流密度为：

$$J_D=\frac{\partial D}{\partial t}=\varepsilon\frac{\partial E}{\partial t}=\frac{\varepsilon}{d}\frac{\partial u}{\partial t}$$

**(2)** 加电流源时，根据电容器内的位移电流等于导线中的传导电流结果，可知电容器内的位移电流密度为：

$$i_D=\frac{\partial D}{\partial t}a^2\pi=i \qquad J_D=\frac{\partial D}{\partial t}=\frac{i}{a^2\pi}$$




再求磁场。可判断出在电容器内的磁力线为以对称轴处为圆心的一个个圆。选择“安培环路”为过$r$处的磁力线，运用全电流定律和交链的概念得：

$$\oint_l \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=J_D\pi r^2 \quad \boldsymbol{H}=\frac{J_D r}{2}\boldsymbol{e}_\alpha\ (r<a) \quad \boldsymbol{H}=\frac{J_D a^2}{2r}\boldsymbol{e}_\alpha\ (r\geq a,\text{但在电容器附近})$$

# 第3节-1 时变电磁场的基本方程组与边值问题

麦克斯韦方程组由描述电场与磁场的两个旋度和两个散度方程及成分方程构成，是时变电磁场的场与源的关系及特性描述。

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \quad (1)$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho \quad (4)$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (5)$$

$$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H} \quad (6)$$

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E} \quad (7)$$

$$\boldsymbol{J} = \sigma \boldsymbol{E} \quad (8)$$

方程(1)右端的散度一定要为零，故要由式(5)电荷守恒定律约束。

***a)*** 若$\rho$和$\boldsymbol{J}$都为已知量，当然它们必满足方程(5)，则(5)可不出现。

***b)*** 对于不能确保方程(5)成立的问题，如$\rho$和$\boldsymbol{J}$之一为待求未知量，则(5)必须包含的电磁场方程组中，形成8个方程的形式才有唯一解。

一般问题是给定电流源，即某些导体内的总电流，

但电流密度未知，这时有约束方程： $i = \iint_S \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$ (9)

## 麦克斯韦方程组的积分形式与微分形式（国内教材中的排序）：

$$\oint_l \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \iint_S (\boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \qquad \nabla\times\boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$$

$$\oint_l \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\iint_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \qquad \nabla\times\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

$$\oiint_s \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0 \qquad \nabla\cdot\boldsymbol{B} = 0$$

$$\oiint_s \boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iiint_V \rho \mathrm{d}V = q \qquad \nabla\cdot\boldsymbol{D} = \rho$$

$$\oiint_s \boldsymbol{J}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\mathrm{d}V = -\frac{\partial q}{\partial t} \qquad \nabla\cdot\boldsymbol{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

麦克斯韦原始给出的方程的顺序为*：**(1)**法拉第定律，**(2)** 高斯定理，**(3)** 安培-麦克斯韦定律(全电流定律), **(4)** 磁通连续性定理。依次称为第几麦克斯韦方程**。但现在的教材中排序不统一了，序号也就叫乱了。

***James Clerk Maxwell. A Treatise on Electricity and Magnetism. Oxford: Clarendon Press, 1998 (Reface to the first edition written by James Clerk Maxwell in 1873), Volume Two, pp.247-259**

****Umran S. Inan, Aziz S. Inan, Engineering Electromagnetics, Addison Wesley Longman, Inc., 1999, 617.**

## 时变电磁场的媒质交界面条件

由以下积分方程可推导得出不同媒质的切向交界面条件

$$\oint_l \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = i + \frac{\partial}{\partial t}\iint_S \boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

$$\oint_l \boldsymbol{E}_\mathrm{i}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\frac{\partial}{\partial t}\iint_S \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

围绕界面上**P**点做一个矩形$\boldsymbol{l}$

$\boldsymbol{l}$短边趋于零，即面积趋于零时必有右端项的面积分为零。

类似地利用两个闭合面积分方程可得法向交界面条件。

可得：时变场的***E***、***D***、***H***、***B***界面条件与恒定场相同。

另外由全电流连续性定理：$\oiint_S (\boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0$

小圆柱两底面上有两种电流。

得界面上全电流的法向连续：

$$\boxed{J_{1n} + \frac{\partial D_{1n}}{\partial t} = J_{2n} + \frac{\partial D_{2n}}{\partial t}}$$

## 边界条件：

可以证明：使得场有唯一解的边界条件是***E***与***H***的切向或法向分量任给其一即可。由此可形成电磁场的边值问题。

# 正弦时变电磁场稳态解的相量方程形式

利用相量法求解：将时域问题转化到复数域中求解，
然后将结果返回到时域。

相量法的适用范围为线性问题，因频率唯一；非线性不适用。
相量法是求解正弦时变稳态解的有效简便方法。
原因是避免了时域中直接求解时为时间变量$t$的微分方程，
且需要三角函数的运算，较复杂。
电磁场方程在复数域中的相量形式为：$(\frac{\partial}{\partial t} \leftrightarrow j\omega)$

$$\nabla \times \dot{\boldsymbol{H}} = \dot{\boldsymbol{J}} + j\omega\dot{\boldsymbol{D}} \qquad (1)$$

$$\nabla \times \dot{\boldsymbol{E}} = -j\omega\dot{\boldsymbol{B}} \qquad (2)$$

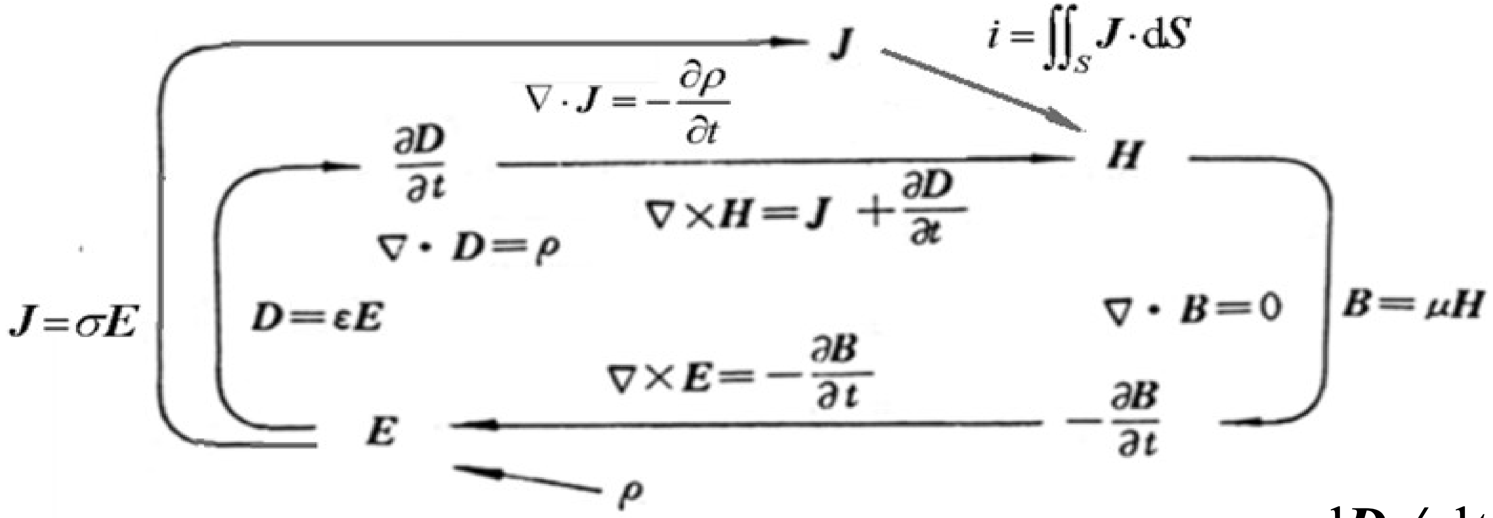
$$\nabla \cdot \dot{\boldsymbol{B}} = 0 \qquad (3)$$

$$\nabla \cdot \dot{\boldsymbol{D}} = \dot{\rho} \qquad (4)$$

$$\nabla \cdot \dot{\boldsymbol{J}} = -j\omega\dot{\rho} \qquad (5)$$

对成分方程等类似有相量形式

# 一般情况下的电磁场耦合关系



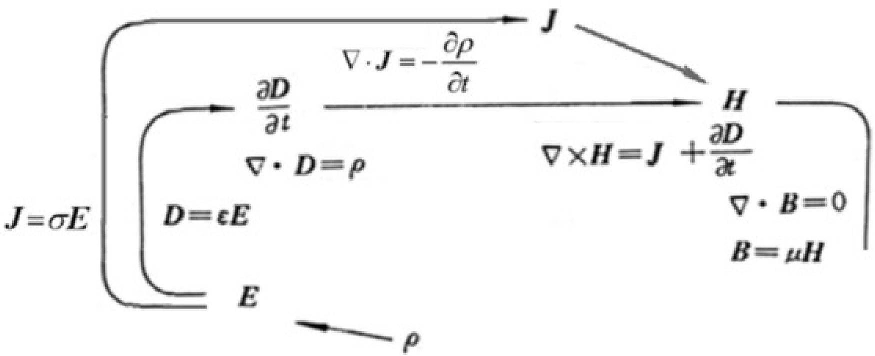

时变率较低时，时变场可近似为两种准静态场：

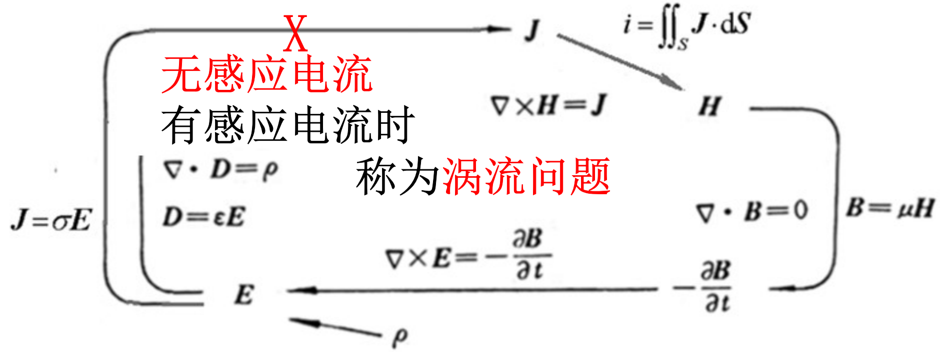
$\mathrm{d}\boldsymbol{D}/\mathrm{d}t$

电准静态场问题（忽略$\boldsymbol{E}_i$）

磁准静态场问题（忽略$\boldsymbol{H}_i$）

（又分为场域中有无感应电流情况）




频率较高时远离$\boldsymbol{J}$和$\rho$的区域情况如何？电磁波，只剩下内环的耦合。

## 第3节-2 准静态场问题

在低频或缓时变情况下可突出主要量而忽略次要量，形成准静态场问题，从而实现电场与磁场的求解部分解耦，以简化求解。

### 1）电准静态场

当 $\partial \boldsymbol{B} / \partial t$ 产生的感应电场 $\boldsymbol{E}_i$ 远小于库仑电场 $\boldsymbol{E}_C$ 时，可忽略 $\boldsymbol{E}_i$，则电场仅电荷产生，方程与静电场相同，故称电准。对应的方程为：

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \qquad (1)$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = 0 \qquad (2)$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \qquad (3)$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho \qquad (4)$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \qquad (5)$$

此时，因$\boldsymbol{E}$仅由电荷产生，故可由已知电荷或电压先求得电场；

分三种情况：**(1)**理想介质中的电场，**(2)**完纯导体中的电流场（忽略电容效应），**(3)**非理想电介质（既有导体特性又有电容特性的材料）中的电场。

（a）理想介质中的电场：已知电荷或电压，求$\boldsymbol{D}(t)$与$\boldsymbol{E}(t)$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}(t)=\rho(t)\qquad\nabla\times\boldsymbol{E}=0\qquad\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}$$

与静电场完全一样。$\boldsymbol{E}$的计算方法与静电场相同。电位的泊松方程也成立。对于线性介质，只要计算一个时刻的场与源的关系即可，其它时刻按场与源的比例关系，根据源的变化等比例缩放电场结果即可。

只有在电准静态场下，对平行板电容才有$E=U/d$，即忽略了感应电场。

（b）完纯导体中的电流场：已知导体总电流或电压，求$\boldsymbol{J}(t)$与$\boldsymbol{E}(t)$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{J}=0\qquad\nabla\times\boldsymbol{E}=0\qquad\boldsymbol{J}=\sigma\boldsymbol{E}$$

与恒定电流场完全一样，计算方法也相同。电位的拉氏方程成立。

（c）非理想电介质中的电场，已知电流或电压，求$\boldsymbol{J}$、$\boldsymbol{E}$ 、$\boldsymbol{D}$与$\rho$

非均匀媒质空间点上可能有净电荷及其变化，其与电流密度的关系由电荷守恒定律约束，基本方程：

$$\nabla\cdot\boldsymbol{J}=-\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}\quad(1)\qquad\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho\quad(2)\qquad\nabla\times\boldsymbol{E}=0\quad(3)$$

$$\boldsymbol{J}=\sigma\boldsymbol{E}\quad(4)\qquad\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}\quad(5)$$ 两种电流同时存在

交界面条件：

全电流法向连续：$\boxed{J_{1n}+\dfrac{\partial D_{1n}}{\partial t}=J_{2n}+\dfrac{\partial D_{2n}}{\partial t}}$

电场强度切向连续：$E_{1t}=E_{2t}$

另有：$D_{2n}-D_{1n}=\rho_s$

求出电场后，由全电流定律求磁场。

## 2）磁准静态场问题

当自闭合的$\partial \boldsymbol{D} / \partial t$产生的磁场$\boldsymbol{H}_i$远小于$\boldsymbol{J}$(且有$\nabla \cdot \boldsymbol{J} = 0$)产生的场$\boldsymbol{H}_J$时，可忽略此位移电流。磁场的方程与恒定磁场相同，故称磁准。

方程变为：

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} \qquad (1)$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \qquad (2)$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \qquad (3)$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho \qquad (4)$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \qquad (5)$$

**a) 若电流*J*已知，即没有涡流导体**

磁场被解耦出来，可先求得磁场，再由式(2)和(4)分别求电场。

求已知电流的磁场时，解法与恒定磁场相同：安培环路定律、毕奥-萨伐尔定律、矢量磁位*A*及其边值问题都适用。

由式(2)求感应电场与感应电动势为第1节的计算内容，后面讲。

库仑场的求法与静电场相同。

## b) 含有涡流导体的涡流问题

电场与磁场仍然耦合，不能分开解，需解电磁场方程组。见第9节。

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} \qquad (1)$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \qquad (2)$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \qquad (3)$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho \qquad (4)$$ 在介质区。

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \qquad (5)$$ 在导电媒质区域。

$$i = \iint_S \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \qquad (6)$$

电流密度的界面条件：$J_{1n} + \dfrac{\partial D_{1n}}{\partial t} = J_{2n} + \dfrac{\partial D_{2n}}{\partial t}$

方程(1)实际为：$\nabla \times \boldsymbol{H} = \sigma \boldsymbol{E}$

所以电场与磁场仍然耦合，即方程(1)和(2)耦合。

实际问题多为求导体中的感应电流$\boldsymbol{J}$，故忽略位移电流的电磁场问题称为涡流问题。

此时是已知导体内的总电流，但不知电流密度与电荷密度。