清华大学试题专用纸

考试课程：概率论与数理统计　考试时间：2022 年 6 月 13 日 9：00—11：00

姓名_____________学号 **20**___________班级________.

一 填空题（每空 3 分，共 30 分；答案均写在答题纸上，注意标清题号）

1. 设事件 A,B 满足 $P(B)=0.4$，$P(\bar{A}\mid B)=0.7$，$P(\bar{A}\mid \bar{B})=0.3$，则 $P(B\mid A)=$_____________。

2. 设随机变量 X 的分布律为 $P\left(X=k\right)=c\cdot\dfrac{3^k}{k!},k=1,2,\cdots$。则常数 $c=$_______________。

3. 设 $X\sim N\left(1,4\right)$，$P(X<a)=\Phi(-1)$。则 $a=$____________________________________。

4. 设 $X\sim N\left(0,1\right)$，$Y=\left|X\right|$，$F_Y\left(y\right)$ 是 Y 的分布函数，则 $F_Y\left(2\right)=$________________________。

5. 随机变量 Y 服从负二项分布 $Nb\left(8,0.4\right)$，则 $\min\limits_{c\in R}E\left(\left(X-c\right)^2\right)=$________________________。

6. 设随机变量 X 的密度函数为 $p\left(x\right)=\dfrac{1}{2}e^{\frac{-1}{2}x}I_{x\geq 0}$，则 $E\left(X^2\cdot e^{\frac{X}{3E(X)}}\right)=$_________________。

7. 将一枚均匀的硬币独立地抛掷 n 次，利用中心极限定理估计，若使正面次数的比例在 0.45 到 0.55 之间的概率不低于 0.99，n 至少要达到___________________________________。

8. 设总体 $X\sim N\left(\mu,0.5^2\right)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为样本，要使 μ 的置信系数 96%的双侧置信区间长度不超过 0.4，则样本容量 n 至少要达到____。

9. 设总体 X 服从期望为 θ 的指数分布，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自 X 的样本，$Y=\min\left(X_1,X_2,\cdots,X_n\right)$，则利用 Y 得到的参数 θ 的无偏统计量是____。

10. 设一批零件的长度服从正态分布 $N\left(\mu,\sigma^2\right)$，其中 μ 与 σ^2 均未知，先从中随机抽取 4 个零件，测得样本均值 $\bar{x}=20$ cm，样本标准差 $s=1$ cm，则 μ 的置信水平 0.9 的置信区间__________。

二. （10 分）某厂有甲、乙、丙三车间生产同一种产品，产量分别占总产量的 60%，30%和 10%。各车间的次品率分别是 2%，5%，6%。试求

（1）在该厂产品中任取一件，恰为次品的概率；

（2）若发现一件产品为次品，该次品来自甲车间的概率？

三．(8 分) 设随机变量 $X \sim U(0,2)$，$Y = X^3$，求随机变量 Y 的分布函数、密度函数、期望和方差。

四．(10 分) 随机变量 X_1 以等可能取值为 0 和 1，X_2 以等可能取值为 $0,1,2$，X_1 和 X_2 相互独立，

（1）$Y_1 = X_1 - 2X_2$，$Y_2 = X_1 + 2X_2$， 求 Y_1, Y_2 的联合分布；

（2）计算相关系数 $\rho(Y_1,Y_2)$。

五．（10 分）已知 $(X,Y) \sim N(0,0,2,2,0)$，求 (1) $E(X|X+Y)$；（2）$E(X^2|X+Y=4)$。

六 (10 分) 抛掷一枚 6 面的色子，出现 1 点至 6 点的概率均为 $1/6$，抛掷过程是相互独立的。直至首次连续出现 1 点 2 点停止。例如：3, 2, 3, 5, 1, 1, 6 停止，抛掷 7 次。试求抛掷次数的期望和方差。

五．（12 分）$X_1, X_2, \cdots, X_m$ 是来自二项分布总体 $X \sim b(n,p)$ 的样本

（1）当 n 已知时，用矩估计法求参数 p^2 的无偏估计量；

（2）当 n 已知时，用极大似然估计法求参数 p 的估计量，并判断无偏性，说明理由；

（3）当 n, p 均未知时，用矩估计法求参数 p 的估计量，并判断是否无偏，说明理由。

六．(10 分) 设某工厂生产一种产品，其质量指标的参数服从正态分布 $N(\mu,3^2)$，$\mu \le 10$ 为优级，$X_1, X_2, \cdots, X_{36}$ 为来自该正态总体的样本。做假设检验 H_0：$\mu \le 10$ VS H_1：$\mu > 10$。

（1）给出显著性水平为 $\alpha = 0.05$ 的拒绝域范围，以及 $\mu = 11$ 时的错误类型和犯错概率；

（2）若希望 $\mu = 11$ 时犯错误的概率低于 0.01，至少需要多大的样本容量。

备注 1. 本考卷的样本均为简单随机样本，样本均值 $\bar{X} = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$，样本方差 $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\left(X_k - \bar{X}\right)^2$

备注 2. 指数分布 $X \sim Exp(\lambda)$，$F_X(x) = \left(1 - e^{-\lambda x}\right) I_{x>0}$，$E(X) = 1/\lambda, Var(X) = 1/\lambda^2$

备注 3. 参数为 p 的几何分布的方差为 $\frac{1-p}{p^2}$，泊松分布 $X \sim P(\lambda)$ 的分布列 $P(X=k) = e^{-\lambda} \lambda^k / k!$

备注 4. 分布函数和分位数（题目解答要严格按照下面给出数值进行计算）

$\Phi(1.28) = 0.9$, $\Phi(1.44) = 0.925$, $\Phi(1.65) = 0.95$, $\Phi(1.96) = 0.975$,
$\Phi(1) = 0.84$, $\Phi(1.25) = 0.89$, $\Phi(1.5) = 0.93$, $\Phi(1.75) = 0.96$, $\Phi(2) = 0.98$, $\Phi(3) = 0.999$

$P(t(2) > 2.92) = 0.05, P(t(3) > 2.36) = 0.05, P(t(4) > 2.13) = 0.05, P(t(5) > 2.02) = 0.05$

$P(t(2) > 1.89) = 0.1, P(t(3) > 1.64) = 0.1, P(t(4) > 1.53) = 0.1, P(t(5) > 1.48) = 0.1$