

$A$ 的齐次方程的一个解（仅入射波）为： $A_1(t - \frac{r}{v})$

当电流不随时间变化时，达朗贝尔方程退变为泊松方程，无限大空间中泊松方程的解为：

$$A(x, y, z) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}(x', y', z')}{R} dV' \quad \begin{array}{l} R \text{ 为源点到场点的距离} \\ R = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2} = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \end{array}$$

由此可知，时变电流 $\mathbf{J}(x, y, z, t)$ 产生的动态磁位，即达朗贝尔方程的解应为：

$$A(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t - \frac{R}{v})}{R} dV' \quad \begin{array}{l} \text{被积函数是将 } \mathbf{J}(x, y, z, t) \\ \text{变为 } \mathbf{J}(\mathbf{r}', t - \frac{R}{v}) \end{array}$$

距离源点 $R$ 处的场点，不仅 $A$ 的幅值不同，以 $1/R$ 衰减，且在时间上 $A(\mathbf{r}, t)$ 是 $\mathbf{J}$ 处的 $A|_{R=0}$ 以速度 $v$ 传播到 $R$ 处的， $A(\mathbf{r}, t)$ 落后于 $\mathbf{J}$ 的时间为 $R/v$ ，故位具有时间上滞后的特性。

类似可得洛仑兹规范下电位为： $\varphi(\mathbf{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{V'} \frac{\rho(t - R/v)}{R} dV'$

可证明上面 $A$ 和 $\varphi$ 的表达式满足洛仑兹规范： $\nabla \cdot A = -\mu\epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t}$

故 $\varphi$ 可通过电荷 $\rho$ 求得，也可由上式据已得到的 $A$ 求得。

若激励源为正弦函数 $\mathbf{J}(x,y,z,t) = \mathbf{J}_m(x,y,z)\sin\omega t$ ，则时域解为：

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \sin[\omega(t - \frac{R}{v})]}{R} dV' \quad \omega(t - \frac{r}{v}) = \omega t - \beta r$$

故 $-\beta r$ 是初相位，由复数表示的初相位形式可得相量形式解：

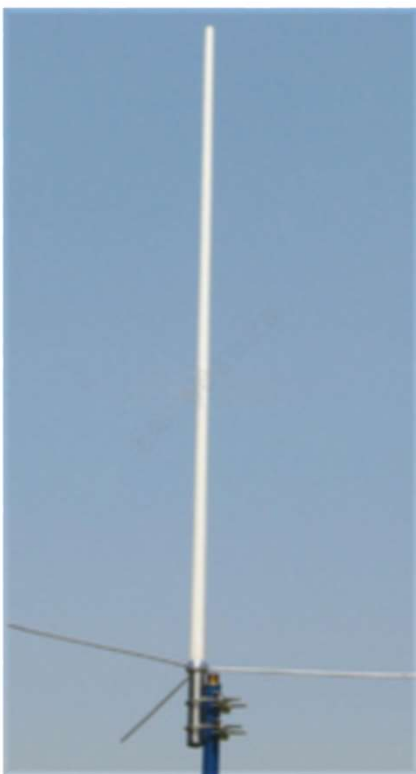
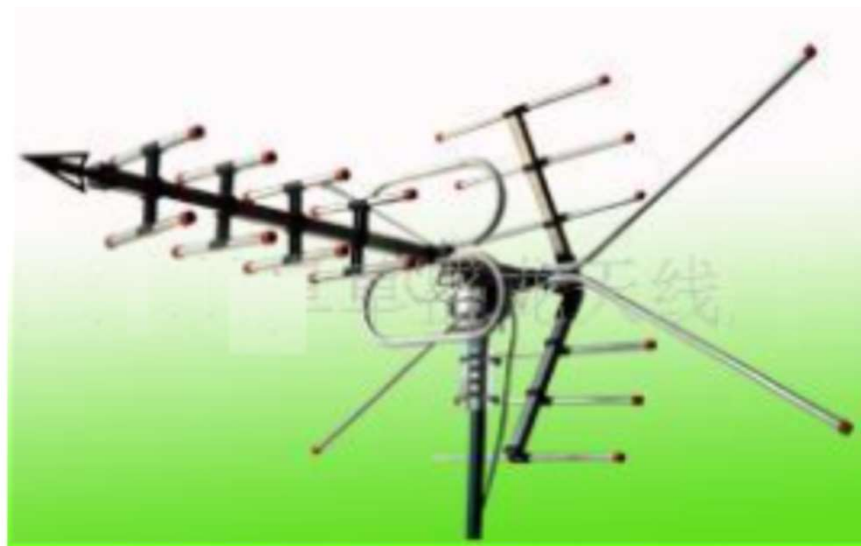
$$\dot{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \frac{\dot{\mathbf{J}}(\mathbf{r}') e^{-j\beta r}}{r} dV' \quad \text{类似的有：} \quad \dot{\varphi} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{V'} \frac{\dot{\rho}(\mathbf{r}') e^{-j\beta r}}{r} dV'$$

$e^{-j\beta r}$ 表示 $A$ 与 $\varphi$ 相对于源所滞后的相位，故亦称为滞后因子；

即 $\beta = \omega/v$ 称为相位常数，单位：弧度/米；每米相位变化量。

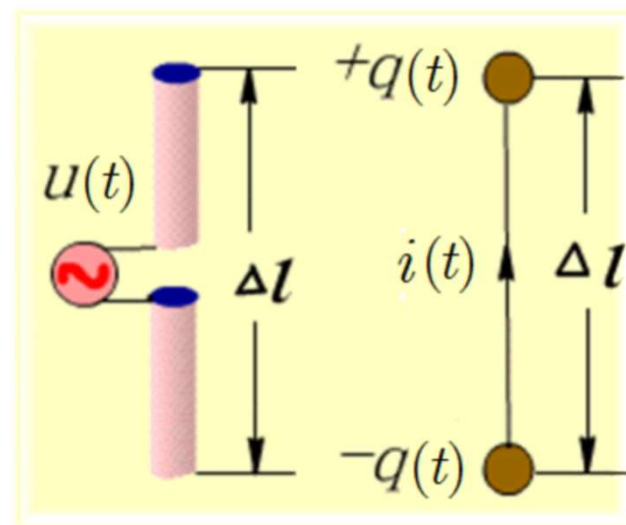
## 第5节 电磁辐射（天线）

- 坡印亭定理表明：时变电磁场会有能量流动或辐射。
- 制作产生合适的时变电磁场的源或装置，可实现电磁能量或信号的有效或定向向外辐射，称之为**辐射器**。
- 辐射器主要由电源与天线组成。
- 除有目的制作的辐射器之外，时变系统的任何部分实际上都是天线，都会向外辐射能量。只是低频下辐射的能量较小。
- 对外，辐射能量构成**辐射电磁干扰**。屏蔽靠电磁波的反射。
- 对内，当能量辐射严重时，电源能量或信号将不会像低频那样有效传输到负载上，或电路已不是传统意义上的电路，信号“在中途辐射掉”，**信号将失去“完整性”**，系统功能发生质的改变。这是计算机CPU工作频率不能再高的原因之一；频率再高则芯片的尺寸就要再减小，这是芯片制造的瓶颈。
- 电磁波能量从波源出发，向周围传播，其中一部分能量不再返回波源，这种现象称为电磁**辐射**。



实现定向性、选频性、反射与传播叠加等

- 为简化问题，只分析结构简单的单元辐射子，称其为**元天线**，有**电偶极子型**与**磁偶极子型**。
- **电偶极子型**是一段导线两端产生时变正负电荷，电荷在导线内流动形成一段传导电流；该传导电流与电荷对应的位移电流“连续”。
- **磁偶极子型**是在闭合导线回路中产生时变的传导环形电流。
- 电偶极子型直接产生的电场与磁偶极子型直接产生的磁场分布相同；故两者产生的电磁波的分布类似。
- 在此只研究电偶极子型元天线，它是多数复杂天线的基础。
- 电偶极子型元天线的结构是在天线中施加交变电压源。近似认为导线中各点的传导电流相等。
- **电磁波的产生机理为：**电压源使电荷移动形成电流 $i$ ，根据电荷守恒定律电荷累积到天线两端部，电荷产生库仑电场，由其对应的位移电流与 $i$ 构成的全电流产生磁场，该磁场变化产生感应电场，能量向外扩散。

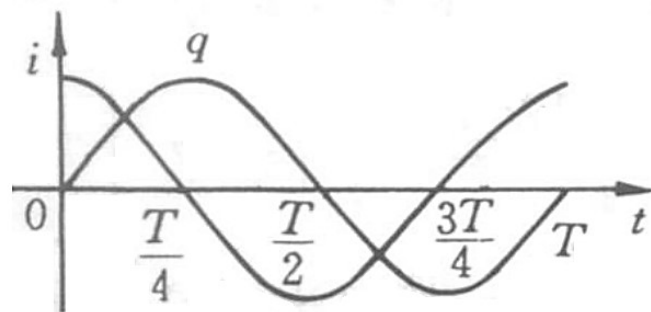


电偶极子型元天线

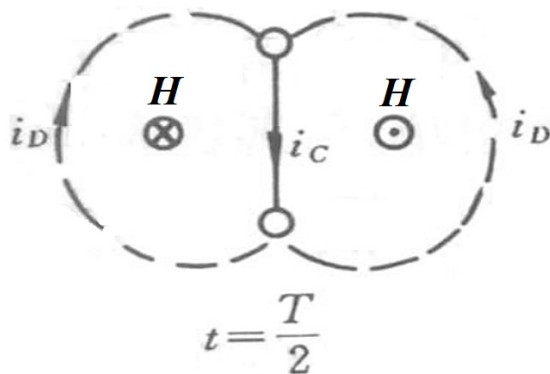
由电荷守恒定律:  $i(t) = \frac{dq}{dt}$

设电流为:  $i(t) = I_m \cos(\omega t)$

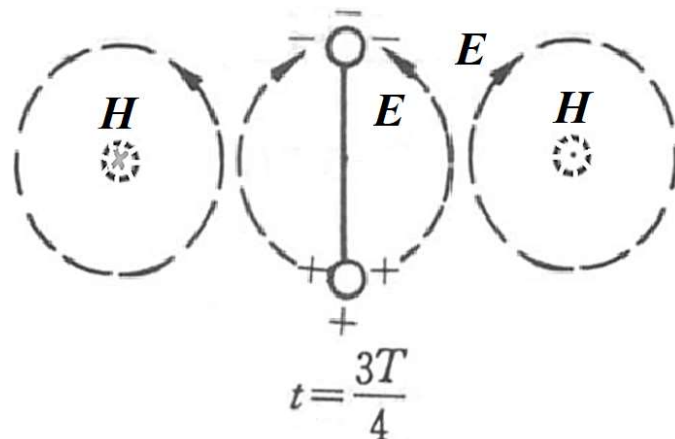
则天线两端的电荷为:  $q(t) = \frac{I_m}{\omega} \sin(\omega t)$



电力线



电流线和磁力线环



库仑电力线和感应电场电力线

对电磁波的形象分析如下（后面再定量计算得到各点 $E$ 与 $H$ 的解）：

$t=T/4$ 时，电荷最大，附近空间库仑电场最大；全电流为零，附近磁场为零。

$t=T/2$ 时，电荷为零，库仑电场为零；全电流最大(空间的位移电流与天线内传导电流连续)，附近空间存在磁场。

$t=3T/4$ 时，电荷与 $t=T/4$ 时相反。 $i$ 和磁场变化率最大，在稍远处有感应电场。

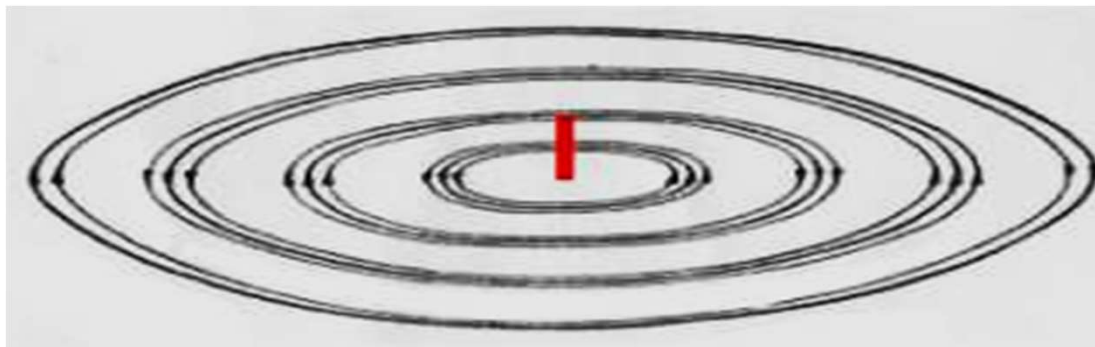
电场的方向都是在子午面上，磁场的方向为角度方向。两者处处正交。

实际上各点库仑电场与感应电场是叠加的。坡印亭矢量为向外的半径方向。

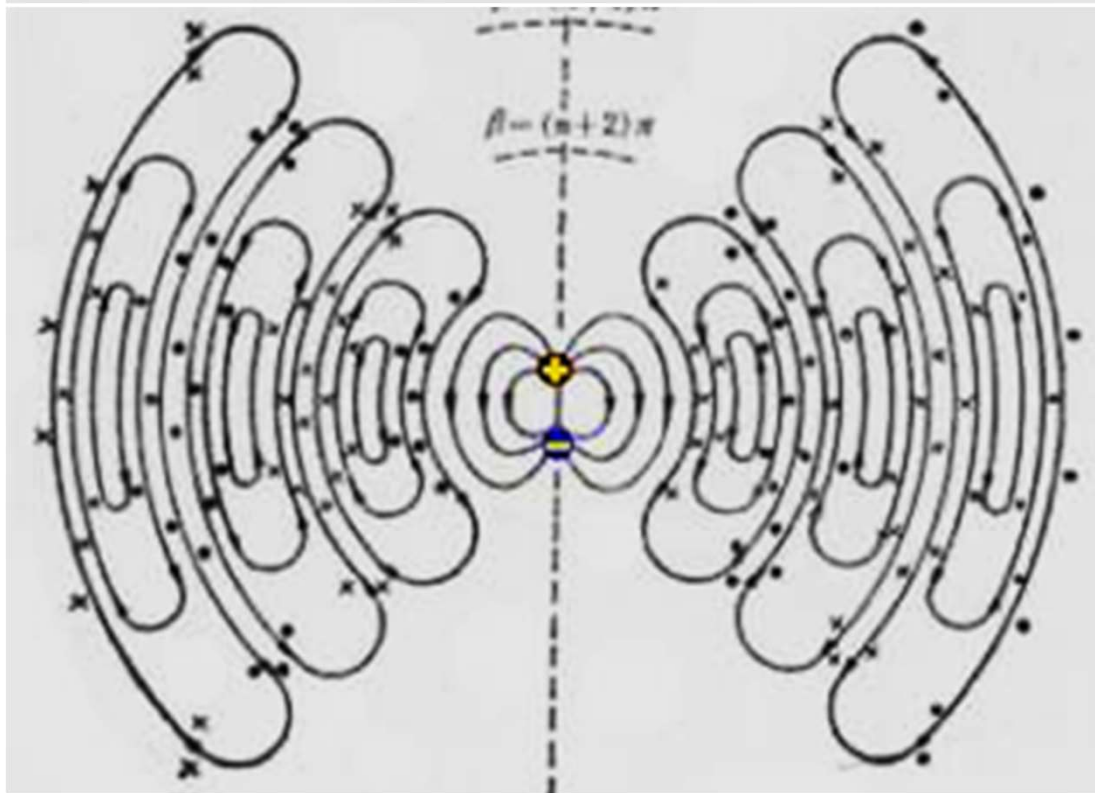


图示为空间上总电磁场的磁力线与电力线，电力线是合成电场线。此并非同一时刻的分布，场有滞后效应，不同时刻分布不同。空间上的大小与方向呈正弦分布，时间上有波动行进特性。

磁力线



电力线



想象一下：  
在球坐标系中，  
 $H$ 和 $E$ 的值与  
角度 $\theta$ 的关系  
为何？有方向  
性吗？

答： $\theta=90^\circ$ 时  
场量最大，  
 $\theta=0^\circ$ 和 $180^\circ$ 时场  
量最小。  
天线有方向性，  
如何表述方向性？

## 无限大均匀空间中电偶极子型元天线的电磁场定量计算

设已知元天线中的电流为 $i(t)$ 。认为 $i(t)$ 在长度方向上处处相等。则在端部必有等量异号电荷积累： $q = \pm \int i(t) dt$ 。

计算空间电磁场的方法有两种：

- 1) 由传导电流密度 $\mathbf{J}$ 或电流 $i$ 计算 $\mathbf{A}$ （洛仑兹规范下的 $\mathbf{A}$ ）  
（可以证明外部对称空间分布的位移电流对 $\mathbf{A}$ 的积分贡献为零）

$$\mathbf{A}(x, y, z, t - \frac{r}{v}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}(x', y', z', t - \frac{r}{v})}{r} dV'$$

$$\text{则 } \mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} \quad \text{由 } \nabla \times \mathbf{H} = \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad \text{有 } \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon} \int \nabla \times \mathbf{H} dt$$

- 2) 由电流 $\mathbf{J}$ 计算 $\mathbf{A}$ ，由 $\mathbf{A}$ 计算电位 $\varphi$ ： $\nabla \cdot \mathbf{A} = -\mu\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t}$   
或由 $\mathbf{J}$ 计算 $\mathbf{A}$ ，由 $\rho$ 计算 $\varphi$ 。

$$\text{再计算 } \mathbf{H} \text{ 和 } \mathbf{E}, \quad \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \varphi$$



已知天线中的电流为 $i(t)$ ，则天线的推迟动态矢量磁位为：

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Delta l} \frac{i(t-r/v)}{r} d\mathbf{l} \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i(t-r/v)}{r} \Delta \mathbf{l}$$

进而可得磁场（球坐标系下）： $i(t) = I_m \cos[\omega(t-r/v)]$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{A} = \frac{\Delta l}{4\pi} \left( \frac{i}{r^2} + \frac{i'}{vr} \right) \sin \theta \boldsymbol{\alpha}^0$$

感应电场：
$$\mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int \nabla \times \mathbf{H} dt = \frac{\Delta l}{4\pi \varepsilon_0} \left[ \mathbf{r}^0 \left( \frac{q}{r^3} + \frac{i}{vr^2} \right) 2 \cos \theta + \theta^0 \left( \frac{q}{r^3} + \frac{i}{vr^2} + \frac{i'}{v^2 r} \right) \sin \theta \right]$$

在 $r$ 较小的近场区，忽略含 $1/r$ 的项，有： $\mathbf{H} = \frac{i \Delta l}{4\pi r^2} \sin \theta \boldsymbol{\alpha}^0$

这与采用毕奥-萨伐尔定律得到的电流元的磁场类似。

近场区认为：
$$\mathbf{E} = \mathbf{r}^0 \frac{q \Delta l}{4\pi \varepsilon_0 r^3} 2 \cos \theta + \theta^0 \frac{q \Delta l}{4\pi \varepsilon_0 r^3} \sin \theta$$

这与电荷偶极子的电场类似。

在远区，起主要作用的是 $1/r$ 项，高次项衰减较快，故有：

$$\mathbf{E} \approx \frac{i'}{4\pi\epsilon_0 v^2 r} \Delta l \sin\theta \mathbf{e}_\theta \quad \mathbf{H} \approx \frac{i'}{4\pi v r} \Delta l \sin\theta \mathbf{e}_\alpha$$

$\mathbf{H}$ 和 $\mathbf{E}$ 都由 $i'$ 决定，由两式可消去 $i'$ 得 $\mathbf{H}$ 与 $\mathbf{E}$ 互的直接关系，故 $\mathbf{H}$ 与 $\mathbf{E}$ 互为决定，即为电磁波的特性；两者的关系为：

$$E_\theta = \frac{1}{\epsilon v} H_\alpha = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} H_\alpha$$

两者的比值称为电磁波传播空间的波阻抗：

$$Z = \frac{E_\theta}{H_\alpha} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

真空中  $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 377(\text{欧})$

$$E_\theta = Z_0 H_\alpha = 377 H_\alpha$$

在远区或纯电磁波区，不仅已知电场强度与磁场强度的方向一定正交，且在量值上两者之间由波阻抗约束。

因此，已知一个场量后，另一个场量自然就已知了。

且电场能量密度与磁场能量密度相等:

$$\frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \frac{\mu_0}{\varepsilon_0} H^2 = \frac{1}{2} \mu_0 H^2$$

坡印亭矢量:

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = E_\theta H_\alpha \mathbf{e}_r = \frac{E_\theta^2}{Z_0} \mathbf{e}_r = H_\alpha^2 Z_0 \mathbf{e}_r$$

用功率密度、电场强度或磁场强度值都可以表述一点上电磁波能量的大小，且在已知材料特性参数下三者可以互换。

显然，近区场没有此表达式和波阻抗对电场与磁场的约束关系。电场与磁场的关系受天线电荷与电流的约束，两种场需要分别计算分析和测量。

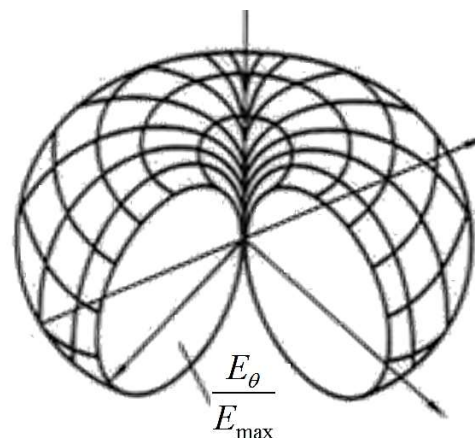
由式  $E \approx \frac{\omega I_m \sin(\omega t - \beta r)}{4\pi \varepsilon_0 v^2 r} \Delta l \sin \theta$  可以看出:

在远场区,  $E$ 的分布是 $\theta$ 的函数,  $H$ 也相同。

若在以元天线为球心的球面上得到场量的模, 将其归一化 (即最大值变为1, 其它按比例变换) 设定为一个函数 $f(\theta, \alpha)$ (以 $r = \text{常数}$ 为条件), 称其为天线的方向图因子。

电偶极子型元天线的方向图因子为:  $\Psi_\theta = \sin \theta$

方向图为:

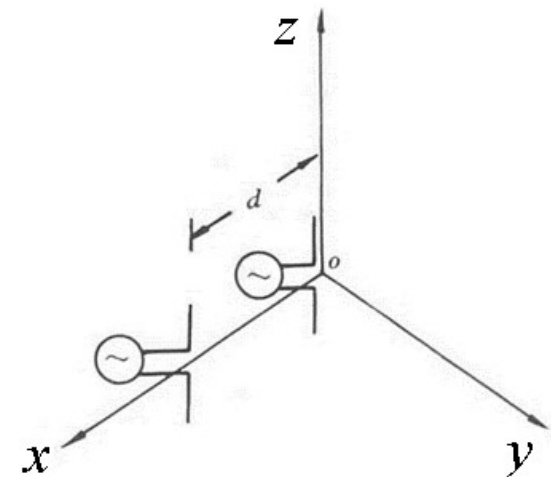


它表示的是不同方向上电场的大小, 即起始于原点的各射线方向上电场大小的图形表示。

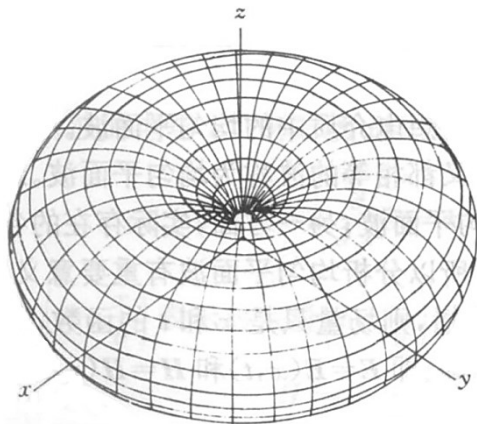
另外,  $\beta r$ 为 $E$ 的相位, 因 $\beta$ 是常数, 所以相位 $\beta r$ 为常数等价于 $r$ 为常数, 即 $r$ 为常数的地方为等相位; 因此, 等相位面为球面, 称其为球面波, 所以元天线产生的电磁波为球面波。

利用两个不同位置带有不同相位电流的元天线可实现较好定向辐射。其原理是利用两个天线的电磁场的传播时间差，使得在某些方向电磁场反向抵消，其它方向上同向增强。

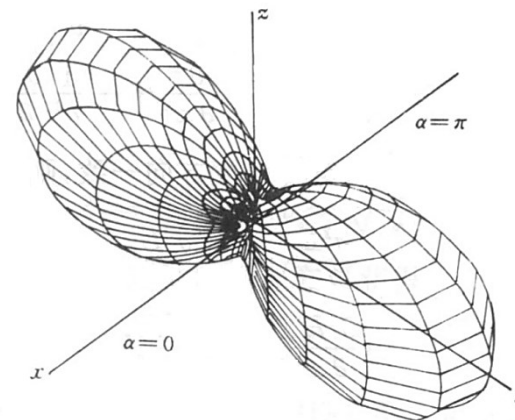
两个相距 $d$ 的元天线，它们的方向均 $z$ 轴方向，适当配合 $d$ 与两电流的相位差，组合后可实现在 $x$ 方向的 $E$ 抵消，在 $y$ 方向上场叠加。若两天线取向不同，成一定角度，在空间会合成不同特性的电磁波。



一个天线的方向图因子：



两个取向相同天线的方向图因子：



## 第6节 电介质中的平面电磁波、波的极化(或称为偏振)

**电磁波**：变化的电磁场脱离场源后在空间中的传播。暂态与稳态。

忽略了 $E_C$ 和 $H_J$ ，看不到电荷与传导电流了。

**平面电磁波**：等相位面为平面的正弦变化的电磁波。

**均匀平面电磁波**：等相位面上 $E$ 、 $H$ 的值处处相等的电磁波(一维)。

若电磁波沿 $x$ 轴方向传播，则坡印廷矢量 $S$ 只有 $x$ 方向分量，

$E$ 、 $H$ 不随 $y$ 、 $z$ 变化，且没有 $x$ 方向分量， $E$ 与 $H$ 相互垂直，

设 $H=H_z(x,t)k$ ,  $E=E_y(x,t)j$ 。 $E_y$ 和 $H_z$ 所满足的时域波动方程为：

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0 \quad \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2} = 0 \quad v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$$

解为：  $E_y(x,t) = E_{y0} \sin[\omega(t - x/v)]$      $H_z = H_{y0} \sin[\omega(t - x/v)]$

相量形式方程为：

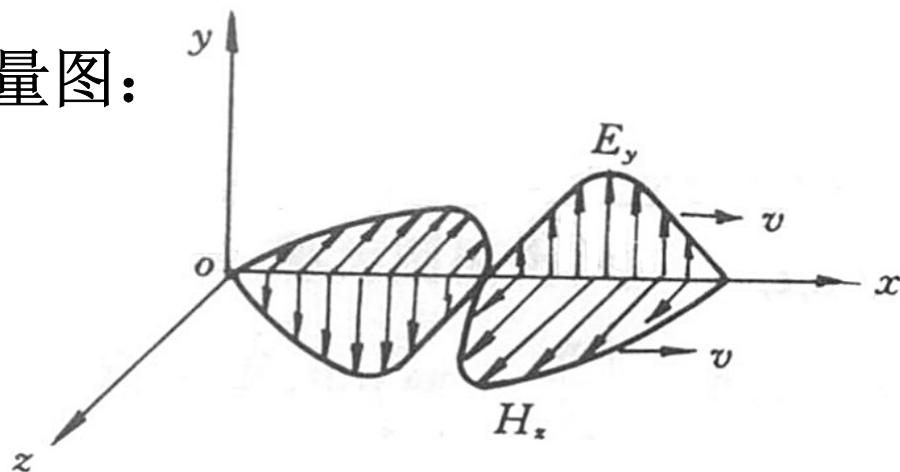
沿 $x$ 方向传播；  $-x\omega/v$ 为相位

$$\frac{\partial^2 \dot{E}_y}{\partial x^2} + \beta^2 \dot{E}_y = 0 \quad \frac{\partial^2 \dot{H}_z}{\partial x^2} + \beta^2 \dot{H}_z = 0 \quad \beta = \frac{\omega}{v} \quad \text{相位常数}$$

方程的解一定为指数函数：  $e^{-j\beta x}$      $\dot{E}_y = \dot{E}_{y0} e^{-j\beta x}$      $\dot{H}_z = \dot{H}_{z0} e^{-j\beta x}$



场量图：



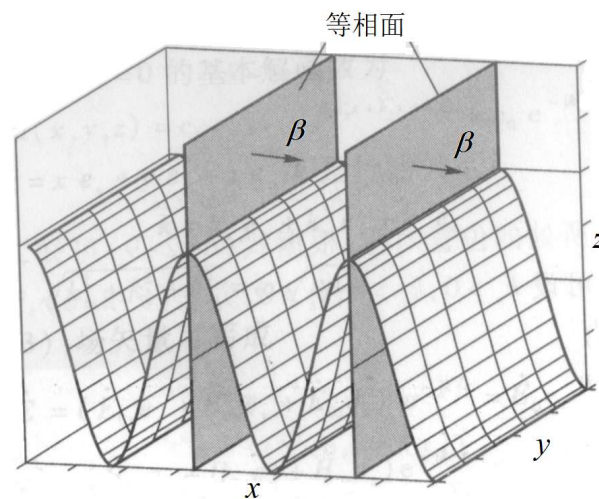
$$E_y(x, t) = E_{y0} \sin[\omega(t - x / v)]$$

$$H_z = H_{y0} \sin[\omega(t - x / v)]$$

可视为 $t$ =周期整数倍时刻

波速为电磁波的波形移动的速度。  
对单频正弦波也是等相位面移动的速度，所以叫相速。

真空中  $v = 1 / \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} = 3 \times 10^8 \text{ m / s}$



**波长 $\lambda$** ：相位差为 $2\pi$ 的两等相面间的距离或相位变化 $2\pi$ 的距离，

根据相位常数 $\beta$ 的含义知： $\beta\lambda=2\pi$

**波长也是一个周期的时间内波行进的距离，故波长等于周期乘速度。**

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi v}{\omega} = \frac{v}{f} = vT$$

## 平面波的极化（也称为波的偏振）

(描述波的形态的一个词，以电场 $E$ 的形态为特征)

- 由于正弦激励的天线元的组合方式不同，一点上的 $E$ 和 $H$ 相对方向是保持垂直，但 $E$ 和 $H$ 各自的方向并不一定保持不变，可能方向在旋转变化。
- 为了表述多个频率相同的组合天线源产生的电磁波的形态，引入波的极化概念。
- **波的极化**定义为**电场 $E$** 矢量的方向或其末端随时间变化的轨迹。
- 若 $E$ 一直保持 $y$ 方向，则说该电磁波为 $y$ 轴方向极化。
- 设**所有天线**发射的合成电磁波是沿着 $x$ 方向传播的平面电磁波，则电磁波的电场强度只可能在 $y$ - $z$ 平面内，在空间一点上 $E$ 矢量可表示为：

$$\mathbf{E}(t) = E_y \mathbf{j} + E_z \mathbf{k} = E_{ym} \sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) + \theta_y\right] \mathbf{j} + E_{zm} \sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) + \theta_z\right] \mathbf{k}$$

由于 $\theta_y$ 与 $\theta_z$ 不同，故在任意点上随时间 $E_y$ 与 $E_z$ 变化可能不同步，故 $E$ 的方向可能会变化，在任一时刻不同点上， $E$ 的方向可能不同。

$$\mathbf{E}(t) = E_y \mathbf{j} + E_z \mathbf{k} = E_{ym} \sin(\omega t + \theta_y) \mathbf{j} + E_{zm} \sin(\omega t + \theta_z) \mathbf{k}$$

### 1. 直线极化波 $E_y$ 与 $E_z$ 同相位时

$E$ 一直保持在一个方向上，但其大小随时间变化，即 $E$ 矢量末端的轨迹是一条直线，称其为直线极化波。

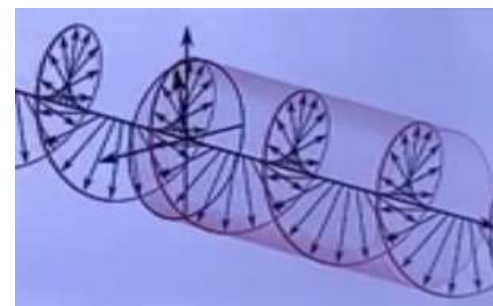
$$\tan \alpha = \frac{E_y}{E_z} = \text{常数}$$

两个取向相同的元天线的合成波是直线极化波。

### 2. 圆极化波

$E$ 矢量末端的轨迹随着时间的变化为一个圆，称为圆极化波。在一点 $E$ 的大小不变但方向改变。

两个取向垂直的元天线，若在 $r$ 处产生的场幅值相同，相位相差 $\pi/2$ 或 $3\pi/2$ 时，波是圆极化波。



$$\tan \alpha = \frac{E_y}{E_z} = \tan(\omega t)$$

### 3. 椭圆极化波

$E$ 矢量末端的轨迹随着时间的变化为一个椭圆，为椭圆极化波。其大小和方向均在变化。

接收天线需要与极化特性相同或接近，且长度应与波长尽量匹配。

## 第7节 平面波的反射与折射、介质波导

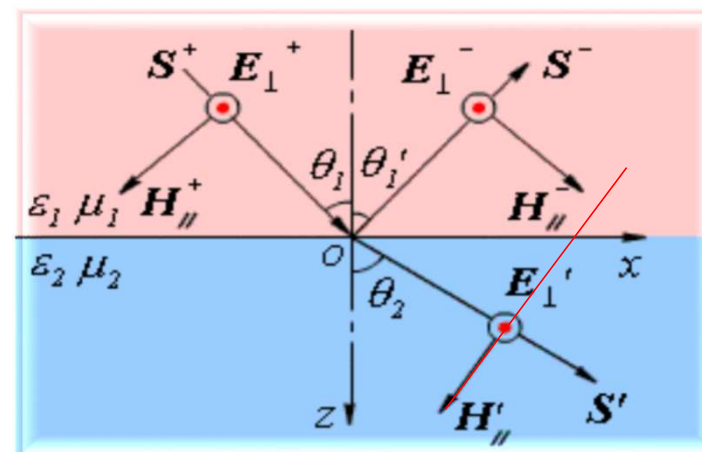
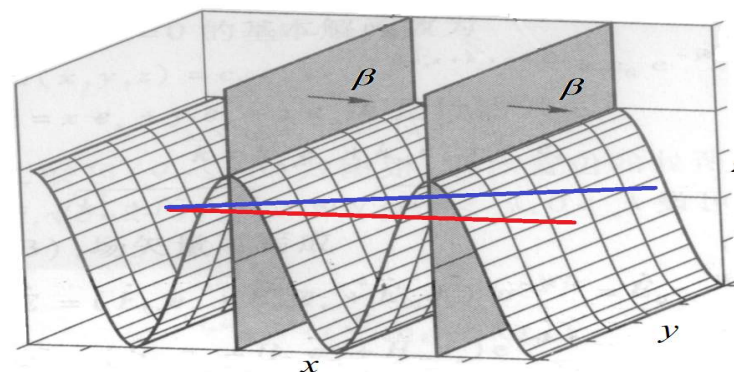
### 1. 入射角、反射角、折射角推导

- 波从一种媒质进入另一种时，在分界面上会产生反射与透射或折射。
- 对于平面波，相同相位差的两个面之间，垂直面的路径即沿波传播的 $S$ 方向的路径（图中红线）要小于非 $S$ 方向的路径（蓝线），因此，相速在 $S$ 方向上为最小，在其它方向上较大。
- 例如对于下半平面的透射波，沿水平即 $x$ 方向的相速 $v_{2x}$ 与 $S$ 方向的 $v_2$ 关系为：

$$\frac{v_2}{v_{2x}} = \cos(\pi / 2 - \theta_2) = \sin \theta_2$$

- 两种介质中相速不同，但在界面上看三个波的相速一定相同，若不同在界面上会出现一侧有场而另一侧无场的情况，这就不能满足场量的界面条件，故有：

$$v_x = \frac{v_2}{\sin \theta_2} = \frac{v_1}{\sin \theta_1} = \frac{v_1'}{\sin \theta_1'}$$



由  $\frac{v_1}{\sin \theta_1} = \frac{v'_1}{\sin \theta'_1}$  和  $v_1 = v'_1 = \frac{1}{\sqrt{\mu_1 \epsilon_1}}$

可得入射波与界面法向的夹角即入射角与处于同一媒质中的反射波的反射角相等： $\theta_1 = \theta'_1$

由  $\frac{v_1}{\sin \theta_1} = \frac{v_2}{\sin \theta_2}$  和  $v_1 = \frac{1}{\sqrt{\mu_1 \epsilon_1}}$   $v_2 = \frac{1}{\sqrt{\mu_2 \epsilon_2}}$

得折射角与入射角的关系（称为**折射率**）由波速确定，有：

$$\frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1} = \frac{v_1}{v_2}$$

定义媒质的折射率为： $n = \sqrt{\mu_{1r} \epsilon_{1r}}$  折射率与媒质参数正相关。

折射率可表示为： $\frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1} = \frac{n_1}{n_2}$

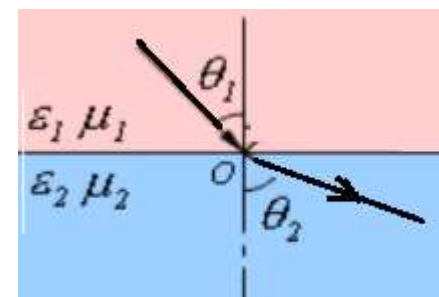
**全反射：**媒质参数较大区域的波遇到界面时可能会发生全反射！

由反比关系  $\frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1} = \frac{n_1}{n_2}$  可知

若  $n_1 > n_2$ , 则  $\theta_2 > \theta_1$ , 即**折射角大于入射角**;

故当  $\theta_1$  大到一定值时, 必有  $\theta_2 = 90^\circ$ , 此  $\theta_1$  称为临界入射角  $\theta_c$ 。

当  $\theta_1 > \theta_c$  时,  $\theta_2$  无实数解, 即无透射波, 实现全反射。



**临界入射角的正弦为：**

$$\sin \theta_c = \frac{n_2}{n_1} \sin 90^\circ = \frac{n_2}{n_1} = \sqrt{\frac{\mu_2 \epsilon_2}{\mu_1 \epsilon_1}}$$

假如两介质的磁导率相同, **临界入射角为：**  $\sin \theta_c = \sqrt{\epsilon_2 / \epsilon_1}$

当  $\epsilon_1 > \epsilon_2$  时, 若电磁波从  $\epsilon_1$  区向  $\epsilon_2$  区传播, 当入射角  $\theta_1 > \theta_c$  时, 发生全反射。这是介质波导传播电磁波的原理与方法。

这也是光纤传播光信号的原理。光纤就是一种实心介质线。



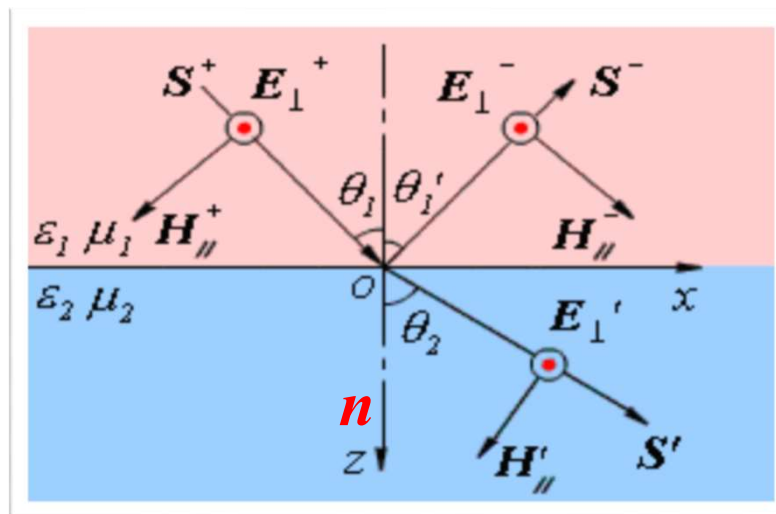
## 2. 入射波、反射波、透射波大小关系（反射系数与透射系数）

将坡印廷矢量与界面法向决定的平面称为**入射面**，即下图“纸面”。对于电磁波的电场矢量 $E$ ，可以用垂直于入射面的分量和平行于入射面的分量表示。

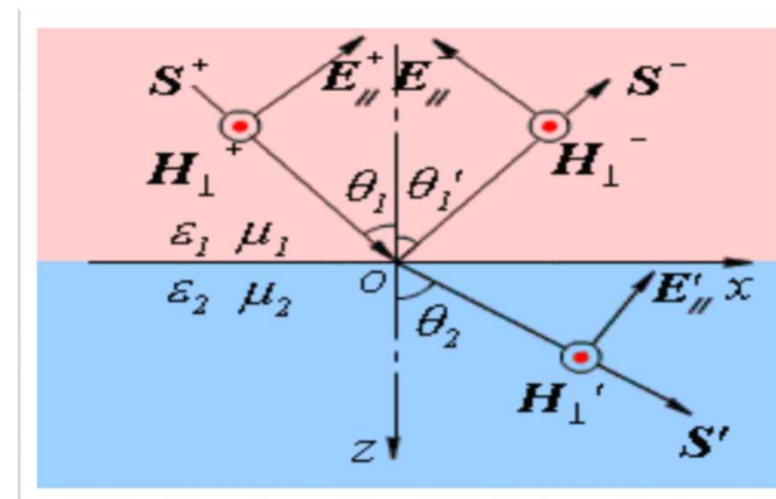
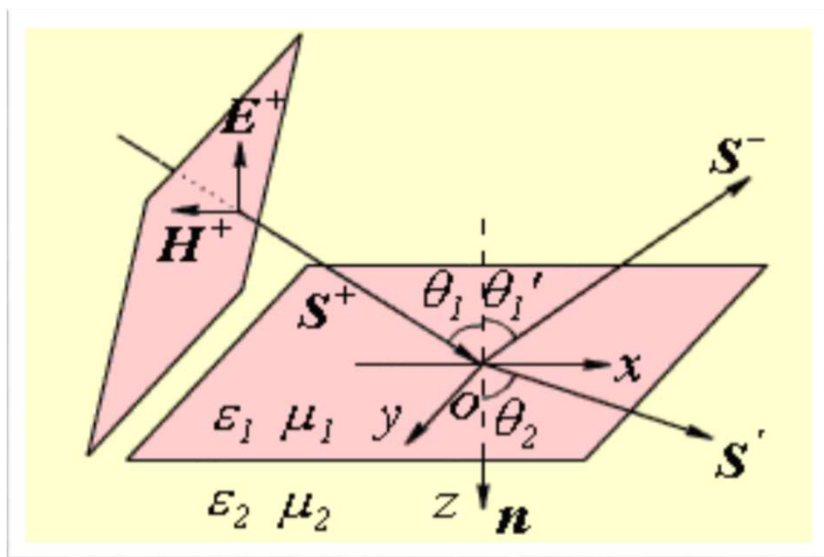
换言之，矢量 $E$ 可用两个分量表示或分解为两个分量。 $H$ 亦如此。

因此电磁波可以分解为两种：

$E$ 垂直于入射面的波，称为**垂直极化波**，另一种是位于入射面的**平行极化波**。



垂直极化波



平行极化波

对于垂直极化波，在媒质1中有： $\dot{E}_\perp = \dot{E}_\perp^+ + \dot{E}_\perp^-$        $\dot{H}_{//} = \dot{E}_\perp / Z_{01}$

在媒质2中有： $\dot{E}'_\perp$        $\dot{H}'_{//} = \dot{E}'_\perp / Z_{02}$

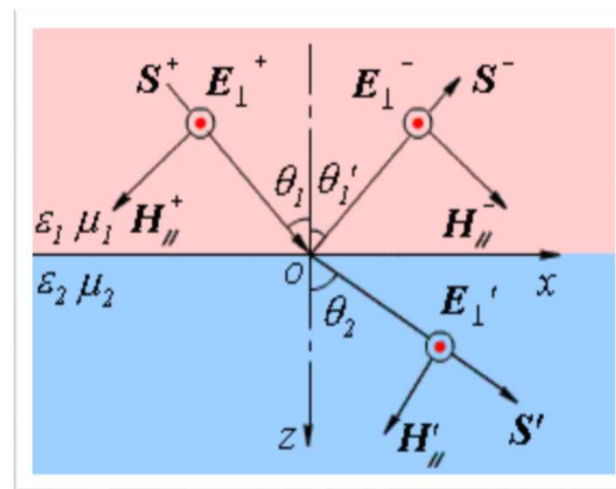
在  $z=0$  平面上必有： $E_{1t}=E_{2t}$ ,  $H_{1t}=H_{2t}$ ,

( $H$ 的下标//表示平行；  
上标表示下半区域的场量)

$$\begin{cases} \dot{E}_\perp^+ + \dot{E}_\perp^- = \dot{E}'_\perp \\ -\frac{\dot{E}_\perp^+}{Z_{01}} \cos \theta_1 + \frac{\dot{E}_\perp^-}{Z_{01}} \cos \theta_1 = -\frac{\dot{E}'_\perp}{Z_{02}} \cos \theta_2 \end{cases}$$

解得：

$$\begin{cases} \Gamma_\perp = \frac{\dot{E}_\perp^-}{\dot{E}_\perp^+} = \frac{Z_{02} \cos \theta_1 - Z_{01} \cos \theta_2}{Z_{02} \cos \theta_1 + Z_{01} \cos \theta_2} & \text{反射系数} \\ T_\perp = \frac{\dot{E}'_\perp}{\dot{E}_\perp^+} = \frac{2Z_{02} \cos \theta_1}{Z_{02} \cos \theta_1 + Z_{01} \cos \theta_2} & \text{透射系数} \end{cases}$$



对有损媒质也类似。因此，若区域2为理想导体，即阻抗为零或很小，则透射系数为零，故无论入射角为何，都会发生全反射。此时界面上  $\dot{E}_\perp^+ = -\dot{E}_\perp^-$ 。此为电磁波屏蔽原理；微波炉外壳屏蔽与对导体不能加热的原理。雷达原理是接收回波，若飞机无与发射方向垂直的面，可实现隐身。

若为正入射,  $\theta_1 = \theta_2 = 0$  则  $\Gamma_\perp = \frac{Z_{02} - Z_{01}}{Z_{01} + Z_{02}}$        $T_\perp = \frac{2Z_{02}}{Z_{01} + Z_{02}}$

用类似方法可得平行极化波的反射系数与折射系数。

## 第8节 导电媒质中传播的平面电磁波（有损耗）

由麦克斯韦方程，并将传导电流密度 $\mathbf{J}(=\sigma\mathbf{E})$ 视为未知量，可推得：在导电媒质中场强满足广义波动方程：

$$(\nabla^2 - \mu\sigma\frac{\partial}{\partial t} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2})\mathbf{E} = 0$$

相量形式为：  $(\nabla^2 - j\omega\mu\sigma + \omega^2\mu\varepsilon)\dot{\mathbf{E}} = 0$

$$\nabla^2\dot{\mathbf{E}} + \omega^2\mu(\varepsilon - j\frac{\sigma}{\omega})\dot{\mathbf{E}} = \nabla^2\dot{\mathbf{E}} + \omega^2\mu\varepsilon_c\dot{\mathbf{E}} = \nabla^2\dot{\mathbf{E}} - \Gamma^2\dot{\mathbf{E}} = 0$$

$$\varepsilon_c = \varepsilon - j\frac{\sigma}{\omega} \text{ 称为复介电常数}$$

方程的解为：  $\dot{\mathbf{E}}(r) = \dot{\mathbf{E}}_0^+ e^{-\Gamma r} + \dot{\mathbf{E}}_0^- e^{\Gamma r} = \dot{\mathbf{E}}_0^+ e^{-(\alpha + j\beta)r} + \dot{\mathbf{E}}_0^- e^{(\alpha + j\beta)r}$

$\Gamma = \sqrt{-\omega^2\mu\varepsilon_c} = \alpha + j\beta$  称为传播常数，实部表示幅值衰减。

衰减常数：  $\alpha = \omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}[\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2\varepsilon^2}} - 1]}$       相位常数：  $\beta = \omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}[\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2\varepsilon^2}} + 1]}$

$$\beta = \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} \left[ \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2 \epsilon^2}} + 1 \right]} \quad v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} \left[ \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2 \epsilon^2}} + 1 \right]}} \quad \lambda = Tv = \frac{v}{f} = \frac{2\pi}{\beta}$$

在理想介质中波速 $v$ 与频率无关，只与材料特性参数有关。

电磁波的相速随频率而改变的现象称为**色散效应**。

**几个结论：**

频率一定时，电导率越大，则波速 $v$ 越小，波长越小。

电导率越大，衰减常数 $\alpha$ 也越大，衰减越快。

故导电的海水中电磁波衰减要大于空气，良导体衰减更快。

频率越大， $\alpha$ 也越大，电磁波的衰减越严重。

**所以在海水中通信要用低频**。而低频天线发射效率低，所以潜艇要想发出远距离信号不易，潜艇更多的是接受指令。

若导电媒质中有多个频率的波，其相速会不同，其合成场会有一个包络线，将包络线的相速定义为**群速**，表示合成波的一种特性。

对于良导体,  $\sigma \gg \omega\epsilon$ , 则有:  $\alpha = \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} \left[ \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2 \epsilon^2}} - 1 \right]} \approx \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} \approx \beta$

将  $d = \frac{1}{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}$  称为透射波的透入深度。

500kHz下, 铜和铁的透入深度分别约为: 0.09mm和0.007mm。

- 对电磁波的屏蔽导体板可选择5倍于透入深度的厚度。
- 电磁波只能对导体的表面加热; 且仅较小部分能透入导体中。
- 频率越高、磁导率电导率越大, 透入深度越小, 且反射越强。
- 对理想导体, 认为 $\sigma$ 无限大, 则导体内的 $E$ 度一定为零, 否则电流密度为无限大, 因此电磁波 ( $E$  和  $H$ ) 发生全反射。
- 可见, 电磁波与低频磁场在导体内产生电流的机理不同: 前者是能量的入射 (微波炉原理)、后者是电磁感应的结果 (电磁炉原理)。
- 因此, 高频电磁波与低频电磁场的屏蔽原理也不同。
- 故此, 分清所分析的问题中是哪一类时变场、是准静态场还是电磁波非常重要, 这样才能选取合适的数学模型以反映主要问题, 然后采用相应的计算方法与物理原理来正确有效地分析。

## 第10节 金属波导与谐振腔

如何将电磁波像传输电流那样从一处不损失、不发散地传到另一处？除了前面提到的介质波导还有金属波导。

金属波导是空心金属管。有矩形截面和圆形截面两种。

适用的波段为微波波段：300MHz-300GHz，波长1m-1mm。

其原理是利用高频电磁波碰到导体面的基本全反射。

但与介质波导全反射不同的是，

金属波导不要求较大入射角。

电磁波经管壁多次反射曲折地向前传播。

### 谐振腔：

将波导两端用导体板封闭住，构成一个腔体，一定频率的波可在其内部来回反射，形成振荡或谐振。

