一个带有三角函数的积分

求实积分$I=\int_0^{+\infty}\frac{x\sin kxdx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$,　　这里$a,\,b,\,k$ 是正数.

解. 显然,

$$I=\frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{xe^{ikx}}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}dx. \tag{0.1}$$

令

$$R>\max\{a,\,b\},\ \Gamma_R=[-R,\,+R]\cup C_R,\ C_R=\{z:z=Re^{i\theta}:\theta\in[0,\,\pi]\}.$$

作闭曲线积分:

$$\oint_{\Gamma_R}\frac{ze^{ikz}dz}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}=\int_{-R}^{R}\frac{xe^{ikx}dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}+\int_{C_R}\frac{ze^{ikz}dz}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}=2\pi i\{C_{-1}^{(1)}+C_{-1}^{(2)}\}.$$

这里

$$C_{-1}^{(1)}=Res[\frac{ze^{ikz}}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)},\,ai],\quad C_{-1}^{(1)}=Res[\frac{ze^{ikz}}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)},\,bi].$$

由于$\deg z=1,\deg(z^2+a^2)(z^2+b^2)=4>1+1$, 知

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R}\frac{ze^{ikz}dz}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}=0.$$

令$R\to+\infty$, 从上面的分析可得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{xe^{ikx}dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}=2\pi i\{C_{-1}^{(1)}+C_{-1}^{(2)}\}.$$

再由(0.1)可得

$$I=\frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{xe^{ikx}}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}dx=\pi\{C_{-1}^{(1)}+C_{-1}^{(2)}\}. \tag{0.2}$$

由一阶极点留数的计算公式,当$a\neq b$时,

$$\begin{aligned}C_{-1}^{(1)}&=Res[\tfrac{ze^{ikz}}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)},\,ai]\\&=Res[\tfrac{ze^{ikz}}{z^4+(a^2+b^2)z^2+a^2b^2},\,ai]\\&=\tfrac{aie^{-ka}}{4(ai)^3+2(ai)(a^2+b^2)}\\&=\tfrac{e^{-ka}}{2(b^2-a^2)}.\end{aligned}$$

交换a,b的角色,可得

$$C_{-1}^{(2)}=Res[\frac{ze^{ikz}}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)},\,bi]=\frac{e^{-kb}}{2(b^2-a^2)}.$$

由此可得所求的积分值为

$$I = \frac{\pi}{2(b^2 - a^2)}(e^{-ka} - e^{-kb}).$$

而当$b = a$时，在上式中取极限，由$L'Hospital$法则，可得

$$I = \lim_{b \to a} \frac{\pi}{2(b^2 - a^2)}(e^{-ka} - e^{-kb}) = \frac{k\pi}{4ae^{ka}}.$$

即

$$\int_0^{+\infty} \frac{x \sin kx}{(x^2 + a^2)^2} dx = \frac{k\pi}{4ae^{ka}}.$$