1.3 矢量的表示方法与运算　　　　作业：计算题1、2、3

1.3.1 矢量（vector）及其表示形式

空间一点上有一个既有大小又有方向的量 $\vec{A}$

（<u>书写一定要标上箭头</u>；印刷一定要黑体。变量要用斜体）

图像表示：

空间矢量要基于坐标系来表示或描述。

空间独立变量个数是3，所以建立任意相互垂直的三个单位矢量，便可以利用矢量在这三个方向上的投影分量来表示。

三个单位矢量构成坐标系的坐标轴单位矢量。

当然，坐标系的三个轴可以不垂直，只要三矢量不共面就行，只是三轴垂直的坐标系较简单。

另有，标量（scalar）：只有大小。

还有一种是有正负的、或有正反向的标量，如电流。

一个任意矢量如何表示？

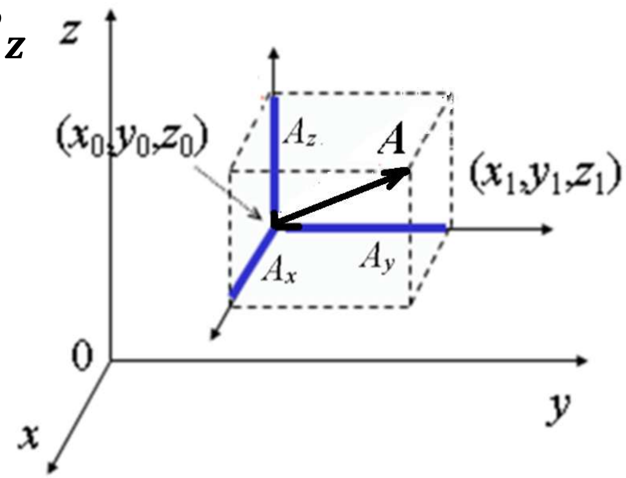
用矢量的起始与终止点坐标和坐标轴单位矢量表示：

$$\boldsymbol{A}=(x_1-x_0)\mathbf{e}_x+(y_1-y_0)\boldsymbol{e}_y+(z_1-z_0)\boldsymbol{e}_z$$

每个坐标分量就是矢量向三个轴的投影。

该矢量的起始点是固定的，

矢量是唯一的，可称为固定矢量。



若将上式写为： $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_x\mathbf{e}_x+\boldsymbol{A}_y\boldsymbol{e}_y+\boldsymbol{A}_z\boldsymbol{e}_z$

其掩盖了矢量的起始点，无数个平行的、起始点不同的矢量都符合上面的表达式，将这种表现形式的矢量称为自由矢量。

虽自由矢量不唯一，但如下形式的矢量函数（各坐标分量是空间变量(x, y, z)的函数）或矢量场的含义是明确唯一的：

$$\boldsymbol{A}(x,y,z)=A_x(x,y,z)\boldsymbol{i}+A_y(x,y,z)\boldsymbol{j}+A_z(x,y,z)\boldsymbol{k}$$

若问场在点P(x_0, y_0, z_0)处的值则是指起始于该点的固定矢量。

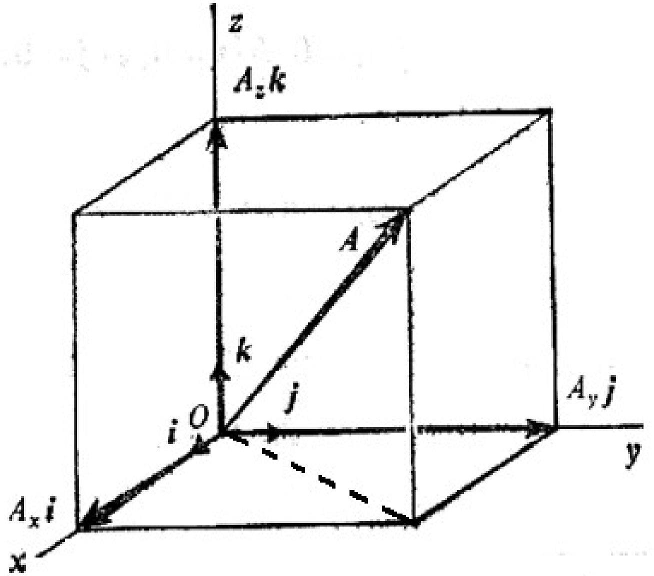
坐标分量

$$\boldsymbol{A}(x,y,z)=\underline{\overline{A_x(x,y,z)}\boldsymbol{i}}+A_y(x,y,z)\boldsymbol{j}+A_z(x,y,z)\boldsymbol{k}$$

坐标分矢量　　坐标单位矢量

矢量的长度或模为（利用勾股定理）

$$|\boldsymbol{A}|=A=\sqrt{A_x^2+A_y^2+A_z^2}$$



模为1的矢量称为<u>单位矢量</u>。

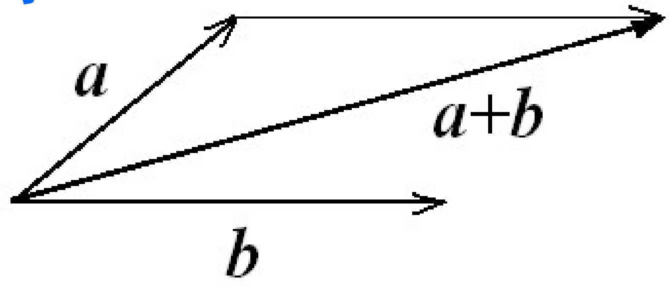
一矢量的单位矢量如何计算？

矢量除以其模便得其对应的单位矢量：

$$\boldsymbol{A}^0=\frac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|}=\frac{A_x\boldsymbol{i}+A_y\boldsymbol{j}+A_z\boldsymbol{k}}{\sqrt{A_x^2+A_y^2+A_z^2}}=\cos\alpha\ \boldsymbol{i}+\cos\beta\ \boldsymbol{j}+\cos\gamma\ \boldsymbol{k}$$

1.3.1 矢量的代数运算

矢量运算只能对起始点相同的固定矢量进行。
若给出的是自由矢量，暗含起始点相同。



a）两矢量相加

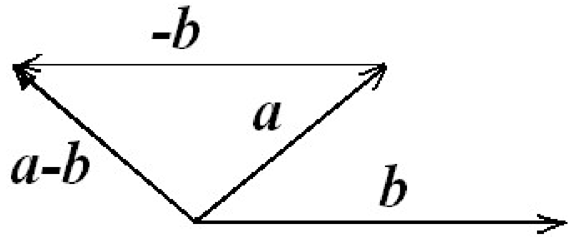
等于对应分量相加

$$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k} \qquad \boldsymbol{b} = b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (a_x + b_x)\boldsymbol{i} + (a_y + b_y)\boldsymbol{j} + (a_z + b_z)\boldsymbol{k}$$

b）两矢量相减

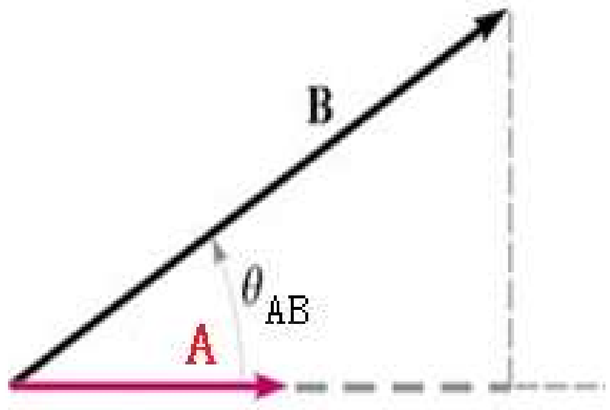
$$\boldsymbol{a}\text{-}\boldsymbol{b} = (a_x - b_x)\boldsymbol{i} + (a_y - b_y)\boldsymbol{j} + (a_z - b_z)\boldsymbol{k}$$



圆柱和球坐标系下法则相同。因都是用三垂直坐标矢量表示矢量。

两个矢量相加的典型实例是两个力作用于同一个物体上的合力。

c) 两矢量的点积（Dot Product）



定义： $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\cos(\theta_{\mathrm{AB}})$

含义是本矢量的模乘另一矢量在本矢量方向上的投影，故也叫投影积。

两矢量点积结果为标量或数量，故也叫数量积。

若两非零矢量点积为0，说明两矢量如何？垂直

点积的另一种计算方法：（注意点积符合分配率）

直角坐标系 $\mathbf{A}_1\cdot\mathbf{A}_2=\left(A_{1x}\mathbf{e}_x+A_{1y}\mathbf{e}_y+A_{1z}\mathbf{e}_z\right)\cdot\left(A_{2x}\mathbf{e}_x+A_{2y}\mathbf{e}_y+A_{2z}\mathbf{e}_z\right)$

$$=A_{1x}A_{2x}+A_{1y}A_{2y}+A_{1z}A_{2z}$$

圆柱坐标系 $\mathbf{A}_1\cdot\mathbf{A}_2=A_{1r}A_{2r}+A_{1\alpha}A_{2\alpha}+A_{1z}A_{2z}$

球坐标系 $\mathbf{A}_1\cdot\mathbf{A}_2=A_{1r}A_{2r}+A_{1\theta}A_{2\theta}+A_{1\alpha}A_{2\alpha}$

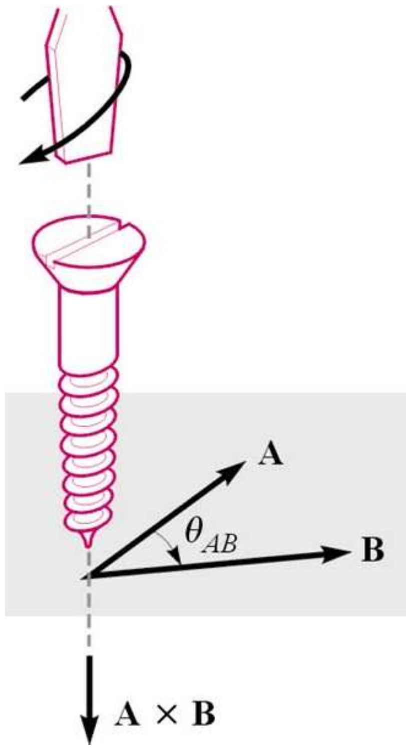
点积有三种计算方法！

顺便指出，数量h与矢量$\boldsymbol{a}$相乘书写方式为$h\boldsymbol{a}$，
其结果等于将矢量$\boldsymbol{a}$放大h倍，也等于将$\boldsymbol{a}$的各坐标分量乘以h。

d) 矢量叉积（Cross Product）

两矢量叉积结果为矢量，定义为：

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \boldsymbol{e}_n |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}| \sin(\theta_{\mathrm{AB}})$$



含义：模为两边构成的平行四边形的面积。

若两非零矢量叉积为0，说明两矢量？平行

另一种计算方法（直角坐标系下）：

$$\boldsymbol{A}_1 \times \boldsymbol{A}_2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ A_{1x} & A_{1y} & A_{1z} \\ A_{2x} & A_{2y} & A_{2z} \end{vmatrix}$$

满足负交换律：

$$\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2 = -\mathbf{A}_2 \times \mathbf{A}_1$$

圆柱坐标系和球坐标系类似。

矢量乘法恒等式：$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})$

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}) - \boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})$$

1.4 源点(P1) 指向场点(P2)的矢量*R*

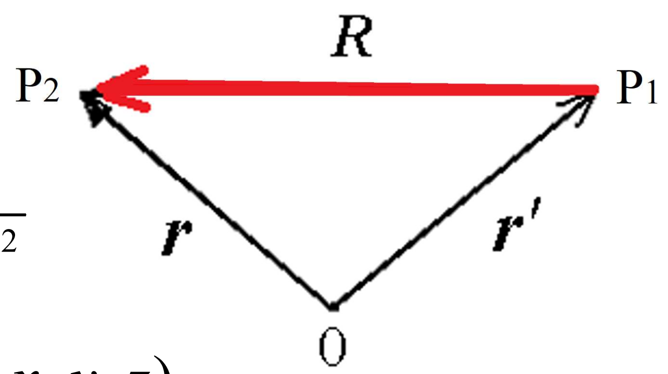
经常会用到两点的距离矢量*R*，所以专门解释其确切含义。

空间每一点对应一个矢径，或空间一点都可用矢径表示。

假设P1点的矢径为： $\boldsymbol{r}' = x'\boldsymbol{i} + y'\boldsymbol{j} + z'\boldsymbol{k}$ 带撇一般表示源点

P2点的矢径为： $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ 一般表示场点

P1点指向P2点的矢量为（源点在后）：



$$\boldsymbol{R} = R\boldsymbol{R}^0 = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}' = |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|\boldsymbol{R}^0$$

$$R = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$$

应将*R*视为6个自变量的函数 $R(x', y', z', x, y, z)$

注意对*R*的不同变量的微分运算：

$$\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{x-x'}{R}, \quad \frac{\partial R}{\partial x'} = -\frac{x-x'}{R} = -\frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{1}{R}\right) = \frac{x-x'}{R^3} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{R}\right)$$

显然，若定义 $\boldsymbol{R} = R\boldsymbol{R}^0 = \boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}$，则微分会差一个负号。

第3节 描绘场分布的方法

场线（面）、场云图、矢量场的箭头图

a）标量场的等值面（线）

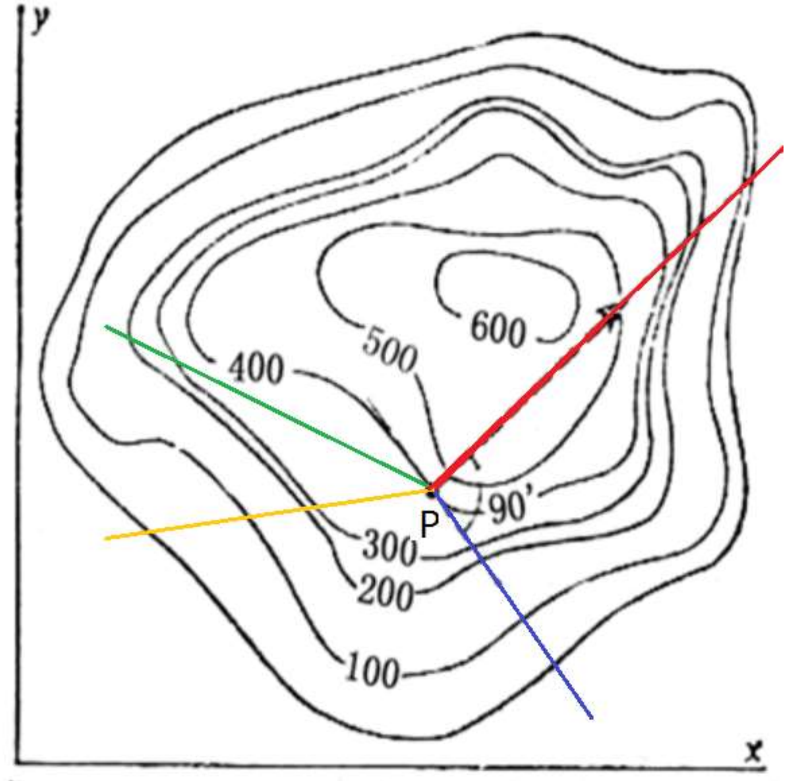
三维标量场的等值面方程：

$$\boxed{h(x,y,z)=\text{const}}$$

二维场域中则为等值线。

若h为已知函数，给一个常数可画一等值面或线。

也可以采用在坐标系中设置网格，计算网格节点上的值，再通过描点的方法画等位线。



等值线

思考题：如何根据图中h分布与坐标长度（为1:10mm）近似计算P点沿几个方向的变化率？微分近似为差分进行计算。

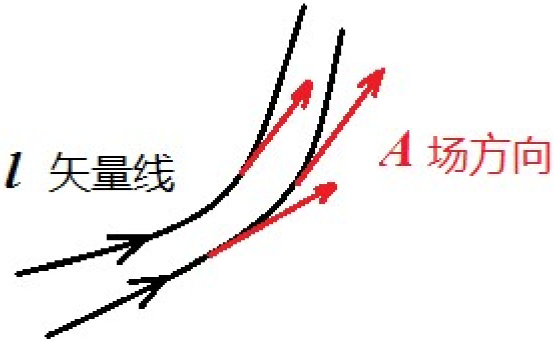
b）矢量场的矢量线（力线），其每点的切线是场的方向。

故矢量场**A**的矢量线**l**的方程形式为：$\boxed{\boldsymbol{A}\times \mathrm{d}\boldsymbol{l}=0}$

在直角坐标下有：

$$\boldsymbol{A}=A_x\boldsymbol{i}+A_y\boldsymbol{j}+A_z\boldsymbol{k}$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\mathrm{d}x\boldsymbol{i}+\mathrm{d}y\boldsymbol{j}+\mathrm{d}z\boldsymbol{k}$$



二维场 $\boxed{\dfrac{A_x(x,y)}{\mathrm{d}x}=\dfrac{A_y(x,y)}{\mathrm{d}y}}$

三维场 $\boxed{\dfrac{A_x}{\mathrm{d}x}=\dfrac{A_y}{\mathrm{d}y}=\dfrac{A_z}{\mathrm{d}z}}$

$$y'=\frac{A_y(x,y)}{A_x(x,y)}$$

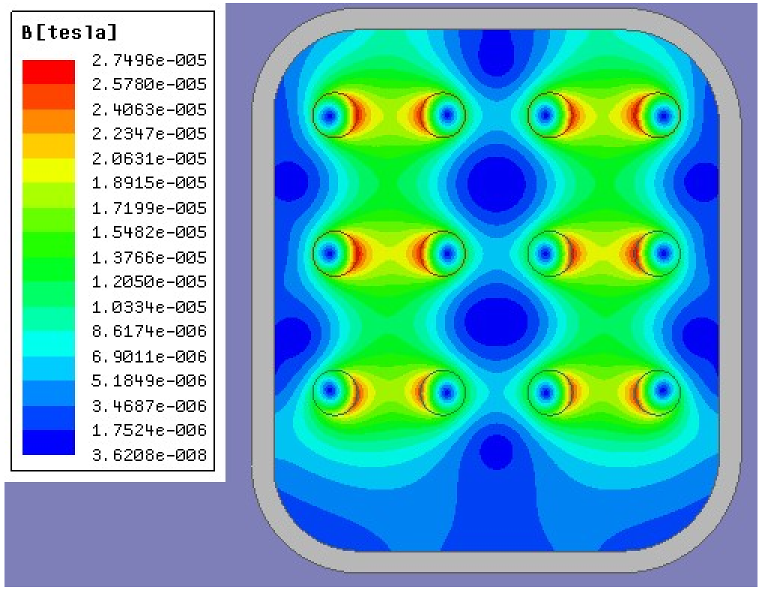
可解出该微分方程后画力线，但有时解不出。

二维中步进近似画法：

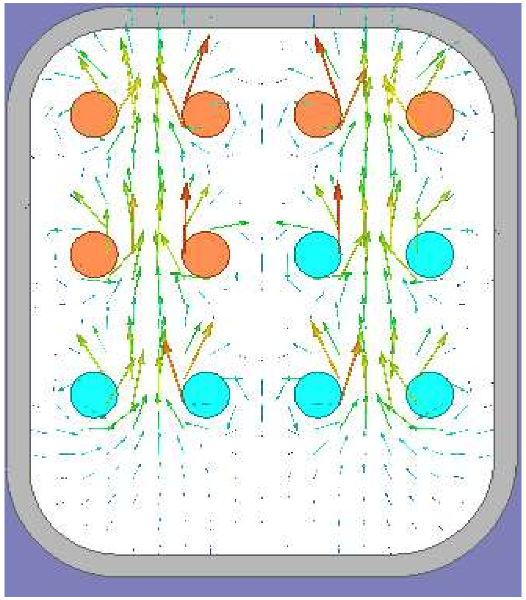
$$\Delta y=\frac{A_y(x,y)}{A_x(x,y)}\Delta x \qquad y_1=\frac{A_y(x_0,y_0)}{A_x(x_0,y_0)}(x_1-x_0)+y_0$$

c）矢量场的模或标量场的云图

6对载流导线的磁场



d）矢量场的箭头表示



第2章 矢量场的散度与散度方程

作业：习题2、3

共有两类产生矢量场的源：标量源和矢量源（如电荷密度ρ与电流密度$\boldsymbol{J}$）

散度表述场与标量源的关系，而旋度表述场与矢量源的关系。

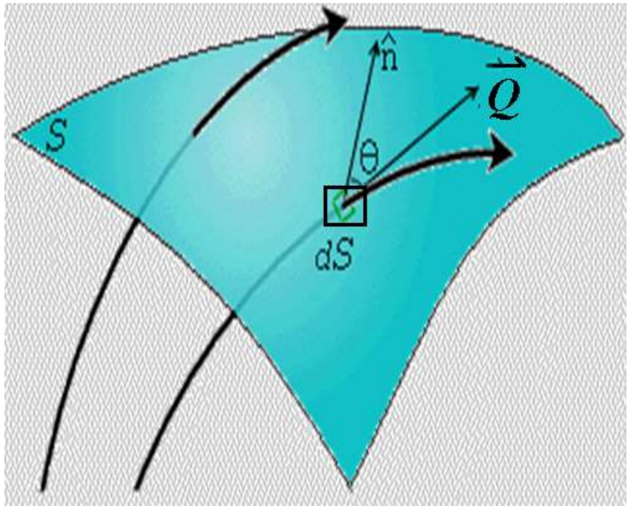
2.1 通量及通量源

2.1.1 通量

通量定义为矢量$\boldsymbol{Q}$在有向曲面$\boldsymbol{S}$上的积分：

$$\boxed{\Phi = \iint_S \boldsymbol{Q} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iint_S \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S}$$

$\boldsymbol{n}$为$\boldsymbol{S}$的法向



如何具体计算？答：变为标量面积分。

$$\Phi = \iint_S Q\cos\theta \mathrm{d}S = \iint_S Q_n \mathrm{d}S$$

θ是矢量$\boldsymbol{Q}$与$\boldsymbol{S}$的法向$\boldsymbol{n}$的夹角。

若$\boldsymbol{Q}$在$\boldsymbol{S}$上处处相等、且垂直于$\boldsymbol{S}$，则有：$\Phi = SQ$

2.1.2 闭合面的通量与通量源的关系

闭合面通量 $\Phi = \oiint_S \boldsymbol{Q} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 可表示什么？ $\Phi = \oiint_S \boldsymbol{Q} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = q$

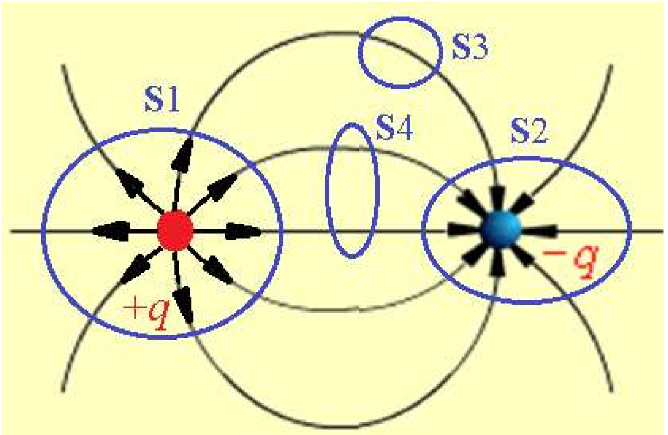
可以证明：其可表示闭合面内的总标量源，其等于面内总源，此称为高斯通量定理。

由流体的源与流量密度场等实际问题不难理解高斯通量定理的正确性。

推论：在所包围的源相同的情况下，不论闭合面的大小与形状如何，闭合面积分都相等。

基于该特性，就可用场的闭合面通量表示场与源的关系，可建立场与标量源的关系。

此为两个电荷的电场。
也可想象成水从一个孔流向另一个孔或无限远处。



椭球面S1上的通量为q； S2面上的通量为-q；S3、S4上为零 。

为了描述任意点处源的特性（哪里有产生场的源），可让闭合面收缩为零，到一点上，由此引入散度概念。

闭合面收缩为零时通量也趋于零，故需除一趋于零的量。

2.2 散度（divergence）的定义与运算形式

（可认为是闭合面通量的体密度） **sǎn**：松散、散漫

sàn：分散、散开、天女散花

1）定义：对矢量场$\boldsymbol{Q}$，包含M点作小闭合面$\Delta\boldsymbol{S}$，其通量与$\Delta\boldsymbol{S}$包围的体积ΔV之比取体积趋于零的极限，称为矢量场$\boldsymbol{Q}$在点M处的散度：

$$\mathrm{div}\boldsymbol{Q} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta\Phi}{\Delta V} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oiint_{\Delta S} \boldsymbol{Q} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\Delta V}$$

2）计算法：不用定义式。基于定义式可以证明，散度的求法为：

直角坐标系下：$$\boxed{\mathrm{div}\boldsymbol{Q} = \nabla \cdot \boldsymbol{Q} = \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + \frac{\partial Q_z}{\partial z}}$$

$$\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

圆柱坐标系下：$$\boxed{\nabla \cdot \boldsymbol{Q} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rQ_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial Q_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial Q_z}{\partial z}}$$

散度的结果是标量函数

球坐标系下：$$\boxed{\nabla \cdot \boldsymbol{Q} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 Q_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(Q_\theta \sin\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial Q_\alpha}{\partial\alpha}}$$

2.3 散度方程：标量源与矢量场在各点上的关系

散度等于通量源的体密度(称为散度源或标量源)：

$$\nabla\cdot\boldsymbol{Q}=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\Delta\Phi}{\Delta V}=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\oiint_{\Delta S}\boldsymbol{Q}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\Delta V}=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\iiint_{\Delta V}\rho(x,y,z)\mathrm{d}V}{\Delta V}=\rho(x,y,z)$$

- 散度给出了场与标量源的关系。
- 这就是引入散度的目的。其不是为了表示场的变化率。
- 在没有源的地方，即便场有空间变化率，此处的散度也为零。
- 直角坐标系中的散度方程：

$$\nabla\cdot\boldsymbol{Q}=\frac{\partial Q_x}{\partial x}+\frac{\partial Q_y}{\partial y}+\frac{\partial Q_z}{\partial z}=\rho(x,y,z)$$

- 若已知源分布，可以通过解散度约束的微分方程得到$\boldsymbol{Q}$吗？
- 否！还得结合其它限定方程，即下面介绍的旋度方程。
- 散度微分方程中有三个未知函数，只靠一个方程无法解出。

2.4 标量源的矢量场之性质

标量源的矢量场$\boldsymbol{E}$是守恒场（也称保守场），这种场仅具有势能。场的作用力将一个物体移动一周回到原位所做的功等于零。

基于功等于作用力对运动路径的线积分以及场量与力的关系，可得守恒场的场量的闭合环路积分等于零，即

$$\oint_l \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \equiv 0$$

- 标量源产生的矢量场的矢量线的特点：

  从正源出发终止于负源（或无限远），不闭合。

  若闭合，则闭合环路积分就不一定为零了。

2.5 高斯公式： $\iiint_V \nabla\cdot \boldsymbol{Q}\,\mathrm{d}V = \oiint_S \boldsymbol{Q}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$

给出了一个矢量函数的体积分转换为面积分的方法。

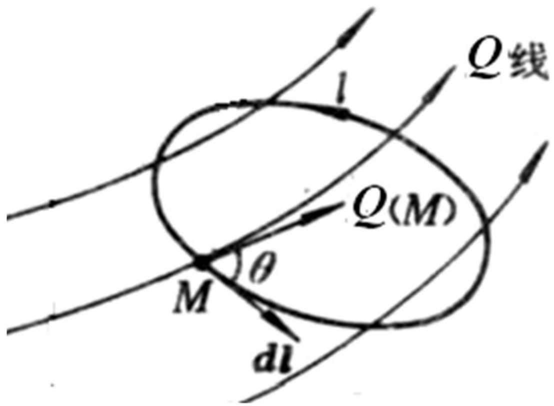
方程左侧：$\boldsymbol{Q}$的散度等于散度源，体积后为V内的通量源；

方程右侧： $\boldsymbol{Q}$的闭合面积分即通量等于通量源。

第3章 矢量场的旋度与旋度方程

3.1 线积分与环量及环量源

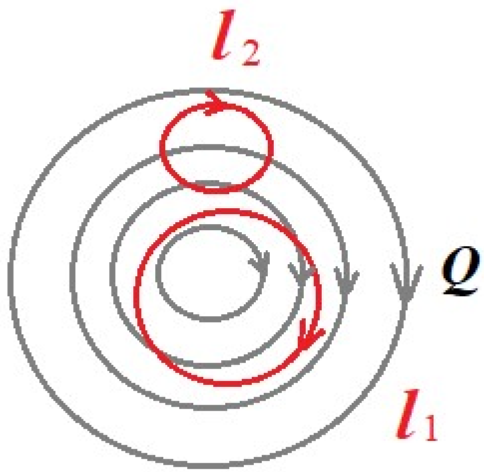
1）环量的定义



对$\boldsymbol{Q}$沿闭合有向曲线$\boldsymbol{l}$的线积分定义为环量：

$$\Gamma = \oint_l \boldsymbol{Q} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

$$\Gamma = \oint_l \boldsymbol{Q} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \oint_l \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{t}\mathrm{d}l = \oint_l Q\cos\theta \mathrm{d}l = \oint_l Q_t \mathrm{d}l$$



环量结果为标量。

容易理解，“涡旋”场的环量才可能不为零；

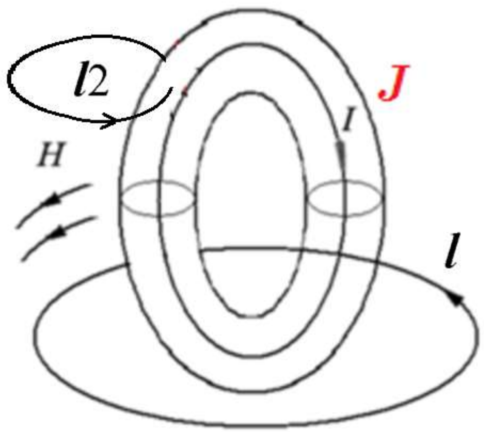
图示二维涡旋场$\boldsymbol{Q}$，l_1上的环量一定不为零；

l_2上的环量是否为零不一定。

标量源的场之环量一定处处为零。

环量不为零的场一定不是标量源产生的，那一定是矢量源产生的。

2）环量与环量源的关系



$$\oint_{l2} \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{l} = I / 3$$

- 矢量源的场中一定有环量不等于零的区域。
- 引进环量的目的是为了表述场与矢量源的关系。
- 将矢量源$\boldsymbol{J}(x, y, z)$的通量I(其为标量)称为环量源。
- 可以证明：场的环量等于环路所交链的总环量源：

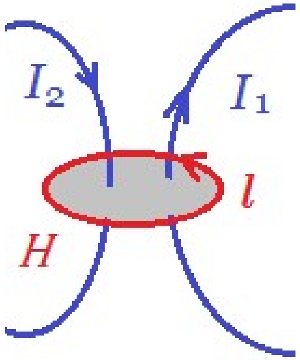
$$\oint_{l} \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{l} = \sum I_{\mathrm{i}}$$

- 推论：在包围的环量源相同的情况下，不论闭环路的大小与形状如何，环路积分都相等。
- 基于该特性，就可利用场的环量来表示场与环量源的关系，就可建立一种场与场源的关系。
- 这个关系很神奇，可见数学的伟大，可见安培、麦克斯韦的伟大！

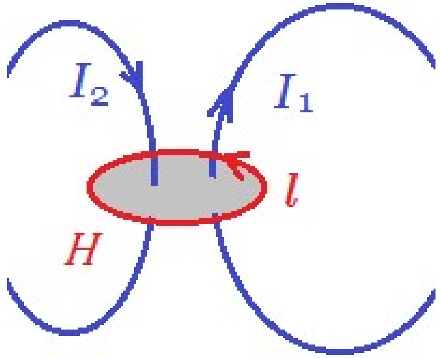
- 旋涡场的矢量线是闭合曲线（散度为零）。
- 闭合矢量源的矢量线与其场的矢量线相互交链或“嵌套”。

分析与解释：

如果 $\oint_l \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = I_1 - I_2$ 正确，



那该式对下图也正确吗？
与电流的长短形状没有关系？



可能成立的形式： $\oint_l \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = k_1 I_1 - k_2 I_2$

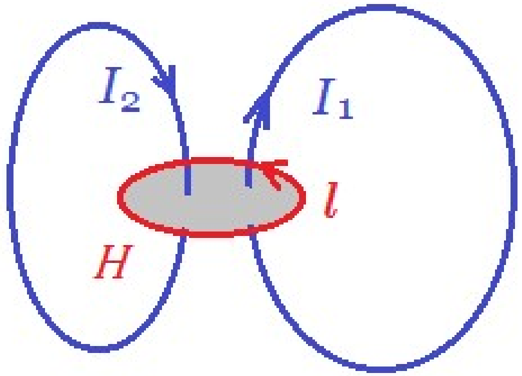
且给出不同电流长度和形状下k的取值。此种表达式实际用途很小。

如果对源的特性进行限定，就可能不用给出与电流长度和形状有关的k了。

这个限定是：电流闭合。

可以证明：环量与其交链的闭合区域的矢量源的总通量成正比，与源区和环路形状无关。

条件：矢量(环量)源具有处处等通量性。



$$\oint_l \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = I_1 - I_2$$

交链是指两个闭合的环线或环状区域的嵌套关系。

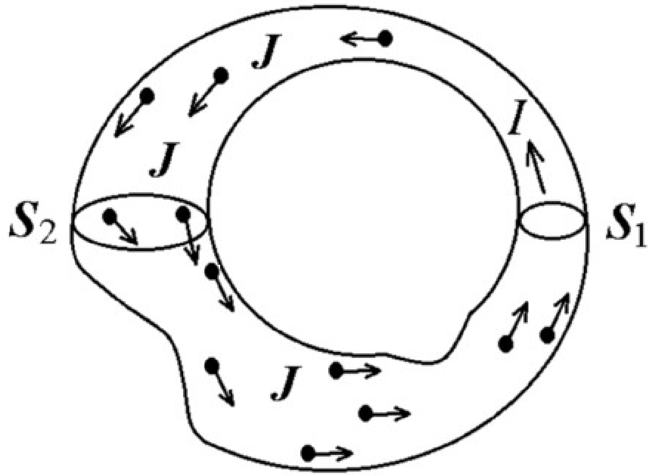
3）环量源或矢量源的特点

利用环量来表示场与源的关系是有条件的，

要求环量源对应的矢量源具有“管形等通量性”

这需满足三个条件：（1）定义域为有限区域；（2）在定义域边界上矢量函数无法向分量；（3）总通量处处相等。

- 总通量相等的充分必要条件是在场域内处处有闭合面的通量为零；
- 这等价于区域内处处无散度源或标量源；
- 而无标量源则等价于矢量函数的散度处处为零；
- 因此通量处处相等等价于无散： $\nabla \cdot \boldsymbol{J} = 0$



$$I = \iint_S \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

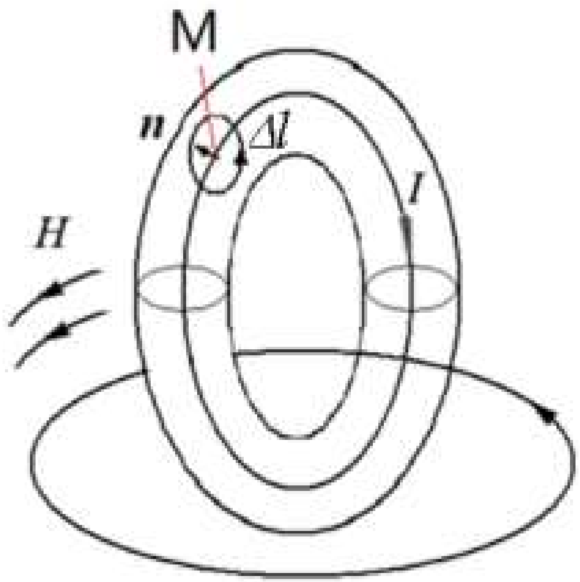
- 故，“管形等通量性”的代名词就是有限区域中的矢量函数散度为零或无散，无散也包含了表面无法向分量的要素。

对空间点如何办？

如何利用环量表示一个点上的管形等通量性的矢量源？

现在来看源区域内的环量。

- 对源区域内的一个环路Δl，其环量等于环路所限定的面积中穿过的那部分环量源。对磁场为导体中的部分电流。
- 显然，对M点处的一个小环路，若l构成的面积的方位角不同，则其面积上通过的电流就不同，即环量值就不同。
- 且一定存在一个环量值最大的方位。
- 为描述M点处的源，应利用最大环量。
- 在此基础上引入旋度概念。



3.2 旋度方程：矢量源与矢量场的关系

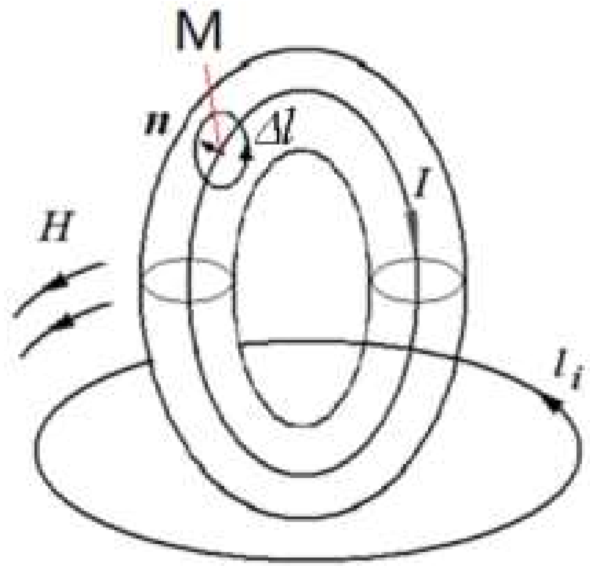
1）旋度(curl 或 rotation)的定义

（可认为是环量面密度的最大值）

为表征矢量源的分布或源在点上的特性引入旋度概念。

取M点的一个方向$\boldsymbol{n}$，过M点作一个法向为$\boldsymbol{n}$的小曲面$\Delta\boldsymbol{S}$，其边界为$\Delta\boldsymbol{l}$，其方向与$\boldsymbol{n}$成右手螺旋关系，则沿其正方向的环量与面积之比取极限，称为环量面密度：

$$\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta\Gamma}{\Delta S}=\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\oint_{\Delta l}\boldsymbol{Q}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}}{\Delta S}$$



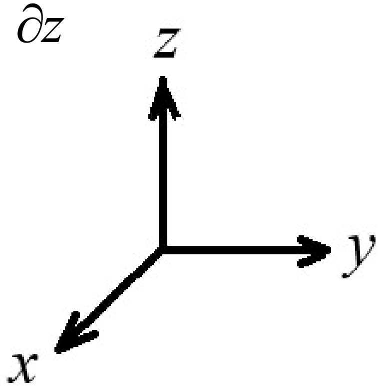
定义一个矢量为M点处的旋度，其模等于环量面密度的最大值，方向为取得该最大值时$\boldsymbol{n}$的方向。

2）旋度的计算方法

基于定义式可以证明，直角坐标系下旋度的计算方法：

$$\mathrm{curl}\boldsymbol{Q} = \nabla\times\boldsymbol{Q} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix} \qquad \nabla \equiv \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

$$=\left(\frac{\partial Q_z}{\partial y} - \frac{\partial Q_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial Q_x}{\partial z} - \frac{\partial Q_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial Q_y}{\partial x} - \frac{\partial Q_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}$$



一个矢量函数$\boldsymbol{Q}$与其旋度结果矢量的关系认识：

设 $\nabla\times\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{B}=B_x\boldsymbol{i}+B_y\boldsymbol{j}+B_z\boldsymbol{k}$ ，因此有：$B_z = \dfrac{\partial A_y}{\partial x} - \dfrac{\partial A_x}{\partial y}$

故此，$\boldsymbol{B}$的一个分量(如B_z)等于以该分量为法向的平面内，$\boldsymbol{Q}$的两个分量(Q_x和Q_y)沿相异坐标(y或x)的变化率之和，当分量到微分坐标变量与$\boldsymbol{B}$的分量成左手螺旋关系时微分取正，否则取负。

如上式第二项为负是因为从x轴到y轴不是左手螺旋关系。

圆柱坐标系和球坐标系下有不同形式**(见电磁场基础教材331页)**

3.3 旋度方程：矢量源与矢量场的关系

- 矢量函数的旋度结果是矢量。
- 旋度等于环量源的面密度。
- 环量源的面密度称为旋度源，即矢量源。
- 可见，旋度给出了场与矢量源的关系、
- 这就是引入旋度的目的。其不是为了表示场的变化率。
- 在没有矢量源的地方，即便场有空间变化率，此处的旋度也为零。
- 直角坐标系中的散度方程：

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}\qquad\begin{cases}\dfrac{\partial H_z}{\partial y}-\dfrac{\partial H_y}{\partial z}=J_x\\[2mm]\dfrac{\partial H_x}{\partial z}-\dfrac{\partial H_z}{\partial x}=J_y\\[2mm]\dfrac{\partial H_y}{\partial x}-\dfrac{\partial H_x}{\partial y}=J_z\end{cases}$$

- 旋度方程虽然可以写为三个标量方程，且有三个标量函数，
- 但这不是一般的微分方程组，不能通过这三个方程得到方程的解。
- 需要结合散度方程才能得到三个分量或矢量函数的解。

3.4 矢量源的矢量场之性质

矢量源产生的矢量场具有无散性，即 $\nabla\cdot\boldsymbol{H}=0$

以及闭合面上的面积分为零的特性，即 $\oiint_S \boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=0$

矢量源的矢量场无散、有旋，标量源的矢量场无旋、有散。
若一个场的散度与旋度均非零，那一定是标量源与矢量源同时存在，是两种源产生的合成场。

3.5 斯托克斯公式 $\iint_S(\nabla\times\boldsymbol{Q})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\oint_l\boldsymbol{Q}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$

斯托克斯公式给出了一个矢量函数的面积分与其轮廓线上的线积分的恒等或相互转换关系。

上式左端项：矢量场$\boldsymbol{Q}$的旋度等于旋度源$\boldsymbol{J}$，即环量源I的面密度，故旋度源在$\boldsymbol{S}$上的面积分就一定等于$\boldsymbol{S}$的边界线$\boldsymbol{l}$所交链的环量源；上式右端项：$\boldsymbol{l}$上的环量就等于该环量源。

可以证明，任意函数的旋度的散度必为零：$\nabla\cdot\nabla\times\boldsymbol{H}\equiv 0$

关于矢量场的回顾与推论

- “自然界中”矢量场的源有两类：标量源与矢量源。
- 它们产生两类不同特性的场，标量源的场无旋，矢量源的场无散。
- 场与源的关系为何：
  散度表征矢量场与标量源的关系，如 $\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho$
  旋度表征矢量场与矢量源的关系，如 $\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}$
- 若已知标量源分布，可通过求解散度形成的方程与旋度为零的方程构成的方程组得到场。
- 若已知矢量源分布，可通过求解旋度所形成的方程与散度为零的方程构成的方程组得到场。
- 若已知两类源的分布，且它们产生的两类场之间又相互耦合，可通过求解散度与旋度形成的方程组得到场。
- 矢量源一定无散，其矢量线为闭合曲线；且与场的矢量线相交链“嵌套”。