9-3 非稳态导热
Transient Conduction

学习要点:

- **非稳态导热过程中温度场变化规律**
- **换热量的计算方法**
- **Fo和Bi的含义及其对瞬态导热的影响**

主要内容:

- **一维非稳态导热分析解法及求解结果**
- **求解非稳态导热问题的集总参数法**

一、非稳态导热的特点

(1) 周期性问题

周期性变化边界条件下，物体内温度变化呈周期性。如：内燃机汽缸壁、压缩机气缸壁的导热；建筑维护结构（墙体）的导热。

(2) 瞬态问题--非周期性非稳态导热

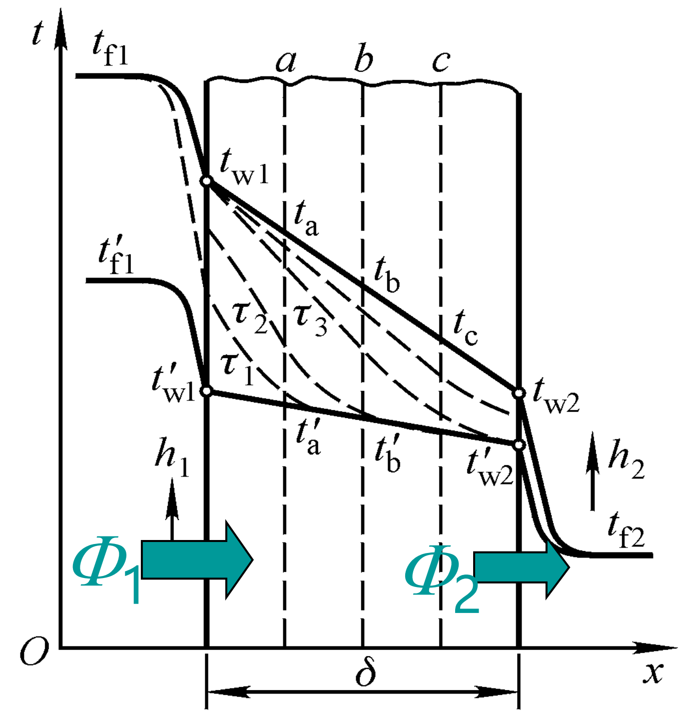
在瞬间变化的边界条件下发生的导热过程，物体内某一点的温度是时间的某个非线性函数，随时间的推移温度不断降低或升高，逐渐趋于定值。如工件的加热或冷却等。

一、非稳态导热的特点

两个阶段：

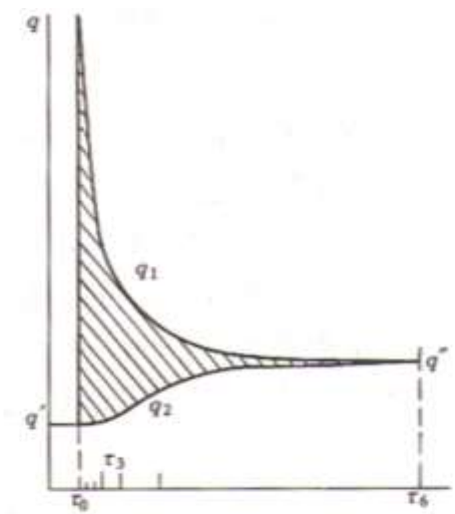
（1）非正规状况阶段： 温度变化的界面逐渐由边界深入到物体内部，但尚未到达另一壁面，温度分布受初始条件影响

（2）正规状况阶段： 初始条件的影响消失(物体内任一点均不处于初始温度)，瞬态导热的主要阶段



正规状况阶段的特点：

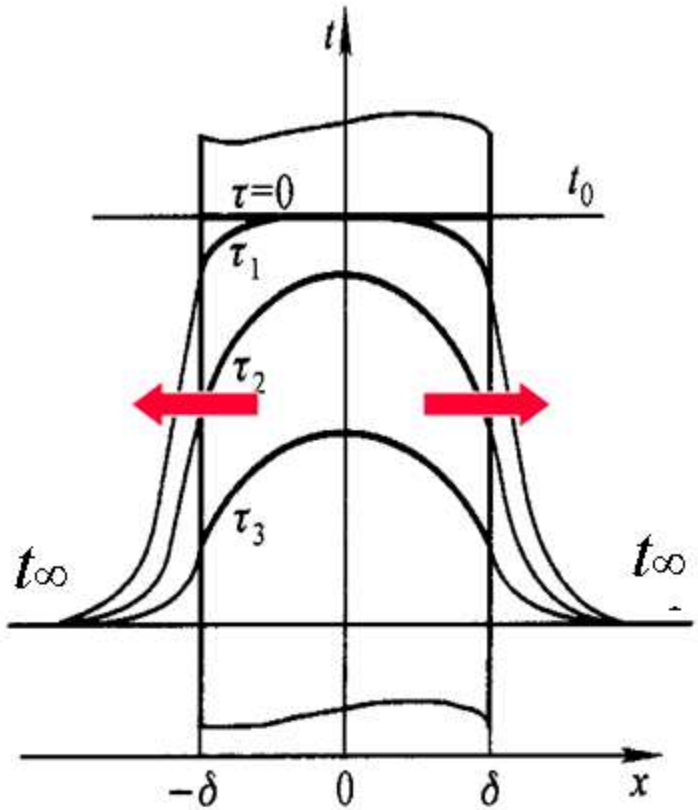
非稳态导热进行了一段时间后，物体内各点的温度变化遵循相同的规律。



二、一维瞬态导热问题的分析解

1、无限大平壁冷却/加热问题的分析解简介

- 常物性平壁，厚度2δ
- 无内热源
- 初始温度为 t_0
- 突然将两侧流体温度降低为t_∞，并保持不变
- 对流换热表面传热系数 h为常数

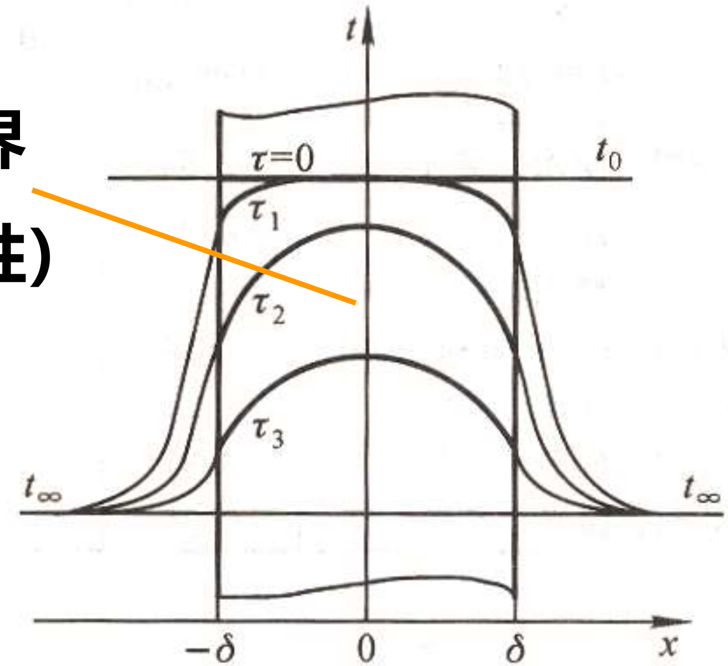


- 由于温度场的对称性，选取坐标系如图，仅需讨论半个平壁的导热问题。
- **一维瞬态导热问题**，其导热微分方程式为:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}$$

绝热边界

(对称性)



初始条件： $\tau = 0, t = t_0$

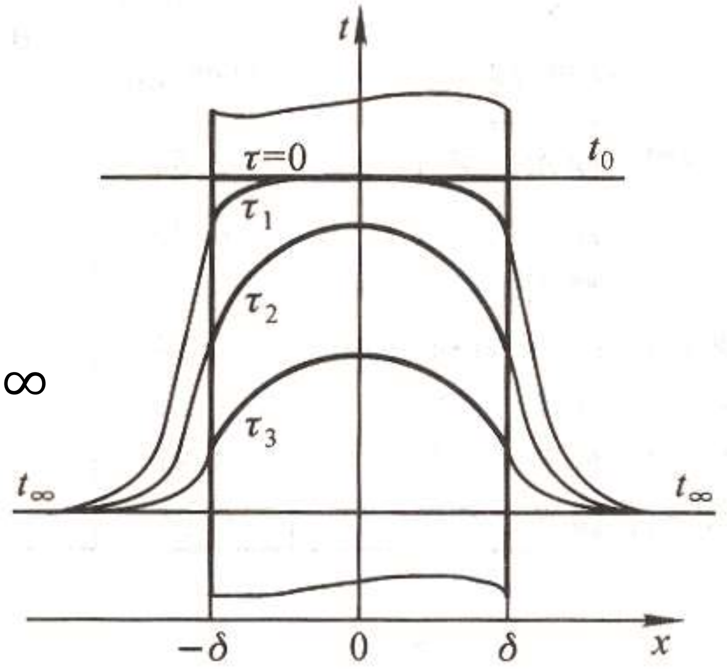
边界条件： $x = 0, \dfrac{\partial t}{\partial x} = 0$

$$x = \delta, -\lambda\frac{\partial t}{\partial x} = h(t - t_\infty)$$

■ **引进过余温度**: $\theta = t\text{-}t_{\infty}$

导热微分方程式和单值性条件变为:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = a\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$$



初始条件: $\tau = 0, \theta = \theta_0 = t_0 \text{-} t_{\infty}$

边界条件: $x = 0, \dfrac{\partial \theta}{\partial x} = 0$

$$x = \delta, -\lambda\frac{\partial \theta}{\partial x} = h\theta$$

■ **引进无量纲温度：** $\Theta = \theta/\theta_0$

无量纲坐标： $X = x/\delta$

上式及单值性条件无量纲化：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \theta}{\partial \tau} = a\dfrac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \\ \tau = 0,\ \theta = \theta_0 = t_0 - t_\infty \\ x = 0,\ \dfrac{\partial \theta}{\partial x} = 0 \\ x = \delta,\ -\lambda\dfrac{\partial \theta}{\partial x} = h\theta \end{cases}$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial\left(\frac{a\tau}{\delta^2}\right)} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial X^2}$$

初始条件： $\tau = 0, \Theta = \Theta_0 = 1$

边界条件： $X = 0, \dfrac{\partial \Theta}{\partial X} = 0$

$X = 1, \dfrac{\partial \Theta}{\partial X} = -\dfrac{h\delta}{\lambda}\Theta$

$Fo = \dfrac{a\tau}{\delta^2}$ —— **Fourier number**

$Bi = \dfrac{h\delta}{\lambda}$ —— **Biot number**

无量纲数，称为特征数，习惯上也称为准则数。

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Theta}{\partial (Fo)} = \dfrac{\partial^2 \Theta}{\partial X^2} \\ \tau = 0, \Theta = \Theta_0 = 1 \\ X = 0, \dfrac{\partial \Theta}{\partial X} = 0 \\ X = 1, \dfrac{\partial \Theta}{\partial X} = -Bi\Theta \end{cases}$$

由无量纲数学模型可知，Θ是Fo、Bi、X三个无量纲参数的函数

$$\Theta = f(Fo, Bi, X)$$

确定此函数关系是求解该问题的主要任务。

求解结果

$$\Theta = f(Fo, Bi, X)$$

采用分离变量法，求解结果为：

$$\Theta = \frac{\theta(x,\tau)}{\theta_0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sin\mu_n}{\mu_n + \sin\mu_n \cos\mu_n} \cos\left(\mu_n \frac{x}{\delta}\right) e^{-\mu_n^2 \cdot Fo}$$

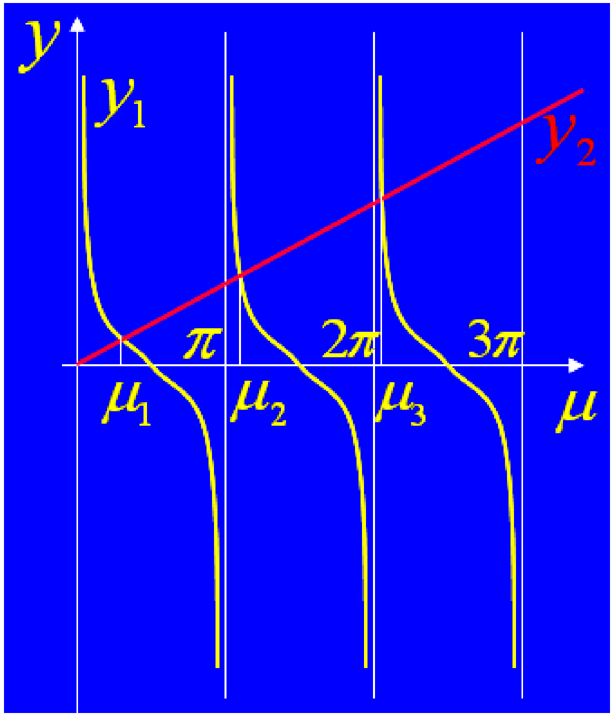
解的函数形式为无穷级数，式中 μ_1、μ_2、$\cdots$、μ_n **是下面超越方程的根**

$$\cot\mu = \frac{\mu}{Bi}$$

$$\Theta = \frac{\theta(x,\tau)}{\theta_0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sin\mu_n}{\mu_n + \sin\mu_n \cos\mu_n} \cos\left(\mu_n \frac{x}{\delta}\right) e^{-\mu_n^2 \cdot Fo}$$

$$\cot\mu = \frac{\mu}{Bi}$$

$$y_1 = \cot\mu \qquad\qquad y_2 = \frac{\mu}{Bi}$$



根有无穷多个，是*Bi*的函数。无论*Bi*取任何值，μ_1、μ_2、…、μ_n 都是正的递增数列，Θ 的解是一个快速收敛的无穷级数。

2、对分析解的讨论

（1）Fo的物理意义及其对温度分布的影响

- **Fo的物理意义：无量纲时间**

$$Fo = \frac{a\tau}{\delta^2} = \frac{\tau}{\delta^2 / a}$$

$$Fo \Rightarrow \begin{cases} \tau \uparrow \Rightarrow t\text{变化经历的时间长} \\ \delta^2 / a \uparrow \Rightarrow \text{热扰动传播速度} \downarrow \end{cases}$$

Fo 表征非稳态过程进行深度的无量纲时间，因而是区分初始阶段与正规阶段的判据。

■ 初始阶段与正规阶段的区分

$Fo \geq 0.2$时，瞬态导热进入正规阶段，此时，取级数的第一项产生的误差很小，对工程计算已足够精确。

$$\frac{\theta(x,\tau)}{\theta_0} = \frac{2\sin\mu_1}{\mu_1 + \sin\mu_1\cos\mu_1}\cos\left(\mu_1\frac{x}{\delta}\right)e^{-\mu_1^2\cdot Fo}$$

将上式左、右两边取对数：

$$\ln\theta = -m\tau + \ln\left[\theta_0\frac{2\sin\mu_1}{\mu_1 + \sin\mu_1\cos\mu_1}\cos\left(\mu_1\frac{x}{\delta}\right)\right]$$

式中：

$$m = \mu_1^2\frac{a}{\delta^2}$$

μ_1 为超越方程的第一个根，只与*Bi*有关，即只取决于边界条件、平壁的物性、几何尺寸。所以，当平壁及其边界条件给定之后，*m*为一常数，与时间、地点无关。

式右边的第二项只与*Bi*、x/δ 有关，与时间无关，于是上式可改为：

$$\ln\theta = -m\tau + C(Bi, x/\delta)$$

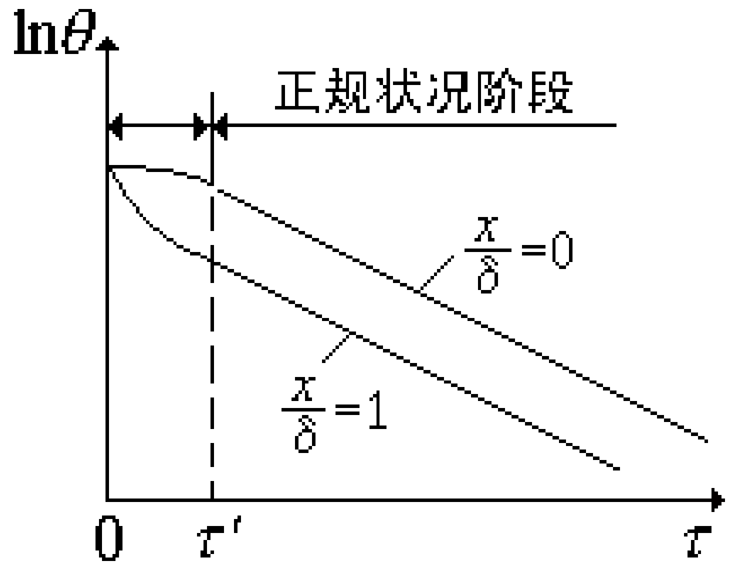
两边对时间求导，可得：

$$\frac{1}{\theta}\frac{\partial\theta}{\partial\tau} = -m = -\mu_1^2\frac{a}{\delta^2}$$

*m*的物理意义：过余温度对时间的相对变化率，s^{-1} ；称为冷却率（或加热率）。

上式说明，当 $Fo \geq 0.2$ **，即** $\tau \geq \tau' = 0.2\,\delta^2/a$ **，平壁内所有各点过余温度的对数都随时间线性变化。**

进入正规状况阶段后，所有各点的冷却率或加热率*m*都相同，且不随时间而变化，这是非稳态导热正规状况阶段的特点之一。



$$\frac{\theta(x,\tau)}{\theta_0}=\frac{2\sin\mu_1}{\mu_1+\sin\mu_1\cos\mu_1}\cos\left(\mu_1\frac{x}{\delta}\right)e^{-\mu_1^2\cdot Fo}$$

如果用 θ_m 表示平壁中心的过余温度，则：

$$\frac{\theta_m}{\theta_0}=\frac{2\sin\mu_1}{\mu_1+\sin\mu_1\cos\mu_1}e^{-\mu_1^2\cdot Fo}=f(Bi,Fo)$$

于是：

$$\frac{\theta}{\theta_\mathrm{m}}=\cos\left(\mu_1\frac{x}{\delta}\right)=f(Bi,\frac{x}{\delta})$$

可见，当 $Fo\geq 0.2$，即非稳态导热进入正规状况阶段以后，任一位置过余温度与中心过余温度之比与时间无关，只取决于毕渥数与几何位置，这是正规状况阶段的另一重要特点。

- **工程技术中的非稳态导热绝大部分时间都处于正规状况阶段，认识正规状况阶段的温度变化规律对工程计算具有重要的实际意义 。**
- **有关文献已证明，当$Fo \geq 0.2$时，其它形状物体的非稳态导热也进入正规状况阶段，表现出**

$$\ln\theta = -m\tau + C(Bi, x/\delta)$$

$$\frac{1}{\theta}\frac{\partial\theta}{\partial\tau} = -m = -\mu_1^2\frac{a}{\delta^2}$$

所表示的温度变化规律，只是m的数值不同而已。

（2）Bi的物理意义及其对温度分布的影响

■ **Bi的物理意义：**

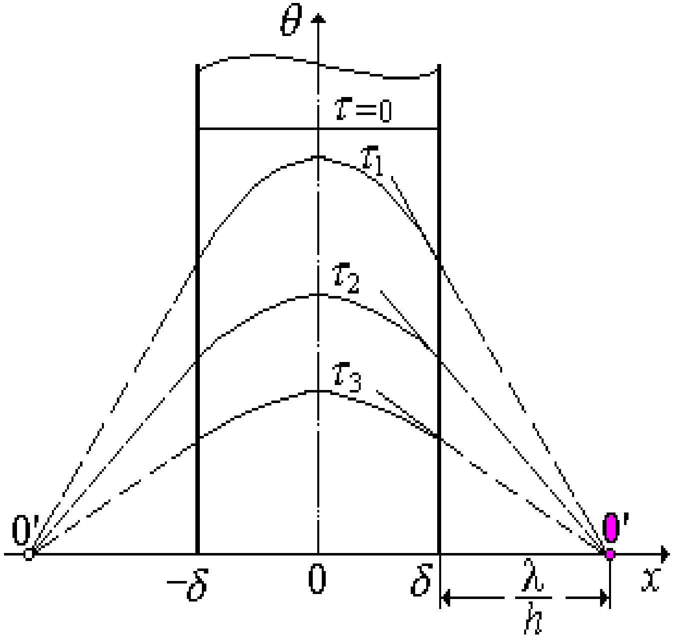
$$Bi=\frac{h\delta}{\lambda}=\frac{\left(\delta/\lambda\right)}{\left(1/h\right)}=\frac{\text{物体内部导热热阻}}{\text{物体表面对流换热热阻}}$$

因此，Bi为无量纲热阻，决定着物体内部温度分布的特征。

■ Bi对温度分布的影响

$$-\lambda \frac{\partial \theta}{\partial x}\bigg|_{x=\pm\delta} = h\,\theta\big|_{x=\pm\delta}$$

$$-\frac{\partial \theta}{\partial x}\bigg|_{x=\pm\delta} = \frac{\theta\big|_{x=\pm\delta}}{\lambda/h} = \frac{\theta\big|_{x=\pm\delta}}{\delta/Bi}$$



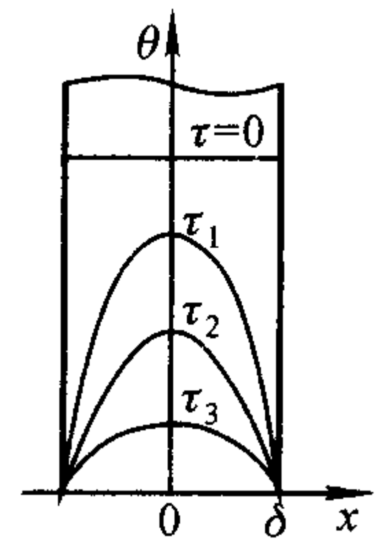
几何意义：

平壁内过余温度分布曲线在边界处的切线都通过点0'，该点称为第三类边界条件的定向点，与平壁边界面距离

$$\lambda/h = \delta/Bi$$

1) $Bi \to \infty$

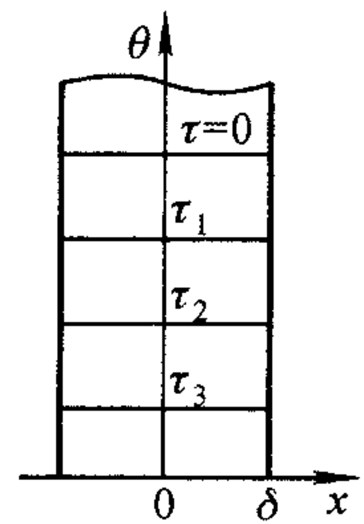
对流换热热阻趋于零，平壁表面与流体之间的温差趋于零，意味着平壁内的温度变化完全取决于平壁的导热热阻。**定向点位于平壁表面上**，给定第三类BC实际上实际相当于给定第一类BC。（Bi>100）



(a) $Bi \to \infty$

2) $Bi \to 0$

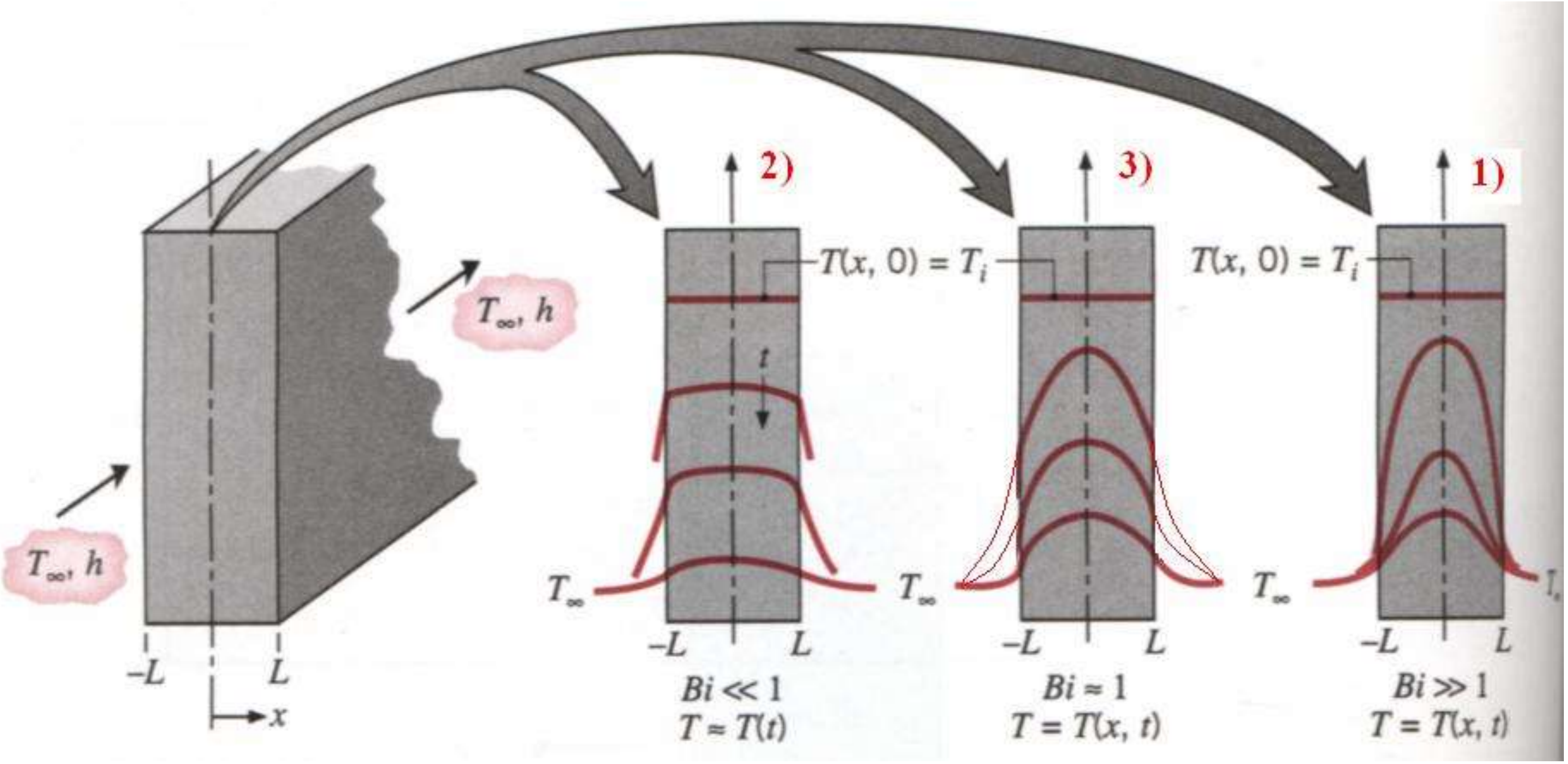
导热热阻趋于零，平壁内温度在任一时刻都趋于均匀一致，只随时间而变，变化的快慢完全取决于平壁表面的对流换热强度。**定向点在距平壁无穷远处**，一般认为Bi≤0.1，采用**集总参数法**进行计算。



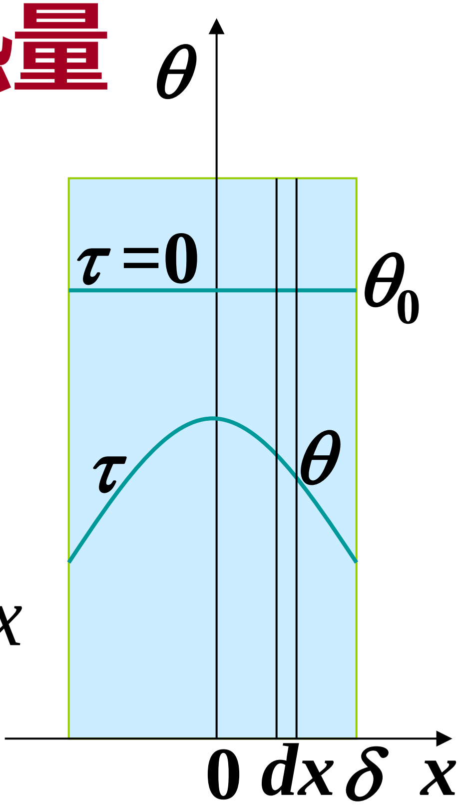
(b) $Bi \to 0$

3) $0.1 \le Bi \le 100$

平壁的温度变化既取决于平壁内部的导热热阻，也取决于平壁外部的对流换热热阻。



平壁与周围流体之间的换热量



在平壁内x处平行于壁面取一厚度为dx的微元薄层，在时间$0-\tau$，单位面积微元薄层放出的热量等于其内能的变化，即：

$$dQ=\rho c\left(t_0-t\right)dx=\rho c\left(\theta_0-\theta\right)dx$$

单位面积平壁所放出的热量为：

$$Q=\rho c\int_{-\delta}^{\delta}\left(\theta_0-\theta\right)dx=2\rho c\theta_0\int_0^{\delta}\left(1-\frac{\theta}{\theta_0}\right)dx$$

将 $\frac{\theta}{\theta_0}$ 代入上式，得:

$$Q = 2\rho c\theta_0 \int_0^{\delta} \left[1 - \frac{2\sin\mu_1}{\mu_1 + \sin\mu_1\cos\mu_1}\cos\left(\mu_1\frac{x}{\delta}\right)e^{-\mu_1^2 \cdot Fo}\right]dx$$

令 $Q_0 = 2\rho c\theta_0\delta$ 为单位面积平壁从温度 t_0 冷却到 t_∞ 所放出的热量，于是:

$$\frac{Q_\tau}{Q_0} = 1 - \frac{2\sin^2\mu_1}{\mu_1^2 + \mu_1\sin\mu_1\cos\mu_1}e^{-\mu_1^2 \cdot Fo} = f(Bi, Fo)$$

几点说明：

1）上述分析针对平壁被冷却的情况进行，分析结果对平壁被加热的情况同样适用；

2）上述结果也适用于一侧绝热、另一侧具有第三类边界条件且厚度为δ的平壁；

3）线算图只适用于$Fo \geq 0.2$的情况，当$Fo < 0.2$时，温度分布和换热量须用未简化公式计算。

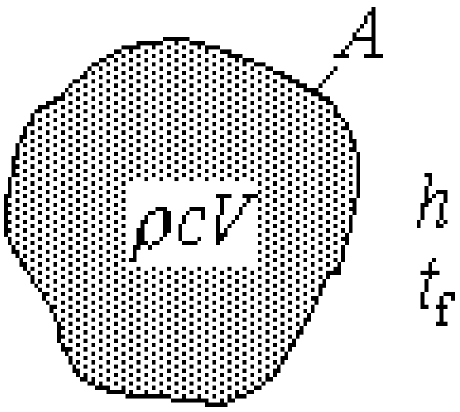
三、集总参数法
(General Lumped Capacitance Method)

1、模型及求解

- 当 $Bi \le 0.1$ 时，物体内部的导热热阻远小于其表面的对流换热热阻，物体的温度只是**时间的函数**，与坐标无关。
- 这种情况下的非稳态导热问题，只须求出温度随时间的变化规律以及在温度变化过程中物体放出或吸收的热量。

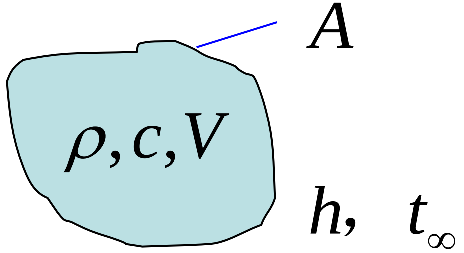
这种忽略物体内部导热热阻，**将物体看作一个质点**的简化分析方法称为**集总参数法**。

假设：一个任意形状的物体，体积为V，表面面积为A，密度ρ、比热容c及导热系数λ为常数，无内热源，初始温度为t_0。突然将该物体放入温度 t_f 恒定的流体中，物体表面和流体之间对流换热的表面传热系数h为常数。



假设该问题满足$Bi \le 0.1$ 的条件，根据能量守恒，**单位时间物体内能的变化量等于物体表面与流体之间的对流换热量**，即

$$\rho c V \frac{dt}{d\tau} = -hA\left(t - t_\infty\right)$$



引进过余温度 $\theta = t - t_\infty$ ，上式可改写为

$$\rho c V \frac{d\theta}{d\tau} = -hA\theta$$

$$\rho cV\frac{d\theta}{d\tau}=-hA\theta$$

初始条件为： $\tau=0$，$\theta=\theta_0=t_0-t_\infty$

将上式积分

$$\int_{\theta_0}^{\theta}\frac{d\theta}{\theta}=-\int_0^{\tau}\frac{hA}{\rho cV}d\tau$$

可得： $\dfrac{\theta}{\theta_0}=e^{-\frac{hA}{\rho cV}\tau}=\exp\left(-\dfrac{hA}{\rho cV}\tau\right)$

注意到： $$\frac{hA}{\rho cV}\tau=\frac{hl_V}{\lambda}\cdot\frac{\lambda}{\rho c}\frac{\tau}{l_V{}^2}=\frac{hl_V}{\lambda}\cdot\frac{a\tau}{l_V{}^2}=Bi_V\cdot Fo_V$$

特征长度： $V/A=l_V$

$$\frac{\theta}{\theta_0}=e^{-Bi_V\cdot Fo_V}=\exp\left(-Bi_V\cdot Fo_V\right)$$

注意，式中毕渥数与傅里叶数的下角标V表示以$l_V=V/A$为特征长度。

$0\sim\tau$ **时间内物体和周围环境之间交换的热量**

$$Q_\tau=\rho cV\left(t_0-t\right)=\rho cV\left(\theta_0-\theta\right)$$

$$=\rho cV\theta_0\left(1-\frac{\theta}{\theta_0}\right)=\rho cV\theta_0\left(1-e^{-Bi_V\cdot Fo_V}\right)$$

$Q_0=\rho cV\theta_0$ **表示物体温度从** t_0 **变化到周围流体温度** t_∞ **所放出或吸收的总热量，上式可改写成无量纲形式：**

$$\frac{Q_\tau}{Q_0}=1-e^{-Bi_V\cdot Fo_V}$$

求解结果既适用于物体被加热的情况，也适用于物体被冷却的情况。

2、集总参数法的适用条件

结果表明，对于形状如平板、柱体或球这样的物体，只要满足 $Bi_V < 0.1M$ ，按集总热容求解过余温度之间偏差小于5%，可以使用集总参数法计算。

M为与几何形状有关的无量纲量：

$$M = \begin{cases} 1.0 \quad \text{大平板} \qquad V/A = \delta(\text{厚}2\delta) \\ 1/2 \quad \text{无限长圆柱} \quad V/A = R/2 \\ 1/3 \quad \text{圆球} \qquad V/A = R/3 \end{cases}$$

几点说明：

（1）集总参数法中的毕渥数Bi_V与傅里叶数Fo_V以$l=V/A$为特征长度，不同于分析解中的Bi与Fo，

	分析解		集总参数法	
无限大平壁 厚2δ	$Bi=\dfrac{h\delta}{\lambda}$	$Fo=\dfrac{a\tau}{\delta^2}$	$Bi_V=\dfrac{h\delta}{\lambda}$	$Fo_V=\dfrac{a\tau}{\delta^2}$
无限长圆柱 半径R	$Bi=\dfrac{hR}{\lambda}$	$Fo=\dfrac{a\tau}{R^2}$	$Bi_V=\dfrac{h(R/2)}{\lambda}$	$Fo_V=\dfrac{a\tau}{(R/2)^2}$
圆　球 半径R	$Bi=\dfrac{hR}{\lambda}$	$Fo=\dfrac{a\tau}{R^2}$	$Bi_V=\dfrac{h(R/3)}{\lambda}$	$Fo_V=\dfrac{a\tau}{(R/3)^2}$

（2）对于形状如平板、柱体或球的物体，只要满足$Bi\le0.1$，就可以使用集总参数法计算，偏差小于5%。

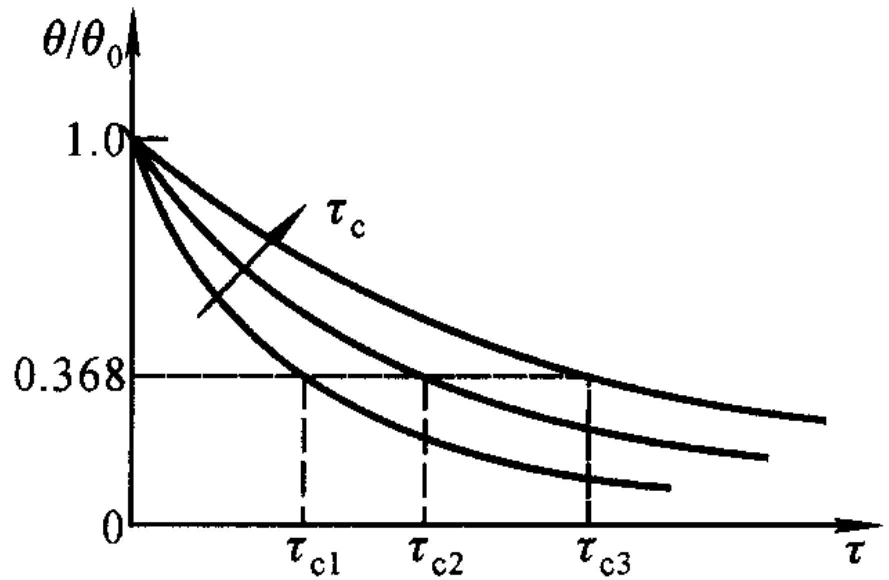
时间常数

$$\frac{\theta}{\theta_0} = e^{-\frac{hA}{\rho c V}\tau} = \exp\left(-\frac{hA}{\rho c V}\tau\right)$$

$\tau_c = \dfrac{\rho c V}{hA}$ **称为时间常数，当** $\tau = \tau_c$

$$\frac{\theta}{\theta_0} = e^{-1} = 0.368$$

物理意义：反映物体对周围环境温度变化的响应，时间常数越小，物体的温度变化越快，越能迅速地接近周围流体的温度。



影响时间常数的主要因素： $\tau_c = \dfrac{\rho c V}{hA}$

- **物体的热容量；**
- **物体表面的对流换热条件。**

物体的热容量愈小，表面的对流换热愈强，物体的时间常数愈小。

<u>例如：</u>利用热电偶测量流体温度，时间常数越小，热电偶越能迅速地反映被测流体的温度变化，所以，测瞬态温度场时，热电偶的接点总是做得很小。

■单位体积的表面面积 A/V越大的物体，时间常数越小，在初始温度相同的情况下放在温度相同的流体中被冷却（或加热）的速度越快。

■用同一种材料制成的体积相同的圆球、长度等于直径的圆柱与正方体，三者的表面面积之比为：

$$A_{\text{圆球}} : A_{\text{圆柱}} : A_{\text{正方体}} = 1 : 1.146 : 1.242$$

正方体的表面面积最大，时间常数最小

■直径为$2R$的球体、长度等于直径$2R$的圆柱体与边长为$2R$的正方体相比，三者单位体积的表面积相同，时间常数相同，在相同条件下的冷却（或加热）速度也相同。

作业（2）

9-10

9-12

9-14