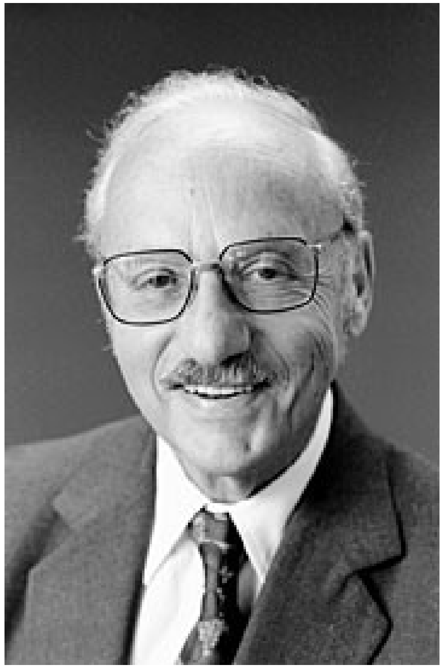
# 运筹学

## 第二讲 单纯形算法

魏韡

2025年3月5日

# 单纯形法之父——丹齐格



**George Bernard Dantzig** (1914-2005)

**主要学术贡献**

- 学生时代解决了两个统计学中的开放问题
- 发明了单纯形算法
- 大规模线性规划的Dantzig-Wolfe分解算法
- 随机规划

**出版专著**

- Linear Programming and Extensions, 1963.


**学术荣誉**

- 冯诺依曼理论奖（INFORMS）
  首位获奖人, 1975
- 国家自然科学奖章, 1975

以丹齐格名字命名的奖励

- 丹齐格奖 (SIAM)

# 主要内容

1. 线性规划的代数视角

2. 基本单纯形算法

3. 线性规划对偶理论(续)

## 1.1 标准型转换

| 一般形式 | 标准形式 |
| --- | --- |
| $$\begin{aligned} \min\ & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \text{s.t.}\ & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, i \in I_1 \\ & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i, i \in I_2 \\ & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, i \in I_3 \end{aligned}$$ $$\begin{aligned} \min\quad & c^{\mathrm{T}} x \\ \text{s.t.}\quad & Ax \begin{bmatrix} \ge \\ \le \\ = \end{bmatrix} b \end{aligned}$$ | $$\begin{aligned} \min\ & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \text{s.t.}\ & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, i = 1:m \\ & x_j \ge 0, j = 1:n \end{aligned}$$ $$\begin{aligned} \min\quad & c^{\mathrm{T}} x \\ \text{s.t.}\quad & Ax = b \\ & x \ge 0 \end{aligned}$$ |

## 1.1 标准型转换

**一般形式**

$$\max\ x_1+x_2$$
$$\text{s.t.}\ \frac{2}{3}x_1+x_2\le 18$$
$$2x_1+x_2\ge 8$$
$$0\le x_1\le 12$$
$$0\le x_2\le 16$$

**标准形式**

$$\min\ -x_1-x_2$$
$$\text{s.t.}\ 2x_1/3+x_2+x_3=18$$
$$2x_1+x_2-x_4=8$$
$$x_1+x_5=12$$
$$x_2+x_6=16$$
$$x_1\sim x_6\ge 0$$

标准型的矩阵表示

$$\min\ c^{\mathrm{T}}x$$
$$\text{s.t.}\ Ax=b,\ x\ge 0$$

$$\min\ (-1,-1,0,0,0,0)\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\\x_6\end{bmatrix}\quad \text{s.t.}\ \begin{bmatrix}\frac{2}{3}&1&1&0&0&0\\2&1&0&-1&0&0\\1&0&0&0&1&0\\0&1&0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\\x_6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}18\\8\\12\\16\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\\x_6\end{bmatrix}\ge 0$$

## 1.2 基本解

**定义**

标准型的约束 $Ax = b$, $x \geq 0$, 其中 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $\mathrm{rank}(A) = m$.

- 称 $x^*$ 是一个基本解，若其中 $n - m$ 个元素是 0，其余 $m$ 个元素满足所有等式约束
- 称 $x^*$ 是一个基本可行解，若它是一个基本解且 $x^* \geq 0$.

$$\begin{aligned} \min \quad & c^{\mathrm{T}} y \\ \text{s.t.} \quad & Ay \geq b \quad (A \in \mathbf{R}^{m\times n}) \\ & y \geq 0 \quad (y \in \mathbf{R}^n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min \quad & \bar{c}^{\mathrm{T}} x \\ \text{s.t.} \quad & \bar{A}x = b \quad \bar{A} = [A, I] \in \mathbf{R}^{m\times(n+m)} \\ & x \geq 0 \quad x = [y; s] \in \mathbf{R}^{n+m} \end{aligned}$$

上述线性规划的最优解一定可以在某个 **极点** 取到

**基本可行解**

$$y_2 = 0 \quad y_2 : n - n_e$$
$$A'y = b' \quad A' : n_e \times n$$

$n$ 个变量, $n$ 个等式

等价

$$s_2 = 0 : n_e$$
$$y_2 = 0 : n - n_e$$
$$Ay + s = b \quad A : m \times n$$

$n + m$ 个变量, $n + m$ 个等式

## 1.2 基本解

$$\begin{aligned} \min \quad & c^{\mathrm{T}} x \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \quad A \in \mathbf{R}^{m\times n},\ b \in \mathbf{R}^m \\ & x \geq 0 \quad x \in \mathbf{R}^n \quad (m < n) \end{aligned}$$

标准型的枚举解法:

- 选出 $n-m$ 个变量固定为 0, 解方程 $Ax^* = b$, 检验是否 $x^* \geq 0$.
- 求解 $C_n^m$ 个方程得到所有基本解，其中必定包含最优解

例：找出以下标准型线性规划的所有基本解

$$\min\ (-1,-1,0,0,0,0)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} \quad \text{s.t.} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ 8 \\ 12 \\ 16 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} \geq 0$$

## 1.2 基本解

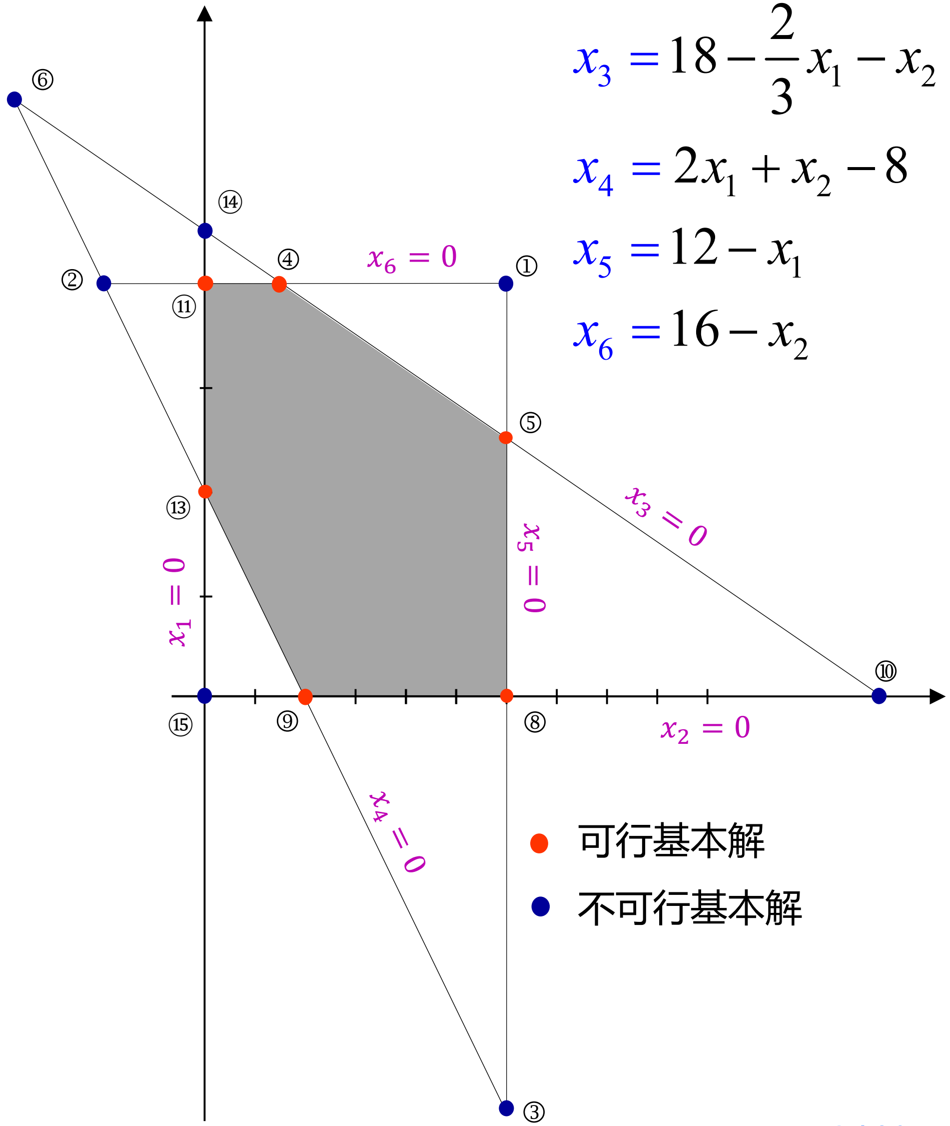
| 编号 | 基本解索引 | 基本解非零元素值 | | | | 目标值 | $x_1$ | $x_2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1,2,3,4 | 12 | 16 | -6 | 32 | Infea. | | |
| 2 | 1,2,3,5 | -4 | 16 | 14/3 | 16 | Infea. | | |
| 3 | 1,2,3,6 | 12 | -16 | 26 | 32 | Infea. | | |
| 4 | 1,2,4,5 | 3 | 16 | 14 | 9 | -19 | 3 | 16 |
| 5 | 1,2,4,6 | 12 | 10 | 26 | 6 | -22 | 12 | 10 |
| 6 | 1,2,5,6 | -7.5 | 23 | 39/2 | -7 | Infea. | | |
| 7 | 1,3,4,5 | 奇异 | | | | / | | |
| 8 | 1,3,4,6 | 12 | 10 | 16 | 16 | -12 | 12 | 0 |
| 9 | 1,3,5,6 | 4 | 46/3 | 8 | 16 | -4 | 4 | 0 |
| 10 | 1,4,5,6 | 27 | 46 | -15 | 16 | Infea. | | |
| 11 | 2,3,4,5 | 16 | 2 | 8 | 12 | -16 | 0 | 16 |
| 12 | 2,3,4,6 | 奇异 | | | | / | | |
| 13 | 2,3,5,6 | 8 | 10 | 12 | 8 | -8 | 0 | 8 |
| 14 | 2,4,5,6 | 18 | 10 | 12 | -2 | Infea. | | |
| 15 | 3,4,5,6 | 18 | -8 | 12 | 16 | Infea. | | |

$$x_3 = 18 - \frac{2}{3}x_1 - x_2$$

$$x_4 = 2x_1 + x_2 - 8$$

$$x_5 = 12 - x_1$$

$$x_6 = 16 - x_2$$



# 主要内容

1. 线性规划的代数视角

2. 基本单纯形算法

3. 线性规划对偶理论(续)

## 2.1 最优性条件

基矩阵

$$Ax=b \quad A=\begin{bmatrix} B & N \end{bmatrix} \qquad x=\begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} \qquad c^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} c_B^{\mathrm{T}} & c_N^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}$$

基变量

$B(1),\cdots,B(m)$：基变量索引 $B=\begin{bmatrix} A_{B(1)} & \cdots & A_{B(m)} \end{bmatrix}$

$R(1),\cdots,R(n-m)$：非基变量索引 $N=\begin{bmatrix} A_{R(1)} & \cdots & A_{R(n-m)} \end{bmatrix}$

**定义**

称向量 $d\in\mathbb{R}^n$ 是可行解 $x$ 处的一个可行方向，若存在足够小的正数 $\theta>0$, 使得 $x+\theta d$ 仍是可行解

以基本可行解 $x$ 为起点，仅将非基变量 $x_j$ 增加 $\theta$ , 方向 $d_{i\in R}=\begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & \text{other} \end{cases}$

$$\begin{aligned} Ax&=b \\ A(x+\theta d)&=b \end{aligned} \Rightarrow Ad=0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{m} A_{B(i)}d_{B(i)}+A_j=Bd_B+A_j=0$$

第 $j$ 个基本方向：$d_B=-B^{-1}A_j$

## 2.1 最优性条件

$$Ax=b \Rightarrow Bx_B+Nx_N=b \Rightarrow x_B=B^{-1}b-B^{-1}Nx_N$$

$$A=\begin{bmatrix}B & N\end{bmatrix} \qquad x=\begin{bmatrix}x_B\\ x_N\end{bmatrix} \qquad c^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}c_B^{\mathrm{T}} & c_N^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}$$

$$f=c^{\mathrm{T}}x=c_B^{\mathrm{T}}x_B+c_N^{\mathrm{T}}x_N \quad =c_B^{\mathrm{T}}B^{-1}b+\left(c_N^{\mathrm{T}}-c_B^{\mathrm{T}}B^{-1}N\right)x_N$$

$c_B^{\mathrm{T}}B^{-1}b$： 常数

$c_N^{\mathrm{T}}$： 改变非基变量的单位增量成本

$c_B^{\mathrm{T}}B^{-1}N$： 基变量随非基变量变化引入的成本

**非基变量 $x_j$ 的归约成本:** $\bar{c}_j=c_j^{\mathrm{T}}-c_B^{\mathrm{T}}B^{-1}A_j,\ j=1:n$

矩阵 $A$ 的第 $j$ 列

$\bar{c}_j \geq 0, \forall j \in R \Rightarrow x$ 是最优解

## 2.1 最优性条件

**定理 1**

基变量的规约成本为 0

$$B=\begin{bmatrix}A_{B(1)}\cdots A_{B(m)}\end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1}A=\begin{bmatrix}I & B^{-1}N\end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1}A_{B(i)}=e_i$$

$$\bar{c}_{B(i)}=c_{B(i)}-c_B^{\mathrm{T}}B^{-1}A_{B(i)} \;=c_{B(i)}-c_B^{\mathrm{T}}e_i \;=c_{B(i)}-c_{B(i)}=0$$

**定理 2**

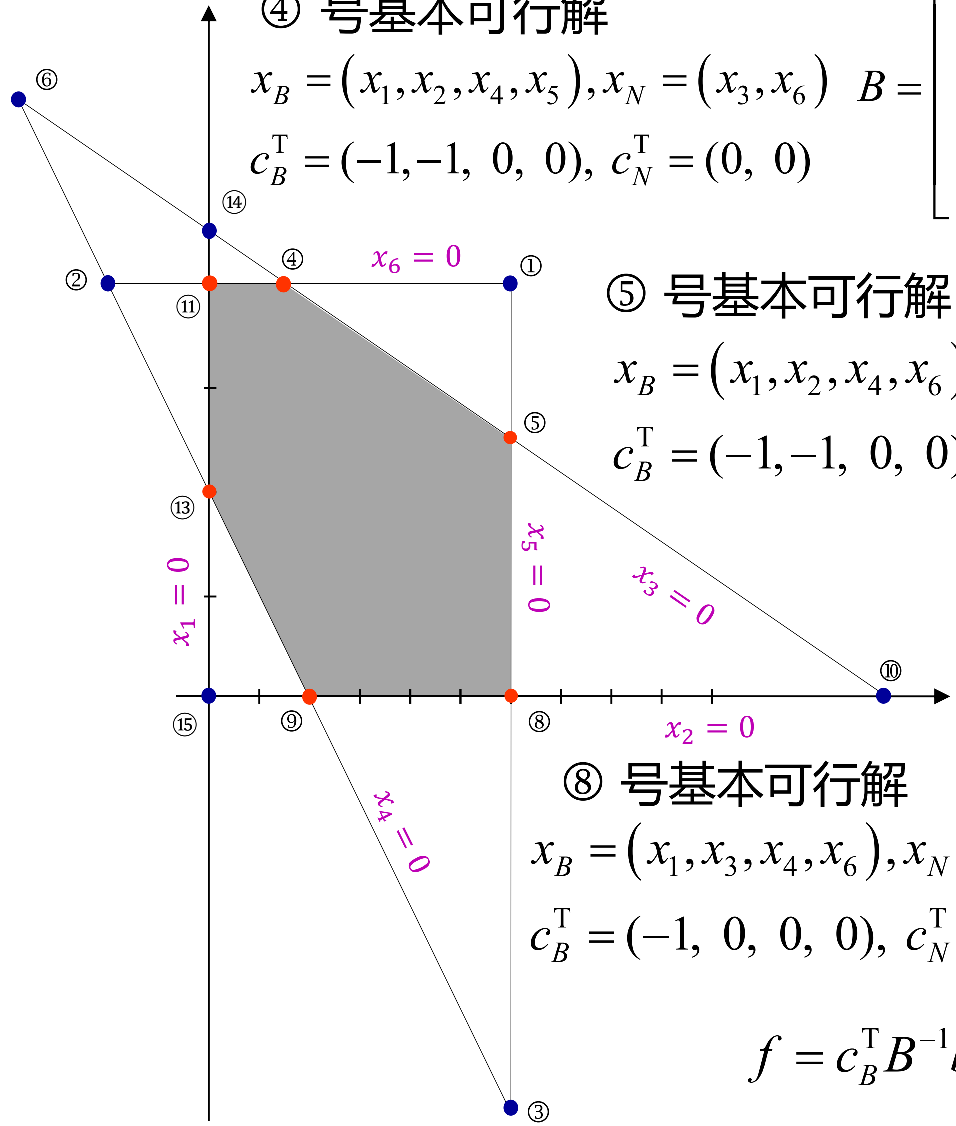
给定基本可行解 $x$ 及其对应的基矩阵 $B$. 向量 $\bar{c}\in\mathbb{R}^n$ 是对应的(基变量和非基变量的)规约成本

(a) 若 $\bar{c}\geq 0$, 则 $x$ 是最优解

(b) 若 $x$ 是非退化的最优解，则 $\bar{c}\geq 0$.

$$\bar{c}^{\mathrm{T}}=[\bar{c}_B^{\mathrm{T}}\quad \bar{c}_N^{\mathrm{T}}]=[0^{\mathrm{T}}\quad \bar{c}_N^{\mathrm{T}}]$$

## 2.1 最优性条件




④ 号基本可行解

$x_B=(x_1,x_2,x_4,x_5), x_N=(x_3,x_6)$

$c_B^{\mathrm{T}}=(-1,-1,\ 0,\ 0),\ c_N^{\mathrm{T}}=(0,\ 0)$

$$B=\begin{bmatrix}2/3 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\quad N=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$f=c_B^{\mathrm{T}}B^{-1}b=-19$$

$$c_N^{\mathrm{T}}-c_B^{\mathrm{T}}B^{-1}N=(3/2,-1/2)$$

⑤ 号基本可行解

$x_B=(x_1,x_2,x_4,x_6), x_N=(x_3,x_5)$

$c_B^{\mathrm{T}}=(-1,-1,\ 0,\ 0),\ c_N^{\mathrm{T}}=(0,\ 0)$

$$B=\begin{bmatrix}2/3 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\quad N=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$f=c_B^{\mathrm{T}}B^{-1}b=-22,\quad c_N^{\mathrm{T}}-c_B^{\mathrm{T}}B^{-1}N=(1,1/3)$$

⑧ 号基本可行解

$x_B=(x_1,x_3,x_4,x_6), x_N=(x_2,x_5)$

$c_B^{\mathrm{T}}=(-1,\ 0,\ 0,\ 0),\ c_N^{\mathrm{T}}=(-1,\ 0)$

$$B=\begin{bmatrix}2/3 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\quad N=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

$$f=c_B^{\mathrm{T}}B^{-1}b=-12,\quad c_N^{\mathrm{T}}-c_B^{\mathrm{T}}B^{-1}N=(-1,\ 1)$$

## 2.2 主元法 (Pivoting 枢轴操作)

$$\boxed{\begin{aligned} f = c^{\mathrm{T}}x = c_B^{\mathrm{T}}x_B + c_N^{\mathrm{T}}x_N \\ Bx_B + Nx_N = b \end{aligned}} \quad \begin{aligned} &= c_B^{\mathrm{T}}B^{-1}b - \sum_{j\in R}\left(c_B^{\mathrm{T}}B^{-1}A_j - c_j\right)x_j \\ &= f_0 - \sum_{j\in R}\left(\underbrace{z_j - c_j}_{\text{判别数} = -\text{规约成本}}\right)x_j \end{aligned}$$

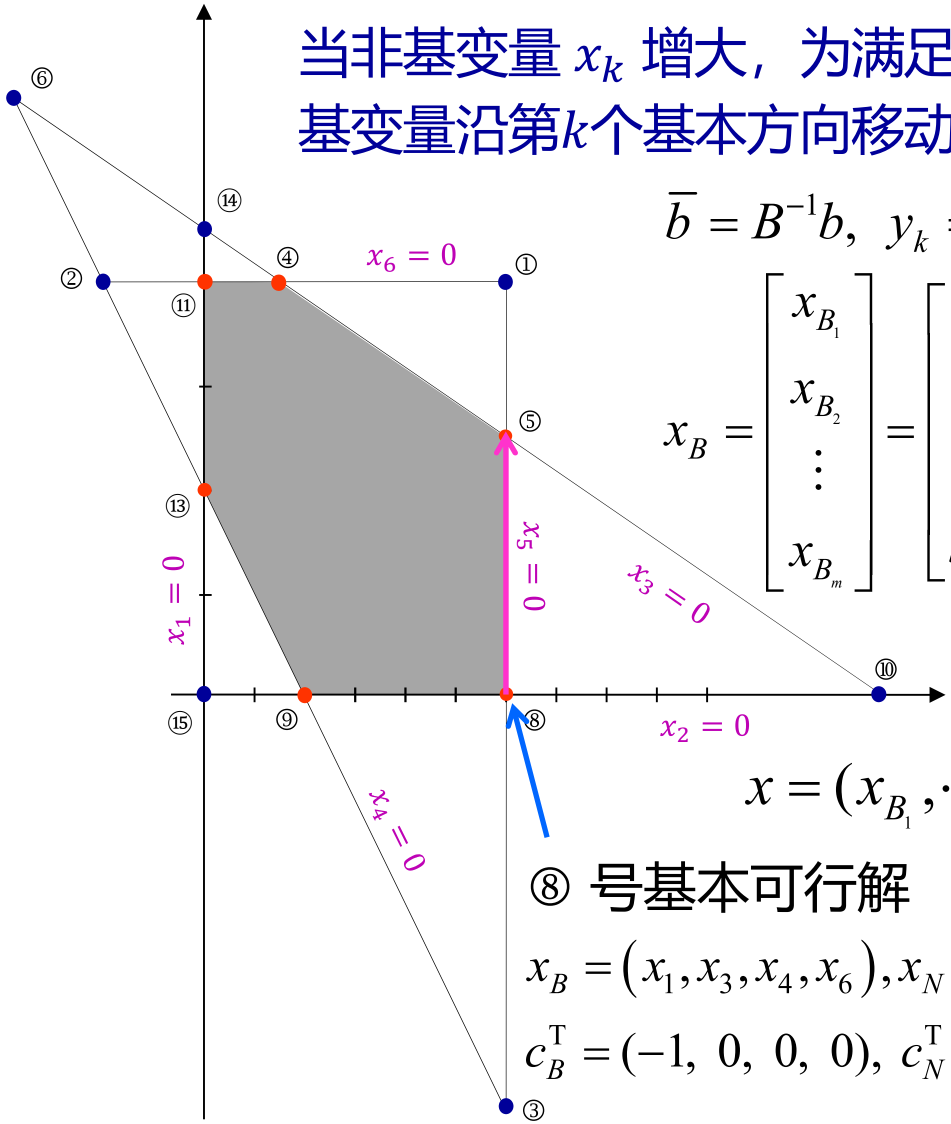
- 根据**定理2**, 若 $z_j - c_j \leq 0, \forall j \in R$, 则 $x$ 是最优解;
- 若 $\exists j \in R: z_j - c_j > 0$, 则目标函数可以进一步减小

如何选择非基变量减小目标函数?

- ◆ 判别数 $z_j - c_j > 0$
- ◆ $(z_j - c_j)x_j$ 越大越好

$$\begin{cases} \uparrow z_j - c_j: \quad \max\limits_{j\in R} = \left\{z_j - c_j\right\} \\ \uparrow x_j: \quad \text{如何确定 } x_j? \end{cases}$$

## 2.2 主元法




当非基变量 $x_k$ 增大，为满足等式约束 $Ax = b$，基变量沿第$k$个基本方向移动

$$\bar{b} = B^{-1}b,\ \ y_k = B^{-1}A_k = -\,d_k$$

$$x_j = 0, \forall j \in R - \{k\}$$

$$x_B = \begin{bmatrix} x_{B_1} \\ x_{B_2} \\ \vdots \\ x_{B_m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \\ \vdots \\ \bar{b}_m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y_{1k} \\ y_{2k} \\ \vdots \\ y_{mk} \end{bmatrix} x_k \geq 0 \ \Rightarrow\ x_k \leq \frac{\bar{b}_i}{y_{ik}},\quad \begin{matrix} i = 1:m \\ y_{ik} > 0 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow\ x_k = \min\left\{ \frac{\bar{b}_i}{y_{ik}} \,\middle|\, y_{ik} > 0 \right\} = \frac{\bar{b}_r}{y_{rk}}$$

$$x = (x_{B_1}, \cdots, x_{B_{r-1}}, 0, x_{B_{r+1}}, \cdots, x_{B_m}, 0, \cdots, x_k, \cdots, 0)$$

⑧ 号基本可行解

$$x_B = (x_1, x_3, x_4, x_6), x_N = (x_2, x_5)$$

$$c_B^{\mathrm{T}} = (-1,\ 0,\ 0,\ 0),\ c_N^{\mathrm{T}} = (-1,\ 0)$$

$$-\bar{c}_N^{\mathrm{T}} = c_B^{\mathrm{T}} B^{-1} N - c_N^{\mathrm{T}} = (1, -1):$$

增大非基变量 $x_2$ 直至基变量 $x_3 = 0$ ($x_2$进基，$x_3$离基)

## 2.2 主元法

**定理 3**

基变量更新后: $x=(x_{B_1},\cdots,x_{B_{r-1}},0,x_{B_{r+1}},\cdots,x_{B_m},0,\cdots,x_k,\cdots,0)$

(a) $\bar{B}$ 矩阵可逆 $\bar{B}=\begin{bmatrix} A_{B(1)} & A_{B(r-1)} & A_k & A_{B(r+1)} & A_{B(m)} \end{bmatrix}$

(b) $x$ 是对应于基矩阵 $\bar{B}$ 的基本可行解

**证明 (a):**

$B=[A_{B(1)} \quad \cdots \quad A_{B(m)}]$

是一个基矩阵(可逆)

$\Downarrow$

$A_{B(1)}, \quad \cdots \quad , A_{B(m)}$

线性无关

$y_k=B^{-1}A_k$

$\Downarrow$

$A_k=By_k$

$$=\sum_{i=1}^{m} y_{ik}A_{B(i)}$$

主元规则

$\Downarrow$

$y_{rk}\neq 0$

$\Downarrow$

向量组 $A_{B(1)},\cdots,A_{B(r-1)},A_k,A_{B(r+1)},\cdots,A_{B(m)}$ 线性无关

## 2.2 主元法

### 单纯形法(主元法)的矩阵形式

第1步: 找到一个初始基本可行解, 计算归约成本 $\bar{c}_N$
第2步: 若 $\bar{c}_N \geq 0$, 该基本可行解是最优解，结束。否则
第3步: 找到进基变量和离基变量
第4步: 更新 $B$ 和 $\bar{c}_N$，至第2步

示例 $\min\left\{c^{\mathrm{T}}x : \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 & A_6 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}, x \geq 0\right\}$

第1步: $B = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \end{bmatrix}, N = \begin{bmatrix} A_4 & A_5 & A_6 \end{bmatrix}, x_{1:3} = B^{-1}b > 0$

第2步: $\bar{c}_{4:6}^{\mathrm{T}} = c_{4:6}^{\mathrm{T}} - c_B^{\mathrm{T}} B^{-1} N = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

第3步: 进基变量是 $x_4$，(假设)离基变量是 $x_1$

第4步: $B = \begin{bmatrix} A_2 & A_3 & A_4 \end{bmatrix}, N = \begin{bmatrix} A_1 & A_5 & A_6 \end{bmatrix}, x_{2:4} = B^{-1}b > 0$

对于大规模问题最耗时的计算是哪一步？如何降低计算量？

## 2.3 单纯形法的表格形式

$$\begin{aligned}&\min\ f = c^{\mathrm{T}} x\\ &\text{s.t. } Ax = b,\ x \geq 0\end{aligned} \qquad x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix},\quad c^{\mathrm{T}} = (c_B^{\mathrm{T}}, c_N^{\mathrm{T}}),\quad A = (B, N)$$

$$\begin{aligned}&\min\ f\\ &\text{s.t. } f - c_B^{\mathrm{T}} x_B - c_N^{\mathrm{T}} x_N = 0\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad +\\ &c_B^{\mathrm{T}} \times\ x_B + B^{-1}N\, x_N = B^{-1}b\\ &\qquad x_B \geq 0,\quad x_N \geq 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\min\ f\\ &\text{s.t.}\quad x_B + B^{-1}N\, x_N = B^{-1}b\\ &\quad f + 0 \cdot x_B + (c_B^{\mathrm{T}} B^{-1} N - c_N^{\mathrm{T}}) x_N = c_B^{\mathrm{T}} B^{-1} b\\ &\quad x_B \geq 0,\quad x_N \geq 0\end{aligned}$$

| | $z$ | $x_B$ | $x_N$ | 常数项 | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_B$ | 0 | $I_m$ | $B^{-1}N$ | $B^{-1}b$ | 基变量 |
| $f$ | 1 | 0 | $c_B^{\mathrm{T}} B^{-1} N - c_N^{\mathrm{T}}$ | $c_B^{\mathrm{T}} B^{-1} b$ | 目标值 |

判别数

## 2.3 单纯形法的表格形式

$$B^{-1}N=\left(B^{-1}A_{N_1},\cdots,B^{-1}A_{N_{n-m}}\right)=\left(y_{N_1},\cdots,y_{N_{n-m}}\right),\ B^{-1}b=(\bar{b}_1,\cdots,\bar{b}_m)^{\mathrm{T}}\geq 0$$

$$c_B^{\mathrm{T}}B^{-1}N-c_N^{\mathrm{T}}=\left(c_B^{\mathrm{T}}B^{-1}A_{N_1}-c_{N_1},\cdots,c_B^{\mathrm{T}}B^{-1}A_{N_{n-m}}-c_{N_{n-m}}\right)=\left(p_{N_1},\cdots,p_{N_{n-m}}\right)$$

| | $x_{B_1}$ | $\cdots$ | $x_{B_r}$ | $\cdots$ | $x_{B_m}$ | $\cdots$ | $x_j$ | $\cdots$ | $x_k$ | $\cdots$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_{B_1}$ | 1 | $\cdots$ | 0 | $\cdots$ | 0 | $\cdots$ | $y_{1j}$ | $\cdots$ | $y_{1k}$ | $\cdots$ | $\bar{b}_1$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | | $\vdots$ | | $\vdots$ | | $\vdots$ | | $\vdots$ | | $\vdots$ |
| $x_{B_r}$ | 0 | $\cdots$ | 1 | $\cdots$ | 0 | $\cdots$ | $y_{rj}$ | $\cdots$ | $y_{rk}$ | $\cdots$ | $\bar{b}_r$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | | $\vdots$ | | $\vdots$ | | $\vdots$ | | $\vdots$ | | $\vdots$ |
| $x_{B_m}$ | 0 | $\cdots$ | 0 | $\cdots$ | 1 | $\cdots$ | $y_{mj}$ | $\cdots$ | $y_{mk}$ | $\cdots$ | $\bar{b}_m$ |
| $f$ | 0 | $\cdots$ | 0 | $\cdots$ | 0 | $\cdots$ | $p_j$ | $\cdots$ | $p_k$ | $\cdots$ | $\bar{c}_B^{\mathrm{T}}\bar{b}$ |

假设 $x=(\bar{b}\quad 0)^{\mathrm{T}}\geq 0$ 是一个基本可行解

- 若判别数 $p_j\leq 0,\forall j\in R$, 则 $x$ 是最优解;
- 若 $\exists j\in R: z_j-c_j>0$, 则在表上执行**主元法**

## 2.3 单纯形法的表格形式

### 主元的选取规则

离基变量　　　　进基变量

| | $x_{B_1}$ | $\cdots$ | $x_{B_r}$ | $\cdots$ | $x_{B_m}$ | $\cdots$ | $x_j$ | $\cdots$ | $x_k$ | $\cdots$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_{B_1}$ | 1 | $\cdots$ | 0 | $\cdots$ | 0 | $\cdots$ | $y_{1j}$ | $\cdots$ | $y_{1k}$ | $\cdots$ | $\bar{b}_1$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | | $\vdots$ | | $\vdots$ | | $\vdots$ | | $\vdots$ | | $\vdots$ |
| $x_{B_r}$ | 0 | $\cdots$ | 1 | $\cdots$ | 0 | $\cdots$ | $y_{rj}$ | $\cdots$ | $y_{rk}$ | $\cdots$ | $\bar{b}_r$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | | $\vdots$ | | $\vdots$ | | $\vdots$ | | $\vdots$ | | $\vdots$ |
| $x_{B_m}$ | 0 | $\cdots$ | 0 | $\cdots$ | 1 | $\cdots$ | $y_{mj}$ | $\cdots$ | $y_{mk}$ | $\cdots$ | $\bar{b}_m$ |
| $f$ | 0 | $\cdots$ | 0 | $\cdots$ | 0 | $\cdots$ | $p_j$ | $\cdots$ | $p_k$ | $\cdots$ | $\bar{c}_B^{\mathrm{T}}\bar{b}$ |

离基变量

主元

主行

离基列　　　　主列/进基列

- 进基列　$k: p_k = \max_{j \in R} = \{p_j\} > 0$
- 离基列　$\dfrac{\bar{b}_r}{y_{rk}} = \min\left\{ \dfrac{\bar{b}_i}{y_{ik}} \middle| y_{ik} > 0 \right\}$

## 2.3 单纯形法的表格形式

### 更新单纯形表

离基变量　　进基变量

| | $x_{B_1}$ | $\cdots$ | $x_{B_r}$ | $\cdots$ | $x_{B_m}$ | $\cdots$ | $x_j$ | $\cdots$ | $x_k$ | $\cdots$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_{B_1}$ | 1 | $\cdots$ | $-y_{1k}/y_{rk}$ | $\cdots$ | 0 | $\cdots$ | $y'_{1j}$ | $\cdots$ | 0 | $\cdots$ | $\bar{b}'_1$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | | $\vdots$ | | $\vdots$ | | $\vdots$ | | $\vdots$ | | $\vdots$ |
| $x_{B_r}$ | 0 | $\cdots$ | $1/y_{rk}$ | $\cdots$ | 0 | $\cdots$ | $y'_{rj}$ | $\cdots$ | 1 | $\cdots$ | $\bar{b}_r/y_{rk}$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | | $\vdots$ | | $\vdots$ | | $\vdots$ | | $\vdots$ | | $\vdots$ |
| $x_{B_m}$ | 0 | $\cdots$ | $-y_{mk}/y_{rk}$ | $\cdots$ | 1 | $\cdots$ | $y'_{mj}$ | $\cdots$ | 0 | $\cdots$ | $\bar{b}'_m$ |
| $f$ | 0 | $\cdots$ | $-p_k/y_{rk}$ | $\cdots$ | 0 | $\cdots$ | $p'_j$ | $\cdots$ | 0 | $\cdots$ | $\bar{c}_B^{\mathrm{T}}\bar{b}-\bar{b}_r p_k/y_{rk}$ |

主元

主行

离基列　　主列/进基列

$$p'_j = p_j - p_k y_{rj}/y_{rk}, \forall j \in R'$$

**定理 4**

单纯形表更新后判别数行在新基变量下仍然成立

## 2.3 单纯形法的表格形式

单纯形法的收敛性

令 $z_k - c_k = \max_j \{z_j - c_j\}$.

- 若 $z_k - c_k \le 0$, 则当前基本可行解是最优解
- 若 $z_k - c_k > 0$ 但向量 $y_k \le \mathbf{0}$, 则即使 $x_k \to \infty$ 也不会导致 $x_B < 0$，且目标函数可以小于任意给定的数，因此可以断言线性规划问题无界
- 若 $z_k - c_k > 0$ 且 $y_k \not\le \mathbf{0}$, 则必然可以执行主元法使目标函数下降

**定理 5**

对于非退化的可行线性规划问题，单纯形法在有限步内收敛：或找到最优解或发现问题无界

## 2.4 表格单纯形法实例

$$
\begin{aligned}
\min\ & -x_1 - x_2 \\
\text{s.t. } & 2x_1/3 + x_2 + x_3 = 18 \\
& 2x_1 + x_2 - x_4 = 8 \\
& x_1 + x_5 = 12 \\
& x_2 + x_6 = 16 \\
& x_1 \sim x_6 \geq 0
\end{aligned}
$$

$$x_2 = x_4 = 0$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 46/3 \\ 8 \\ 16 \end{bmatrix}$$

是可行解

$$B^{-1}N = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 2/3 & 1/3 \\ -1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(p_2, p_4) = (0.5, 0.5)$$

| | | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_2 = 8$ | $x_1$ | 1 | 1/2 | 0 | −1/2 | 0 | 0 | 4 | |
| $x_2 = 23$ | $x_3$ | 0 | 2/3 | 1 | 1/3 | 0 | 0 | 46/3 | $x_4 = 46$ |
| | $x_5$ | 0 | −1/2 | 0 | 1/2 | 1 | 0 | 8 | $x_4 = 16$ |
| $x_2 = 16$ | $x_6$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 16 | |
| $\boxed{\Delta f = -4}$ | | | 1/2 | | 1/2 | | | −4 | $\boxed{\Delta f = -8}$ |

## 2.4 表格单纯形法实例

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 1 | 1/2 | 0 | −1/2 | 0 | 0 | 4 |
| $x_3$ | 0 | 2/3 | 1 | 1/3 | 0 | 0 | 46/3 |
| $x_5$ | 0 | −1/2 | 0 | 1/2 | 1 | 0 | 8 |
| $x_6$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 16 |
| | | 1/2 | | 1/2 | | | −4 |

| | | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $x_1$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 12 |
| $x_2 = 10$ | $x_3$ | 0 | 1 | 1 | 0 | −2/3 | 0 | 10 |
| | $x_4$ | 0 | −1 | 0 | 1 | 2 | 0 | 16 |
| $x_2 = 16$ | $x_6$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 16 |
| | | | 1 | | 0 | −1 | | −12 |

## 2.4 表格单纯形法实例

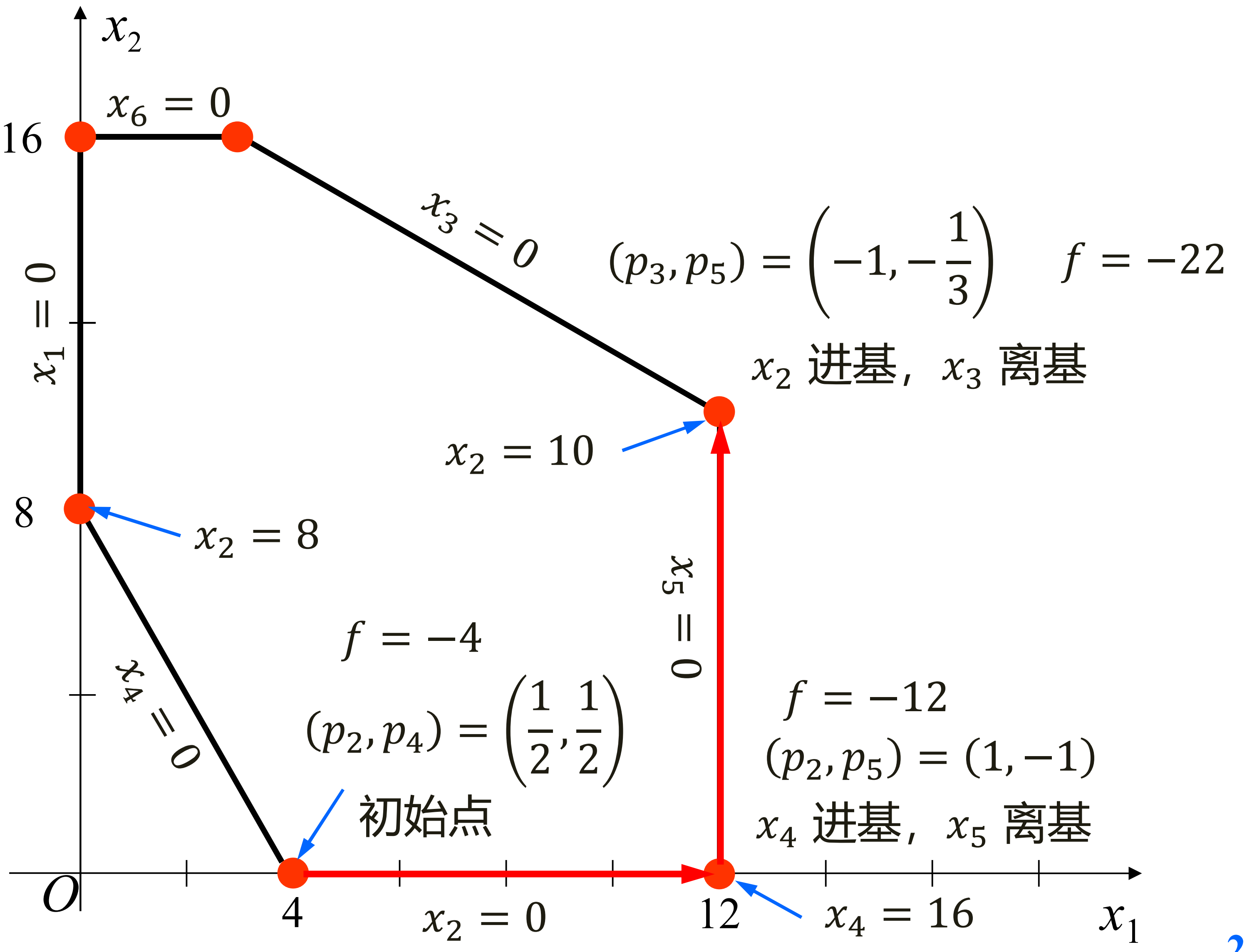
| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 12 |
| $x_3$ | 0 | 1 | 1 | 0 | $-2/3$ | 0 | 10 |
| $x_4$ | 0 | $-1$ | 0 | 1 | 2 | 0 | 16 |
| $x_6$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 16 |
| | | 1 | | 0 | $-1$ | | $-12$ |

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 12 |
| $x_2$ | 0 | 1 | 1 | 0 | $-2/3$ | 0 | 10 |
| $x_4$ | 0 | 0 | 1 | 1 | $4/3$ | 0 | 26 |
| $x_6$ | 0 | 0 | $-1$ | 0 | $2/3$ | 1 | 6 |
| | | 0 | $-1$ | 0 | $-1/3$ | | $-22$ |

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$f = -22$$

## 2.4 表格单纯形法实例



$x_2$
$x_6 = 0$
16
$x_3 = 0$
$(p_3, p_5) = \left(-1, -\frac{1}{3}\right)$
$f = -22$
$x_1 = 0$
$x_2$ 进基，$x_3$ 离基
$x_2 = 10$
8
$x_2 = 8$
$x_5 = 0$
$f = -4$
$x_4 = 0$
$(p_2, p_4) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$
$f = -12$
$(p_2, p_5) = (1, -1)$
初始点
$x_4$ 进基，$x_5$ 离基
$O$
4
$x_2 = 0$
12
$x_4 = 16$
$x_1$

# 主要内容

1. 线性规划的代数视角
2. 基本单纯形算法
3. 线性规划对偶理论(续)

## 3.1 强对偶的证明

**原始问题**

$$\begin{aligned} \min\ & c^{\mathrm{T}} x \\ \text{s.t. } & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$
$\mathrm{rank}(A) = m$

**对偶问题**

$$\begin{aligned} \max\ & b^{\mathrm{T}} y \\ \text{s.t. } & A^{\mathrm{T}} y \leq c \\ & y \ \text{free} \end{aligned}$$

**强对偶定理**

若原始线性规划有最优解，对偶线性规划也有最优解，且二者最优值相等

**证明：**求解原始问题。在最优解处有

$x_B = B^{-1} b \geq 0$ ⇒ $y^{\mathrm{T}} b = c_B^{\mathrm{T}} B^{-1} b = c^{\mathrm{T}} x$ ⇒（弱对偶）目标值达到最优

令 $y^{\mathrm{T}} \triangleq c_B^{\mathrm{T}} B^{-1}$

$c^{\mathrm{T}} - c_B^{\mathrm{T}} B^{-1} A \geq 0$ ⇒ $y^{\mathrm{T}} A \leq c^{\mathrm{T}}$ ⇒ $y$ 对偶可行

目标值达到最优 ⇒ $y$ 是对偶问题的最优解 ⇐ $y$ 对偶可行

## 3.2 线性规划的最优性条件

| 原始问题 | | 对偶问题 |
| --- | --- | --- |
| $\min\ c^{\mathrm{T}}x$<br>$\text{s.t. } Ax \ge b$ | $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$<br>$\operatorname{rank}(A) = m$ | $\max\ b^{\mathrm{T}}y$<br>$\text{s.t. } A^{\mathrm{T}}y = c$<br>$y \ge 0$ |

- 原始-对偶条件

| | |
| --- | --- |
| $Ax \ge b$ | 原始可行 |
| $A^{\mathrm{T}}y = c, y \ge 0$ | 对偶可行 |
| $c^{\mathrm{T}}x = b^{\mathrm{T}}y$ | 强对偶 |

- Karush-Kuhn-Tucker (KKT) 条件

| | |
| --- | --- |
| $Ax \ge b$ | 原始可行 |
| $A^{\mathrm{T}}y = c, y \ge 0$ | 对偶可行 |
| $y^{\mathrm{T}}(Ax - b) = 0$ | 互补松弛 |

## 3.3 对偶变量与影子价格

原始线性规划 强对偶 对偶线性规划

$$\min\ c^{\mathrm{T}}x \quad \text{s.t. } Ax \geq b \qquad b \leftarrow b + \Delta b$$

$$=$$

$$\max\ b^{\mathrm{T}}y \rightarrow (b+\Delta b)^{\mathrm{T}}y \quad \text{s.t. } A^{\mathrm{T}}y = c,\ y \geq 0$$

在可行解 $x^*$处，将不等式约束 $a_j^{\mathrm{T}}x \geq b_j$ 称为

- 起作用约束，若 $a_j^{\mathrm{T}}x^* = b_j$
- 非起作用约束，若 $a_j^{\mathrm{T}}x^* > b_j$

**定理 (互补松弛)**

若 $x^*$ 和 $y^*$ 分别是原始和对偶最优解，则对于原始问题的约束条件 $j = 1{:}m$ 及其对偶变量，$a_j^{\mathrm{T}}x^* > b_j$ 和 $y_j^* > 0$ 不能同时成立。

假设 $\Delta b_j$ 足够小以至于原始问题的最优基(索引)不变

- 若约束 $j$ 不起作用，则最优值 $z^*$ 不变 ($y_j^* = 0$)
- 若约束 $j$ 起作用，则 $\Delta z^* = \sum_j \Delta b_j\, y_j^*$ ($y_j^*$为资源$b_j$的影子价格)

# 例题

例1: 用单纯形法求解如下线性规划

$$
\begin{aligned}
\max\ & 3x_1 + x_2 + 3x_3 \\
\text{s.t.}\ & 2x_1 + x_2 + x_3 \le 2 \\
& x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 5 \\
& 2x_1 + 2x_2 + x_3 \le 6 \\
& x_1,\ x_2,\ x_3 \ge 0
\end{aligned}
$$

先将一般形式化为标准形式:

$$
\begin{aligned}
\min\ & -3x_1 - x_2 - 3x_3 \\
\text{s.t.}\ & 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\
& x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_5 = 5 \\
& 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_6 = 6 \\
& x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6 \ge 0
\end{aligned}
$$

# 例题

$$B=[A_4\ A_5\ A_6]=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\quad x_B=\begin{bmatrix}x_4\\x_5\\x_6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\5\\6\end{bmatrix}\quad x_N=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$f=-3x_1-x_2-3x_3:\ \ c_B^{\mathrm{T}}=(0\ \ 0\ \ 0),\ \ c_N^{\mathrm{T}}=(-3\ \ -1\ \ -3)\quad f=0$$

$$(p_1,p_2,p_3)=c_B^{\mathrm{T}}B^{-1}N-c_N^{\mathrm{T}}=-c_N^{\mathrm{T}}=(-3\ \ -1\ \ -3)$$

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_4$ | 2 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 2 |
| $x_5$ | 1 | 2 | 3 | 0 | 1 | 0 | 5 |
| $x_6$ | 2 | 2 | 1 | 0 | 0 | 1 | 6 |
| | 3 | 1 | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 |

选 $x_1$ 进基，$A_1$ 为主列

$$\min\left\{\frac{2}{2}\ \ \frac{5}{1}\ \ \frac{6}{2}\right\}=1$$

最小值对应离基变量$x_4$

# 例题

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_4$ | 2 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 2 |
| $x_5$ | 1 | 2 | 3 | 0 | 1 | 0 | 5 |
| $x_6$ | 2 | 2 | 1 | 0 | 0 | 1 | 6 |
| | 3 | 1 | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 |

新单纯形表对应的基矩阵:

$$[A_1\ A_5\ A_6]=\begin{bmatrix}2&0&0\\1&1&0\\2&0&1\end{bmatrix}$$

在表上做初等行变换:

$R_1\leftarrow\frac{R_1}{2}$ → $R_2\leftarrow R_2-\frac{R_1}{2}$ → $R_3\leftarrow R_3-R_1$ → $R_0\leftarrow R_0-\frac{3R_1}{2}$

更新单纯形表

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 1 | $1/2$ | $1/2$ | $1/2$ | 0 | 0 | 1 |
| $x_5$ | 0 | $3/2$ | $5/2$ | $-1/2$ | 1 | 0 | 4 |
| $x_6$ | 0 | 1 | 0 | $-1$ | 0 | 1 | 4 |
| | 0 | $-1/2$ | $3/2$ | $-3/2$ | 0 | 0 | $-3$ |

选 $x_3$ 进基，$A_3$为主列

$$\min\left\{\frac{1}{1/2}\quad\frac{4}{5/2}\right\}=\frac{8}{5}$$

最小值对应离基变量$x_5$

# 例题

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 1 | $1/2$ | $1/2$ | $1/2$ | 0 | 0 | 1 |
| $x_5$ | 0 | $3/2$ | $5/2$ | $-1/2$ | 1 | 0 | 4 |
| $x_6$ | 0 | 1 | 0 | $-1$ | 0 | 1 | 4 |
| | 0 | $-1/2$ | $3/2$ | $-3/2$ | 0 | 0 | $-3$ |

新单纯形表对应的基矩阵:

$$[A_1\ A_3\ A_6]=\begin{bmatrix}1 & 1/2 & 0\\ 0 & 5/2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

在表上做初等行变换:

$R_2 \leftarrow 2R_2/5$ → $R_1 \leftarrow R_1 - R_2/5$ → $R_0 \leftarrow R_0 - 3R_2/5$

更新单纯形表

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 1 | $1/5$ | 0 | $3/5$ | $-1/5$ | 0 | $1/5$ |
| $x_3$ | 0 | $3/5$ | 1 | $-1/5$ | $2/5$ | 0 | $8/5$ |
| $x_6$ | 0 | 1 | 0 | $-1$ | 0 | 1 | 4 |
| | 0 | $-7/5$ | 0 | $-6/5$ | $-3/5$ | 0 | $-27/5$ |

最优解为

$$\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/5\\ 0\\ 8/5\end{bmatrix}\qquad f_{\max}=\frac{27}{5}$$

例 2: 在标准型线性规划中

$$\begin{aligned} \min\ & c^{\mathrm{T}} x \\ \text{s.t. } & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

矩阵 $A$ 行满秩。在最优解处，基变量都是正数，即 $x_B^* > 0$。

证明: 对偶线性规划有唯一解。

**证明:**

对偶问题为 $\max \left\{ b^{\mathrm{T}} y :\ A^{\mathrm{T}} y \leq c \right\}$

假设对偶问题的最优解为 $y^*$, 需满足对偶问题约束条件 $A^{\mathrm{T}} y^* \leq c$.

对偶最优解处的起作用约束由原问题最优解决定，满足互补松弛条件

$$\left( [c_B^{\mathrm{T}}, c_N^{\mathrm{T}}] - y^{*\mathrm{T}} [B, N] \right) \begin{pmatrix} x_B \\ 0 \end{pmatrix} = \left( c_B^{\mathrm{T}} - y^{*\mathrm{T}} B \right) x_B = 0$$

由于 $x_B^* > 0$，故 $B^{\mathrm{T}} y^* = c_B$。又因为 $A$ 行满秩，基矩阵可逆，故对偶问题的唯一最优解为 $y^* = (B^{\mathrm{T}})^{-1} c_B$

例 3: 考察以下两个线性规划

| P1 | P2 |
| --- | --- |
| $v_1^p = \max \sum_{j=1}^n c_j x_j$ <br> s.t. $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \le b_i, i=1:m$ <br> $x_j \ge 0, j=1:n$ | $v_2^p = \max \sum_{j=1}^n c_j x_j$ <br> s.t. $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \le b_i + k_i, i=1:m$ <br> $x_j \ge 0, j=1:n$ |

其中右端项扰动 $k_1, \cdots, k_m$ 是给定常数。P1 的对偶最优解为 $(y_1^*, \cdots, y_m^*)$.

**证明**: $v_2^p \le v_1^p + \Sigma_{i=1}^m k_i y_i$

**证明**: 分别写出P1和P2的对偶问题D1和D2，由强对偶有 $v_1^p = v_1^d, v_2^p = v_2^d$

| D1 | D2 |
| --- | --- |
| $v_1^d = \min \sum_{i=1}^m b_i y_i = \sum_{i=1}^m b_i y_i^*$ <br> s.t. $\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \ge c_j, j=1:n$ <br> $y_i \ge 0, \ i=1:m$ | $v_2^d = \min \sum_{i=1}^m (b_i + k_i) y_i$ <br> s.t. $\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \ge c_j, j=1:n$ <br> $y_i \ge 0, \ i=1:m$ |

D1 和 D2 约束相同，故D1的最优解 $y^*$ 是 D2 的可行解，因此:

$$v_2^d = \sum_{i=1}^m (b_i + k_i) y_i^{**} \le \sum_{i=1}^m (b_i + k_i) y_i^* = v_1^d + \sum_{i=1}^m b_i y_i^*$$

**例 4**: 某线性规划极小化 $-2x_1 + 4x_2$，约束为 $\leq$ 型不等式，$x_3$ 和 $x_4$ 是转化为标准型时引入的松弛变量。右表是迭代至某一步的单纯形表。求未知数 $a$~$g$的值和最优解。

| $x_B$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_{B(1)}$ | $c$ | $0$ | $1$ | $1/5$ | $4$ |
| $x_{B(2)}$ | $d$ | $e$ | $0$ | $2$ | $a$ |
| | $b$ | $-1$ | $f$ | $g$ | $-8$ |

**解：** 由单纯形表可知，$x_3$是基变量，故$f = 0, B(1) = 3$, 当前目标值$z = -8$

由$-\bar{c}_2 = -1$知$x_2$是非基变量，故$x_2 = 0$，$-2x_1 + 4x_2 = -8 \Rightarrow x_1 = 4$

$x_4$是非基变量 $\Rightarrow x_1$是基变量，故 $c = 0, d = 1, a = 4, b = 0, B(2) = 1$

| $x_B$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_3$ | $0$ | $0$ | $1$ | $1/5$ | $4$ |
| $x_1$ | $1$ | $e$ | $0$ | $2$ | $4$ |
| | $0$ | $-1$ | $0$ | $g$ | $-8$ |

**例 4**: 续

初始表

| $B$ | $N$ | $I$ | $b$ |
|---|---|---|---|
| $-c_B^{\mathrm{T}}$ | $-c_N^{\mathrm{T}}$ | $0$ | $0$ |

| $x_B$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_3$ | 0 | 0 | 1 | $1/5$ | 4 |
| $x_1$ | 1 | $e$ | 0 | 2 | 4 |
| | 0 | $-1$ | 0 | $g$ | $-8$ |

当前表

| $I$ | $B^{-1}N$ | $\boxed{B^{-1}}$ | $B^{-1}b$ |
|---|---|---|---|
| $0$ | $c_B^{\mathrm{T}}B^{-1}N - c_N^{\mathrm{T}}$ | $c_B^{\mathrm{T}}B^{-1}$ | $c_B^{\mathrm{T}}B^{-1}b$ |

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1/5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},\quad c_B = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & g \end{pmatrix} = c_B^{\mathrm{T}}B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1/5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow g = -4$$ 已达最优解

$$c_B^{\mathrm{T}}B^{-1}A_2 - c_2 = -1$$

$$c_2 = 4$$

$$[0 \quad -4]A_2 = 3$$

$$a_{22} = -3/4$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ e \end{bmatrix} = B^{-1}A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1/5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{12} \\ -3/4 \end{bmatrix}$$

$$e = 0 \cdot a_{12} - 2 \times \frac{3}{4} = -\frac{3}{2}$$

# 例题

例 5: 只有一个等式约束的标准型线性规划

$$\min \quad \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = b \quad (b \geq 0)$$

$$x_i \geq 0, i = 1:n$$

如何判断该问题是否可行？若可行提出一种简单的求解方法。

- 若 $b = 0$，则 $x = 0$ 即为一个可行解
- 若 $b > 0$，则当且仅当 $\exists a_i > 0$ 时问题有可行解：

$$x_i = b/a_i\,, x_j = 0, j \neq i \text{ 即为一个可行解}$$

由于 $m = 1$，任何基本可行解最多只有一个非零元素

- 若 $b > 0$, 令 $k = \operatorname{argmin}\left\{\frac{c_i b}{a_i} \middle| a_i > 0\right\}$，最优解为$(0, \cdots, b/a_k\,, \cdots, 0)$

- 若 $b = 0$, 由于 $x = 0$ 是可行解，最优值必定非正
若能找到一个可行解 $x > 0$ 满足 $a^{\mathrm{T}}x = 0$ 以及 $c^{\mathrm{T}}x < 0$,
则对任意 $\gamma > 0, \gamma x > 0, a^{\mathrm{T}}\gamma x = 0$，故$\gamma x$可行且 $c^{\mathrm{T}}\gamma x < 0$.
这种情况下，问题无界。否则若 $\exists \lambda: c = \lambda a$, 则最优值为0

# 基本要求

- 会将一般形式的线性规划转化为标准型
- 理解主元选取规则，不要求相关证明
- 会用单纯形表求解非退化的线性规划问题
- 会从单纯形表中解读相关信息