上节课内容回顾

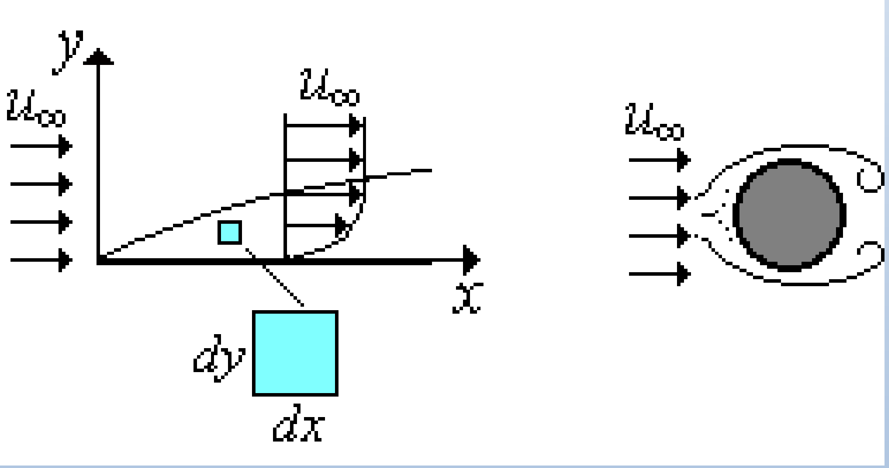
1、h与温度场的关系

根据导热傅里叶定律

$$q_x = -\lambda \frac{\partial t}{\partial y}\bigg|_{y=0,x}$$

按照牛顿冷却公式：

$$q_x = h_x (t_w - t_\infty)_x$$

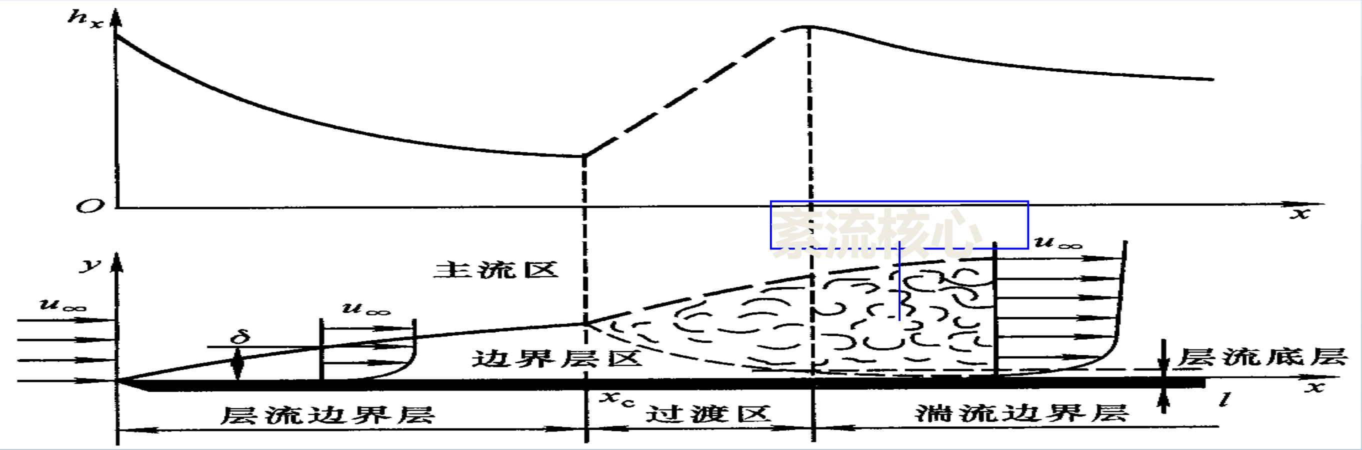


联立上面两式，可得：

$$h_x = -\frac{\lambda}{(t_w - t_\infty)_x} \frac{\partial t}{\partial y}\bigg|_{y=0,x}$$

上节课内容回顾

2、边界层



(a) δ、$\delta_t << l$　　(b) 流场划分为**边界层区和主流区**

(c) 根据流动状态，分为**层流边界层和紊流边界层**

(d) 在**层流边界层与层流底层**内，垂直于壁面方向上的热量传递**主要靠导热**。**紊流边界层**的**主要热阻在层流底层。**

上节课内容回顾

3、二维对流换热微分方程组

常物性、无内热源、不可压缩牛顿流体二维对流换热微分方程组：

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}=0 \\
\rho\left(\dfrac{\partial u}{\partial \tau}+u\dfrac{\partial u}{\partial x}+v\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)=F_x-\dfrac{\partial p}{\partial x}+\eta\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \\
\rho\left(\dfrac{\partial v}{\partial \tau}+u\dfrac{\partial v}{\partial x}+v\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)=F_y-\dfrac{\partial p}{\partial y}+\eta\left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) \\
\rho c_p\left(\dfrac{\partial t}{\partial \tau}+u\dfrac{\partial t}{\partial x}+v\dfrac{\partial t}{\partial y}\right)=\lambda\left(\dfrac{\partial^2 t}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 t}{\partial y^2}\right)
\end{cases}
$$

上节课内容回顾

4、边界层-二维对流换热微分方程组

连续： $$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

动量： $$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx}+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

能量： $$u\frac{\partial t}{\partial x}+v\frac{\partial t}{\partial y}=a\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}$$

边界层内压力沿*x*方向变化与主流区相同，可由主流区理想流体的伯努利方程确定： $$\frac{dp}{dx}=-\rho u_\infty\frac{du_\infty}{dx}$$

10-3、10-4节需掌握内容

基本概念：

① Nu的含义及其与Bi 的区别

② 主要特征数的含义（Nu，Re，Pr，Gr）

③ 物理现象相似的定义及条件

④ 相似原理指导下的实验研究方法

知识运用：

① 外掠平板层流换热计算

10-3 外掠等壁温平板层流换热分析解简介

一、对流换热特征数关联式(准则方程)

特征数是由一些物理量组成的无量纲数，具有一定的物理意义，表征物理现象或物理过程的某些特点。

- 通过对流换热微分方程的无量纲化或相似分析可以获得**对流换热的特征数**。
- 理论分析表明，对流换热的解可以表示成特征数函数的形式，称为**特征数关联式**。

引进下列无量纲变量：

$$\boxed{X=\frac{x}{l}},\ \boxed{Y=\frac{y}{l}},\ \boxed{U=\frac{u}{u_\infty}},\ \boxed{V=\frac{v}{u_\infty}},\ \boxed{\Theta=\frac{t-t_w}{t_\infty-t_w}}$$

对流换热表面传热系数与温度场之间的关系式

$$h=-\frac{\lambda}{t_w-t_\infty}\left.\frac{\partial t}{\partial y}\right|_{y=0}\Rightarrow h=-\frac{\lambda}{\left(t_w-t_\infty\right)}\frac{\left(t_\infty-t_w\right)}{l}\left.\frac{\partial\Theta}{\partial Y}\right|_{Y=0}=\frac{\lambda}{l}\left.\frac{\partial\Theta}{\partial Y}\right|_{Y=0}$$

取整个*l*的平均值

$$\Rightarrow\ \frac{hl}{\lambda}=\left.\frac{\partial\Theta}{\partial Y}\right|_{Y=0}$$

令 $\boxed{Nu=\frac{hl}{\lambda}}$

$$\Rightarrow\ \boxed{Nu=\left.\frac{\partial\Theta}{\partial Y}\right|_{Y=0}}$$

***Nu*称为平均努塞尔数，等于壁面法线方向上的平均无量纲温度梯度，大小反映平均对流换热的强弱。**

$$Nu = \frac{hl}{\lambda}$$

Nu**称为平均努塞尔数，等于壁面法线方向上的平均无量纲温度梯度，大小反映平均对流换热的强弱。**

$$Bi = \frac{h\delta}{\lambda}$$

Bi**数，等于导热热阻与对流换热热阻之比。**

特征数关联式

对于常物性、无内热源、不可压缩牛顿流体平行外掠平板稳态对流换热，$du_\infty/dx=0$，边界层方程组简化为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}=0 \\ u\dfrac{\partial u}{\partial x}+v\dfrac{\partial u}{\partial y}=\nu\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ u\dfrac{\partial t}{\partial x}+v\dfrac{\partial t}{\partial y}=a\dfrac{\partial^2 t}{\partial y^2} \end{cases}
\xrightarrow{\text{无量纲化}}
\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial X}+\dfrac{\partial V}{\partial Y}=0 \\ U\dfrac{\partial U}{\partial X}+V\dfrac{\partial U}{\partial Y}=\dfrac{1}{Re}\dfrac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \\ U\dfrac{\partial \Theta}{\partial X}+V\dfrac{\partial \Theta}{\partial Y}=\dfrac{1}{Re\cdot Pr}\dfrac{\partial^2 \Theta}{\partial Y^2} \end{cases}$$

式中 $Re=\dfrac{u_\infty l}{\nu}$ 称为**雷诺数**。

雷诺数：代表了惯性力与粘性力之比

特征数关联式

$$U = f(X, Y, Re) \qquad V = f(X, Y, Re) \qquad \Theta = f(X, Y, Re, Pr)$$

再由 $Nu = \left.\dfrac{\partial \Theta}{\partial Y}\right|_{Y=0} \Rightarrow \boxed{Nu = f\left(Re, Pr\right)}$

Nu 待定特征数

Re, Pr 已定特征数

流体平行外掠平板强迫对流换热的解可以表示成特征数关联式的形式，即

$$Nu = f\left(Re, Pr\right)$$

对比 $h = f\left(u, t_{\mathrm{w}}, t_{\mathrm{f}}, \lambda, \rho, c, \eta, \alpha, l, \psi\right)$

特征数关联式中变量数大为减少，突出地反映相关物理量之间的依赖关系及其对对流换热的综合影响。

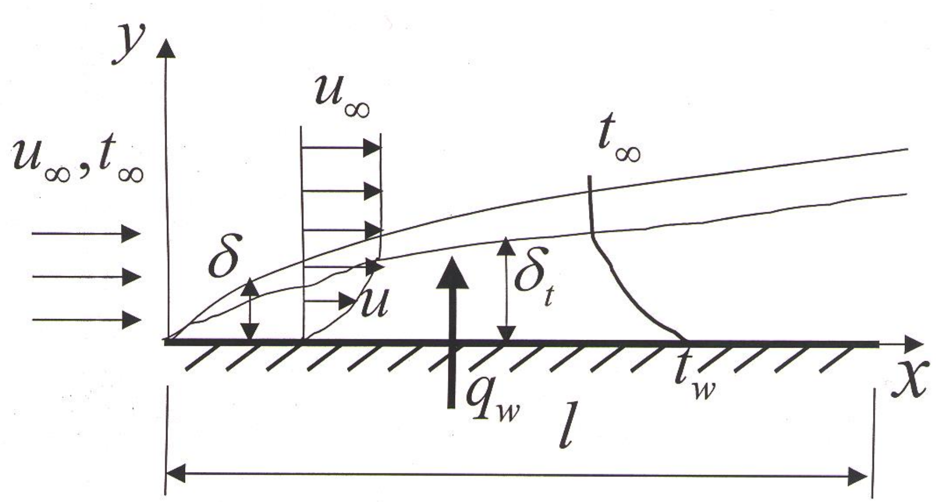
二、外掠平板层流换热分析结果

对象：常物性、无内热源、不可压缩牛顿流体平行外掠等壁温平板层流换热

1. 速度场的求解结果(Blasius, 1908)

方法：引入相似变换群，将边界层动量偏微分方程转换为常微分方程，然后求常微分方程的数值解。称为相似解。

(1) 流动边界层厚度



$$\frac{\delta}{x} = 5.0\,\mathrm{Re}_x^{-1/2} \qquad \mathrm{Re}_x = \frac{u_\infty x}{\nu}$$

(2) 摩擦系数

根据局部粘性切应力公式： $\tau_{w,x} = \eta \left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0,x}$

局部摩擦系数的定义式： $\tau_{w,x} = c_{f,x} \dfrac{\rho u_\infty^2}{2}$

由边界层的速度分布求出**局部摩擦系数**：

$$c_{f,x} = 0.664\,\mathrm{Re}_x^{-1/2}$$

$$c_f = \frac{1}{l}\int_0^l c_{fx}\,dx = 1.328\,\mathrm{Re}_l^{-1/2}$$

2. 温度场求解结果(Pohlhousen， 1921)

假定为定常问题，对边界层能量微分方程求相似解（速度分布同Blasius解）。

(1) 热边界层厚度 δ_t

- 由边界层能量微分方程求出边界层的温度分布，可以确定热边界层的厚度
- 对于 $\mathrm{Pr} = 0.6 \sim 15$ 的流体，可近似求得热边界层与流动边界层的厚度之比为:

$$\frac{\delta_t}{\delta} = \mathrm{Pr}^{-1/3}$$

(2) 特征数关联式

$$h = -\frac{\lambda}{t_{\mathrm{w}} - t_{\infty}} \frac{\partial t}{\partial y}\bigg|_{y=0}$$

- 由边界层的温度分布求出局部表面传热系数 h_x 。
- 结果以无量纲特征数关联式的形式给出：对于 $\Pr \geq 0.6$ 的流体

$$Nu_x = \frac{h_x x}{\lambda} = 0.332\,\mathrm{Re}_x^{1/2}\,\Pr^{1/3}$$

可见，

$$h_x = C' x^{-1/2}$$

当 $x \to 0 \Rightarrow h_x \to \infty$ 边界层理论在 x=0 附近不成立

(原因：x与δ为同一数量级)

对于等壁温平板，平板全长平均表面传热系数

$$h = \frac{1}{l}\int_0^l C' x^{-1/2} dx = 2C' l^{-1/2} = 2h_l$$

$$Nu = \frac{hl}{\lambda} = \frac{2h_l l}{\lambda} = 2Nu_l$$

平均努塞尔数：

$$Nu = 0.664 \, Re_l^{1/2} \, Pr^{1/3}$$

上述关系式仅适用于外掠等壁温平板层流换热，定性温度为边界层的算术平均温度：

$$t_m = \frac{1}{2}\left(t_w + t_\infty\right)$$

对象：流体外掠常热流平板层流换热 $\Pr \geq 0.6$

当 Re_x、$\Pr$ **相同时，常热流情况下的局部努塞尔数要比等壁温情况大36%左右。**

$$Nu_x = 0.453\,\mathrm{Re}_x^{1/2}\,\Pr^{1/3}$$

常热流下 $q_x = h_x \left(t_{\mathrm{w}} - t_f \right)_x = q = 常数$

壁面温度是变化的，温差$\left(t_{\mathrm{w}} - t_f \right)_x$ **不等于常数。将平均壁面温差定义为：**

$$
\begin{aligned}
\overline{t_{\mathrm{w}} - t_f} &= \frac{1}{l} \int_0^l \left(t_{\mathrm{w}} - t_f \right)_x dx \\
&= \frac{1}{l} \int_0^l \frac{q}{h_x} dx = \frac{q}{l\lambda} \int_0^l \frac{x}{Nu_x} dx
\end{aligned}
$$

平均努塞尔数

$$Nu=\frac{hl}{\lambda}=\frac{ql}{\lambda\left(t_{\mathrm{w}}-t_{f}\right)}=\frac{l^{2}}{\int_{0}^{l}\frac{x}{Nu_{x}}dx}$$

$$Nu=0.680\,\mathrm{Re}^{1/2}\,\mathrm{Pr}^{1/3}$$

当 Re_x、Pr 相同时，常热流情况下的平均努塞尔数只比等壁温情况大2.4%。

讨 论

- 连续性方程+动量方程 $\Rightarrow$ 速度场 $\Rightarrow$ δ、 $\tau_{w,x}$、$c_{f,x}$；
- 能量方程+速度场求解结果 $\Rightarrow$ 温度分布 $\Rightarrow$ $h_x\,(Nu_x)$；

$\Rightarrow$ **非耦合问题**

- 物性对换热的影响为$Pr^{1/3}$, 已为实验所证实；
- 对流换热微分方程组具有准则形式的解。

三、动量传递与热量传递的比拟简介（略）

10-4 对流换热的实验研究方法

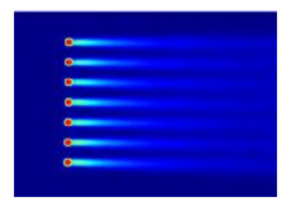
实验研究的三个问题

（1）如何安排实验?

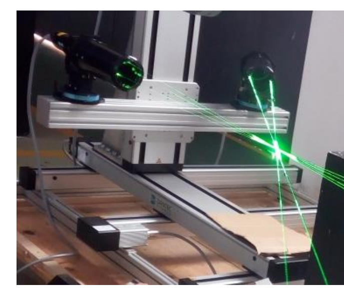
（2）如何整理实验数据?

（3）如何推广应用实验研究结果?

涡轮叶栅试验台



PSP测试技术



LDV测试技术

相似原理的主要内容

（1）物理现象相似的定义
（2）物理现象相似的性质
（3）相似特征数之间的关系
（4）物理现象相似的条件

一、物理现象相似的定义

如果同类物理现象之间所有同名物理量场都相似，即同名的物理量在所有对应时间、对应地点的数值成比例，则称物理现象相似。

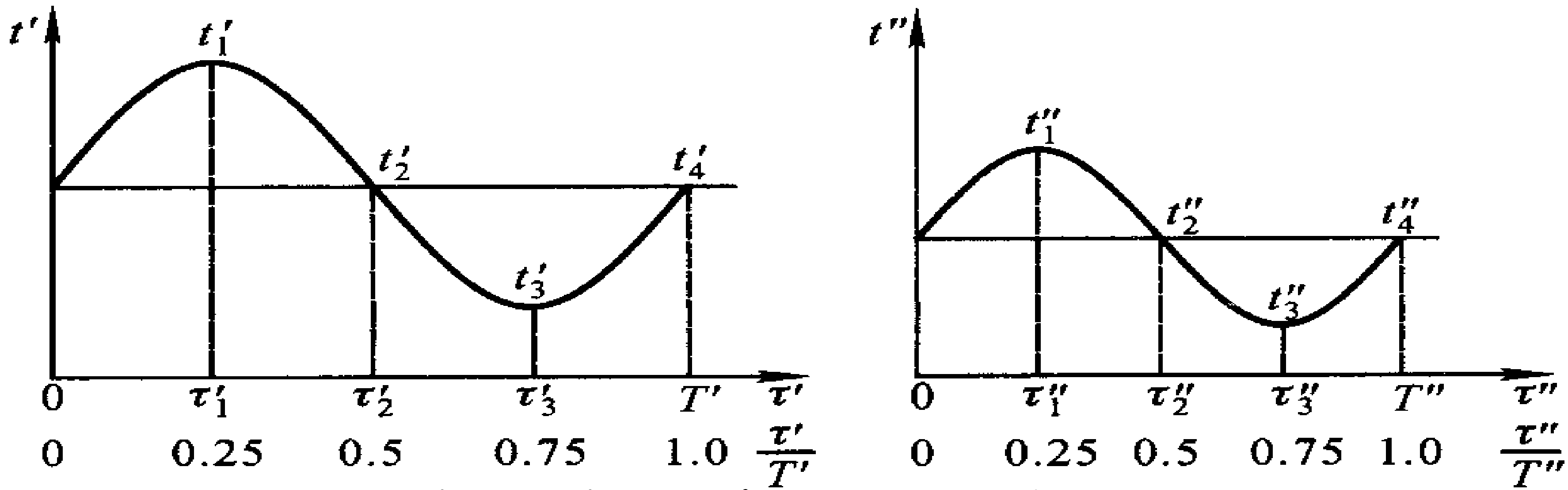
同类物理现象：具有相同性质、服从于同一自然规律、用形式和内容相同的方程式来描写的物理现象。

如果物理现象由 $\varphi_A, \varphi_B, \varphi_C, \cdots$ 等n个物理量来描述，则彼此相似的物理现象就有n个对应相似的物理量场，即在所有对应的时间和对应的地点，

$$\frac{\varphi_A'}{\varphi_A''} = C_{\varphi_A}, \frac{\varphi_B'}{\varphi_B''} = C_{\varphi_B}, \frac{\varphi_C'}{\varphi_C''} = C_{\varphi_C}, \cdots$$

其中$C_{\varphi_A}, C_{\varphi_B}, C_{\varphi_C}, \cdots$分别为各物理量的相似倍数。如果所有的相似倍数都等于1，则两个物理现象完全相同。

对应时间：指时间坐标对应成比例的时间，也称**相似时间。**

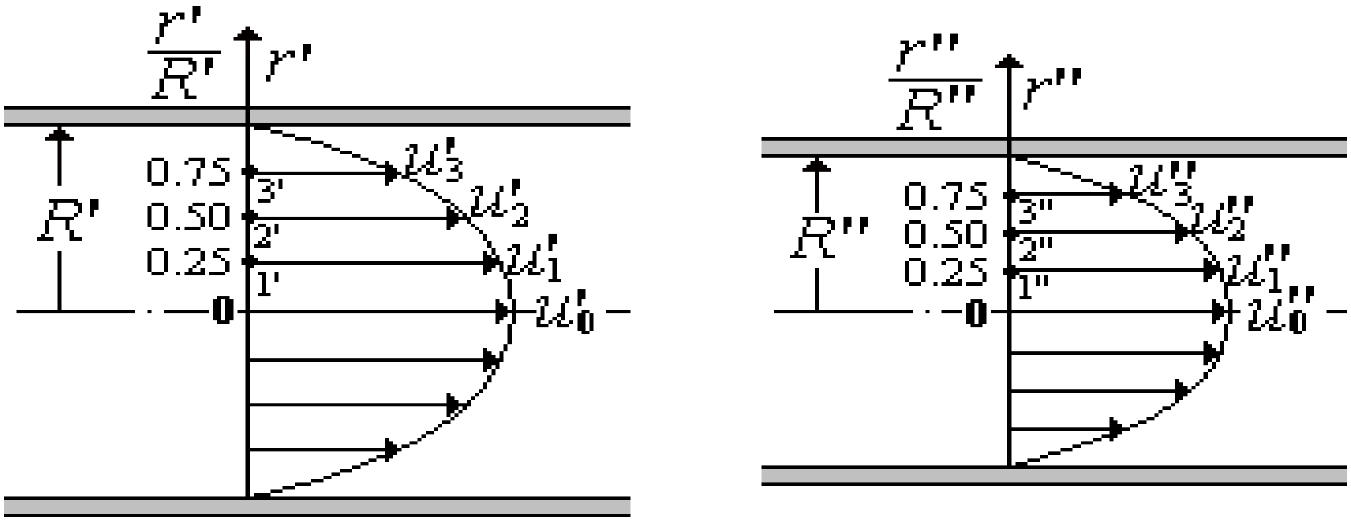


$$\frac{\tau_1'}{\tau_1''}=\frac{\tau_2'}{\tau_2''}=\frac{\tau_3'}{\tau_3''}=\cdots=\frac{T'}{T''}=C_\tau$$

式中C_τ为时间坐标比例常数，或称为**时间相似倍数**。

如果分别采用无量纲时间坐标 $\tau'/T',\tau''/T''$，则对应时间的无量纲时间坐标分别相等。

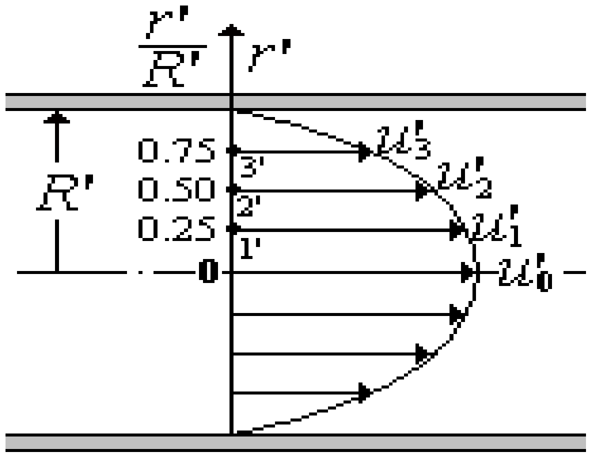
对应地点： 指空间坐标对应成比例的地点，也称为**相似地点**。两个圆管内稳态等温层流速度场相似：

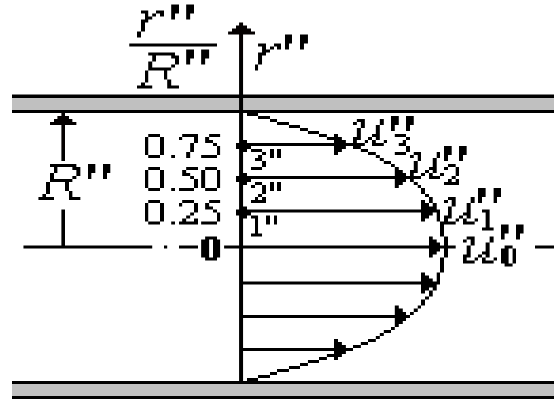


相似地点：
$$\frac{r_1'}{r_1''}=\frac{r_2'}{r_2''}=\frac{r_3'}{r_3''}=\cdots=\frac{R'}{R''}=\frac{d'}{d''}=\frac{l'}{l''}=C_l$$

式中C_l为空间坐标比例常数，或称为**几何相似倍数**。

如果分别采用无量纲空间坐标 $r'/R', r''/R''$，则相似地点的无量纲空间坐标分别相等。





两个管内稳态层流速度场相似，所有相似地点的速度成比例，

$$\frac{u_1'}{u_1''}=\frac{u_2'}{u_2''}=\frac{u_3'}{u_3''}=\cdots\cdots\frac{u_0'}{u_0''}=C_u$$

式中C_u为速度相似倍数。如果采用无量纲速度 u/u_0，

$$\frac{u_1'}{u_0'}=\frac{u_1''}{u_0''},\frac{u_2'}{u_0'}=\frac{u_2''}{u_0''},\frac{u_3'}{u_0'}=\frac{u_3''}{u_0''},\cdots$$

无量纲速度场相同

结论：相似物理现象的所有同名无量纲物理量场相同。

二、物理现象相似的性质

以A与B两个常物性、无内热源、不可压缩牛顿流体外掠等壁温平板的对流换热相似为例，

现象A：
$$h' = -\frac{\lambda'}{(t'_w - t'_\infty)}\frac{\partial t'}{\partial y'}\bigg|_{y'=0}$$

现象B：
$$h'' = -\frac{\lambda''}{(t''_w - t''_\infty)}\frac{\partial t''}{\partial y''}\bigg|_{y''=0}$$

根据物理量场相似的定义，

$$\frac{x'}{x''} = \frac{y'}{y''} = \frac{l'}{l''} = C_l\,, \qquad \frac{h'}{h''} = C_h$$

$$\frac{\lambda'}{\lambda''} = C_\lambda\,, \quad \frac{t'_w}{t''_w} = \frac{t'_\infty}{t''_\infty} = \frac{t'}{t''} = C_t$$

比较

$$\frac{C_h C_l}{C_\lambda} h'' = -\frac{\lambda''}{(t''_w - t''_\infty)}\frac{\partial t''}{\partial y''}\bigg|_{y''=0}$$

$$\frac{C_h C_l}{C_\lambda} = 1 \Rightarrow \frac{h' l'}{\lambda'} = \frac{h'' l''}{\lambda''}$$

$$\Rightarrow Nu' = Nu''$$

采用同样的方法，可由动量微分方程式和能量微分方程式导出 $Re' = Re''$, $Pr' = Pr''$

这种由描述物理现象的方程式导出特征数的方法叫作相似分析。Nu**、**Re**、**Pr**也称为相似特征数。**

结论：两个常物性、不可压缩牛顿流体外掠等壁温平板的对流换热现象相似，努塞尔数Nu**、雷诺数**Re**、普朗特数**Pr**分别相等。**

物理现象相似的性质：彼此相似的物理现象，同名的相似特征数相等。

相似特征数

以杰出科学家的名字命名

$$Nu = \frac{hl}{\lambda}$$ - 努赛尔数 Nusslet

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho ul}{\eta} = \frac{ul}{\nu}$$ - 雷诺数 Reynolds

$$\mathrm{Pr} = \frac{\nu}{a}$$ - 普朗特数 Prandtl

$$Eu = \frac{\Delta p}{\rho u^2}$$ - 欧拉数 Euler

$$Pe = \mathrm{Re}\,\mathrm{Pr} = \frac{ul}{a}$$ - 贝克利数 Peclet

对于自然对流换热：浮升力的影响

$$Gr=\frac{\alpha g\Delta t l^3}{\nu^2}$$ - 葛拉晓夫数 Grashoof

Nu — 流体在壁面处法向无量纲过余温度梯度

Re — 流体惯性力与粘性力的相对大小

Pr — 流体动量扩散能力与热量扩散能力之比

Gr — 流体浮升力与粘性力的相对大小

实验中只需测量各相似特征数所包含的物理量

避免了测量的盲目性，解决了实验中测量哪些物理量的问题

三、相似特征数之间的关系

因为与物理现象有关的所有物理量都由描写物理现象的方程式联系在一起，所以由这些物理量组成的特征数之间存在着必然的函数关系，这就是前面得出的对流换热微分方程组解的函数形式——**特征数关联式**。

自然对流换热： $\mathrm{Nu} = f(\mathrm{Gr},\ \mathrm{Pr})$

混合对流换热： $\mathrm{Nu} = f(\mathrm{Re},\ \mathrm{Gr},\ \mathrm{Pr})$

由于彼此相似物理现象的同名相似特征数相等，所以相似物理现象的解必定用同一个特征数关联式来描写，**从一个物理现象所得到的特征数关联式一定适用于与其相似的所有物理现象**。

四、物理现象相似的条件

根据物理现象相似的定义和性质，可以得出物理现象相似必须满足3个条件：

1) 同类现象；

2) 单值性条件相似；

3) 同名已定特征数相等。

对于单相流体的强迫对流换热，只要**已定特征数**Re、Pr相等，**待定特征数**Nu也必然相等，因为Nu是Re、Pr的函数。

四、相似原理指导下的实验研究方法

相似原理回答了进行对流换热实验研究所必须解决的3个主要问题：如何安排试验；怎样整理实验数据；实验结果的适用性。

1、实验安排

根据相似原理，实验中的对流换热过程必须与实际对流换热过程相似，因此安排试验必须满足物理现象相似的3个条件，即同类的对流换热，单值性条件相似，已定特征数相等。

- 单值性条件相似：几何条件；物理条件；边界条件。
- 已定特征数相等：Pr，Re
- 近似模拟法或局部模拟法

四、相似原理指导下的实验研究方法

2、实验数据的测量与整理

根据相似原理，所有相似物理现象的解都用同一个特征数关联式来描写，所以实验研究的主要目的就是确定特征数关联式的具体函数形式。

对于工程上常见的无相变单相流体强迫对流换热，其特征数关联式一般写成幂函数的形式：

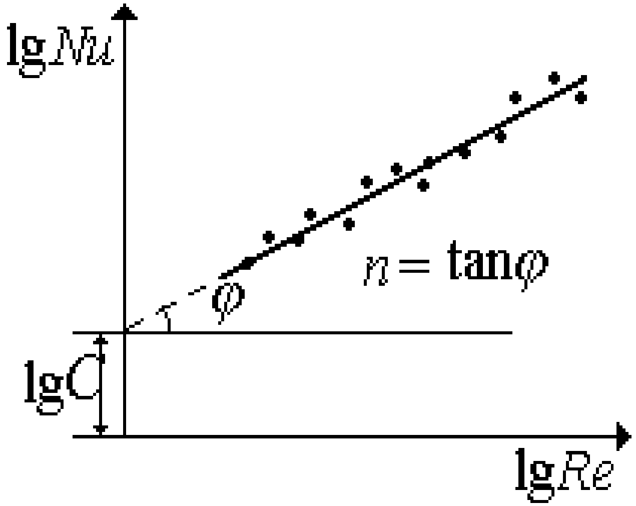
$$Nu = f\left(Re\,,\ Pr\right) = CRe^{n}Pr^{m}$$

式中，C、n及m为待定常数，由实验确定。

对于气体的强迫对流换热， Pr基本上等于常数，

$$Nu = f\left(Re\right) = CRe^{n}$$

$$\lg Nu = \lg C + n \cdot \lg Re$$



$$Nu = \frac{hl}{\lambda}、Re = \frac{ul}{\nu}$$

需要解决以下几个问题：

(a) 特征长度l和定性温度选择；

(b) 流速u的测量；

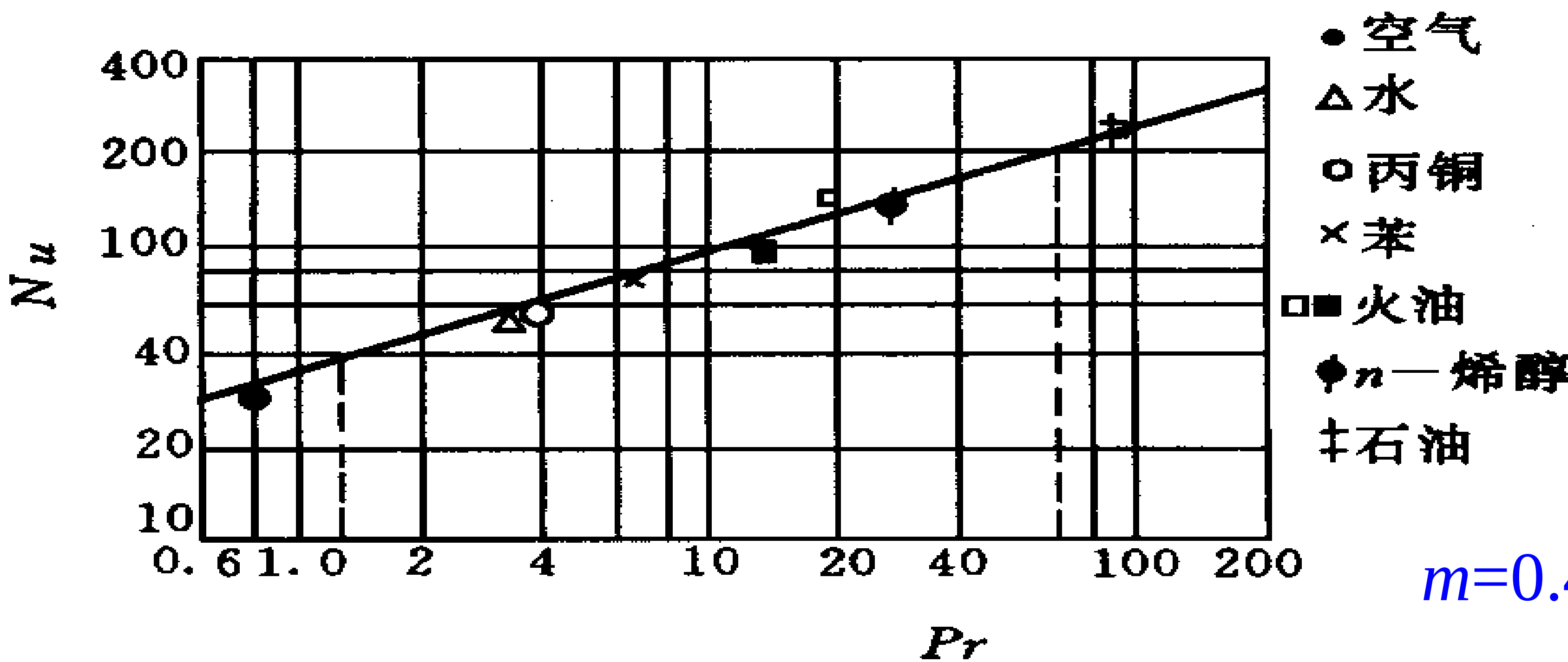
(c) 表面传热系数h的测量： $h = \dfrac{\Phi}{A\left(t_{w} - t_{f}\right)}$

对于一般流体的强迫对流换热特征数关联式

$$Nu = CRe^{n}Pr^{m}$$

需要确定C、n、m三个常数。例如对于管内强制对流换热，可以先用不同Pr 的流体在相同Re下进行试验，确定m的数值：$Nu = C^{'} \cdot Pr^{m}$

$$\lg Nu = \lg C^{'} + m \cdot \lg Pr$$



m=0.4

图 5-15 $Re=10^4$ 时不同 Pr 数流体的实验结果

然后再用同一种流体在不同的Re下进行实验确定C和n的数值。

$$Nu/Pr^{0.4}=CRe^n$$

$n=0.8$

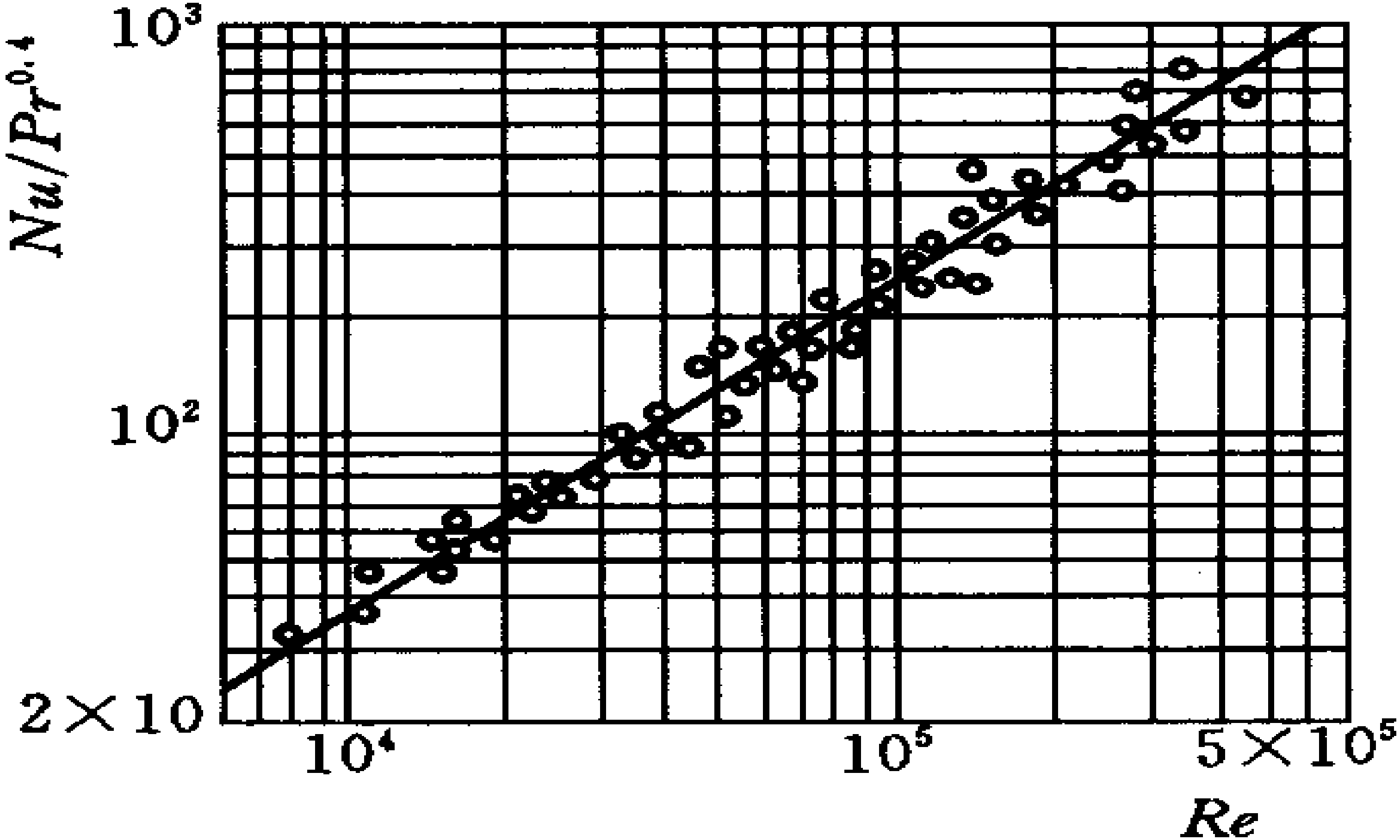


图 5-16　管内湍流强制对流换热的实验结果

3、特征数关联式的适用范围

从一个物理现象所获得的特征数关联式适用于与其相似的所有物理现象。

由于单相流体强迫对流换热特征数关联式是在一定的*Re*、*Pr*变化范围内通过实验获得的，并且关系式中的常数大小还与**特征长度、定性温度**的选择有关，所以每一个对流换热特征数关联式只适用于一定的*Re*、*Pr*范围及确定的特征长度与定性温度。

第十章作业（2）

10-2

10-3

10-4