第四次作业

1. 判断以下不等式组是否有解

$$
\begin{aligned}
x_1+x_2-2x_3 &\geqslant 2\\
-x_1-3x_2+x_3 &\geqslant 0\\
x_2+x_3 &\geqslant 1
\end{aligned}
\tag{P1}
$$

$$
\begin{aligned}
x+y+2z &\geqslant 1\\
-x+y+z &\geqslant 2\\
x-y+z &\geqslant 1\\
-y-3z &\geqslant 0
\end{aligned}
\tag{P2}
$$

解

(1) 最后一个约束不包含 x_1，从前两个不等式先消去 x_1 得

$$-3x_2+x_3 \geqslant 2-x_2+2x_3$$

再与最后一个不等式联立

$$
\begin{aligned}
-2x_2-x_3 &\geqslant 2\\
x_2+x_3 &\geqslant 1
\end{aligned}
$$

消去 x_2 得 $x_3 \geqslant 4$；令 $x_3=4$，则 x_2 需满足

$$
\begin{aligned}
x_2 &\leqslant (-2-x_3)/2=-3\\
x_2 &\geqslant 1-x_3=-3
\end{aligned}
$$

将 $x_2=-3, x_3=4$ 代入前两个不等式可得

$$
\begin{aligned}
x_1 &\geqslant 2-x_2+2x_3=13\\
x_1 &\leqslant x_3-3x_2=13
\end{aligned}
$$

不等式组 (P1) 的一个解是 $(13,-3,4)$。直接求解三个等式构成的方程也能得到该解。

(2) 最后一个不等式不含 x，①+②和②+③可以消去 x 得

$$
\begin{aligned}
2y+3z &\geq 3\\
2z &\geq 3\\
-y-3z &\geq 0
\end{aligned}
$$

上式中①+2×③可以消去 y 得

$$-3z \geq 3$$
$$2z \geq 3$$

显然以上不等式组矛盾，故不等式组 (P2) 无解。

$\square$

2. 用傅里叶消元法求解以下线性规划问题

$$(\mathrm{P1})\quad \begin{aligned} \min\quad & x \\ \text{s.t.}\quad & x+y \geqslant 2 && (1) \\ & x-2y+z \geqslant 0 && (2) \\ & y-2z \geqslant -1 && (3) \end{aligned}$$

$$(\mathrm{P2})\quad \begin{aligned} \min\quad & x+y \\ \text{s.t.}\quad & x+2y \geqslant 2 && (1) \\ & 3x+2y \geqslant 6 && (2) \\ & x \geqslant 0, y \geqslant 0 && (3) \end{aligned}$$

解 P1：首先从 (2)-(3) 得 z 的上界和下界：

$$z \geqslant 2y-x$$
$$z \leqslant (y+1)/2$$

消去 z 得到：

$$2y-x \leqslant \frac{y+1}{2}$$

即：

$$3y-2x \leqslant 1$$

结合约束 (1) 有：

$$y \geqslant 2-x$$
$$y \leqslant (2x+1)/3$$

因此：

$$2-x \leq \frac{2x+1}{3}$$

解得 $x \geqslant 1$，回代得到 $1 \leqslant y \leqslant 1$，再回代得到 $1 \leqslant z \leqslant 1$，故最优解是 $(1,1,1)$。

P2：今 $z=x+y$ 消去 x，得到不等式组

$$
\begin{aligned}
z+y &\geqslant 2 \\
3z-y &\geqslant 6 \\
z-y &\geqslant 0 \\
y &\geqslant 0
\end{aligned}
$$

按变量 y 整理：

$$
\begin{aligned}
& y \geqslant 2-z \\
& y \leqslant 3z-6 \\
& y \leqslant z \\
& y \geqslant 0
\end{aligned}
$$

消去变量 y：

$$
\begin{aligned}
z &\geqslant 0 \\
z &\geqslant 2-z \\
0 &\leqslant 3z-6 \\
2-z &\leqslant 3z-6
\end{aligned}
$$

解得 $z \geqslant 2$，故最优值为 2。将 $z=2$ 回代得到 $y=0$，$x=z-y=2$，故最优解是 $(2,0)$。 $\square$

3. 标准形式线性规划问题的系数矩阵如下

$$
A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},\ b=\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix},\ c=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{\top}
$$

$B=\{1,2\}$ 是一组基的索引。

(1) 证明 B 是最优基索引。

(2) 向量 b 的第一个元素 b_1 从 4 变为 θ，B 仍为最优基索引，求 θ 的取值范围。

(3) 矩阵 A 第 2 行第 2 列的元素 a_{22} 从 1 变为 θ，B 仍为最优基索引，求 θ 的取值范围。

解

(1) 基索引 $B=\{1,2\}$ 对应的基本解 $x^*=(2,1,0)^{\top}$ 是可行解；求解方程 $y^{\top}A_B=c_B^{\top}$ 得到 $y^*=(0,0)^{\top}$；检验 $(y^*)^{\top}A_3<c_3$，故 y^* 对偶可行。因此 B 是最优基索引，x^* 和 y^* 分别是原问题和对偶问题的最优解。

(2) 此时，基索引 $B=\{1,2\}$ 对应的基本解由方程

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1^*\\ x_2^*\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\theta\\ 3\end{bmatrix}$$

给出，且 $x_3^*=0$。解得 $x_1^*=-\theta+6$，$x_2^*=\theta-3$。若 B 是最优基，(x_1^*,x_2^*,x_3^*) 必须是可行解，因此 θ 必须满足

$$-\theta+6\geqslant 0$$

$$\theta-3\geqslant 0$$

由上一问可知 $y^*=(0,0)^\top$ 仍然是对偶可行解。所以当 $3\leqslant\theta\leqslant 6$ 时 B 仍是最优基索引。

(3) 新的矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 1 & \theta & 1\end{bmatrix}$$

若 $B=\{1,2\}$ 是一组基，则 $\theta\neq 2$，A_B 可逆，其逆矩阵为

$$A_B^{-1}=\frac{1}{\theta-2}\begin{bmatrix}\theta & -2\\ -1 & 1\end{bmatrix}$$

欲使 B 为最优基则必有

$$\frac{1}{\theta-2}\begin{bmatrix}\theta & -2\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\ 3\end{bmatrix}=\frac{1}{\theta-2}\begin{bmatrix}4\theta-6\\ -1\end{bmatrix}\geqslant\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

因此 $\theta-2\leqslant 0$，$4\theta-6\leqslant 0$，解得 $\theta\leqslant 3/2$。此时 A_B 可逆，$y^*=c_B^\top A_B^{-1}=(0,0)^\top$ 对偶可行。所以当 $\theta\leqslant 3/2$ 时 B 仍是最优基索引。

□

4. 考虑线性规划问题

$$\begin{aligned}\min\quad & -x_1-3x_2\\ \text{s.t.}\quad & x_1+x_2\leqslant 6\\ & -x_1+2x_2\leqslant 6\\ & x_1,x_2\geqslant 0\end{aligned}$$

(1) 任选一种方法方法求出最优解。

(2) 将约束右端项 $[6;6]$ 改变为 $[6-\lambda;6+\lambda]$，$\lambda\geqslant 0$，若起作用约束不变，求参数 λ 的取值范围以及最优解与 λ 的关系。

(3) 在第 (2) 问右端项的设定下，λ 在什么范围内变化时线性规划依然有解 (起作用约束可以不同)？写出最优值与 λ 的关系。

解

(1) 图解法和傅里叶消元法比单纯形法简单，最优解为 $(2,4)$，起作用约束是两个 $\leqslant$ 型不等式。

(2) 起作用约束不变，求解方程

$$x_1 + x_2 = 6 - \lambda$$
$$-x_1 + 2x_2 = 6 + \lambda$$

得 $x_2 = 4$, $x_1 = 2 - \lambda$, 可行性要求 $\lambda \leqslant 2$。故当 $\lambda \in [0,2]$ 时，最优值为 $\lambda - 14$。

(3) 令 $v = -x_1 - 3x_2$，将约束右端项改为 $[6-\lambda; 6+\lambda]$ 后，考虑约束

$$x_1 + x_2 \leqslant 6 - \lambda$$
$$-x_1 + 2x_2 \leqslant 6 + \lambda$$
$$v = -x_1 - 3x_2$$
$$x_1 \geqslant 0$$
$$x_2 \geqslant 0$$

将 $x_1 = -v - 3x_2$ 代入其余不等式约束可得

$$\begin{aligned} -v - 2x_2 &\leqslant 6 - \lambda \\ v + 5x_2 &\leqslant 6 + \lambda \\ -v - 3x_2 &\geqslant 0 \\ x_2 &\geqslant 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x_2 &\geqslant (\lambda - v - 6)/2 \\ x_2 &\leqslant (\lambda - v + 6)/5 \\ x_2 &\leqslant -v/3 \\ x_2 &\geqslant 0 \end{aligned}$$

消去变量 x_2 可得

$$(\lambda - v - 6)/2 \leqslant (\lambda - v + 6)/5$$
$$0 \leqslant (\lambda - v + 6)/5$$
$$0 \leqslant -v/3$$
$$(\lambda - v - 6)/2 \leqslant -v/3$$

即

$$v \geqslant \lambda - 14$$
$$v \leqslant \lambda + 6$$
$$v \leqslant 0$$
$$v \geqslant 3\lambda - 18$$

已知 $\lambda \geqslant 0$，显然 $v \leqslant \lambda + 6$ 冗余。为使上述不等式组有解，则必须

$$\lambda - 14 \leqslant 0$$
$$3\lambda - 18 \leqslant 0$$

解得 $\lambda \leqslant 6$。当 $\lambda > 6$ 时，可行域为空集。当 $\lambda \in [0,6]$ 时，最优值函数为

$$v = \max\{\lambda - 14, 3\lambda - 18\} \quad \text{或} \quad v = \begin{cases} -14 + \lambda & \lambda \in [0,2] \\ -18 + 3\lambda & \lambda \in [2,6] \end{cases}$$

可见参数集被划分为 2 个关键区间，其中 $[0,2]$ 在第 (2) 问中考虑过，起作用约束是原问题中两个 $\leqslant$ 型不等式。为了得到关键区间 $[2,6]$ 对应的起作用约束，考虑 $\lambda = 3$ 时的约束条件

$$x_1 + x_2 \leqslant 3$$
$$-x_1 + 2x_2 \leqslant 9$$
$$x_1, x_2 \geqslant 0$$

显然 $-x_1 + 2x_2 \leqslant 9$ 是冗余约束。求解线性规划

$$\begin{aligned} \min \quad & -x_1 - 3x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 \leqslant 3 \\ & x_1, x_2 \geqslant 0 \end{aligned}$$

最优解的起作用约束为 $x_1 + x_2 = 3$, $x_1 = 0$。故在关键区间 $[2,6]$ 内最优解满足

$$x_1 + x_2 = 6 - \lambda$$
$$x_1 = 0$$

解得 $x_2 = 6 - \lambda$。综上，当 $\lambda > 6$ 时线性规划无解，当 $0 \leqslant \lambda \leqslant 6$ 时

$$x(\lambda) = \begin{cases} x_1 = 2 - \lambda, \quad x_2 = 4 & \lambda \in [0,2] \\ x_1 = 0, \quad x_2 = 6 - \lambda & \lambda \in [2,6] \end{cases}, \qquad v = \begin{cases} -14 + \lambda & \lambda \in [0,2] \\ -18 + 3\lambda & \lambda \in [2,6] \end{cases}$$

□