10-5 单相强迫对流换热

一、管内强迫对流换热

二、外掠壁面强迫对流换热

熟悉特点及影响因素，并且掌握利用特征数关联式进行对流换热计算的方法。

一、管内强迫对流换热

1.管内强迫对流换热的特点

1) 流态

对于工业和日常生活中常见的光滑管道

$$Re = \frac{u_{\mathrm{m}} d}{\nu} \le 2300 \quad \text{层流}$$

$$2300 < Re < 10^4 \quad \text{层流到紊流的过渡阶段}$$

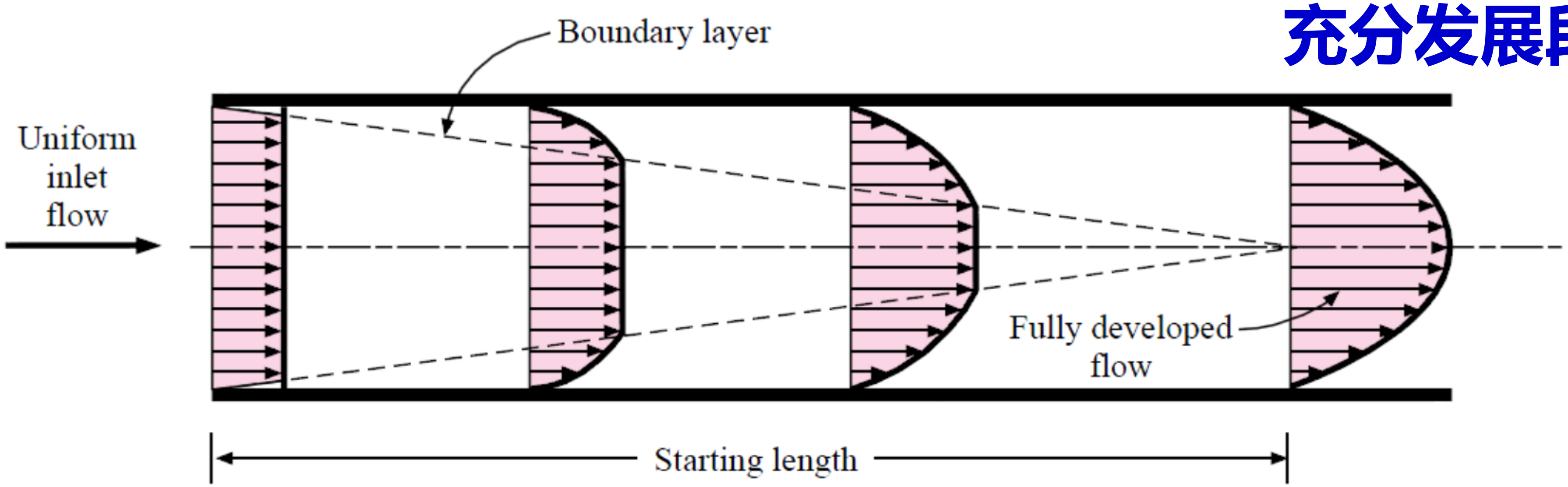
$$Re > 10^4 \quad \text{旺盛紊流}$$

u_{m} 为截面平均流速，根据不可压缩流体的质量守恒，

$$u_{\mathrm{m}} = \frac{q_V}{A_{\mathrm{c}}} = \frac{1}{A_{\mathrm{c}}} \int_{A_{\mathrm{c}}} u(r,x) dA = \frac{2}{R^2} \int_0^{r_0} u(r,x) r \mathrm{d}r$$

q_V 为体积流量，m³/s。

2) 流动进口段与充分发展段

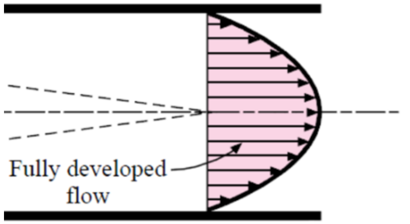


充分发展段

流动进口段

当进口段边界层为层流时，称为层流进口段，反之，为紊流进口段。

管内等温层流流动充分发展段的特征



(a) 沿轴向的速度不变，其它方向的速度为零；

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad v = 0$$

(b) 圆管横截面上的速度分布为抛物线形分布；

$$\frac{u(r)}{u_{\mathrm{m}}} = 2\left[1 - \left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right] \qquad u(0) = 2u_{\mathrm{m}}$$

(c) 沿流动方向的压力梯度不变，阻力系数f为常数：

$$\frac{dp}{dx} = const$$

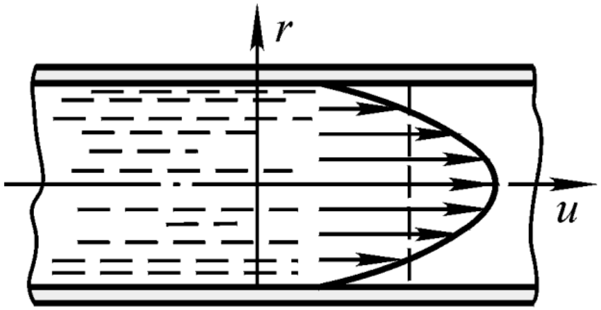
$$f = \frac{64}{Re}$$

流动压降： $$\Delta p = f \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{\rho u_{\mathrm{m}}^{2}}{2}$$

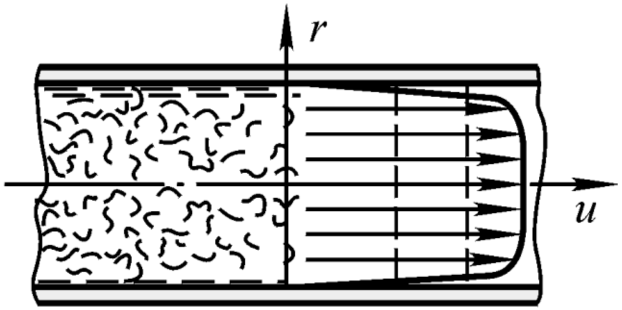
l—**管长；**d—**管内径。**

层流入口段的长度： $l/d \approx 0.05Re$

充分发展的湍流的速度分布：



层流



湍流

湍流进口段的长度： $10 \le (l/d) \le 60$

光滑管内湍流的阻力系数：

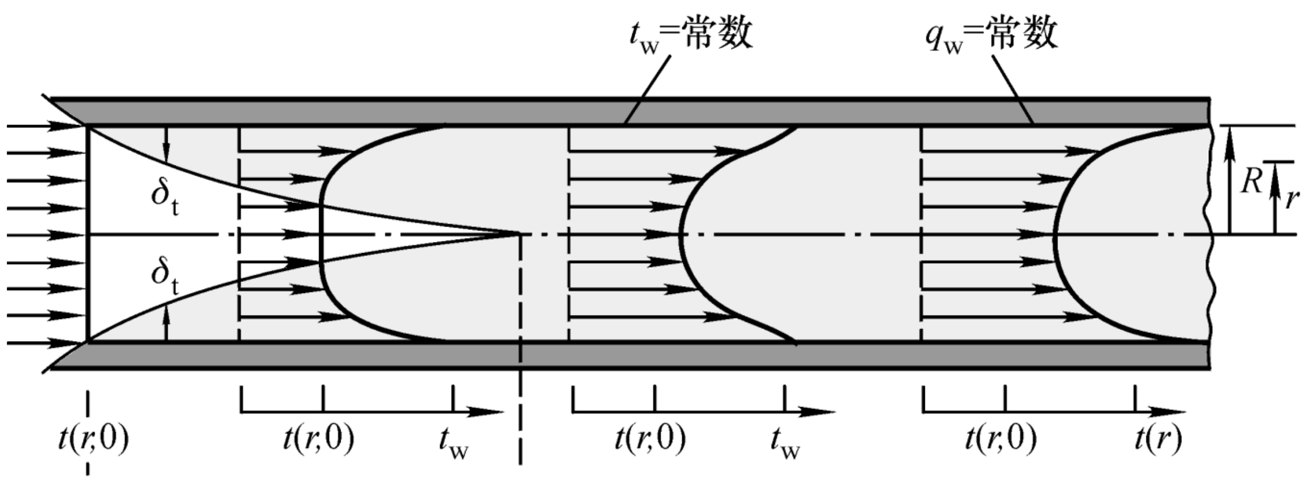
$$f = 0.316 Re_d^{-1/4} \qquad Re_d \le 2\times10^4$$

$$f = \left(0.790 \ln Re_d - 1.64\right)^{-2} \qquad 3000 \le Re_d \le 5\times10^6$$

贝图霍夫Petukhov公式

粗糙管内湍流的阻力系数的数值大小还与管内壁面的粗糙度有关。

3) 热进口段与热充分发展段



热充分发展段的特征：

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{t(r,x)-t_w(x)}{t_m(x)-t_w(x)}\right]=0$$

t_w、t_m **分别为管壁温度与流体截面平均温度。**

在热充分发展段，无量纲温度只是r的函数。

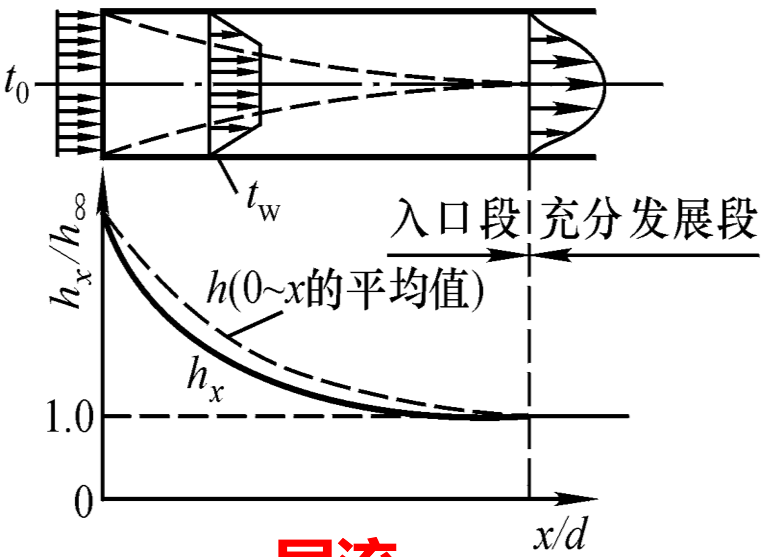
$$\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{t(r,x)-t_{\mathrm{w}}(x)}{t_{\mathrm{m}}(x)-t_{\mathrm{w}}(x)}\right]\Bigg|_{r=R}=\frac{-(\partial t/\partial r)_{r=R}}{t_{\mathrm{w}}-t_{\mathrm{m}}}=\text{常数}$$

(不随x变化)

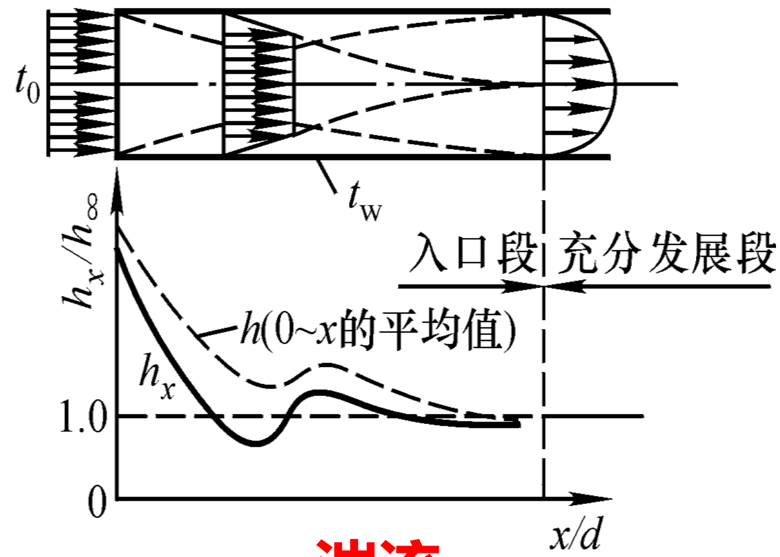
$$\frac{-(\partial t/\partial r)_{r=R}}{t_{\mathrm{w}}-t_{\mathrm{m}}}=\frac{h_x}{\lambda}=$$ 常数（不随x变化）

对于常物性流体，由上式可得 $h_x=$ 常数。这一结论对于管内层流和紊流、等壁温和常热流边界条件都适用。

局部表面传热系数的变化



层流



湍流

进口段边界层沿x方向由薄变厚，h_x由大变小，对流换热逐渐减弱。

外掠平板的
边界层及h

热进口段长度：

对于管内层流

等壁温 $$\frac{l_t}{d} \approx 0.05RePr$$

常热流 $$\frac{l_t}{d} \approx 0.07RePr$$

对比流动进口段长度 $$\frac{l}{d} \approx 0.05Re$$

结论：当$Pr=1$时，热进口段与流动进口段长度相等。

湍流热进口段的长度：$10 \le (l_t/d) \le 45$

短管内的对流换热，需要考虑进口段的影响。先按充分发展段计算Nu，然后再乘以修正系数

$$c_l = 1 + \left(\frac{d}{l}\right)^{0.7}$$

对于管内湍流换热，只要 $l/d > 60$，就可忽略进口段的影响。

4) 管壁及管内流体温度的变化

对常物性流体，**截面平均温度**为

如何测量?

$$t_{\mathrm{m}}=\frac{\int_{A_{\mathrm{c}}}\rho c_p u(r,x)\cdot t(r,x)dA}{\int_{A_{\mathrm{c}}}\rho c_p u(r,x)dA}=\frac{2}{R^2u_{\mathrm{m}}}\int_0^R turdr$$

管内对流换热计算的牛顿冷却公式：

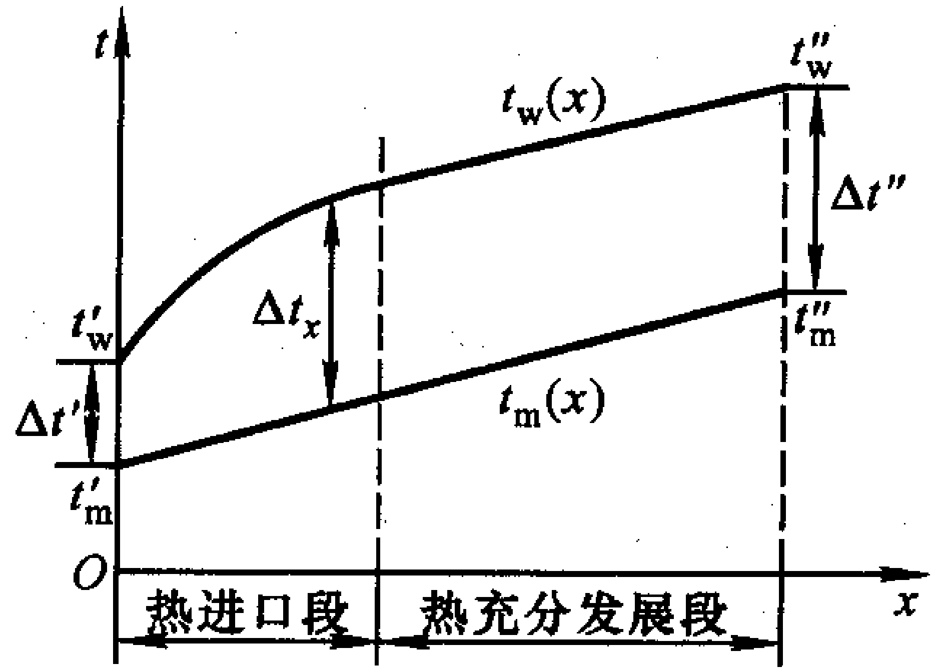
平均：$\Phi=A\cdot h\cdot(t_{\mathrm{w}}-t_{\mathrm{f}})=A\cdot h\cdot\Delta t$

局部：$q_x=h_x\cdot\left[t_{\mathrm{w}}(x)-t_{\mathrm{m}}(x)\right]=h_x\cdot\Delta t_x$

一般情况下，在管内对流换热过程中，管壁温度和流体温度都沿流动方向发生变化，变化规律与边界条件有关。

(1)常热流边界条件

q_x=常数，对常物性流体，dt_m/dx=常数，流体截面平均温度t_m沿流动方向呈线性变化。



$$q_x \cdot P dx = m c_P d t_m$$

根据 $q_x = h_x \Delta t_x$

a)热进口段: $h_x \downarrow, \Delta t_x \uparrow$

b)热充分发展段: h_x=常数，Δt_x =常数，壁面温度t_w和t_m都沿流动方向线性变化。

c) 全管的平均换热温差: $\Delta t = \bar{t}_w - \bar{t}_f = \dfrac{\left(t_w^{'} - t_m^{'}\right) + \left(t_w^{''} - t_m^{''}\right)}{2} = \dfrac{\Delta t^{'} + \Delta t^{''}}{2}$

管子较长，进口段影响可以忽略

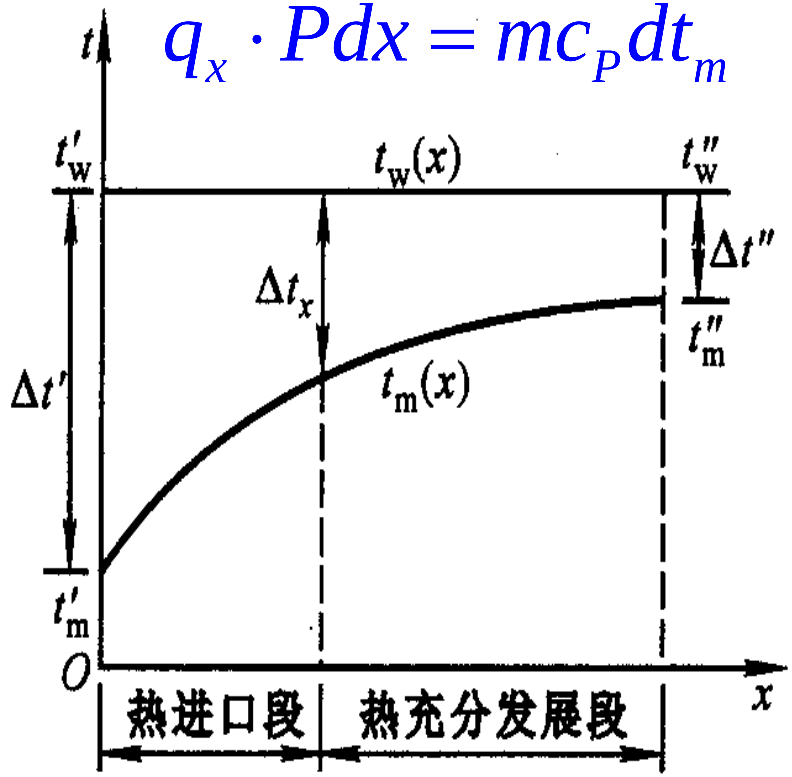
(2)等壁温边界条件：t_w=常数

$$q_x = h_x\left(t_w - t_m\right)$$

$$q_x \cdot P dx = m c_P d t_m$$

分析结果表明，温差Δt_x沿x方向按指数函数规律变化，t_m也按同样的指数函数规律变化。

证明在第44-45页



等壁温边界条件下全管的平均换热温差可按对数平均温差计算：

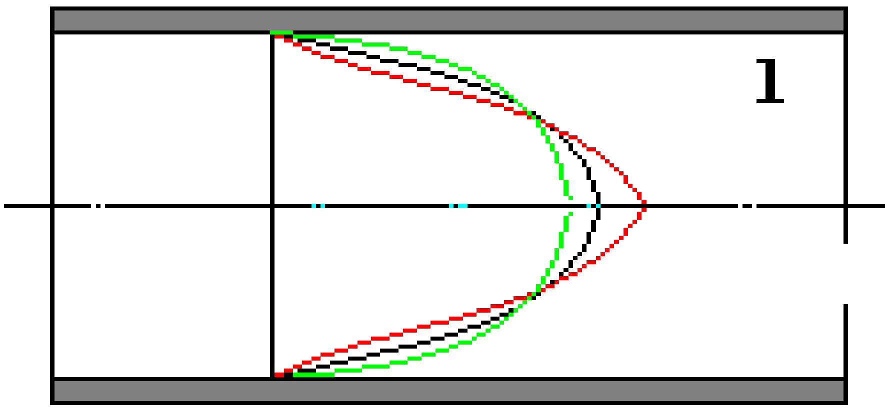
$$\Delta t = \frac{\Delta t' - \Delta t''}{\ln \dfrac{\Delta t'}{\Delta t''}}$$

如果进口温差与出口温差相差不大，$0.5 < \Delta t' / \Delta t'' < 2$，

$\Delta t \approx \dfrac{1}{2}\left(\Delta t' + \Delta t''\right)$ 结果与上式偏差小于4%。

(3)物性场不均匀对管内对流换热的影响

换热时流体温度场不均匀，会引起物性场的不均匀。其中粘度随温度的变化最大。粘度不均匀会影响速度场，从而影响对流换热。



1—等温流动

2—气体被加热或液体被冷却

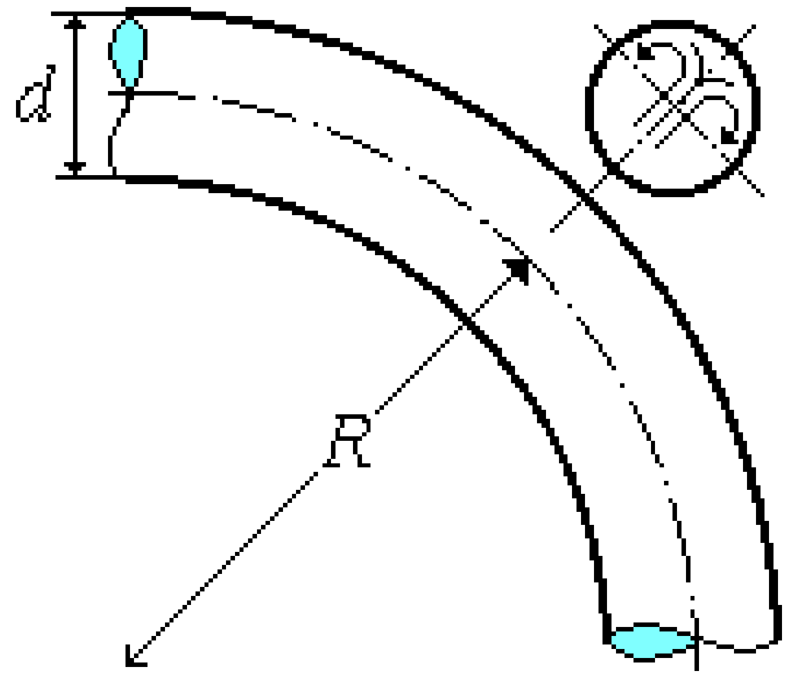
3—气体被冷却或液体被加热

- **气体：粘度随温度升高而加大**
- **液体：粘度随温度升高而减小**

(4)管道弯曲对管内对流换热的影响

管道弯曲，离心力的作用会在流体内产生二次环流，增加了扰动，使对流换热得到强化。弯管的曲率半径越小，流速越大，二次环流的影响越大。

在计算弯管内的对流换热时，应在直管基础上加乘弯管修正因子ε_R。



气体： $$\varepsilon_R = 1 + 1.77\frac{d}{R}$$

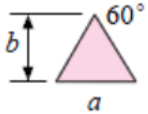
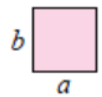
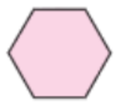
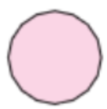
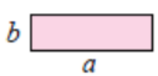
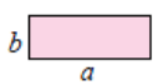
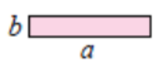
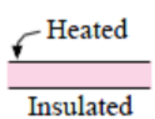
液体： $$\varepsilon_R = 1 + 10.3\left(\frac{d}{R}\right)^3$$

2.管内强迫对流换热特征数关联式

1) 层流换热（laminar convection）

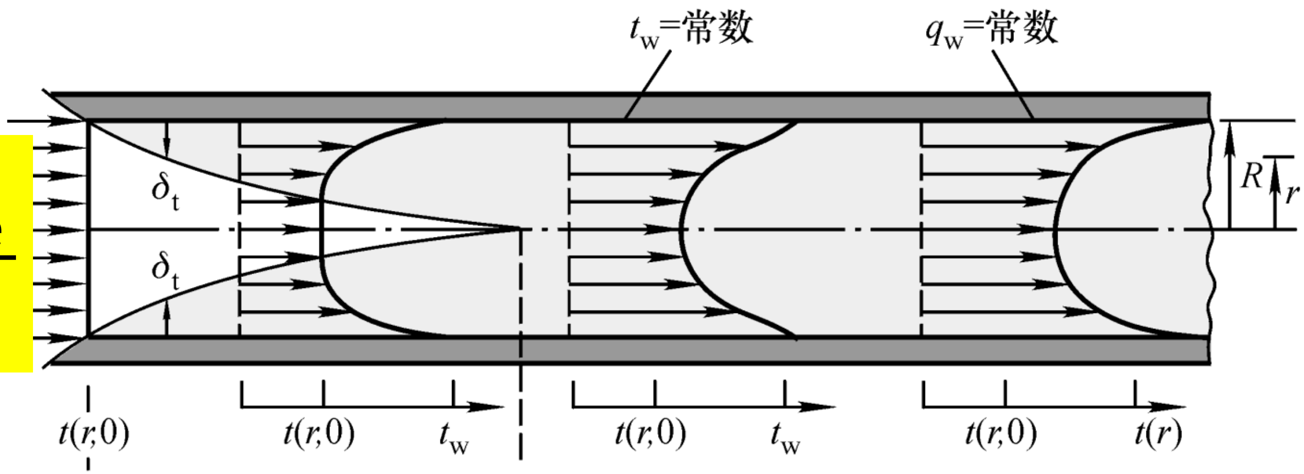
常物性流体在**常热流或定壁温边界**条件下，管内充分发展层流换热特点：

- Nu的数值为常数，大小与Re无关；
- 对于同一种截面的管道，常热流边界条件下的Nu比等壁温边界条件高20%左右

Geometry ($L/D_h > 100$)	Nu_H Constant axial wall heat flux	Nu_T Constant axial wall temperature	$f\,Re_{D_H}/4$
 $\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$	3.111	2.47	13.333
 $\frac{b}{a} = 1$	3.608	2.976	14.227
	4.002	3.34	15.054
 $\frac{b}{a} = \frac{1}{2}$	4.123	3.391	15.548
	4.364	3.657	16.000
 $\frac{b}{a} = \frac{1}{4}$	5.331	4.44	18.23
 $\frac{b}{a} = \frac{1}{3}$	4.79	3.96	17.25
 $\frac{b}{a} = \frac{1}{8}$	6.490	5.597	20.585
$\frac{b}{a} = 0$	8.235	7.541	24.000
 $\frac{b}{a} = 0$	5.385	4.861	24.000

这是因为两种边界条件下流体的温度分布不同。

$$Re = \frac{u_m d_e}{\nu}$$



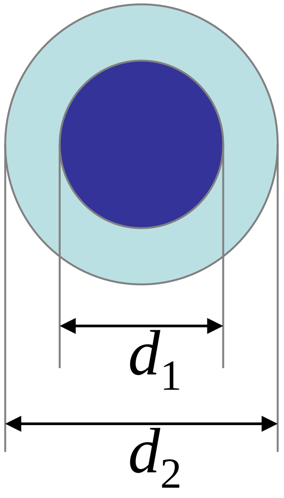
当量直径： $d_e = \dfrac{4A_c}{P}$

A_c —**流通截面面积；**

P — **润湿周边长度。**

例：圆环形夹层通道，

$$d_e = \frac{\left(d_2^2 - d_1^2\right)\pi}{\left(d_2 + d_1\right)\pi} = d_2 - d_1$$



对长管，可利用表中数值进行计算。对短管，进口段影响不能忽略，可用西得-塔特（Sieder-Tate）式计算等壁温管内层流换热的平均努塞尔数：

$$Nu_{\mathrm{f}} = 1.86\left(Re_{\mathrm{f}} Pr_{\mathrm{f}} \cdot \frac{d}{l}\right)^{1/3}\left(\frac{\eta_{\mathrm{f}}}{\eta_{\mathrm{w}}}\right)^{0.14}$$

下角标f表示定性温度为流体的平均温度t_{f}

适用条件：

$$0.48 < Pr_{\mathrm{f}} < 16700 \qquad 0.0044 < \frac{\eta_{\mathrm{f}}}{\eta_{\mathrm{w}}} < 9.75$$

$$\left(Re_{\mathrm{f}} Pr_{\mathrm{f}} \cdot \frac{d}{l}\right)^{1/3}\left(\frac{\eta_{\mathrm{f}}}{\eta_{\mathrm{w}}}\right)^{0.14} \geq 2$$

上式没考虑自然对流影响。

2) 湍流换热

(a) Dittus-Boelter 公式（1930年）： 对于流体与壁温相差不大的情况（气体：$\Delta t<50℃$；水：$\Delta t<30℃$；油: $\Delta t<10℃$）

$$Nu_{\mathrm{f}} = 0.023 Re_{\mathrm{f}}^{0.8} Pr_{\mathrm{f}}^{n}$$

适用条件： $Re_{\mathrm{f}} \ge 10^4, l/d \ge 10$

$$0.7 \le Pr_{\mathrm{f}} \le 160$$

$$n = \begin{cases} 0.4 & (t_{\mathrm{w}} > t_{\mathrm{f}}) \\ 0.3 & (t_{\mathrm{w}} < t_{\mathrm{f}}) \end{cases}$$

对于流体与管壁温度相差较大的情况，将上式乘以修正因子c_{t}：

气体被加热: $c_{\mathrm{t}} = \left(\dfrac{T_{\mathrm{f}}}{T_{\mathrm{w}}}\right)^{0.5}$　　被冷却：$c_{\mathrm{t}}=1$

液体:

$$c_t = \left(\frac{\eta_{\mathrm{f}}}{\eta_{\mathrm{w}}}\right)^{n},$$

被加热：$n=0.11$

被冷却：$n=0.25$

讨 论 $$Nu_{\mathrm{f}} = 0.023 Re_{\mathrm{f}}^{0.8} Pr_{\mathrm{f}}^{n}$$

$$h = f(u^{0.8}, d^{-0.2}, \lambda^{0.6}, c_p^{0.4}, \rho^{0.8}, \eta^{-0.4})$$

- **流速u和密度ρ对h的影响最大；**
- **物性影响：ρ、c_p、λ 的影响为正，h随 ρ、c_p、λ 增大而增大（因此水的表面传热系数比空气大）；粘度η影响为负。**
- **h与管内直径的-0.2次方成正比，采用小直径管可强化传热（在普通尺寸范围，小于0.1mm时应考虑“尺寸效应”，不在本课程讨论范围之内）。**

- **流体与管壁温度相差较大,流体物性场不均匀性影响较大时，可用西得-塔特（Sieder-Tate）式（1936年）：**

$$Nu_{\mathrm{f}} = 0.027\,\mathrm{Re}_{\mathrm{f}}^{0.8}\,\mathrm{Pr}_{\mathrm{f}}^{1/3}\left(\frac{\eta_{\mathrm{f}}}{\eta_{\mathrm{w}}}\right)^{0.14}$$

$$0.7 \le \mathrm{Pr}_{\mathrm{f}} \le 16700\ ,\quad \mathrm{Re}_{\mathrm{f}} \ge 10^4\ ,\quad l/d \ge 60$$

- **两式适用于一般工业光滑管道，**
- **常热流和等壁温边界条件都适用，是形式比较简单的计算管内紊流换热的特征数关联式，**
- **年代较早，实验数据的偏差较大，达25%，可用于一般工程计算。**

(b) 格尼林斯基(Gnilinski)（1976年）：精度较高的光滑管内充分发展的紊流换热半经验公式

$$Nu_{\mathrm{f}} = \frac{(f/8)(\mathrm{Re}_{\mathrm{f}} - 1000)\mathrm{Pr}}{1 + 12.7(f/8)^{1/2}(\mathrm{Pr}^{2/3} - 1)}\left[1 + \left(\frac{d}{l}\right)^{2/3}\right] \cdot c_t$$

$$0.5 \le \mathrm{Pr}_{\mathrm{f}} \le 2000 \;, \qquad 2300 \le \mathrm{Re}_{\mathrm{f}} \le 5 \times 10^6$$

阻力系数可采用下式计算 贝图霍夫（B.S.Petukhov）公式

$$f = (0.79 \ln \mathrm{Re}_{\mathrm{f}} - 1.64)^{-2}$$

对气体，可进一步简化为：

$$c_t = \left(\frac{T_{\mathrm{f}}}{T_{\mathrm{w}}} \right)^{0.45} \quad , \quad 0.5 \le \frac{T_{\mathrm{f}}}{T_{\mathrm{w}}} \le 1.5$$

$$Nu_{\mathrm{f}} = 0.0214 \left(\mathrm{Re}_{\mathrm{f}}^{0.8} - 100 \right) \mathrm{Pr}_{\mathrm{f}}^{0.4} \left[1 + \left(\frac{d}{l} \right)^{2/3} \right] \left(\frac{T_{\mathrm{f}}}{T_{\mathrm{w}}} \right)^{0.45}$$

$$0.6 < Pr_{\mathrm{f}} < 1.5,\ \ 0.5 < \frac{T_{\mathrm{f}}}{T_{\mathrm{w}}} < 1.5,\ \ 2300 < Re_{\mathrm{f}} < 10^6$$

对液体

$$c_t = \left(\frac{\mathrm{Pr_f}}{\mathrm{Pr_w}}\right)^{0.11} \quad , \qquad 0.05 \le \frac{\mathrm{Pr_f}}{\mathrm{Pr_w}} \le 20$$

$$Nu_{\mathrm{f}} = 0.012\left(\mathrm{Re_f}^{0.87} - 280\right)\mathrm{Pr_f}^{0.4}\left[1+\left(\frac{d}{l}\right)^{2/3}\right]\left(\frac{\mathrm{Pr_f}}{\mathrm{Pr_w}}\right)^{0.11}$$

$$1.5 < \mathrm{Pr_f} < 500 \ , \quad 0.05 < \frac{\mathrm{Pr_f}}{\mathrm{Pr_w}} < 20 \ , \quad 2300 < \mathrm{Re_f} < 10^6$$

不仅适用于管内旺盛紊流换热，也适用于从层流到紊流之间的过渡流换热。

对粗糙管，高雷诺数（紊流）情况下，对流换热要比一般的光滑管道强，上述公式不再适用，通常采用动量传递与热量传递类比关系式进行计算，St（斯坦顿数）：

$$St_{\mathrm{f}} \cdot \mathrm{Pr}_{\mathrm{f}}^{2/3} = \frac{f}{8}$$

$$St_{\mathrm{f}} = \frac{Nu_{\mathrm{f}}}{\mathrm{Re}_{\mathrm{f}}\ \mathrm{Pr}_{\mathrm{f}}} = \frac{h}{\rho C_p u_\infty}$$

$$\Delta p = f\ \frac{l}{d}\frac{\rho u_m^2}{2}$$

随堂练习

例题：空气（进口2个大气压和200℃）在管内被加热，管径2.54cm，流速10m/s。如果恒定热流，管壁温度始终比空气高20℃ 。
试计算
（1）单位长度的传热量
（2）流经3m管出口的空气温度

$$\mathrm{Pr} = 0.681$$
$$\mu = 2.57 \times 10^{-5}\ \mathrm{kg/m \cdot s}$$
$$k = 0.0386\ \mathrm{W/m \cdot {}^\circ C}$$
$$c_p = 1.025\ \mathrm{kJ/kg \cdot {}^\circ C}$$

湍流换热计算公式：

$$Nu_{\mathrm{f}} = 0.023 Re_{\mathrm{f}}^{0.8} Pr_{\mathrm{f}}^{n}$$

运动粘度 $\nu = \mu / \rho$
密度 1.5 $\mathrm{kg/m^3}$

随堂练习

1、根据热边界条件，初步判断流体与壁面温度分布

2、判断流态

Re

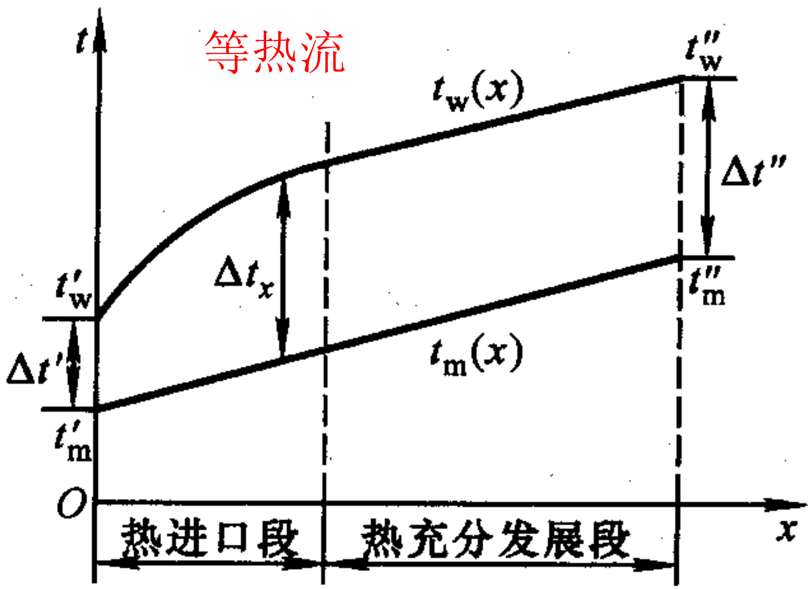
3、选择准则关联式，计算Nu

Nu

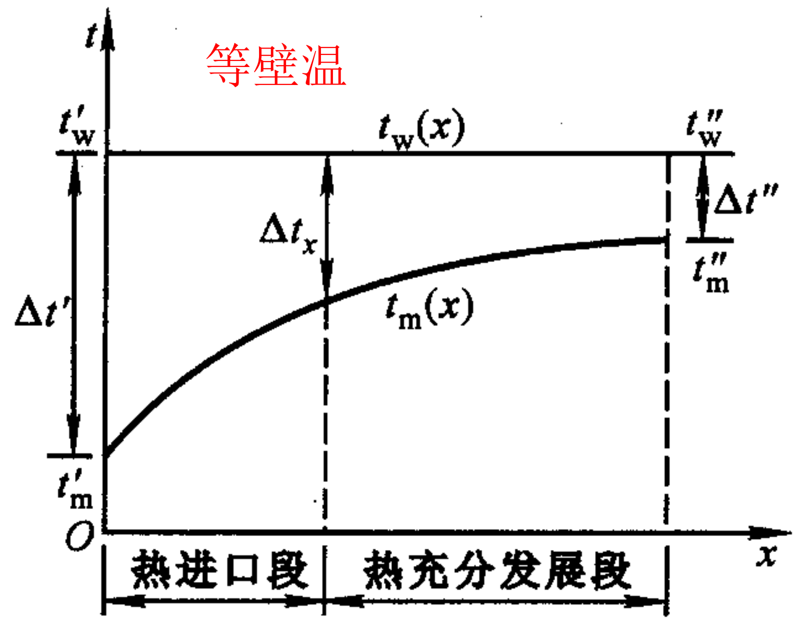
4、计算h

5、计算Q

小结：



等热流
t
t′w
Δt′
t′m
O
tw(x)
Δtx
tm(x)
t″w
Δt″
t″m
x
热进口段
热充分发展段



等壁温
t
t′w
Δt′
t′m
O
tw(x)
Δtx
tm(x)
t″w
Δt″
t″m
x
热进口段
热充分发展段

常热流边界条件下全管长的流体平均温度：

$$t_f=\left(t_m^{''}+t_m^{'}\right)/2$$

$$\Delta t=\bar{t}_w-\bar{t}_f=\frac{\left(t_w^{'}-t_{\mathrm{m}}^{'}\right)+\left(t_w^{''}-t_{\mathrm{m}}^{''}\right)}{2}=\frac{\Delta t^{'}+\Delta t^{''}}{2}$$

等壁温边界条件下全管长的流体平均温度：

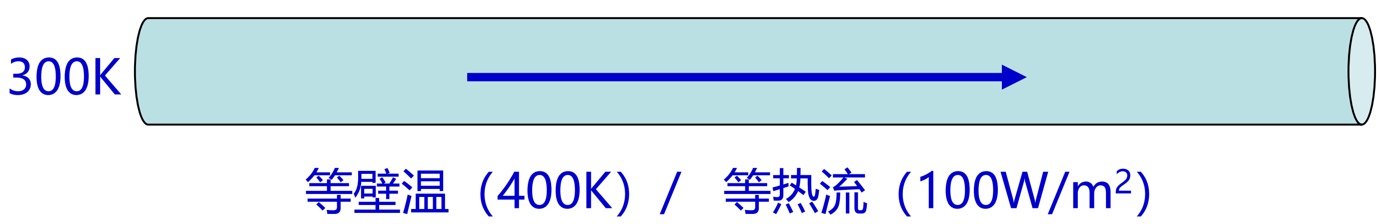
$$\Delta t=\frac{\Delta t^{''}-\Delta t^{'}}{\ln(\Delta t^{''}/\Delta t^{'})}$$

$$t_f=t_w\pm\Delta t$$

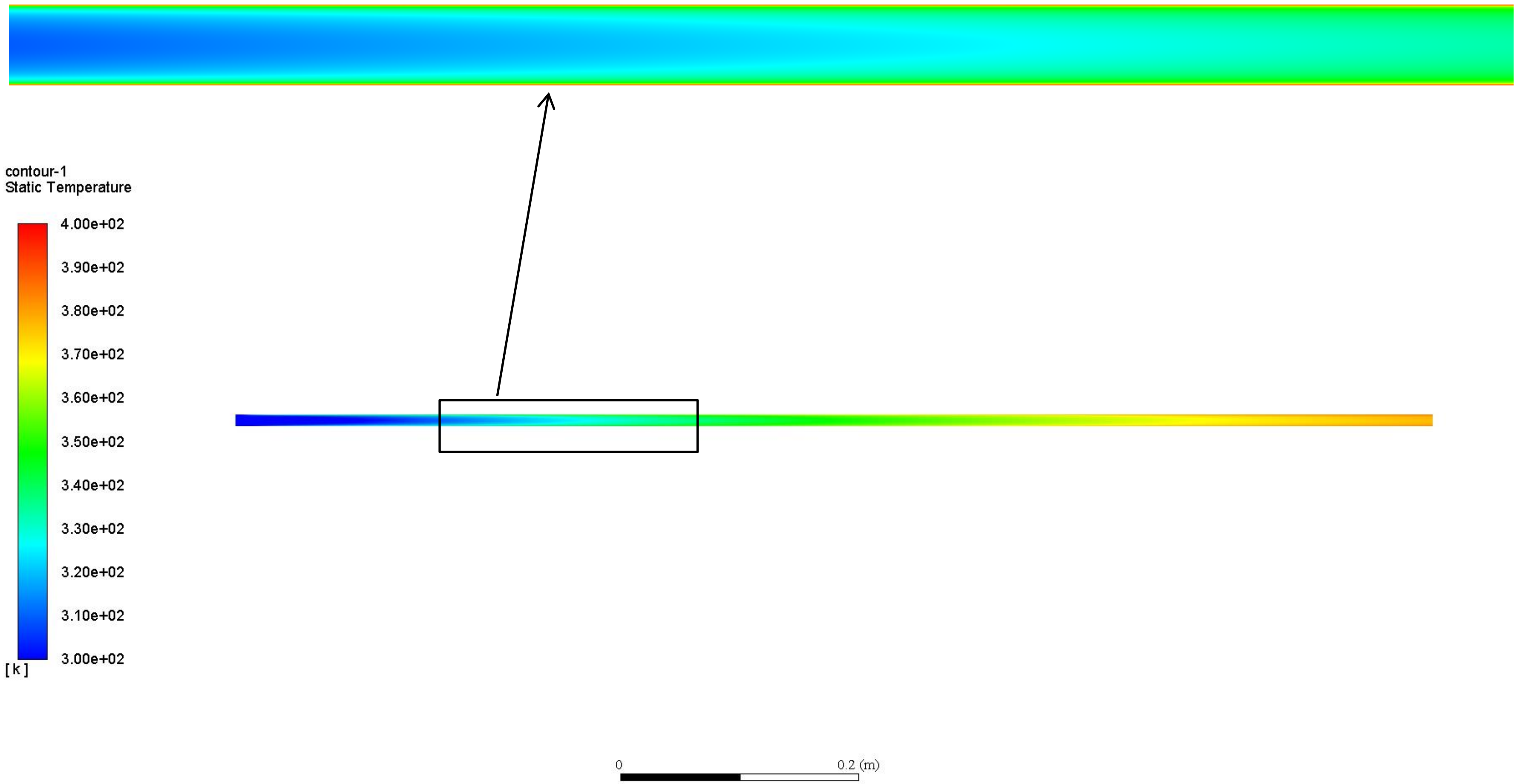
管内层流与湍流对比

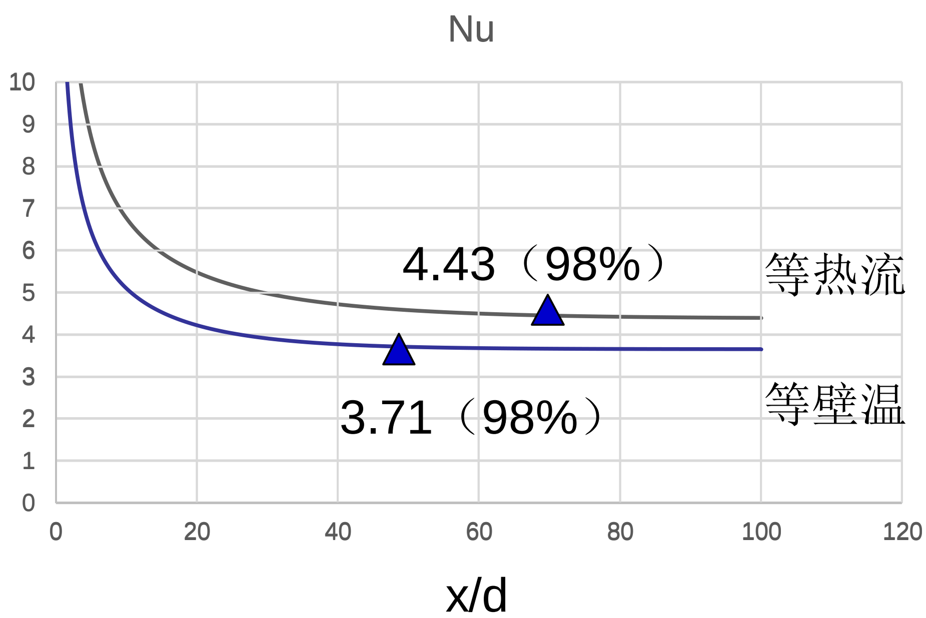
- 管径0.01m，长度1m
- 流速1m/s / 10m/s
- 常物性，热导率0.01W/(mK)，密度1kg/m^3，比热1000J/(kgK)，粘度1e-5kg/(ms)

分别计算出Re、Nu



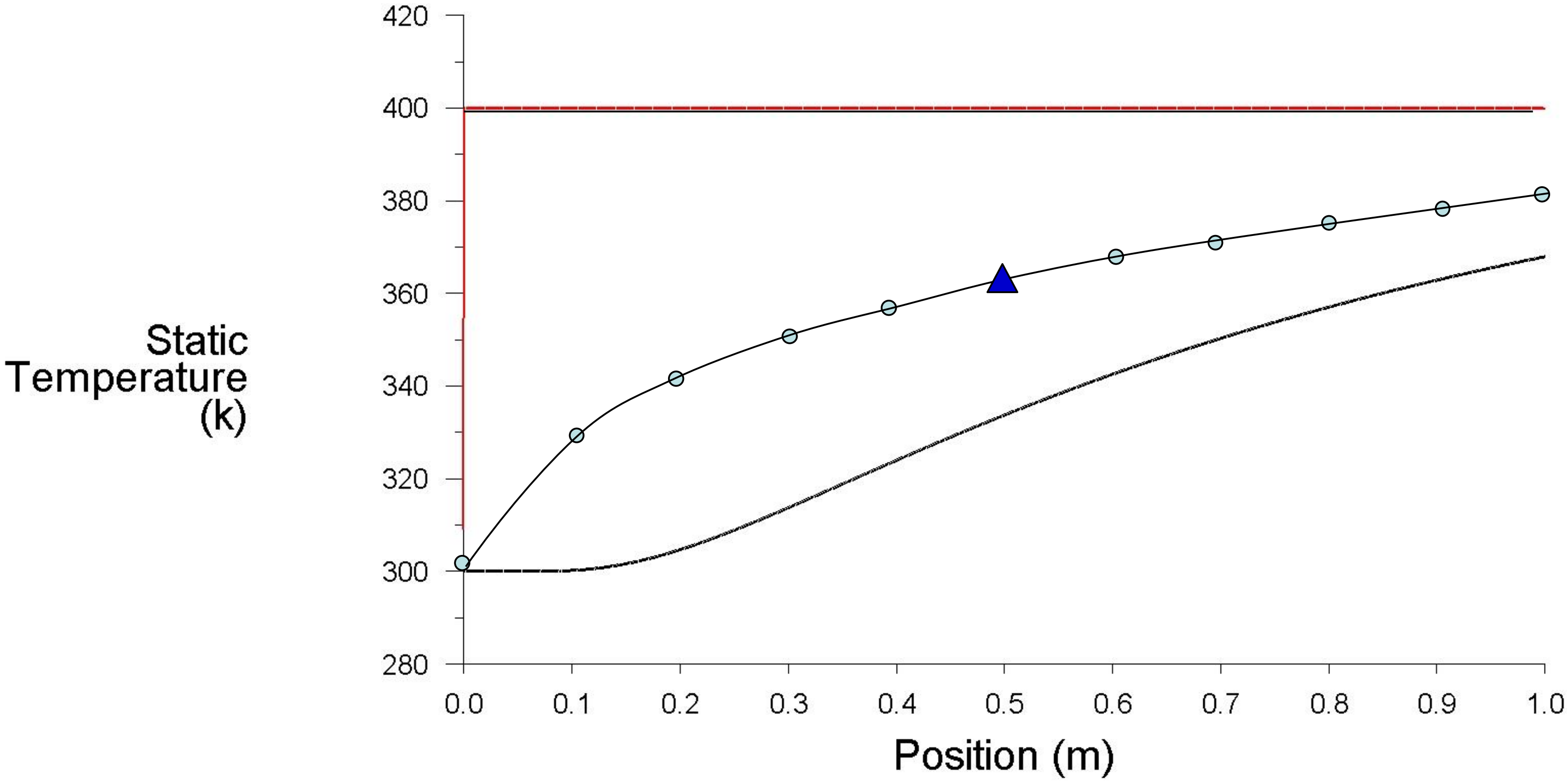
- Re=1*1*0.01/1e-5=1000
- Pr=1e-5*1000/0.01=1


contour-1
Static Temperature
4.00e+02
3.90e+02
3.80e+02
3.70e+02
3.60e+02
3.50e+02
3.40e+02
3.30e+02
3.20e+02
3.10e+02
3.00e+02
[k]
0
0.2 (m)



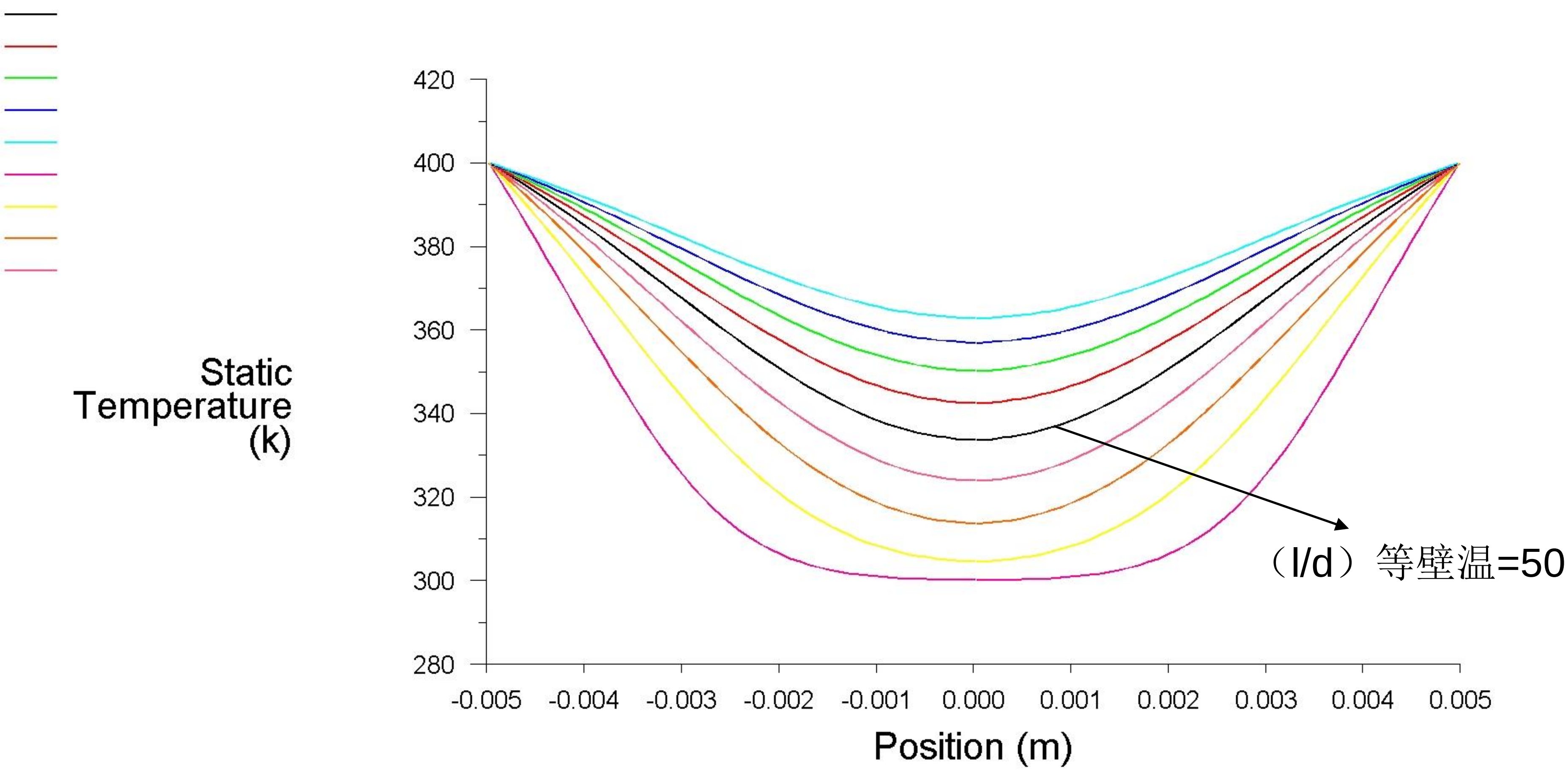
- $l/d_{等壁温}=50$；$l/d_{等热流}=70$；

等壁温 沿程温度分布



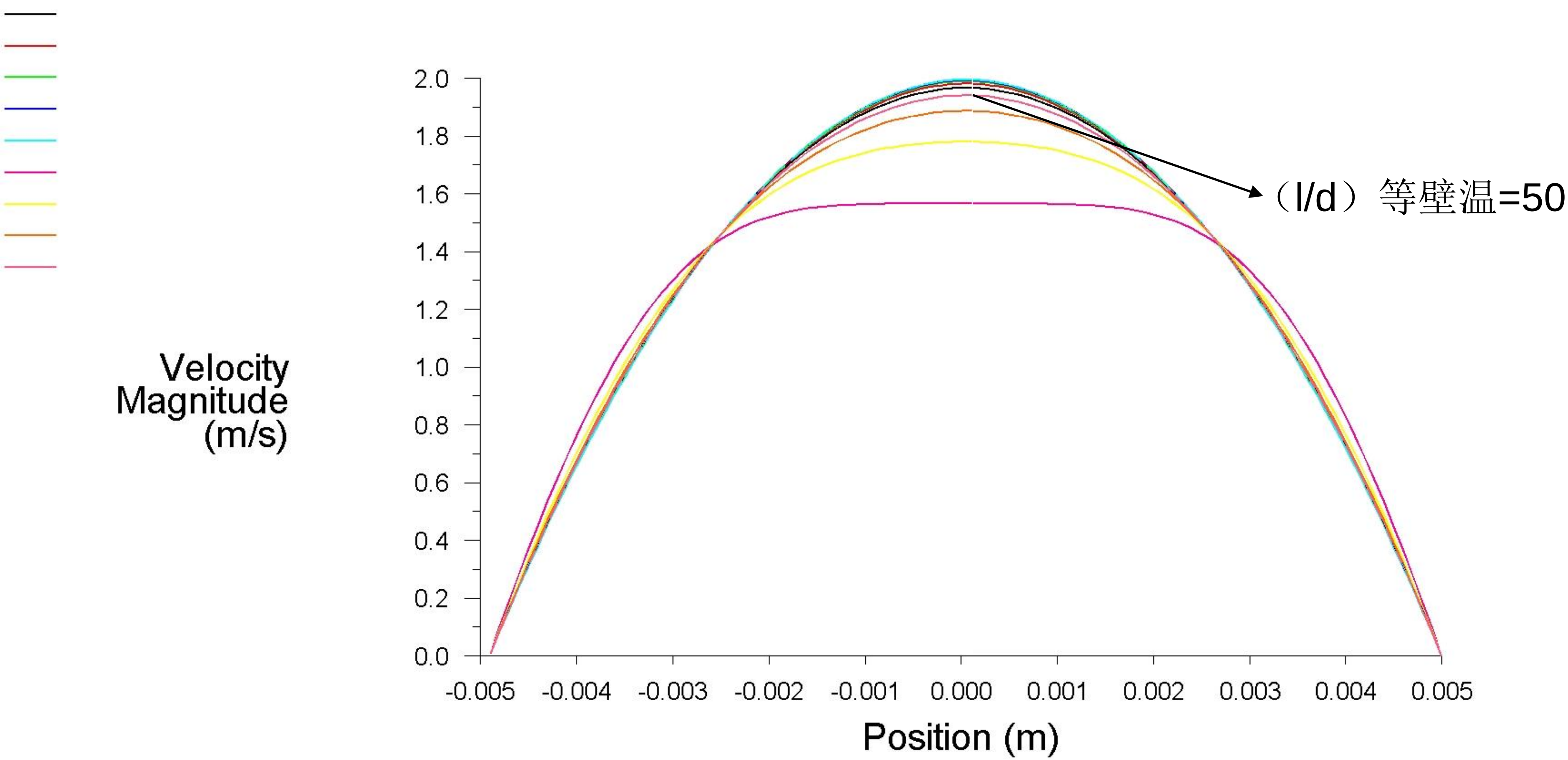
Static Temperature (k)
420
400
380
360
340
320
300
280
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1.0
Position (m)

等壁温 温度径向分布



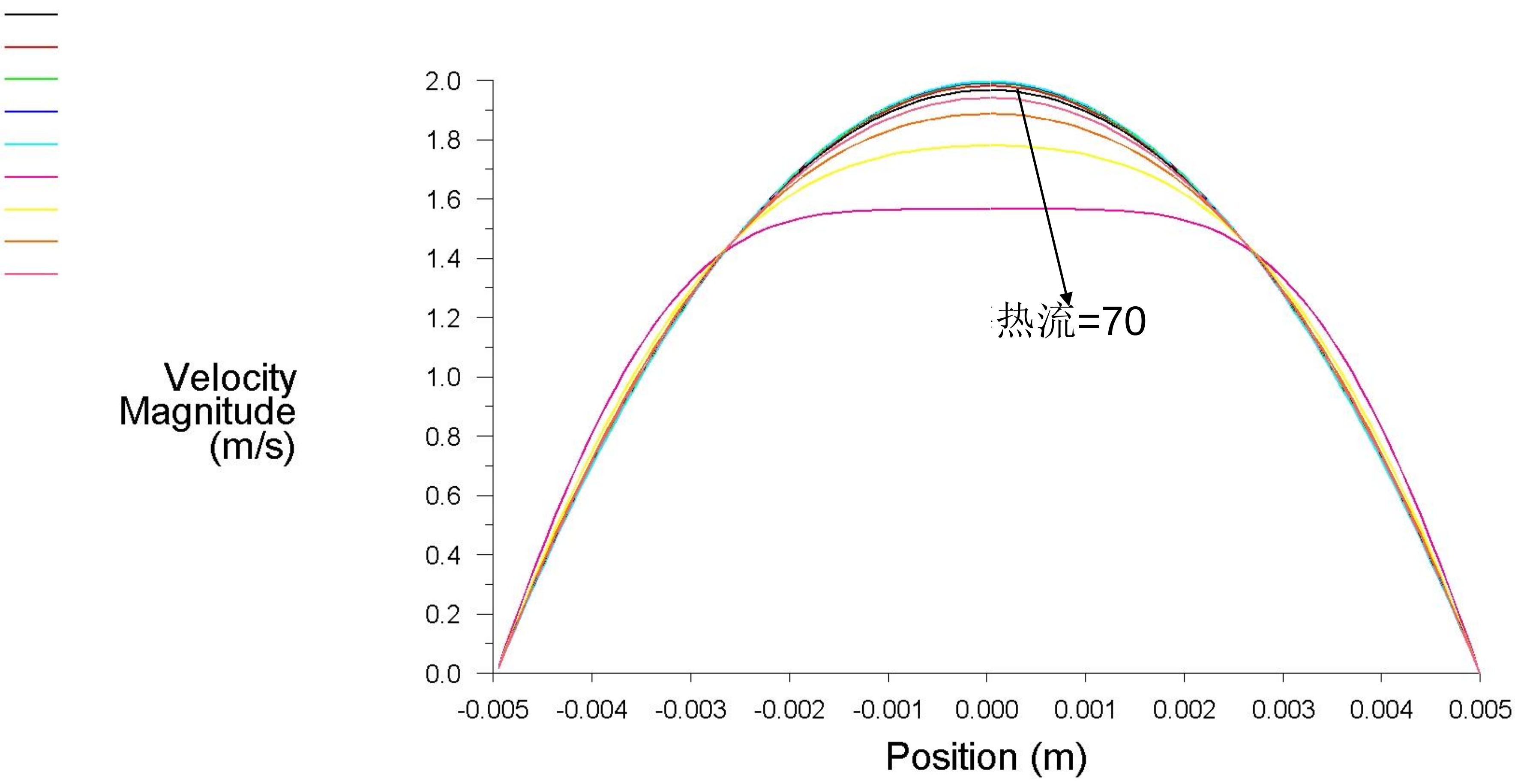
420
400
380
360
340
320
300
280
Static Temperature (k)
-0.005
-0.004
-0.003
-0.002
-0.001
0.000
0.001
0.002
0.003
0.004
0.005
Position (m)
（l/d）等壁温=50

等壁温 速度径向分布

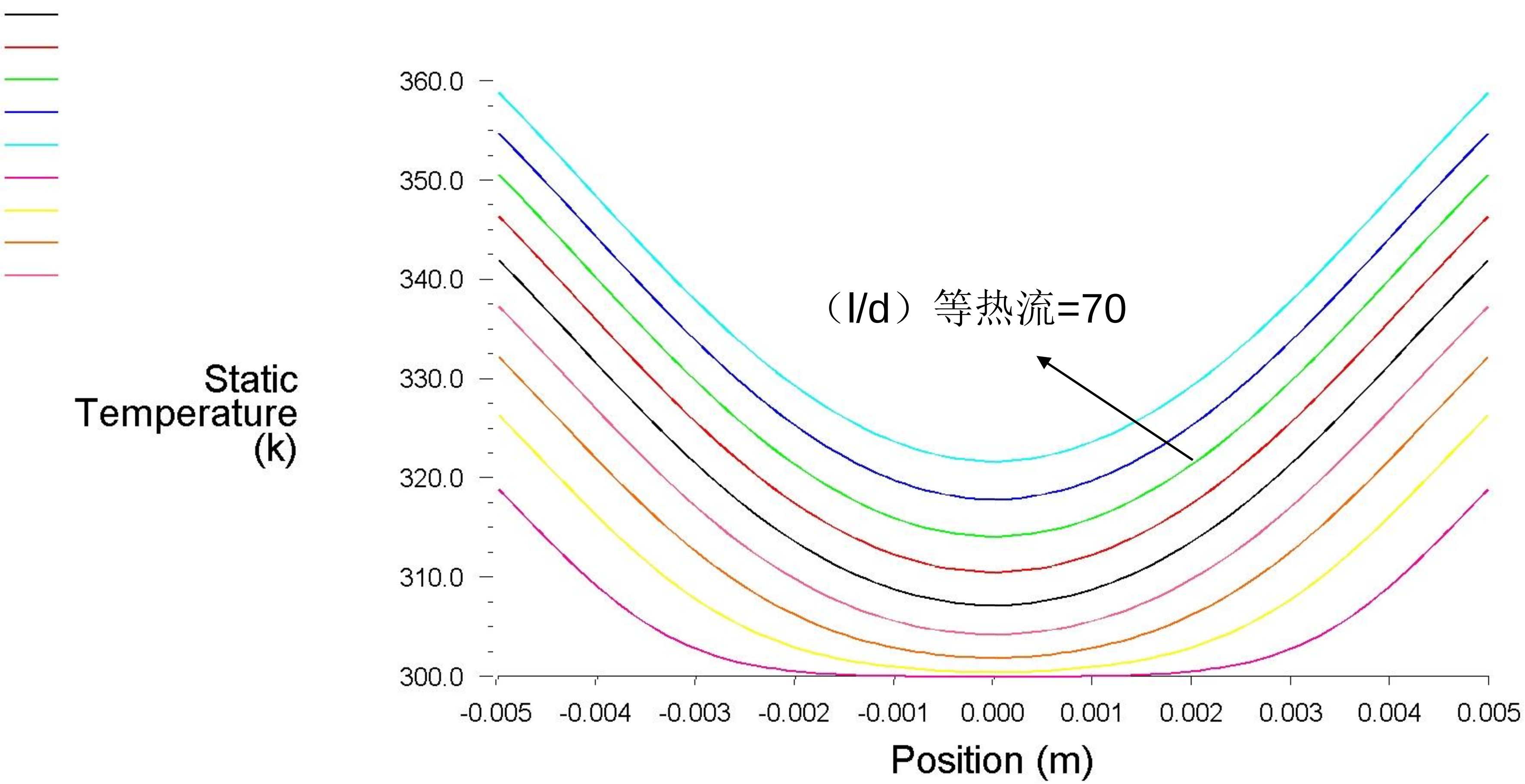


（l/d）等壁温=50
Velocity Magnitude (m/s)
2.0
1.8
1.6
1.4
1.2
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
-0.005
-0.004
-0.003
-0.002
-0.001
0.000
0.001
0.002
0.003
0.004
0.005
Position (m)

等热流 速度径向分布

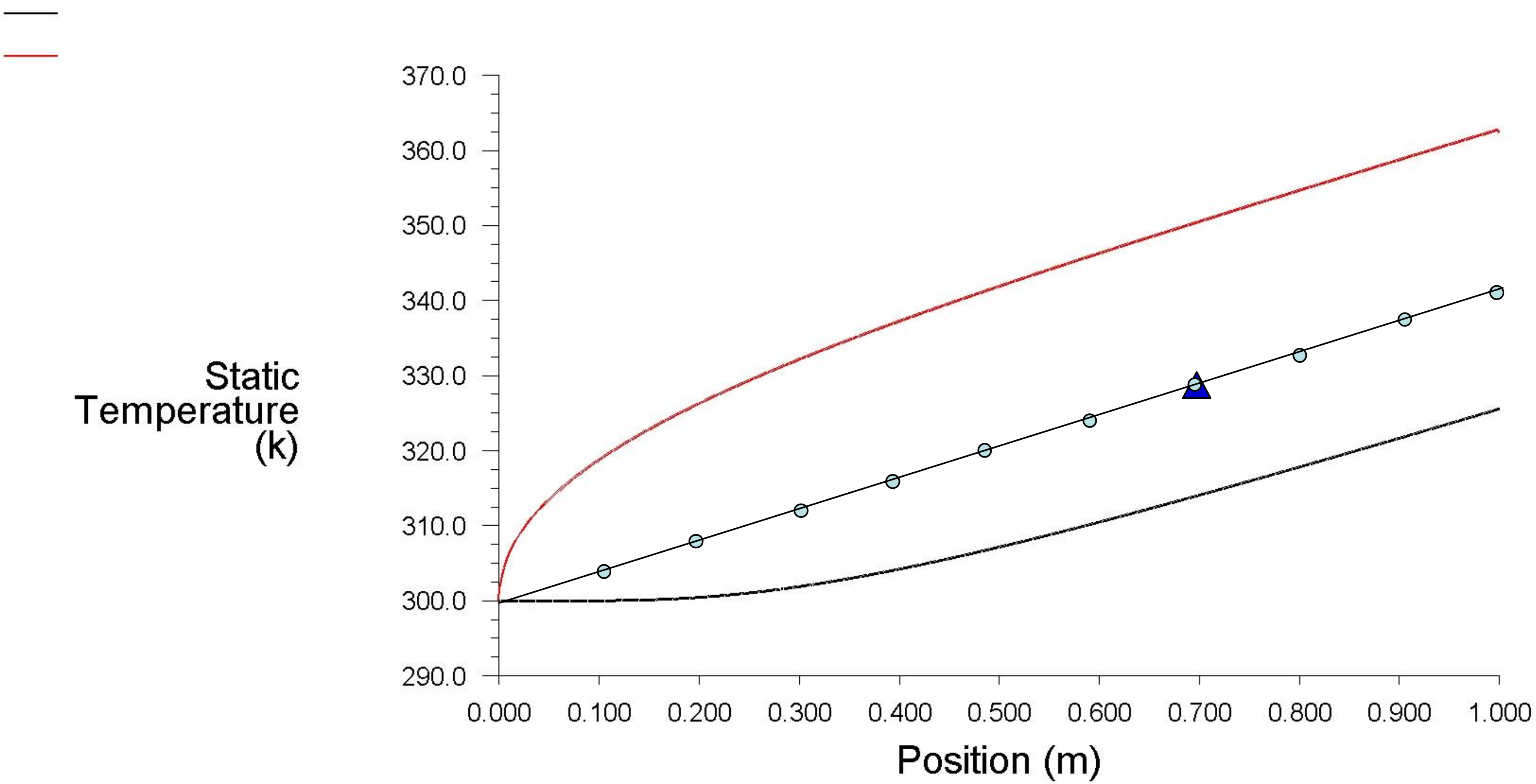

Velocity Magnitude (m/s)
2.0
1.8
1.6
1.4
1.2
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
-0.005
-0.004
-0.003
-0.002
-0.001
0.000
0.001
0.002
0.003
0.004
0.005
Position (m)
热流=70

等热流 温度径向分布



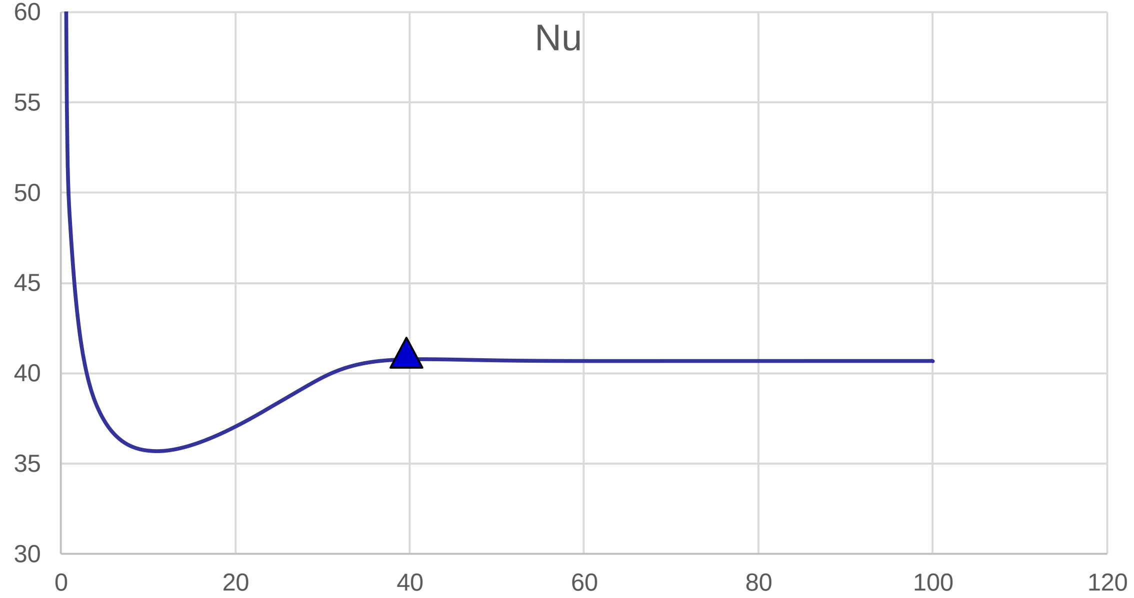
360.0
350.0
340.0
330.0
320.0
310.0
300.0
Static Temperature (k)
-0.005
-0.004
-0.003
-0.002
-0.001
0.000
0.001
0.002
0.003
0.004
0.005
Position (m)
（l/d）等热流=70

等热流 沿程温度分布



370.0
360.0
350.0
340.0
330.0
320.0
310.0
300.0
290.0
Static Temperature (k)
0.000
0.100
0.200
0.300
0.400
0.500
0.600
0.700
0.800
0.900
1.000
Position (m)

湍流

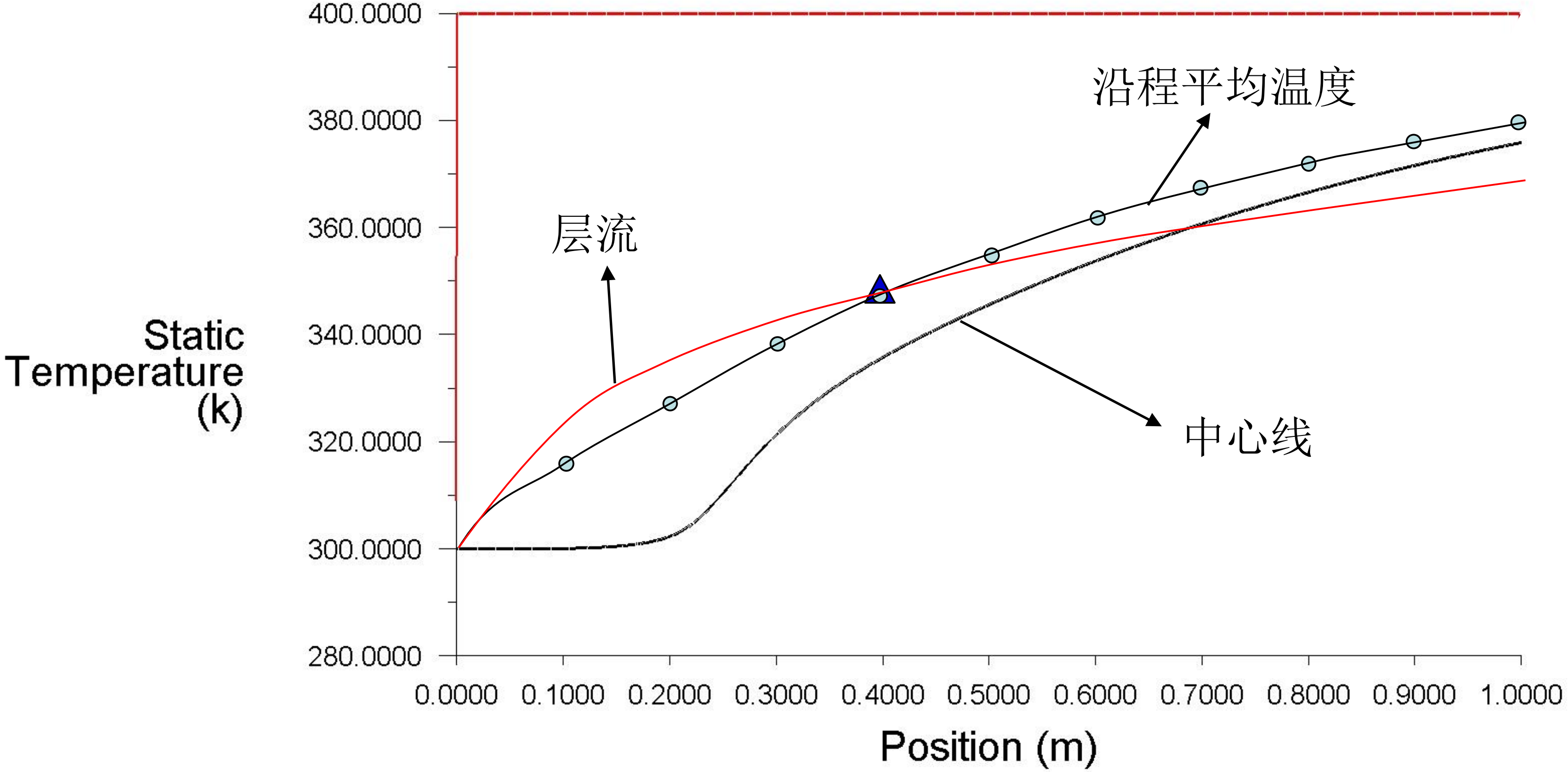


Re=1*10*0.01/1e-5=10000；Pr=1e-5*1000/0.01=1

（l/d）=10~45

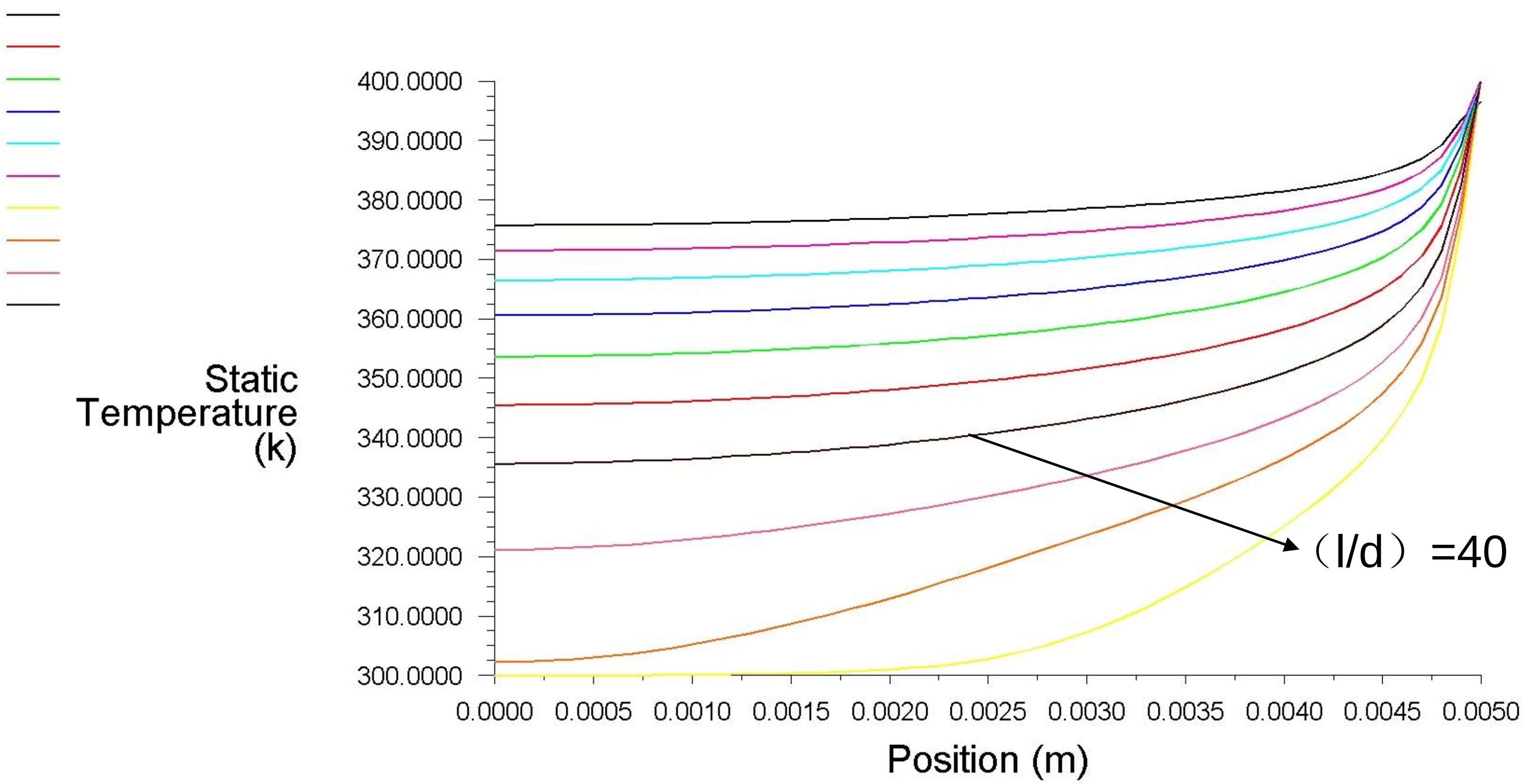
$$Nu_{\mathrm{f}} = 0.023 Re_{\mathrm{f}}^{0.8} Pr_{\mathrm{f}}^{n} = 36.4$$ 偏差：10.5%

湍流 沿程速度分布



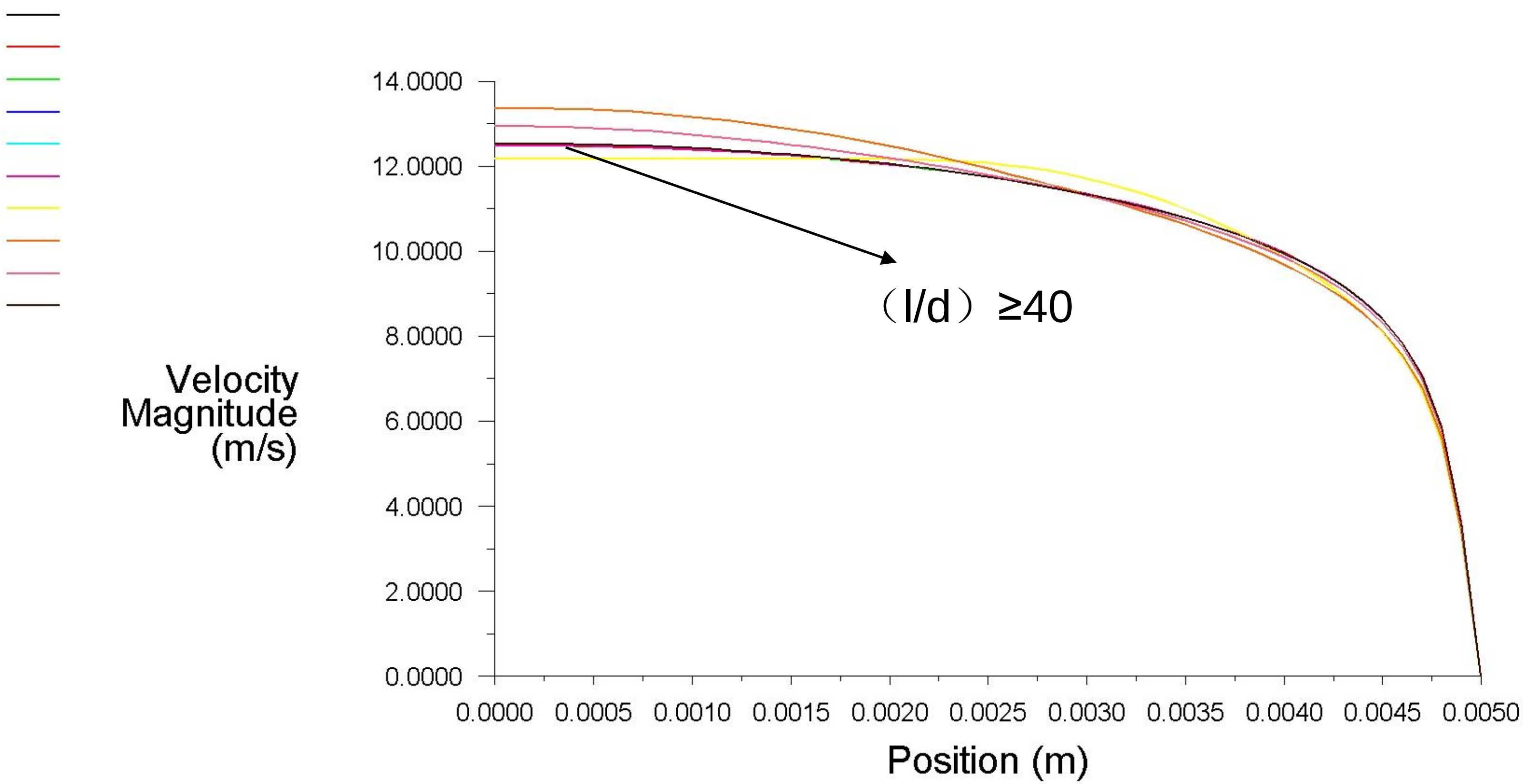
400.0000
380.0000
360.0000
340.0000
320.0000
300.0000
280.0000
Static Temperature (k)
0.0000
0.1000
0.2000
0.3000
0.4000
0.5000
0.6000
0.7000
0.8000
0.9000
1.0000
Position (m)
沿程平均温度
层流
中心线

湍流 温度径向分布



400.0000
390.0000
380.0000
370.0000
360.0000
350.0000
340.0000
330.0000
320.0000
310.0000
300.0000
Static Temperature (k)
0.0000
0.0005
0.0010
0.0015
0.0020
0.0025
0.0030
0.0035
0.0040
0.0045
0.0050
Position (m)
（l/d）=40

湍流 速度径向分布



14.0000
12.0000
10.0000
8.0000
6.0000
4.0000
2.0000
0.0000
Velocity Magnitude (m/s)
0.0000 0.0005 0.0010 0.0015 0.0020 0.0025 0.0030 0.0035 0.0040 0.0045 0.0050
Position (m)
（l/d）≥40

第十章作业（3）

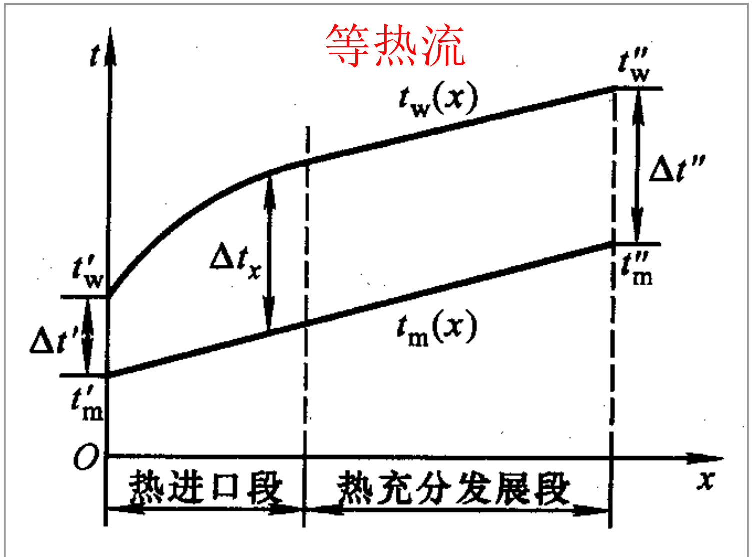
10-5

10-6

10-7

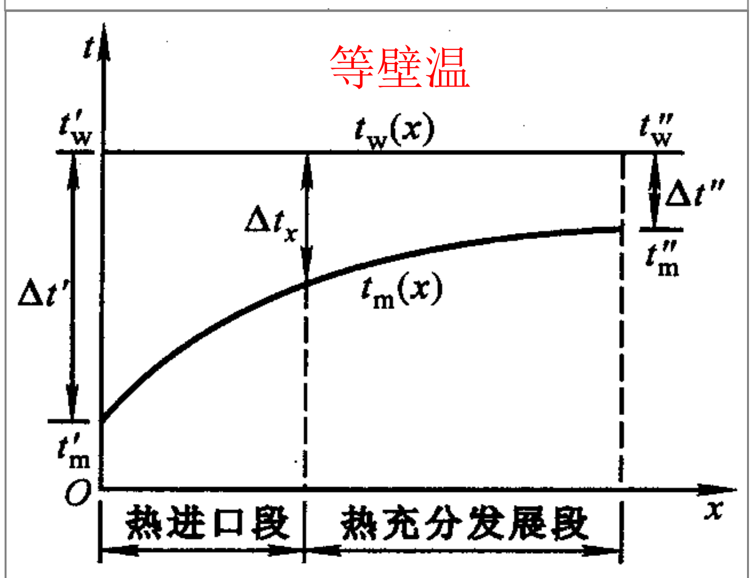
10-10

$$q_x \cdot P dx = m c_p dt_m \Rightarrow \frac{dt_m}{dx} = \frac{P \cdot q_x}{mc_P} = \frac{P}{mc_P} h\left(t_w - t_m\right)$$



等热流

$$\frac{dt_m}{dx} = \frac{P \cdot q}{mc_P} \Rightarrow t_m^{''} - t_m^{'} = \frac{P \cdot q}{mc_P} x$$



等壁温

$$\frac{dt_m}{dx} = \frac{P}{mc_P} h\left(t_w - t_m\right)$$

$$\frac{d\left(\Delta t\right)}{dx} = \frac{-P}{mc_P} h \cdot \Delta t; \quad \int_{\Delta t'}^{\Delta t''} \frac{d\left(\Delta t\right)}{\Delta t} = \int_0^L \frac{-P}{mc_P} h \cdot dx$$

$$\ln \frac{\Delta t''}{\Delta t'} = \ln\left(\frac{t_w^{''} - t_m^{''}}{t_w^{'} - t_m^{'}}\right) = \frac{-PL}{mc_P} \cdot \bar{h};$$

$$\ln\frac{\Delta t''}{\Delta t'} = \ln\left(\frac{t_w'' - t_m''}{t_w' - t_m'}\right) = \frac{-PL}{mc_P}\cdot \bar{h};$$

$$q_x \cdot P\,dx = mc_P\,dt_m = mc_P\left(t_m'' - t_m'\right)$$

$$q_x \cdot P\,dx = \bar{h}\cdot A \cdot \Delta t_l$$

$$\Delta t_l = \frac{\Delta t'' - \Delta t'}{\ln(\Delta t'' / \Delta t')}$$