清華大学
Tsinghua University

运筹学

第四讲 线性锥规划与最优潮流

魏韡

2025年4月2日

主要内容

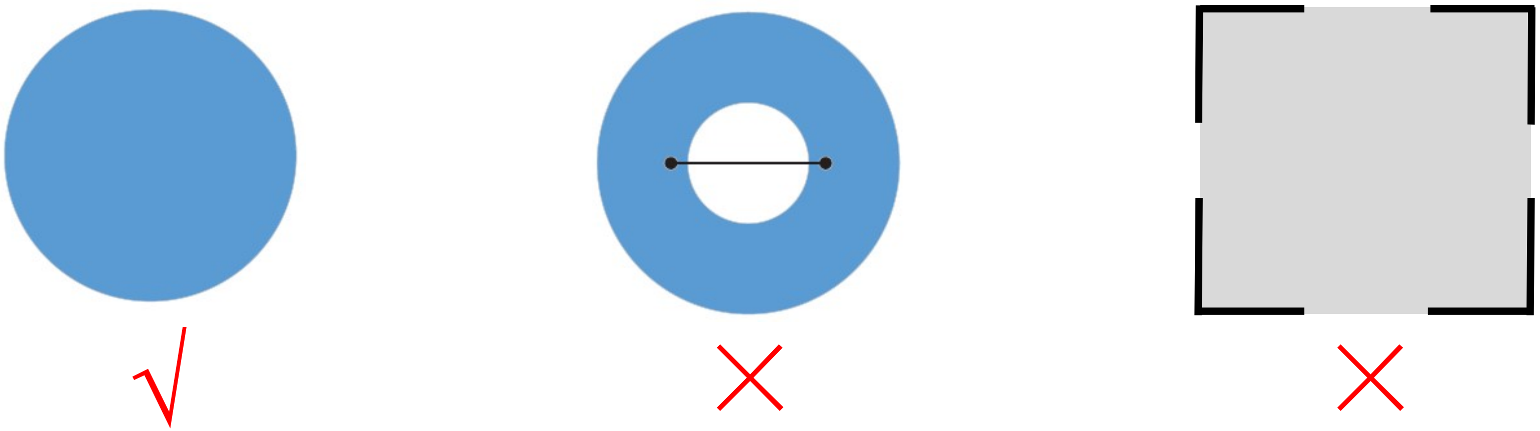
1.1 凸集的定义

定义1

称一个集合是凸集，若连接集合中任意两点的线段仍在该集合中

$$\forall x_1, x_2 \in C, \theta \in [0,1] \quad \Rightarrow \quad \theta x_1 + (1-\theta) x_2 \in C$$

下列集合是凸集吗?



直观解释：在凸集中的任何一点都可以看到集合内的其他位置（视线不被阻挡）

1.1 凸集的定义

定义2

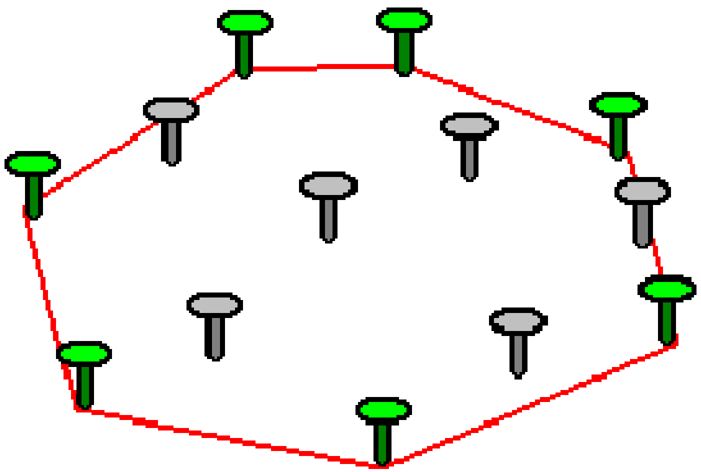
称 x 是给定点 $x_1, \cdots, x_k$ 的一个凸组合，若 x 可表示

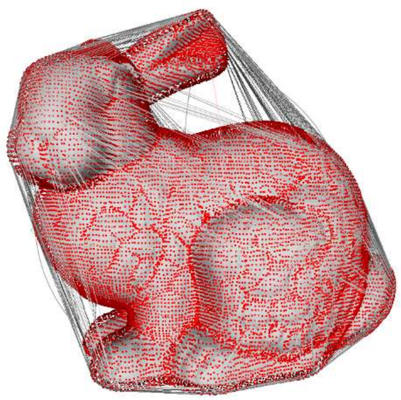
$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_k x_k,\ \lambda \in \Delta_k,\ \Delta_k = \{\lambda | \lambda \geq 0, 1^{\mathrm{T}}\lambda = 1\}$$

定义3

集合 C 的凸包 $\mathrm{conv}(C)$ 定义为：

(1) 包含 C 的最小凸集； （2） C 中点的所有凸组合构成的集合





1.2 锥

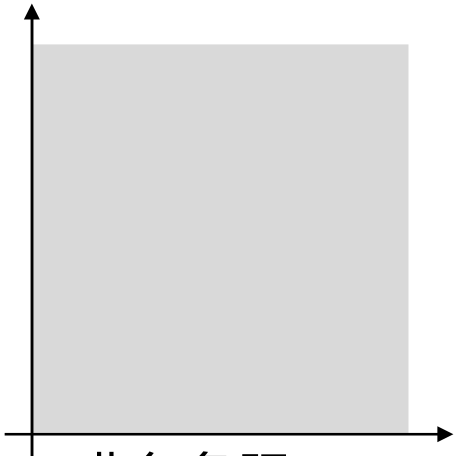
定义4

称集合C是一个**锥**，若对任意$x \in C$和常数$\theta \geq 0$有$\theta x \in C$.

$$\forall x \in C, \theta \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \theta x \in C$$

称集合C是一个**凸锥**，若C既是凸集也是锥

$$\forall x_1, x_2 \in C, \theta_1, \theta_2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 \in C$$



非负象限 $\mathbb{R}_+^n$

$\mathbb{R}^3$ 中的锥

非凸锥

1.2 锥

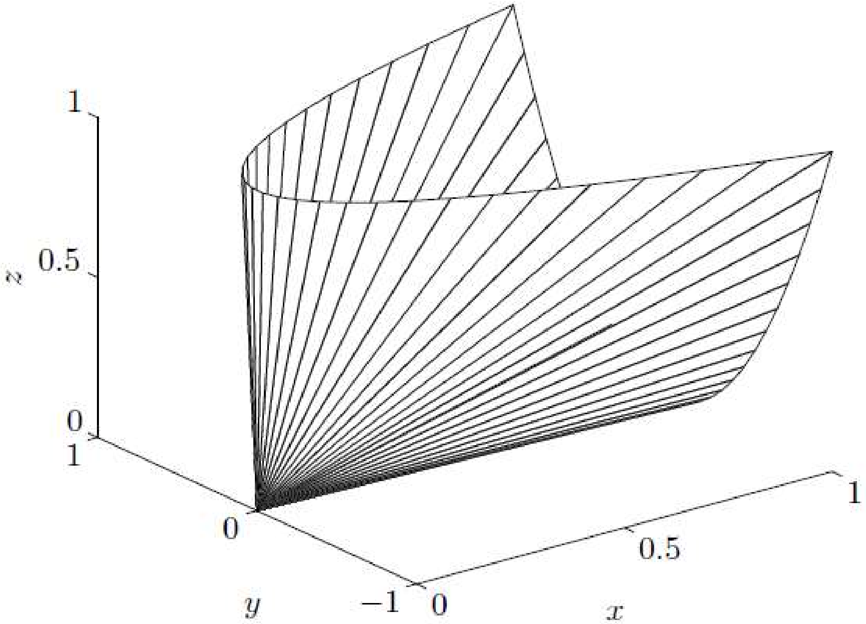
半正定锥（半正定矩阵构成的集合）

- $n \times n$ 对称矩阵构成的集合 $S^n = \{X \in \mathrm{R}^{n\times n} \mid X = X^{\mathrm{T}}\}$
- $n \times n$ 半正定矩阵构成的集合 $S_+^n = \{X \in S^n | X \succcurlyeq 0\}$
- $n \times n$ 正定矩阵构成的集合 $S_{++}^n = \{X \in S^n \mid X \succ 0\}$

2×2半正定矩阵构成的锥

$$X = \begin{bmatrix} x & y \\ y & z \end{bmatrix} \in \mathrm{R}^3$$

$$x \geq 0,\ z \geq 0,\ xz \geq y^2$$



1.2 锥

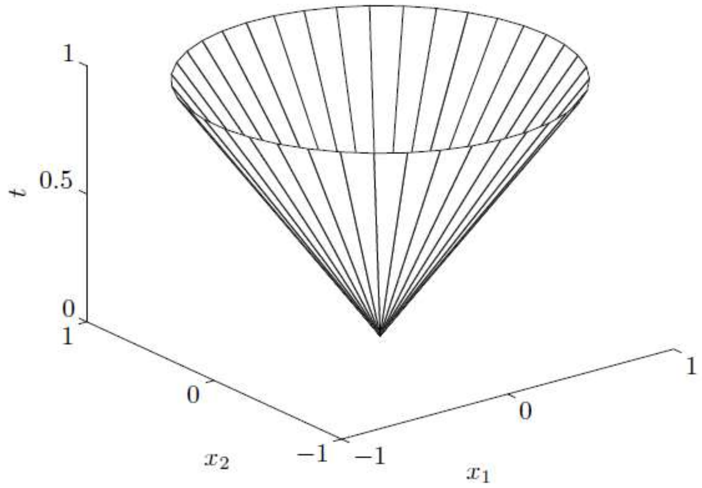
二阶锥 (洛伦兹锥或冰激凌锥)

➢ 标准形式

$$\mathbb{L}^m = \left\{(x_1, \cdots, x_m) \middle| x_m \geq \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_{m-1}^2}\right\}$$

➢ 一般形式

$$\{x \in \mathbb{R}^n \,|\, \|Dx - d\|_2 \leq p^{\mathrm{T}}x - q\}$$



$$\mathbb{L}^3 = \left\{(x_1, x_2, t) \middle| t \geq \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right\}$$

1.3 正常锥与广义不等式

称锥 $K \subseteq \mathbb{R}^n$ 是一个正常锥若
- K 是凸集
- K 是闭集
- K 有非空内点
- K 是尖锥 $x \in K, -x \in K \Rightarrow x = 0$

正常锥举例
- 非负象限 $K = \mathbb{R}^n_+$
- 洛伦兹锥 $K = \mathbb{L}^n$
- 半正定锥 $K = \mathbb{S}^n_+$

正常锥 K 引入的广义不等式

$$x \preccurlyeq_K y \Leftrightarrow y - x \in K$$

$$x \prec_K y \Leftrightarrow y - x \in \operatorname{int}(K)$$

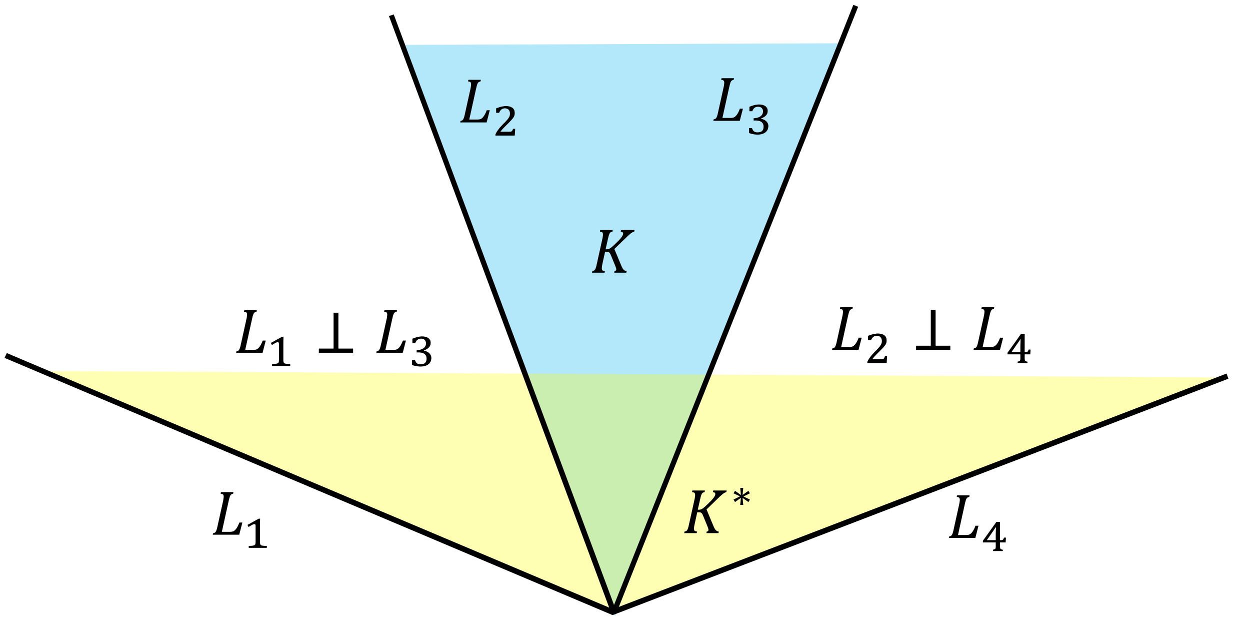
广义不等式举例
- 逐元素不等式 ($K = \mathbb{R}^n_+$) $x \preccurlyeq_K y \Leftrightarrow x_i \leq y_i, \forall i$
- 线性矩阵不等式 ($K = \mathbb{S}^n_+$) $X \preccurlyeq_K Y \Leftrightarrow Y - X$ is PSD

1.4 对偶锥

定义5

集合 K 是一个锥，K 的对偶锥定义为

$$K^* = \{y | x^{\mathrm{T}} y \geq 0, \quad \forall x \in K\}$$



例: 求非负象限 $\mathbb{R}_+^n$ 的对偶锥

$x^{\mathrm{T}} y \geq 0, \forall x \geq 0 \iff y \geq 0$ 因此 $(\mathbb{R}_+^n)^* = \mathbb{R}_+^n$，即 $\mathbb{R}_+^n$ 自对偶

1.4 对偶锥 $(\mathbb{R}_+^n)^* = \mathbb{R}_+^n \quad (\mathbb{L}^n)^* = \mathbb{L}^n \quad (\mathbb{S}_+^n)^* = \mathbb{S}_+^n$

证明: 半正定锥自对偶 $(S_+^n)^* = S_+^n$

S^n 上的矩阵内积定义为 $\langle X, Y\rangle = \mathrm{tr}(X^\mathrm{T} Y)$

$$\langle X, Y\rangle \geq 0, \forall X \in S_+^n \Leftrightarrow Y \in S_+^n$$

若 $Y \notin S_+^n$, 则 $\exists q \in \mathbb{R}^n$, 使得

$$q^\mathrm{T} Y q < 0,\ \mathrm{tr}(qq^\mathrm{T} Y) < 0$$

因此对 $X = qq^\mathrm{T} \in S_+^n$ 有 $\langle X, Y\rangle < 0$，故 $Y \notin (S_+^n)^*$

对任意的 $X, Y \in S_+^n$, 将 X 表示为

$$X = \sum_{i=1}^n \lambda_i q_i q_i^\mathrm{T},\ \lambda_i \geq 0, i = 1, \cdots, n$$

则有

$$\mathrm{tr}(XY) = \mathrm{tr}\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i q_i q_i^\mathrm{T} Y\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i q_i^\mathrm{T} Y q_i \geq 0$$

说明 $Y \in (S_+^n)^*$.

2.1 为什么研究锥规划?

求解凸优化问题最高效的内点法计算复杂度

$$O(1)n(n^3+M)\ln\frac{1}{\varepsilon}$$

n: 决策变量的个数

M: 计算函数 f 和 g_i 在某点的函数值及导数所需的算术运算次数

ε: 收敛误差

若 $n = 1000$?

中间有其他能高效求解的问题吗?

线性规划

$$\begin{aligned} \min\quad & c^{\mathrm{T}}x \\ \text{s.t.}\quad & Ax \le b \\ & A \in \mathbf{R}^{d\times n} \end{aligned}$$

- 椭圆法计算复杂度: $O(n^4)\ln(1/\varepsilon)$
- Karmarkar算法: $O(n^{3.5})\ln(1/\varepsilon)$
- 单纯形迭代: $O(n^2 d)+e^{O(\sqrt{n\ln n})}$
- 平均性能: $O(n^{1.5})\sim O(n^2)$

J. Matousek, M. Sharir, and E.Welzl. A subexponential bound for linear programming. Algorithmica, 16:498–516, 1996.

2.2 线性锥规划

$$\min \quad c^{\mathrm{T}} x$$
$$\text{s.t.} \quad Ax \geq b$$

如何在线性规划

中引入非线性?

在目标函数和约束

中引入非线性函数

$$\min \quad f(x)$$
$$\text{s.t.} \quad g(x) \leq 0$$

在不等号 ≥ 中引入非线性

$$\min \quad c^{\mathrm{T}} x$$
$$\text{s.t.} \quad Ax \geq_K b$$
$$(\text{or } Ax - b \in K)$$

2.2 线性锥规划

$$\begin{aligned} \min \quad & c^{\mathrm{T}} x \\ \text{s.t.} \quad & Ax \geq_{K} b \end{aligned}$$

- $K \in E$: 是一个正常锥
- $c \in \mathbb{R}^n$: 目标函数系数
- A: 常数矩阵, $x \rightarrow Ax : \mathbb{R}^n \rightarrow E$
- $b \in E$: 右端常数项

$x \in \mathbb{R}^3$, $K = \mathbb{R}^3_+$

$A = I$, $b = \mathbf{1}$, $c = \mathbf{1}$

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 + x_2 + x_3 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$x \in \mathbb{R}^3$, $K = \mathbb{L}^3$

$A = I$, $b = \mathbf{1}$, $c = \mathbf{1}$

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 + x_2 + x_3 \\ \text{s.t.} \quad & x_3 - 1 \geq \\ & \sqrt{(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2} \end{aligned}$$

2.3 锥规划的对偶

线性规划对偶

$$v^* = \min \ c^{\mathrm{T}} x$$
$$s.t. \ \ Ax \geq b : \lambda$$

$$\lambda^{\mathrm{T}} Ax \geq \lambda^{\mathrm{T}} b, \ \lambda \geq 0$$

$$\text{if } \lambda^{\mathrm{T}} A = c^{\mathrm{T}} \Rightarrow v^* \geq \lambda^{\mathrm{T}} b$$

$$\max \ \lambda^{\mathrm{T}} b$$
$$s.t. \ \ \lambda \geq 0, A^{\mathrm{T}} \lambda = c$$

锥规划对偶

$$v^* = \min \ c^{\mathrm{T}} x$$
$$s.t. \ \ Ax \geq_K b : \lambda$$

$$\lambda^{\mathrm{T}} Ax \geq \lambda^{\mathrm{T}} b, \ \lambda \in ?$$

$$\text{if } \lambda^{\mathrm{T}} A = c^{\mathrm{T}} \Rightarrow v^* \geq \lambda^{\mathrm{T}} b$$

$$\max \ \lambda^{\mathrm{T}} b$$
$$s.t. \ \ \lambda \in ?, A^{\mathrm{T}} \lambda = c$$

对偶变量λ的取值范围是什么?

2.3 锥规划的对偶

- 只要 λ 满足

$$\forall \xi \in K: \quad \langle \lambda, \xi \rangle \geq 0$$

对偶锥的定义!

$$K^* = \{\lambda \mid \langle \lambda, a \rangle \geq 0, \forall a \in K\}$$

则不等式

$$\langle \lambda, a \rangle \geq \langle \lambda, b \rangle$$

可由广义不等式 $a \geq_K b$ 推出

$$\begin{aligned} & a \geq_K b \\ \Leftrightarrow \quad & a-b \geq_K 0 \quad \text{or} \quad a-b \in K \\ \lambda \in K^* \Rightarrow \quad & \langle \lambda, a-b \rangle \geq 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \langle \lambda, a \rangle \geq \langle \lambda, b \rangle \end{aligned}$$

- 对偶变量 λ 的取值范围是 $\lambda \in K^*$

2.3 锥规划的对偶

P: $v_p^* = \min \ c^{\mathrm{T}} x$

$s.t. \ \ Ax \geq_K b : \lambda$

$\Downarrow$

$\lambda^{\mathrm{T}} A x \geq \lambda^{\mathrm{T}} b, \ \lambda \in K^*$

$\Downarrow$

$\text{if } \lambda^{\mathrm{T}} A = c^{\mathrm{T}} \Rightarrow v^* \geq \lambda^{\mathrm{T}} b$

$\Downarrow$

D: $v_d^* = \max \ \langle \lambda, b \rangle$

$s.t. \ \ \lambda \in K^*, A^{\mathrm{T}} \lambda = c$

锥规划的对偶理论

- 锥规划的对偶问题是锥规划，且 P** = P
- **弱对偶**：在原问题和对偶问题可行域内，对偶间隙 $c^{\mathrm{T}} x - \langle b, \lambda \rangle$ 非负
- **强对偶**：若 P 最优值有界且严格可行 ($\exists x: Ax >_K b$), 则 D 有最优解，且原对偶最优值相等
- **强对偶**：若 D 最优值有界且严格可行 ($\exists \lambda >_{K^*} 0$: $A^{\mathrm{T}} \lambda = c$), 则 P 有最优解，且原对偶最优值相等
- **最优性条件**：若 P 或 D 中至少一个最优值有界且严格可行，则一对原-对偶可行解 (x, λ) 分别是 P 和 D 的最优解当且仅当
  (1) 互补松弛成立：$\langle \lambda, Ax - b \rangle = 0$
  (2) 强对偶成立：$c^{\mathrm{T}} x = \langle \lambda, b \rangle$

2.3 锥规划的对偶

例: 考虑如下锥规划问题

P:

$$\min \quad x_1$$

$$s.t. \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ 0 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix} \geq_{L^3} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\min \left\{ x_1 : \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + 1} \leq x_1 + x_2 \right\}$$

$$\min \left\{ x_1 : 4x_1x_2 \geq 1, x_1 + x_2 > 0 \right\}$$

- 严格可行，最优值有界
- 最优解不存在 (min→inf)

D:

$$\max \quad -\lambda_2$$

$$s.t. \quad \lambda_1 + \lambda_3 = 1$$

$$\lambda_1 - \lambda_3 = 0$$

$$\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} \leq \lambda_3$$

$$\max \quad -\lambda_2$$

$$s.t. \quad \lambda_2 = 0$$

$$\lambda_1 = \lambda_3 = 0.5$$

- 最优解存在
- 强对偶成立

2.3 锥规划的对偶

例: 考虑如下锥规划问题

P:

$$\min \quad x_2$$

$$s.t. \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} \geq_{L^3} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\min\left\{x_2 : \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq x_1\right\}$$

$$\Downarrow$$

$$\min\left\{x_2 : x_2 = 0, x_1 \geq 0\right\}$$

- 最优解存在
- 可行，但 $\mathrm{int}[X] = \emptyset$

D:

$$\max \quad 0$$

$$s.t. \quad \lambda_1 + \lambda_3 = 0$$

$$\lambda_2 = 1$$

$$\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} \leq \lambda_3$$

$$\Downarrow$$

$$\max \quad 0$$

$$s.t. \quad \lambda_2 = 1$$

$$\sqrt{\lambda_3^2 + 1} \leq \lambda_3$$

- 不可行 ($v^* = -\infty$)
- 只有弱对偶成立

主要内容

1. 凸集、锥与广义不等式
2. 从线性规划到线性锥规划
3. 二阶锥规划与配电网最优潮流
4. 半定规划与输电网最优潮流

3.1 二阶锥规划 (Second-Order Cone Program, SOCP)

➢ 广义不等式形式 (原始问题)

$$\begin{aligned}\min\quad & c^{\mathrm{T}}x\\ \text{s.t.}\quad & Ax\geq_K b\end{aligned}\quad\Rightarrow\quad\begin{aligned}\min\quad & c^{\mathrm{T}}x\\ \text{s.t.}\quad & A_ix-b_i\in L^{m_i},i=1,\cdots,k\end{aligned}$$

其中

$$K=L^{m_1}\times L^{m_2}\times\cdots\times L^{m_k}$$

$$=\left\{y=\begin{bmatrix}y^1\\ y^2\\ \vdots\\ y^k\end{bmatrix}\middle| y^i\in L^{m_i},i=1,\cdots,k\right\}$$

二阶锥规划在有限个二阶锥(形如$\sqrt{x_1^2+\cdots+x_m^2}\leq x_{m+1}$)、半空间(线性不等式)和超平面(线性等式)的交集上优化线性目标函数

3.1 二阶锥规划

➢ 广义不等式形式 (对偶问题)

$$\begin{aligned} \max\quad & b^{\mathrm{T}}\lambda \\ \text{s.t.}\quad & A^{\mathrm{T}}\lambda = c, \lambda \in K^* \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max\quad & \textstyle\sum_{i=1}^{k} b_i^{\mathrm{T}}\lambda_i \\ \text{s.t.}\quad & \textstyle\sum_{i=1}^{k} A_i^{\mathrm{T}}\lambda_i = c \\ & \lambda_i \in L^{m_i}, i = 1,\cdots,k \end{aligned}$$

其中

$$K^* = K = L^{m_1} \times L^{m_2} \times \cdots \times L^{m_k}$$

二阶锥自对偶

$$= \left\{ \lambda = \begin{bmatrix} \lambda^1 \\ \lambda^2 \\ \vdots \\ \lambda^k \end{bmatrix} \middle| \lambda^i \in L^{m_i}, i = 1,\cdots,k \right\}$$

3.1 二阶锥规划

➢ 非线性规划形式

将系数矩阵分块 $[A_i, b_i] = \begin{bmatrix} D_i & d_i \\ p_i^{\mathrm{T}} & q_i \end{bmatrix}$

P: $\min \quad c^{\mathrm{T}} x$

$$\text{s.t.} \quad \| D_i x - d_i \| \le p_i^{\mathrm{T}} x - q_i, \; i = 1, \cdots, k$$

$$\Downarrow \quad \begin{bmatrix} D_i x \\ p_i^{\mathrm{T}} x \end{bmatrix} \ge_{\mathrm{L}^{n_k}} \begin{bmatrix} d_i \\ q_i \end{bmatrix} : \lambda_i = \begin{bmatrix} \mu_i \\ v_i \end{bmatrix}$$

D: $\max \quad \sum_{i=1}^{k} d_i^{\mathrm{T}} \mu_i + q_i v_i$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^{k} \left[D_i^{\mathrm{T}} \mu_i + p_i v_i \right] = c, \; \| \mu_i \|_2 \le v_i, i = 1, \cdots, k$$

3.2 支路潮流OPF的二阶锥松弛

$$\min \ \sum_j \left(a_i P_{gj}^2 + b P_{gj} \right)$$

$$\text{s.t.} \ P_{ij} - r_{ij} I_{ij} + P_{gj} = P_{dj} + \sum_{k \in c(j)} P_{jk}, \forall j$$

$$Q_{ij} - x_{ij} I_{ij} + Q_{gj} = Q_{dj} + \sum_{k \in c(j)} Q_{jk}, \forall j$$

$$V_j = V_i - 2\left(P_{ij} r_{ij} + Q_{ij} x_{ij} \right) + z_{ij}^2 I_{ij}, \forall j$$

$$\boxed{V_{ij} I_{ij} = P_{ij}^2 + Q_{ij}^2, \forall j,} \ \text{Cons-BND}$$

$$\Downarrow$$

$$V_{ij} I_{ij} \geq P_{ij}^2 + Q_{ij}^2 \ \Leftrightarrow V_i + I_{ij} \geq \left\| \begin{bmatrix} 2P_{ij} \\ 2Q_{ij} \\ V_i - I_{ij} \end{bmatrix} \right\|$$

- SOCP的计算复杂度接近线性规划
- 支路模型(BFM)直接采用易测物理量，适用于辐射状电网
- SOCP松弛不精确怎么办?

主要内容

1. 凸集、锥与广义不等式
2. 从线性规划到线性锥规划
3. 二阶锥规划与配电网最优潮流
4. 半定规划与输电网最优潮流

4.1 符号约定

Frobenius内积

$$\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}\left(A^{\mathrm{T}}B\right) = \sum_{ij} a_{ij}b_{ij}\,, A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}, \langle X, Y\rangle = \mathrm{Tr}(XY), X, Y \in \mathbb{S}^m$$

矩阵范数

$$\|X\|_2 = \sqrt{\langle X, X\rangle} = \sqrt{\mathrm{Tr}(X^{\mathrm{T}}X)}$$

对称矩阵锥 $K \subset \mathbb{S}^m$ 的对偶锥

$$K^* = \{Y \in \mathbb{S}^m | \langle Y, X\rangle \geq 0, \forall x \in K\}$$

Schur补定理

已知$A = \begin{bmatrix} B & C \\ C^{\mathrm{T}} & D \end{bmatrix} \in \mathbb{S}^m$ 且 $B \succ 0$, 则 $A \succcurlyeq 0 \Leftrightarrow D - C^{\mathrm{T}}B^{-1}C \succcurlyeq 0$

4.2 半定规划（Semidefinite Program, SDP）

➢ 原问题 (线性矩阵不等式约束 Linear Matrix Inequality)

$$\begin{aligned}\min\quad & c^{\mathrm{T}}x \\ \text{s.t.}\quad & Ax \geq_K b\end{aligned} \quad\Rightarrow\quad \begin{aligned}\min\quad & c^{\mathrm{T}}x \\ s.t.\quad & \mathcal{A}x - B \in S_+^m\end{aligned} \quad\Rightarrow\quad \begin{aligned}\min\quad & c^{\mathrm{T}}x \\ s.t.\quad & \sum_{j=1}^{n} x_j A_j \succeq B\end{aligned}$$

其中 $\mathcal{A}: R^n \to S^m,\ \ \mathcal{A}x = \sum_{j=1}^{n} x_j A_j$

$A_j \in S^m, j = 1,\cdots,n,\ \ B \in S^m,\ \ c \in R^n, x = (x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}} \in R^n$

➢ 对偶问题 (矩阵半正定约束)

$$\begin{aligned}\max\quad & b^{\mathrm{T}}y \\ \text{s.t.}\quad & A^{\mathrm{T}}y = c \\ & y \in K^*\end{aligned} \qquad \text{or} \qquad \begin{aligned}\max\quad & \langle B, Y\rangle \\ s.t.\quad & \langle A_j, Y\rangle = c_j, j = 1,\cdots,n \\ & Y \succeq 0\end{aligned}$$

$(\mathbb{S}_+^m)^* = \mathbb{S}_+^m$

对偶问题仍然是SDP！

4.2 半定规划

➢ 原问题 (矩阵半正定约束)

$$\begin{aligned} \min \quad & \langle C, X \rangle \\ s.t. \quad & \langle A_j, X \rangle = b_j, j = 1, \cdots, n \\ & X \succeq 0 \end{aligned}$$

其中 $C \in \mathbb{S}^n, A_j \in \mathbb{S}^n, j = 1, \cdots, n$

➢ 对偶问题 (线性矩阵不等式)

$$\begin{aligned} \max \quad & b^{\mathrm{T}} y + \Lambda \cdot 0 \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^{n} A_j y_j + \Lambda = C \\ & \Lambda \succeq 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} \max \quad & b^{\mathrm{T}} y \\ \text{s.t.} \quad & C - \sum_{j=1}^{n} A_j y_j \succeq 0 \end{aligned}$$

4.3 二次约束二次规划(QCQP)的SDP松弛

$$\begin{aligned} \min \quad & x^{\mathrm{T}} A_0 x + a_0^{\mathrm{T}} x \\ \text{s.t.} \quad & x \in F \end{aligned}$$

$$F = \left\{ x \,\middle|\, \begin{array}{c} x^{\mathrm{T}} A_k x + a_k^{\mathrm{T}} x \le b_k \\ k = 1, \cdots, m \\ l \le x \le u \end{array} \right\}$$

输入参数

- $A_k \in \mathbb{S}^n,\ k = 0, \cdots, m$
- $a_k \in \mathbb{R}^n,\ k = 0, \cdots, m$
- $b_k \in \mathbb{R},\ k = 1, \cdots, m$
- $x \in \mathbb{R}^n$

约束类型

- 线性约束: $A_k = 0$
- 凸二次约束: $A_k \in \mathbb{S}_+^n$
- 非凸约束: A_k不定

➢ 二次型的矩阵迹表示:

$$x^{\mathrm{T}} Q x = \mathrm{tr}(Q x x^{\mathrm{T}}) = \left\langle Q, x x^{\mathrm{T}} \right\rangle$$

$$\min \left\{ \left\langle A_0, X \right\rangle + c^{\mathrm{T}} x : (x, X) \in \overline{F} \right\}$$

$$\overline{F} = \left\{ \begin{array}{c} (x, X) \in \\ R^n \times S^n \end{array} \,\middle|\, \begin{array}{c} \left\langle A_k, X \right\rangle + a_k^{\mathrm{T}} x \le b_k \\ k = 1, \cdots, m \\ l \le x \le u \\ X = x x^{\mathrm{T}} \end{array} \right\}$$

秩-1
约束

4.3 二次约束二次规划的SDP松弛

有效不等式 (Valid Inequality)

由 $\bar{F}$ 导出的不影响(x, X)可行性的额外约束条件，即冗余约束，通常为线性约束或凸约束

有效线性不等式

$$\left.\begin{aligned}\alpha^{\mathrm{T}}x \le \alpha_0\\ \beta^{\mathrm{T}}x \le \beta_0\end{aligned}\right\} \Rightarrow (\alpha^{\mathrm{T}}x-\alpha_0)(\beta^{\mathrm{T}}x-\beta_0) \ge 0$$

$$\Downarrow$$

$$\alpha_0\beta_0-\alpha_0\beta^{\mathrm{T}}x-\beta_0\alpha^{\mathrm{T}}x+x^{\mathrm{T}}a\beta^{\mathrm{T}}x \ge 0$$

$$\Downarrow$$

X的线性项

$$\alpha_0\beta_0-\alpha_0\beta^{\mathrm{T}}x-\beta_0\alpha^{\mathrm{T}}x+\langle a\beta^{\mathrm{T}}, X\rangle \ge 0$$

4.3 二次约束二次规划的SDP松弛

重整线性化 Reformulation-linearization-technique (RLT):

$$(x_i - l_i)(x_j - l_j) \geq 0 \quad \Rightarrow l_i x_j + x_i l_j - l_i l_j \leq X_{ij}$$

$$(x_i - l_i)(u_j - x_j) \geq 0 \quad \Rightarrow X_{ij} \leq x_i u_j + l_i x_j - l_i u_j$$

$$(u_i - x_i)(x_j - l_j) \geq 0 \quad \Rightarrow X_{ij} \leq x_i l_j + u_i x_j - u_i l_j$$

$$(u_i - x_i)(u_j - x_j) \geq 0 \quad \Rightarrow u_i x_j + x_i u_j - u_i u_j \leq X_{ij}$$

$$\Downarrow \ \forall i, j$$

$$\left.\begin{matrix} lx^{\mathrm{T}} + xl^{\mathrm{T}} - ll^{\mathrm{T}} \\ ux^{\mathrm{T}} + xu^{\mathrm{T}} - uu^{\mathrm{T}} \end{matrix}\right\} \leq X \leq \left\{\begin{matrix} xu^{\mathrm{T}} + lx^{\mathrm{T}} - lu^{\mathrm{T}} \\ xl^{\mathrm{T}} + ux^{\mathrm{T}} - ul^{\mathrm{T}} \end{matrix}\right.$$

有效线性不等式

4.3 二次约束二次规划的SDP松弛

有效矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} 1 & x^{\mathrm{T}} \\ x & xx^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \succeq 0 \quad \overset{\text{why?}}{\Rightarrow} \quad \begin{bmatrix} 1 & x^{\mathrm{T}} \\ x & X \end{bmatrix} \succeq 0$$

对称矩阵 X 的秩:

s = svd(X) 奇异值分解

$s_1 > s_2 > \cdots > s_k > s_{k+1} = 0 = \cdots = s_n$ rank(X)=k

衡量X接近秩-1矩阵的程度: $\dfrac{\sum_{i \neq 1} s_i}{s_1}$

4.3 二次约束二次规划的SDP松弛

$$\begin{aligned} \min \quad & \langle A_0, X\rangle + c^{\mathrm{T}}x \\ \text{s.t.} \quad & (x, X) \in \bar{F} \end{aligned}$$

$$\bar{F} = \left\{ (x, X) \in R^n \times S^n \;\middle|\; \begin{array}{c} \langle A_k, X\rangle + a_k^{\mathrm{T}}x \le b_k \\ k = 1, \cdots, m \\ l \le x \le u \\ \boxed{X = xx^{\mathrm{T}}} \end{array} \right\}$$

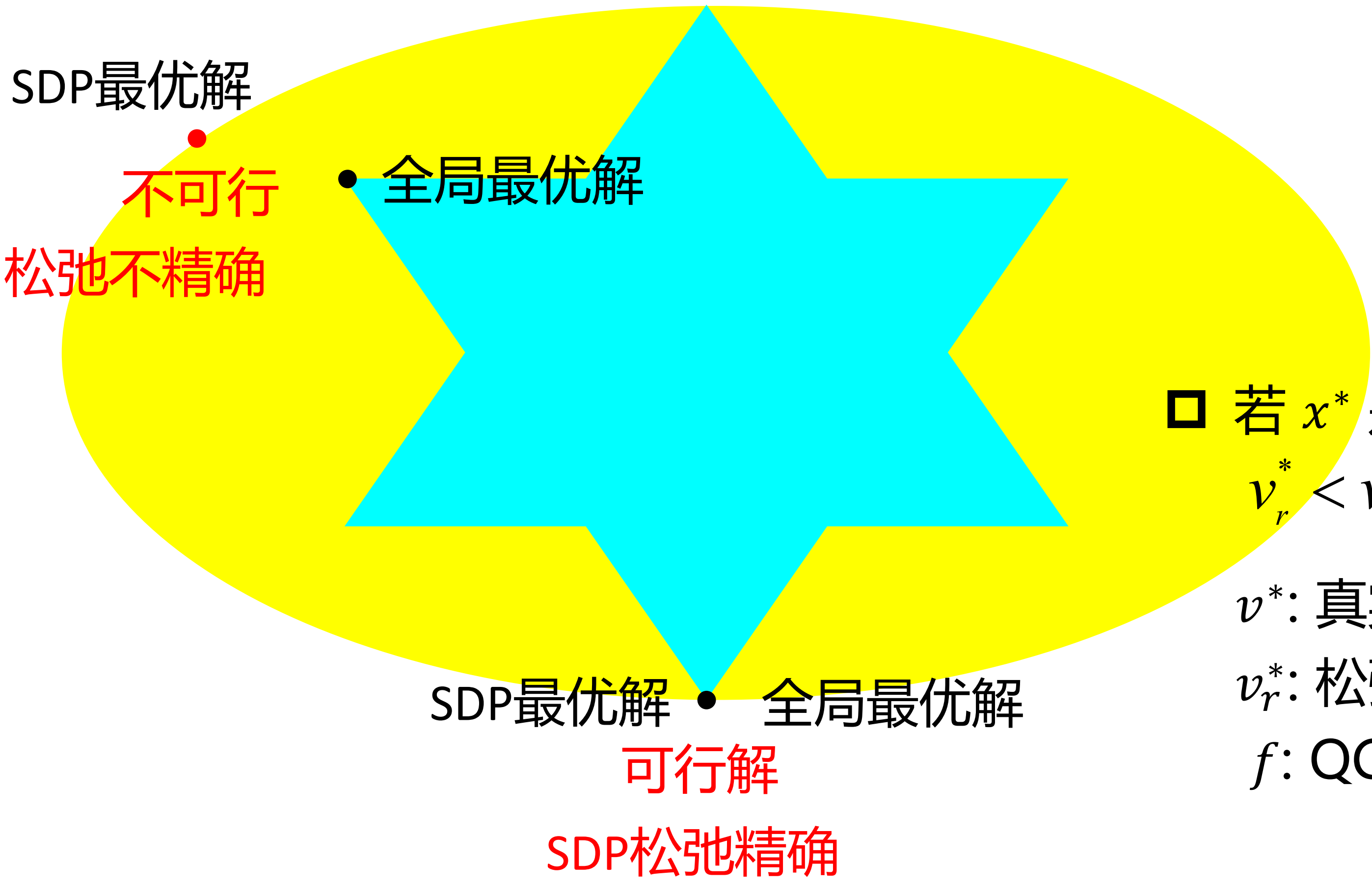
$$\begin{aligned} \min \quad & \langle A_0, X\rangle + c^{\mathrm{T}}x \\ s.t. \quad & \langle A_k, X\rangle + a_k^{\mathrm{T}}x \le b_k, k = 1, \cdots, m, \quad l \le x \le u \\ & \boxed{\left.\begin{array}{c} lx^{\mathrm{T}} + xl^{\mathrm{T}} - ll^{\mathrm{T}} \\ ux^{\mathrm{T}} + xu^{\mathrm{T}} - uu^{\mathrm{T}} \end{array}\right\} \le X \le \left\{\begin{array}{c} xu^{\mathrm{T}} + lx^{\mathrm{T}} - lu^{\mathrm{T}} \\ xl^{\mathrm{T}} + ux^{\mathrm{T}} - ul^{\mathrm{T}} \end{array}\right.} \quad \text{线性约束} \\ & \boxed{\begin{bmatrix} 1 & x^{\mathrm{T}} \\ x & X \end{bmatrix} \succeq 0} \quad \text{凸锥约束} \end{aligned}$$

若 $\mathrm{rank}(X) = 1$，令 $X = xx^{\mathrm{T}}$

即可得到原问题的最优解

4.3 二次约束二次规划的SDP松弛

SDP松弛可能出现的情况



- 若 x^* 是任意可行解

$$v_r^* < v^* \le f(x^*)$$

v^*: 真实最优值

v_r^*: 松弛问题最优值

f: QCQP目标函数

4.4 输电网交流最优潮流的SDP松弛

$$\min \sum_i \left(a_i P_{gi}^2 + bP_{gi}\right)$$

发电成本

$$\text{s.t.}\quad V_{il}^2 \le e_i^2 + f_i^2 \le V_{im}^2,\ \forall i$$

电压幅值约束

$$P_{gi} - P_{di} = \sum_{j=1}^{n}\left[G_{ij}\left(e_i e_j + f_i f_j\right) - B_{ij}\left(e_i f_j - f_i e_j\right)\right]$$

$$Q_{gi} - Q_{di} = \sum_{j=1}^{n}\left[-B_{ij}\left(f_i f_j + e_i e_j\right) - G_{ij}\left(e_i f_j - f_i e_j\right)\right]$$

交流潮流

$$P_{il} \le P_{gi} \le P_{im},\ Q_{il} \le Q_{gi} \le Q_{im},\ \forall i$$

机组发电容量

$$F_{ij} \le p_{ij}(e,f) \le F_{ij},\ p_{ij}^2(e,f) + q_{ij}^2(e,f) \le S_{ij}^2,\ \forall (i,j)$$

传输线容量

决策变量: $\begin{cases} P_{gi}, Q_{gi} \text{ - 控制变量} \\ e_i, f_i \text{ - 系统潮流状态} \end{cases}$

问题参数: $\begin{cases} G_{ij}, B_{ij}, F_{ij}, S_{ij} \text{ - 网络参数（常数）} \\ P_{di}, Q_{di}, \text{ - 负荷（时变参数）} \end{cases}$

4.4 输电网交流最优潮流的SDP松弛

$$b_k = I[:,k],\ k=1,\cdots,n \quad Y_{ij}^L = (\bar{y}_{ij}^l + y_{ij}^l) b_i b_i^{\mathrm{T}} - y_{ij}^l b_i b_j^{\mathrm{T}},\ Y_k^N = b_k b_k^{\mathrm{T}} Y$$

$$M_k = \begin{bmatrix} b_k b_k^{\mathrm{T}} & 0 \\ 0 & b_k b_k^{\mathrm{T}} \end{bmatrix},\quad M_{ij} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} (b_i - b_j)(b_i - b_j)^{\mathrm{T}} & 0 \\ 0 & (b_i - b_j)(b_i - b_j)^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}$$

$$Z_k = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \mathrm{Re}\{Y_k^N + (Y_k^N)^{\mathrm{T}}\} & \mathrm{Im}\{(Y_k^N)^{\mathrm{T}} - Y_k^N\} \\ \mathrm{Im}\{Y_k^N - (Y_k^N)^{\mathrm{T}}\} & \mathrm{Re}\{Y_k^N + (Y_k^N)^{\mathrm{T}}\} \end{bmatrix} \in \mathrm{R}^{2n\times 2n}$$

$$\bar{Z}_k = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} \mathrm{Im}\{Y_k^N + (Y_k^N)^{\mathrm{T}}\} & \mathrm{Re}\{Y_k^N - (Y_k^N)^{\mathrm{T}}\} \\ \mathrm{Re}\{(Y_k^N)^{\mathrm{T}} - Y_k^N\} & \mathrm{Im}\{Y_k^N + (Y_k^N)^{\mathrm{T}}\} \end{bmatrix} \in \mathrm{R}^{2n\times 2n}$$

$$Z_{ij}^L = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \mathrm{Re}\{Y_{ij}^L + (Y_{ij}^L)^{\mathrm{T}}\} & \mathrm{Im}\{(Y_{ij}^L)^{\mathrm{T}} - Y_{ij}^L\} \\ \mathrm{Im}\{Y_{ij}^L - (Y_{ij}^L)^{\mathrm{T}}\} & \mathrm{Re}\{Y_{ij}^L + (Y_{ij}^L)^{\mathrm{T}}\} \end{bmatrix} \in \mathrm{R}^{2n\times 2n}$$

$$\bar{Z}_{ij}^L = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} \mathrm{Im}\{Y_{ij}^L + (Y_{ij}^L)^{\mathrm{T}}\} & \mathrm{Re}\{Y_{ij}^L - (Y_{ij}^L)^{\mathrm{T}}\} \\ \mathrm{Re}\{(Y_{ij}^L)^{\mathrm{T}} - Y_{ij}^L\} & \mathrm{Im}\{Y_{ij}^L + (Y_{ij}^L)^{\mathrm{T}}\} \end{bmatrix} \in \mathrm{R}^{2n\times 2n}$$

Lavaei J , Low S . Zero Duality Gap in Optimal Power Flow Problem. IEEE Trans. Power Syst. 2012, 27(1):92-107

4.4 输电网交流最优潮流的SDP松弛

潮流方程的矩阵形式

$$x = [\mathrm{Re}\{\dot{U}\};\mathrm{Im}\{\dot{U}\}]$$

$$V_k^2 = e_k^2 + f_k^2 = \begin{bmatrix} \mathrm{Re}\{\dot{U}\} \\ \mathrm{Im}\{\dot{U}\} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} b_k b_k^{\mathrm{T}} & 0 \\ 0 & b_k b_k^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{Re}\{\dot{U}\} \\ \mathrm{Im}\{\dot{U}\} \end{bmatrix} = x^{\mathrm{T}} M_k x$$

$$P_{gi} - P_{di} = \sum_{j=1}^{n} \left[G_{ij}\left(e_i e_j + f_i f_j\right) - B_{ij}\left(e_i f_j - f_i e_j\right) \right] = \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} G & -B \\ B & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \mathrm{Re}\{\dot{U}\} \\ \mathrm{Im}\{\dot{U}\} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathrm{Re}\{Y_k^N + (Y_k^N)^{\mathrm{T}}\} & \mathrm{Im}\{(Y_k^N)^{\mathrm{T}} - Y_k^N\} \\ \mathrm{Im}\{Y_k^N - (Y_k^N)^{\mathrm{T}}\} & \mathrm{Re}\{Y_k^N + (Y_k^N)^{\mathrm{T}}\} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{Re}\{\dot{U}\} \\ \mathrm{Im}\{\dot{U}\} \end{bmatrix}$$

$$= x^{\mathrm{T}} Z_k x$$

4.4 输电网交流最优潮流的SDP松弛

最优潮流的SDP松弛模型

$$\min \sum_i f_i(X) \longrightarrow$$ 凸二次函数

$$\text{s.t.}\quad V_{il}^2 \le \mathrm{tr}(M_i X) \le V_{im}^2,\ \forall i$$

$$P_{il} \le \mathrm{tr}(Z_i X) + P_{di} \le P_{im},\ \forall i$$

$$Q_{il} \le \mathrm{tr}(\bar{Z}_i X) + Q_{di} \le Q_{im},\ \forall i$$

线性

$$\mathrm{tr}(Z_{ij}^L X)^2 + \mathrm{tr}(\bar{Z}_{ij}^L X)^2 \le F_{ij}^2, \forall l$$ 凸二次约束

$$\mathrm{rank}(X) = 1$$ 非凸秩-1约束

$$X_{ij} = x_i x_j \quad \text{or} \quad X = xx^{\mathrm{T}}$$

$$v^{\mathrm{T}} X v = v^{\mathrm{T}} x x^{\mathrm{T}} v = (v^{\mathrm{T}} x)^2 \ge 0 \quad \Rightarrow \quad X \succeq 0$$

4.4 输电网交流最优潮流的SDP松弛

通过上境图将目标函数转化为约束

$$
\begin{aligned}
\min\ & \sum_i \beta_i \\
\text{s.t.}\ & V_{il}^2 \le \operatorname{tr}(M_i X) \le V_{im}^2,\ \forall i \\
& P_{il} \le \operatorname{tr}(Z_i X) + P_{di} \le P_{im},\ \forall i \\
& Q_{il} \le \operatorname{tr}(\bar{Z}_i X) + Q_{di} \le Q_{im},\ \forall i \\
& \begin{bmatrix} \beta_i - b_i^g[\operatorname{tr}(Z_i X) + P_{di}] & \sqrt{a_k^g}[\operatorname{tr}(Z_i X) + P_{di}] \\ \sqrt{a_k^g}[\operatorname{tr}(Z_i X) + P_{di}] & 1 \end{bmatrix} \succeq 0,\ \forall i \\
& \begin{bmatrix} F_{ij}^2 & \operatorname{tr}(Z_{ij}^l X) & \operatorname{tr}(\bar{Z}_{ij}^l X) \\ \operatorname{tr}(Z_{ij}^l X) & 1 & 0 \\ \operatorname{tr}(\bar{Z}_{ij}^l X) & 0 & 1 \end{bmatrix} \succeq 0,\ \forall l \\
& X \succeq 0
\end{aligned}
$$

Schur 补转化

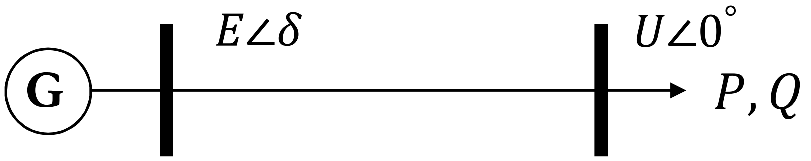
4.4 输电网交流最优潮流的SDP松弛

思考讨论

- 如果 $\mathrm{rank}(X^*) \neq 1$ 怎么办?
- 有何条件能保证最优解处 $\mathrm{rank}(X^*) = 1$ 成立?
- 最优潮流问题有 $2n$ 个变量，SDP松弛问题有 $4n^2$ 个变量，尽管SDP是凸优化，计算速度能否提升?
- 最优潮流问题的系数矩阵是稀疏的，SDP松弛中的矩阵变量 X 是否稀疏?
- 如何确定 X 的稀疏模式?

弦图和最大团 chordal graph and maximum clique

4.5 简单潮流问题举例



无损输电线路($R=0$)的电抗是 X. 发电机端电压 E 维持恒定。

求负荷有功无功 (P,Q) 的范围，使系统潮流方程有可行解

该系统的潮流方程为

$$P=\frac{EU}{X}\sin\delta,\quad Q=\frac{EU}{X}\cos\delta-\frac{U^2}{X}$$

消去功角变量 δ 得到 $\left(\frac{PX}{EU}\right)^2+\left(\frac{QX+U^2}{EU}\right)^2=1$

将该等式视为以 U^2/X 为变量的方程

$$\left(\frac{U^2}{X}\right)^2+\frac{U^2}{X}\left(2Q-\frac{E^2}{X}\right)+P^2+Q^2=0$$

4.5 简单潮流问题举例

考虑二次方程

$$\left(\frac{U^2}{X}\right)^2+\frac{U^2}{X}\left(2Q-\frac{E^2}{X}\right)+P^2+Q^2=0$$

二次方程最多有两个实根，由于 $P^2+Q^2>0$, 两根必同号

由于 $U^2>0$, 两根都是正数。因此，以下条件成立

$$2Q-\frac{E^2}{X}\le 0 \Rightarrow Q\le\frac{E^2}{2X}$$

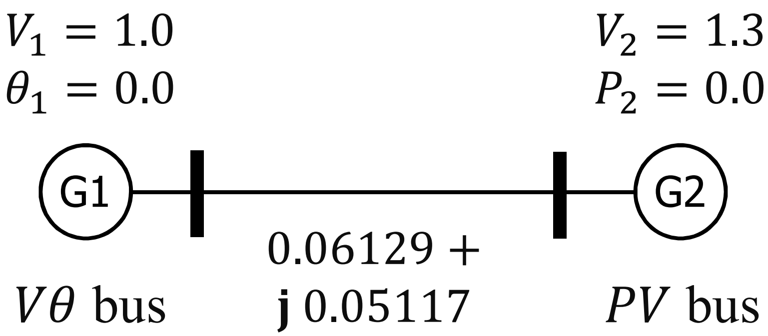
$$\left(2Q-\frac{E^2}{X}\right)^2-4\left(P^2+Q^2\right)\ge 0 \Rightarrow Q\le\frac{E^2}{4X}-\frac{P^2X}{QE}$$

故(P,Q) 的可行域是开口朝下的抛物线内部

$$Q\le\frac{E^2}{4X}-\frac{P^2X}{QE}$$

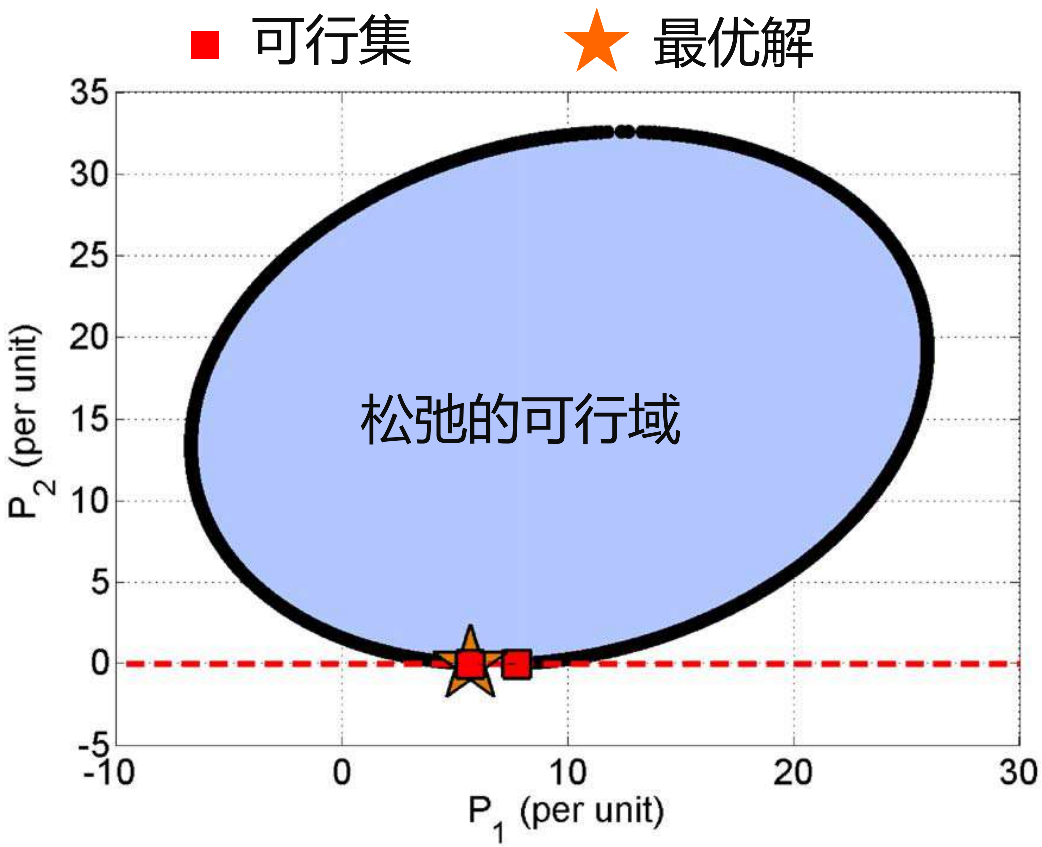
4.5 简单潮流问题举例

2节点系统



OPF即潮流方程

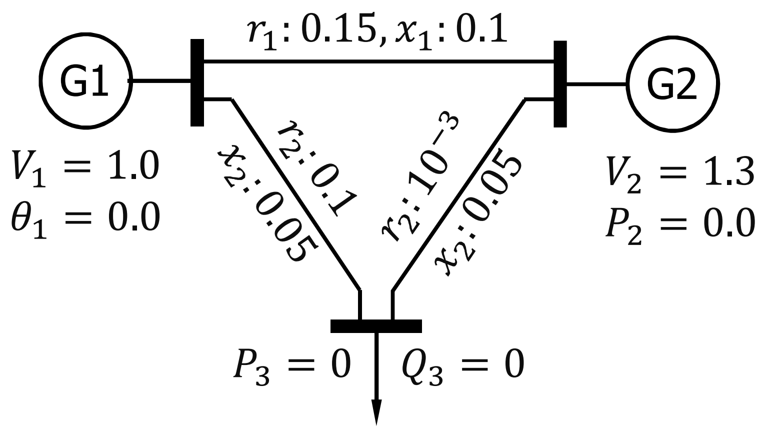
$e_1 + \mathbf{j}\, f_1$	$1.000 + \mathbf{j}\, 0.000$
$e_2 + \mathbf{j}\, f_2$	$1.049 - \mathbf{j}\, 0.767$
$P_1 + \mathbf{j}\, Q_1$	$5.68 - \mathbf{j}\, 7.77$
$P_2 + \mathbf{j}\, Q_2$	$0.00 + \mathbf{j}\, 12.52$

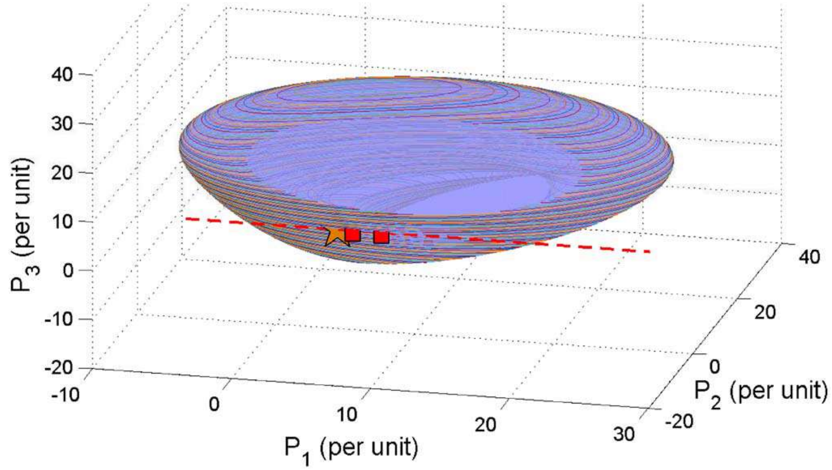


Molzahn DK, Hiskens IA. Convex relaxations of optimal power flow problems: An illustrative example. IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers. 2016, 63(5):650-660.

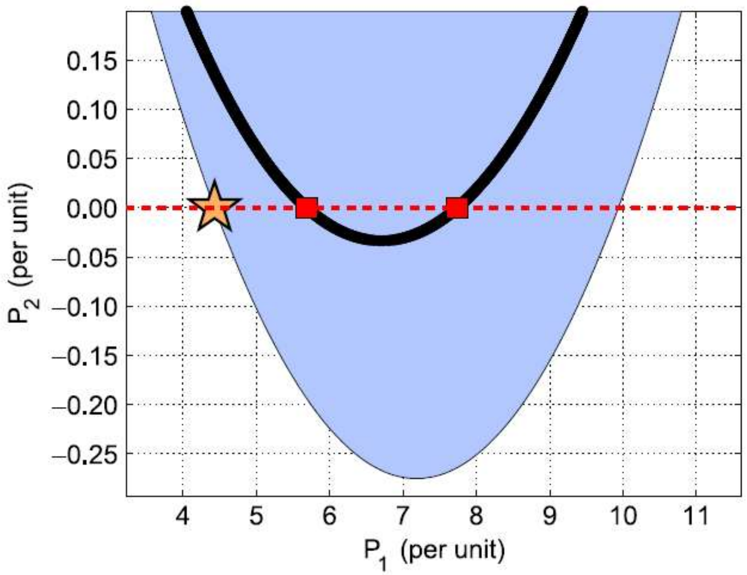
4.5 简单潮流问题举例

3节点系统





$e_1 + \mathbf{j}\, f_1$	$1.000 + \mathbf{j}\, 0.000$
$e_2 + \mathbf{j}\, f_2$	$1.049 - \mathbf{j}\, 0.767$
$e_3 + \mathbf{j}\, f_3$	$0.849 - \mathbf{j}\, 0.586$
$P_1 + \mathbf{j}\, Q_1$	$5.68 - \mathbf{j}\, 7.77$
$P_2 + \mathbf{j}\, Q_2$	$0.00 + \mathbf{j}\, 12.52$
$P_3 + \mathbf{j}\, Q_3$	$0.000 + \mathbf{j}\, 0.000$



基本知识点

- 会判断简单集合的凸性
- 理解线性锥规划的推导过程
- 会写SDP、SOCP的对偶问题
- 理解“松弛”方法的思路

- **环状电网最优潮流的SDP松弛**

  Lavaei J , Low S . Zero duality gap in optimal power flow problem. IEEE Trans. Power Syst. 2012, 27(1): 92-107

- **辐射状电网最优潮流的SOCP松弛**

  Wei W, Wang J, Li N, et al. Optimal power flow of radial networks and its variations: A sequential convex optimization approach. IEEE Trans. Smart Grid, 2017, 8(6): 2974-2987.