$f(t)\quad (t>0_-)$	$F(s)=\mathcal{L}[f(t)]$
$\delta(t)$	1
$u(t)$	$\frac{1}{s}$
$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{s+\alpha}$
t^n （n 为整数）	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$\sin\omega_0 t$	$\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$
$\cos\omega_0 t$	$\frac{s}{s^2+\omega_0^2}$
$e^{-\alpha t}\sin\omega_0 t$	$\frac{\omega_0}{(s+\alpha)^2+\omega_0^2}$
$e^{-\alpha t}\cos\omega_0 t$	$\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega_0^2}$
$t^n e^{-\alpha t}$ （n 为整数）	$\frac{n!}{(s+\alpha)^{n+1}}$

$\frac{1}{sC}$ 和 sL

Mason公式

$$G=\frac{\sum_k G_k\Delta_k}{\Delta}$$

G —— 从输入节点到输出节点的总增益（系统传递函数）

$\Delta = 1 - \Sigma L_i + \Sigma L_a L_b - \Sigma L_a L_\beta L_\gamma + \dots$

L_i —— 一个回路的总增益

L_aL_b —— 两两互不接触的回路的总增益

$L_aL_\beta L_\gamma$ —— 三个互不接触的回路的总增益

G_k —— 第k条通道从输入到输出的总增益

Δ_k —— Δ中去掉与第k条通道接触的部分

单个回路有：$-g_1h_3$，$-g_2h_2$，$-g_3h_1$，$-g_4g_5h_1h_2h_3$，$-h_4$，其中两两互不接触回路有$-g_1h_3$与$-g_3h_1$，$-h_4$与$-g_1h_3$，$-h_4$与$-g_2h_2$，$-h_4$与$-g_3h_1$，三个互不接触回路有$-h_4$，$-g_1h_3$，$-g_3h_1$

通道有：$g_1g_2g_3g_4$，该通道与回路$-h_4$不接触，故 $\Delta_1=1+h_4$

$-g_4g_5$，该通道与回路$-g_2h_2$不接触，故 $\Delta_2=1+g_2h_2$

根据 Mason 公式，

名称	关系式，其中：$\mathcal{L}[f(t)]=F(s)$，$\mathcal{L}[f_1(t)]=F_1(s)$，$\mathcal{L}[f_2(t)]=F_2(s)$
线性特性	$\mathcal{L}[Af_1(t)+Bf_2(t)]=AF_1(s)+BF_2(s)$
尺度特性	$\mathcal{L}[f(at)]=\frac{1}{a}F(\frac{s}{a})$
时域平移特性	$\mathcal{L}[f(t-t_0)u(t-t_0)]=e^{-st_0}F(s)$，$t_0>0$
s 域平移特性	$\mathcal{L}[f(t)e^{-s_0t}]=F(s+s_0)$
时域微分特性	$\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}f(t)\right]=sF(s)-f(0_-)$ $\mathcal{L}\left[\frac{d^n}{d^nt}f(t)\right]=s^nF(s)-s^{n-1}f(0_-)-s^{n-2}f'(0_-)-\cdots-f^{n-1}(0_-)$
时域积分特性	$\mathcal{L}\left[\int_{-\infty}^{t}f(x)dx\right]=\frac{1}{s}F(s)+\frac{1}{s}f^{(-1)}(0_-)$
时域卷积特性	$\mathcal{L}[f_1(t)*f_2(t)]=F_1(s)F_2(s)$
时域相乘特性	$\mathcal{L}[f_1(t)f_2(t)]=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}F_1(p)F_2(s-p)dp$
初值定理	$\lim_{t\to0_+}f(t)=\lim_{s\to\infty}sF(s)$
终值定理	$\lim_{t\to\infty}f(t)=\lim_{s\to0}sF(s)$
s 域微分特性	$\mathcal{L}[-tf(t)]=\frac{d}{ds}F(s)$
积分特性	$\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right]=\int_s^{\infty}F(s)ds$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot A^*=\frac{1}{a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}\cdot a_{21}}\cdot\begin{bmatrix}a_{22} & -a_{12}\\ -a_{21} & a_{11}\end{bmatrix}$$

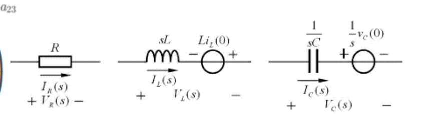
$$|A|=a_{11}\times a_{22}\times a_{33}+a_{12}\times a_{23}\times a_{31}+a_{13}\times a_{21}\times a_{32}-a_{31}\times a_{22}\times a_{13}-a_{21}\times a_{12}\times a_{33}-a_{11}\times a_{32}\times a_{23}$$

a_{ij}的余子式就是去除第i行和第j列剩余矩阵的行列式。

代数余子式是余子式乘以-1的i+j次方。

例如a_{11}的代数余子式就是$M_{a11}=(-1)^{1+1}\left|\begin{pmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}\right|$

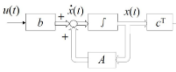
$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix}M_{a11} & M_{a21} & M_{a31}\\ M_{a12} & M_{a22} & M_{a32}\\ M_{a13} & M_{a23} & M_{a33}\end{pmatrix}$$



由状态空间方程到传递函数

设SISO系统

$$\dot{x}=Ax+bu$$
$$y=c^Tx$$



单输入单输出系统(SISO)

Laplace变换

$$sX(s)-x(0)=AX(s)+bU(s)$$
$$Y(s)=c^TX(s)$$
$$Y(s)=c^T(sI-A)^{-1}[x(0)+bU(s)]$$

令初值 $x(0)=0$

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=c^T(sI-A)^{-1}b$$

单输入系统 1阶线性定常状态方程

$$\dot{x}=ax+bu\qquad sX(s)-x(0)=aX(s)+bU(s)$$

$$X(s)=\frac{1}{s-a}x(0)+\frac{1}{s-a}bU(s)$$

“频域相乘，时域相卷”

$$x(t)=e^{at}x(0)+\int_0^t e^{a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau$$

其中定积分：$\int_0^t e^{-a\tau}bu(\tau)d\tau$ 可通过数值求解

令 $h(t)=\int_0^t e^{-a\tau}bu(\tau)d\tau$ ，则 $\dot{h}(t)=e^{-at}bu(t)$

多输入系统n阶线性定常状态方程

$$\dot{x}=Ax+Bu$$

$$X(s)=(sI-A)^{-1}X(0)+(sI-A)^{-1}BU(s)$$

$$x(t)=\underbrace{e^{At}X(0)}_{\text{零输入响应}}+\underbrace{\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau}_{\text{零状态响应}}$$

e^{At} 称为矩阵指数函数

$$e^{At}=1+At+\frac{1}{2!}A^2t^2+\cdots+\frac{1}{k!}A^kt^k+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}A^kt^k$$

一般的n阶状态方程，状态响应

$$x(t)=\Phi(t)X(0)+\int_0^t\Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau$$

$\Phi(t)$ 称为状态转移矩阵

对线性定常系统 $\Phi(t)=e^{At}=L^{-1}[(sI-A)^{-1}]$

1. 极点为单根的情况：

$$F(s)=\frac{A_1}{s-p_1}+\frac{A_2}{s-p_2}+\quad+\frac{A_p}{s-p_k}$$

$A_i=[(s-p_i)F(s)]_{s=p_i}$ 实数极点

$$f(t)=A_1e^{p_1t}+A_2e^{p_2t}+\quad+A_ke^{p_kt}$$

复数极点

$$F(s)=\frac{A}{s-\alpha-j\beta}+\frac{B}{s-\alpha+j\beta}$$

$A=(s-\alpha-j\beta)F(s)|_{s=\alpha+j\beta}$

$B=(s-\alpha+j\beta)F(s)|_{s=\alpha-j\beta}$

$$f(t)=Ae^{\alpha+j\beta t}+Be^{\alpha-j\beta t}=Ce^{\alpha t}\cos\beta t+De^{\alpha t}\sin\beta t$$

极点为重根的情况：

$$F(s)=\frac{A_1}{(s-p_1)^k}+\frac{A_2}{(s-p_1)^{k-1}}+\quad+\frac{A_k}{s-p_1}$$

$$\mathcal{L}[-tf(t)]=\frac{d}{ds}F(s)$$

$A_1=(s-p_1)^kF(s)|_{s=p_1}$

$A_2=\left[\frac{d}{ds}\left[(s-p_1)^kF(s)\right]\right]_{s=p_1}$

$A_3=\left[\frac{1}{2!}\frac{d^2}{ds^2}\left[(s-p_1)^kF(s)\right]\right]_{s=p_1}$

$A_k=\left[\frac{1}{(k-1)!}\frac{d^{k-1}}{ds^{k-1}}\left[(s-p_1)^kF(s)\right]\right]_{s=p_1}$

$$f(t)=\frac{A_1}{(k-1)!}t^{k-1}e^{p_1t}+\frac{A_2}{(k-2)!}t^{k-2}e^{p_1t}+\quad+A_ke^{p_1t}$$

- BIBO稳定

  > 输入输出角度，外稳定，工程测试稳定性方法
  >
  > 定义: 如果系统对任何一个有界输入必然产生一个有界输出， 则称该系统为BIBO稳定
  >
  > 对线性定常系统， 若系统单位冲激响应 limk(t)=0,则系统是稳定的。
  >
  > 等价： 对线性定常系统， 若系统**传递函数的极点**都在s平面的左半开平面 ， 则系统是稳定的。
  >
  > 证明：对应左半S平面的模态$e^{-\lambda t}$必然衰减到0。

★如果传递函数存在零极点相消，且相消的零极点在S右半平面，则即使系统BIBO稳定也不是渐近稳定，系统内部存在不稳定模态。

- 渐近稳定

  > 系统状态角度，渐近稳定是工程意义上的稳定，临界稳定是工程不稳定
  >
  > 定义：有限初值，最终回到平衡点。
  >
  > 等价：线性定常系统，它的**特征方程的全部根**均具有负实部， 或全部位于S平面的左半开平面。
  >
  > > 传递函数的极点和特征方程的根不是一样吗？ $G(s)=\frac{N(s)}{D(s)}$ $D(s)=0$

- Lyapunov稳定 $\dot{x}=Ax+Bu$ $|sI-A|=0$

  > 内稳定，输入输出有界，状态量也有要有界，且给出界。
  >
  > 定义：对平衡状态，有限初始值，有限运动范围。进一步用$\varepsilon-\delta$语言，范数去描述

  - Routh表第一列出现零元素：δ^+
  - Routh表中某一行全为零：前一行系数构造辅助多项式，求导，系数替换。

为什么说明特征方程具有关于S平面原点对称的根?

劳斯阵中某一行元素全为零，这表明特征方程具有大小相等而位置关于原点径向相反的根. 系统处于临界稳定或者不稳定. 或大小相等符号相反的一对实根，或一对共轭虚根，或对称于虚轴的两对共轭复根. 基本碰不到这种情况, 这里

辅助方程的根也是原特征方程的根，$4s^2+4=4(s+j)(s-j)=0$，辅助方程有一对根为$\pm j$，故系统有一对根在虚轴上，系统不是渐近稳定，也不是工程意义的稳定。

稳定判据（1）

$$a_0s^n+a_1s^{n-1}+\cdots+a_{n-1}s+a_n=0$$

系统稳定的必要条件是特征方程各项系数全为正，不缺项。

2阶系统所有系数为正（或同号）系统稳定。

$$a_0s^2+a_1s+a_2=0$$

3阶系统所有系数为正，且$a_1a_2>a_0a_3$，系统稳定

$$a_0s^3+a_1s^2+a_2s+a_3=0$$

Routh表 $a_0s^n+a_1s^{n-1}+\cdots+a_{n-1}s+a_n=0$

s^n	a_0	a_2	a_4	…
s^{n-1}	a_1	a_3	a_5	…
s^{n-2}	$b_1=\frac{a_1a_2-a_0a_3}{a_1}$	$b_2=\frac{a_1a_4-a_0a_5}{a_1}$	$b_3=\cdots$	…
s^{n-3}	$c_1=\frac{b_1a_3-a_1b_2}{b_1}$	$c_2=\frac{b_1a_5-a_1b_3}{b_1}$	$c_3=\cdots$	…
…	…	…	…	…
s^0	…	0	0	0

系统稳定的充要条件是Routh表中第一列元素均为正。

特征方程具有正实部根的个数等于Routh表第一列中系数改变符号的次数。

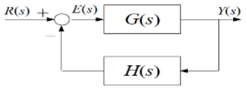
开环传递函数

$$G_0(s)=G(s)H(s)=\underbrace{\frac{K\prod_{i=1}^{m}(T_is+1)}{s^r\prod_{j=1}^{v}(\tau_js+1)}}_{\text{尾一标准型}}=\underbrace{\frac{K'\prod_{i=1}^{m}(s+z_i)}{s^r\prod_{j=1}^{v}(s+p_j)}}_{\text{首一标准型}}$$

开环放大倍数 $K=\lim_{s\to0}s^rG_0(s)$

利用Laplace变换**终值定理** $e_{ss}=\lim\limits_{t\to\infty}e(t)=\lim\limits_{s\to 0}sE(s)$

条件：$sE(s)$ 极点位于左半开平面，或$e(t)$有极限。



按输入误差定义 $E(s)=\dfrac{1}{1+G(s)H(s)}R(s)=\dfrac{R(s)}{1+G_0(s)}$

$$e_{ss}=\lim_{s\to 0}sE(s)=\lim_{s\to 0}\frac{sR(s)}{1+G_0(s)}$$

计算稳态误差以前，**检查系统是否稳定是必要的**。

1、单位阶跃输入 $R(s)=\dfrac{1}{s}$ 也不存在稳态误差。

$$e_{ss}=\lim_{s\to 0}\frac{sR(s)}{1+G_0(s)}=\lim_{s\to 0}\frac{1}{1+G_0(s)}=\frac{1}{1+G_0(0)}=\frac{1}{1+K_p}$$

位置误差系数 $K_p=\lim\limits_{s\to 0}G_0(s)$

$r=0$ $K_p=K$ $e_{ss}=\dfrac{1}{1+K}$ 有差系统

$r\geq 1$ $K_p\to\infty$ $e_{ss}=0$ 无差系统

2、单位斜坡输入 $R(s)=\dfrac{1}{s^2}$ $s^r\prod_{j=1}(\tau$

$$e_{ss}=\lim_{s\to 0}\frac{s\cdot\frac{1}{s^2}}{1+G_0(s)}=\lim_{s\to 0}\frac{1}{s[1+G_0(s)]}=\lim_{s\to 0}\frac{1}{sG_0(s)}=\frac{1}{K_v}$$

$r=0$ $K_v=0$ $e_{ss}\to\infty$ 速度误差系数

$r=1$ $K_v=K$ $e_{ss}=\dfrac{1}{K}$ $K_v=\lim\limits_{s\to 0}sG_0(s)$

$r=2$ $K_v\to\infty$ $e_{ss}=0$

要减小稳态误差，必须增加开环总增益k或积分环节数r
但是，这可能给动态性能或稳定性带来问题