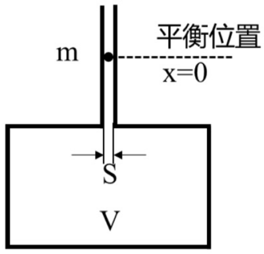
热力学大作业

1. 理论计算

一定量的刚性双原子分子理想气体储于一容器中，容器延伸出一根细管，细管截面积为S。现有质量为m的光滑小球置于细管中，球和管气密接触，形成一个小活塞。当小球处于平衡位置时，容积为V。外部的大气压为P_0。若将小球稍微偏离平衡位置，则球在平衡位置附近进行振动(设容器隔热良好，振动时瓶内气体系统可视为准静态过程)。(P_0=101 kPa，g=9.8 m/s^2，学号最后三位为abc， m=(10+a) g， S=(1+b/10) cm^2， V=(1+c) L，例如学号2023012691，a=6，b=9，c=1)

(1)求小球的振动周期?（请先列出表达式，再求解）

(2)如果将双原子分子理想气体换成单原子分子的理想气体，其他条件不变，问此时的小球的振动周期为多少?



学号为 2022010311 ⇒ abc = 311

已知：$P_0 = 101kPa$，$g = 9.8m/s^2$，$m = 13g$，$S = 1.1cm^2$，$V = 2L$

(1) 刚性双原子分子 $\gamma = 1.4$

由绝热过程的理想气体状态方程得

$$PV^{1.4} = C \quad \cdots\cdots ①$$

$$P = \frac{C}{V^{1.4}} \quad \cdots\cdots ②$$

小球稍微偏离，则 $dx \to 0$，$dv \to 0$

$$\frac{dP}{dV} = -1.4\frac{C}{V^{2.4}} \quad \cdots\cdots ③$$

把 $dP = \frac{dF}{S}$ 以及 $dV = Sdx$ 代入③式可得

$$\frac{dF}{S^2dx} = -1.4\frac{C}{V^{2.4}} \quad \cdots\cdots ④$$

其中振动的劲度系数 $k = \left|\frac{dF}{dx}\right|$，即

$$k = \left|\frac{dF}{dx}\right| = 1.4S^2\frac{C}{V^{2.4}} \quad \cdots\cdots ⑤$$

再把①式代回⑤式可得

$$k = 1.4S^2\frac{P}{V} \quad \cdots\cdots ⑥$$

同时，对小球受力分析可得

$$(P - P_0)S = mg$$

$$P = P_0 + \frac{mg}{S} \quad \cdots\cdots ⑦$$

把⑦式代入⑥得

$$k = 1.4S^2\frac{P_0 + \frac{mg}{S}}{V} \quad \cdots\cdots ⑧$$

因此振动频率

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{1.4S^2\frac{P_0+\frac{mg}{S}}{V}}{m}} = \sqrt{\frac{1.4S(P_0S+mg)}{mV}}$$

振动周期表达式

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{mV}{1.4S(P_0S+mg)}}$$

$$T_1 = 2\pi \times \sqrt{\frac{13\times10^{-3}\times2}{1.4\times1.1\times10^{-4}\times(101\times10^3\times1.1\times10^{-4}+13\times10^{-3}\times9.8)}}$$

$$= 24.35s$$

第二问见下页

(2) 刚性单原子分子 $\gamma = 1.67$

振动周期表达式的推导与(1)中相同，其中 $1.4 \rightarrow 1.67$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{mV}{1.67\,S(P_0 S + mg)}}$$

$$T_2 = 2\pi \times \sqrt{\frac{13\times10^{-3}\times 2}{1.67\times1.1\times10^{-4}\times(101\times10^{3}\times1.1\times10^{-4}+13\times10^{-3}\times9.8)}}$$

$$= 22.29\ s$$