网络矩阵和功率方程

#电力系统分析 #郭庆来

> *本章要点*
>
> - *如何建立网络方程（从物理模型到数学模型）*
> - *如何形成网络矩阵?*
> - *如何导出功率方程（潮流方程）？*
> - *如何理解功率方程的物理本质?*

如何建立网络方程?

基本过程

电力网络包含两个要素：元件 + 联结关系

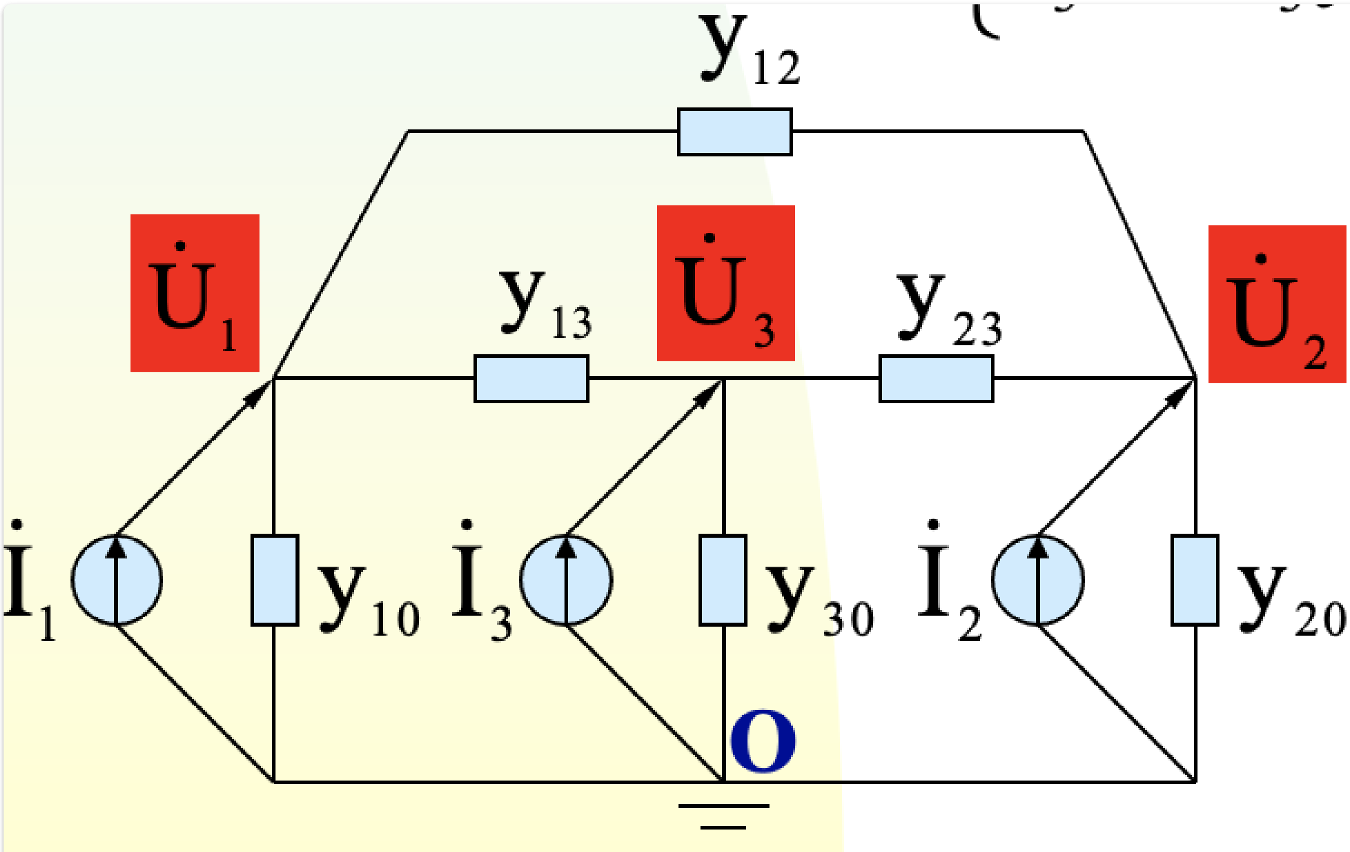
- 元件特性约束：表现为欧姆定律 $\dot{U}_b = Z_b\dot{I}_b$，与元件如何联结无关
- 联结关系约束：表现为KCL和KVL，把元件抽象为支路，重点关注它们之间的关联关系，与某一个元件的具体特性无关
  将元件特性方程和联结关系组合在一起，就得到了网络方程

从物理模型到等值电路

- 线路、变压器：Π型等值标幺电路
- 节点注入功率：每个节点的发电机功率（取+)和负荷功率（取-）叠加在一起
- 采用节点注入电流描述：线性电路

节点方程形成方法

基本方法：节点电压法，*已知量为节点注入电流，待求量为节点电压*



有KCL定律可得

$$\begin{cases} \dot{I}_1 &= \dot{U}_1 y_{10} &+ (\dot{U}_1 - \dot{U}_2) y_{12} &+ (\dot{U}_1 - \dot{U}_3) y_{13} \\ \dot{I}_2 &= \dot{U}_2 y_{20} &+ (\dot{U}_2 - \dot{U}_1) y_{12} &+ (\dot{U}_2 - \dot{U}_3) y_{23} \\ \dot{I}_3 &= \dot{U}_3 y_{30} &+ (\dot{U}_3 - \dot{U}_1) y_{13} &+ (\dot{U}_3 - \dot{U}_2) y_{23} \end{cases} \tag{1}$$

整理成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \\ \dot{I}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \\ \dot{U}_3 \end{bmatrix} \tag{2}$$

不难发现：

$$Y_{11} = y_{10} + y_{12} + y_{13}$$

$$Y_{12} = -y_{12}$$

其他对角元、非对角元类似。

从公式（2）我们可以定义：

$$\dot{I}_n = Y_n \dot{U}_n$$

其中：$\dot{I}_n$为节点电流列向量，$\dot{U}_n$为节点电压列向量，Y_n为节点导纳矩阵
此处的n为独立节点个数，不包括参考节点；

我们也可以定义$Z_n=Y_n^{-1}$为节点阻抗矩阵。注意为何这两个矩阵一个叫做导纳矩阵？一个叫做阻抗矩阵？

Y_n和Z_n表征了$\dot{I}_n$和$\dot{U}_n$之间的关系，同时包含了支路特性和网络拓扑约束，是描述网络的数学工具：网络矩阵

节点导纳矩阵 Y_n

- Y_{ii}：节点i的自导纳，表示节点i所连接的所有支路导纳之和 （包含并联接地支路）
- Y_{ij}：节点i、j的互导纳，$i-j$之间支路导纳负值
- 注意，如果$i-j$之间没有直联的支路，那么$Y_{ij}=0$。

> *重要*
> *Y_n矩阵中非零元的分布和电网拓扑图中的支路分布有一一对应的关系*
> *理解：为何Y_n矩阵是一个稀疏矩阵?*

节点导纳矩阵的物理意义

理解Y_n矩阵每个元素的物理意义：
在第i个节点加单位电压源，其他节点都接地（短路参数）

- 对角元 Y_{ii} ：此时在节点 i测到的节点注入电流
- 非对角元 Y_{ji}（数值上等于Y_{ij}）：此时在节点j上测到的节点注入电流

节点导纳矩阵的形成

可以认为是每条支路贡献的叠加

- 每条串联支路$i-j$对于节点导纳矩阵贡献四个元素：对角元（Y_{ii}、Y_{jj}）为 y_l，非对角元（Y_{ij}、Y_{ji}）为$-y_l$
- 每条并联支路（接地支路 $i-O$），对于节点导纳矩阵贡献一个元素：对角元 $Y_{ii}=y_l$

节点导纳矩阵的性质

- 性质1：$n\times n$阶对称复数矩阵（前提是没有复变比的移相器）
- 性质2：稀疏矩阵
- 性质3：有接地支路时非奇异，没有接地支路时奇异
- 性质4：所有支路阻抗性质相同时，对角线占优

节点阻抗矩阵 Z_n

Z_n为节点导纳矩阵Y_n的逆矩阵：$Z_n = Y_n^{-1}$
因此：

$$\dot{U}_n = Z_n \dot{I}_n$$

节点阻抗矩阵的物理意义

理解Z_n矩阵每个元素的物理意义：
在第i个节点加单位电流源，其他节点都开路（开路参数）

- 对角元 Z_{ii} ：节点自阻抗，此时在节点 i测到的节点电压
- 非对角元 Z_{ji}（数值上等于Z_{ij}）：节点$i-j$之间的互阻抗，此时在节点j上测到的节点电压

节点阻抗矩阵的性质

- 性质1：有接地支路时，为$n \times n$阶**对称复数矩阵**，和节点导纳矩阵Y_n互逆
- 性质2：对于连通网络，是一个**满阵** （如何从物理意义上去理解？）
- 性质3：对于无源网，一般对角线占优：$|Z_{ii}| \geq |Z_{ij}|$ (对于元件的要求？）

节点阻抗矩阵的生成方法

- 导纳阵求逆
- 支路追加法
- 定义法（根据物理意义）

功率方程（潮流方程）

通过网络矩阵，我们已经能够描述一个网络，潮流计算就是要在这个网络之上，加上一个边界条件（给定一些已知量），然后求解网络的潮流分布（节点复电压和支路复功率）。
那么，潮流计算给定的边界条件是什么？不是节点上的复电流，而是节点注入的**复功率**

> *因此电力系统分析中，我们要研究**功率**（已知量）和**电压**（待求量）之间的关系，这就要建立**功率方程**，或称**潮流方程***

从节点电压方程，我们有：

$$\dot{I}_i = \sum_{j=1}^{n} Y_{ij} \dot{U}_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{3}$$

公式（3）中的等号，本质上体现的是电流平衡
将电流用复功率和复电压替代，（3）等价于

$$\frac{P_i - jQ_i}{\hat{\dot{U}}_i} = \sum_{j=1}^{n} Y_{ij}\dot{U}_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{4}$$

即：

$$P_i - jQ_i = \hat{\dot{U}}_i \sum_{j=1}^{n} Y_{ij}\dot{U}_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{5}$$

公式（5）中的等号，体现的功率平衡。
注意公式（5）中的 $j = 1 \rightarrow n$，其中包含了 $j = i$，当$j = i$时，后面对应的是对角元Y_{ii}

公式（5）是一个复数方程，里面的复数变量（$\dot{U}_i$，$\dot{U}_j$，Y_{ij}）可以用直角坐标表示，也可以用极坐标表示。

直角坐标方程

令：$Y_{ij} = G_{ij} + jB_{ij}$，$\dot{U}_i = e_i + jf_i$，$\dot{U}_j = e_j + jf_j$
可以将公式（5）推导得到：

$$\begin{gathered} \Delta P_i = P_i - (e_i a_i + f_i b_i) = 0 \\ \Delta Q_i = Q_i - (f_i a_i - e_i b_i) = 0 \end{gathered} \tag{6}$$

其中

$$\begin{aligned} a_i &= \sum_{j=1}^{n} (G_{ij} e_j - B_{ij} f_j) \\ b_i &= \sum_{j=1}^{n} (G_{ij} f_j + B_{ij} e_j) \end{aligned}$$

注意，公式（6）不再是复数方程，而是$2n$组实数方程（实部相等 + 虚部相等）

极坐标方程

令：$Y_{ij} = G_{ij} + jB_{ij}$，$\dot{U}_i = U_i e^{j\delta i}$，$\dot{U}_j = U_j e^{j\delta j}$
可以将公式（5）推导得到：

$$\begin{aligned} \Delta P_i &= P_i - U_i \sum_{j=1}^{n} U_j (G_{ij} \cos\delta_{ij} + B_{ij} \sin\delta_{ij}) = 0 \\ \Delta Q_i &= Q_i + U_i \sum_{j=1}^{n} U_j (B_{ij} \cos\delta_{ij} - G_{ij} \sin\delta_{ij}) = 0 \end{aligned} \tag{7}$$

注意，这里面都之和 δ_{ij}相关，是相角差，所以必须给出一个相角的参考点，否则（7）式是无法求解的。

实际潮流方程

要点

1. 实际潮流方程中给定的边界条件?
2. 什么样的潮流解从工程上具有意义?

直角坐标方程

$$\begin{aligned}\Delta P_i = P_i - (e_i a_i + f_i b_i) = 0 \\ \Delta Q_i = Q_i - (f_i a_i - e_i b_i) = 0\end{aligned} \tag{8}$$

其中

$$\begin{aligned}a_i = \sum_{j=1}^{n}(G_{ij}e_j - B_{ij}f_j) \\ b_i = \sum_{j=1}^{n}(G_{ij}f_j + B_{ij}e_j)\end{aligned} \tag{9}$$

极坐标方程

令：$Y_{ij} = G_{ij} + jB_{ij}$，$\dot{U}_i = U_i e^{j\delta_i}$，$\dot{U}_j = U_j e^{j\delta_j}$

$$\begin{aligned}\Delta P_i = P_i - U_i \sum_{j=1}^{n} U_j(G_{ij}\cos\delta_{ij} + B_{ij}\sin\delta_{ij}) = 0 \\ \Delta Q_i = Q_i + U_i \sum_{j=1}^{n} U_j(B_{ij}\cos\delta_{ij} - G_{ij}\sin\delta_{ij}) = 0\end{aligned} \tag{10}$$

思考：目前都是$2n$个未知数（直角坐标下（e_i, f_i)，极坐标下(U_i, δ_i)），同时有$2n$个方程，是那么是否就可以直接求解了呢？并非如此，在实际潮流计算中，给定什么是已知变量，什么是待求变量，与工程实际需求相关。

分析已知量与待求量

每个节点i有四个运行变量

- 复功率（2个变量）
  -- 有功功率 $P_i(= P_{Gi} - P_{Di})$，无功功率 $Q_i(= Q_{Gi} - Q_{Di})$

- 复电压（2个变量）-- 状态变量，能够确定系统状态的最小一组变量
  --极坐标下：U_i , δ_i
  --直角坐标下：e_i, f_i

所以全系统一共$4n$个变量，有$2n$个方程，也就意味着，需要给定$2n$个求解另外$2n$个，一般来说*每个节点都给定2个变量*

实际中如何给定，依赖于这个节点处于何种工作状态，也就是由**节点类型**决定

节点类型

PQ节点

- 给定节点的 P_i和Q_i
- 一般对应负荷节点，其 P_i和Q_i由负荷需求确定，不可控，属于给定的已知变量。
- 少数发电机节点（没有安装AVR），也作为PQ节点，给定发电机的有功和无功出力
- 电网中还有很多的联络节点，无注入功率，也要建模为PQ节点，$P_i = Q_i = 0$

PV节点

- 给定节点的 P_i和U_i
- 主要是大型的发电机节点，其有功输出由原动机输出功率决定，可控可设定，机端电压由AVR控制，可以*维持不变*（思考，通过调节什么维持不变？），因此给定U_i作为已知量，而其相角δ_i和无功Q_i待求
- 注意，一些情况下，PV节点和PQ节点会相互转化。比如如果发电机无功已经搭界，不能够在提供更多支持来保持机端电压不变，此时就无法再继续作为一个PV节点存在，而是应该转化为一个PQ节点，其中无功给定值就是其限值Q_{max}或者Q_{min}

$V\delta$节点 (平衡节点)

为什么潮流分析必须要有平衡节点？（为什么不能给定所有节点的P和Q）？

- 电力系统最终功率必须平衡，但是功率流是有损流，也就意味着随着功率的输送，一定有一部分功率在传输过程中损耗掉了。
- 以有功为例： $P_G = P_D + P_{Loss}$
- 而传输过程中损失的有功网损，实际上是(U, δ)的函数

$$P_{loss}(U,\delta) = \sum_{i=1}^{n} P_i = \sum_{i=1}^{n} U_i \sum_{j\in i} U_j G_{ij} \cos\delta_{ij}$$

- 这就意味着，只有当所有的状态变量(U,δ)都求出来之后，全网的网损才能最终确定，而在求解之前是事先未知的。所以，我们没有办法提前给定所有节点的有功P_i，否则就意味着我们已经提前知道P_{Loss}了。
- 因此至少有一个节点的有功P_i不能给定，一般我们选择为n号节点，它的有功最后要根据全网算出来的P_{Loss}来最后求得，用于实现全网的功率平衡，所以这个节点我们又称之为平衡节点
- 既然不能给定 P_i，那么就要改成给定别的已知量，一般我们选择给定它的相角δ_n，类似的，无功功率也有平衡问题，一般我们也会选择给定这个节点的电压幅值作为已知量U_n，所以这个节点又称之为$V\delta$节点或者$V\theta$节点
- 在给定δ_n时，方便起见，我们一般选择$\delta_n=0$，前面我们也提到，在极坐标方程下，只和相角差有关，不同相角的绝对值会导致无穷多组解，因此我们必须需要给定一个节点的相角作为参考点，此时这个$V\delta$节点就可以作为这样一个相角的参考点，因此又被称作参考节点

直角坐标方程

假设n个节点系统，其中1个平衡节点，r个PV节点，其他为PQ节点。

1. 有功方程 n-1 个
   - （PV节点和PQ节点共n-1个，每个节点的P都是给定量P_i^{SP}，对应一个方程）

$$\Delta P_i = P_i^{SP} - (e_i a_i + f_i b_i) = 0$$

2. 无功方程共n-1-r个

- （PQ节点共n-1-r个，每个节点的Q是给定量Q_i^{SP}，对应一个方程）

$$\Delta Q_i = Q_i^{SP} - (f_i a_i - e_i b_i) = 0$$

3. 电压方程r个

- 注意有r个PV节点，电压幅值U是给定量U_i^{SP}，但是在直角坐标下，幅值（模长）已知不等于实部和虚部已知，还需要列写关于电压的方程，共r个

$$\Delta U_i^2 = (U_i^{SP})^2 - (e_i^2 + f_i^2) = 0$$

  上面一共有2(n-1)个方程，要求解2(n-1)个未知量（第n个节点作为平衡节点，复电压已知，不需要求解了，因此没有和平衡节点相关的方程）
  注意：平衡节点变量还是会作为已知量出现在上述方程中（比如一条支路刚好对端节点是平衡节点，此时不能忽略）

上述方程求解完毕后，可以得到$x=[e_1,...,e_{n-1},f_1,...f_{n-1}]^T$
在所有节点的复电压都已知后，PV节点的无功、平衡节点的有功无功，都可以直接计算得到。

极坐标方程

与直角坐标相比，极坐标下由于PV节点的电压幅值已经作为已知量给出，无须求解，因此待求变量只剩下了 2(n-1)-r个，同样的，r个电压方程也不需要了，所以方程只剩下n-1个有功方程（PQ节点+PV节点）和n-1-r个无功方程（PQ节点）。

$$\Delta P_i = P_i^{SP} - U_i \sum_{j=1}^{n} U_j (G_{ij}\cos\delta_{ij} + B_{ij}\sin\delta_{ij}) = 0 \qquad i = 1,2,..,n-1$$
$$\Delta Q_i = Q_i^{SP} + U_i \sum_{j=1}^{n} U_j (B_{ij}\cos\delta_{ij} - G_{ij}\sin\delta_{ij}) = 0 \qquad i = 1,2,\ldots n-1-r$$

上述方程求解后，可以得到$x = [\delta_1,\ldots,\delta_{n-1},U_1,\ldots U_{n-1-r}]^T$
在所有节点的复电压都已知后，PV节点的无功、平衡节点的有功无功，都可以直接计算得到。

如何衡量一个潮流解在工程上是否合理?

作为非线性方程组，是可能有多组解的，我们希望求解得到的，是满足电力系统运行工程约束的解。主要的约束包括：

- 电源节点

$$\begin{aligned} P_{Gimin} \le P_{Gi} \le P_{Gimax} &\qquad (V\delta) \\ Q_{Gimin} \le Q_{Gi} \le Q_{Gimax} &\qquad (PV, V\delta) \end{aligned}$$

- 所有节点

$$U_{imin} \le U_i \le U_{imax}$$

- 重要线路(为满足稳定性要求)

$$|\delta_i - \delta_j| \le |\delta_i - \delta_j|_{max}$$

- 线路变压器功率

$$S_{ij} \le S_{ijmax}$$

  如果最终求解得到的潮流解无法满足上述约束条件，说明*给定的边界条件不合理*，需要修改给定值或者改变电网的拓扑结构