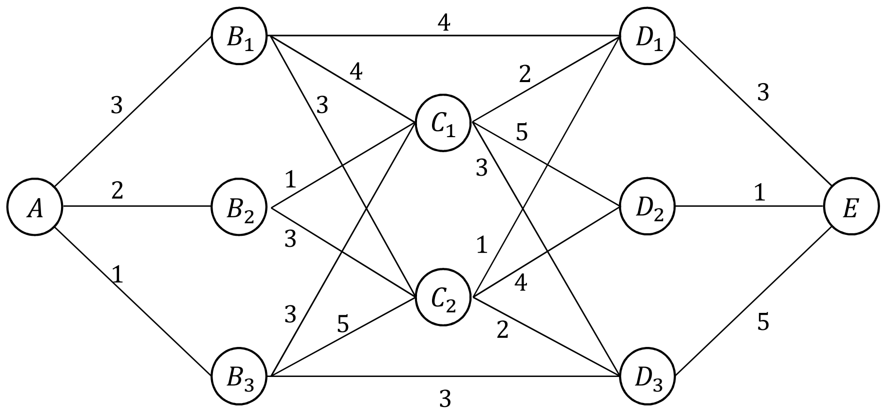
第八次作业

1. 我国投资外国电网项目, 需要从国内 A 地发送设备至该国 E 地。首先通过公路将设备运输至港口城市, 有 3 处港口可选; 目的地有 3 处港口可以入境, 再通过公路运至 E 地。国内若从港口 B_2 出发, 远洋货轮中途必须在 C_1 或 C_2 港补充燃料和淡水, 若从港口 B_1 或 B_3 出发, 即可直达港口 D_1 或 D_3，也可以途径 C_1 或 C_2 适当修整。每段运费如图所示，单位百万元。求从 A 到 E 运费最低的运输路径。



解 定义以下符号：

- $d(x,y)$：两个相邻港口 x 和 y 间的运费；
- $J^*(x)$：从港口 x 到目的地 E 的最优运费；
- $u^*(x)$：从港口 x 出发的下一站；

从目标国入境后

$$J^*(D_1)=3 \qquad u^*(D_1)=E$$
$$J^*(D_2)=1 \qquad u^*(D_2)=E$$
$$J^*(D_3)=5 \qquad u^*(D_3)=E$$

从 C_1 或 C_2 港出发

$$J^*(C_1)=\min\left\{\begin{matrix} d(C_1,D_1)+J^*(D_1) \\ d(C_1,D_2)+J^*(D_3) \\ d(C_1,D_3)+J^*(D_3) \end{matrix}\right\}=\min\left\{\begin{matrix} 2+3 \\ 5+1 \\ 3+5 \end{matrix}\right\}=5, \quad u^*(C_1)=D_1$$

$$J^*(C_2)=\min\left\{\begin{matrix} d(C_2,D_1)+J^*(D_1) \\ d(C_2,D_2)+J^*(D_3) \\ d(C_2,D_3)+J^*(D_3) \end{matrix}\right\}=\min\left\{\begin{matrix} 1+3 \\ 4+1 \\ 2+5 \end{matrix}\right\}=4, \quad u^*(C_2)=D_1$$

从 B_1，B_2 或 B_3 港出发

$$J^*(B_1) = \min \begin{Bmatrix} d(B_1, D_1) + J^*(D_1) \\ d(B_1, C_1) + J^*(C_1) \\ d(B_1, C_2) + J^*(C_2) \end{Bmatrix} = \min \begin{Bmatrix} 4+3 \\ 4+5 \\ 3+4 \end{Bmatrix} = 7, \quad u^*(B_1) = D_1/C_2$$

$$J^*(B_2) = \min \begin{Bmatrix} d(B_2, C_1) + J^*(C_1) \\ d(B_2, C_2) + J^*(C_2) \end{Bmatrix} = \min \begin{Bmatrix} 1+5 \\ 3+4 \end{Bmatrix} = 6, \quad u^*(B_2) = C_1$$

$$J^*(B_3) = \min \begin{Bmatrix} d(B_3, C_1) + J^*(C_1) \\ d(B_3, C_2) + J^*(C_2) \\ d(B_3, D_3) + J^*(D_3) \end{Bmatrix} = \min \begin{Bmatrix} 3+5 \\ 5+4 \\ 3+5 \end{Bmatrix} = 8, \quad u^*(B_1) = D_3/C_1$$

从 A 港出发

$$J^*(A) = \min \begin{Bmatrix} d(A, B_1) + J^*(B_1) \\ d(A, B_2) + J^*(B_2) \\ d(A, B_3) + J^*(B_3) \end{Bmatrix} = \min \begin{Bmatrix} 3+7 \\ 2+6 \\ 1+8 \end{Bmatrix} = 8, \quad u^*(A) = B_2$$

因此运输路径为 $A \to B_2 \to C_1 \to D_1 \to E$，运费为 8 百万元。 □

2. 用动态规划法求解以下问题

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 x_2^2 x_3 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ & x_1, x_2, x_3 \geqslant 0 \end{aligned}$$

解 将该问题视为一个三阶段决策，将 1 单位资源按 x_1, x_2, x_3 分到三个阶段，每个阶段得到相应的资源后，可靠性为 x_1, x_2^2, x_3，目标是最大化总可靠性。建立以下动态规划模型：

- 状态变量: s_1, s_2, s_3, s_4，表示每个阶段开始时剩余的可供分配的资源，初始状态 $s_1 = 1$；
- 动作：x_1, x_2, x_3 为决策变量；
- 状态方程：$s_{k+1} = s_k - x_k, k = 1, 2, 3$，根据约束条件有 $s_4 = 0, s_3 = x_3$；
- 可行集：每个阶段状态变量非负要求 $x_2 \in [0, s_2]$, $x_1 \in [0, s_1]$。

记 $J_k(s_k)$ 表示第 k 阶段在剩余 s_k 资源情况下后续阶段的最大可靠性，用逆推法

- 在第 3 阶段

$$J_3(s_3) = \max_{x_3 = s_3} \{x_3\} = s_3$$

最优解是 $x_3 = s_3$；

- 在第 2 阶段

$$J_2(s_2) = \max_{x_2 \in [0, s_2]} \{x_2^2 J_3(s_3)\} = \max_{x_2 \in [0, s_2]} \{x_2^2 (s_2 - x_2)\}$$

求导 $2x_2 s_2 - 3x_2^2 = 0$，舍去 0 解，最优解为 $x_2 = 2s_2/3$，$J_2(s_2) = 4s_2^3/27$；

- 在第 1 阶段

$$J_1(s_1) = \max_{u_1 \in [0, s_1]} \{x_1 J_2(s_2)\} = \frac{4}{27} \max_{u_1 \in [0, s_1]} \{x_1 (s_1 - x_1)^3\}$$

求导 $(s_1 - x_1)^3 - 3x_1(s_1 - x_1)^2 = 0$，最优解为 $x_1 = s_1/4$，$J_1(s_1) = s_1^4/64{=}1/64$；

- 现 x_1 已知，顺序推算各阶段的最优动作

$$x_1 = \frac{1}{4},\ x_2 = \frac{2s_2}{3} = \frac{1}{2},\ x_3 = \frac{1}{4}$$

将乘积目标函数取对数转化为 $\log x_1 + 2\log x_2 + \log x_3$ 亦可。 □

3. 一维坐标系上有一质点，初始坐标是 $x = -2$，速度为 $v = 1$，沿坐标系正方向，要求它经过 3 次控制抵达坐标原点保持静止，且控制能耗最小。建立以下最优控制问题：

$$\begin{aligned} \min\quad & u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 \\ \text{s.t.}\quad & x_{k+1} = x_k + v_k,\ k = 0:2 \\ & v_{k+1} = v_k + u_k,\ k = 0:2 \\ & x_3 = 0,\ v_3 = 0 \end{aligned}$$

用动态规划求解最优控制序列。

解 系统的状态变量是 $s_k = (x_k, v_k), k = 0:3$，末端状态固定。即 $J_k(s_k)$ 是第 k 阶段的剩余最低成本，采用逆推法

- 当 $k = 2$ 时

$$\begin{aligned} J_2(s_2) = \min\quad & u_2^2 \\ \text{s.t.}\quad & x_2 + v_2 = 0 \\ & v_2 + u_2 = 0 \end{aligned}$$

显然 $u_2^* = -v_2$，$J_2(s_2) = x_2^2$；

- 当 $k = 1$ 时

$$\begin{aligned} J_1(s_1) = \min\quad & u_1^2 + x_2^2 \\ \text{s.t.}\quad & x_2 = x_1 + v_1 \\ & v_2 = v_1 + u_1 \\ & x_2 + v_2 = 0 \end{aligned}$$

由约束条件直接可得

$$u_1 = -x_1 - 2v_1$$

因此

$$J(s_1) = 2x_1^2 + 6x_1v_1 + 5v_1^2$$

- 当 $k = 0$ 时

$$J(s_0) = \min_{u_0} u_0^2 + J(s_1) = \min_{u_0} \{u_0^2 + 2x_1^2 + 6x_1v_1 + 5v_1^2\}$$

将 $x_1 = x_0 + v_0$，$v_1 = v_0 + u_0$ 代入上式得

$$J(s_0) = \min_{u_0} \{u_0^2 + 2(x_0 + v_0)^2 + 6(x_0 + v_0)(v_0 + u_0) + 5(v_0 + u_0)^2\}$$

将初值 $x_0 = -2$，速度为 $v_0 = 1$ 代入

$$J(s_0) = \min_{u_0} \{6u_0^2 + 4u_0 + 1\}$$

显然，$u_0^* = -1/3$，$J(s_0) = 1/3$；

- 顺序推算各阶段的最优动作

$$x_1^* = x_0 + v_0 = -1$$
$$v_1^* = v_0 + u_0^* = 2/3$$
$$u_1^* = -x_1^* - 2v_1^* = -1/3$$
$$x_2^* = x_1^* + v_1^* = -1/3$$
$$v_2^* = v_1^* + u_1^* = 1/3$$
$$u_2^* = -v_2^* = -1/3$$

□

4. 公司在第 k 年的利润为 x_k，公司从中分配 u_k 给股东，并用剩余的 $x_k - u_k$ 投资新技术改进工艺。每投入 1 单位资金将在下一年给公司带来 θ 单位的利润增长，即 $x_{k+1} = x_k + \theta(x_k - u_k)$，其中 $x_0 \geqslant 0$ 且 $0 \leqslant u_k \leqslant x_k$，从而保证 $x_k \geqslant 0$。公司管理层的目标是最大化在 N 年内分配给股东的总金额，即：

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{k=0}^{N-1} u_k \\ \text{s.t.} \quad & x_{k+1} = x_k + \theta(x_k - u_k) \\ & 0 \leqslant u_k \leqslant x_k, \forall k \end{aligned}$$

用动态规划分析最优股东分红方案。

解：设 $J_k(x)$ 是第 k 阶段的最优剩余值函数，满足如下关系

$$J_k(x) = \max_{u \in U(x)} \{u + J_{k+1}[x + \theta(x-u)]\},\ J_N(x) = 0$$

对于 $k = N-1$，最优剩余值函数为：

$$J_{N-1}(x) = \max_{u \in [0,x]} \{u + J_N(x + \theta(x-u)\} = x$$

对于 $k = N-2$，最优剩余值函数为：

$$\begin{aligned} J_{N-2}(x) &= \max_{u \in [0,x]} \{u + J_{N-1}[x + \theta(x-u)]\} \\ &= \max_{u \in [0,x]} \{u + x + \theta(x-u)\} \end{aligned}$$

由于 $u + x + \theta(x-u)$ 是 u 的线性函数，其最大值出现在 $u = 0$ 或 $u = x$ 处，考虑到 $x \geq 0$，有：

$$J_{N-2}(x) = \max\{(1+\theta)x, 2x\} = \max\{1+\theta, 2\} \cdot x$$

根据这两个最优的成本函数，猜测 $J_k(x) = \alpha_k x$。用数学归纳法验证这个假设：

$$\begin{aligned} J_{k-1}(x) &= \max_{u \in [0,x]} \{u + J_k[x + \theta(x-u)]\} \\ &= \max_{u \in [0,x]} \{u + \alpha_k[x + \theta(x-u)]\} \\ &= \max\{(1+\theta)\alpha_k, 1 + \alpha_k\} \cdot x = \alpha_{k-1} x \end{aligned}$$

可见假设是正确的，α_k 满足以下反向递归关系：

$$\alpha_{k-1} = \alpha_k + \max\{\theta\alpha_k, 1\},\ \alpha_N = 0$$

由于 $\alpha_{k-1} - \alpha_k \geqslant 1$，数列 $\alpha_N, \alpha_{N-1}, \cdots$ 严格单增，对于接近 N 的 k，α_k 按照递推关系 $\alpha_{k-1} = \alpha_k + 1$ 变化，即 $\alpha_k = N - k$，此时最优控制为 $u_k^* = x_k$。该关系在 $k > \tilde{k}$ 时成立，其中：

$$\tilde{k} = \max\left\{k \in \mathbb{Z} : \alpha_k > \frac{1}{\theta}\right\} = \left\lfloor N - \frac{1}{\theta} \right\rfloor = N - \left\lceil \frac{1}{\theta} \right\rceil$$

对于 $k \leq \tilde{k}$，由于 α 严格增，$\alpha_k > 1/\theta$，因此 $\alpha_{k-1} = (1+\theta)\alpha_k$ 成立，对应的最优控制为 $u_k^* = 0$。这意味着如果 $N > \lceil 1/\theta \rceil$，公司在初期应将所有的利润投入以增加未来的利润，之后再进行分配，否则应将所有利润直接分配。

5. 经理决定采用上一题论证的最优策略，然而公司大部分股东需要周转资金，这些股东并不愿意长久等待一个未来的承诺，尽管这些承诺可能带来更丰厚的分红。于是，董事会炒掉了现任经理。

继任者改变了公司的政策，以便为股东提供更为稳定的分红。继任者选择的效用函数是 $\log(\cdot)$，因此新的最大化问题变成了：

$$\begin{aligned}
\max \quad & \sum_{k=0}^{N-1} \log(u_k) \\
\text{s.t.} \quad & x_{k+1} = x_k + \theta(x_k - u_k) \\
& 0 \leqslant u_k \leqslant x_k, \forall k
\end{aligned}$$

该目标函数等价于最大化 u_k 的乘积，因此单方面压缩任何一个 u_k 都不利于目标函数达到最大。设 $J_k(x)$ 是第 k 阶段的最优剩余值函数，满足如下关系

$$J_k(x) = \max_{u \in U(x)} \{\log(u) + J_{k+1}[x + \theta(x-u)]\},\ J_N(x) = 0$$

对于 $k = N-1$，最优剩余值函数为：

$$J_{N-1}(x) = \max_{u \in [0,x]} \{\log(u) + J_N(x + \theta(x-u)\} = \max_{u \in [0,x]} \{\log(u)\} = \log(x)$$

对于 $k = N-2$，最优剩余值函数为：

$$\begin{aligned}
J_{N-2}(x) &= \max_{u \in [0,x]} \{\log(u) + J_{N-1}[x + \theta(x-u)]\} \\
&= \max_{u \in [0,x]} \{\log(u) + \log[x + \theta(x-u)]\} \\
&= \max_{u \in [0,x]} \log\{u[x + \theta(x-u)]\}
\end{aligned}$$

该问题的最优解为

$$\frac{\partial}{\partial u}\{u[x + \theta(x-u)]\}_{u=\tilde{u}} = x + \theta x - 2\theta\tilde{u} = 0 \Rightarrow \tilde{u} = \frac{1+\theta}{2\theta}x$$

若 $\theta \geq 1$，$\tilde{u} \in [0,x]$ 故是最优解，值函数为

$$J_{N-2}(x) = \log\{(1+\theta)x\tilde{u} - \theta\tilde{u}^2\} = \log\left\{\frac{(1+\theta)^2}{4\theta}x^2\right\} = 2\log(x) + \log\left\{\frac{(1+\theta)^2}{4\theta}\right\}$$

否则，若 $\theta < 1$，最优解为 $u = x$，值函数为

$$J_{N-2}(x) = \log(x^2) = 2\log(x)$$

猜测剩余值函数为 $J_k(x) = \alpha_k \log(x) + \beta_k$。用数学归纳法验证这个猜想：

$$\begin{aligned}
J_{k-1}(x) &= \alpha_{k-1}\log(x) + \beta_{k-1} \\
&= \max_{0 \leq u \leq x} \{\log(u) + J_k(x + \theta(x-u))\} \\
&= \max_{0 \leq u \leq x} \{\underbrace{\log(u) + \alpha_k \log(x + \theta(x-u)) + \beta_k}_{=:g(u)}\}
\end{aligned}$$

由于 $g(u)$ 是 u 的凹函数，因此最优解是驻点或者可行区间的右端点 x，因为 $g(0)=-\infty$，左端点不可能是最优解。驻点为

$$\left.\frac{\partial g}{\partial u}\right|_{u=\tilde{u}_k}=\frac{1}{\tilde{u}_k}-\frac{\theta\alpha_k}{x+\theta(x-\tilde{u}_k)}=0\Rightarrow\tilde{u}_k=\frac{1+\theta}{\theta}\frac{x}{\alpha_k+1}$$

代入 $J_{k-1}(x)$ 表达式可得

$$\begin{aligned}J_{k-1}(x)&=\begin{cases}(\alpha_k+1)\log(x)+\beta_k & \tilde{u}_k>x\\(\alpha_k+1)\log(x)+h(\alpha_k,\beta_k) & \tilde{u}_k\le x\end{cases}\\&=\alpha_{k-1}\log(x)+\beta_{k-1}\end{aligned}$$

其中

$$h(\alpha_k,\beta_k)=\beta_k+\log\left(\frac{1+\theta}{\theta(\alpha_k+1)}\right)+\alpha_k\log\left[\frac{\alpha_k(1+\theta)}{\alpha_k+1}\right]$$

两种情况下，α_k 都满足以下反向递归关系：

$$\alpha_{k-1}=\alpha_k+1,\ \alpha_N=0\Rightarrow\alpha_k=N-k$$

最优分红策略为

$$u_k^*=\min\left\{1,\frac{1+\theta}{\theta(N-k+1)}\right\}x_k$$

类似地，当 $k>N-1/\theta$ 时，公司所有利润全部用于分红，不再投资新技术。