清華大学
Tsinghua University

运筹学

第七讲 鲁棒优化

魏韡

2025年5月14日

主要内容

1.1 不确定性的来源

- 确定性优化假设模型结构和参数精确已知
- 在大多数决策场合中总存在未知参数
  - 电力系统调度：风光发电能力受气象条件影响（约束右端项）
  - 发电商竞标：电力市场出清电价未知（目标函数系数）
  - 最优潮流：线路参数未知（约束函数系数）
- 系数微扰对优化结果的影响
  - 在90个线性规划标准算例中，有13个算例的系数发生0.01%扰动后，原问题的最优解在扰动问题中造成严重约束越界
  - 0.1%的系数扰动造成50%的最优解不可行

Ben-Tal A, Nemirovski A, El Ghaoui L. Robust Optimization. 2009.

1.2 含不确定参数的简单线性规划

标称模型

$$\max \quad z = x_1 + x_2$$
$$\text{s.t.} \quad ax_1 + bx_2 \le 12$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

当$a = 3, b = 4$时

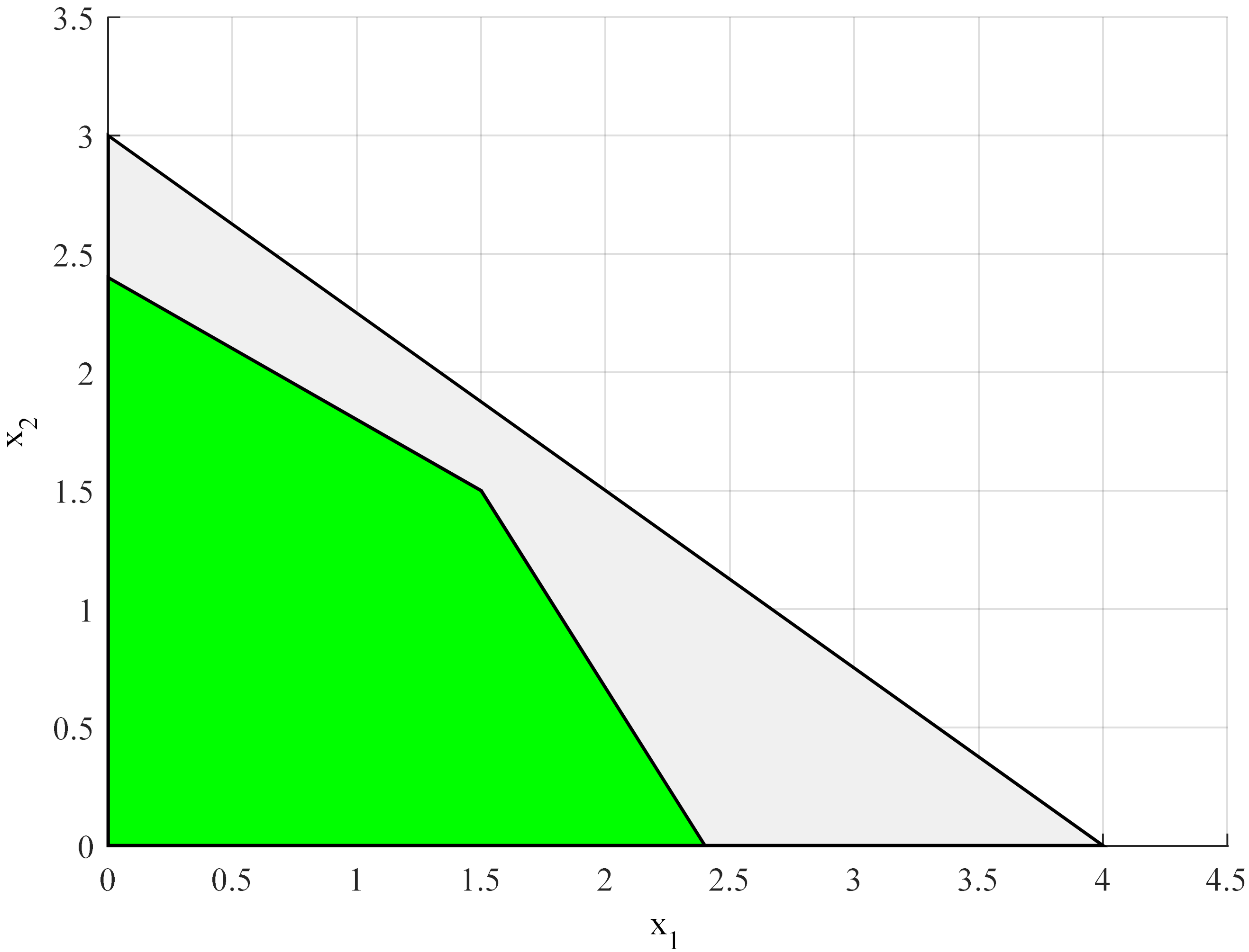
$$x^* = (4,0),\ z^* = 4$$

考虑不确定性: 当 (a, b) 在以下多面体 P 内变化时如何决策?

$$P = \{(a,b) \mid a \ge 2, b \ge 2, a + b \le 8\}$$

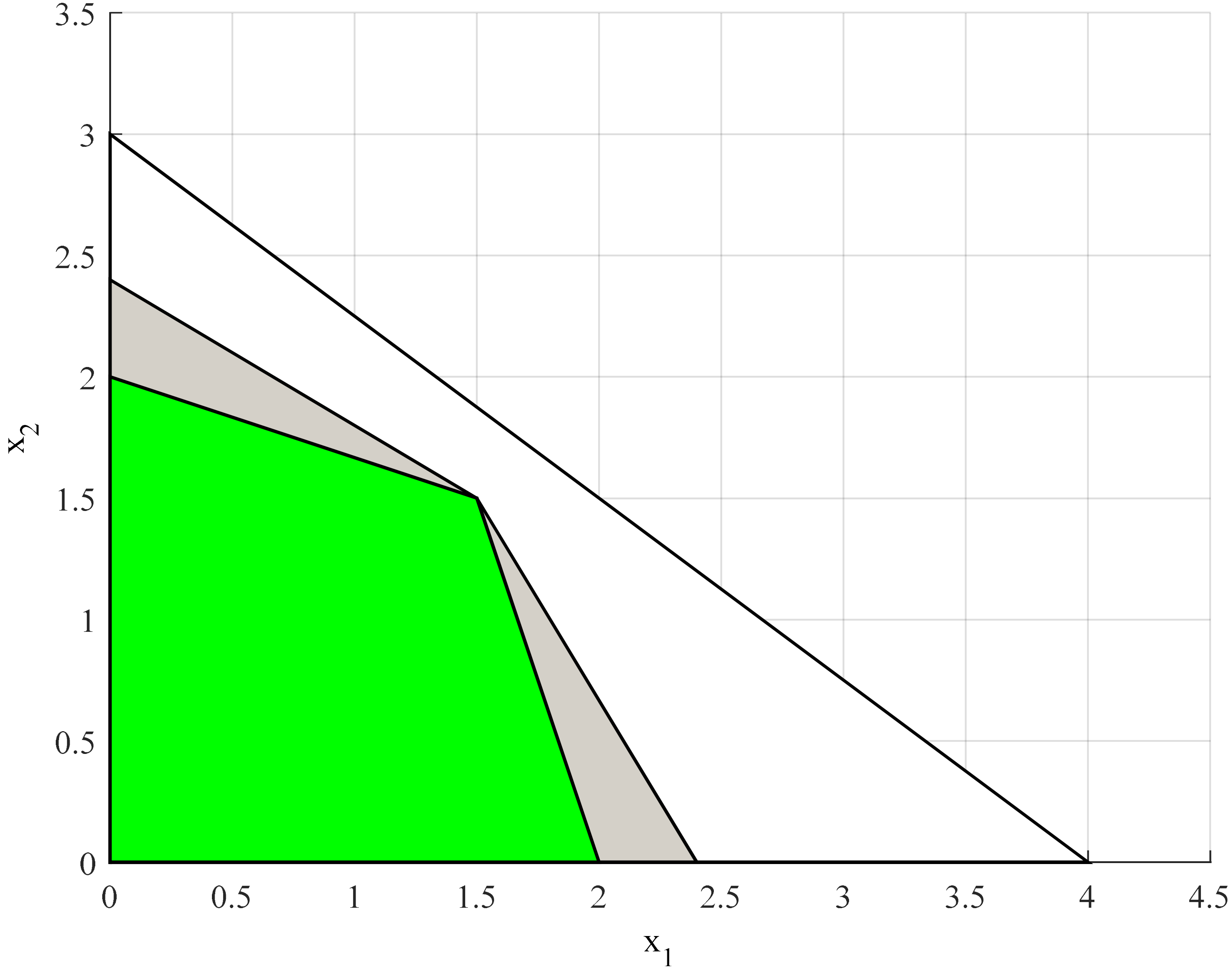
1.2 含不确定参数的简单线性规划

取(a, b) = (2, 5); (5, 3); (3, 5); (4, 4)的可行域



1.2 含不确定参数的简单线性规划

取$(a,b)=(2,6);(6,2);\ x^*=(1.5,1.5);\ z^*=3$



1.2 含不确定参数的简单线性规划

直观解释 $P=\{(a,b)\mid a\ge 2, b\ge 2, a+b\le 8\}$

- 由于$x\ge 0$, 最坏的(a,b)满足 $a+b=8$
- 可行域边界由一簇直线确定

$$ax_1+(8-a)x_2=12$$
$$\Leftrightarrow (x_1-x_2)a+8x_2-12=0$$

- 该簇直线通过定点 $(1.5, 1.5)$;
- 直线斜率取极值时 $(a,b)=(2,6);(6,2)$
- 鲁棒可行域与目标函数无关，是如下区域

$$x_1\ge 0,\ 6x_1+2x_2\le 12$$
$$x_2\ge 0,\ 2x_1+6x_2\le 12$$

1.3 何时应考虑采用鲁棒优化?

- 模型中含有不确定参数，关于不确定性的概率分布信息非常有限（否则用随机优化或分布鲁棒优化）
- 含不确定参数的约束必须满足，不允许越界
- 最优解或最优值对不确定参数敏感
- 决策者不允许低概率、高风险事件发生，如设计桥梁、调度电力系统等

授课内容在不确定优化方法中的定位

		不确定性的建模		
		随机优化	鲁棒优化	分布鲁棒优化
应对不确定性的机制	单阶段（静态）	投标问题	投标问题	投标问题
	两阶段	规划问题	规划问题	规划问题
	多阶段（动态）	运行问题	运行问题	运行问题

主要内容

2.1 静态鲁棒线性规划模型

$$\min\ c^{\mathrm{T}}x$$

$$\text{s.t. } Ax \le b : \forall A \in W$$

决策要求

- x 是当下 (here-and-now) 决策: 不知晓 A 的准确值就要确定
- 只要$A \in W$, 约束条件必须满足

基本假设

- 目标函数中不含不确定参数（若 c 不确定怎么办？）
- 约束右端项不含不确定参数（若 b 不确定怎么办？）
- 无等式约束或等式约束已用于消去非独立变量
- 不确定集 W 是有界闭凸集
- 矩阵 A 中每行系数的不确定性是独立的

2.1 静态鲁棒线性规划模型

$$\min \; c^{\mathrm{T}} x$$
$$\text{s.t. } Ax \le b : \forall A \in W$$

半无穷规划

包含有限个变量和无限个约束条件的优化问题

鲁棒优化的可行解

称 x 是一个鲁棒可行解若对任意 $A \in W$ 约束条件都满足

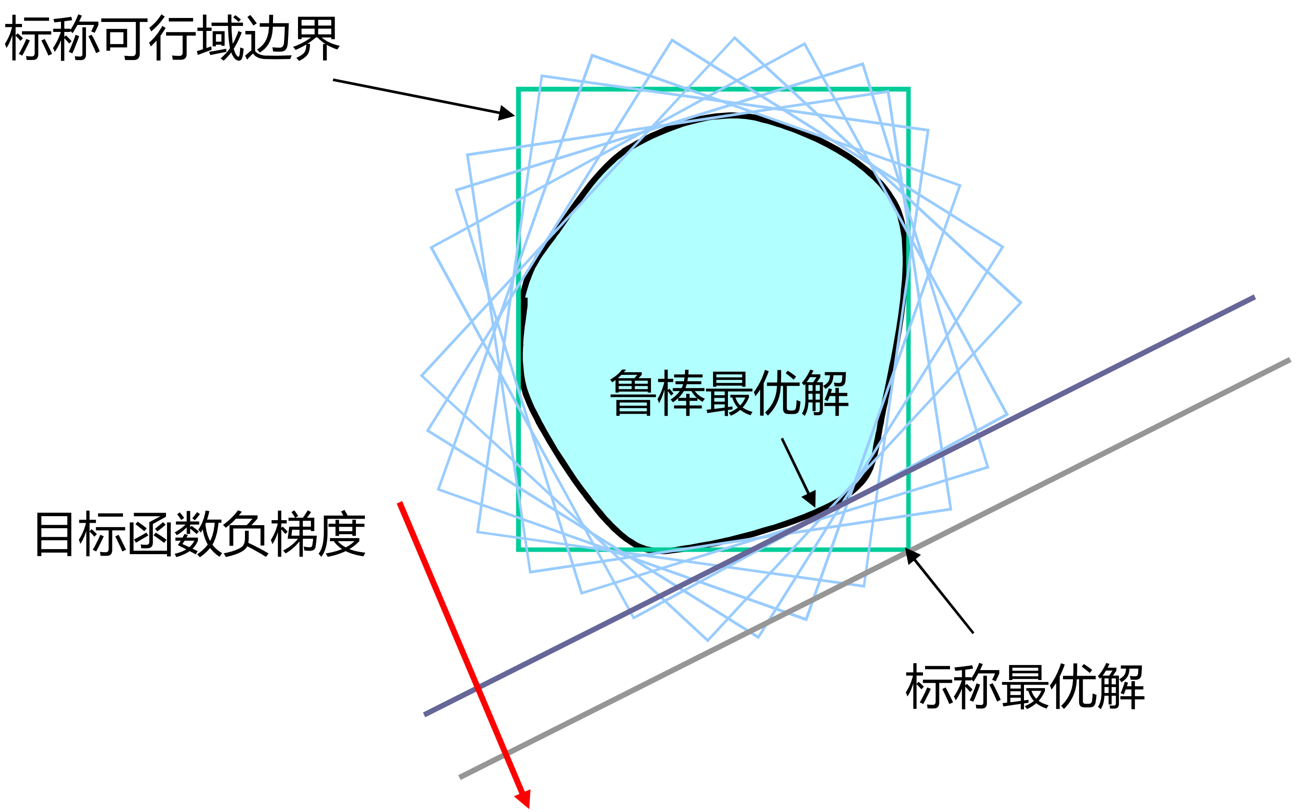
鲁棒优化的最优解

所有鲁棒可行解中使目标函数最小的是鲁棒优化的最优解

2.1 静态鲁棒线性规划模型

$$\min\ c^{\mathrm{T}} x$$

$$\text{s.t. } Ax \le b : \forall A \in W$$



2.2 确定性等价问题

多面体不确定集

$$\min\{c^{\mathrm{T}}x \mid a_i^{\mathrm{T}}x \le b_i : \forall a_i \in E_i, \forall i\}$$

$$E_i = \{a_i \mid a_i = \overline{a}_i + P_i u_i, D_i u_i + q_i \ge 0\}$$

$$\begin{aligned} \min\ & c^{\mathrm{T}}x \\ \text{s.t.}\ & \overline{a}_i^{\mathrm{T}}x + x^{\mathrm{T}}P_i u_i \le b_i : \forall D_i u_i + q_i \ge 0, \forall i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min\ & c^{\mathrm{T}}x \\ \text{s.t.}\ & \overline{a}_i^{\mathrm{T}}x + \max_{u_i : D_i u_i + q_i \ge 0} x^{\mathrm{T}}P_i u_i \le b_i, \forall i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max_{u_i}\ & x^{\mathrm{T}}P_i u_i \\ \text{s.t.}\ & D_i u_i + q_i \ge 0 \end{aligned}$$

LP对偶

$$\begin{aligned} \min\ & -q_i^{\mathrm{T}}w_i \\ \text{s.t.}\ & D_i^{\mathrm{T}}w_i = P_i^{\mathrm{T}}x \\ & w_i \le 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min\ & c^{\mathrm{T}}x \\ \text{s.t.}\ & \overline{a}_i^{\mathrm{T}}x - q_i^{\mathrm{T}}w_i \le b_i, \forall i \\ & D_i^{\mathrm{T}}w_i = P_i^{\mathrm{T}}x, w_i \le 0, \forall i \end{aligned}$$

线性规划

2.2 确定性等价问题

基数(cardinality)约束不确定集

$$U=\left\{u\middle|-1\le u\le 1,\ \sum_j\left|u_j\right|\le\Gamma\right\}$$ 不确定性的预算

$$U=\left\{(u,\sigma)\middle|-\sigma_j\le u_j\le\sigma_j,\sigma_j\le 1,\forall j,\ \Sigma_j\sigma_j\le\Gamma\right\}$$

$$\begin{aligned}\max_{u,\sigma}\quad & x^{\mathrm{T}}P_i u\\ \text{s.t.}\quad & -u_j-\sigma_j\le 0:\xi_j^n,\forall j\\ & u_j-\sigma_j\le 0:\xi_j^m,\forall j\\ & \sigma_j\le 1:\xi_j^b,\forall j\\ & \Sigma_j\sigma_j\le\Gamma:\xi_r\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\min_{\xi^n,\xi^m,\xi^b,\xi_r}\quad & \xi_r\Gamma+\Sigma_j\xi_j^b\\ \text{s.t.}\quad & \xi_j^m-\xi_j^n=(P_i^{\mathrm{T}}x)_j,\forall j\\ & -\xi_j^m-\xi_j^n+\xi_j^b+\xi_r=0,\forall j\\ & \xi_j^m,\xi_j^n,\xi_j^b\ge 0,\forall j,\xi_r\ge 0\end{aligned}$$

ξ_r可消去

Bertsimas D, Sim M. The price of robustness. Operations Research, 2004, 52(1): 35-53.

主要内容

3.1 自适应鲁棒性与反馈率

静态鲁棒性

$$X_N = \{x \mid \forall b \in U : Ax \le b\}$$

变量 x 在 b 获知以前确定，约束条件不能违背

自适应鲁棒性

$$X_A = \{x \mid \forall b \in U, \exists y : Ax + By \le b\}$$

x/y 在 b 获知以前/以后确定，y 构成对不确定性的反馈

x: 第一阶段变量或当下决策　　需要具有鲁棒性
y: 第二阶段变量或观望决策　　提供灵活性

- 集合 X_A 通常比 X_N 大
- 两阶段鲁棒优化一般难以直接求解，除非限定 y 和 b 之间的函数形式，将策略优化转化为参数优化

3.1 自适应鲁棒性与反馈率

考虑如下不确定线性规划

$$
\begin{aligned}
\min_{x,y(\cdot)} \quad & x \\
\text{s.t.} \quad & x - y(z) \le -z, && \forall z \in [0,1] \\
& -x + y(z) \le z + \frac{1}{2}, && \forall z \in [0,1] \\
& y(z) \ge 1, && \forall z \in [0,1]
\end{aligned}
$$

(1) 若 $y(z) = y$ 是常数，则该问题是静态鲁棒优化，求鲁棒可行域和最优解。

(2) 若 x 是当下决策，y 是观望决策，求解该两阶段鲁棒优化，并写出一个最优自适应反馈率

(1) 在静态情况下，约束右端项取最小值即为最坏情况

$$
\begin{aligned}
\min_{x,y(\cdot)} \quad & x \\
\text{s.t.} \quad & x - y \le -1, \quad -x + y \le 1/2, \quad y \ge 1
\end{aligned}
$$

该问题无解，静态鲁棒可行域是空集

3.1 自适应鲁棒性与反馈率

(2) 在自适应反馈下, 将约束条件整理为

$$
\begin{aligned}
x + z \le y(z), \quad & \forall z \in [0,1] \\
y(z) \le x + z + 1/2, \quad & \forall z \in [0,1] \\
1 \le y(z), \quad & \forall z \in [0,1]
\end{aligned}
$$

消去 $y(z)$

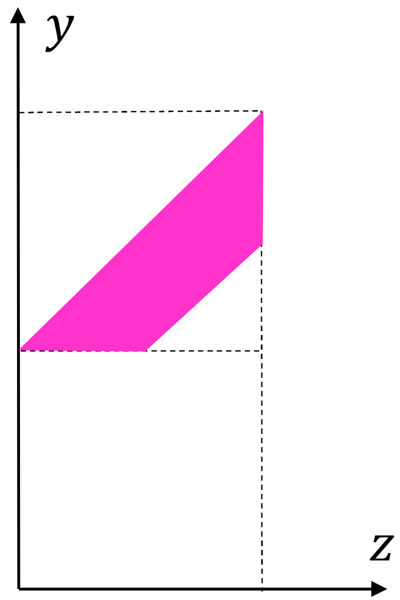
$$\cancel{x + z \le x + z + \frac{1}{2}, \quad \forall z \in [0,1]}$$

$$1 \le x + z + \frac{1}{2}, \quad \forall z \in [0,1]$$

$$\min\left\{x : x \ge 1/2\right\} \Rightarrow x = 1/2$$

最优反馈率

$$\max\left\{1, 1/2 + z\right\} \le y(z) \le 1 + z$$



3.2 两阶段鲁棒优化：线性反馈 (AARO)

$$\min \ c^{\mathrm{T}} x$$
$$\text{s.t.} \ \ x \in X$$

注意决策顺序

$$\boxed{\forall \theta \in \Theta, \exists y : Ax + By \le b^0 + F\theta}$$

$$Ax + B(y^0 + \Delta y) \le b^0 + F\theta \begin{cases} Ax + By^0 \le b^0 & y^0 \to b^0 \\ B\Delta y \le F\theta & \Delta y \to \theta \end{cases}$$

仿射策略: $\Delta y = G\theta$

$$\min \ c^{\mathrm{T}} x + d^{\mathrm{T}} y^0$$
$$\text{s.t.} \ \ x \in X, \ Ax + By^0 \le b^0$$
$$(BG - F)\theta \le 0 : \forall \theta \in \Theta$$

- 这是一个静态鲁棒优化问题：x, y^0, G 是当下决策
- 自适应性体现在基于仿射策略的偏差补偿 $\Delta y = G\theta$

3.2 两阶段鲁棒优化：线性反馈

- 增益矩阵 G 需要满足以下鲁棒性条件

$$(BG-F)\theta \le \mathbf{0} : \forall \theta \in \Theta = \{\Delta b \mid H\theta \le h\}$$

或写成矩阵形式，即每行的最大值都非正

$$\begin{aligned} \max \ & (BG-F)\theta \le \mathbf{0} \\ \text{s.t. } & H\theta \le h \end{aligned}$$

- 每行对应的问题引入对偶变量 Γ_i 并写出对偶问题

$$\begin{aligned} \min \ & \Gamma_i h \\ \text{s.t. } & \Gamma_i H = \left(BG-F\right)_i, \Gamma_i \ge 0 \end{aligned}$$

根据弱对偶性，$\Gamma_i h \ge (BG-F)_i\theta$

3.2 两阶段鲁棒优化：线性反馈

线性反馈自适应鲁棒优化的确定性等价模型

$$
\begin{aligned}
\min\ & c^{\mathrm{T}}x + d^{\mathrm{T}}y^0 \\
\text{s.t.}\ & x \in X,\ Ax + By^0 \le b^0 \\
& \Gamma \ge 0,\ \Gamma h \le 0 \\
& \Gamma H = BG - F
\end{aligned}
$$

其中 Γ 是矩阵变量

- 这是一个可以高效求解的线性规划！
- 在实际中，线性反馈具有实际意义
- 线性反馈限制了自适应变量的可调范围
- 在一定条件下可以分析线性反馈的次优性

3.3 两阶段鲁棒优化：自适应反馈 (ARO)

$$\min_{x\in X}\left\{c^{\mathrm{T}}x+\max_{b\in W}\min_{y\in Y(x,b)}d^{\mathrm{T}}y\right\}$$

$$Y(x,b)=\{y\mid By\le b-Ax\}$$

决策要求

- x 是第一阶段变量/当下决策, 必须在观测 b 之前确定
- b 针对给定的 x 在不确定集 W 中取能够让第二阶段最小成本最大的元素
- y 是第二阶段变量/观望决策，针对观测到的 b，在可行集 $Y(x,b)$ 中取值，目标是使第二阶段成本最小
- 第一阶段变量 x 需要保证不论 b 取何值，$Y(x,b)\neq\emptyset$，同时总目标函数最小
- ARO 比 RO 和 AARO 灵活，尤其在处理等式约束方面

3.3 两阶段鲁棒优化：自适应反馈

等价的有限维优化-上境图形式 (不确定集极点枚举)

$$\begin{aligned} \min\ & c^{\mathrm{T}}x+\sigma \\ \text{s.t. } & x\in X,\sigma\ge d^{\mathrm{T}}y^{s},\forall s \\ & Ax+By^{s}\le b^{s},\forall b^{s}\in \operatorname{extr}(W) \end{aligned}$$

基本事实: 用 conv(W) 替换 W 不改变鲁棒可行域

若 $W=\{b_1,\cdots,b_n\}$, 任意 $b\in \operatorname{conv}(W)$ 可以表示为:

$b=\lambda_1 b_1+\cdots+\lambda_n b_n,\quad \lambda_1,\cdots,\lambda_n\ge 0,\quad \lambda_1+\cdots+\lambda_n=1$

对任意鲁棒可行解 x，存在 $y_1,\cdots,y_n$，使得

$$Ax+By_i\le b_i \Leftrightarrow \lambda_i(Ax+By_1)\le \lambda_i b,\qquad i=1:n$$

求和可得 $\sum_i \lambda_i(Ax+By_1)\le \sum_i \lambda_i b \Leftrightarrow Ax+B\sum_i \lambda_i y_1\le b$

表明对向量 b，存在 $y=\lambda_1 y_1+\cdots+\lambda_n y_n$ 使 $Y(x,b)\ne\emptyset$

即用 conv(W) 替换 W 后，任何鲁棒可行解仍然鲁棒可行

3.3 两阶段鲁棒优化：自适应反馈

延迟极点生成算法(Constraint-and-Column Generation)

- 定下界 (主问题)

$$\min_{x,y^s,\sigma} \; c^{\mathrm{T}} x + \sigma$$

$$\text{s.t. } x \in X, \sigma \geq d^{\mathrm{T}} y^s, \forall s$$

$$Ax + By^s \leq b^s, \forall b^s \in B \subseteq \operatorname{extr}(W)$$

下界: $c^{\mathrm{T}} x^* + \sigma^*$

- 定上界 (子问题)

max-min 算子 $$\max_{b \in W} \min_{y \in Y(x^*, b)} d^{\mathrm{T}} y$$

$$\text{s.t. } By \leq b - Ax^*$$

上界: $c^{\mathrm{T}} x^* + d^{\mathrm{T}} y^*$

3.3 两阶段鲁棒优化：自适应反馈

线性极大-极小问题的求解

$$\min d^{\mathrm{T}} y \quad \text{s.t. } By \le b - Ax$$

对偶

$$\max_{\mu} \mu^{\mathrm{T}}(b - Ax) \quad \text{s.t. } B^{\mathrm{T}}\mu = d, \mu \le 0$$

$$\max_{b} \min_{y} d^{\mathrm{T}} y \quad \text{s.t. } By \le b - Ax$$

$$\max_{\mu, b} \mu^{\mathrm{T}}(b - Ax) \quad \text{s.t. } B^{\mathrm{T}}\mu = d, \mu \le 0, b \in W$$

乘积项 $\mu^{\mathrm{T}} b$ 可以线性化

子问题中 x 是常数

若 W 是基数约束不确定集

$$W = \left\{ b \middle| \begin{array}{c} b_j = b_j^0 + b_j^+ z_j^+ - b_j^- z_j^-, \forall j \\ z^+, z^- \in \{0,1\}^m, z_j^+ + z_j^- \le 1, \forall j,\ 1^{\mathrm{T}}(z^+ + z^-) \le \Gamma \end{array} \right\}$$

若 $W = \{b | Hb \ge h\}$，问题也可以转化为混合整数规划，但转化方法与连续变量相乘的处理方法截然不同！

3.3 两阶段鲁棒优化：自适应反馈

延迟极点生成算法流程

1: 设置 $LB = -\infty$, $UB = +\infty$; choose ε, 初始极点集 $V \subseteq \mathrm{vert}(W)$.

2: 求解主问题

$$\begin{aligned} \min\ & c^{\mathrm{T}} x + \sigma \\ \text{s.t. } & x \in X, \sigma \geq d^{\mathrm{T}} y^{s}, \forall s \\ & Ax + By^{s} \leq b^{s}, \forall b^{s} \in V \end{aligned}$$

割平面

最优解为 (x^*, σ^*), 更新下界 $LB = c^{\mathrm{T}} x^* + \sigma^*$

3: 固定 $x = x^*$，求解子问题

$$\max_{\mu, b} \left\{ \mu^{\mathrm{T}} (b - Ax) : B^{\mathrm{T}} \mu = d, \mu \leq 0, b \in W \right\}$$

最优解为 b^*, 最优值为 R^*，更新上界 $UB = c^{\mathrm{T}} x^* + R^*$

4: 若 $UB - LB < \varepsilon$, 最优解为x^*；否则 $V \leftarrow V \cup b^*$，生成割平面返回2.

循环次数不超过W的极点数，在鲁棒机组组合问题中通常小于10次

主要内容

1. 优化中如何考虑不确定性
2. 静态鲁棒优化
3. 两阶段鲁棒优化
4. 鲁棒机组组合

4.1 新能源发电的不确定集

确定性机组组合问题的矩阵形式

$$\min\ c^{\mathrm{T}}u + d^{\mathrm{T}}p$$
$$\text{s.t. } u \in U,\ Au + Bp + Cw \le b$$

风力发电的不确定集合

$$W = \left\{ w \;\middle|\; \begin{aligned} & w_{jt} = w_{jt}^{0} + z_{jt}^{+} w_{jt}^{+} - z_{jt}^{-} w_{jt}^{-}, \forall j, \forall t \\ & \sum_{j} \left(z_{jt}^{+} + z_{jt}^{-} \right) \le \Gamma_{S},\ \forall t \\ & \sum_{t} \left(z_{jt}^{+} + z_{jt}^{-} \right) \le \Gamma_{T},\ \forall j \\ & z_{jt}^{+}, z_{jt}^{-} \in \{0,1\},\ \forall j, \forall t \end{aligned} \right\}$$

空间相关性

时间相关性

中心极限定理

鲁棒机组组合

称机组启停计划 u 在不确定集合 W 下是鲁棒的，若对任意风电出力向量 $w \in W$，都存在调度策略 p 满足机组组合的约束条件。

4.2 两阶段鲁棒机组组合

自适应两阶段鲁棒机组组合

$$\min_{u\in U}\left\{c^{\mathrm{T}}u+\max_{w\in W}\ \min_{p\in Y(u,w)} d^{\mathrm{T}}p\right\}$$

$$Y(u,w)=\{p \mid Bp\le b-Au-Cw\}$$

第二阶段调度问题的信息结构

自适应反馈模型		风电出力和时段			
		1	2	3	4
机组出力	1	●	●	●	●
	2	●	●	●	●
	3	●	●	●	●
	4	●	●	●	●

非因果

$$\begin{array}{c} u \\ \Downarrow \\ w \\ \Downarrow \\ p(w) \end{array} \qquad w=\begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_t \\ \vdots \\ w_T \end{bmatrix}$$

4.2 两阶段鲁棒机组组合

线性反馈两阶段鲁棒机组组合

$$\min\ c^{\mathrm{T}}u + d^{\mathrm{T}}p^0$$
$$\text{s.t. } u \in U,\ Au + Bp^0 + Cw^0 \le b$$
$$(BG + C)\Delta w \le 0, \forall \Delta w \in W$$

Δw 获知以后

$$p = p^0 + \Delta p$$
$$= p^0 + G\Delta w$$

第二阶段调度问题的信息结构

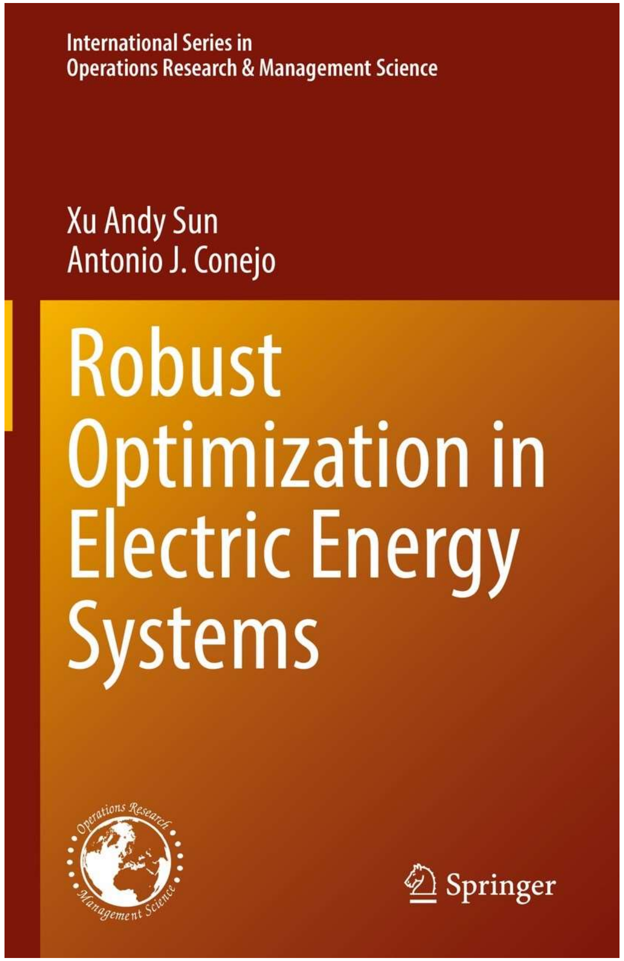
线性反馈模型		风电出力和时段			
		1	2	3	4
机组出力	1	●			
	2	●	●		
	3	●	●	●	
	4	●	●	●	●

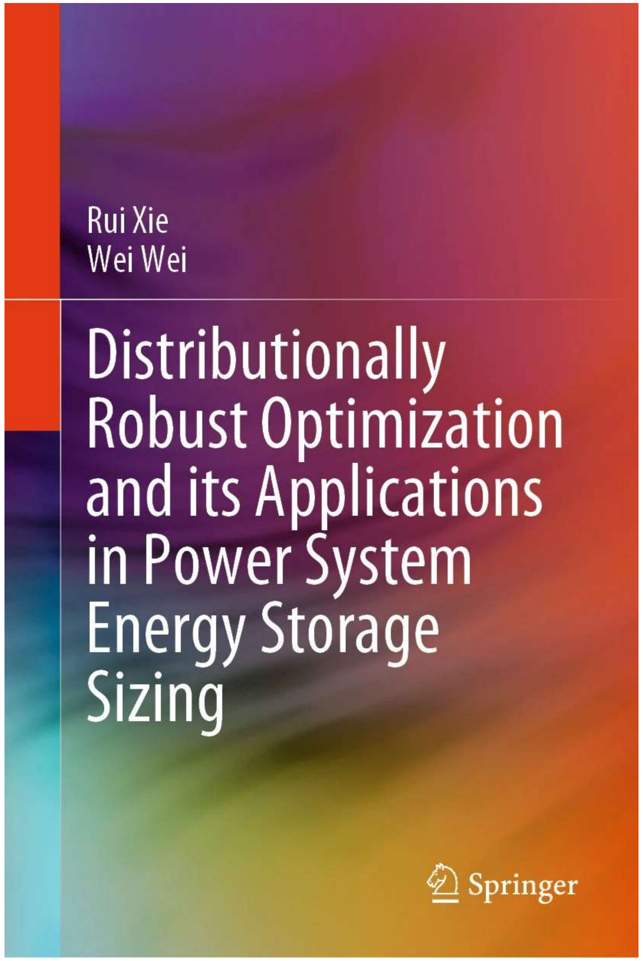
因果

$$p = p^0 + G\Delta w$$

$$G = \begin{bmatrix} g_{11} & & & \\ g_{21} & g_{22} & & \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & \\ g_{41} & g_{42} & g_{43} & g_{44} \end{bmatrix}$$

推荐书目





Sun X A, Conejo A J. Robust optimization in electric energy systems. Springer, 2021.

Xie R, Wei W. Distributionally Robust Optimization and its Applications in Power System Energy Storage Sizing. Springer, 2024.

Wei W. Tutorials on advanced optimization methods. arXiv preprint, 2020.