



## 期中测验要求:

- ◆独立完成，时间80分钟
- ◆闭卷考试，不能带任何参考书、讲义和习题解答
- ◆自带计算器、直尺、铅笔、钢笔、红色和蓝色签字笔等文具



## 上节课要点回顾

### Bode图 开环对数频率特性图

$$G_0(j\omega) = |G_0(j\omega)| \angle G_0(j\omega) = A(\omega) e^{j\Phi(\omega)}$$

★对数幅频特性定义  $L(\omega) = 20 \lg A(\omega)$

单位：分贝 dB，1 贝尔 = 20 分贝

★相频特性以相角  $\Phi(\omega)$  为纵坐标，不取对数；横坐标为角频率，按对数分度，单位为弧度/秒(rad/s)



# 上节课要点回顾

## 1、确定低频段Bode图位置

$$\omega = 1 \quad L(\omega) = 20 \lg k$$

斜率由积分环节决定

$$r = 0 \quad 0\text{dB/dec}$$

$$r = 1 \quad -20\text{dB/dec}$$

$$r = 2 \quad -40\text{dB/dec}$$

## 2、依次绘制惯性环节、2阶振荡环节转折频率以后的Bode图的渐近线

根据每个环节转折频率后的斜率对各频段的斜率进行增减。

# 上节课要点回顾

## 相频特性曲线绘制步骤:

### 1、确定系统相频特性的渐近线;

★低频段由积分环节个数 $r$ 决定相频角度  $\Phi(\omega) = -90^\circ \times r$

★中高频段根据每个环节的情况对转折频率后相位角进行增减

### 2、根据相频特性的渐近线绘制相频特性曲线的草图

★某频段渐近线有使相频特性曲线接近它的趋势，又影响临近频率段相频特性曲线的值，该段的频段越长则影响越大，频段越短则影响越小;

★在相频特性曲线低频段小于最低转折频率的10倍频程的频段和高频段大于最高转折频率的10倍频程的频段，趋于与渐近线重合;

# 上节课要点回顾

**最小相位系统：**如果一个系统传递函数的全部零极点都位于 $s$ 平面左半平面或虚轴上，则称为**最小相位系统**。

★幅频特性相同的系统中，最小相位系统的相位变化最小；

★幅频特性确定后，其对应的最小相位系统是唯一的；

最小相位系统幅频特性和相频特性一一对应。

**稳定裕量**是评价一个稳定系统的相对稳定性的大小。

★在频域范围，稳定裕度可以用幅值裕量和相角裕量来表示。

①基于Nyquist判据      ②只适合于开环最小相位系统

# 幅值裕量和相角裕量计算示例

例4.11  $G_0(s) = \frac{1}{s^2(2s+1)}$

①低频段  $\omega = 1$

$$20\lg k = 20\lg 1 = 0\text{dB}$$

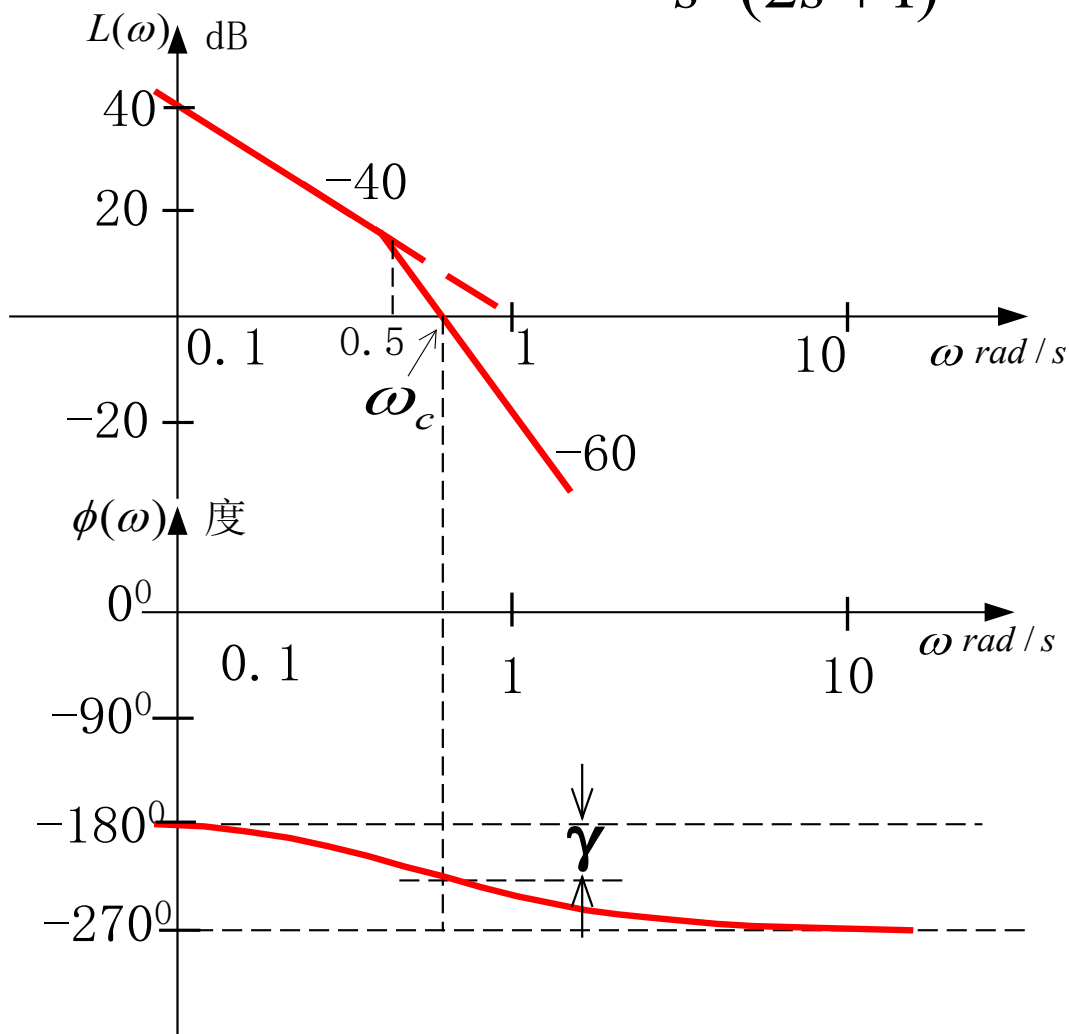
-40db/dec

②转折频率

$$\omega = \frac{1}{T} = \frac{1}{2} = 0.5$$

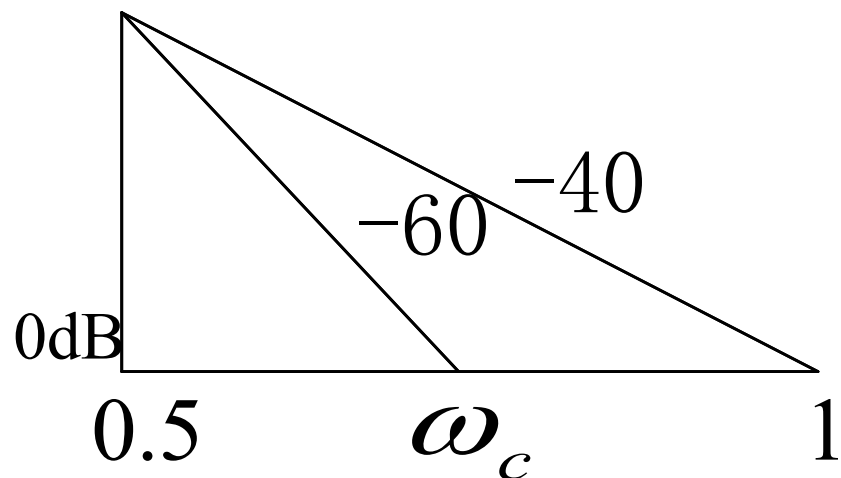
-20db/dec

相频特性低频段为  
-180°, 高频段为-270°



# 幅值裕量和相角裕量计算示例

计算相角裕量



$$60 \lg \frac{\omega_c}{0.5} = 40 \lg \frac{1}{0.5}$$

$$40 \lg \frac{1}{0.5} \approx 12$$

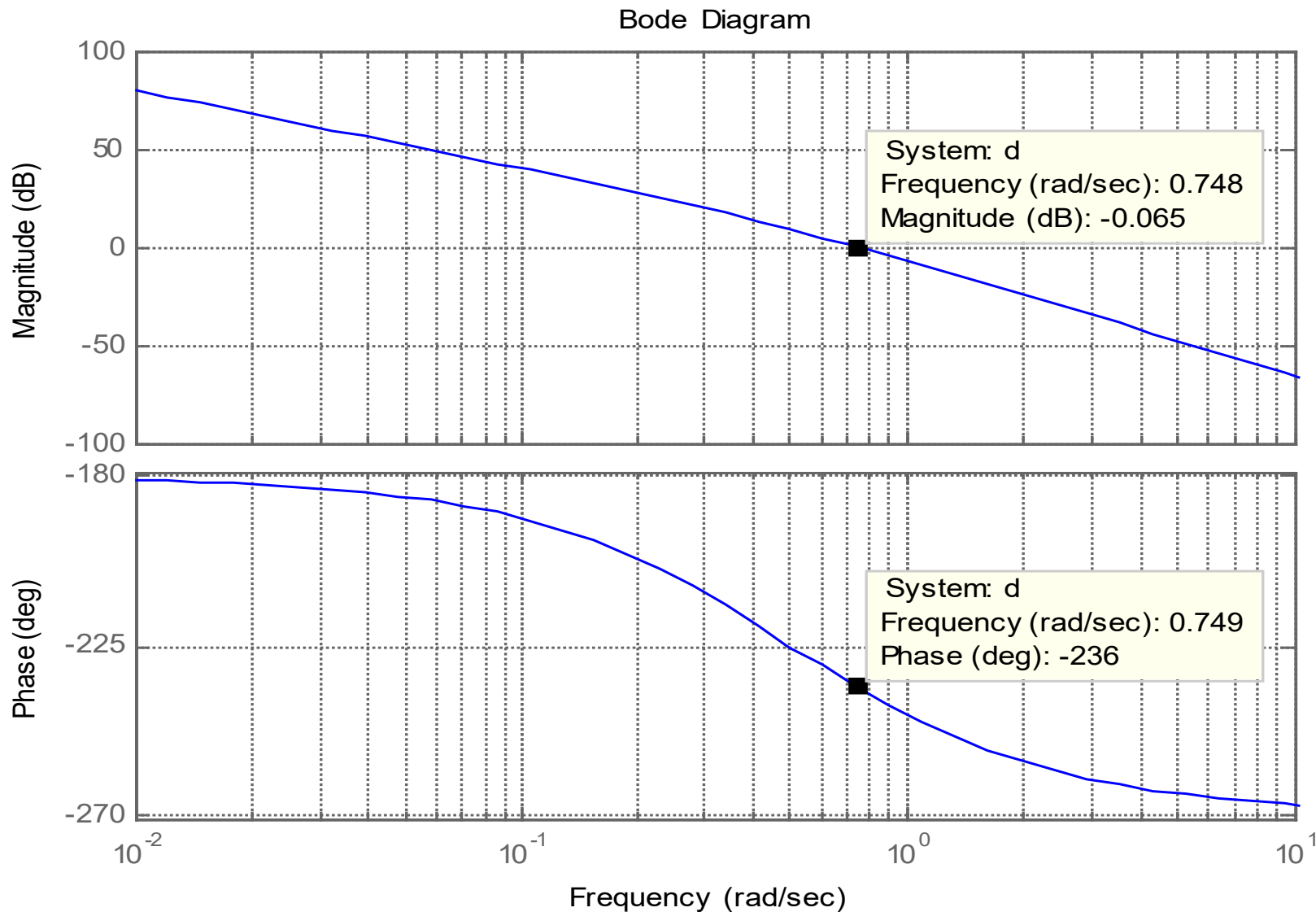
$$\lg \frac{\omega_c}{0.5} \approx \frac{12}{60} \approx \lg 1.58$$

$$\omega_c = 0.5 \times 1.58 = 0.79$$

$$\begin{aligned} \gamma &= 180^\circ + \Phi(\omega_{c1}) = 180^\circ - 180^\circ - \tan^{-1}(2\omega_c) \\ &= -\tan^{-1}(2\omega_c) = -57.7^\circ \end{aligned}$$

系统不稳定

# 幅值裕量和相角裕量计算示例





# 幅值裕量和相角裕量计算示例

例4.12

$$G_0(s) = \frac{1}{s} e^{-\tau s}$$

$$|e^{-j\tau\omega}| = 1$$

幅频特性

$$|G_0(j\omega)| = \left| \frac{1}{j\omega} e^{-j\tau\omega} \right| = \frac{1}{\omega}$$

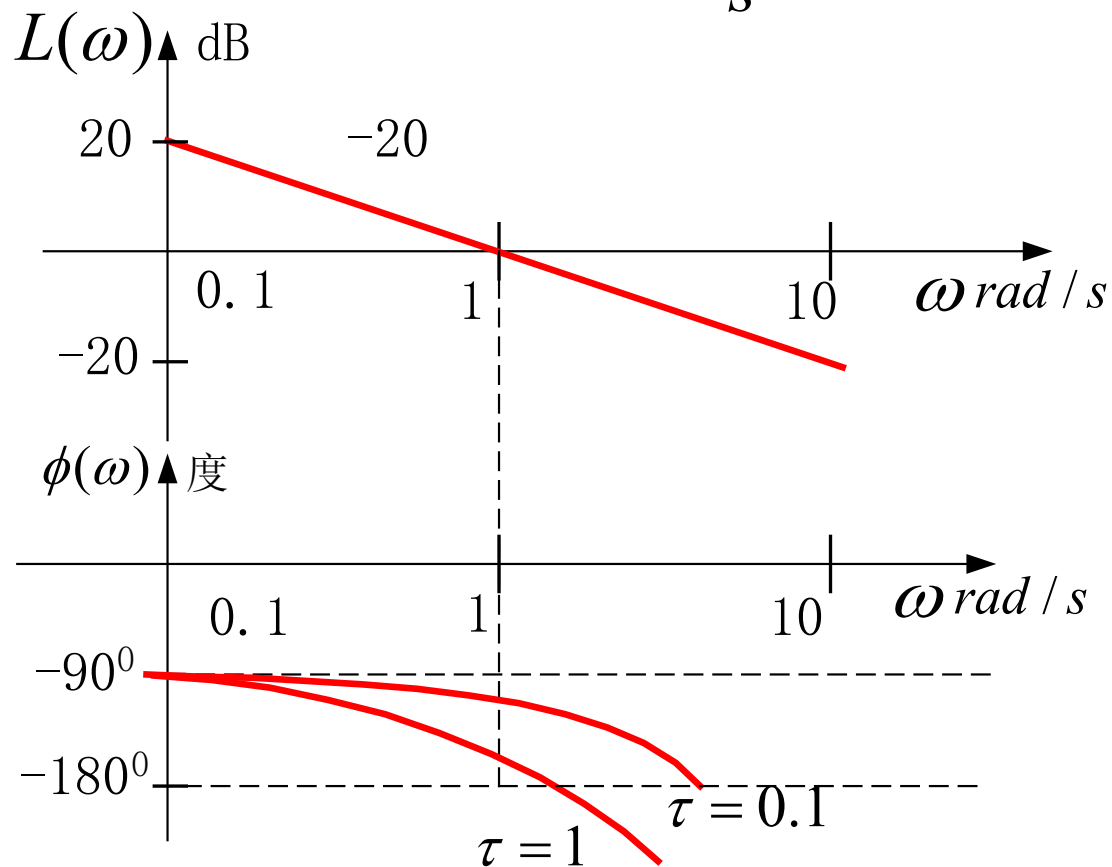
$$\Phi(\omega) = -90^\circ - 57.3^\circ \times \tau\omega$$

相角裕量

$$\tau = 0.1$$

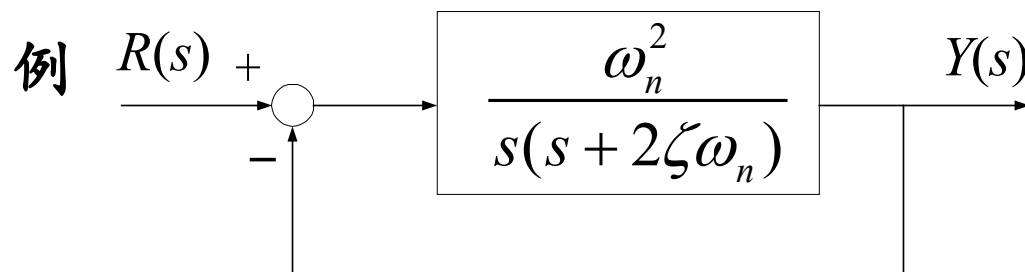
$$\Phi(1) = -90^\circ - 5.73^\circ = -95.7^\circ$$

$$\gamma = 84.3^\circ$$



$$\tau = 1 \quad \Phi(1) = -90^\circ - 57.3^\circ = -147.3^\circ \quad \gamma = 32.7^\circ$$

# 幅值裕量和相角裕量计算示例



开环传递函数

$$G_0(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\zeta\omega_n)}$$

开环频率特性

$$G_0(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{j\omega(j\omega + 2\zeta\omega_n)} = \frac{\omega_n^2}{\omega\sqrt{\omega^2 + 4\zeta^2\omega_n^2}} \angle(-90^\circ - \arctg \frac{\omega}{2\zeta\omega_n})$$

幅值穿越频率 $\omega_c$

$$|G_0(j\omega_c)| = \frac{\omega_n^2}{\omega_c\sqrt{\omega_c^2 + 4\zeta^2\omega_n^2}} = 1 \quad \longrightarrow \quad \omega_c = \omega_n \left( \sqrt{4\zeta^4 + 1} - 2\zeta^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

相角裕量

$$\gamma = 180^\circ + \angle G_0(j\omega_c) = 90^\circ - \arctg \frac{\omega_c}{2\zeta\omega_n}$$

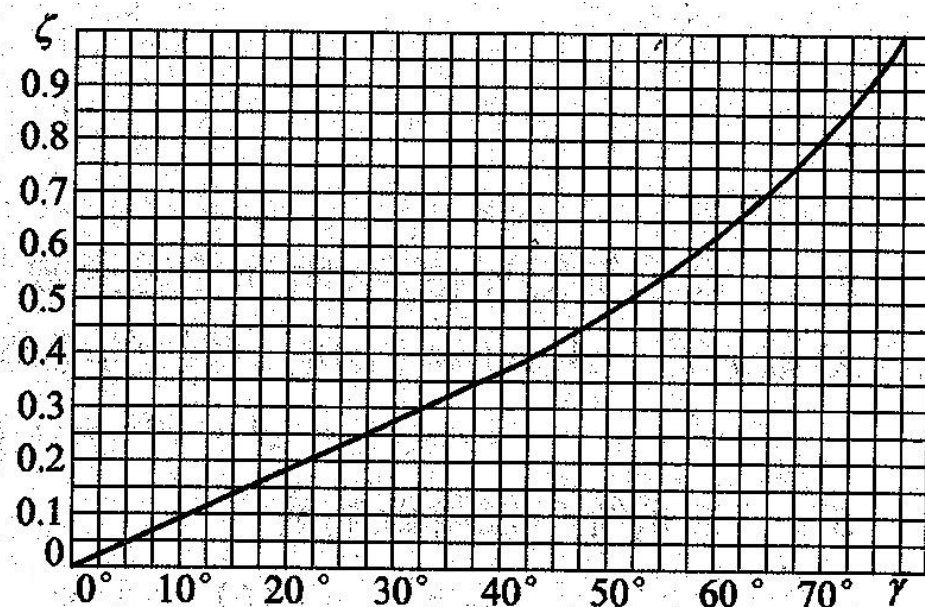
$$= \arctg \frac{2\zeta\omega_n}{\omega_c} = \arctg \left[ 2\zeta \left( \sqrt{4\zeta^4 + 1} - 2\zeta^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \right]$$

# 幅值裕量和相角裕量计算示例

$$\frac{d}{d\zeta} \left( \sqrt{4\zeta^4 + 1} - 2\zeta^2 \right) = \frac{4\zeta}{\sqrt{4\zeta^4 + 1}} (2\zeta^2 - \sqrt{4\zeta^4 + 1}) < 0$$

$$\gamma = \arctg \left[ 2\zeta \left( \sqrt{4\zeta^4 + 1} - 2\zeta^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \right]$$

只与阻尼比 $\zeta$ 有关，且  
是 $\zeta$ 的增函数



典型二阶系统的 $\gamma$ - $\zeta$ 曲线

★典型二阶系统的相角裕度 $\gamma$   
与阻尼比 $\zeta$ 存在一一对应关系

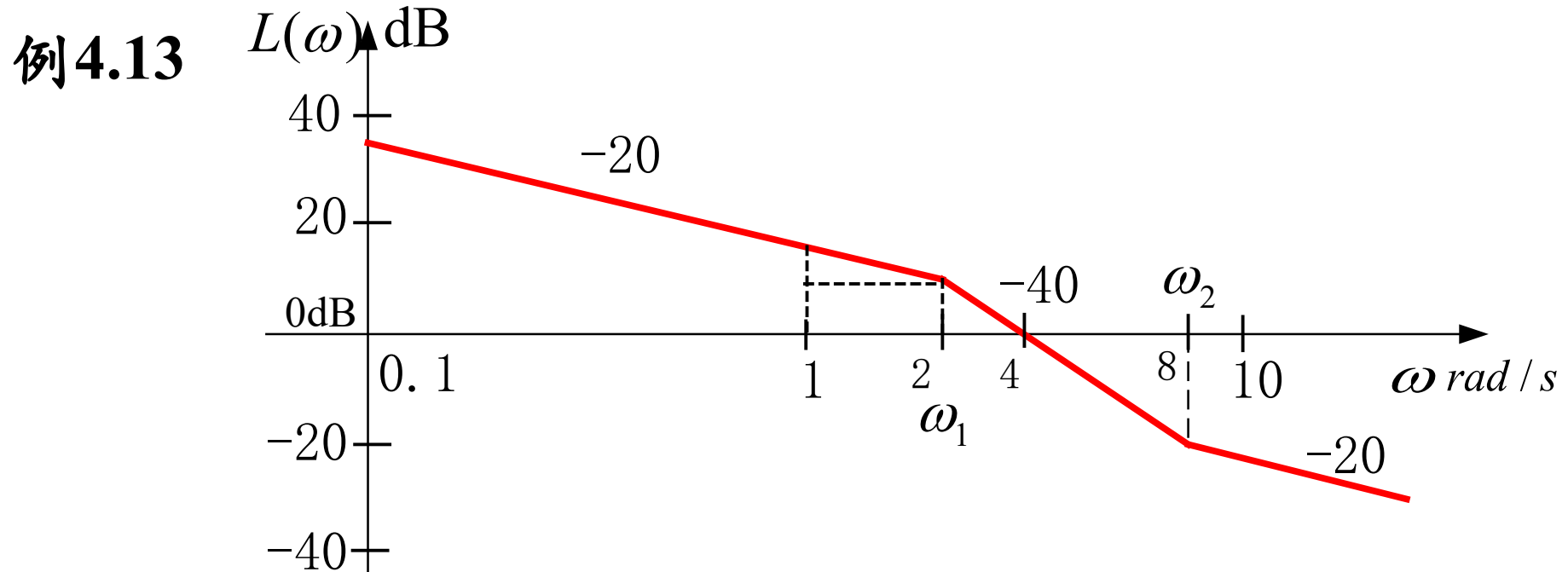
★当选定 $\gamma$ 后，可由 $\gamma$ - $\zeta$ 曲线  
确定 $\zeta$ ，可由 $\zeta$ 确定 $\sigma\%$ 和 $t_s$

$$\sigma\% = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100\%$$

$$t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = \frac{4T}{\zeta}$$

# 最小相位系统的幅频特性

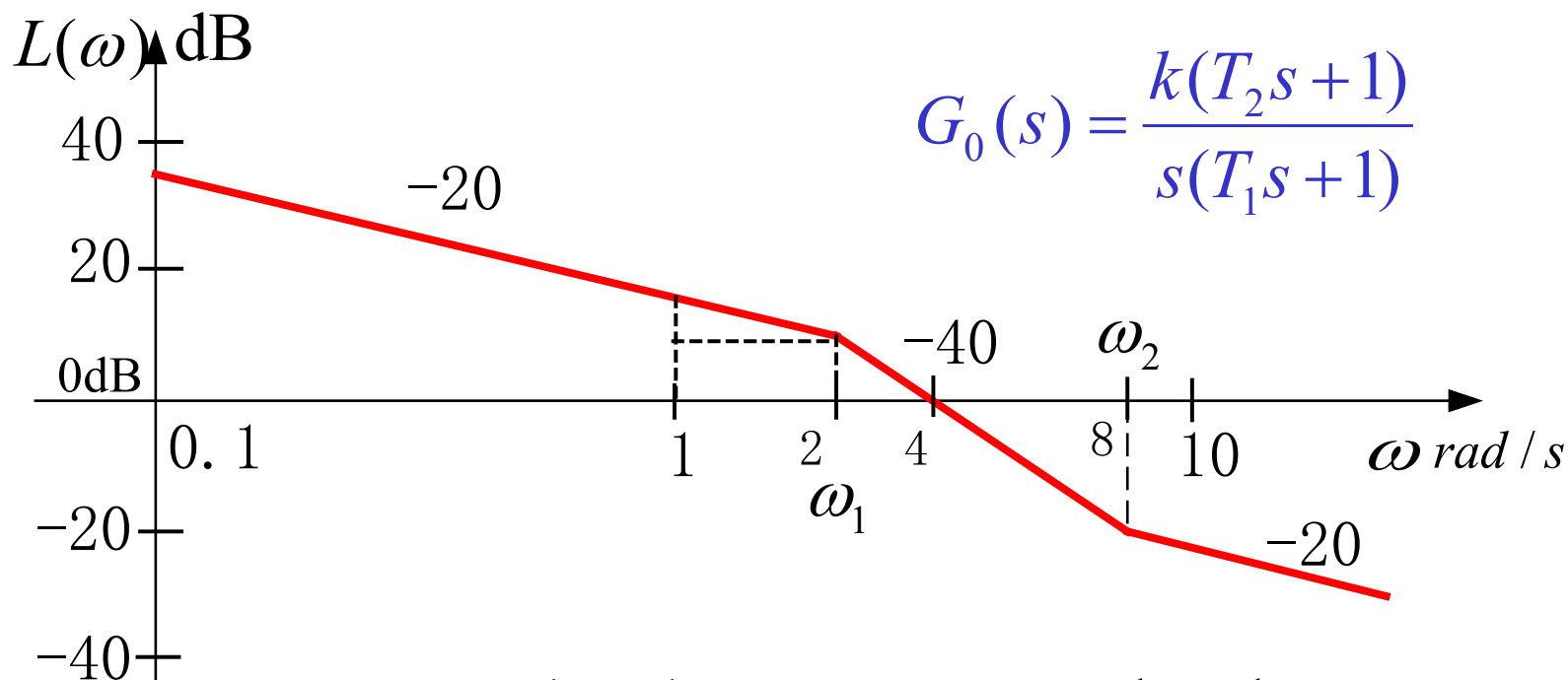
1、最小相位系统的开环幅频特性 $L(\omega)$ 能唯一确定系统的开环传递函数



(1)由幅频特性写传递函数

$$G_0(s) = \frac{k(T_2s + 1)}{s(T_1s + 1)}$$

# 最小相位系统的幅频特性



$$G_0(s) = \frac{k(T_2s + 1)}{s(T_1s + 1)}$$

(2)求时间常数

$$T_1 = \frac{1}{\omega_1} = \frac{1}{2} = 0.5$$

$$T_2 = \frac{1}{\omega_2} = \frac{1}{8} = 0.125$$

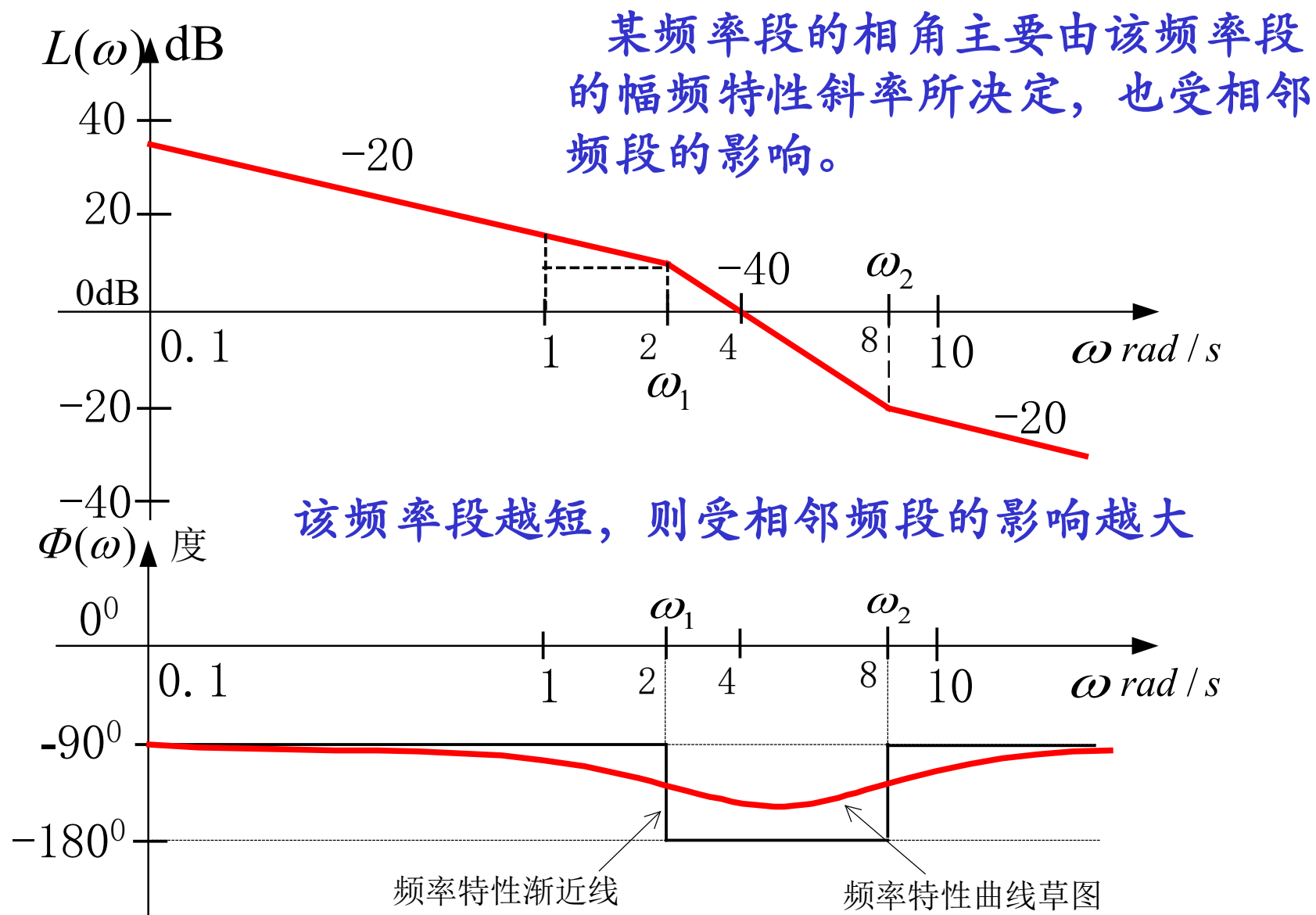
(3)求 $k$

$$L(1) = 20\lg k = 20\lg 2 + 40(\lg 4 - \lg 2) = 60\lg 2 = 20\lg 2^3$$

得  $k = 8$

$$G_0(s) = \frac{8(0.125s + 1)}{s(0.5s + 1)}$$

# 最小相位系统的幅频特性





# 最小相位系统

**例4.9**      $G_1(s) = T_1s + 1$       $G_2(s) = T_1s - 1$

$G_3(s) = -T_1s + 1$       $G_4(s) = -T_1s - 1$

$$L_1(\omega) = L_2(\omega) = L_3(\omega) = L_4(\omega) = 20 \lg \left( \sqrt{1 + (T_1\omega)^2} \right)$$

$\Phi_1(\omega) = \operatorname{tg}^{-1}(T_1\omega)$       $\omega: 0 \rightarrow +\infty$       $\Phi_1(\omega): 0^\circ \rightarrow 90^\circ$

$\Phi_2(\omega) = 180^\circ - \operatorname{tg}^{-1}(T_1\omega)$       $\omega: 0 \rightarrow +\infty$       $\Phi_2(\omega): 180^\circ \rightarrow 90^\circ$

$\Phi_3(\omega) = -\operatorname{tg}^{-1}(T_1\omega)$       $\omega: 0 \rightarrow +\infty$       $\Phi_3(\omega): 0^\circ \rightarrow -90^\circ$

$\Phi_4(\omega) = 180^\circ + \operatorname{tg}^{-1}(T_1\omega)$       $\omega: 0 \rightarrow +\infty$       $\Phi_4(\omega): 180^\circ \rightarrow 270^\circ$

# 最小相位系统

**例4.9**  $G_1(s) = \frac{1}{T_1s + 1}$

$$G_2(s) = \frac{1}{T_1s - 1}$$

$$G_3(s) = \frac{1}{-T_1s + 1}$$

$$G_4(s) = \frac{-1}{T_1s + 1}$$

$$L_1(\omega) = L_2(\omega) = L_3(\omega) = L_4(\omega) = 20 \lg \left( \frac{1}{\sqrt{1 + (T_1\omega)^2}} \right)$$

$$\Phi_1(\omega) = -\operatorname{tg}^{-1}(T_1\omega)$$

$$\omega: 0 \rightarrow +\infty \quad \Phi_1(\omega): 0^\circ \rightarrow -90^\circ$$

$$\Phi_2(\omega) = 180^\circ + \operatorname{tg}^{-1}(T_1\omega)$$

$$\omega: 0 \rightarrow +\infty \quad \Phi_2(\omega): 180^\circ \rightarrow 270^\circ$$

$$\Phi_3(\omega) = \operatorname{tg}^{-1}(T_1\omega)$$

$$\omega: 0 \rightarrow +\infty \quad \Phi_3(\omega): 0^\circ \rightarrow 90^\circ$$

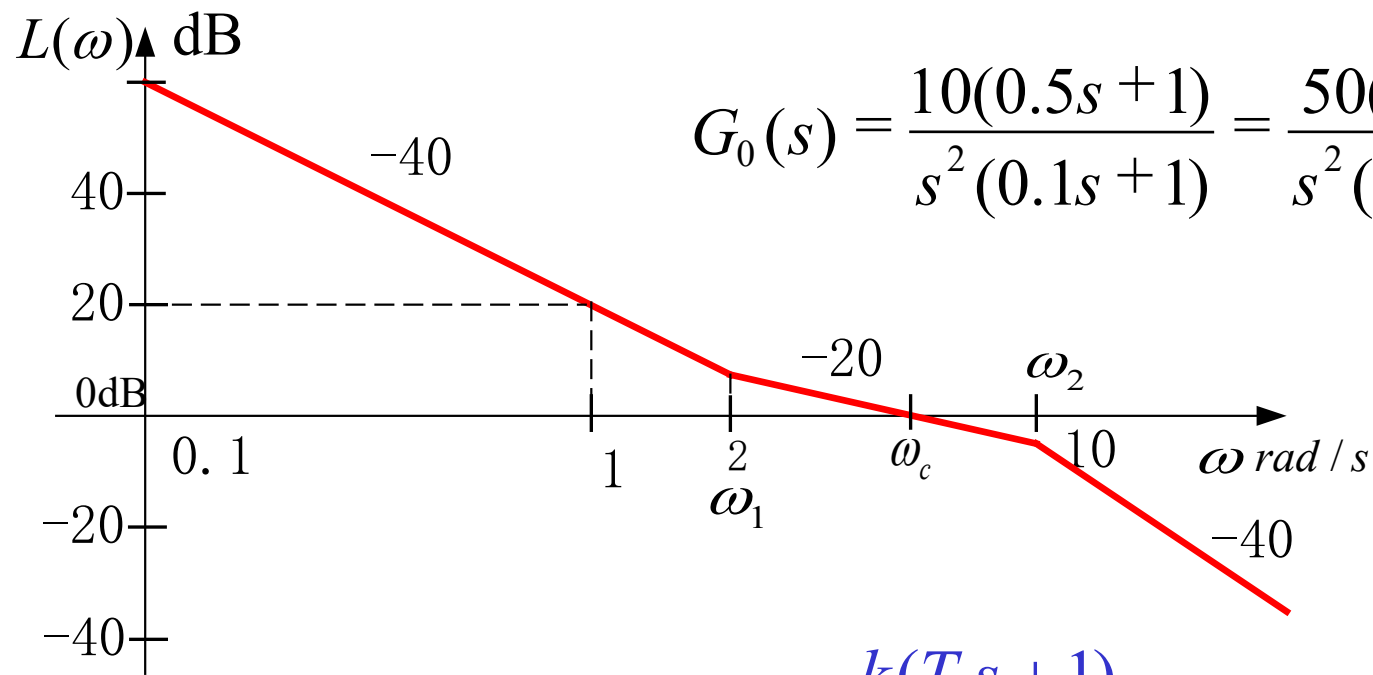
$$\Phi_4(\omega) = 180 - \operatorname{tg}^{-1}(T_1\omega)$$

$$\omega: 0 \rightarrow +\infty \quad \Phi_4(\omega): 180^\circ \rightarrow 90^\circ$$



# 最小相位系统的幅频特性

例4.14



$$G_0(s) = \frac{10(0.5s + 1)}{s^2(0.1s + 1)} = \frac{50(s + 2)}{s^2(s + 10)}$$

(1) 写开环传递函数表达式

$$G_0(s) = \frac{k(T_1s + 1)}{s^2(T_2s + 1)}$$

(2) 时间常数  $T_1 = \frac{1}{\omega_1} = \frac{1}{2} = 0.5$        $T_2 = \frac{1}{\omega_2} = \frac{1}{10} = 0.1$

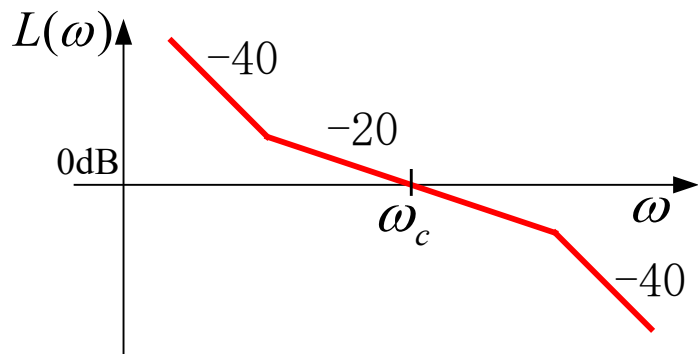
(3) 求  $k$      $\omega = 1$      $20\lg k = 20$      $k = 10$

(4) 求  $\omega_c$

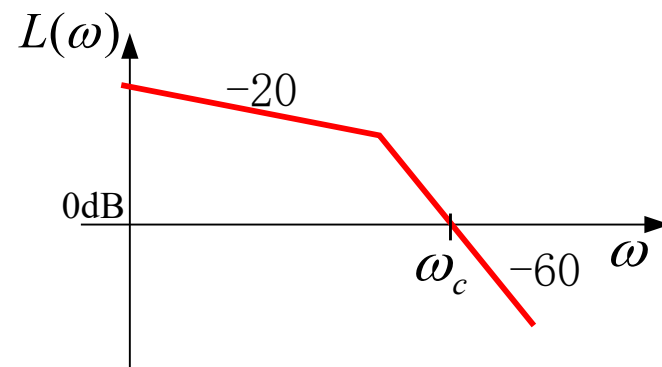
# 最小相位系统的幅频特性

最小相位系统穿越0dB线的幅频特性斜率决定了系统的性能

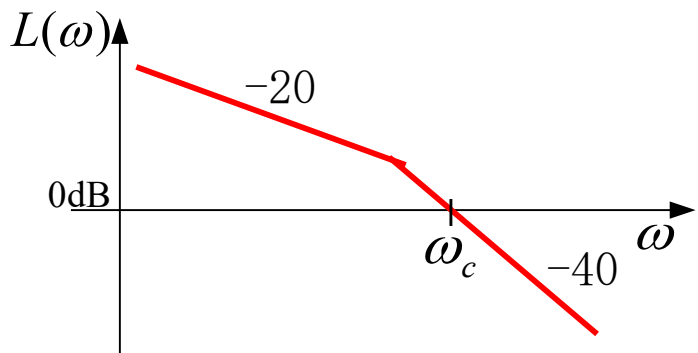
★要使系统稳定并有足够稳定裕量，应使 $L(\omega)$ 以 $-20\text{dB/dec}$ 斜率穿越0dB线，并保持 $\omega_c$ 前后有一定宽度（约10倍频程左右）



系统稳定，  
有足够稳定裕量



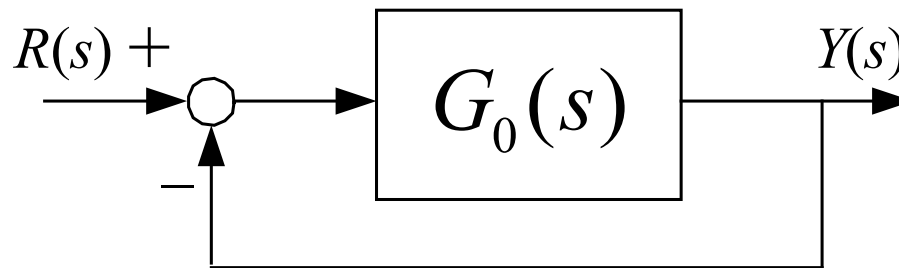
系统不稳定



系统可能  
稳定

## 4.5 闭环频率特性和带宽

$$G(s) = \frac{G_0(s)}{1 + G_0(s)}$$



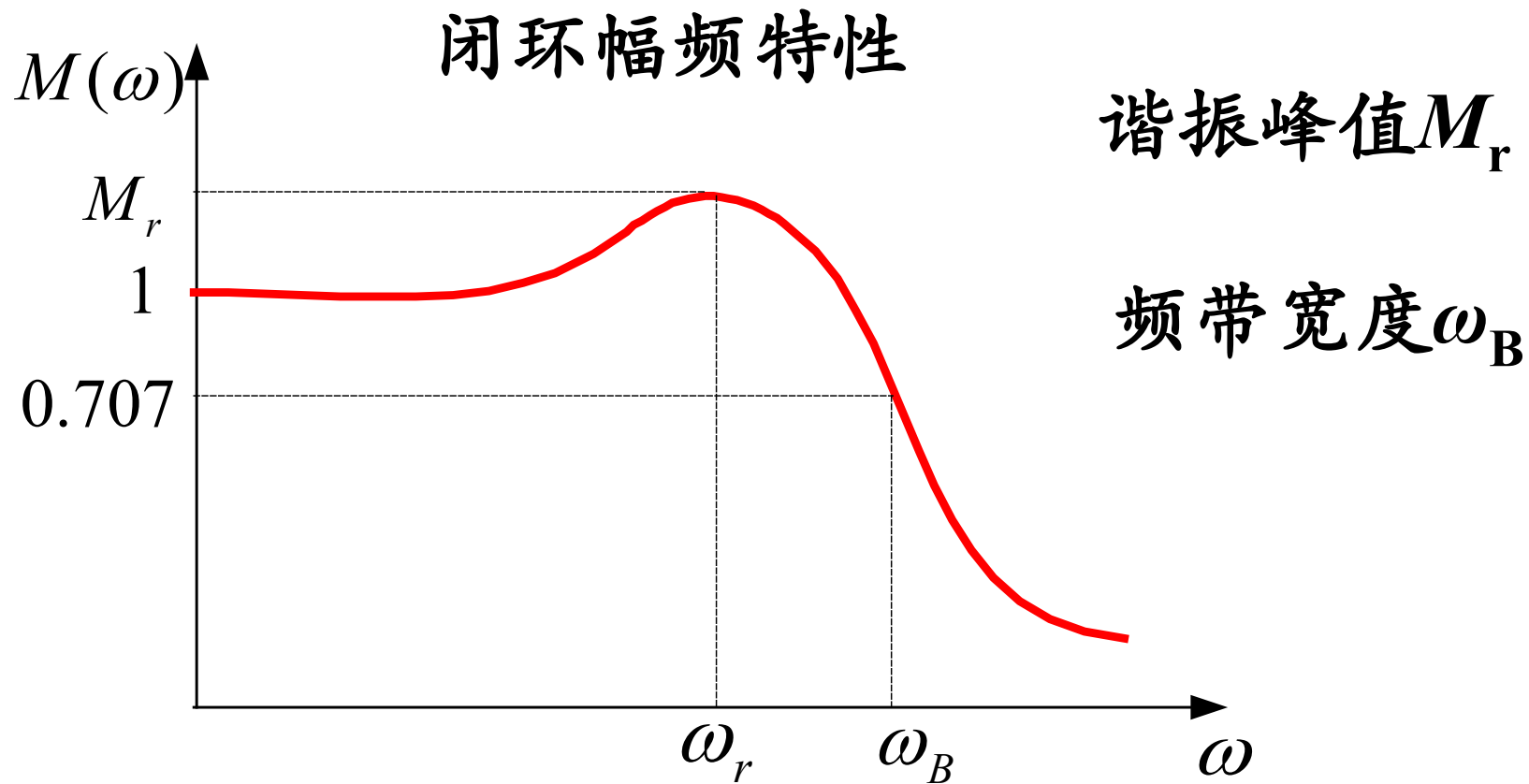
闭环频率特性——系统运行时的频率特性

$$G(j\omega) = \frac{G_0(j\omega)}{1 + G_0(j\omega)} = M(\omega)e^{j\alpha(\omega)}$$

$M(\omega)$ 为闭环幅频特性

$\alpha(\omega)$ 为闭环相频特性

## 4.5 闭环频率特性和带宽



一个具有工程实用价值的系统，其闭环传递函数中**不含积分环节**，由此注意其闭环幅频特性的特征。

## 4.5 闭环频率特性和带宽

$$G_1(s) = \frac{400}{s^2 + 20s + 400}$$

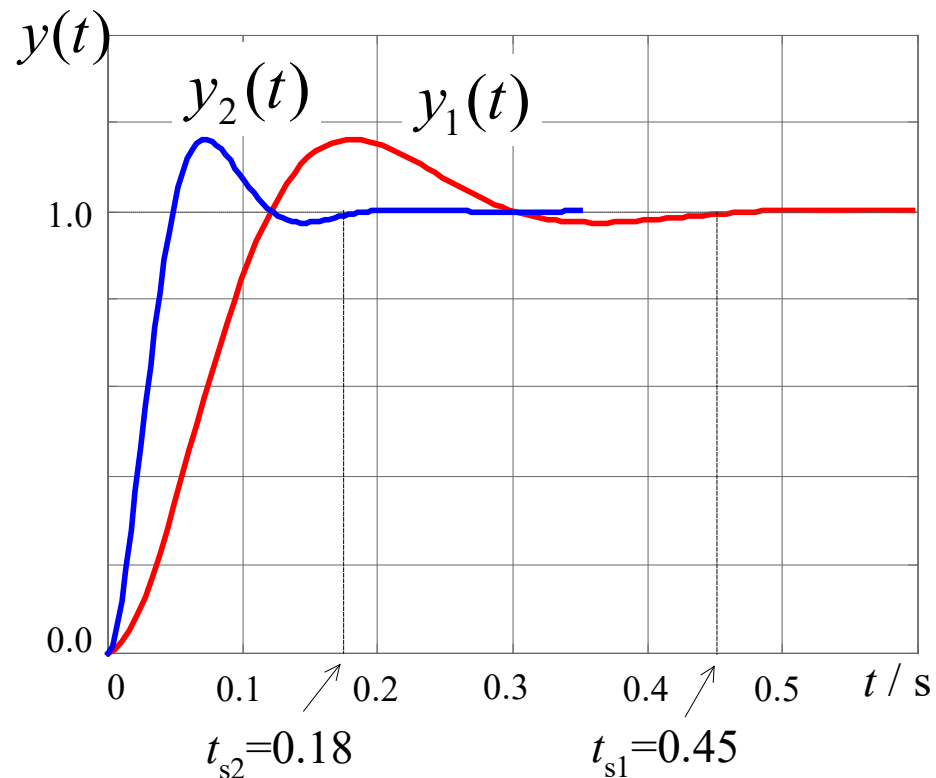
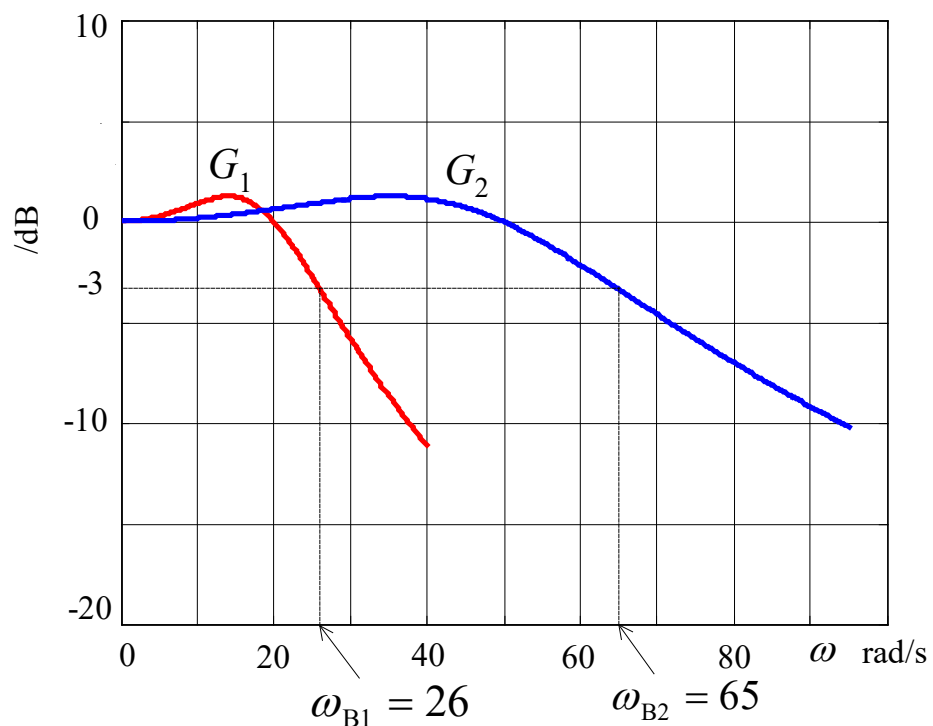
$$\zeta_1 = 0.5 \quad \omega_{n1} = 20$$

$$\omega_{B1} = 26 \quad t_{s1} = 0.45s$$

$$G_2(s) = \frac{2500}{s^2 + 50s + 2500}$$

$$\zeta_2 = 0.5 \quad \omega_{n2} = 50$$

$$\omega_{B2} = 65 \quad t_{s1} = 0.18s$$



## 4.5 闭环频率特性和带宽

闭环频率特性与开环频率特性的关系：

①相角裕量 $\gamma$ 越小，则谐振峰值 $M_r$ 越大，相对稳定性越差

②穿越频率 $\omega_c$ 与带宽 $\omega_B$ 对应，当 $0.2 \leq \zeta \leq 0.8$ 时，有

$$\omega_B \approx 1.6\omega_c$$

闭环频率特性与时域特性的关系：

①开环系统的穿越频率 $\omega_c$ 越高，或闭环幅频特性的频带宽度 $\omega_B$ 越宽，则调整时间 $t_s$ 越短；

②开环系统的相角裕量 $\gamma$ 越小，或闭环幅频特性的谐振峰值 $M_r$ 越大，则超调量 $\sigma\%$ 越大。



## 第4章小结

### 1、Nyquist图和Nyquist判据

#### ①绘制Nyquist图

特殊点，即 $\omega=0$ 和 $\omega=\infty$ 点

变化趋势，分析 $\omega$ 从 $0 \rightarrow \infty$ 的幅值相角变化

★绘制Nyquist图的正频部分是最基本的部分，需要熟练掌握；

★负频与正频部分对称；

★无穷处绕行与积分环节的阶次 $r$ 有关；

#### ②Nyquist判据

结论：闭环系统在右半平面的极点数 $m$ 满足关系式， $N = m - n$

## 第4章小结

★按照Nyquist判据的严格推导，必须已知 $n$ 、 $r$ 、 $N$ ，才能得到 $m$ ，从而判断系统的稳定性。如果已知 $n$ 、 $r$ ，一般情况系统的开环传递函数也是已知的，如果已知开环传递函数，系统的特征方程也就已知，当然用Routh判据更简单。这是一个矛盾。

★ Nyquist判据的价值，不仅仅是判稳定，主要是频率法设计系统的理论基础。单从稳定判据看，它是一个笨方法。

★其实，在实际运用中，如果不计算在右半平面的闭环极点个数，并不需要 $n$ 、 $r$ 等参数。这就是看 $(-1, j0)$ 点是否在Nyquist封闭围线的域内，这个域就是 $s$ 右半平面的映射域，而Nyquist封闭围线的域就在沿围线方向的右侧。



## 第4章小结

### 2、Bode图绘制

频率法的基本功，要求熟练掌握

由传递函数画Bode图(幅频特性和相频特性)

**要点：**应将传递函数化为1阶、2阶环节相乘的时间常数式，  
否则比例系数 $k$ 易出错。

$$G_0(s) = \frac{100}{s^2 + 10s + 100} = \frac{1}{(0.1)^2 s^2 + 0.1s + 1} \longrightarrow k = 1$$

$$G_0(s) = \frac{20(s + 5)}{s(s + 0.1)} = \frac{1000(0.2s + 1)}{s(10s + 1)} \longrightarrow k = 1000$$

## 第4章习题练习

例3 绘制Bode图

$$G_0(s) = \frac{50(s+2)}{s(s^2+10s+100)}$$

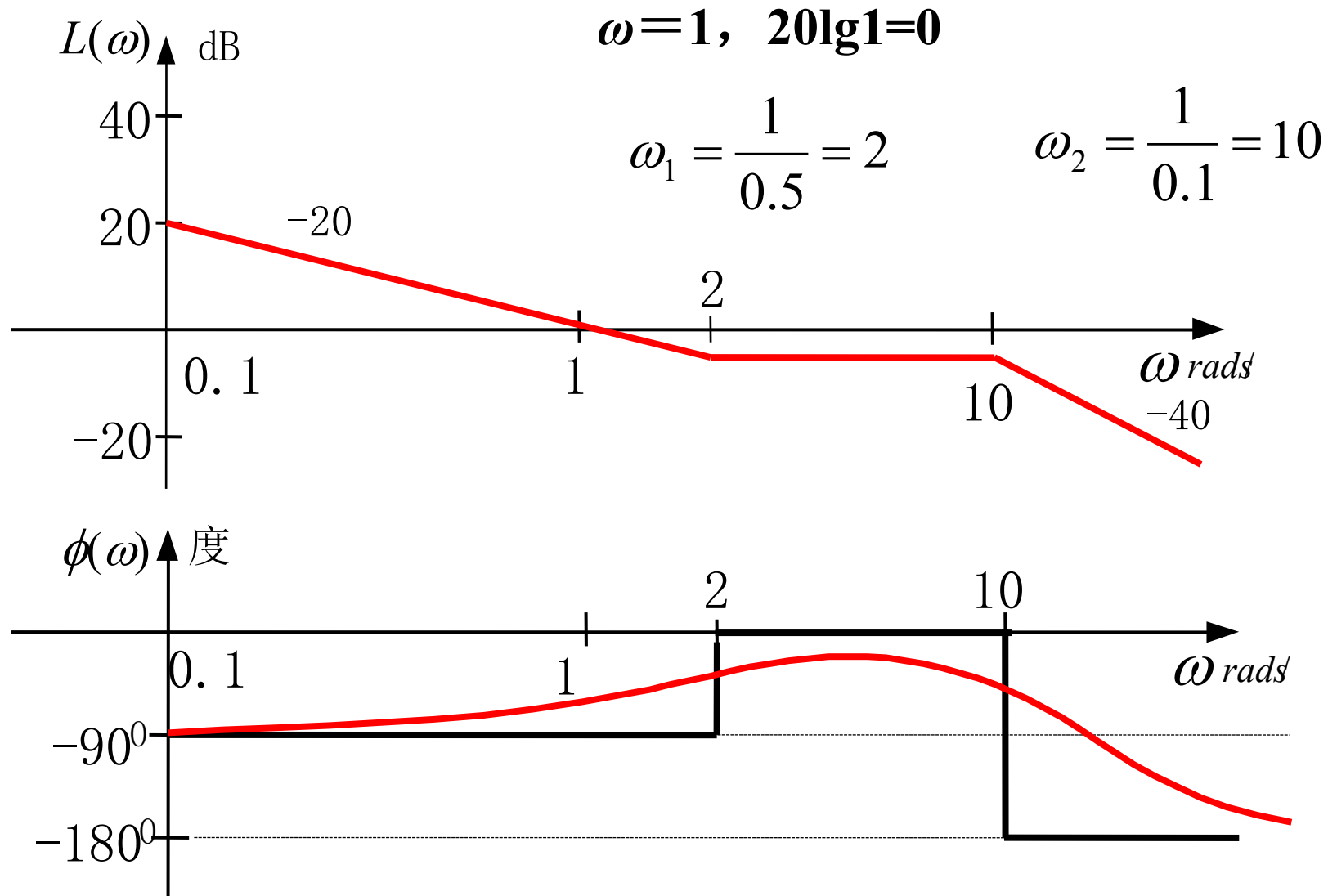
$$G_0(s) = \frac{50(s+2)}{s(s^2+10s+100)} = \frac{(0.5s+1)}{s(0.01s^2+0.1s+1)}$$

$$\omega = 1, \quad 20\lg 1 = 0$$

$$\omega_1 = \frac{1}{0.5} = 2 \qquad \omega_2 = \frac{1}{0.1} = 10$$

## 第4章习题练习

$$G_0(s) = \frac{(0.5s + 1)}{s(0.01s^2 + 0.1s + 1)}$$



## 第4章小结

### 3、稳定裕量

#### 针对最小相位系统

①稳定裕量计算(相角裕量 $\gamma$ 和幅值裕量 $k_g$ )。

1、若 $L(\omega)$ 穿越0dB线时,  $\Phi(\omega_c) > -180^\circ$ , 则闭环系统稳定, 否则不稳定。

2、若 $\Phi(\omega)$ 穿越 $-180^\circ$ 线时,  $L(\omega_g) < 0$ , 则闭环系统稳定, 否则不稳定。

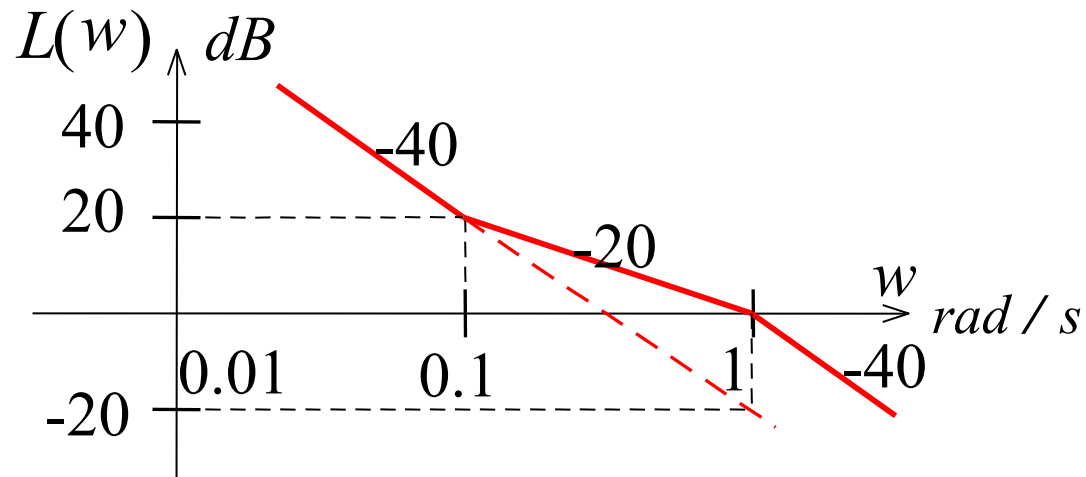
②对最小相位系统, 由Bode图(幅频特性)求传递函数。

#### 基于作图法

★系统开环传递函数以 $-20\text{dB/dec}$ 穿越0dB线是系统具有较好性能的必要条件

## 第4章习题练习

例 4 已知最小相位系统Bode图渐近线，求系统的开环传递函数



$$G_0(s) = \frac{k(T_1s + 1)}{s^2(T_2s + 1)}$$

$$\omega_1 = \frac{1}{T_1} = 0.1 \quad T_1 = 10$$

$$\omega_2 = \frac{1}{T_2} = 1 \quad T_2 = 1$$

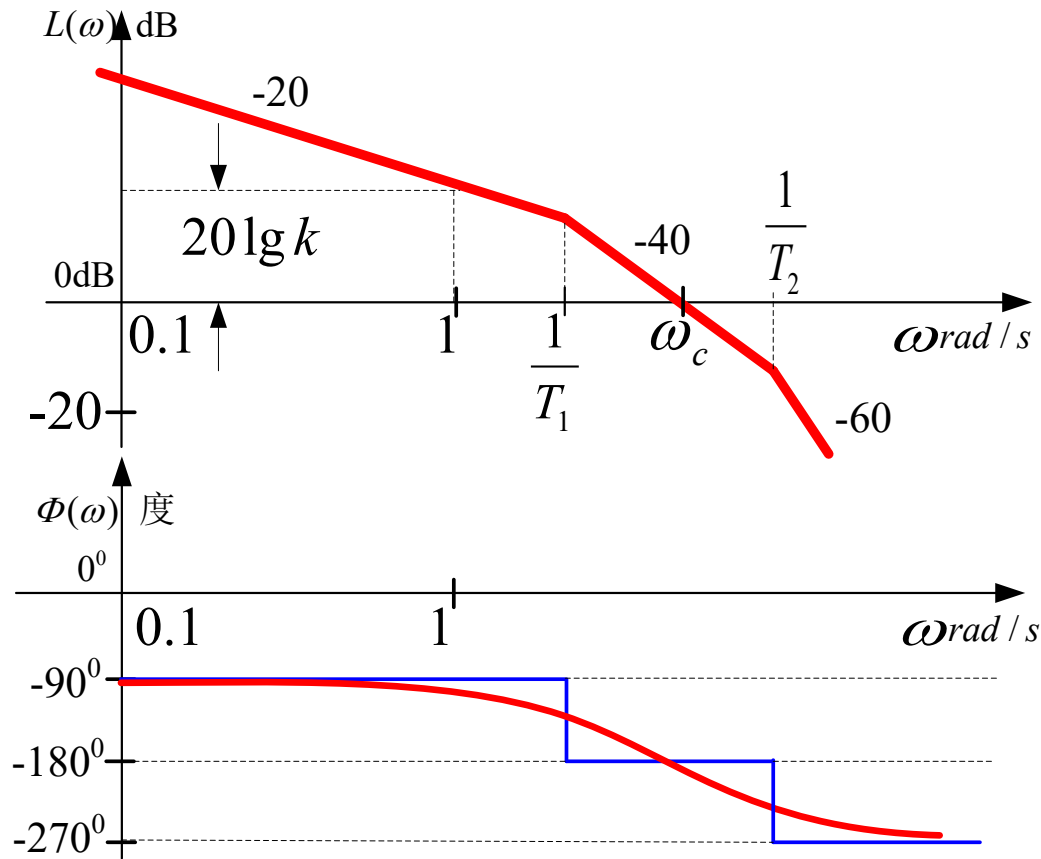
求 $k$ ，取 $\omega = 0.1$        $20 \lg\left(\frac{k}{\omega^2}\right) = 20$        $\frac{k}{\omega^2} = 10$        $\frac{k}{0.1^2} = 10$

$$k = 10 \times 0.01 = 0.1$$

若取 $\omega = 1$      $20 \lg k = -20$     同样得 $k = 0.1$

## 第4章习题练习

例5 已知最小相位系统开环Bode图，求系统稳定条件



$$20\lg k = 20\lg \frac{1}{T_1} + 40\lg \frac{\omega_c}{1/T_1}$$

$$= 20\lg \frac{1}{T_1} + 20\lg(T_1\omega_c)^2$$

$$= 20\lg(T_1\omega_c^2)$$

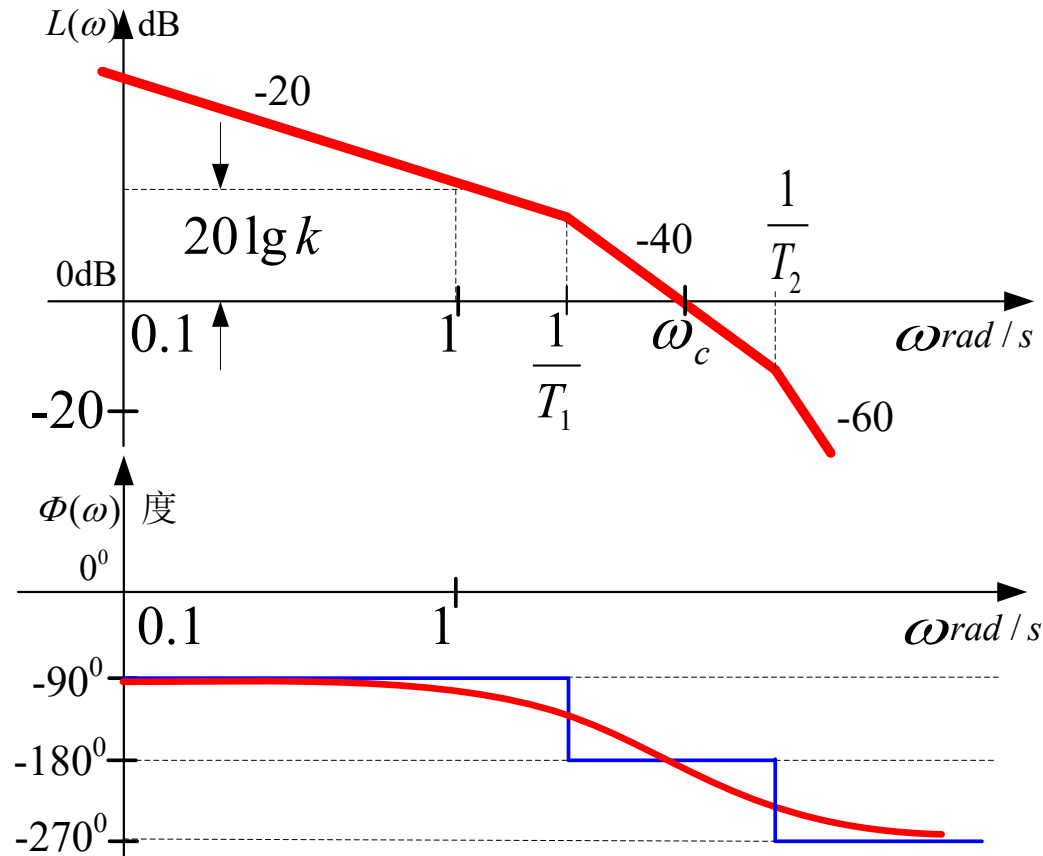
$$\omega_c^2 = \frac{k}{T_1}$$

$$\varphi(\omega) = -90^\circ - \arctan(T_1\omega_c) - \arctan(T_2\omega_c)$$

# 第4章习题练习

$$\varphi(\omega) = -90^\circ - \arctan(T_1\omega_c) - \arctan(T_2\omega_c)$$

设两个惯性环节的相位角为 $\alpha$ 、 $\beta$

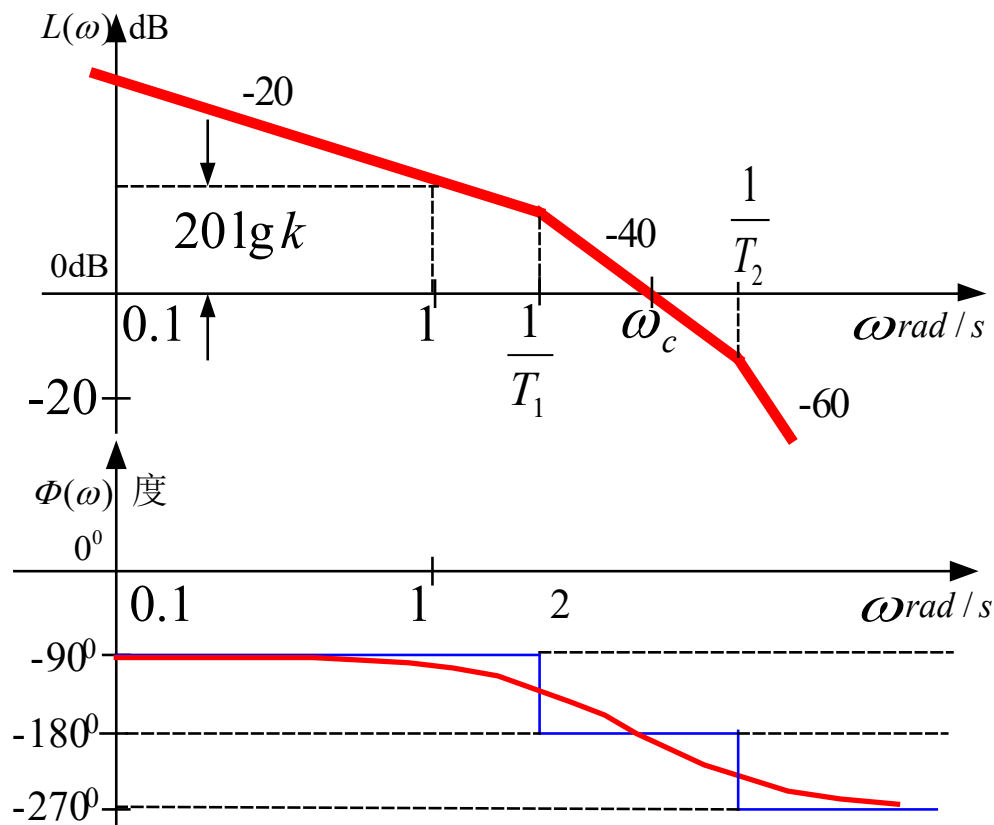


$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\alpha + \beta) &= \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} \\ &= \frac{\sqrt{kT_1} + T_2\sqrt{\frac{k}{T_1}}}{1 - kT_2} \end{aligned}$$

系统稳定条件为

$$k < \frac{1}{T_2} \quad (\text{近似值})$$

# 第4章习题练习



可得开环传递函数:

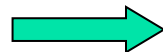
$$G_0(s) = \frac{k}{s(T_1s + 1)(T_2s + 1)}$$

闭环特征方程:

$$D(s) = s(T_1s + 1)(T_2s + 1) + k = 0$$

$$T_1T_2s^3 + (T_1 + T_2)s^2 + s + k = 0$$

$$\begin{cases} T_1 + T_2 > kT_1T_2 \\ T_1, T_2, k > 0 \end{cases}$$



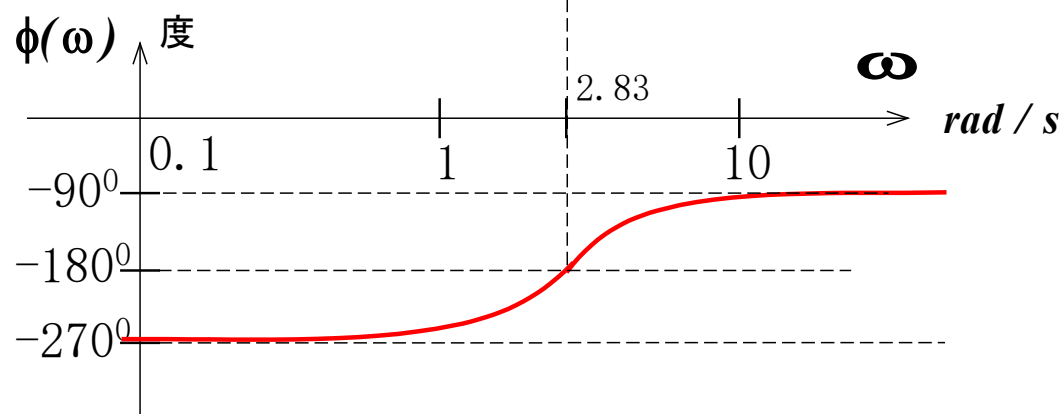
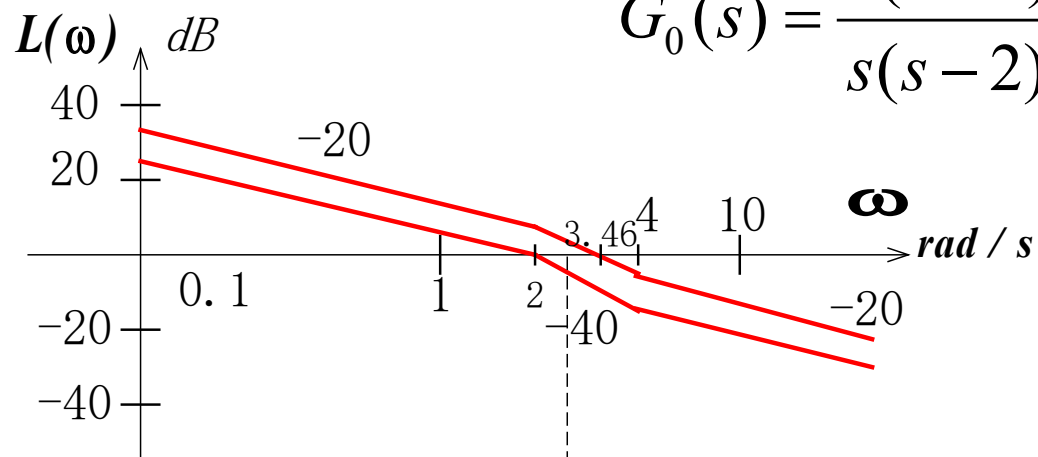
$$\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} > k > 0$$



## 第4章习题练习

例6 已知开环传递函数，绘制Bode图，分析系统稳定性

$$G_0(s) = \frac{k(s+4)}{s(s-2)} = \frac{2k(0.25s+1)}{s(0.5s-1)} \quad (k=1 \text{ 和 } k=3)$$



画幅频特性：①  $\omega=1$

$$k=1, 20\lg 2=6\text{db}$$

$$k=3, 20\lg 6=15\text{db}$$

$$\textcircled{2} \omega_1=2, -20$$

$$\omega_1=4, -20$$

画相频特性：

$$\omega \rightarrow 0, \angle G_0(j\omega) \rightarrow -270^\circ$$

$$\omega \rightarrow \infty, \angle G_0(j\omega) \rightarrow -90^\circ$$

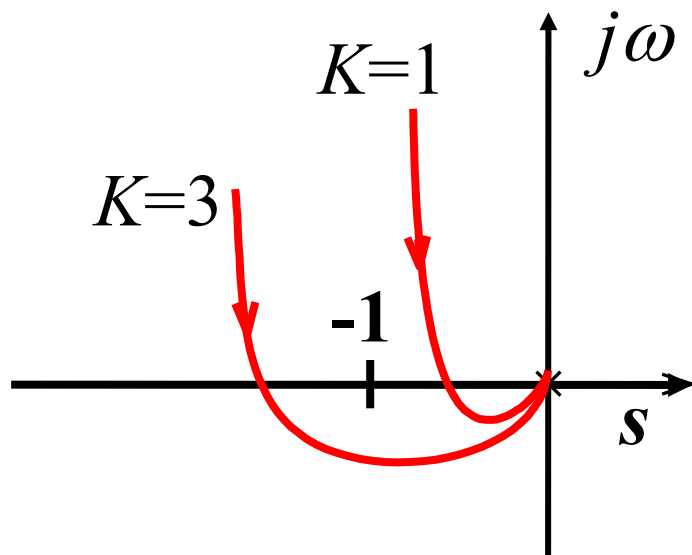
## 第4章习题练习

$$G_0(s) = \frac{k(s+4)}{s(s-2)}$$

$\Phi(\omega) = -180^\circ$  时,  $\omega_c = \sqrt{2 \times 4} = 2.83$  此时为临界稳定

①  $k=1$  时,  $\omega_{c1}=2$ ,  $\gamma = -18.4^\circ < 0$ ,  $k_g > 0$

②  $k=3$  时,  $\omega_{c2}=3.46$ ,  $\gamma = 10.9^\circ > 0$ ,  $k_g < 0$



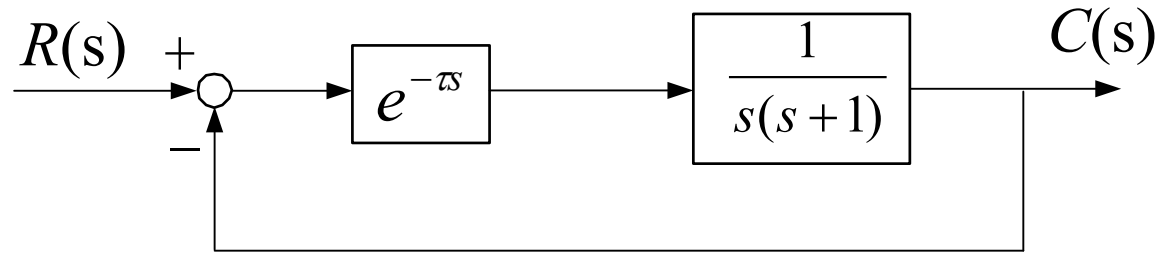
本题不是最小相位系统, 虽然只看相角裕量, 也有正确答案, 但是, 一般情况不能用稳定裕量方法来判系统稳定, 应该用Nyquist 判据或Routh判据来判稳定, 如左图所示。

$k=1$ , 系统不稳定

$k=3$ , 系统稳定

## 第4章习题练习

例7：已知如图所示延迟系统，试确定系统稳定时所容许的最大延迟时间 $\tau_{\max}$



解：系统的开环传递函数为  $G_0(s) = \frac{e^{-\tau s}}{s(s+1)}$

系统的开环频率特性为  $G_0(j\omega) = \frac{e^{-j\tau\omega}}{j\omega(j\omega+1)}$

$$|G_0(j\omega)| = \frac{1}{\omega\sqrt{\omega^2+1}} \quad \angle G_0(j\omega) = -90^\circ - \arctan \omega - 57.3^\circ \tau\omega$$

## 第4章习题练习

$$G_0(s) = \frac{e^{-\tau s}}{s(s+1)}$$

$$G_0(j\omega) = \frac{e^{-j\tau\omega}}{j\omega(j\omega+1)}$$

$$|G_0(j\omega)| = \frac{1}{\omega\sqrt{\omega^2+1}} \quad \angle G_0(j\omega) = -90^\circ - \arctan \omega - 57.3^\circ \tau\omega$$

$$\text{令 } |G_0(j\omega_c)| = 1 \quad \longrightarrow \quad \omega_c \sqrt{\omega_c^2 + 1} = 1$$

$$\text{开环幅值穿越频率} \quad \omega_c = 0.786$$

$$\text{令 } \gamma = 180^\circ + \angle G_0(j\omega) = 180^\circ - 90^\circ - \arctan \omega - 57.3^\circ \tau\omega = 0$$

$$\text{得到容许的最大延迟时间为 } \tau_{\max} = \frac{51.83}{45.04} = 1.15$$

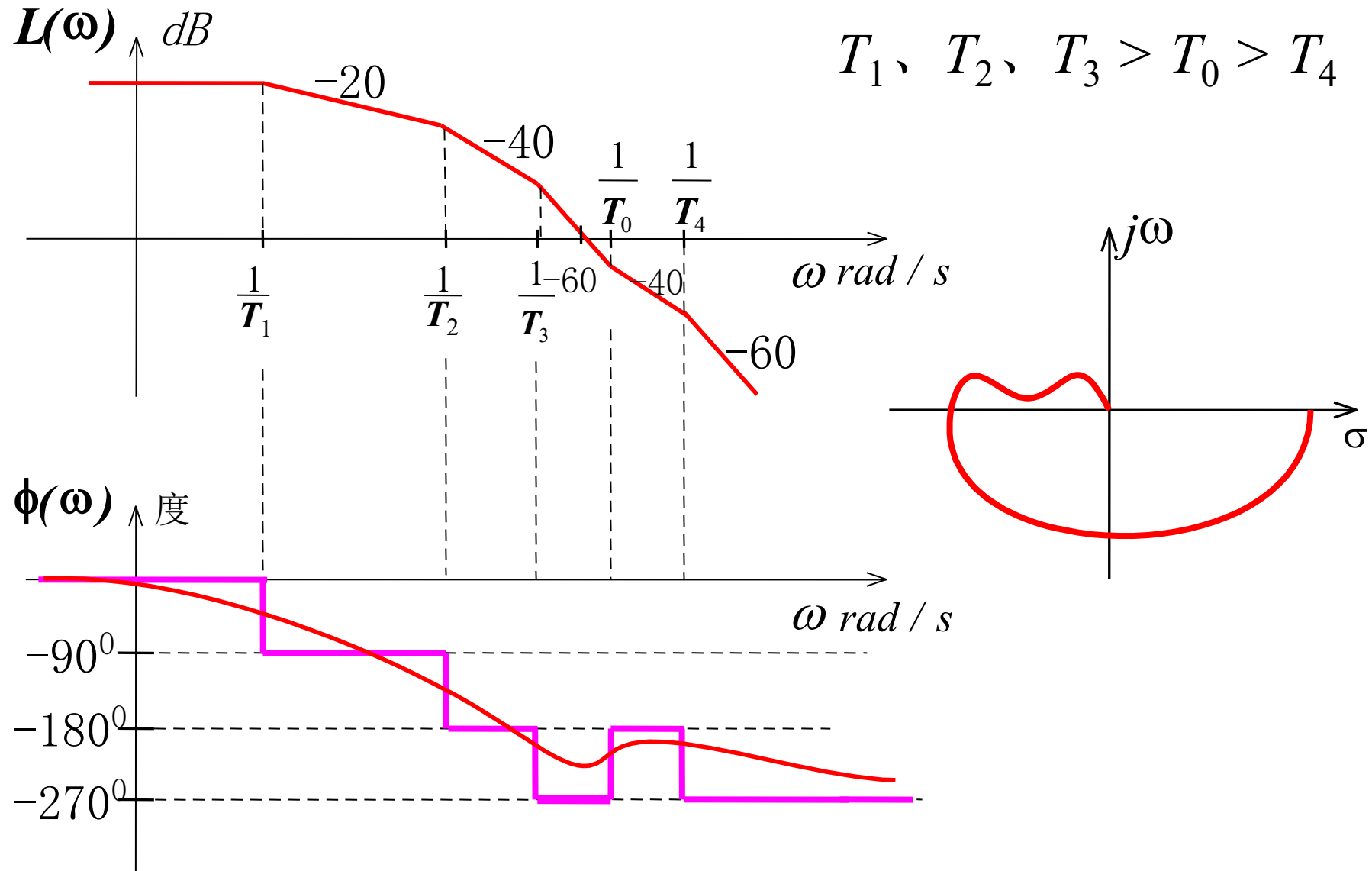
## 第4章习题练习

例8：已知开环传递函数，其中  $T_1$ 、 $T_2$ 、 $T_3 > T_0 > T_4$ ，绘制系统的Nyquist图(正频部分)

$$G_0(s) = \frac{k(T_0 j\omega + 1)}{(T_1 j\omega + 1)(T_2 j\omega + 1)(T_3 j\omega + 1)(T_4 j\omega + 1)}$$

本题直接画Nyquist图很难画得准确，如果先画Bode图，再根据Bode图画Nyquist图就可以较快得到一个相对准确的变化趋势。

$$G_0(s) = \frac{k(T_0 j\omega + 1)}{(T_1 j\omega + 1)(T_2 j\omega + 1)(T_3 j\omega + 1)(T_4 j\omega + 1)}$$



## 第3章小结

### 5、根轨迹

(1)绘制根轨迹的依据传递函数的分母方程  $1 + G_0(s) = 0$

由此得  $G_0(s) = -1$       相角条件  $\angle G_0(s) = 180^\circ \pm k360^\circ$

(2)绘制根轨迹的8条规则

#### ①根轨迹的起点和终点

当 $K'$ 从0到 $\infty$ 变化时, 根轨迹起点为 $G_0(s)$ 的极点, 终点为 $G_0(s)$ 的零点。

$n > m$ 时, 有  $(n - m)$  条分支趋于无穷



## 第3章小结

### 2、根轨迹的条数

根轨迹的条数等于 $G_0(s)$ 的极点个数。

### 3、根轨迹的渐近线

共有  $(n-m)$  条渐近线

实轴交点

$$F = \frac{\sum_{j=1}^n (-p_j) - \sum_{i=1}^m (-z_i)}{n-m} = \frac{\sum \text{极点坐标} - \sum \text{零点坐标}}{\text{极点数} - \text{零点数}}$$

与实轴夹角

$$\alpha = \frac{2k+1}{n-m} \times 180^\circ$$





## 第3章小结

### 4、根轨迹的对称性

根轨迹关于实轴对称

### 5、实轴上的根轨迹

实轴上凡右边具有奇数个零极点的部分是根轨迹。

### 6、根轨迹的分离点(会合点)

★分离点(会合点)是闭环特征方程的重根

$$\frac{dK'}{ds} = 0 \quad \text{解出 } S \text{ 值, 取 } K' > 0 \text{ 时的重根点}$$



## 第3章小结

---

### 7、出射角和入射角

出射角(入射角): 根轨迹在出射点(入射点)的切线与实轴正方向的夹角。

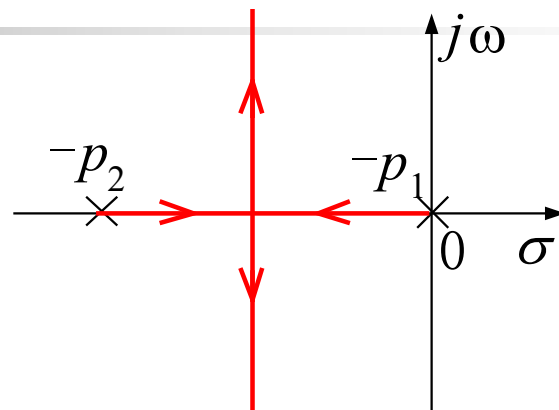
★出射角和入射角都满足相角条件。

### 8、根轨迹与虚轴的交点

★应用Routh判据可以确定根轨迹与虚轴的交点。

## 第3章小结

★除根轨迹的8条规则外，还需注意根轨迹在实轴上的相交点必定垂直于实轴。



★标准根轨迹反映 $K'$ 从0到 $\infty$ 变化过程闭环极点的变化，必须用箭头标识

(3)绘制根轨迹的8条规则中，前5条可决定根轨迹的概略

仅根据8条规则，根轨迹可能会有不确定的部分

绘制根轨迹过程，除灵活运用前5条规则，必要时需要配合相角条件验证个别细节。如果凭想象，或猜测，则不是科学的作风，往往会出错。

## 第3章习题练习

例5、已知系统的开环传递函数，绘制其根轨迹。

$$G_0(s) = \frac{k(s+1)}{s(s+3)^2}$$

开环零极点：

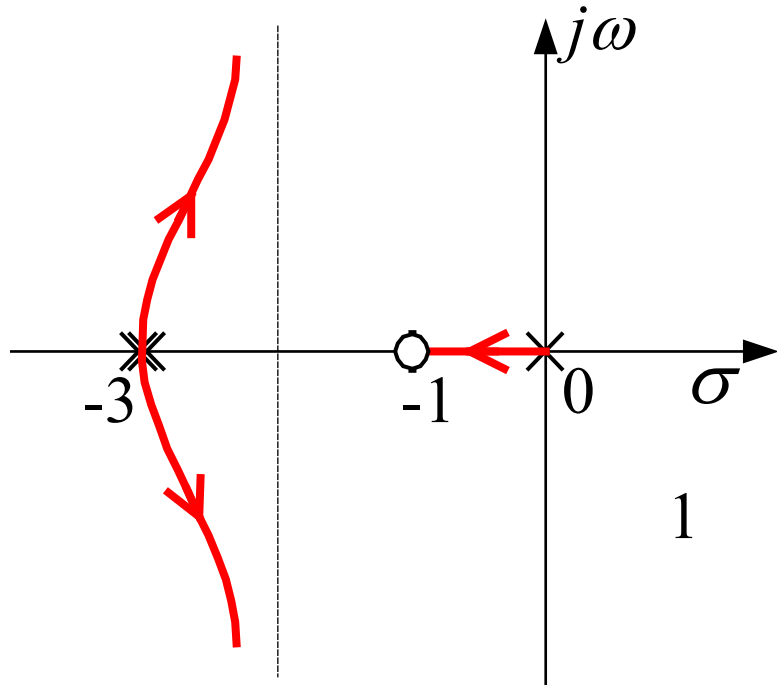
$$-z_1 = -1, \quad -p_1 = 0, \quad -p_{2,3} = -3$$

渐近线与实轴交点

$$F = \frac{-3-3+1}{3-1} = \frac{-5}{2} = -2.5$$

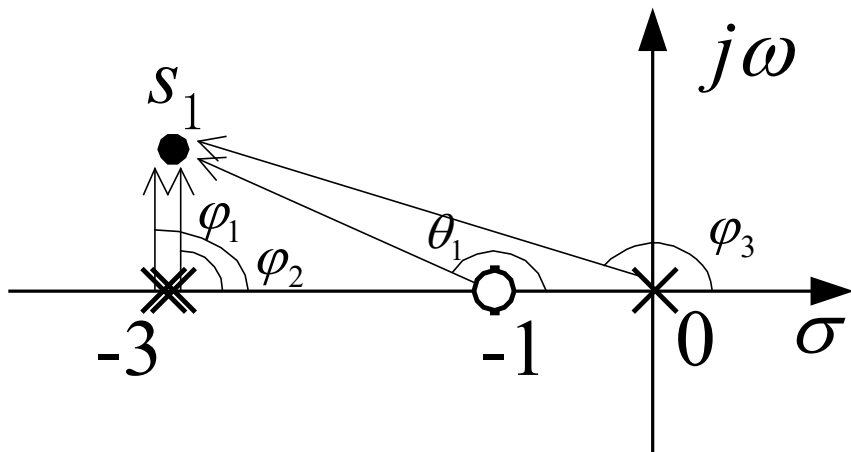
渐近线与实轴夹角

$$\alpha = \pm 90^\circ$$



# 第3章习题练习

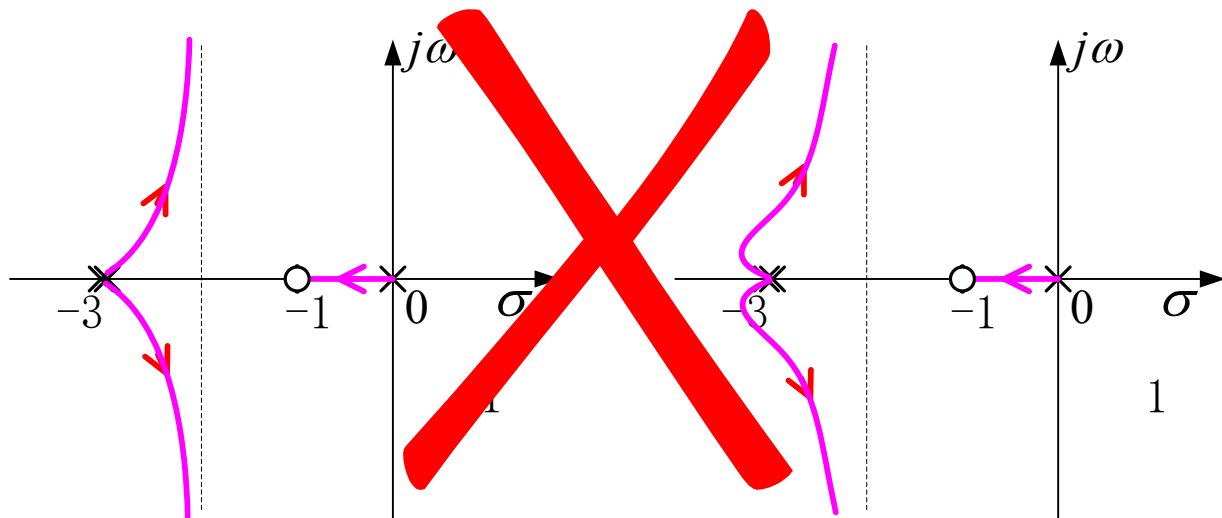
在重极点-3附近的根轨迹形状讨论：



$s_1$ 点的相角条件为

$$-\varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3 + \theta_1 \\ = -90^\circ - 90^\circ - 180^\circ + 180^\circ = -180^\circ$$

故  $s_1$  为根轨迹上的点



一般，根轨迹与实轴交点处，根轨迹都垂直于实轴。


## 第3章习题练习

例6、已知单位负反馈系统的开环传递函数  $G_0(s) = \frac{s+a}{s(s+1)^2}$

- (1) 绘制  $a$  从  $0 \rightarrow \infty$  时闭环系统的根轨迹图;
- (2) 当系统输入  $r(t)=1.2t$  时, 确定使系统静态误差  $e_{ss} \leq 0.6$  的  $a$  值范围; 定义系统的误差为  $e_{ss}(t)=r(t)-y(t)$

解: (1) 闭环系统的特征方程

$$s(s+1)^2 + s + a = s^3 + 2s^2 + 2s + a = 0$$


$$1 + \frac{a}{s(s^2 + 2s + 2)} = 0$$

等效开环传递函数  $G_1(s) = \frac{a}{s(s^2 + 2s + 2)} = \frac{a}{s(s+1+j)(s+1-j)}$

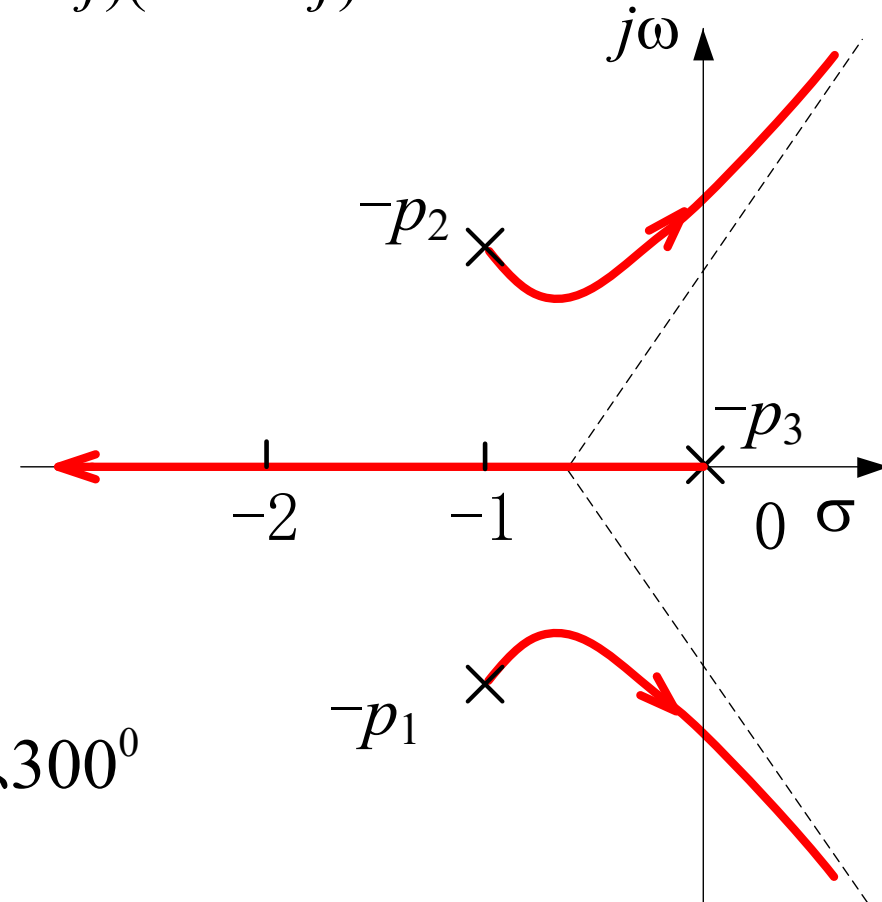
## 第3章习题练习

$$G_1(s) = \frac{a}{s(s^2 + 2s + 2)} = \frac{a}{s(s+1+j)(s+1-j)}$$

$$\begin{aligned} -p_1 &= -1-j \\ -p_2 &= -1+j \end{aligned} \quad -p_3 = 0$$

$$F = \frac{-2-0}{3} = -\frac{2}{3}$$

$$\alpha = \frac{2k+1}{3}180^\circ = 60^\circ, 180^\circ, 300^\circ$$



## 第3章习题练习

$$G_1(s) = \frac{a}{s(s^2 + 2s + 2)} = \frac{a}{s(s + 1 + j)(s + 1 - j)}$$

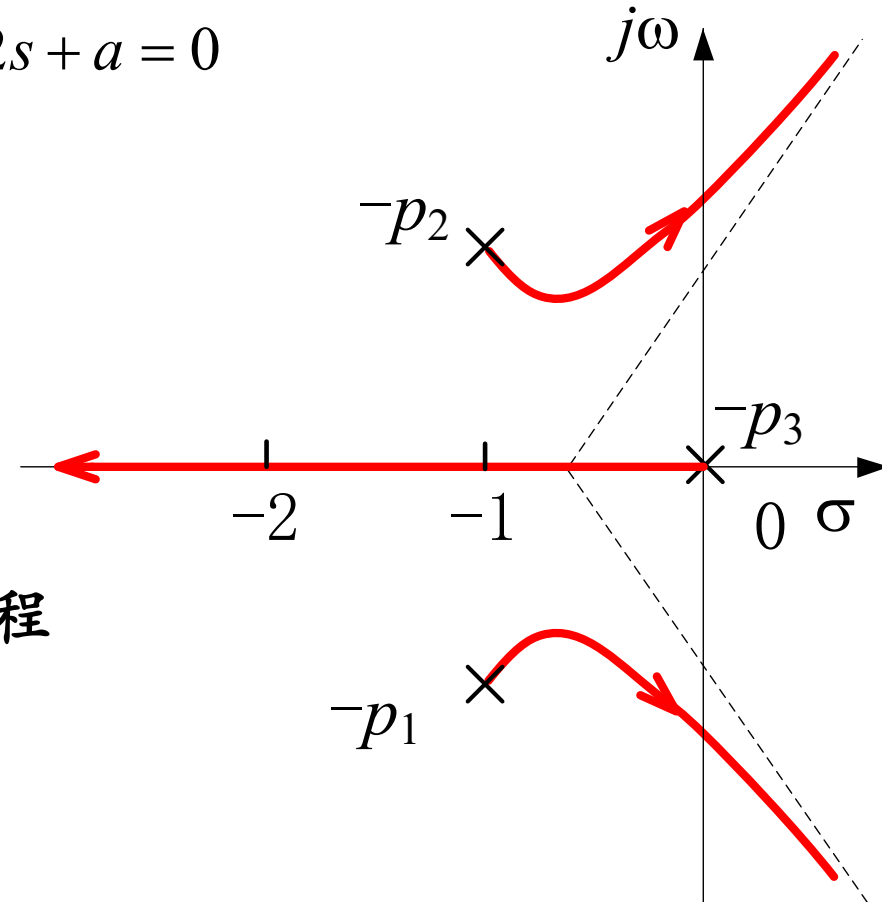
$$s(s + 1)^2 + s + a = s^3 + 2s^2 + 2s + a = 0$$

|       |                 |     |
|-------|-----------------|-----|
| $s^3$ | 1               | 2   |
| $s^2$ | 2               | $a$ |
| $s^1$ | $\frac{4-a}{2}$ | 0   |
| $s^0$ | $a$             |     |

$a=4$ 时系统临界稳定，辅助方程

$$2s^2 + a = 0$$

与虚轴交点处  $s = \pm j\sqrt{2}$





## 第3章习题练习

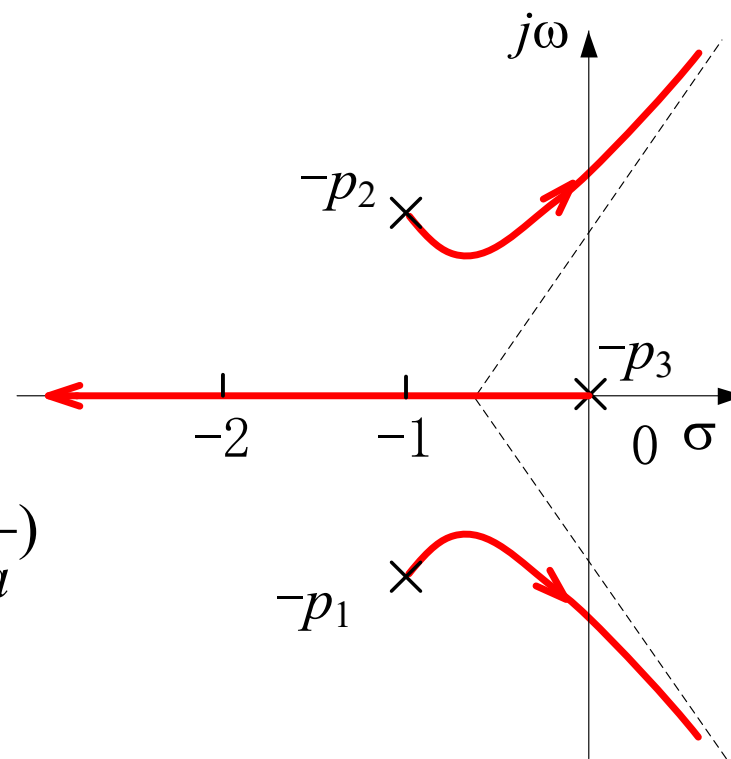
(2) 当系统输入  $r(t)=1.2t$  时, 确定使系统静态误差  $e_{ss} \leq 0.6$  的  $a$  值范围;

系统稳定, 要求  $0 < a < 4$

$$R(s) = \frac{1.2}{s^2}$$

$$\begin{aligned} e_{ss} &= \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1.2}{s^2} \cdot \left(1 - \frac{s+a}{s^3 + 2s^2 + 2s + a}\right) \\ &= \frac{1.2}{a} \leq 0.6 \end{aligned}$$

→  $2 \leq a < 4$



## 第3章习题练习

例7、已知单位负反馈系统的开环传递函数  $G_0(s) = \frac{K}{s(s+3)^2}$

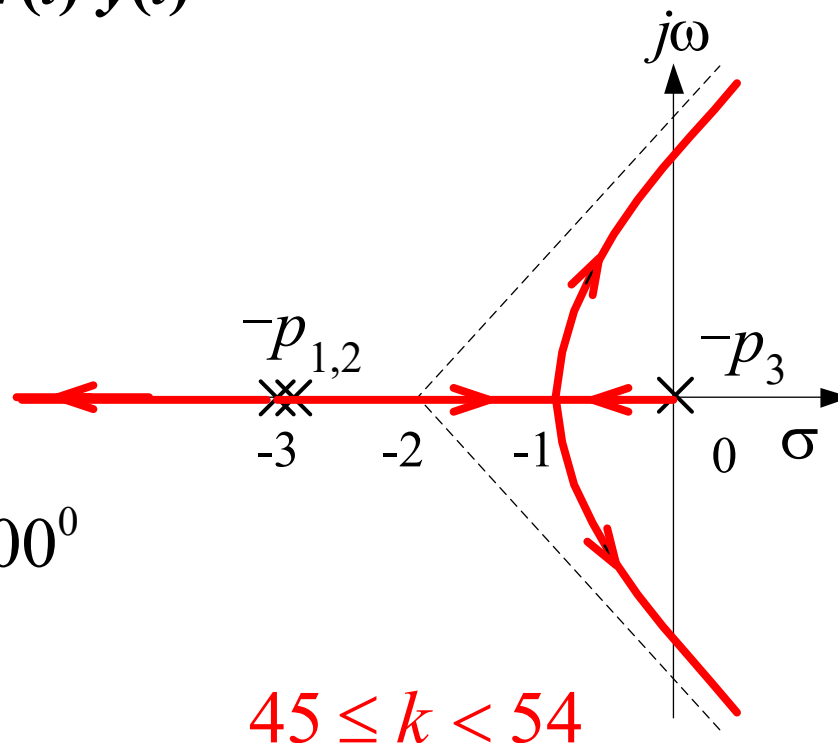
- (1) 绘制  $K$  从  $0 \rightarrow \infty$  时闭环系统的根轨迹图；
- (2) 当系统输入  $r(t)=t$  时，确定使系统静态误差  $e_{ss} \leq 0.2$  的  $k$  值范围；定义系统的误差为  $e_{ss}(t)=r(t)-y(t)$

$$-p_{1,2} = -3 \quad -p_3 = 0$$

$$F = \frac{-6-0}{3} = -2$$

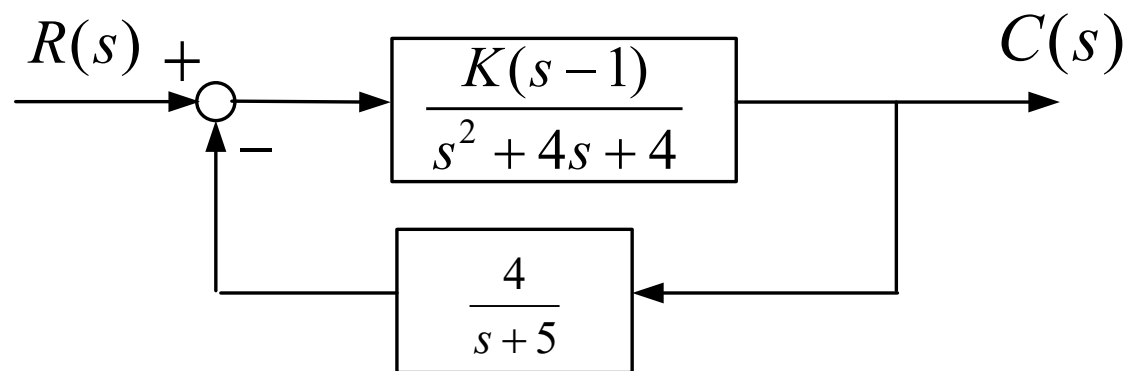
$$\alpha = \frac{2k+1}{3} 180^\circ = 60^\circ, 180^\circ, 300^\circ$$

分离点  $s = -1$



## 第3章习题练习

例8、已知系统结构图如图所示。(1) 绘出系统的根轨迹图, 并确定使闭环系统稳定的 $K$ 值范围; (2) 若已知闭环系统的一个极点为 $s_1 = -1$ , 试确定此时系统的闭环传递函数。

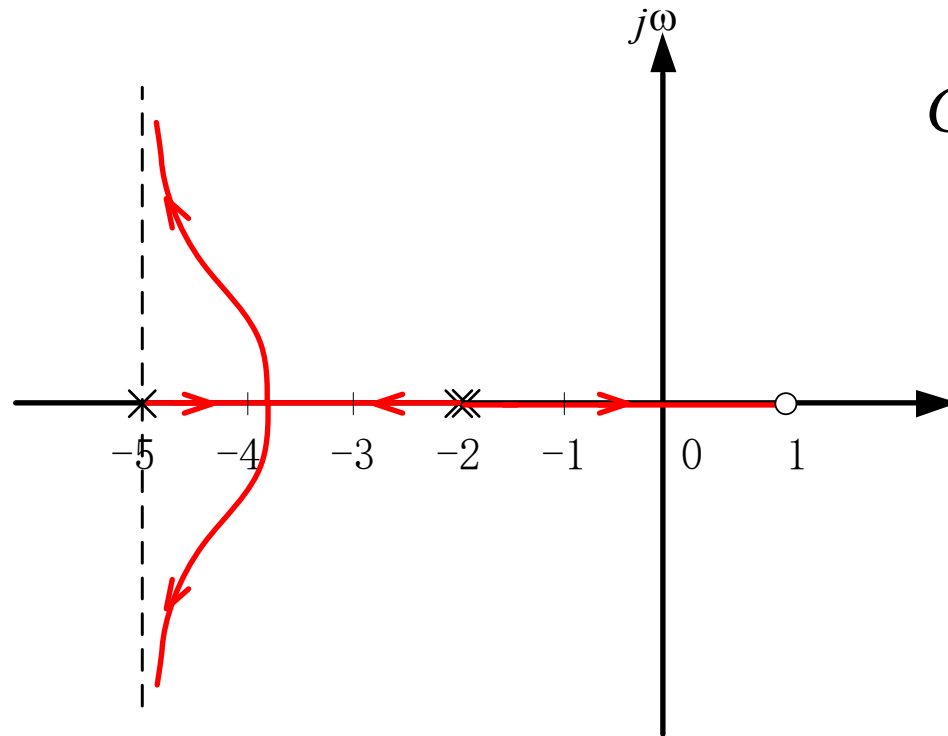


解: 开环传递函数  $G_0(s) = \frac{4K(s-1)}{(s+5)(s+2)^2}$

渐近线  $F = \frac{-5-2-2-1}{3-1} = -5$        $\alpha = \frac{2k+1}{3-1} \cdot 180^\circ = \pm 90^\circ$

由计算知分离点处  $K = 0.203$       分离点坐标  $(-3.85, j0)$

## 第3章习题练习



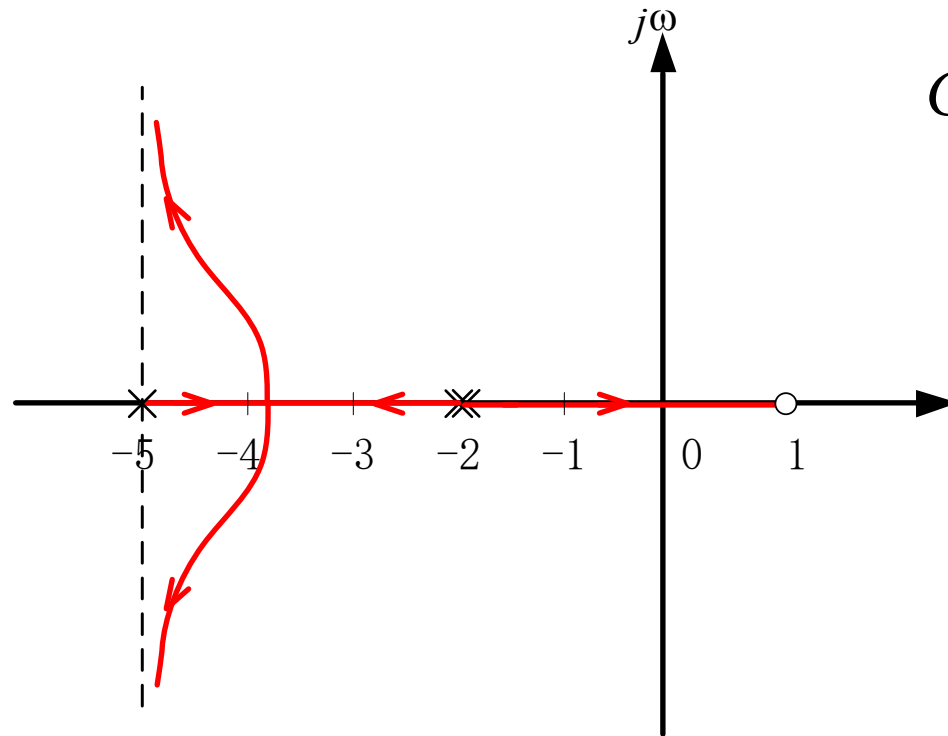
$$G_0(s) = \frac{4K(s-1)}{(s+5)(s+2)^2}$$

当 $s=0$ 时，系统处于临界稳定，此时根据模值条件

$$|G_0(0)| = \left| \frac{4K(0-1)}{(0+5)(0+2)^2} \right| = \frac{4K}{20} = 1 \quad \Rightarrow \quad K = 5$$

因此使得闭环系统稳定的 $K$ 值范围为  $0 < K < 5$

## 第3章习题练习



$$G_0(s) = \frac{4K(s-1)}{(s+5)(s+2)^2}$$

闭环系统传递函数  $G(s) = \frac{K(s-1)(s+5)}{(s+5)(s+2)^2 + 4K(s-1)}$

已知系统一个极点为  $s_1 = -1$   $(-1+5)(-1+2)^2 + 4K(-1-1) = 0$

因此  $K = 0.5$

祝大家考出好的成绩！

