

# 第六次作业

1. 京西物流公司计划在某城镇拓展业务。经市场部门调研，该城镇有 8 处住宅区，每个住宅区人口如表所示。公司计划投资建造 2 个快递转运站将快递配送至住宅区。可供建造转运站的地点有 6 处，每个候选地点到住宅区的平均运输时间如表所示。公司在哪 2 个地点建造转运站可以使配送时间在 12 分钟以内的人口最多？写出整数规划模型。

社区	配送站候选地点						人口
	1	2	3	4	5	6	
1	15	17	27	5	25	22	120
2	10	12	24	4	22	20	80
3	5	6	17	9	21	17	110
4	7	6	8	15	13	10	140
5	14	12	6	23	6	8	220
6	18	17	10	28	9	5	180
7	11	10	5	21	10	9	160
8	24	22	22	33	6	16	200

2. 一个交通网由节点  $n \in \mathcal{N}$  和公路  $a \in \mathcal{A}$  构成，其中节点表示公路交汇的路口。交通网的连接关系由节点-支路矩阵  $\Lambda \in \mathbb{R}^{|\mathcal{N}| \times |\mathcal{A}|}$  描述，该矩阵每行对应一个节点，每列对应一条支路，该矩阵每个元素的含义为：

$$\Lambda_{ij} = \begin{cases} +1 & \text{若节点 } i \text{ 是支路 } j \text{ 的入口;} \\ -1 & \text{若节点 } i \text{ 是支路 } j \text{ 的出口;} \\ 0 & \text{若节点 } i \text{ 与支路 } j \text{ 无关。} \end{cases}$$

由于每条支路有两个端点，故  $\Lambda$  的任何一列只有两个非零元，一个是 +1 对应入口节点，另一个是 -1 对应出口节点。

(a) 某车从节点  $s$  出发行驶到终点  $t$ ，决策变量为经过哪些路段。将决策变量记为向量  $v \in \mathbb{R}^{|\mathcal{A}|}$ ，其元素含义为

$$v_j = \begin{cases} 1 & \text{行程经过支路 } j \\ 0 & \text{行程不经过支路 } j \end{cases}$$

写出所有可行解（可能的行程）满足的条件。

- (b) 道路实时流量监控表明，路段  $a \in \mathcal{A}$  上的通行时间是  $t_a$ 。写出求解时间最短行程对应的 0-1 整数线性规划问题。

3. 将以下函数表示为含 0-1 变量的线性约束

- (a) 阶跃函数

$$z = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

已知  $|x| < x_m$  且  $x \neq 0$ ，用  $x$  和  $z$  表示，无需额外变量

- (b) 逻辑或  $b = \max\{a_1, \dots, a_n\}$ ，其中  $a_1, \dots, a_n$  和  $b$  都是 0-1 变量，无需额外变量

- (c) 逻辑与  $b = \min\{a_1, \dots, a_n\}$ ，其中  $a_1, \dots, a_n$  和  $b$  都是 0-1 变量，无需额外变量

4. 用整数线性规划求解整数非线性规划问题

- (a) 将线性分式 0-1 整数规划

$$\max \left\{ \frac{a_0 + \sum_{i=1}^n a_i x_i}{b_0 + \sum_{i=1}^n b_i x_i} : x \in \{0, 1\}^n \right\}$$

转化为 0-1 整数线性规划，已知

$$b_0 + \sum_{i=1}^n b_i x_i \neq 0, \forall x \in \{0, 1\}^n$$

- (b) 将 0-1 整数多项式优化

$$\begin{aligned} \max \quad & 2(x_1 x_2 x_3)^{2025} + x_1^2 x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 12x_1 + 7x_2^2 x_3 - 3x_1 x_3 \leq 16 \\ & x_1, x_2, x_3 \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

转化为 0-1 整数线性规划。

5. 用分支定解法求解以下整数规划问题

$$\begin{aligned} \max \quad & 5x_1 - 2x_2 \\ \text{s.t.} \quad & -x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 19 \\ & x_1 + 3x_2 \geq 9 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+ \end{aligned}$$