清華大學电机工程与应用电子技术系
Department of Electrical Engineering, Tsinghua University

电力系统分析与控制
(30220562)

第八讲 不确定性优化（二）

2025-4-18

分享交流

任务三：随机规划

课程提纲

Outlines

鲁棒优化基础

两阶段鲁棒优化

任务四讲解

鲁棒优化基础

Robust Optimization

鲁棒优化（Robust Optimization，RO）

- 随机规划和机会约束规划均需知道随机变量的概率分布，然而现实中很多含有随机性的参数**难以获得其概率分布**函数，前述模型不再适用。
- 有时候希望约束在最坏的情况下也能满足，最优解对参数变化的敏感度低，**保证系统的鲁棒性**。

在此基础上，提出了鲁棒优化：

约束条件

其他约束

功率平衡

机组运行

潮流安全

$\forall \tilde{p}^{w} \in \Xi$

不确定集

求最坏情况下的最优解

鲁棒优化（Robust Optimization，RO）

传统单阶段鲁棒优化：在最坏场景下（max_u）寻找最优解（min_x）

$$min_x max_u(\text{成本})$$

决策变量　　随机变量

例：你有一个火电机组和一台风机，希望最小化火电机组出力

$$\begin{aligned} \min_{p_g} \quad & p_g \\ \text{s.t.} \quad & p_g + w \geq 100, \quad \forall w \in [30, 50] \\ & 0 \leq p_g \leq 80 \end{aligned}$$

P_g是决策变量，ω是随机变量

最坏情况：风电出力为30，此时优化得到火电出力为70

简单鲁棒优化问题解法

更一般地，考虑目标函数确定的线性优化问题。约束中x为决策变量，ε为随机变量，$\mathcal{U}$为多面体不确定集：

$$\begin{aligned} &\min \quad c^T x \\ &s.t. \quad (a + P\boldsymbol{\varepsilon})^T x \le \boldsymbol{d} \\ &\qquad\quad \boldsymbol{\varepsilon} \in \boldsymbol{\mathcal{U}}, \boldsymbol{\mathcal{U}} = \{\boldsymbol{\varepsilon}: \boldsymbol{D\varepsilon} + \boldsymbol{q} \ge 0\} \end{aligned}$$

可以将约束改写成：$\boldsymbol{a^T x + max_{D\varepsilon+q\ge0}\{(P^T x)^T \varepsilon\} \le d}$

求max问题的对偶得到：$\boldsymbol{a^T x + min_w\{q^T w: D^T w = -P^T x, w \ge 0\} \le d}$

因为约束对于至少一个w成立就足够，故省略最小项得转化后的优化问题：

$$\begin{aligned} &\min \quad c^T x \\ &\boldsymbol{s.t.} \quad \exists \boldsymbol{w}: \ \boldsymbol{a^T x + q^T w \le d, D^T w = -P^T x, w \ge 0} \end{aligned}$$

鲁棒优化与随机规划的对比

对比维度	鲁棒优化（RO）	随机规划（SP）
不确定性建模方式	使用**不确定性集合**（如区间、polytope、椭球），无需概率信息	使用**概率分布建模**（连续或离散分布、场景树），需历史数据或分布假设
优化目标	**最坏情形优化**：优化所有不确定下的最差性能	**期望值优化**：优化所有场景的期望性能，也可考虑机会约束
典型数学形式	$min_x \; max_u f(x;u)$	$min_x \; E[f(x;\xi)]$ 或多阶段递归形式
建模依赖	不依赖数据分布，仅需不确定参数的范围/集合	依赖分布或大量历史样本，需估计概率或场景权重
适用场景	高可靠性要求、不确定性信息缺失、电力调度、金融风险控制	概率信息充分、追求平均性能、库存/投资组合设计

鲁棒优化的优缺点

优点

模型稳健性强：保证解在所有不确定集合中都可行，适用于安全性要求高的系统；

分布无关：只需构造一个确定的不确定性集合（如区间或多面体）。

缺点

过度保守：为保证在所有扰动下可行，常导致性能损失，尤其当不确定性集合过宽时；

欠缺概率性分析：无法量化“不满足约束的概率”，难以与风险度量方法对接；

单阶段静态决策限制：经典鲁棒优化假设所有决策在扰动出现前确定，无法体现灵活应对能力；

不确定集合构造困难：在实际中如何合理构造不确定性集仍是一个建模挑战。

鲁棒优化的改进思路

改进思路

如何处理决策变量？

两阶段鲁棒优化：第一阶段决策（对所有扰动适用）+第二阶段调整（观察扰动后调整）；

双层优化结构，面向实际应用中的决策流程（如电力系统日前-日内调度）

可调鲁棒优化：允许部分决策变量根据扰动以线性函数或分段函数调整；

第二阶段决策变量建模为不确定参数的显式函数（仿射），转化为单层优化

如何建模不确定集？

分布鲁棒优化：不假设确切概率分布，但假设其属于一个分布集合；

介于传统鲁棒和随机之间，可在鲁棒性与性能之间取得平衡。（如何描述分布间的距离？）

如何减小寻优空间？

K-适应性鲁棒优化：在观察扰动前，准备k个预选方案；扰动发生后，选择最合适的。

保留一定的适应能力，同时比较易处理。多手准备，见招拆招。

……

两阶段鲁棒优化
Two-Stage Robust Optimization

电力现货市场出清模型

➢ 电力市场运行是在考虑电网安全约束以及物理运行特性的前提下，优先调用系统中报价最低的发电机组。

第一阶段

首先求解安全约束机组组合，得到机组的启停状态

SCUC

Security-Constrained Unit Commitment

第二阶段

再求解安全约束经济调度，输出中标曲线及节点电价

SCED

Security-Constrained Economic Dispatch

电力市场交易中最主要的两个工具，本质是数学优化问题。

SCUC模型

- 首先求解SCUC模型，得到模型中的整数（机组的启停状态）。

优化目标

最小化发电成本 = 运行成本+空载成本+启动成本+线路约束罚函数+断面约束罚函数

约束条件

■ 机组约束
- 出力上下限约束
- 爬坡速率约束
- 最小连续开停时间约束
- 最大启停次数约束

■ 系统约束
- 负荷平衡约束
- 系统正备用约束
- 系统负备用约束
- 系统旋转备用约束

■ 网络约束
- 线路潮流约束
- 断面传输极限约束

SCED模型

- 再求解SCED模型，输出中标曲线及节点电价。

优化目标	**最小化发电成本** = 运行成本+空载成本+启动成本+线路约束罚函数+断面约束罚函数

约束条件

■ 机组约束
- 出力上下限约束
- 爬坡速率约束
- 最小连续开停时间约束
- 最大启停次数约束

■ 系统约束
- 负荷平衡约束
- 系统正备用约束
- 系统负备用约束
- 系统旋转备用约束

■ 网络约束
- 线路潮流约束
- 断面传输极限约束

第一阶段SCUC时决策，第二阶段SCED不考虑

案例：考虑风电出力不确定性的日前-日内调度问题

在电力系统中调度中，存在不同时间尺度的决策过程（如日前、日内），因此需要引入两阶段的鲁棒优化

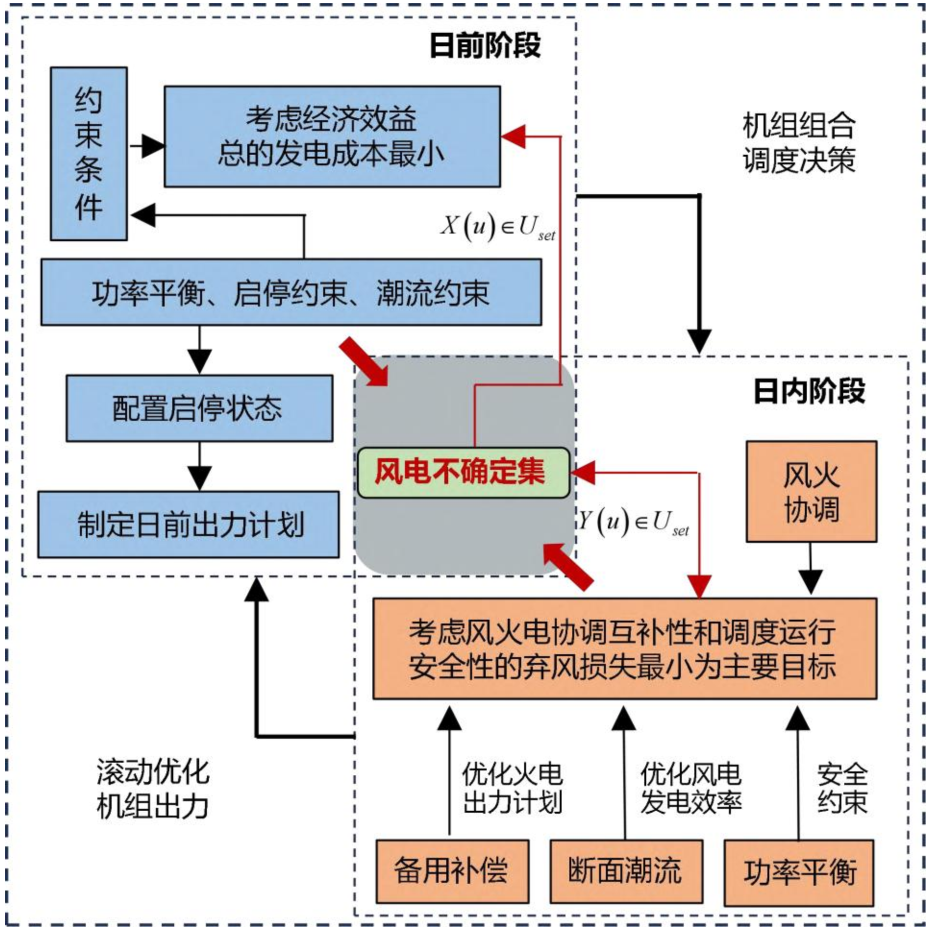
$\boldsymbol{min_x}$ (日前调度运行成本) $\boldsymbol{max_u min_y}$ (日内调度运行成本)

第一阶段决策变量 ↑ 启停决策变量 备用决策变量

随机变量 ↑ 风电不确定参数集参数

第二阶段决策变量 ↑ 风电出力不确定性决策变量

如何求解两阶段的鲁棒优化问题?



[1]叶林,张步昇,郭凯蕾,裴铭,夏雪 & 谢欢.风火联合发电系统日前-日内两阶段协同优化调度.中国电机工程学报,1-13.doi:10.13334/j.0258-8013.pcsee.232215.

两阶段鲁棒优化问题数学模型

$$\min_{\mathbf{y}} \quad \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{y} + \max_{u\in\mathcal{U}} \min_{\mathbf{x}\in\mathbf{F}(\mathbf{y},u)} \mathbf{b}^{T}\mathbf{x} \tag{1}$$

$$s.t. \quad \mathbf{A}\mathbf{y} \geqslant \mathbf{d}, \tag{2}$$

$$\mathbf{G}\mathbf{x} \geqslant \mathbf{h} - \mathbf{E}\mathbf{y} - \mathbf{M}u, \qquad u \in \mathcal{U} \tag{3}$$

$$\mathbf{S}_{\mathbf{y}} \subseteq \mathbb{R}_{+}^{n} \tag{4}$$

$$\mathbf{S}_{\mathbf{x}} \subseteq \mathbb{R}_{+}^{m} \tag{5}$$

•**变量说明**：y为第一阶段的决策变量；x为第二阶段的决策变量；c为第一阶段的决策变量相关的参数，是确定的；u为第二阶段的决策变量相关的参数，是不确定的，且其不确定参数的取值范围由不确定集刻画。

•**目标函数说明**：第一项对应第一阶段决策。第二项对应第二阶段决策，该决策需要在第一阶段决策确定之后再做出，旨在找到“worst case”，也即在最坏情况下，第二阶段的目标值。

•**约束说明**：约束(2)只跟第一阶段的决策有关；约束(3)中跟第一阶段，第二阶段的决策都有关，且包含不确定参数。

Column and Constraint Generation(C&CG)算法思想

- 首先，**只考虑第一阶段的决策变量**和只包含第一阶段决策变量的约束，这个版本可以看做是整个问题的一个**松弛**版本。
- 然后我们想办法**将松弛了的部分的影响逐渐添加回来**。第二阶段的目标旨在找到worst case。假设我们直接可以找到worst case，我们只需要直接将worst case下的参数，及其对应的约束带入到主问题中即可等价地解决两阶段鲁棒优化问题。
- 但是直接识别worst case一般是不可能的。不过，我们可以通过固定第一阶段的决策变量y。然后求解其对应的第二阶段的子问题，并且找到一个非常可能是worst case的u*，之后**将这个非常可能是worst case的u*对应的场景下的决策变量x和约束全部加回到主问题中**。循环这个操作，主问题中考虑的可能是最坏场景的场景就会越来越多，解就会被逐渐改进，最终达到最优解。

双层鲁棒问题分解

将两阶段鲁棒优化模型分解为主问题+子问题：

y^*_{k+1}、UB

松弛解

主问题MP

$$
\begin{aligned}
\min_{\mathbf{y}} \quad & \mathbf{c}^{\mathbf{T}}\mathbf{y} + \eta \\
s.t. \quad & \mathbf{A}\mathbf{y} \geqslant \mathbf{d} \\
& \eta \geqslant \mathbf{b}^{\mathbf{T}}\mathbf{x}^{l}, && l = 1, \cdots, r \\
& \mathbf{E}\mathbf{y} + \mathbf{G}\mathbf{x}^{l} \geqslant \mathbf{h} - \mathbf{M}u_{l}, && l = 1, \cdots, r \\
& \mathbf{y} \in \mathbf{S}_{\mathbf{y}} \\
& \mathbf{x}^{l} \in \mathbf{S}_{\mathbf{x}}, && l = 1, \cdots, r.
\end{aligned}
$$

子问题SP：

$$
\begin{aligned}
\max_{u \in \mathcal{U}} \min_{\mathbf{x} \in \mathbf{F}(\mathbf{y}, u)} \quad & \mathbf{b}^{T}\mathbf{x} \\
s.t. \quad & \mathbf{G}\mathbf{x} \geqslant \mathbf{h} - \mathbf{E}\mathbf{y} - \mathbf{M}u, \qquad u \in \mathcal{U} \\
& \mathbf{S}_{\mathbf{x}} \subseteq \mathbb{R}^{m}_{+}
\end{aligned}
$$

可能的最坏场景

u^*_{k+1}、x_{k+1}、LB

New Constraints

MP是线性的；
如何求解SP?

SP问题分解转化

通过对内层使用KKT条件，则SP可以变化为：

$$\begin{aligned} \max_{u\in\mathcal{U}} \ \min_{\mathbf{x}\in\mathbf{F}(\mathbf{y},u)} \quad & \mathbf{b}^T\mathbf{x} \\ s.t. \quad & \mathbf{G}\mathbf{x} \geqslant \mathbf{h} - \mathbf{E}\mathbf{y} - \mathbf{M}u, \\ & \mathbf{S}_{\mathbf{x}} \subseteq \mathbb{R}_+^m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max_{u\in\mathcal{U}} \quad & \mathbf{b}^T\mathbf{x} \\ s.t. \quad & \mathbf{G}\mathbf{x} \geqslant \mathbf{h} - \mathbf{E}\mathbf{y} - \mathbf{M}u, && u \in \mathcal{U} \\ & \mathbf{G}^{\mathbf{T}}\pi \leqslant \mathbf{b} \\ & (\mathbf{G}\mathbf{x} - \mathbf{h} - \mathbf{E}\mathbf{y} - \mathbf{M}u)_i \pi_i = 0, && u \in \mathcal{U}, \forall i \\ & (\mathbf{b} - \mathbf{G}^{\mathbf{T}}\pi)_j x_j = 0 && \forall j \\ & \mathbf{x} \geqslant \mathbf{0} \\ & \pi \geqslant 0 \end{aligned}$$

KKT条件

SP问题分解转化

进而将SP等价转化，则变成：

$$
\begin{aligned}
\max_{u\in\mathcal{U}} \quad & \mathbf{b}^T\mathbf{x} \\
s.t. \quad & \mathbf{G}\mathbf{x} \geqslant \mathbf{h} - \mathbf{E}\mathbf{y} - \mathbf{M}u, \\
& \mathbf{G}^{\mathbf{T}}\pi \leqslant \mathbf{b} \\
& (\mathbf{G}\mathbf{x} - \mathbf{h} - \mathbf{E}\mathbf{y} - \mathbf{M}u)_i\pi_i = 0, \\
& (\mathbf{b} - \mathbf{G}^{\mathbf{T}}\pi)_j x_j = 0 \\
& \mathbf{x} \geqslant \mathbf{0} \\
& \pi \geqslant 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\max_{u\in\mathcal{U}} \quad & \mathbf{b}^T\mathbf{x} & \\
s.t. \quad & \mathbf{G}\mathbf{x} \geqslant \mathbf{h} - \mathbf{E}\mathbf{y} - \mathbf{M}u, & u \in \mathcal{U} \\
& \mathbf{G}^{\mathbf{T}}\pi \leqslant \mathbf{b} & \\
& \pi_i \leqslant M v_i, & \forall i \\
& (\mathbf{G}\mathbf{x} - \mathbf{h} - \mathbf{E}\mathbf{y} - \mathbf{M}u)_i \leqslant M(1 - v_i), & \forall i \\
& x_j \leqslant M w_j, & \forall j \\
& (\mathbf{b} - \mathbf{G}^{\mathbf{T}}\pi)_j \leqslant M(1 - w_j), & \forall j \\
& \mathbf{x} \geqslant \mathbf{0} & \\
& \pi \geqslant 0 & \\
& \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \{0, 1\}^n &
\end{aligned}
$$

引入大M和0/1变量进行转化

C&CG算法流程

Step 1： 设置上界UB=+∞，下界LB=-∞；迭代次数k=0

Step 2： 求解MP，得到最优解(y_{k+1}^*, η_{k+1}^*），更新$\mathrm{LB} = c^T y_{k+1}^* + \eta_{k+1}^*$

Step 3： 固定$y = y_{k+1}^*$，求解SP，得到最优解u_{k+1}^*和最优目标函数Q_{k+1}^*，更新$\mathrm{UB} = \min\{\mathrm{UB}, c^T y_{k+1}^* + Q_{k+1}^*\}$

Step 4： 如果$\mathrm{UB} - \mathrm{LB} \leq \varepsilon$，算法终止

Step 5： 否则，创建新决策变量x^{k+1}，k=k+1，

如果$Q_{k+1}^* < \infty$，向MP中加入约束：

$$\eta \geq \mathbf{b}^T \mathbf{x}^{k+1}$$
$$\boldsymbol{E}\mathbf{y} + \boldsymbol{G}\mathbf{x}^{k+1} \geq \mathbf{h} - \mathbf{M}u_{k+1}^*$$

如果$Q_{k+1}^* = \infty$，向MP中加入约束：

$$\boldsymbol{E}\mathbf{y} + \boldsymbol{G}\mathbf{x}^{k+1} \geq \mathbf{h} - \mathbf{M}u_{k+1}^*$$

重复Step 2 - Step 5

任务四讲解

Task 4

风火联合发电系统中的两阶段鲁棒优化

- 为了兼顾电力系统多时间尺度下的安全性和经济性需求，实际电网运行采用**日前-日内两阶段调度**，日前调度确定机组启停计划，日内调度对各机组出力进行实时调整。
- 在风火联合发电系统中，风电出力具有**不确定性**，传统调度方法采用**随机规划**或**确定性鲁棒优化**，但前者依赖概率假设，结果可能激进，后者忽略未知概率分布，结果相对保守

风火联合发电系统中的两阶段鲁棒优化

- **日前调度**

 目标函数：火电机组运行成本+机组启停成本+弃风惩罚成本；

 约束条件：系统功率平衡+机组出力限制+火电爬坡限制+日前最小连续开停机时间约束+日前最大启停次数约束+线路潮流安全约束和面传输极限约束。

- **日内调度**

 目标函数：周期内的总发电成本最小+弃风损失最小；

 约束条件：日内调度阶段，在系统运行、机组组合、以及外送输电通道三个层面综合考虑风火电机组的安全约束条件与日前调度阶段的约束条件相类似；额外增加系统正负备用约束。

参数设置与约束条件可参考《风火联合发电系统日前-日内两阶段协同优化调度》

风火联合发电系统中的两阶段鲁棒优化

- 本次作业为探索性作业，具有较大的挑战性，同时也是稳态大作业评分的重要依据；
- **基础**：可视个人情况自行增减约束、修改算例边界条件；
- **进阶**：尝试考虑所有的约束，并使用参考论文中的不确定性集；
- **探索**：鼓励同学们探索其他不确定性集以及两阶段鲁棒优化问题求解方法。

课外延伸学习

C&CG：

[1] Zeng B, Zhao L. Solving two-stage robust optimization problems using a column-and-constraint generation method[J]. Operations Research Letters, 2013, 41(5): 457-461.

日前日内两阶段鲁棒调度：

[1] 叶林, 张步昇, 郭凯蕾, 等. 风火联合发电系统日前-日内两阶段协同优化调度[J]. 中国电机工程学报, 2024, 45(7): 2527-2539.

[2] 刘一欣, 郭力, 王成山. 微电网两阶段鲁棒优化经济调度方法[J]. 中国电机工程学报, 2018, 38(14): 4013-4022, 4307.

谢谢！