第一次作业

1. **绝对值损失函数下的线性回归** 已测得 n 组数据 $(x_1, y_1), \cdots, (x_n, y_n)$，其中 $x_i \in \mathbb{R}$ 是输入，$y_i \in \mathbb{R}$ 是输出。欲将 y 表示为 x 的线性函数，即 $y = ax + b$，求最优系数 a 和 b 使得该线性回归模型在训练数据上的平均绝对误差

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{|y_i - ax_i - b|}{n}$$

最小。写出对应的线性规划问题，可以引入额外变量。

解 绝对值损失函数下的线性回归模型为

$$\min_{a,b} \sum_{i=1}^{n} \frac{|y_i - ax_i - b|}{n}$$

引入辅助变量，去掉绝对值符号得线性规划

$$\min_{a,b,u} \left\{ \sum_{i=0}^{n} \frac{u_i}{n} \middle| -u_i \leqslant y_i - ax_i - b \leqslant u_i, \forall i \right\}$$

其中 a, b, $u_1, \cdots, u_n$ 是决策变量。$u_i \geqslant -u_i$ 自然推出 $u_i \geqslant 0$。 □

2. **电力市场出清** 考虑一个单时段电力市场，该时段负荷为已知常数。参与市场的发电商需提交供电竞标，每个竞标由价格和供应量对 (λ, P_m) 组成。例如，竞标对 $(50, 100)$ 表示发电商愿意以 50 美元每单位的价格提供最多 100 单位电力，实际需求取决于电力市场的出清结果。每个发电商可以提供多组竞标对。市场出清时

- 对某个竞标对 (λ, P_m)，市场可以选择供应量 $p \in [0, P_m]$，并支付发电商 λp 美元。
- 如果一个发电商提交了多个竞标，那么该发电商的总供应量等于所有中标供应量之和。
- 电力市场出清即选择若干投标，目标是以最低成本供应负荷需求。

某时段负荷为 100 单位，两个发电商提供的竞标如下表所示：

发电商 1			发电商 2		
标号	λ (\$)	P_m (p.u.)	标号	λ (\$)	P_m (p.u.)
1-1	30	15	2-1	18	15
1-2	20	20	2-2	26	40
1-3	25	30	2-3	32	25

(1) 写出电力市场出清的线性规划模型。

(2) 结合该问题的特点，设计一种简便方法确定最优解。

解 决策变量如下

发电商 1		发电商 2	
标号	中标量 (p.u.)	标号	中标量 (p.u.)
1-1	p_{11}	2-1	p_{21}
1-2	p_{12}	2-2	p_{22}
1-3	p_{13}	2-3	p_{23}

写出电力市场出清的线性规划模型为

$$\begin{aligned} \min \quad & 30p_{11} + 20p_{12} + 25p_{13} + 18p_{21} + 26p_{22} + 32p_{23} \\ \text{s.t.} \quad & 0 \leqslant p_{11} \leqslant 15, 0 \leqslant p_{12} \leqslant 20, 0 \leqslant p_{13} \leqslant 30 \\ & 0 \leqslant p_{21} \leqslant 15, 0 \leqslant p_{22} \leqslant 40, 0 \leqslant p_{23} \leqslant 25 \\ & p_{11} + p_{12} + p_{13} + p_{21} + p_{22} + p_{23} = 100 \end{aligned}$$

为极小化成本，将竞标价格按升序排列，直至供应满足负荷

价格	18	20	25	26	30	32
标号	2-1	1-2	1-3	2-2	1-1	2-3
P_m	15	20	30	40	15	25
累计最大供应	15	35	65	105		
接受量	15	20	30	35	0	0

电力市场出清结果为

发电商 1					发电商 2				
标号	λ	P_m	p	λp	标号	λ	P_m	p	λp
1-1	30	15	0	0	2-1	18	15	15	270
1-2	20	20	20	400	2-2	26	40	35	910
1-3	25	30	30	750	2-3	32	25	0	0
合计			50	1150	合计			50	1180

电力市场将向两个发电商各购买 50 单位电力，分别支付 1150 美元和 1180 美元。

□

3. **多时段生产计划** 工厂未来 6 个小时的电能需求量如下（单位：p.u.）：

第 1 小时	第 2 小时	第 3 小时	第 4 小时	第 5 小时	第 6 小时
370	430	380	450	520	440

工厂配备的发电机每小时可以生产 420p.u. 电能，成本为 40 元/p.u.；还可以向电网以 45 元/p.u. 的价格购电，受变压器容量所限，每小时购电不超过 80p.u.。电能可以提前生产并存储在第三方运营的商业化储能电站中，存储成本为每 p.u. 每小时 3 元，假设储能容量无穷大并忽略损耗。工厂每小时的负荷必须满足。当前储能电站中尚存有 10 单位电能。工厂希望计划未来 6 小时的发电机产能、网购电以及存储计划以最小化总成本。写出最优生产计划的线性规划模型。
提示：以 R_t 表示第 t 个小时发电机产能，O_t 表示第 t 个小时向电网购电，I_t 表示第 t 个小时储存的电能，其中 $t=1,2,\cdots,6$。存储费每小时结算，无需追踪电能的生产时间。关键步骤是写出时段 t 的变量和时段 $t+1$ 的变量之间的关系。

解 以 R_t 表示第 t 个小时发电机产能，O_t 表示第 t 个小时向电网购电，I_t 表示第 t 个小时储存的电能，其中 $t=1,2,\cdots,6$。存储费每小时结算，无需追踪电能的生产时间。最优生产问题如下

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{t=1}^{6}(40R_t+45O_t+3I_t) \\
\text{s.t.} \quad & 10+R_1+O_1=370+I_1 \\
& I_1+R_2+O_2=430+I_2 \\
& I_2+R_3+O_3=380+I_3 \\
& I_3+R_4+O_4=450+I_4 \\
& I_4+R_5+O_5=520+I_5 \\
& I_5+R_6+O_6=440+I_6 \\
& 0\leqslant R_t\leqslant 420,\ t=1:6 \\
& 0\leqslant O_t\leqslant 80,\quad t=1:6 \\
& I_t\geqslant 0,\quad t=1:6
\end{aligned}
$$

□

4. **人力资源** 市供电局计划聘用若干技术工人执行设备维护工作，聘用人员需签订全时劳动合同，即连续工作 5 天 (不一定是周一到周五)，然后休息 2 天。每天设备检修工作所需最低人数如表所示，实际工作人数可以大于最低人数。

星期	一	二	三	四	五	六	日
最低人数	17	13	14	16	18	24	24

(1) 最少需要聘用多少技术工人才能满足工作需求？给出方案 (即每个连续的五天聘用的人数，为得到线性规划模型，此处假设人数为连续变量，写出模型即可，不用求解)。
(2) 假设可以聘用两个半时技工 (一天工作 4 小时，不需要连续工作) 替代一个全时技工，并规定半时技工承担的工作量不得超过总工作量的 1/4，半时技工薪酬为 24 元/天，全时技工薪酬为 80 元/天。那么如何制订聘用方案，在满足工作要求的前提下，使供电局支付的工资总额最少？

解　决策变量： 将雇员分为 7 类，其中第 1 类从星期一开始上班，人数为 x_1；第 2 类从星期二开始上班，人数为 x_2；依此类推。
目标函数： 聘用的技工总数等于上述 7 类人数之和，即 $x_1+x_2+\cdots+x_7$。
约束条件： 每类雇员人数是非负的，并且每天上班的员工总数不少于当天需求的雇员人数。以星期一为例：星期一需求 17 人，当天上班的员工包含此前（含周一）连续 5 天内开始上班的员工。因此，周一实际工作的人数是前一周周四至周日以及本周一开始上班的员工之和，即 $x_4+x_5+x_6+x_7+x_1$ 不少于 17。同理，可以列出其他工作日对应的约束条件。
根据上述决策变量、目标函数和约束条件，员工聘用归结为如下线性规划：

$$
\begin{aligned}
\min\quad & x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7 \\
\text{s.t.}\quad & x_4+x_5+x_6+x_7+x_1 \geq 17 \\
& x_5+x_6+x_7+x_1+x_2 \geq 13 \\
& x_6+x_7+x_1+x_2+x_3 \geq 14 \\
& x_7+x_1+x_2+x_3+x_4 \geq 16 \\
& x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 \geq 18 \\
& x_2+x_3+x_4+x_5+x_6 \geq 24 \\
& x_3+x_4+x_5+x_6+x_7 \geq 24 \\
& x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7 \geq 0
\end{aligned}
$$

在上一问建模的基础上，进一步将周一至周日每天聘用的半时员工人数分别记为 $y_1\sim y_7$。
供电局每周支付员工的工资分为两部分，第一部分支付给全时雇员，数额为

$$80\text{元/天}\times 5\text{天}\times(x_1+x_2+\cdots+x_7)$$

第二部分支付给半时员工，数额为

$$24\text{元}\times(y_1+y_2+\cdots+y_7)$$

约束条件： 每类雇员的人数非负，并且每天上班的员工的总工作量不少于当天需求的全时雇员人数。仍以星期一为例，总需求为 17 个全时工人，当天上班的员工包含此前（含周一）连续 5 天内

开始上班的全时工人以及周一当天上班的半时工人，因此实际上班人员的工作量相当于 $x_4+x_5+x_6+x_7+x_1+y_1/2$ 个全时工人的工作量。同理可以列出其他工作日工作量的约束条件。
由于半时员工单位工作成本低，如果不限制半时员工数量，最优方案必定不会聘用全时员工，于是规定半时工的工作量不得超过总工作量的 1/4。总工作量转化为工时数为

$$(17+13+14+16+18+24+24)\times 8 = 1008\text{小时}$$

半时员工的总工时 $4(y_1+y_2+\cdots+y_7)$ 不超过 $1008/4=252$。
综上，可得成本最低的聘用方案线性规划模型如下：

$$
\begin{aligned}
\min\quad & 400\sum_{i=1}^{7} x_i + 24\sum_{i=1}^{7} y_i \\
\text{s.t.}\quad & x_4+x_5+x_6+x_7+x_1+y_1/2 \geqslant 17 \\
& x_5+x_6+x_7+x_1+x_2+y_2/2 \geqslant 13 \\
& x_6+x_7+x_1+x_2+x_3+y_3/2 \geqslant 14 \\
& x_7+x_1+x_2+x_3+x_4+y_4/2 \geqslant 16 \\
& x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+y_5/2 \geqslant 18 \\
& x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+y_6/2 \geqslant 24 \\
& x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+y_7/2 \geqslant 24 \\
& y_1+y_2+y_3+y_4+y_5+y_6+y_7 \leqslant 63 \\
& x_i \geqslant 0, y_i \geqslant 0, i=1,2,\cdots,7,
\end{aligned}
$$

□

5. 用图解法求解如下线性规划问题

$$
(a)\quad
\begin{aligned}
\max\quad & 0.65x+0.45y \\
\text{s.t.}\quad & 2x+3y \le 40 \\
& 3x+1.5y \le 30 \\
& x \le 9 \\
& x,y \ge 0
\end{aligned}
\qquad\qquad
(b)\quad
\begin{aligned}
\max\quad & 4x+y \\
\text{s.t.}\quad & 3x+2y \ge 12 \\
& 2x-6y \le -18 \\
& x-y \le 2 \\
& x,y \ge 0
\end{aligned}
$$