第六次作业

1. 京西物流公司计划在某城镇拓展业务。经市场部门调研，该城镇有 8 处住宅区，每个住宅区人口如表所示。公司计划投资建造 2 个快递转运站将快递配送至住宅区。可供建造转运站的地点有 6 处，每个候选地点到住宅区的平均运输时间如表所示。公司在哪 2 个地点建造转运站可以使配送时间在 12 分钟以内的人口最多？写出整数规划模型。

社区	配送站候选地点						人口
	1	2	3	4	5	6	
1	15	17	27	5	25	22	120
2	10	12	24	4	22	20	80
3	5	6	17	9	21	17	110
4	7	6	8	15	13	10	140
5	14	12	6	23	6	8	220
6	18	17	10	28	9	5	180
7	11	10	5	21	10	9	160
8	24	22	22	33	6	16	200

解 决策变量（均采用正逻辑，1 表示是，0 表示否）：

- $x_i \in \{0,1\}, i = 1:6$ 表示是否在候选点 i 建造转运站。
- $y_{ij} \in \{0,1\}, i = 1:6, j = 1:8$ 表示从转运站 i 到社区 j 的配送时间是否在 12 分钟内。
- $z_j \in \{0,1\}, j = 1:8$ 表示是否有某个转运站到社区 j 的配送时间在 12 分钟内。

参数：

- t_{ij} 表示从转运站 i 到社区 j 的配送时间。
- p_j 表示社区 j 的人口
- t_m 最长配送时间，此处取 34 分钟

目标函数：最大化在 12 分钟内能够服务的总人口，即

$$\max \quad \sum_{j=1}^{8} p_j z_j$$

约束条件：

- 预算约束：只能建造 2 个转运站：

$$\sum_{i=1}^{6} x_i = 2$$

- y_{ij} 逻辑约束：只有当 $x_i = 1$ 且 $t_{ij} \leqslant 12$ 时有 $y_{ij} = 1$，表示为线性约束为

$$\frac{x_i(12 - t_{ij})}{t_m} \le y_{ij} \le x_i \left[1 + \frac{(12 - t_{ij})}{t_m}\right], \forall i, \forall j$$

- z_j 逻辑约束：只要存在某个 i，对应的 $y_{ij} = 1$，则 $z_j = 1$，否则 $z_j = 0$，因此 z_j 是 $y_{1j}, \cdots, y_{6j}$ 的逻辑或，可写成如下线性约束

$$\left\{ y_{ij} \leqslant z_j, \forall i \quad z_j \leqslant \sum_{i=1}^{6} y_{ij} \right\}, \forall j$$

本题中优先考虑能够在 12 分钟内完成的客户数。规划时还可以有其他不同的目标，如所有客户平均配送时间最短、最长配送时间最短等，都可以用整数规划建模求解。 □

2. 一个交通网由节点 $n \in \mathcal{N}$ 和公路 $a \in \mathcal{A}$ 构成，其中节点表示公路交汇的路口。交通网的连接关系由节点-支路矩阵 $\Lambda \in \mathbb{R}^{|\mathcal{N}| \times |\mathcal{A}|}$ 描述，该矩阵每行对应一个节点，每列对应一条支路，该矩阵每个元素的含义为：

$$\Lambda_{ij} = \begin{cases} +1 & \text{若节点 } i \text{ 是支路 } j \text{ 的入口；} \\ -1 & \text{若节点 } i \text{ 是支路 } j \text{ 的出口；} \\ 0 & \text{若节点 } i \text{ 与支路 } j \text{ 无关。} \end{cases}$$

由于每条支路有两个端点，故 Λ 的任何一列只有两个非零元，一个是 $+1$ 对应入口节点，另一个是 -1 对应出口节点。

(a) 某车从节点 s 出发行驶到终点 t，决策变量为经过哪些路段。将决策变量记为向量 $v \in \mathbb{R}^{|\mathcal{A}|}$，其元素含义为

$$v_j = \begin{cases} 1 & \text{行程经过支路 } j \\ 0 & \text{行程不经过支路 } j \end{cases}$$

写出所有可行解（可能的行程）满足的条件。

(b) 道路实时流量监控表明，路段 $a \in \mathcal{A}$ 上的通行时间是 t_a。写出求解时间最短行程对应的 0-1 整数线性规划问题。

解

(a) 记出发地-目的地向量为 I_{st}，其中出发地节点对应的元素是 1，目的地节点对应的元素是 -1，其他元素为 0。所有可能的行程满足

$$\Lambda v = I_{rs}$$

(b) 最速行程是以下混合整数规划问题的最优解

$$\begin{aligned} t_{\min} = \min_{v} \quad & \sum_{a \in \mathcal{A}} t_a v_a \\ \text{s.t.} \quad & \Lambda v = I_{rs} \\ & v \in \{0,1\}^{|\mathcal{A}|} \end{aligned}$$

□

3. 将以下函数表示为含 0-1 变量的线性约束

(a) 阶跃函数

$$z = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

已知 $|x| < x_m$ 且 $x \neq 0$，用 x 和 z 表示，无需额外变量

(b) 逻辑或 $b = \max\{a_1, \cdots, a_n\}$，其中 $a_1, \cdots, a_n$ 和 b 都是 0-1 变量，无需额外变量

(c) 逻辑与 $b = \min\{a_1, \cdots, a_n\}$，其中 $a_1, \cdots, a_n$ 和 b 都是 0-1 变量，无需额外变量

解

(a) 阶跃函数

$$\frac{x}{x_m} \leq z \leq 1 + \frac{x}{x_m}, \ z \in \{0,1\}$$

(b) 逻辑或

$$a_i \leq b, \forall i, \ b \leq \sum_{i=1}^{n} a_i$$

(c) 逻辑与可以表示为单项式 $b = a_1 a_2 \cdots a_n$，进一步线性化为

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n - n + 1}{n} \leq b \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

□

4. 用整数线性规划求解整数非线性规划问题

(a) 将线性分式 0-1 整数规划

$$\max\left\{\frac{a_0+\sum\limits_{i=1}^{n}a_ix_i}{b_0+\sum\limits_{i=1}^{n}b_ix_i}: x\in\{0,1\}^n\right\}$$

转化为 0-1 整数线性规划，已知

$$b_0+\sum_{i=1}^{n}b_ix_i\neq 0, \forall x\in\{0,1\}^n$$

(b) 将 0-1 整数多项式优化

$$\begin{aligned}\max\quad & 2(x_1x_2x_3)^{2025}+x_1^2x_2\\ \text{s.t.}\quad & 12x_1+7x_2^2x_3-3x_1x_3\leqslant 16\\ & x_1,x_2,x_3\in\{0,1\}\end{aligned}$$

转化为 0-1 整数线性规划。

解

(a) 令

$$y=\frac{1}{b_0+\sum\limits_{i=1}^{n}b_ix_i}$$

则目标函数

$$\frac{a_0+\sum\limits_{i=1}^{n}a_ix_i}{b_0+\sum\limits_{i=1}^{n}b_ix_i}=a_0y+\sum_{i=1}^{n}a_ix_iy$$

用 z_i 表示 x_iy，则 0-1 整数分式规划可转化为 MILP

$$\begin{aligned}\max\quad & a_0y+\sum_{i=1}^{n}a_iz_i\\ \text{s.t.}\quad & b_0y+\sum_{i=1}^{n}b_iz_i=1\\ & y_lx_i\le z_i\le y_mx_i,\quad x_i\in\{0,1\},\quad \forall i\\ & y_l(1-x_i)\le y-z_i\le y_m(1-x_i),\ \forall i\end{aligned}$$

其中 y_l 和 y_m 分别是 y 的下界和上界的估计值。

(b) 对 0-1 变量 x，$x=x^2$ 成立，通过递归得出 $x=x^n$ 对任何 $n\in\mathbb{Z}_{++}$ 成立，因此可以将问题中任何大于 1 的幂替换为 1 次幂。引入新变量 $x_{123}=x_1x_2x_3$，$x_{12}=x_1x_2$，$x_{23}=x_2x_3$，$x_{13}=x_1x_3$，新变量都是 0-1 整数变量，视新变量和原变量的关系为逻辑与，可以按第 3 题的方法线性化，最终得到

$$
\begin{aligned}
\max\quad & 2x_{123}+x_{12}\\
\text{s.t.}\quad & 12x_1+7x_{23}-3x_{13}\leqslant 16\\
& x_1+x_2+x_3-2\leqslant 3x_{123}\leqslant x_1+x_2+x_3\\
& x_1+x_2-1\leqslant 2x_{12}\leqslant x_1+x_2\\
& x_1+x_3-1\leqslant 2x_{13}\leqslant x_1+x_3\\
& x_2+x_3-1\leqslant 2x_{23}\leqslant x_2+x_3\\
& x_1,x_2,x_3,x_{123},x_{12},x_{23},x_{13}\in\{0,1\}
\end{aligned}
$$

尽管本题的最优解是显然的，当问题规模增大后最优解不易直接观察出来。

□

5. 用分支定解法求解以下整数规划问题

$$
\begin{aligned}
\max\quad & 5x_1-2x_2\\
\text{s.t.}\quad & -x_1+2x_2\leqslant 5\\
& 3x_1+2x_2\leqslant 19\\
& x_1+3x_2\geqslant 9\\
& x_1,x_2\in\mathbb{Z}_+
\end{aligned}
$$

解 分支定解法步骤如下：

- 将正整数约束放松为非负约束，求解线性规划得最优解 $x_1=39/7, x_2=8/7$，最优值为 $z=25.57$，即目标函数的一个上界。没有已知的可行解，将最好已知下界设置为 $-\infty$。两个变量都不是整数，选下标较小者 x_1 进行分支。
- 将不等式 $x_1\geqslant 6$ 和 $x_1\leqslant 5$ 分别加入约束条件得到两个新问题。前者无解，后者最优解为 $(x_1,x_2)=(5,4/3)$，最优值 $z=22.33$，更新目标函数上界。变量 x_2 非整，对其分支。
- 将不等式 $x_2\geqslant 2$ 和 $x_2\leqslant 1$ 分别加入约束条件得到两个新问题。后者无解，前者在 $(5,2)$ 处取最优值 $z=21$。这是一个整数解，故目标函数的下界从 $-\infty$ 更新为 21。没有其他未搜索的分支，故 $(x_1,x_2)=(5,2)$ 是最优解，最优值为 21。

□