第三次作业

1. 考虑以下线性规划问题

$$\begin{array}{lrcrcl} \min & -2\,x_1 & - & x_2 & & \\ \text{s.t.} & x_1 & - & x_2 & \leqslant & 2 \\ & x_1 & + & x_2 & \leqslant & 6 \\ & x_1 & , & x_2 & \geqslant & 0 \end{array}$$

(1) 将该线性规划表示为标准型，并找出一个基本可行解，在该解处 $(x_1, x_2) = (0, 0)$。
(2) 从上面的基本可行解出发，用单纯形法求解该线性规划问题。
(3) 在 x_1-x_2 坐标轴构成的平面上画出该线性规划问题的可行域、初始点、以及单纯形法迭代过程中遇到的点。

2. 分别用图解法、矩阵形式单纯形法和表格形式单纯形法求解以下线性规划

$$\begin{aligned} \max\quad & x_1 + 3x_2 \\ \text{s.t.}\quad & 2x_1 + 3x_2 \leqslant 8 \\ & -x_1 + x_2 \leqslant 1 \\ & x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0 \end{aligned}$$

3. 已知某线性规划问题的目标函数是 $\min(-5x_1 - 3x_2)$，约束条件是 $\leqslant$ 型不等式，x_3 和 x_4 是转化为标准型时引入的松弛变量。采用单纯形法求解该线性规划，经过一次迭代后得下表

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_3	c	0	1	1/5	2
x_1	d	e	0	1	a
	b	1	f	g	-10

求表中的未知数，并写出原问题。

解 根据给出的单纯形表，x_3 是基变量，故 $f = 0$；x_1 是基变量，故 $b = c = 0$，$d = 1$。x_2 是非基变量，该迭代步中 $x_2 = 0$，目标函数为 $-5x_1 = -10$，故 $x_1 = a = 2$。初始单纯形表中 x_3 和 x_4 对应的列是单位矩阵，迭代后对应 B^{-1}，故

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1/5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1/5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = (A_3, A_1)$$

根据判别数行的数据

$$c_B^\top B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & g \end{bmatrix}$$

可知 $g = -5$；

$$c_B^\top B^{-1} A_2 - c_2 = \begin{bmatrix} 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix} + 3 = 3 - 5a_{22} = 1$$

可知 $a_{22} = 2/5$；根据 x_2 对应的列

$$B^{-1} A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1/5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ e \end{bmatrix}$$

可知 $e = a_{22} = 2/5$，$a_{12} = -2/25$。约束矩阵中 x_1 对应的列满足

$$B^{-1} \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

可知 $a_{11} = -1/5$，$a_{21} = 1$。初始右端项 b 为

$$b = B(B^{-1}b) = \begin{bmatrix} 1 & -1/5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8/5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

综上可以写出不带松弛变量的原线性规划

$$\begin{aligned} \min \quad & -5x_1 - 3x_2 \\ \text{s.t.} \quad & -\frac{1}{5}x_1 - \frac{2}{25}x_2 \leqslant \frac{8}{5} \\ & x_1 + \frac{2}{5}x_2 \leqslant 2 \\ & x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0 \end{aligned}$$

□

4. 阅读解答过程。用单纯形法求解一个一般形式的线性规划问题，在最优解处单纯形表如下

c_B	x_B	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	
-4	x_2	0	1	1/7	2/7	−1/7	0
-2	x_1	1	0	17/7	−1/7	4/7	1
		0	0	−17/7	−6/7	−4/7	−2

其中 x_1, x_2, x_3 是原问题中的变量，s_1 和 s_2 是转化为标准型时引入的松弛变量。根据该单纯形表写出原问题。

解：设初始单纯形表为

$$\begin{array}{ccc|c} B & N & I & b \\ \hline -c_B^\top & -c_N^\top & 0 & 0 \end{array} \quad \text{或} \quad \begin{array}{cc|c} A & I & b \\ \hline -c^\top & 0 & 0 \end{array}$$

经过一些列初等行变换后得到最终单纯形表

$$\begin{array}{ccc|c} I & B^{-1}N & B^{-1} & B^{-1}b \\ \hline 0 & c_B^\top B^{-1}N - c_N^\top & c_B^\top B^{-1} & c_B^\top B^{-1}b \end{array} \quad \text{或} \quad \begin{array}{cc|c} B^{-1}A & B^{-1} & B^{-1}b \\ \hline c_B^\top B^{-1}A - c^\top & c_B^\top B^{-1} & c_B^\top B^{-1}b \end{array}$$

从最终表可知

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 2/7 & -1/7 \\ -1/7 & 4/7 \end{bmatrix} \Rightarrow B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

于是

$$N = B(B^{-1}N) = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/7 \\ 17/7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad b = B(B^{-1}b) = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$c^\top = c_B^\top(B^{-1}A) - (c_B^\top B^{-1}A - c^\top) = \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1/7 \\ 1 & 0 & 17/7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{17}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -4 & -3 \end{bmatrix}$$

综上，原问题为

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + 4x_2 + 3x_3 \leqslant 1 \\ & 2x_1 + x_2 + 5x_3 \leqslant 2 \\ & x_1, x_2, x_3 \geqslant 0 \end{aligned}$$