第三章 电力系统潮流分析与计算
（Power Flow Analysis and Calculation）

潮流分析的计算机解法

问 题

1、计算机解法是如何发展的?（方法和工具发展）

2、如何构造和理解GAUSS迭代法?

3、如何构造和理解N-R法? （重要！）

4、如何理解PQ分解法的机理? （重要！）

§1 潮流计算机解法的发展史

- 1956，**基于Y的Gauss迭代法**，原理和编程简单，内存需求少，但算法收敛性较差。
- 1960，**基于Z的Gauss迭代法**，收敛性较好，但内存占用大大增加，限制了解题规模。
- 60年代，具有二阶收敛性的**Newton - Raphson**法受到广泛关注，但计算量大。
- 60年代中后期， Tinney在N-R法中引入**稀疏技术**，计算量大大降低，成为基本算法**（重点）**
- 1974 Stott在大量实践的基础上，基于PQ解耦性提出了**PQ分解法**，计算速度大大加快，可以应用于在线系统**（重点）**

§2 GAUSS法

一、迭代格式构造

$$\mathrm{f}(x)=0$$ **如果你是“先知”？**

$$\mathrm{f}\left(\mathrm{x}^{(0)}\right)=0$$

我们怎么做? $x=\mathrm{g}(x)$ $\qquad$ $\mathrm{g}(x)=x+\mathrm{f}(x)$

也猜一个初值： $x^{(0)}$

如果 $x^{(0)}=g(x^{(0)})$**解得到了！**

否则： $x^{(r+1)}=g(x^{(r)})$

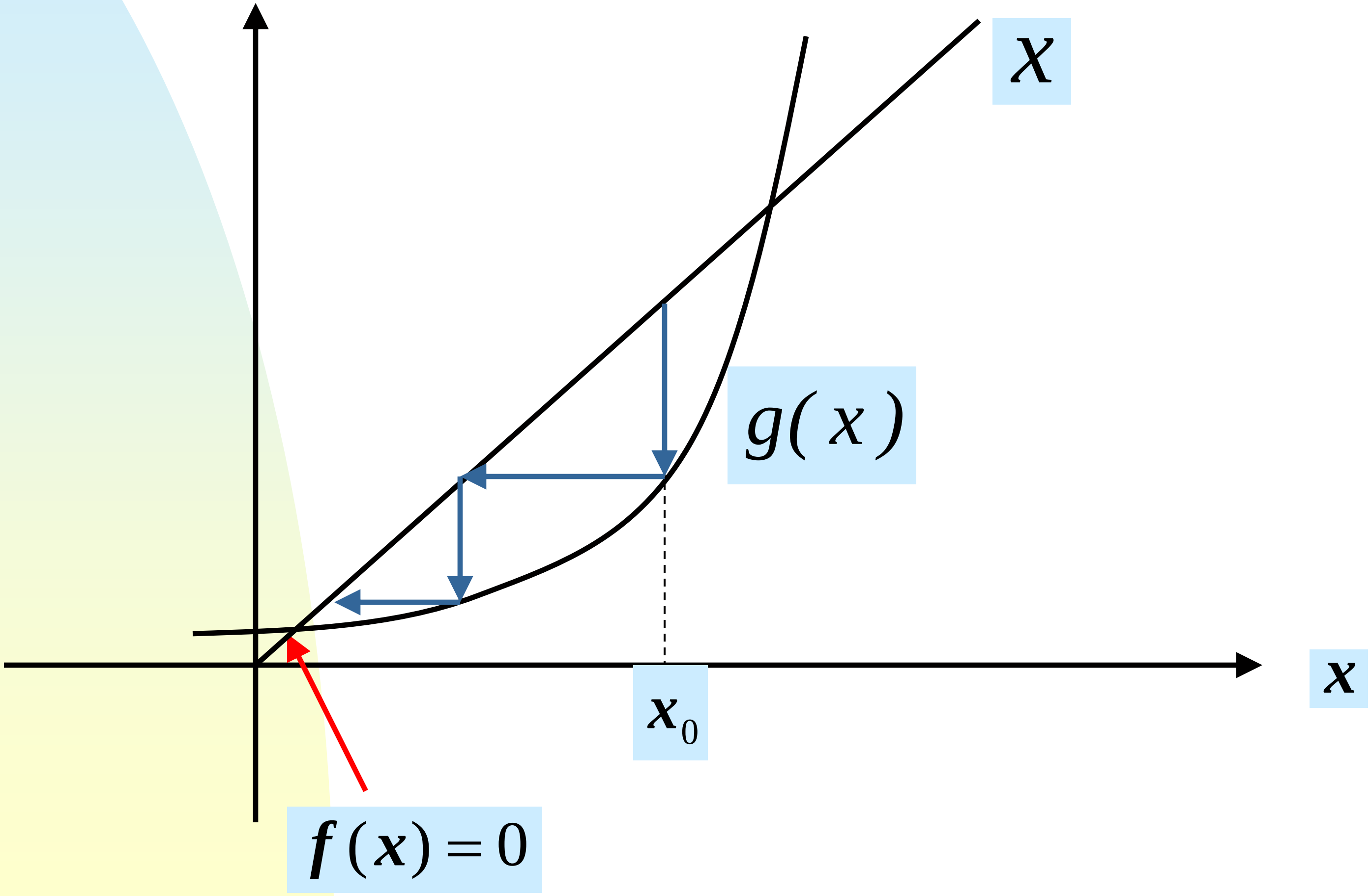
若$\left|x^{(r+1)}-x^{(r)}\right|<\varepsilon$**，则收敛，求得真解。**

GAUSS法（雅可比迭代法）

迭代格式g不唯一。
简单迭代格式：收敛性较差。

二、几何解释

$$x = g(x)$$



三、收敛性改善：GAUSS-SEIDEL迭代法

$$\begin{cases} x_1^{(r+1)} = g_1\left(x_1^{(r)}, x_2^{(r)}, \ldots, x_n^{(r)}\right) \\ x_2^{(r+1)} = g_2\left(x_1^{(r)}, x_2^{(r)}, \ldots, x_n^{(r)}\right) \\ \vdots \\ x_n^{(r+1)} = g_n\left(x_1^{(r)}, x_2^{(r)}, \ldots, x_n^{(r)}\right) \end{cases}$$

利用最新信息进行迭代！效果明显

“与时俱进”

$$\begin{cases} x_1^{(r+1)} = g_1\left(x_1^{(r)}, x_2^{(r)}, \ldots, x_n^{(r)}\right) \\ x_2^{(r+1)} = g_2\left(x_1^{(r+1)}, x_2^{(r)}, \ldots, x_{n-1}^{(r)}, x_n^{(r)}\right) \\ \vdots \\ x_n^{(r+1)} = g_n\left(x_1^{(r+1)}, x_2^{(r+1)}, \ldots, x_{n-1}^{(r+1)}, x_n^{(r)}\right) \end{cases}$$

四、基于Y阵的Gauss法

$$\begin{bmatrix} Y_n & Y_s \\ Y_s^T & Y_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_n \\ \dot{U}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{I}_n \\ \dot{I}_s \end{bmatrix}$$

$$Y_n \dot{U}_n + Y_s \dot{U}_s = \dot{I}_n$$

$$Y_n \dot{U}_n = \dot{I}_n - Y_s \dot{U}_s$$

L 严格下三角针
D 对角阵
U 严格上三角阵

令Y_n=L+D+U

$$\dot{U}_n = D^{-1}\left(\dot{I}_n - Y_s \dot{U}_s - L\dot{U}_n - U\dot{U}_n\right)$$

Gauss-Seidel迭代:

$$\dot{U}_i^{(r+1)} = \frac{1}{Y_{ii}}\left(\frac{\overset{*}{\dot{S}}_i}{\overset{*}{U}{}_i^{(r)}} - Y_{is}\dot{U}_s - \sum_{j=1}^{i-1} Y_{ij}\dot{U}_j^{\boxed{(r+1)}} - \sum_{j=i+1}^{n-1} Y_{ij}\dot{U}_j^{(r)}\right)$$

存储量少，但收敛性差(why?)，上百次也不一定收敛

五、基于Z阵的Gauss法

平衡节点电压给定： $Y_n\dot{U}_n=\dot{I}_n-Y_s\dot{U}_s$

$$\dot{U}_n=\tilde{Z}_n\left(\dot{I}_n-Y_s\dot{U}_s\right),\quad \tilde{Z}_n=\mathbf{Y}_n^{-1}$$

Gauss迭代法

$$\dot{U}_i^{(r+1)}=\sum_{j=1}^{n-1}\tilde{Z}_{ij}\left(\frac{\overset{*}{S}_j}{\overset{*}{U}_j^{(r)}}-Y_{js}\dot{U}_s\right)$$

Gauss-Seidel迭代

$$=\sum_{j=1}^{i-1}\tilde{Z}_{ij}\frac{\overset{*}{S}_j}{\overset{*}{U}_j^{(r+1)}}+\sum_{j=i}^{n-1}\tilde{Z}_{ij}\frac{\overset{*}{S}_j}{\overset{*}{U}_j^{(r)}}-\sum_{j=1}^{n-1}\tilde{Z}_{ij}Y_{js}\dot{U}_s$$

存储量大，但收敛性改善

六、关于Gauss法的讨论

（1）Y法收敛性差，Z法收敛性好

（2）Y法省内存，每步迭代计算量少，Z法占内存多，每步迭代计算量大。

（3）PV节点处理难，迭代中改变Q值以满足V给定的要求。

扩展阅读：基于Gauss法的图计算

- 王之伟 《Graph Based Next Generation Energy Management System》，紫金论电 2018年8月
- 王迪 《图计算技术在电网分析计算中的应用研究》，清华大学硕士论文，2018

§3 Newton - Raphson法（N-R法）

$f(x) = 0$ “先知”怎么做?

我们怎么做?

也猜一个初值：$x^{(0)}$

如果$f(x^{(0)})=0$，解得到了!

否则，找逼近真解的修正量：$\Delta x^{(0)}$

修正量该是多少呢?

若真解为x^*，我们希望：$x^{(0)} + \Delta x^{(0)} = x^*$

即希望：$f(x^{(0)} + \Delta x^{(0)})=0$

一、解非线性代数方程组的N-R法

按台劳级数在$x^{(0)}$处展开,取线性部分:

$$f\left(x^{(0)}\right)+\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_0 \Delta x^{(0)}=0$$

矩阵形式（修正方程）：

$$\begin{bmatrix} f_1(X^{(0)}) \\ f_2(X^{(0)}) \\ \vdots \\ f_n(X^{(0)}) \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \left.\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right|_0 & \left.\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right|_0 & \cdots & \left.\frac{\partial f_1}{\partial x_n}\right|_0 \\ \left.\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right|_0 & \left.\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right|_0 & \cdots & \left.\frac{\partial f_2}{\partial x_n}\right|_0 \\ & \vdots & & \\ \left.\frac{\partial f_n}{\partial x_1}\right|_0 & \left.\frac{\partial f_n}{\partial x_2}\right|_0 & & \left.\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\right|_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta X_1^{(0)} \\ \Delta X_2^{(0)} \\ \vdots \\ \Delta X_n^{(0)} \end{bmatrix}$$

误差向量

Jacobi矩阵

修正向量

一、解非线性代数方程组的N-R法

缩写为： $f\left(X^{(0)}\right)=-\mathrm{J}^{(0)}\Delta X^{(0)}$

解上述修正方程（线性代数方程组），得： $\Delta X^{(0)}$

修正： $X^{(1)}=X^{(0)}+\Delta X^{(0)}$

完成一次迭代计算!

第r次迭代的修正方程为：

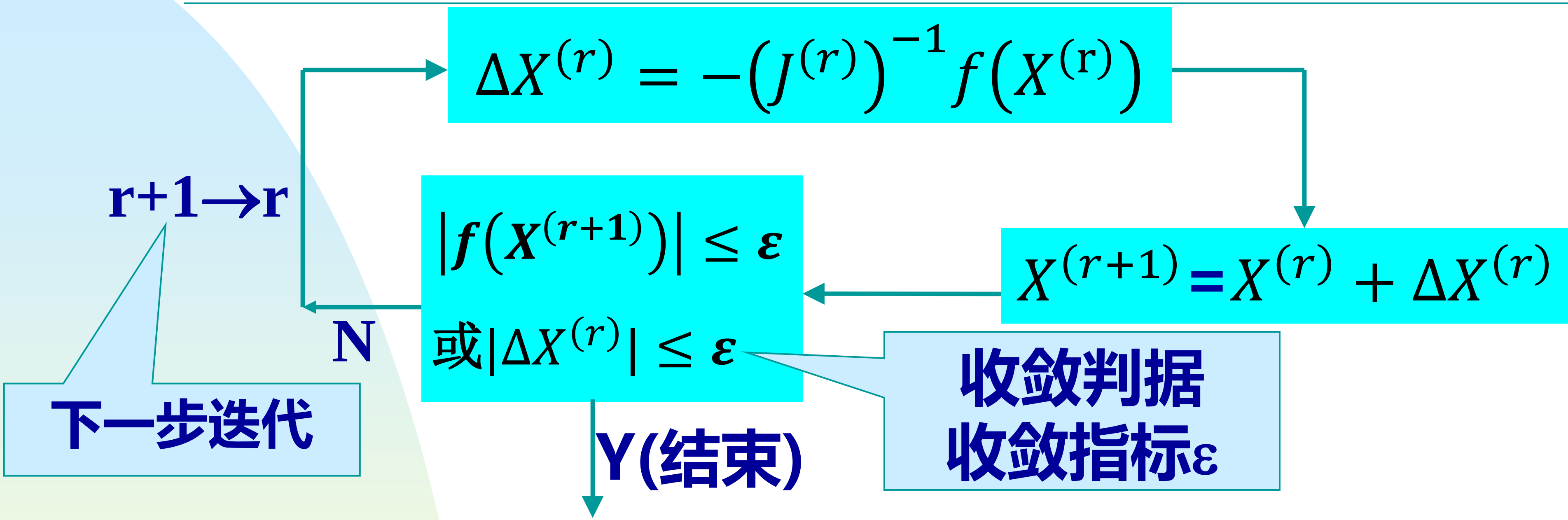
$$f\left(X^{(\mathrm{r})}\right)=-J^{(r)}\Delta X^{(r)}$$

第r次迭代修正向量

第r次迭代误差向量

第r次迭代Jacobi矩阵（每次都要更新）

N-R法迭代格式及特点



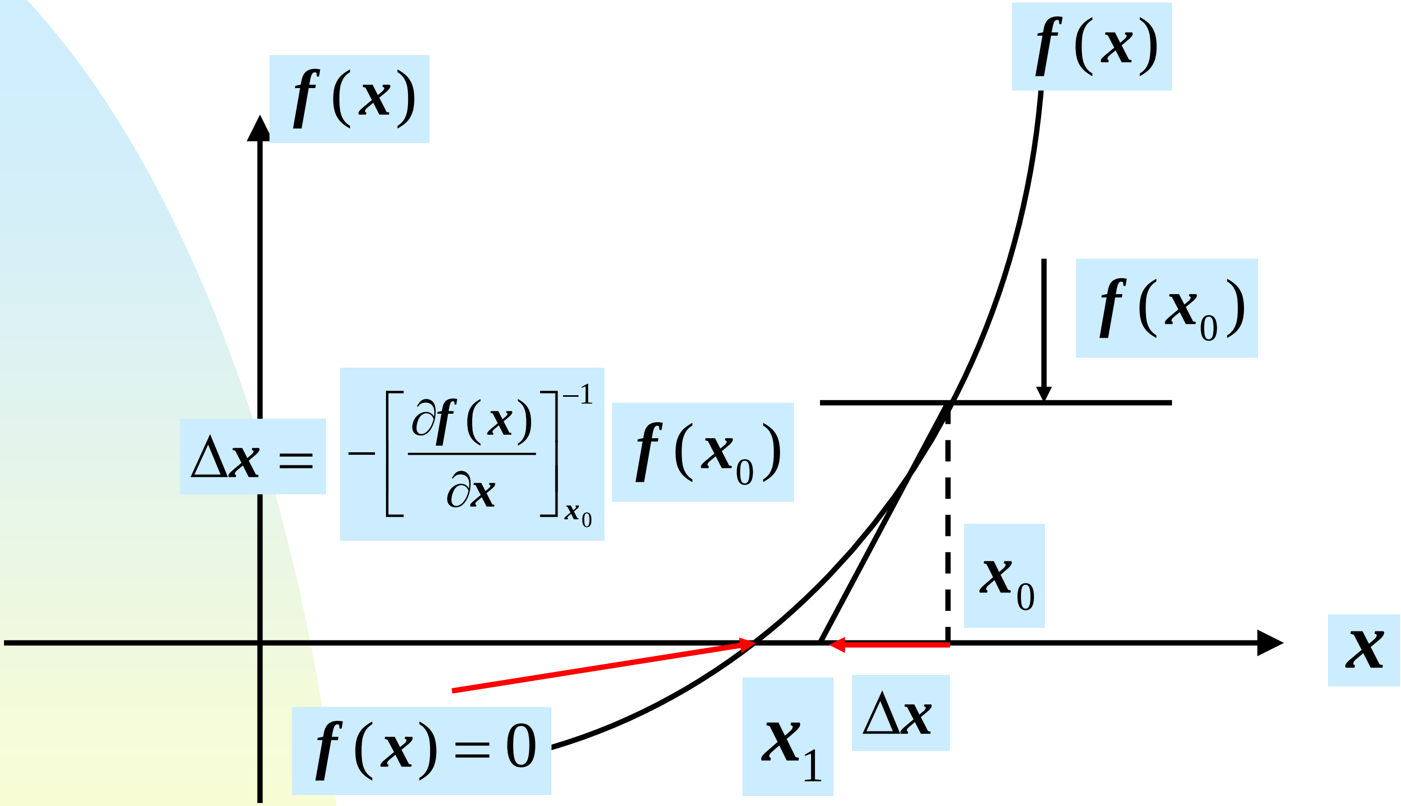
特点:转化为多次线性方程组的迭代求解

每次重新计算$J(x^{(r)})$,求逆（计算量大！）

二阶收敛性（收敛性好！）

初值$x^{(0)}$离真解x^*越近越好

N-R法几何解释



$f(x)$
$f(x)$
$f(x_0)$
$\Delta x = -\left[\frac{\partial f(x)}{\partial x}\right]_{x_0}^{-1} f(x_0)$
x_0
x
$f(x)=0$
x_1
Δx

二、潮流计算的N-R法（直角坐标）

1、潮流方程形式

- 未知状态数2(n-1)个，需2(n-1)个潮流方程参与迭代，节点:PQ（n-1-r个）、PV（r个）
- PQ节点: $$\begin{cases}\Delta P_i = P_i^{SP} - \left(e_i a_i + f_i b_i\right) = 0 \\ \Delta Q_i = Q_i^{SP} - \left(f_i a_i - e_i b_i\right) = 0\end{cases}$$ i=1，...,n-1-r
- PV节点: $$\begin{cases}\Delta P_i = P_i^{SP} - \left(e_i a_i + f_i b_i\right) = 0 \\ \Delta U_i^2 = \left(U_i^{SP}\right)^2 - \left(e_i^2 + f_i^2\right) = 0\end{cases}$$ i=n-r，...,n-1

$$a_i = \sum_{j=1}^{n}\left(G_{ij}e_j - B_{ij}f_j\right) \qquad b_i = \sum_{j=1}^{n}\left(G_{ij}f_j + B_{ij}e_j\right)$$

2、修正方程

$$
\mathbf{f}(\mathbf{x})=\begin{bmatrix}\Delta P\\ \Delta Q\\ \Delta U^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}P^{sp}-P(e,f)\\ Q^{sp}-Q(e,f)\\ \left(U^{sp}\right)^2-e^2-f^2\end{bmatrix}=0
\qquad
\begin{array}{l} n-1\\ n-1-r\\ r\end{array}
$$

$$
\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{X}^{(r)}\right)=-\boldsymbol{J}^{(r)}\Delta\boldsymbol{X}^{(r)} \Rightarrow
\begin{bmatrix}\Delta P\\ \Delta Q\\ \Delta U^2\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}\dfrac{\partial\Delta P}{\partial e^T} & \dfrac{\partial\Delta P}{\partial f^T}\\ \dfrac{\partial\Delta Q}{\partial e^T} & \dfrac{\partial\Delta Q}{\partial f^T}\\ \dfrac{\partial\Delta U^2}{\partial e^T} & \dfrac{\partial\Delta U^2}{\partial f^T}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta e\\ \Delta f\end{bmatrix}
$$

各子矩阵维长?

3、J矩阵

$$\Delta P_i = P_i^{sp} - (e_i a_i + f_i b_i) = 0 \qquad a_i = \sum_{j=1}^{n} (G_{ij} e_j - B_{ij} f_j)$$

$$\Delta Q_i = Q_i^{sp} - (f_i a_i - e_i b_i) = 0 \qquad b_i = \sum_{j=1}^{n} (G_{ij} f_j + B_{ij} e_j)$$

$$J = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \Delta P}{\partial e^T} & \dfrac{\partial \Delta P}{\partial f^T} \\ \dfrac{\partial \Delta Q}{\partial e^T} & \dfrac{\partial \Delta Q}{\partial f^T} \\ \dfrac{\partial \Delta U^2}{\partial e^T} & \dfrac{\partial \Delta U^2}{\partial f^T} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} n-1 & n-1 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} H & N \\ M & L \\ R & S \end{bmatrix} & \begin{array}{c} n-1 \\ n-1-r \\ r \end{array} \end{array}$$

各子块元素，会推导！

$$\begin{cases} H_{ii} = \dfrac{\partial \Delta P_i}{\partial e_i} = -a_i - (G_{ii} e_i + B_{ii} f_i) \\ H_{ij} = \dfrac{\partial \Delta P_i}{\partial e_j} = -(G_{ij} e_i + B_{ij} f_i) \end{cases}$$

$$\begin{cases} N_{ii} = \dfrac{\partial \Delta P_i}{\partial f_i} = -b_i + (B_{ii} e_i - G_{ii} f_i) \\ N_{ij} = \dfrac{\partial \Delta P_i}{\partial f_j} = B_{ij} e_i - G_{ij} f_i \end{cases}$$

J矩阵

$$\Delta P_i = P_i^{sp} - (e_i a_i + f_i b_i) = 0 \qquad a_i = \sum_{j=1}^{n} \left(G_{ij} e_j - B_{ij} f_j \right)$$

$$\Delta Q_i = Q_i^{sp} - (f_i a_i - e_i b_i) = 0 \qquad b_i = \sum_{j=1}^{n} \left(G_{ij} f_j + B_{ij} e_j \right)$$

$$\begin{cases} M_{ii} = \dfrac{\partial \Delta Q_i}{\partial e_i} = b_i + (B_{ii} e_i - G_{ii} f_i) \\ M_{ij} = \dfrac{\partial \Delta Q_i}{\partial e_j} = B_{ij} e_i - G_{ij} f_i = N_{ij} \end{cases}$$

$$\begin{cases} L_{ii} = \dfrac{\partial \Delta Q_i}{\partial f_i} = -a_i + (G_{ii} e_i + B_{ii} f_i) \\ L_{ij} = \dfrac{\partial \Delta Q_i}{\partial f_j} = G_{ij} e_i + B_{ij} f_i = -H_{ij} \end{cases}$$

$$\Delta U_i^2 = \left(U_i^{SP} \right)^2 - \left(e_i^2 + f_i^2 \right) = 0$$

$$\begin{cases} R_{ii} = \dfrac{\partial \Delta U_i^2}{\partial e_i} = -2e_i \\ R_{ij} = \dfrac{\partial \Delta U_i^2}{\partial e_j} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_{ii} = \dfrac{\partial \Delta U_i^2}{\partial f_i} = -2f_i \\ S_{ij} = \dfrac{\partial \Delta U_i^2}{\partial f_j} = 0 \end{cases}$$

J矩阵（特点）

- 2（n-1）阶方阵；
- 不对称，各元素在迭代时变化，计算量大。（编程技巧！）
- 子块与Y对应，也是稀疏的，稀疏技术

5、程序步骤（研究专题）

① 设电压初值：$e^{(0)}, f^{(0)}$

② 求误差：$\Delta P^{(0)}, \Delta Q^{(0)}, \Delta U^{2(0)}$

③ 置迭代次数：**r=0**

④ 求：$J^{(r)}$

⑤ 解修正方程，求：$\Delta e^{(r)}, \Delta f^{(r)}$

⑥ 修正：$e^{(r+1)} = e^{(r)} + \Delta e^{(r)},\ f^{(r+1)} = f^{(r)} + \Delta f^{(r)}$

⑦ 求：$\Delta P^{(r+1)}, \Delta Q^{(r+1)}, \Delta U^{2(r+1)}$

⑧ 检验收敛$\left|\Delta P^{(r+1)}, \Delta Q^{(r+1)}\right| < \varepsilon$

如不收敛，返④迭代；如收敛，求平衡节点功率、PV节点Q、支路功率和损耗（检查潮流约束）

编程说明

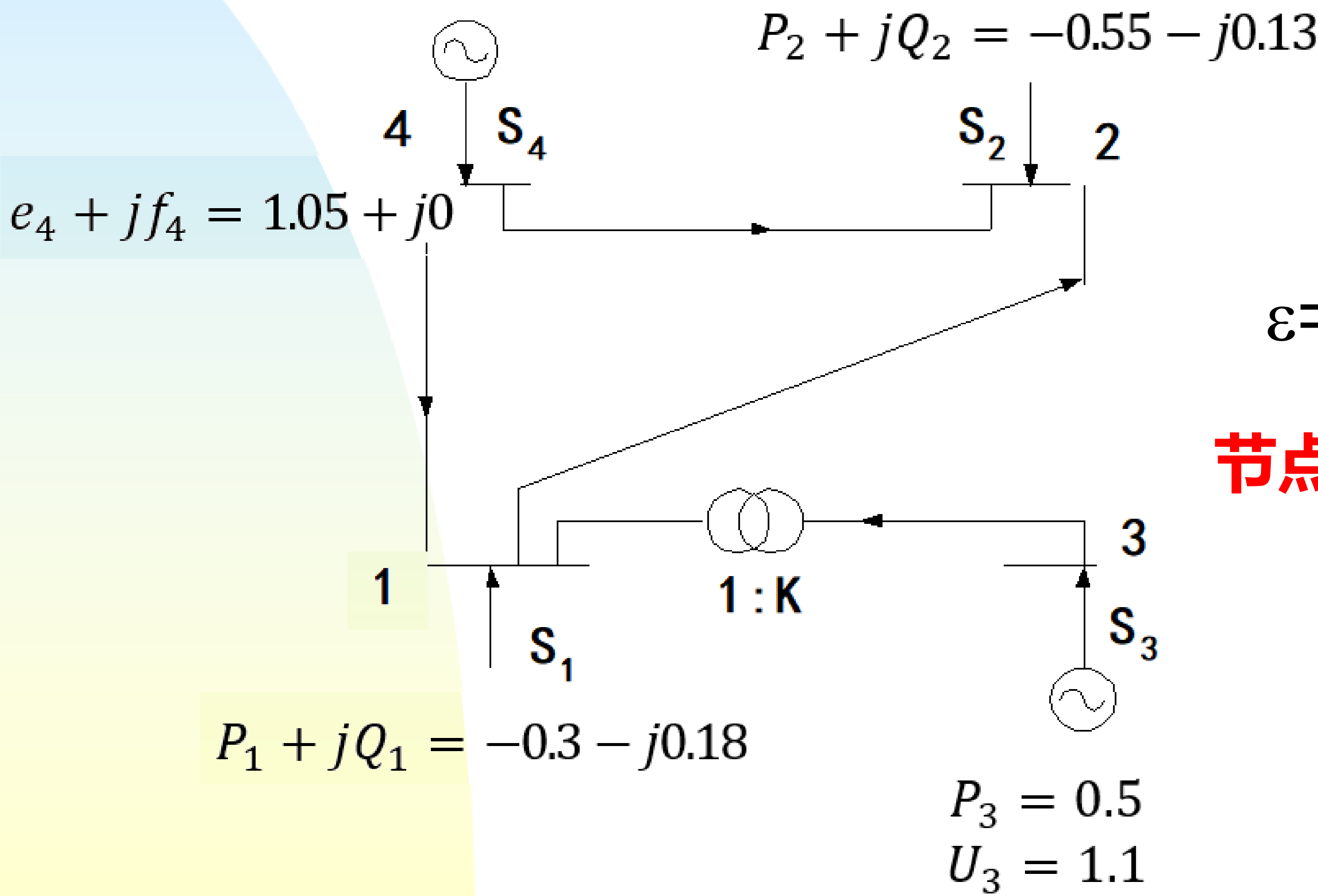
初值严格，一般取 $e_i^{(0)} = 1, f_i^{(0)} = 0$ （标幺制好处）

ε一般可取10^{-3}~10^{-5}（太大太小？）

$J^{(r)}$及求逆计算量大, 但收敛快, 一般迭代6~7次

PV和PQ节点转化（不满足约束条件时）（思考：此时什么会发生变化？怎么处理？）

6、N-R法算例
(四节点系统——网络+边界条件)



$\varepsilon=10^{-4}$

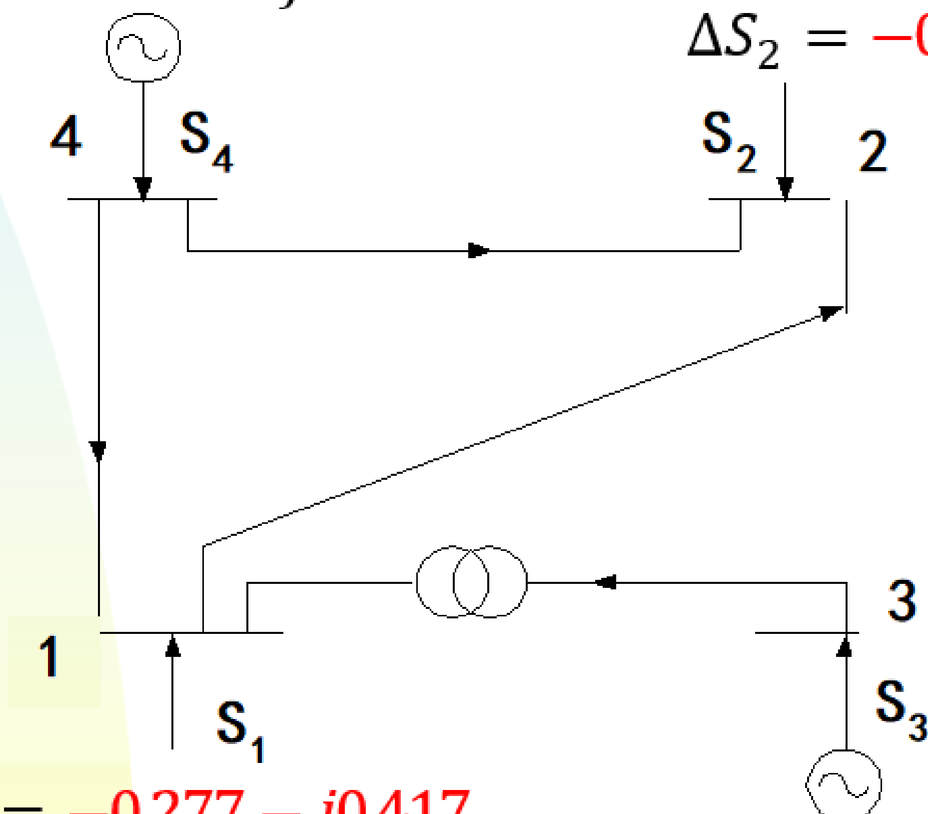
节点类型?

N-R法迭代过程（初值：r=0）

$U = 1.05 + j0$

$U = 1 + j0$

$\Delta S_2 = -0.526 + j0.0196$



$\Delta S_1 = -0.277 - j0.417$

$U = 1 + j0$

$\Delta P_3 = 0.5$

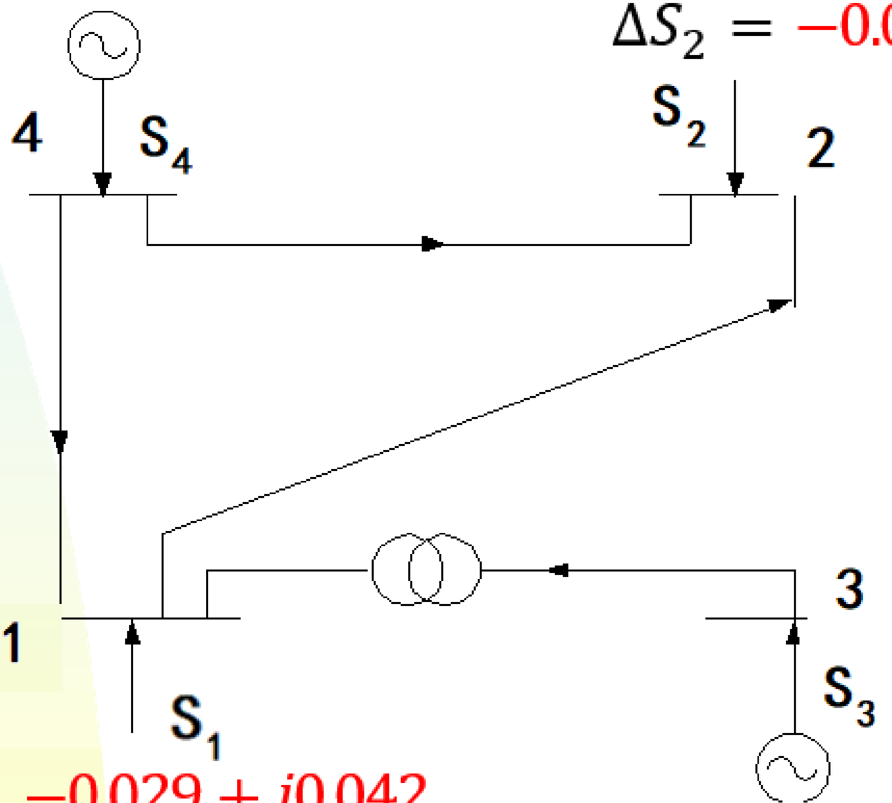
$U = 1 + j0$

N-R法迭代过程（r=1）

$U = 1.05 + j0$

$U = 0.978 - j0.108$

$\Delta S_2 = -0.013 - j0.055$



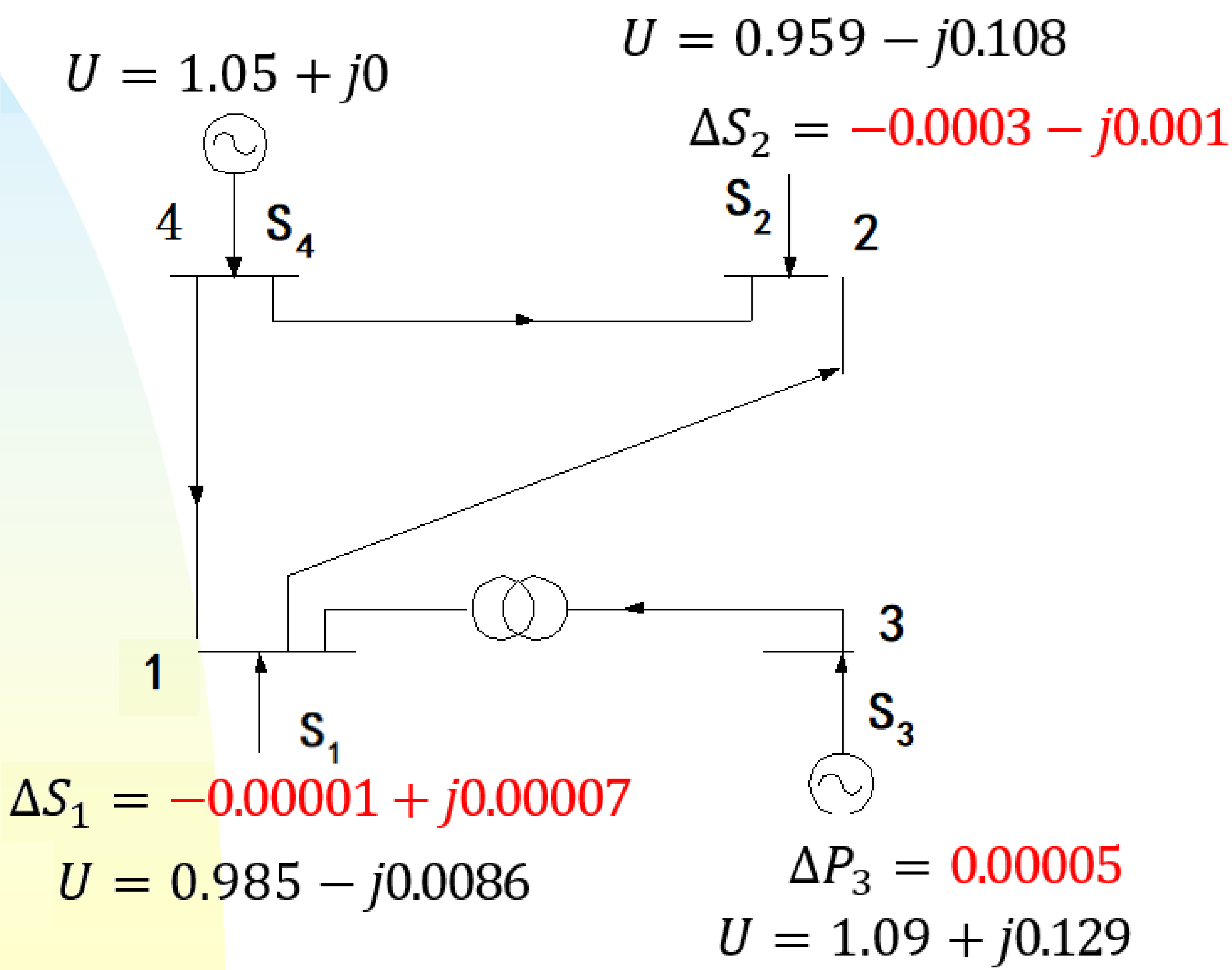
$\Delta S_1 = -0.029 + j0.042$

$U = 0.996 - j0.0094$

$\Delta P_3 = 0.002$

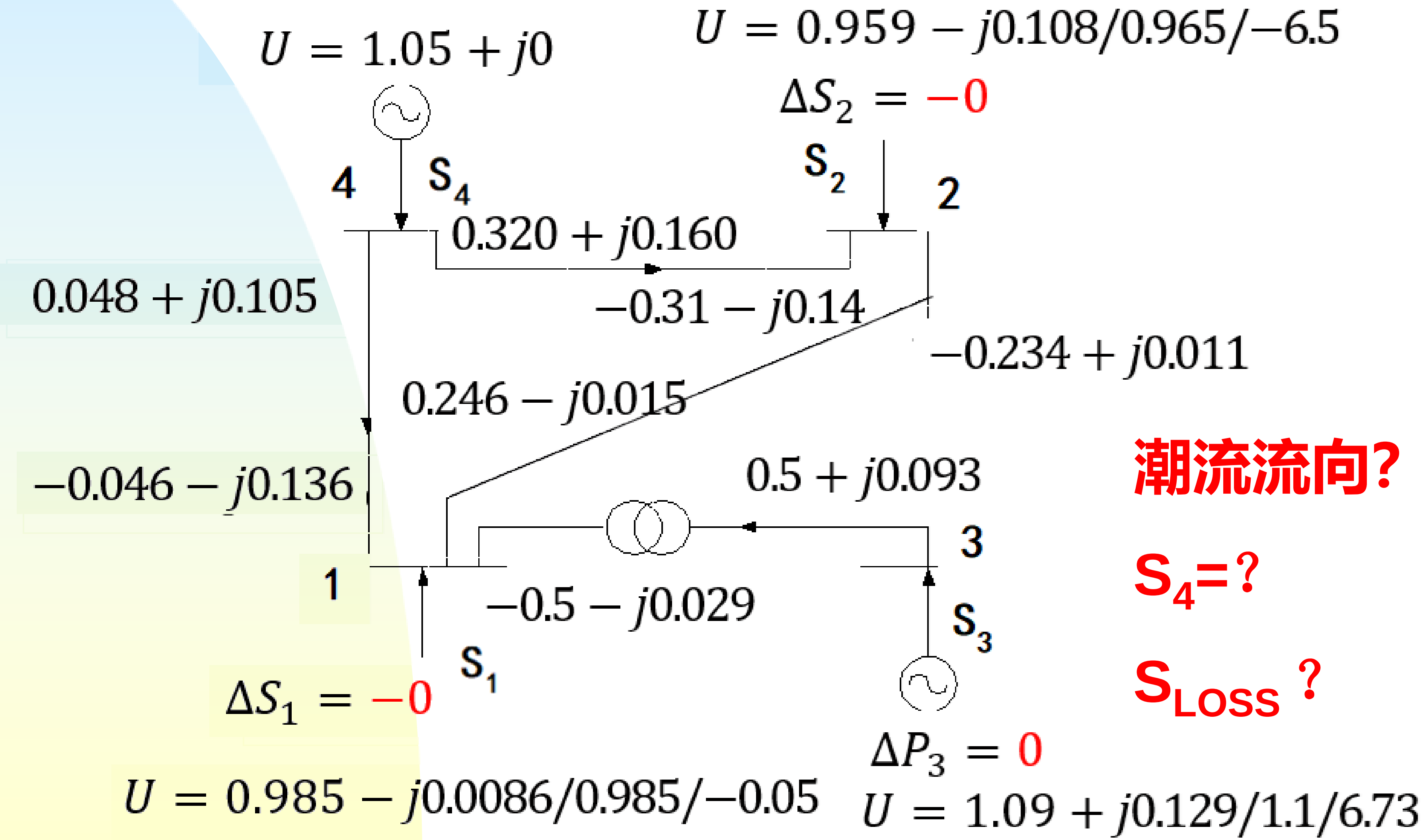
$U = 1.11 + j0.127$

N-R法迭代过程（r=2）



$U = 1.05 + j0$
4
S_4
$U = 0.959 - j0.108$
$\Delta S_2 = -0.0003 - j0.001$
S_2
2
3
1
S_1
S_3
$\Delta S_1 = -0.00001 + j0.00007$
$U = 0.985 - j0.0086$
$\Delta P_3 = 0.00005$
$U = 1.09 + j0.129$

N-R法迭代结果（r=3）



潮流流向?

S_4=?

S_{LOSS} ?

三、潮流计算的N-R法（极坐标）
1、潮流方程形式

- PQ（n-1-r个）、PV（r个），未知数2(n-1)-r个，需要2(n-1)-r个潮流方程参与迭代。
- PQ节点:

$$\Delta P_i = P_i^{SP} - U_i \sum_{j=1}^{n} U_j (G_{ij}\cos\delta_{ij} + B_{ij}\sin\delta_{ij}) = 0$$

$$\Delta Q_i = Q_i^{SP} - U_i \sum_{j=1}^{n} U_j (G_{ij}\sin\delta_{ij} - B_{ij}\cos\delta_{ij}) = 0$$

- PV节点:

$$\Delta P_i = P_i^{SP} - U_i \sum_{j=1}^{n} U_j (G_{ij}\cos\delta_{ij} + B_{ij}\sin\delta_{ij}) = 0$$

2、修正方程

$$f(x)=\begin{bmatrix} \Delta P(U,\delta) \\ \Delta Q(U,\delta) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} P^{SP}-P(U,\delta) \\ Q^{SP}-Q(U,\delta) \end{bmatrix}\begin{array}{c} n-1 \\ n-1-r \end{array}=0$$

$$f\left(X^{(r)}\right)=-J^{(r)}\Delta X^{(r)}$$

子阵维长?

$$\begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{bmatrix}=-\begin{bmatrix} \dfrac{\partial \Delta P}{\partial \delta^{T}} & \dfrac{\partial \Delta P}{\partial U^{T}} \\ \dfrac{\partial \Delta Q}{\partial \delta^{T}} & \dfrac{\partial \Delta Q}{\partial U^{T}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta \delta \\ \Delta U \end{bmatrix}$$

2、修正方程

$$\Delta P_i = P_i^{SP} - U_i \sum_{j=1}^{n} U_j (G_{ij}\cos\delta_{ij} + B_{ij}\sin\delta_{ij}) = 0$$

$$\Delta Q_i = Q_i^{SP} - U_i \sum_{j=1}^{n} U_j (G_{ij}\sin\delta_{ij} - B_{ij}\cos\delta_{ij}) = 0$$

$$\begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \dfrac{\partial \Delta P}{\partial \delta^T} & \dfrac{\partial \Delta P}{\partial U^T} \\ \dfrac{\partial \Delta Q}{\partial \delta^T} & \dfrac{\partial \Delta Q}{\partial U^T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \delta \\ \Delta U \end{bmatrix}$$

对δ和U求导有何区别？

为便于计算，将J中对U的偏导恢复成U二次函数：对U偏导乘U，△U除U

$$\begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \dfrac{\partial \Delta P}{\partial \delta^T} & \dfrac{\partial \Delta P}{\partial U^T} U \\ \dfrac{\partial \Delta Q}{\partial \delta^T} & \dfrac{\partial \Delta Q}{\partial U^T} U \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \delta \\ \Delta U / U \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \Delta U_1/U_1 \\ \Delta U_2/U_2 \\ \vdots \\ \Delta U_{n-1-r}/U_{n-1-r} \end{bmatrix}$$

$$\Delta P_i = P_i^{SP} - U_i \sum_{j=1}^{n} U_j (G_{ij}\cos\delta_{ij} + B_{ij}\sin\delta_{ij}) = 0$$

$$\Delta Q_i = Q_i^{SP} - \boxed{U_i \sum_{j=1}^{n} U_j (G_{ij}\sin\delta_{ij} - B_{ij}\cos\delta_{ij})} = 0$$

3、J矩阵

$$J = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \Delta P}{\partial \delta^T} & \dfrac{\partial \Delta P}{\partial U^T} U \\ \dfrac{\partial \Delta Q}{\partial \delta^T} & \dfrac{\partial \Delta Q}{\partial U^T} U \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{ccc} n-1 & n-1-r & \\ \left[\begin{matrix} H \\ M \end{matrix}\right. & \left.\begin{matrix} N \\ L \end{matrix}\right] & \begin{matrix} n-1 \\ n-1-r \end{matrix} \end{array}$$

各子块元素：（会推导！）

$$H_{ii} = \frac{\partial \Delta P_i}{\partial \delta_i} = -U_i \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} U_j (-G_{ij}\sin\delta_{ij} + B_{ij}\cos\delta_{ij}) = \boxed{Q_i} + U_i^2 B_{ii}$$

$$H_{ij} = \frac{\partial \Delta P_i}{\partial \delta_j} = -U_i U_j (G_{ij}\sin\delta_{ij} - B_{ij}\cos\delta_{ij})$$

3、J矩阵

$$\Delta P_i = P_i^{SP} \boxed{-U_i \sum_{j=1}^{n} U_j (G_{ij}\cos\delta_{ij} + B_{ij}\sin\delta_{ij})} = 0$$

$$\Delta Q_i = Q_i^{SP} - U_i \sum_{j=1}^{n} U_j (G_{ij}\sin\delta_{ij} - B_{ij}\cos\delta_{ij}) = 0$$

$$\begin{cases} N_{ii} = \dfrac{\partial \Delta P_i}{\partial U_i} U_i \quad \boxed{= -U_i \left[\sum_{\substack{j \neq i \\ j=1}}^{n} U_j (G_{ij}\cos\delta_{ij} + B_{ij}\sin\delta_{ij}) + 2U_i G_{ii} \right]} = \boxed{-P_i} - U_i^2 G_{ii} \\ N_{ij} = \dfrac{\partial \Delta P_i}{\partial U_j} U_j \quad = -U_i U_j (G_{ij}\cos\delta_{ij} + B_{ij}\sin\delta_{ij}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} M_{ii} = \dfrac{\partial \Delta Q_i}{\partial \delta_i} = -U_i \sum_{\substack{j \neq i \\ j=1}}^{n} U_j (G_{ij}\cos\delta_{ij} + B_{ij}\sin\delta_{ij}) = \boxed{-P_i} + U_i^2 G_{ii} \\ M_{ij} = \dfrac{\partial \Delta Q_i}{\partial \delta_j} = U_i U_j (G_{ij}\cos\delta_{ij} + B_{ij}\sin\delta_{ij}) = \boxed{-N_{ij}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} L_{ii} = \dfrac{\partial \Delta Q_i}{\partial U_i} U_i = U_i \left[-\sum_{\substack{j \neq i \\ j=1}}^{n} U_j (G_{ij}\sin\delta_{ij} - B_{ij}\cos\delta_{ij}) + 2U_i B_{ii} \right] = \boxed{-Q_i} + U_i^2 B_{ii} \\ L_{ij} = \dfrac{\partial \Delta Q_i}{\partial U_j} U_j = -U_i U_j (G_{ij}\sin\delta_{ij} - B_{ij}\cos\delta_{ij}) = \boxed{H_{ij}} \end{cases}$$

4、讨论

- J矩阵（特点）
  - 2n - 2 - r阶方阵(比直角坐标少多少阶?)
  - 不对称，元素在迭代过程中变化，计算量大。（编程技巧！）
  - 子块与Y对应，也是稀疏(稀疏技术)
- 初值严格，一般取$U^{(0)} = 1, \delta^{(0)} = 0$（标幺制好处）
- 修正过程：$\delta^{(r+1)} = \delta^{(r)} + \Delta\delta^{(r)}, U^{(r+1)} = U^{(r)} + \Delta U^{(r)}$
- 程序步骤与直角坐标相似

§4 潮流计算的PQ分解法(重点)

一、基本思路

- N-R法：收敛性好，但每次迭代要重新计算J^{-1}，计算量和存储量很大。
- 70年代，利用电力系统特点，对极坐标N-R法的合理简化，提出PQ分解法。
- 计算速度大大加快，可应用于在线系统（注意：收敛性和计算速度的差别）

- 如何简化?
- Stott：降阶、常数化

二、极坐标N-R法的简化?（条件：超高压和高压电网）

修正方程：$\begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} H & N \\ M & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\delta \\ \Delta U/U \end{bmatrix}$ 降阶

第一步简化：由于R<<X，δ变化主要影响P，U变化主要影响Q，有N<H和M<L，忽略非对角块，即有近似修正方程为：

$$\begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} H & 0 \\ 0 & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\delta \\ \Delta U/U \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \Delta P = -H \cdot \Delta\delta \\ \Delta Q = -L \cdot \Delta U/U \end{cases}$$

PQ分解法得名！

H、L随迭代而变化，如何常数化?

进一步简化?

非对角元： $H_{ij}=L_{ij}=-U_iU_j(G_{ij}\sin\delta_{ij}-B_{ij}\cos\delta_{ij})$

第二步简化：一般线路两端δ_{ij}较小（一般小于10°~20°），且$G_{ij}\ll B_{ij}$，有：

$$\cos\delta_{ij}\approx 1$$

$$G_{ij}\sin\delta_{ij}<<B_{ij}\cos\delta_{ij}$$

$H_{ij}=U_iU_jB_{ij}$, i、j=1,2,…,n-1，i≠j

$L_{ij}=U_iU_jB_{ij}$, i、j=1,2,…,n-r-1，i≠j

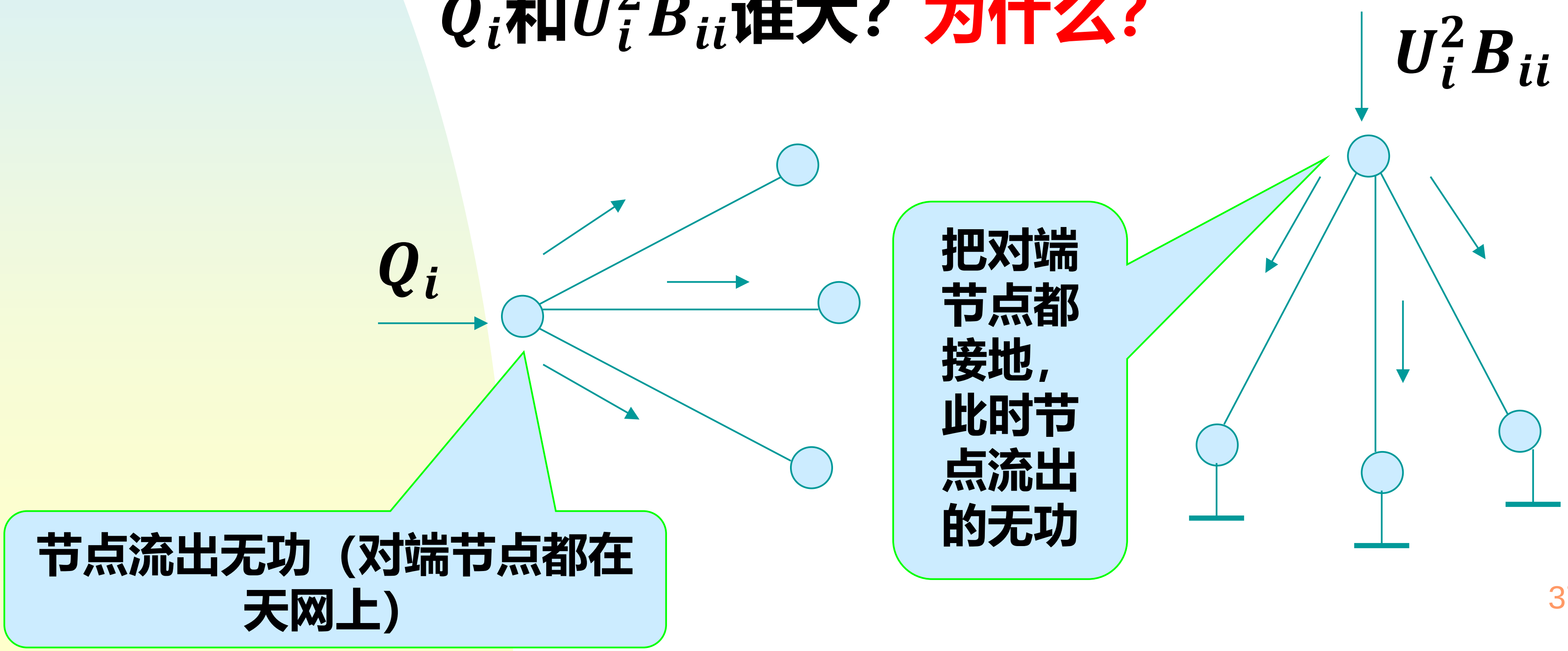
进一步简化?

对角元：

$$H_{ii} = Q_i + U_i^2 B_{ii}$$

$$L_{ii} = -Q_i + U_i^2 B_{ii}$$

Q_i和$U_i^2 B_{ii}$谁大? 为什么?



进一步简化?

第三步简化：$Q_i \ll U_i^2 B_{ii}$

$$\begin{cases} H_{ii} = U_i^2 B_{ii}, & i = 1,2,\cdots,n-1 \\ L_{ii} = U_i^2 B_{ii}, & i = 1,2,\cdots,n-1-r \end{cases}$$

进一步简化?

$$\text{H、L}\approx\begin{bmatrix} U_1^2B_{11} & U_1U_2B_{12} & \cdots & U_1U_kB_{1k} \\ U_2U_1B_{21} & U_2^2B_{22} & \cdots & U_2U_kB_{2k} \\ \cdots & & \cdots & \\ U_kU_1B_{k1} & U_kU_2B_{k2} & \cdots & U_k^2B_{kk} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} U_1 & & & 0 \\ & U_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & U_k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1k} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2k} \\ \cdots & & \cdots & \\ B_{k1} & B_{k2} & \cdots & B_{kk} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} U_1 & & & 0 \\ & U_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & U_k \end{bmatrix}$$

缩写：$H,L\approx UBU$　　　H和L维长?

三、PQ分解法的修正方程

$$\begin{cases}\Delta P = -H \cdot \Delta\delta \\ \Delta Q = -L \cdot \Delta U / U\end{cases}$$

$$H, L \approx UBU$$

Pδ修正：

$$\begin{bmatrix} \Delta P_1 / U_1 \\ \Delta P_2 / U_2 \\ \vdots \\ \Delta P_{n-1} / U_{n-1} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} & \cdots & B_{1,n-1} \\ B_{2,1} & B_{2,2} & \cdots & B_{2,n-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ B_{n-1,1} & B_{n-1,2} & \cdots & B_{n-1,n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1\Delta\delta_1 \\ U_2\Delta\delta_2 \\ \vdots \\ U_{n-1}\Delta\delta_{n-1} \end{bmatrix}$$

QV修正：

$$\begin{bmatrix} \Delta Q_1 / U_1 \\ \Delta Q_2 / U_2 \\ \vdots \\ \Delta Q_{n-1-r} / U_{n-1-r} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} & \cdots & B_{1,n-1-r} \\ B_{2,1} & B_{2,2} & \cdots & B_{2,n-1-r} \\ \vdots & & & \vdots \\ B_{n-1-r,1} & B_{n-1-r,2} & \cdots & B_{n-1-r,n-1-r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta U_1 \\ \Delta U_2 \\ \vdots \\ \Delta U_{n-1-r} \end{bmatrix}$$

缩写：$\begin{cases}\triangle \mathrm{P/U} = -\mathrm{B}' \cdot \mathrm{U}\triangle\delta \\ \triangle \mathrm{Q/U} = -\mathrm{B}'' \cdot \triangle U\end{cases}$

简记：$\begin{cases}\triangle \mathrm{P/U} = -\mathrm{B}' \cdot \triangle\delta \\ \triangle \mathrm{Q/U} = -\mathrm{B}'' \cdot \triangle U\end{cases}$

四、修正方程特点

- 两套常系数线性方程组（一次求逆，多次使用）
- 常系数矩阵B'和B''稀疏对称，Y阵虚部；
- Stott的快速分解法B'或B''矩阵有另外的“独门秘方”（参阅《高等电力网络分析》）
- B'和B''阶数分别为（n-1）×（n-1）、（n-1-r）×（n-1-r），实数矩阵。
- 好处：存储量小、计算量小、在线分析

五、PQ分解法迭代格式

r+1→r

$$\triangle\delta^{(r)} = -B'^{-1}(\triangle P/U)^{(r)}$$

$$\delta^{(r+1)} = \delta^{(r)} + \Delta\delta^{(r)}$$

$$\triangle U^{(r)} = -B''^{-1}(\triangle Q/U)^{(r)}$$

$$U^{(r+1)} = U^{(r)} + \Delta U^{(r)}$$

$$\left|\Delta P^{(r)}, \Delta Q^{(r)}\right| < \varepsilon$$

N

Y（结束）

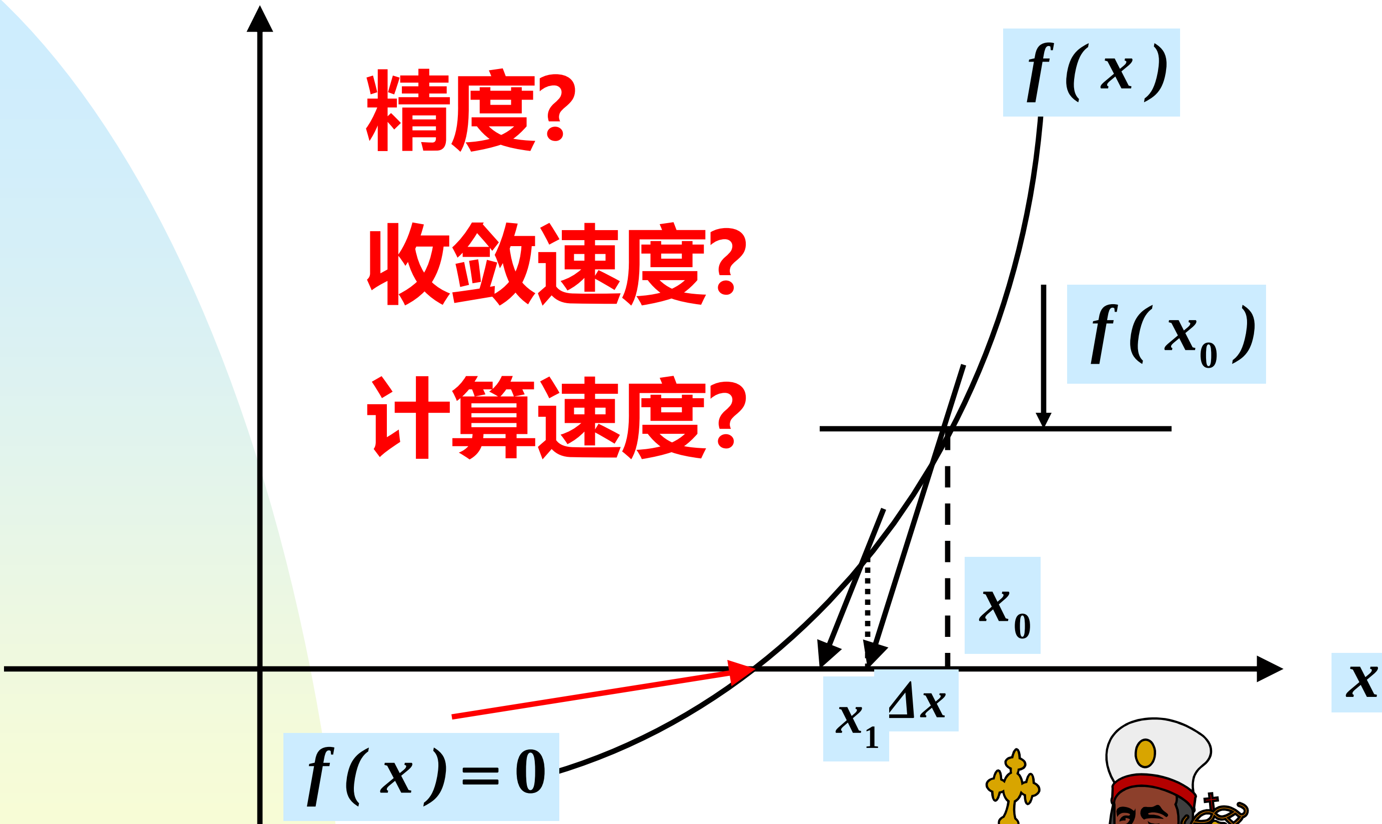
- PQ解耦特性（重要）：适用范围；
- 3个简化基础：R<<X,δ_{ij}不能太大, $U_i^2 B_{ii} \gg Q_i$
- 精度取决于ϵ，简化只影响迭代过程，不影响结果
- 线性敛速，迭代次数多于N-R法，计算速度快于N-R法

PQ分解法几何解释

精度?

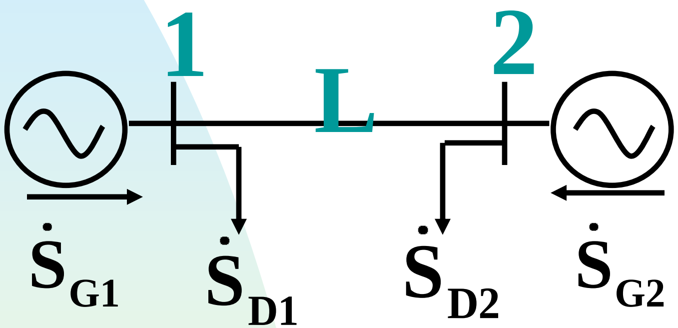
收敛速度?

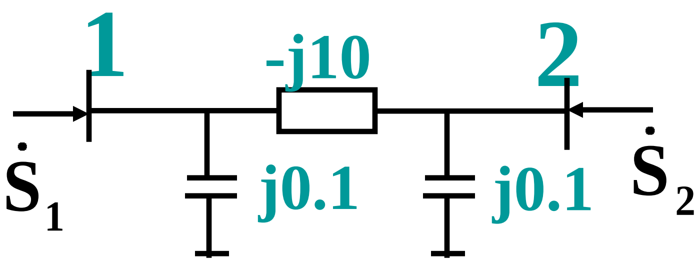
计算速度?



六、例题

求两节点系统的潮流分布。





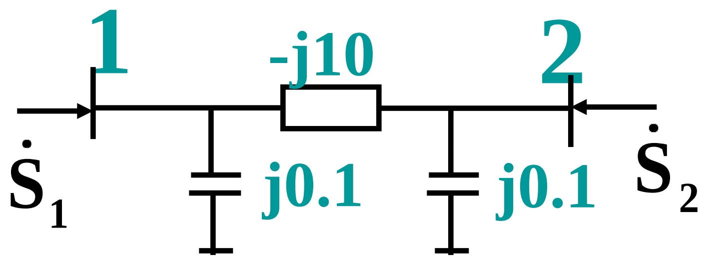
已知：$\dot{S}_{D1}=20+j10$ $\dot{S}_{D2}=19+j10$

$\dot{S}_{G2}=15+j10$ $\dot{U}_1=1\angle 0$

解：

确定节点类型：PQ? PV? Vδ?

例题



形成节点导纳矩阵：

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} -j9.9 & j10 \\ j10 & -j9.9 \end{bmatrix}$$

例题

$$\Delta P_i = P_i^{SP} - U_i \sum_{j=1}^{n} U_j (G_{ij}\cos\delta_{ij} + B_{ij}\sin\delta_{ij}) = 0$$

$$\Delta Q_i = Q_i^{SP} - U_i \sum_{j=1}^{n} U_j (G_{ij}\sin\delta_{ij} - B_{ij}\cos\delta_{ij}) = 0$$

潮流方程有几个?

记不住怎么办?

$$\begin{cases} \Delta P_2 = P_{G2} - P_{D2} - U_2 \sum_{j=1}^{2} U_j B_{2j}\sin\delta_{2j} = 0 \\ \Delta Q_2 = Q_{G2} - Q_{D2} + U_2 \sum_{j=1}^{2} U_j B_{2j}\cos\delta_{2j} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta P_2 = -4 - 10U_2\sin\delta_2 = 0 \\ \Delta Q_2 = -9.9U_2^2 + 10U_2\cos\delta_2 = 0 \end{cases}$$

解析法：$U_2 = 0.906, \qquad \delta_2 = -26.2^0$

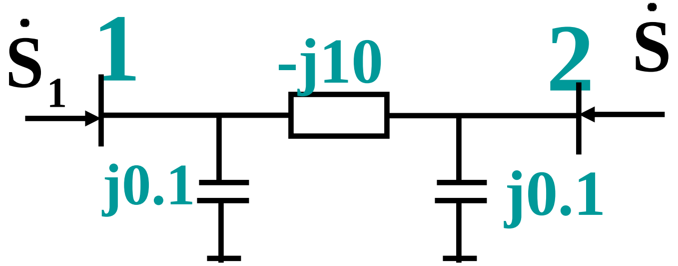
N-R法：求J，几维? 算式记不住怎么办?

PQ分解法：求B′和B″，分别几维?

例题

$$\Delta P_i = P_i^{SP} - U_i \sum_{j=1}^{n} U_j (G_{ij}\cos\delta_{ij} + B_{ij}\sin\delta_{ij}) = 0$$

$$\Delta Q_i = Q_i^{SP} - U_i \sum_{j=1}^{n} U_j (G_{ij}\sin\delta_{ij} - B_{ij}\cos\delta_{ij}) = 0$$



平衡节点1的注入功率:

$$\begin{cases} P_1 = U_1 \sum_{j=1}^{2} U_j B_{1j} \sin\delta_{1j} = U_2 B_{12} \sin(-\delta_2) = 4.0 \\ Q_1 = -U_1 \sum_{j=1}^{2} U_j B_{1j} \cos\delta_{1j} = 1.73 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad P_{G1} = P_1 + P_{D1} = 24, \quad Q_{G1} = Q_1 + Q_{D1} = 11.73$$

网损: $\triangle P_L = P_1 + P_2 = 4 - 4 = 0$

U_2=0.906偏低，→1，则放开Q_{G2}未知，PQ转化为PV。

这时有几个极坐标方程？J几维？B’和B”几维？

作业

参见网络学堂