第五次作业

1. 判断以下集合是否为凸集。

(a) 到某定点 x_0 比到给定集合 $\mathcal{A}$ 更近的点构成的集合

$$\mathcal{S}_1 = \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\|_2 \leq \|x - y\|_2, \forall y \in \mathcal{A}\right\}$$

(b) 到集合 $\mathcal{A}_1$ 比到集合 $\mathcal{A}_2$ 更近的点构成的集合

$$\mathcal{S}_2 = \{x \mid \operatorname{dist}(x, \mathcal{A}_1) \leq \operatorname{dist}(x, \mathcal{A}_2)\}$$

其中 $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \subseteq \mathbb{R}^n$，点到集合距离定义为

$$\operatorname{dist}(x, \mathcal{A}) = \min\{\|x - z\|_2 \mid z \in \mathcal{A}\}$$

(c) 已知集合 $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ 是 $\mathbb{R}^{n+m}$ 中的凸集。定义新的集合

$$\mathcal{S}_3 = \left\{(x, y_1 + y_2) \,\middle|\, \begin{array}{l} x \in \mathbb{R}^m, y_1 \in \mathbb{R}^n, y_2 \in \mathbb{R}^n \\ (x, y_1) \in \mathcal{A}_1, (x, y_2) \in \mathcal{A}_2 \end{array}\right\}$$

2. 判断下列函数的凸性。

(a) $f(x) = e^x - 1$，其中 $x \in \mathbb{R}$

(b) $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$，其中 $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_{++}$

(c) $f(x_1, x_2) = 1/x_1 x_2$，其中 $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_{++}$

(d) $f(x_1, x_2) = x_1/x_2$，其中 $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_{++}$

(e) $f(x_1, x_2) = x_1^2/x_2$，其中 $(x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{++}$

(f) $h = f \cdot g$，其中 f 和 g 是非负单增凸函数。

3. 求解如下优化问题

$$\begin{aligned} \min \quad & 2^x \cdot 4^y \\ \text{s.t.} \quad & \mathrm{e}^{-3x+y} \leq 1 \\ & |2x - y| \leq 4 \end{aligned}$$

4. 考虑以下优化问题

$$\begin{aligned} \min \quad & (x_1-2)^2+(x_2-1)^2 \\ \text{s.t.} \quad & -x_1+x_2 \geqslant 0 \\ & -x_1-x_2+2 \geqslant 0 \end{aligned}$$

(a) 求解满足 KKT 条件的 (x_1^*, x_2^*) 及拉格朗日乘子。

(b) 写出该问题的拉格朗日对偶问题并求解。

5. 考虑凸二次优化问题

$$\min \left\{ \frac{x^\top Q x}{2} + q^\top x \;\middle|\; Ax \geq b \right\} \tag{QP}$$

(a) 若 Q 是正定矩阵，写出 (QP) 的拉格朗日对偶问题。

(b) 若 Q 是半正定矩阵，其逆矩阵不存在。试通过将 (QP) 表示为二阶锥优化，进一步通过锥优化的对偶形式推出 (QP) 的对偶问题 (本问选作)。