第二次作业

1. 写出以下线性规划问题的对偶问题

$$\begin{array}{rrrrrrrrl}
\min & x_1 & - & 2\,x_2 & + & 3\,x_3 & & \\
\text{s.t.} & -\,x_1 & & & + & 4\,x_3 & = & 5 \\
& 2\,x_1 & + & 3\,x_2 & - & 5\,x_3 & \geq & 6 \\
& & & 7\,x_2 & & & \leq & 8 \\
& x_1 & & & & & \geq & 0 \\
& & & x_2 & & & & \text{free} \\
& & & & & x_3 & \leq & 0
\end{array} \tag{P1}$$

$$\begin{array}{rrrrrrrr}
\min & & & 3\,x_2 & + & x_3 & & \\
\text{s.t.} & x_1 & + & x_2 & + & 2\,x_3 & = & 1 \\
& x_1 & & & - & 3\,x_3 & \leq & 0 \\
& x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq & 0
\end{array} \tag{P2}$$

$$\begin{array}{rrrrrrrl}
\min & x_1 & & & - & 9\,x_3 & & \\
\text{s.t.} & x_1 & - & 3\,x_2 & + & 2\,x_3 & = & 1 \\
& x_1 & & & & & \leq & 0 \\
& & & x_2 & & & & \text{free} \\
& & & & & x_3 & \geq & 0
\end{array} \tag{P3}$$

$$\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leqslant a_i \quad i = 1:m \\
& \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geqslant b_j \quad j = 1:n \\
& x_{ij} \geqslant 0 \quad i = 1:m; j = 1:n
\end{aligned} \tag{P4}$$

其中 $a_i \geqslant 0, i = 1:m, \sum_{i=1}^{m} a_i = 1$ 为库存；$b_j \geqslant 0, j = 1:n, \sum_{j=1}^{n} b_j = 1$ 为需求。(P4) 为运输问题。

2. 不求解，论证线性规划问题

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 - 2x_2 + 3x_3 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 - 2x_3 \le 1 \\ & 2x_1 - x_2 - 3x_3 \le 4 \\ & x_1 + x_2 + 5x_3 \le 2 \\ & x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

的最优解是 $x^* = (9/7, 0, 1/7)$。若上述线性规划问题的目标函数变为

$$\max \ x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

约束条件不变，x^* 仍然是最优解吗？

3. 考虑线性规划问题

$$\begin{aligned} \min \quad & 8x_1 + 10x_2 + 24x_3 \\ \text{s.t.} \quad & -x_1 + x_2 + 3x_3 \ge 1 \\ & 2x_1 + x_2 + x_3 \ge 2 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

写出对偶问题并用单纯形算法求解，根据对偶最优解和互补松弛条件推出原问题最优解。

4. 考虑线性规划问题

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 + x_2 \\ \text{s.t.} \quad & -2x_1 - x_2 \le -1 \\ & x_1 - x_2 \le 3 \\ & 4x_1 + x_2 \le 17 \\ & x_2 \le 5 \\ & -x_1 + x_2 \le 4 \\ & x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

写出对偶问题，根据互补松弛条件判断 $(3, 5)$ 和 $(4, 1)$ 是否为原问题的最优解。

5. 给定线性规划问题

$$
\begin{aligned}
\min \quad & 5x_1 + 21x_3 \\
\text{s.t.} \quad & x_1 - x_2 + 6x_3 \geqslant b_1 \\
& x_1 + x_2 + 2x_3 \geqslant 1 \\
& x_1, x_2, x_3 \geqslant 0
\end{aligned}
$$

其中 b_1 是某一正数，已知这个问题的一个最优解为 $(x_1, x_2, x_3) = (1/2, 0, 1/4)$。写出对偶问题，求对偶问题的最优解和 b_1 的值。