第三章 电力系统潮流分析与计算
（Power Flow Analysis and Calculation）

第二讲 网络矩阵与潮流方程
(复杂电力系统潮流计算机分析的基础)

问 题

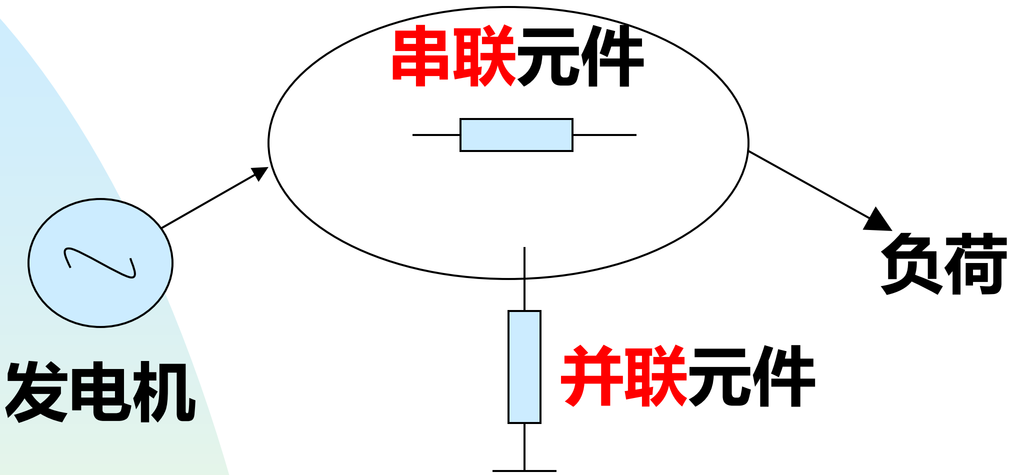
1、如何建立网络方程? (物理模型⇨数学模型)

2、如何形成网络矩阵? (计算机更喜欢矩阵)

3、如何导出功率方程（或称潮流方程）?

4、功率方程的物理本质是什么? “?=?”

§1 如何建立网络方程?
一、电力网络的数学抽象



电力网络：

元件

联结

两个约束：

1、元件特性约束（考虑无源线性元件）：

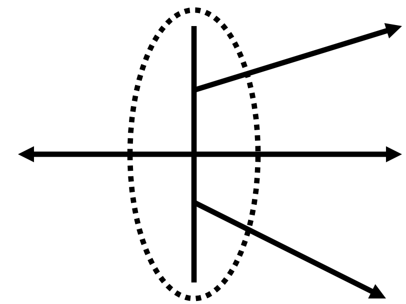
$$\dot{U}_b = Z_b \dot{I}_b$$

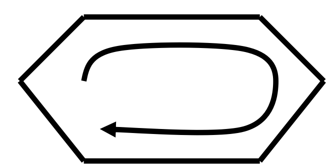
表现为欧姆定律，与元件如何联结无关

2、网络拓扑约束（Topology）

2、把元件抽象成支路，研究支路之间的联结关系

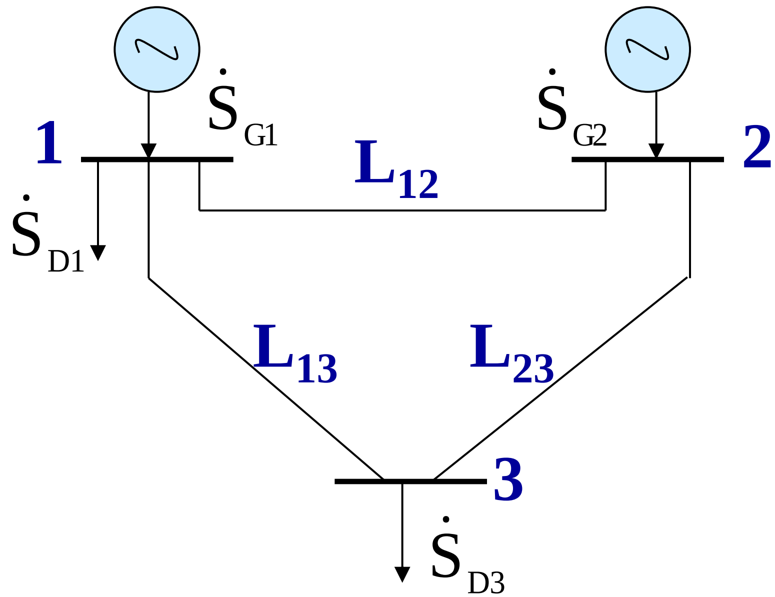
$$
\text{Kirchhoff定律}\begin{cases} KCL \quad \sum_{k\in j} i_k = 0 \\ KVL \quad \sum_{k\in l} \mathrm{u}_k = 0 \end{cases}
$$





网络拓扑约束与元件特性无关

二、等值电路的制定（物理模型）

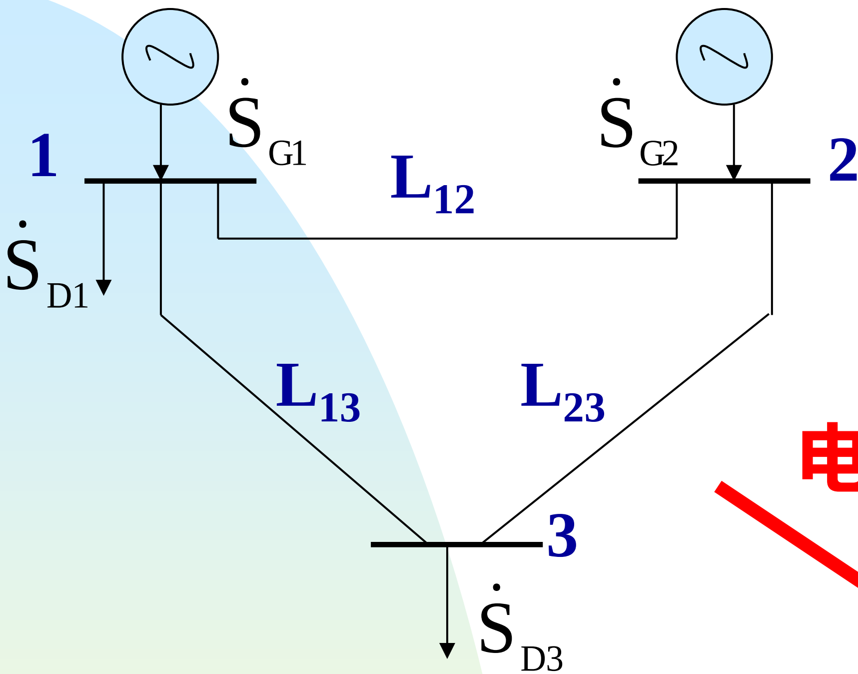


线路、变压器：π型等值标幺电路

定义节点注入功率：功率源（两部分叠加）

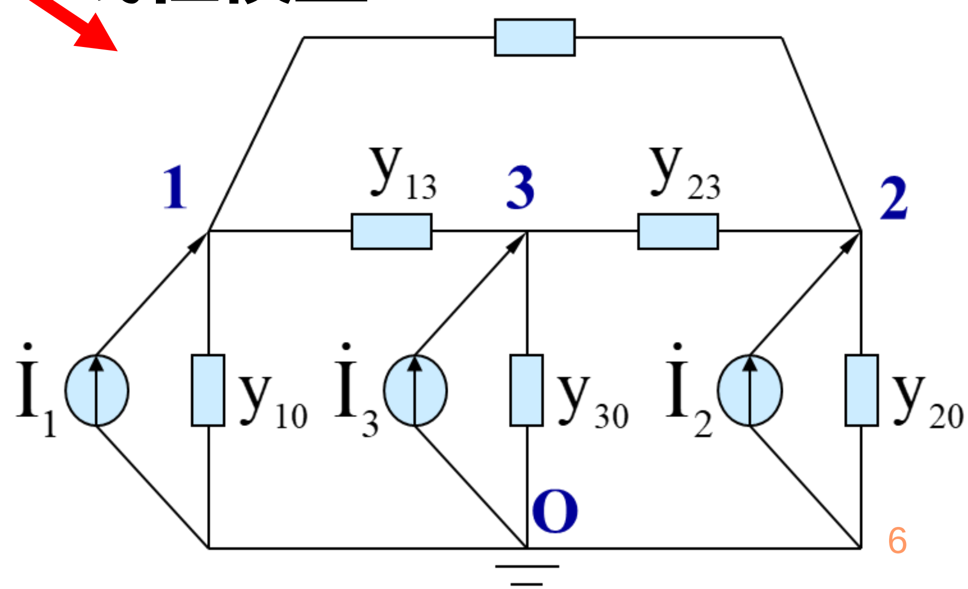
- **发电机：向节点注入功率，取“+”号**
- **负荷：从节点抽出功率，取“-”号**

等值电路的制定



电流源：

线性模型



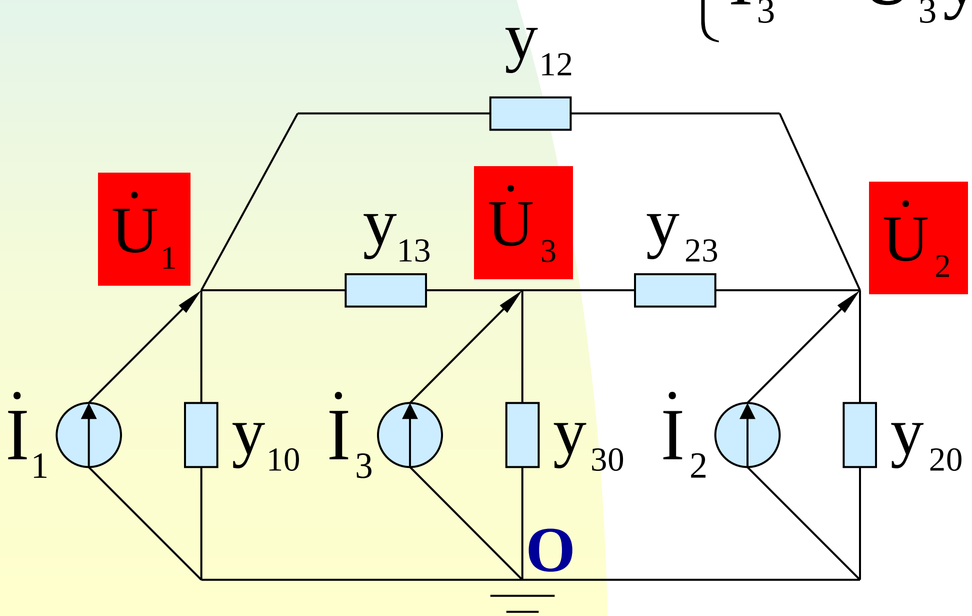
三、网络方程：节点方程

节点电压法：已知量为节点**注入电流**，待求量为**节点电压**。

依KCL定律：

$$\begin{cases} \dot{I}_1 = \dot{U}_1 y_{10} + (\dot{U}_1 - \dot{U}_2)y_{12} + (\dot{U}_1 - \dot{U}_3)y_{13} \\ \dot{I}_2 = \dot{U}_2 y_{20} + (\dot{U}_2 - \dot{U}_1)y_{12} + (\dot{U}_2 - \dot{U}_3)y_{23} \\ \dot{I}_3 = \dot{U}_3 y_{30} + (\dot{U}_3 - \dot{U}_1)y_{13} + (\dot{U}_3 - \dot{U}_2)y_{23} \end{cases}$$

拓扑约束+支路约束



$$\begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \\ \dot{I}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \\ \dot{U}_3 \end{bmatrix}$$

数值?

节点方程——推广到n个节点

$$\dot{I}_n = Y_n \dot{U}_n$$

节点电流列向量

节点导纳矩阵

节点电压列向量

独立方程个数n(=节点数)，不含参考节点O

定义**节点阻抗矩阵**：$Z_n = Y_n^{-1}$

Y_n（或Z_n）：反映了$\dot{I}_n$和$\dot{U}_n$间关系

支路特性和**网络拓扑约束**隐含在Y_n或Z_n中，是描述网络的**数学**工具：**网络矩阵**

§2 节点导纳矩阵
一、形成（定义法）

$$Y_n \dot{U}_n = \dot{I}_n \qquad Y_n = \begin{bmatrix} Y_{11} & \cdots & Y_{1i} & \cdots & Y_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ Y_{i1} & \cdots & Y_{ii} & \cdots & Y_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ Y_{n1} & \cdots & Y_{ni} & \cdots & Y_{nn} \end{bmatrix}$$

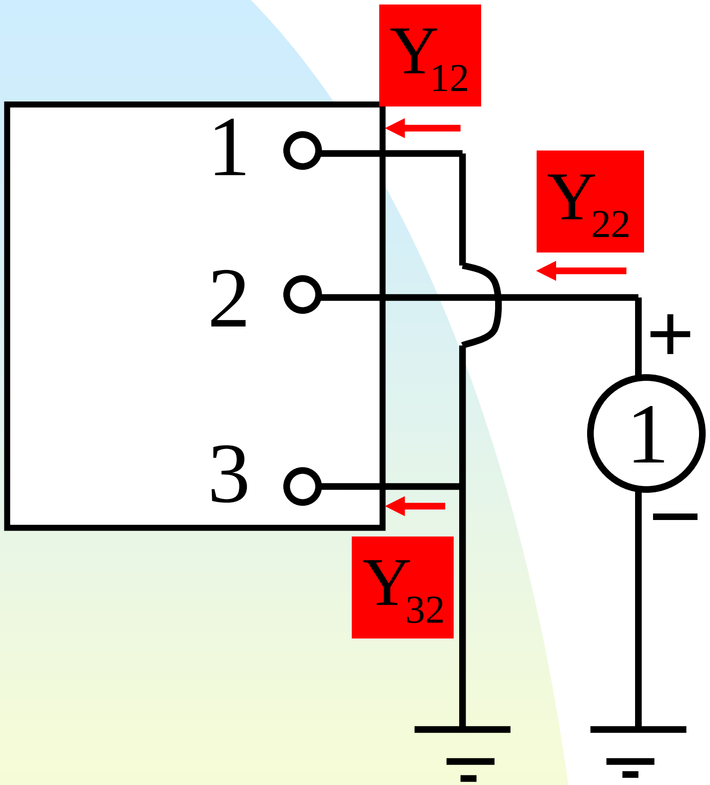
Y_{ii}：节点i的**自导纳**，i**所接所有支路导纳之和**（含：串、并联）

Y_{ij}：节点i、j的**互导纳**，i、j**支路导纳负值**

若i、j间没有直联支路：=？ （矩阵⇔图）

实际大电网？（矩阵有什么特点？）

二、物理意义
(短路参数)



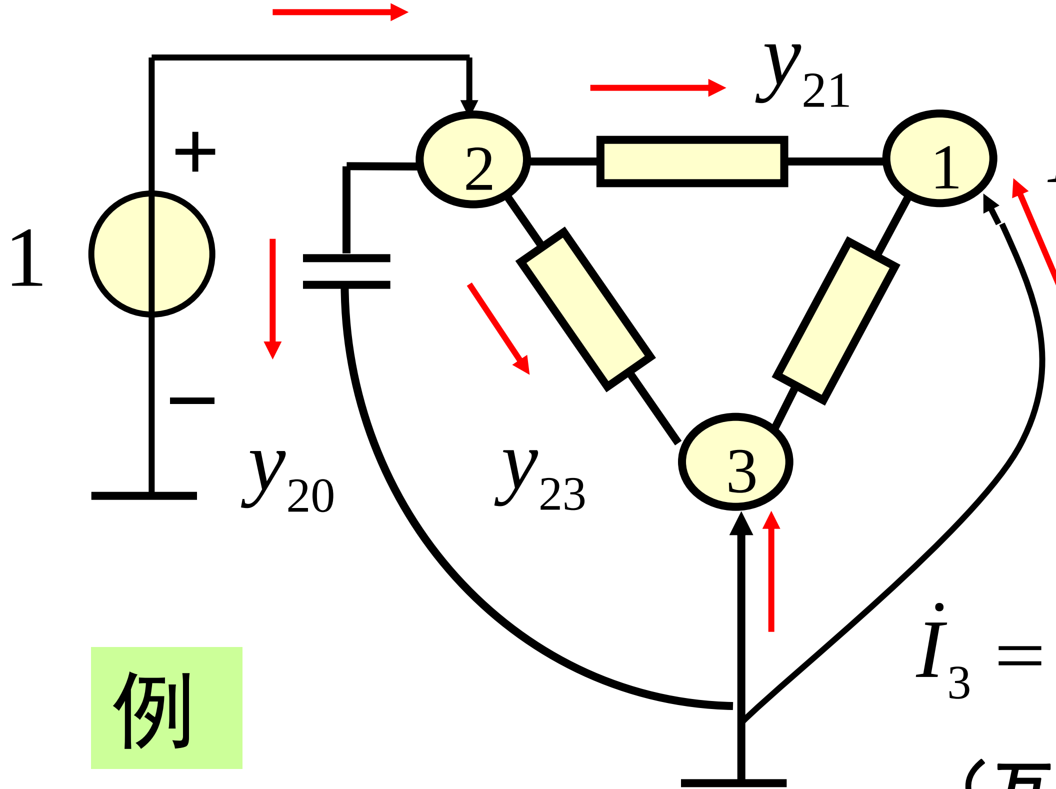
$$\begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \\ \dot{I}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \\ \dot{U}_3 \end{bmatrix}$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow$$

$$\begin{bmatrix} Y_{12} \\ Y_{22} \\ Y_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- **示例**

$$\dot{I}_2 = Y_{22} = y_{21} + y_{23} + y_{20}$$ **（自导纳）**



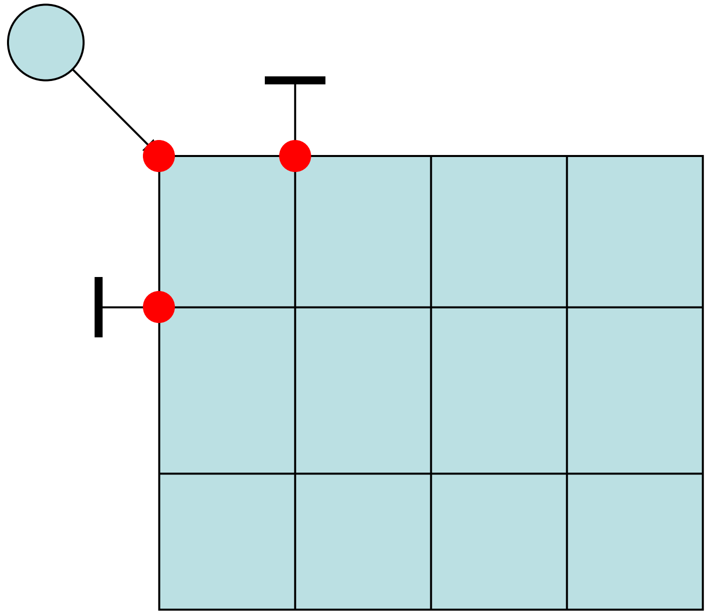
$$\dot{I}_1 = Y_{12} = -y_{21}$$

（互导纳）

$$\dot{I}_3 = Y_{32} = -y_{23}$$

（互导纳）

例

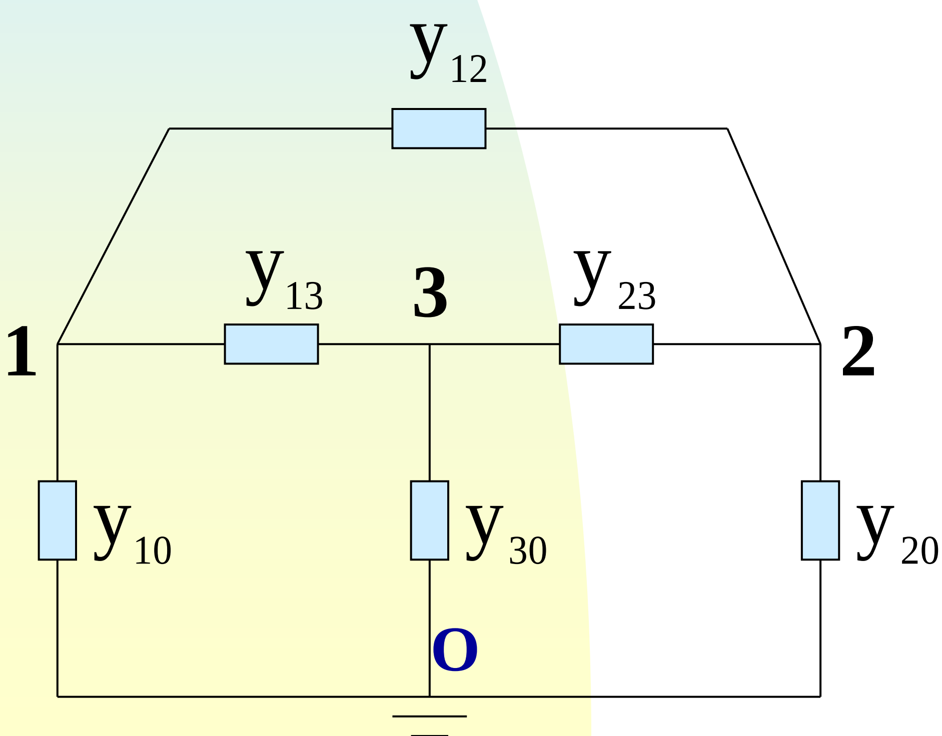


$$\begin{bmatrix} * & * & & & * & & & \\ * & * & & * & & & & \\ & & * & & * & & & \\ & * & & * & & & * & \\ * & & * & & * & * & & \\ & & & & * & * & & * \\ & & & * & & & * & * \\ & & & & & * & * & * \end{bmatrix}$$

- **Y 只包含了网络的局部信息**
- **Y是稀疏矩阵**

3节点系统的Y_n

$$\begin{bmatrix} y_{10}+y_{12}+y_{13} & -y_{12} & -y_{13} \\ -y_{12} & y_{20}+y_{12}+y_{23} & -y_{23} \\ -y_{13} & -y_{23} & y_{30}+y_{13}+y_{23} \end{bmatrix}$$



电网变化， Y_n如何修正?

支路增删?　(删13支路)

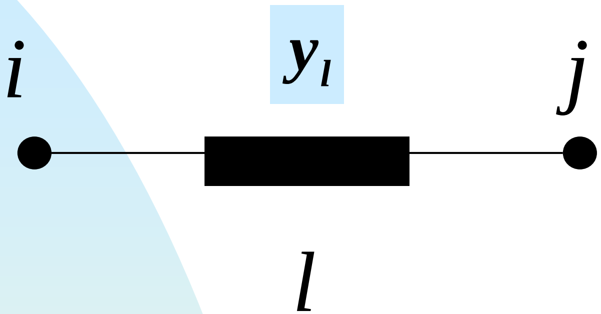
参数变化?

变比变化?

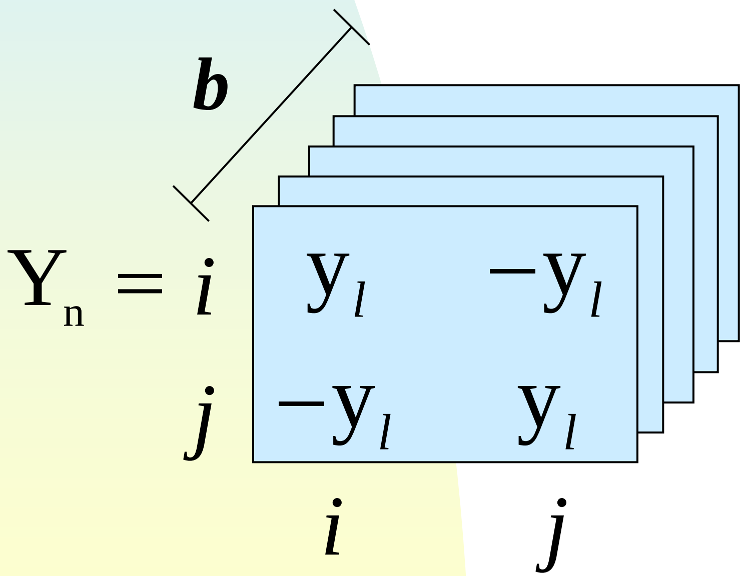
节点增加?

节点合并?

三、做个研究：支路对Y_n的贡献



$$\Delta Y_l = \begin{array}{c|cc|c} & i & j & \\ \hline & y_l & -y_l & i \\ & -y_l & y_l & j \end{array}$$



$$Y_n = \sum_{l=1}^{b} \begin{array}{cc|c} i & j & \\ \hline y_l & -y_l & i \\ -y_l & y_l & j \end{array}$$

发现什么问题?

Y_n奇异？何时非奇异?

四、Y_n性质

性质1：n×n阶**对称复数方阵**

性质2：**稀疏，**很多零元。

对大规模电网，如何考虑计算机存储和运算?

扩展专题：**稀疏技术研究**

感兴趣的同学可以深入学习一下，电力系统分析计算中如何使用稀疏技术，实现“**排零存储**”和“**排零运算**”，可参考：

https://cloud.tsinghua.edu.cn/d/6f8feb7df64a472b8f6b/

Y_n性质

性质3：有接地支路时非奇异，没有接地支路时奇异。

性质4：支路阻抗性质相同时，对角线占优：

$$\left|Y_{ii}\right| \geq \left|\sum_{j \in i} Y_{ij}\right|$$

有支路充电电容时呢?

§3 节点阻抗矩阵

一、定义

$$Z_n = Y_n^{-1}$$

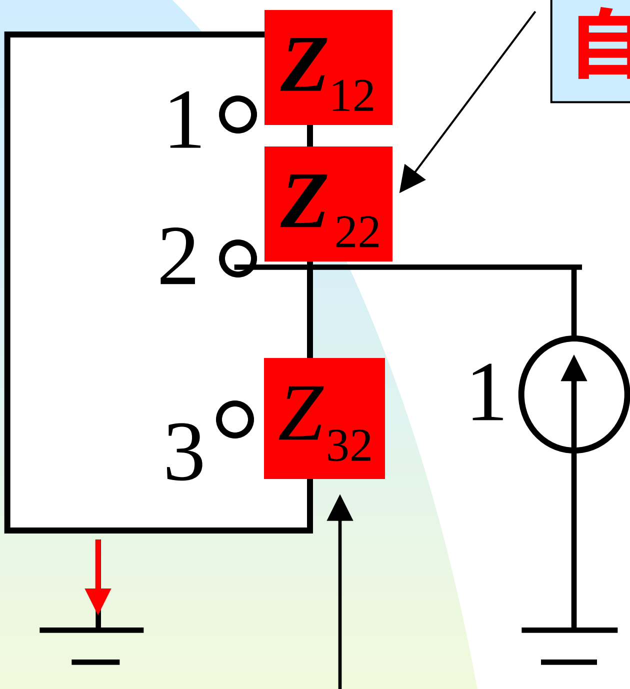
$$\dot{U}_n = Z_n \dot{I}_n$$

$$Z_n = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{11} & \cdots & Z_{1i} & \cdots & Z_{1n} \\ Z_{21} & Z_{22} & \cdots & Z_{2i} & \cdots & Z_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ Z_{i1} & Z_{i2} & \cdots & Z_{ii} & \cdots & Z_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ Z_{n1} & Z_{n2} & \cdots & Z_{ni} & \cdots & Z_{nn} \end{bmatrix}$$

Z_{ii}：节点i的自阻抗

Z_{ij}：节点i、j间的互阻抗

二、物理意义（开路参数）



自：网络对地等值总阻抗

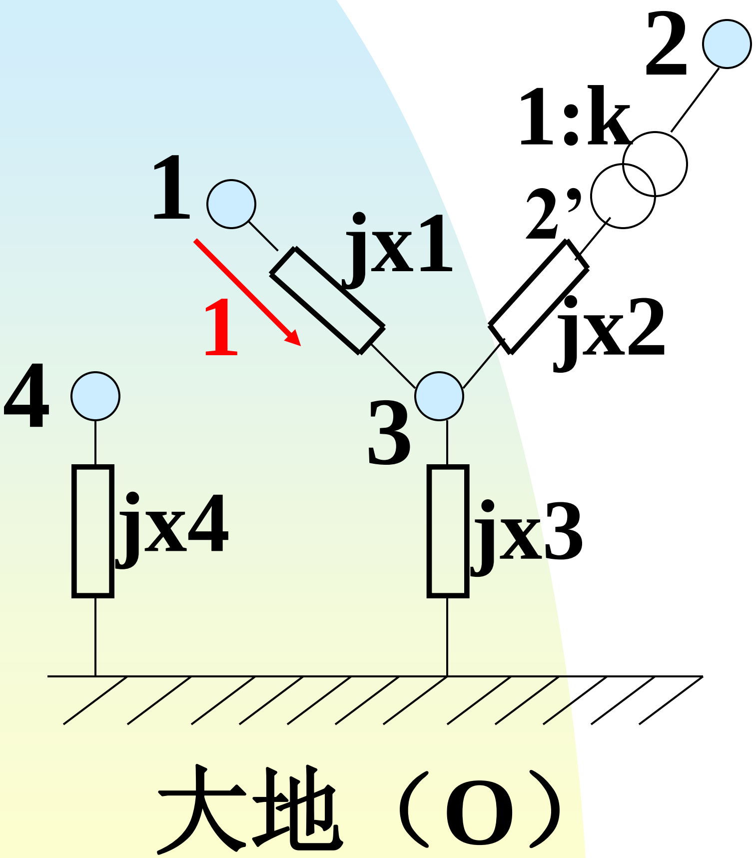
$$\begin{bmatrix}\dot{U}_1\\ \dot{U}_2\\ \dot{U}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}Z_{11} & Z_{12} & Z_{13}\\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{23}\\ Z_{31} & Z_{32} & Z_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{I}_1\\ \dot{I}_2\\ \dot{I}_3\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}Z_{12}\\ Z_{22}\\ Z_{32}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}Z_{11} & Z_{12} & Z_{13}\\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{23}\\ Z_{31} & Z_{32} & Z_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 0\end{bmatrix}$$

互：总阻抗Z_{22}的一部分

$$Z_{32}=\frac{1}{\eta}Z_{22}$$

三、Z_n生成方法：定义法



Z_{11}?	Z_{12}?	Z_{13}?	Z_{14}?
Z_{21}?	j(x2+x3)*k^2	jx3*k	0
		jx3	0
			jx4

怎么做开路试验?

验证对称性?(互易定理)

四、性质

性质1：有接地支路时，与Y_n互逆，n×n阶**对称复数方阵。**

- 若无接地支路？Y_n不可逆，Z_n不存在。
- 需选一个参考节点，给定其电压，Y和Z变成（n-1）×（n-1）阶，**理解？(数/物)**

性质2：对连通网，**满阵(理解？不连通？)**

性质3：对无源网，一般有**对角线优势**：$|Z_{ii}|\geq|Z_{ij}|$

对元件的要求?

五、其他生成法

导纳阵求逆法：

$$Z_n = Y_n^{-1}$$

支路追加法: 从一个节点、一条支路开始，根据定义，不断追加支路，不断修正Z，直到形成完整网络。（不做要求）

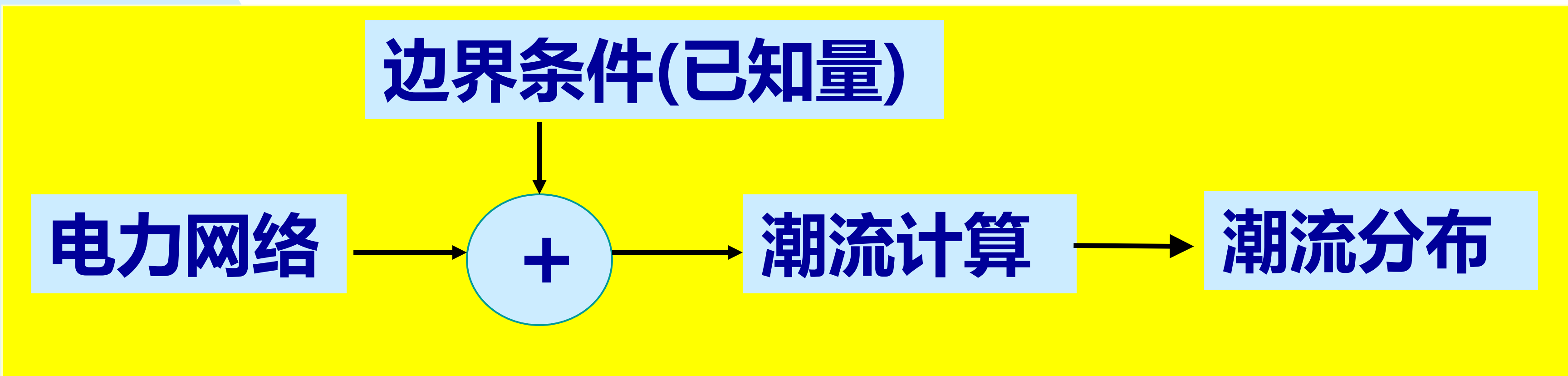
基本要求：按**定义法**（对简单电网）

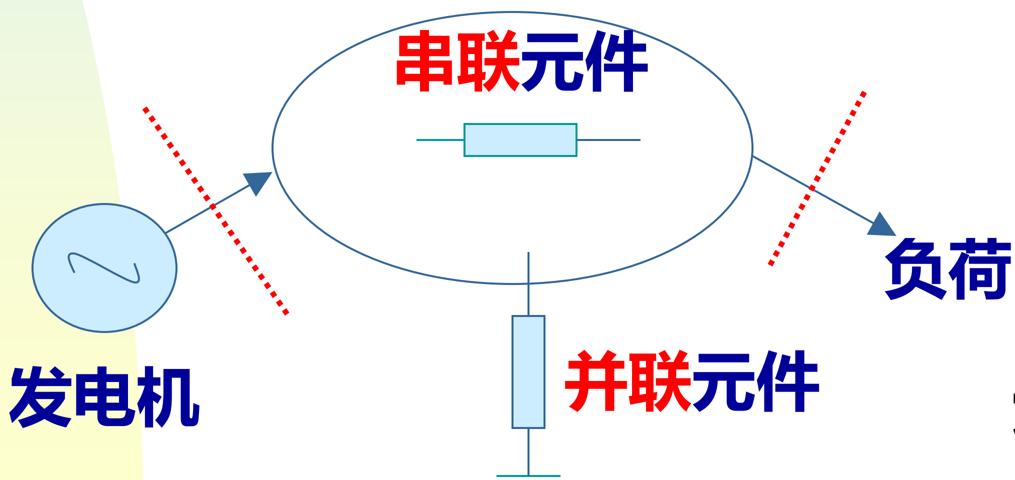
课后思考：为什么Z矩阵元素包含了全网信息？

§4 功率方程（潮流方程）

一、为何要建立功率方程?

潮流计算模式:





边界条件?

若边界条件是节点注入电流（负荷和发电是电流源）

已知量

$$\dot{I}_n = Y_n \dot{U}_n$$

节点导纳矩阵

待求量

有这么简单吗?

实际边界条件:给定复功率

需要研究功率（已知量）和电压（待求量）之间的关系，需要建立功率方程，或称潮流方程。

二、 如何推导功率方程？ （思路）

1、替换变量

节点电压方程： $\dot{I}_n = Y_n \dot{U}_n$

物理本质：
节点电流平衡(线性)

$$\dot{I}_i = \frac{(P_i + jQ_i)^*}{\overset{*}{U}_i} \Rightarrow \dot{I}_i = \sum_{j=1}^{n} Y_{ij} \dot{U}_j \quad (i = 1,2,\cdots,n)$$

$$\frac{P_i - jQ_i}{\overset{*}{U}_i} = \sum_{j=1}^{n} Y_{ij} \dot{U}_j \quad (i = 1,2,\cdots,n)$$

$$\Downarrow$$

功率方程： $P_i - jQ_i = \overset{*}{U}_i \sum_{j=1}^{n} Y_{ij} \dot{U}_j \quad (i = 1,2,\cdots,n)$

物理本质：节点功率平衡?=? (非线性复数)

2、复数→实数 (直角坐标)

$$P_i - jQ_i = \overset{*}{\dot{U}}_i \sum_{j=1}^{n} Y_{ij}\dot{U}_j$$

令： $Y_{ij} = G_{ij} + jB_{ij}, \quad \dot{U}_i = e_i + jf_i$

$$P_i - jQ_i = (e_i - jf_i)\sum_{j=1}^{n}\left[(G_{ij} + jB_{ij})(e_j + jf_j)\right]$$

$$= (e_i - jf_i)(a_i + jb_i)$$

$$= (e_i a_i + f_i b_i) - j(f_i a_i - e_i b_i)$$

$$a_i = \sum_{j=1}^{n}\left(G_{ij}e_j - B_{ij}f_j\right) \qquad b_i = \sum_{j=1}^{n}\left(G_{ij}f_j + B_{ij}e_j\right)$$

节点有功平衡: $\Delta P_i = P_i - (e_i a_i + f_i b_i) = 0$

节点无功平衡: $\Delta Q_i = Q_i - (f_i a_i - e_i b_i) = 0$

非线性实方程，个数?

潮流方程抽象形式

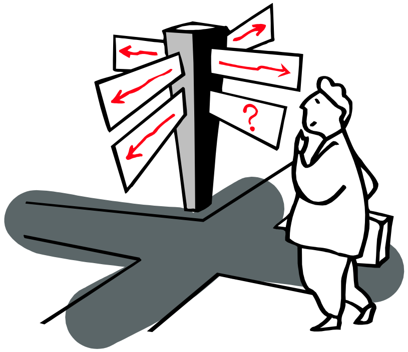
待求量:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \\ \cdots \\ f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} \qquad \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \Delta P_1 \\ \vdots \\ \Delta P_n \\ \cdots \\ \Delta Q_1 \\ \vdots \\ \Delta Q_n \end{bmatrix} = 0 \quad \begin{matrix} \left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} n \\ \left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} n \end{matrix}$$

未知数 = 方程数，能求解吗?

更关心电压幅值和相角?

（潮流特性，物理意义）



复数⇨实数（极坐标）

$$P_i - jQ_i = \overset{*}{U}_i \sum_{j=1}^{n} Y_{ij}\dot{U}_j$$

令：$Y_{ij} = G_{ij} + jB_{ij}, \dot{U}_i = U_i e^{j\delta i}$

$$P_i - jQ_i = U_i e^{-j\delta i} \sum_{j=1}^{n} (G_{ij} + jB_{ij}) U_j e^{j\delta j}$$

$$= U_i \sum_{j=1}^{n} U_j \boxed{(G_{ij} + jB_{ij}) e^{-j\delta ij}}$$

$$\boxed{(G_{ij}\cos\delta_{ij} + B_{ij}\sin\delta_{ij}) + j(B_{ij}\cos\delta_{ij} - G_{ij}\sin\delta_{ij})}$$

有功平衡: $$\Delta P_i = P_i - U_i \sum_{j=1}^{n} U_j (G_{ij}\cos\delta_{ij} + B_{ij}\sin\delta_{ij}) = 0$$

无功平衡: $$\Delta Q_i = Q_i + U_i \sum_{j=1}^{n} U_j (B_{ij}\cos\delta_{ij} - G_{ij}\sin\delta_{ij}) = 0$$

只跟相角差有关，如无相角参考点，结果?

潮流方程抽象形式

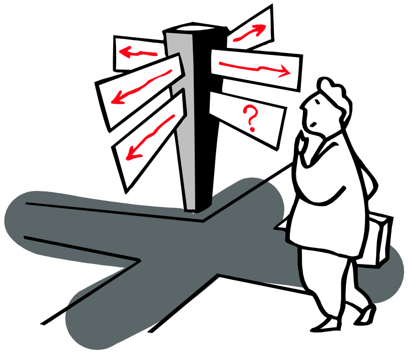
$$\text{待求量:}\quad \mathbf{x}=\begin{bmatrix}\delta_1\\ \vdots\\ \delta_n\\ \cdots\\ U_1\\ \vdots\\ U_n\end{bmatrix}\qquad \mathbf{f}(\mathbf{x})=\begin{bmatrix}\Delta P_1\\ \vdots\\ \Delta P_n\\ \cdots\\ \Delta Q_1\\ \vdots\\ \Delta Q_n\end{bmatrix}=0\quad \begin{matrix}\}\ \mathbf{n}\\ \}\ \mathbf{n}\end{matrix}$$

未知数 = 方程数

能不能解呢?

能解功率方程了吗?

什么已知？什么待求?



实际潮流方程

一、功率方程(直角坐标)

$$\begin{cases} \Delta P_i = P_i^{sp} - (e_i a_i + f_i b_i) = 0 \\ \Delta Q_i = Q_i^{sp} - (f_i a_i - e_i b_i) = 0 \end{cases} \quad i = 1,2,\cdots,n$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \\ f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} \qquad \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \Delta P_1 \\ \vdots \\ \Delta P_n \\ \Delta Q_1 \\ \vdots \\ \Delta Q_n \end{bmatrix} = 0$$

待求量

n

n

末知数 = 方程数

二、功率方程(极坐标)

$$\left.\begin{aligned}\Delta P_i &= P_i^{sp} - U_i\sum_{j=1}^{n} U_j(G_{ij}\cos\delta_{ij} + B_{ij}\sin\delta_{ij}) = 0\\ \Delta Q_i &= Q_i^{sp} + U_i\sum_{j=1}^{n} U_j(B_{ij}\cos\delta_{ij} - G_{ij}\sin\delta_{ij}) = 0\end{aligned}\right\} \quad i = 1,2,\cdots,n$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_n \\ U_1 \\ \vdots \\ U_n \end{bmatrix} \qquad \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \Delta P_1 \\ \vdots \\ \Delta P_n \\ \Delta Q_1 \\ \vdots \\ \Delta Q_n \end{bmatrix} = 0$$

待求量

n

n

未知数 = 方程数

三、 分析：实际已知量和待求量

- 每个节点 *i* 有**四个运行变量**（一般取复电压为**状态变量**: 确定系统状态的最小一组变量,支路功率可算出)

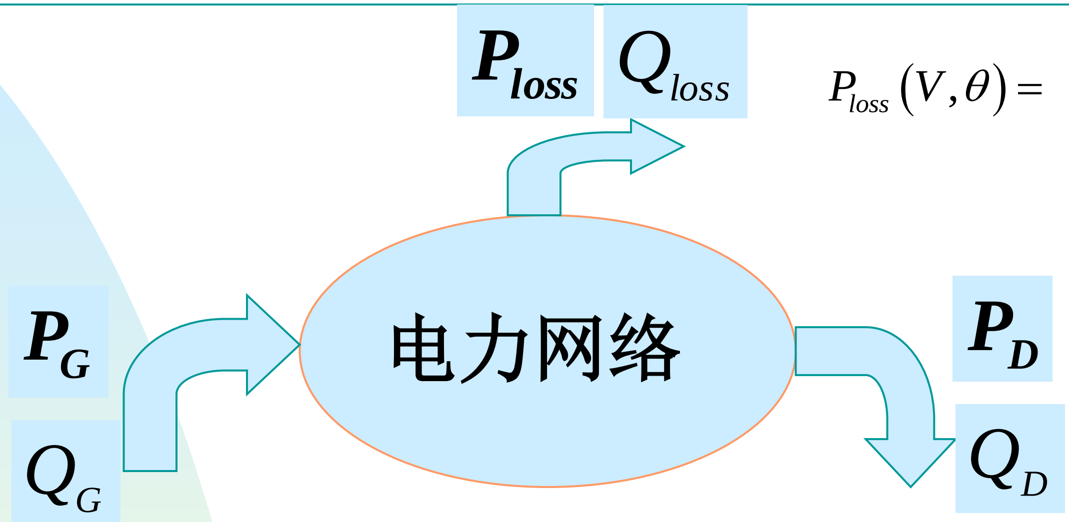
$$P_i(=P_{Gi}-P_{Di})、Q_i(=Q_{Gi}-Q_{Di})、U_i、\delta_i\ (e_i,f_i)$$

- 全系统共4n个变量，有2n个方程，需要**给定2n个求解其余2n个**，一般每个节点给定2个
- **实际如何给定?**
- 根据工程实际确定 → **节点类型**

节点类型的划分

- 根据已知条件，节点分三类：PQ、PV、Vδ
- 负荷节点： PQ节点，P_i Q_i由负荷需求决定，不可控，一般作为已知量，复电压待求
- 联络节点：PQ节点，$P_i=Q_i=0$，复电压待求
- 发电机节点：PV节点，一般U_i维持不变，P_i由原动机输出功率决定，P_iU_i给定，δ Q待求；某些属于PQ节点，复电压待求
- PQ节点和PV节点有可能互相转化（何时？）

节点类型的划分
（能否给定所有节点的PQ？）



$$P_{loss}(V,\theta)=\sum_{i=1}^{N}P_i=\sum_{i=1}^{N}V_i\sum_{j\in i}V_jG_{ij}\cos\theta_{ij}$$

- 全系统功率必须平衡！
- 但P_{loss} Q_{loss}是状态变量的函数，事先未知。
- 要放开一个节点PQ不能给定（n号节点），用于全系统功率平衡。（计算上的必需！）
- 给定$U_n\delta_n$，称平衡节点（Vδ节点、Vθ节点），设其δ_n=0（即参考节点）

节点分类表：已知量和待求量

PQ节点(n-r-1个)				PV节点(r个)			Vδ节点(1个)
P_1	P_2	…	P_{n-r-1}	P_{n-r}	…	P_{n-1}	P_n
Q_1	Q_2	…	Q_{n-r-1}	Q_{n-r}	…	Q_{n-1}	Q_n
U_1	U_2	…	U_{n-r-1}	U_{n-r}	…	U_{n-1}	U_n
δ_1	δ_2	…	δ_{n-r-1}	δ_{n-r}	…	δ_{n-1}	δ_n

极坐标（直角坐标）下待求的状态量有几个?

四、实际潮流方程(直角坐标)
(2n-2个待求量， 需建2n-2个方程)

PQ、PV节点共n-1个：

$$\Delta P_i = P_i^{SP} - (e_i a_i + f_i b_i) = 0 \qquad \text{n-1个}$$

PQ节点共n-1-r个：

$$\Delta Q_i = Q_i^{SP} - (f_i a_i - e_i b_i) = 0 \qquad \text{n-1-r个}$$

PV节点Q_i未知，无法列Q方程，差r个方程，怎么办?

$$\Delta U_i^2 = \left(U_i^{SP}\right)^2 - (e_i^2 + f_i^2) = 0 \qquad \text{r个}$$

平衡节点在上述方程中出现么?

2n-2个待求量， 2n-2个方程

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_{n-1} \\ f_1 \\ \vdots \\ f_{n-1} \end{bmatrix} \quad \mathbf{f}(\mathbf{x})=\begin{bmatrix} \Delta P_1 \\ \vdots \\ \Delta P_{n-1} \\ \Delta Q_1 \\ \vdots \\ \Delta Q_m \\ \Delta U^2_{m+1} \\ \vdots \\ \Delta U^2_{n-1} \end{bmatrix} =0$$

待求量

n-1

m=n-r-1

r

P_n, Q_{n-r}, … Q_n=？

五、实际潮流方程(极坐标)
(2n-2-r个待求量，需建2n-2-r个方程)

$$\Delta P_i = P_i^{SP} - U_i \sum_{j=1}^{n} U_j (G_{ij}\cos\delta_{ij} + B_{ij}\sin\delta_{ij}) = 0 \qquad i = 1,2,\cdots,n-1$$

$$\Delta Q_i = Q_i^{SP} + U_i \sum_{j=1}^{n} U_j (B_{ij}\cos\delta_{ij} - G_{ij}\sin\delta_{ij}) = 0 \qquad i = 1,2,\cdots,n-1-r$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_{n-1} \\ U_1 \\ \vdots \\ U_{n-1-r} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \Delta P_1 \\ \vdots \\ \Delta P_{n-1} \\ \Delta Q_1 \\ \vdots \\ \Delta Q_{n-1-r} \end{bmatrix} = 0$$

待求量

n-1

n-1-r

P_n, Q_{n-r}, … Q_n=?

六、潮流解在工程上是否合理?（检验标准：潮流约束条件）

- **电源节点：** $P_{Gimin} \le P_{G_i} \le P_{Gimax}$ $(V\delta)$

  $Q_{Gimin} \le Q_{Gi} \le Q_{Gimax}$ $(PV, V\delta)$

- **所有节点：** $U_{imin} \le U_i \le U_{imax}$

- **重要线路：** $|\delta_i - \delta_j| < |\delta_i - \delta_j|_{max}$ **(稳定性)**

- **线路变压器功率：** $S_{ij} \le S_{ijmax}$

否则，改给定值（边界条件），或改网络结构（Y）

几个深入的思考（欢迎讨论）

- 系统中的网损都由平衡节点吸收了么?
- 是否可以有多个平衡节点?
- 平衡节点如果计算得到的有功/无功功率明显与物理不符合怎么办?
- 按照什么原则选取平衡节点?
- PV节点计算得到的无功如果与物理不符（越限）怎么办?
- 是否还可以有其他类型的节点？（比如Qδ？比如PQV？比如P？应满足什么要求？）

稳态仿真作业

内容：涉及编程生成节点导纳矩阵、用牛拉法和PQ分解法求解潮流，具体见网络学堂

要求：最晚第十周周日（11月17日）于网络学堂打包上传报告和代码

答疑时间：第七周周日（10月27日）10点

答疑地点：线上（腾讯会议号：881-820-235）

专题研讨-4（可选）

常规直流和柔直存在哪些控制模式，其整流侧和逆变侧在潮流计算中应该看作什么节点类型?

要求：

- 1-3分钟视频
- 软件拍摄，或PPT+配音后生成视频
- 通过网络学堂上传