第二次作业

1. 写出以下线性规划问题的对偶问题

$$
\begin{array}{rrrrrrrrr}
\min & x_1 & - & 2\,x_2 & + & 3\,x_3 & & \\
\text{s.t.} - & x_1 & & & + & 4\,x_3 & = & 5 \\
2 & x_1 & + & 3\,x_2 & - & 5\,x_3 & \geq & 6 \\
 & & & 7\,x_2 & & & \leq & 8 \\
 & x_1 & & & & & \geq & 0 \\
 & & & x_2 & & & & \text{free} \\
 & & & & & x_3 & \leq & 0
\end{array} \tag{P1}
$$

$$
\begin{array}{rrrrrrrr}
\min & & & 3\,x_2 & + & x_3 & & \\
\text{s.t.} & x_1 & + & x_2 & + & 2\,x_3 & = & 1 \\
 & x_1 & & & - & 3\,x_3 & \leq & 0 \\
 & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq & 0
\end{array} \tag{P2}
$$

$$
\begin{array}{rrrrrrrr}
\min & x_1 & & & - & 9\,x_3 & & \\
\text{s.t.} & x_1 & - & 3\,x_2 & + & 2\,x_3 & = & 1 \\
 & x_1 & & & & & \leq & 0 \\
 & & & x_2 & & & & \text{free} \\
 & & & & & x_3 & \geq & 0
\end{array} \tag{P3}
$$

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leqslant a_i \quad i = 1:m \\
& \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geqslant b_j \quad j = 1:n \\
& x_{ij} \geqslant 0 \quad i = 1:m; j = 1:n
\end{aligned} \tag{P4}
$$

其中 $a_i \geqslant 0,\ i = 1:m,\ \sum_{i=1}^{m} a_i = 1$ 为库存；$b_j \geqslant 0,\ j = 1:n,\ \sum_{j=1}^{n} b_j = 1$ 为需求。(P4) 为运输问题。

解

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j \\ \text{s.t.} \quad & u_i + v_j \leqslant c_{ij} \quad i = 1:m; j = 1:n \\ & u \leqslant 0,\ v \geqslant 0 \end{aligned} \tag{D4}$$

□

2. 不求解，论证线性规划问题

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 - 2x_2 + 3x_3 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 - 2x_3 \leq 1 \\ & 2x_1 - x_2 - 3x_3 \leq 4 \\ & x_1 + x_2 + 5x_3 \leq 2 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

的最优解是 $x^* = (9/7, 0, 1/7)$。若上述线性规划问题的目标函数变为

$$\max \ x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

约束条件不变，x^* 仍然是最优解吗？

解 容易验证 $x^* = (9/7, 0, 1/7)$ 满足所有约束条件。对偶变量满足：

$$\begin{aligned} y_1 + 2y_2 + y_3 &\geq 1 \\ y_1 - y_2 + y_3 &\geq -2 \\ -2y_1 - 3y_2 + 5y_3 &\geq 3 \\ y_1,\ y_2,\ y_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

若 x^* 是最优解，对偶问题也存在最优解 y^*。由于 $x_1^* > 0$，$x_3^* > 0$，根据互补松弛条件可知

$$\begin{aligned} y_1^* + 2y_2^* + y_3^* &= 1 \\ -2y_1^* - 3y_2^* + 5y_3^* &= 3 \end{aligned}$$

将 x^* 代入原问题约束条件

$$2x_1^* - x_2^* - 3x_3^* < 4$$

故 $y_2^* = 0$，由此解得 $y^* = (2/7, 0, 5/7)$，满足 $y_1^* - y_2^* + y_3^* > -2$ 以及 $y^* \geqslant 0$。由 x^* 和 y^* 在原问题和对偶问题中的可行性可以断定它们分别是原问题和对偶问题的最优解。

当目标函数改变以后，若 x^* 是最优解，重复上一问的论述过程，对偶问题的最优解只可能是 $y^* = (2/7, 0, 5/7)$，但是对偶问题的第 2 个约束条件变为

$$y_1 - y_2 + y_3 \geq 2$$

显然 y^* 不满足该约束，不是对偶可行解，不存在对偶可行解满足互补松弛条件。因此 x^* 不是原问题的最优解。 $\square$

3. 考虑线性规划问题

$$\begin{aligned} \min \quad & 8x_1 + 10x_2 + 24x_3 \\ \text{s.t.} \quad & -x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 1 \\ & 2x_1 + x_2 + x_3 \geq 2 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

写出对偶问题并用单纯形算法求解，根据对偶最优解和互补松弛条件推出原问题最优解。

解　对偶问题为

$$\begin{aligned} \max \quad & y_1 + 2y_2 \\ \text{s.t.} \quad & -y_1 + 2y_2 \leq 8 \\ & y_1 + y_2 \leq 10 \\ & 3y_1 + y_2 \leq 24 \\ & y_1,\ y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

对偶问题的最优解为 $y^* = (4, 6)$。对偶问题约束中，$3y_1^* + y_2^* < 24$ 是严格不等式约束，因此原问题中 $x_3^* = 0$。解方程

$$-x_1^* + x_2^* = 1$$

$$2x_1^* + x_2^* = 2$$

可得 $x_1^* = 1/3 > 0$，$x_2^* = 4/3 > 0$。 $\square$

4. 考虑线性规划问题

$$
\begin{aligned}
\max\quad & 2x_1 + x_2 \\
\text{s.t.}\quad & -2x_1 - x_2 \leq -1 \\
& x_1 - x_2 \leq 3 \\
& 4x_1 + x_2 \leq 17 \\
& x_2 \leq 5 \\
& -x_1 + x_2 \leq 4 \\
& x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

写出对偶问题，根据互补松弛条件判断 $(3,5)$ 和 $(4,1)$ 是否为原问题的最优解。

解　对偶问题为

$$
\begin{aligned}
\min\quad & -y_1 + 3y_2 + 17y_3 + 5y_4 + 4y_5 \\
\text{s.t.}\quad & -2y_1 + y_2 + 4y_3 - y_5 \geq 2 \\
& -y_1 - y_2 + y_3 + y_4 + y_5 \geq 1 \\
& y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \geq 0
\end{aligned}
$$

将 $(3,5)$ 代入原问题约束条件

$$
\begin{aligned}
-2x_1 - x_2 < -1 &\quad \Rightarrow y_1 = 0 \\
x_1 - x_2 < 3 &\quad \Rightarrow y_2 = 0 \\
4x_1 + x_2 = 17 &\quad \Rightarrow y_3 \geqslant 0 \\
x_2 = 5 &\quad \Rightarrow y_4 \geqslant 0 \\
-x_1 + x_2 < 4 &\quad \Rightarrow y_5 = 0
\end{aligned}
$$

由 $(3,5) > (0,0)$ 可知对偶问题不等式约束起作用，故

$$
\begin{aligned}
-2y_1 + y_2 + 4y_3 - y_5 = 2 \\
-y_1 - y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 1
\end{aligned}
$$

将 $y_1 = y_2 = y_5 = 0$ 代入得

$$
y_3 = \frac{1}{2} > 0,\ y_4 = \frac{1}{2} > 0
$$

因此 $(3,5)$ 是原问题的最优解。

将 $(4,1)$ 代入原问题约束条件

$$\begin{aligned} -2x_1 - x_2 < -1 &\quad \Rightarrow y_1 = 0 \\ x_1 - x_2 = 3 &\quad \Rightarrow y_2 \geqslant 0 \\ 4x_1 + x_2 = 17 &\quad \Rightarrow y_3 \geqslant 0 \\ x_2 < 5 &\quad \Rightarrow y_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 < 4 &\quad \Rightarrow y_5 = 0 \end{aligned}$$

由 $(4,1) > (0,0)$ 可知对偶问题不等式约束起作用，故

$$\begin{aligned} y_2 + 4y_3 = 2 \\ -y_2 + y_3 = 1 \end{aligned}$$

解得

$$y_2 = -\frac{2}{5} < 0,\ y_3 = \frac{3}{5} > 0$$

不是对偶可行解，因此 $(4,1)$ 不是原问题的最优解。 □

5. 给定线性规划问题

$$\begin{aligned} \min \quad & 5x_1 + 21x_3 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 - x_2 + 6x_3 \geqslant b_1 \\ & x_1 + x_2 + 2x_3 \geqslant 1 \\ & x_1, x_2, x_3 \geqslant 0 \end{aligned}$$

其中 b_1 是某一正数，已知这个问题的一个最优解为 $(x_1, x_2, x_3) = (1/2, 0, 1/4)$。写出对偶问题，求对偶问题的最优解和 b_1 的值。

解 对偶问题如下：

$$\begin{aligned} \max \quad & b_1 w_1 + w_2 \\ \text{s.t.} \quad & w_1 + w_2 \leqslant 5 \\ & -w_1 + w_2 \leqslant 0 \\ & 6w_1 + 2w_2 \leqslant 21 \\ & w_1, w_2 \geqslant 0 \end{aligned}$$

用互补松弛性质求对偶问题的最优解。由于原问题在最优解处 $x_1 > 0, x_3 > 0$，因此有

$$\begin{aligned} w_1 + w_2 = 5 \\ 6w_1 + 2w_2 = 21 \end{aligned}$$

解得 $w_1 = 11/4, w_2 = 9/4$。原问题的最优值为 $31/4$，也即对偶问题的最优值。由

$$\frac{11b_1}{4} + \frac{9}{4} = \frac{31}{4}$$

可得 $b_1 = 2$。 $\square$