第七次作业

1. 考虑鲁棒线性规划问题

$$\begin{aligned} \min \quad & c^\top x \\ \text{s.t.} \quad & Ax \leqslant b,\ \forall A \in \mathcal{A} \end{aligned}$$

其中 $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^{m\times n}$，其元素在某个区间内取值，即

$$\bar{A}_{ij} - V_{ij} \leq A_{ij} \leq \bar{A}_{ij} + V_{ij},\ \forall i, \forall j$$

$\bar{A}_{ij}$ 是 A_{ij} 的标称值，V_{ij} 是其波动区间之半。写出上述问题的确定性等价模型。

解 由于

$$A_{ij}x_j = \bar{A}_{ij}x_j + \Delta A_{ij}x_j \leqslant \bar{A}_{ij}x_j + V_{ij}|x_j|$$

鲁棒对等模型为

$$\begin{aligned} \min \quad & c^\top x \\ \text{s.t} \quad & \bar{A}x + V|x| \leqslant b \end{aligned}$$

其中 $|x| = (|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_n|)$。写成线性规划形式

$$\begin{aligned} \min \quad & c^\top x \\ \text{s.t.} \quad & \bar{A}x + Vy \leqslant b \\ & -y \leqslant x \leqslant y \end{aligned} \quad \text{或} \quad \begin{aligned} \min \quad & c^\top (x^+ - x^-) \\ \text{s.t.} \quad & (\bar{A}+V)x^+ - (\bar{A}-V)x^- \leqslant b \\ & x^+ \geqslant 0,\ x^- \geqslant 0 \end{aligned}$$

□

2. 考虑某工厂两时段生产问题，两个时段的负荷需求为 18 单位和 20 单位。工厂可以与电力公司签订合约，以 5 万元每单位的价格从合约市场购电；合约一旦签订不可更改，假设合约电量为 d_c，工厂每个时段都将获得 d_c 单位电能，故总成本为 $10d_c$。工厂还可以从实时市场购电，两个时段电量分别是 d_1 和 d_2，两个时段的实时电价具有不确定性，可能出现的情况包括 $(4,6)$, $(4,8)$, $(5,6)$ 万元每单位。每个时段从两个市场获得的总电量必须满足负荷。工厂需要极小化最坏（实时市场）电价情况下的购电成本。

(a) 写出工厂的决策模型，求出最坏价格场景及合约市场购电量。

(b) 分析当实时市场电价 (p_1, p_2) 满足什么条件时，工厂才倾向于从合约市场购电。

(c) 根据常识分析合约市场对工厂和电力系统分别有什么好处。

解 由于合约市场的电量不能在实时市场出售，d_c 应小于负荷，实时市场购电量非负，于是价格组合 (4,8) 必定比 (4,6) 更坏，故只需要考虑价格组合 (4,8) 和 (5,6)。

(a) 当价格组合是 (4,8) 时，工厂决策问题为

$$\begin{aligned} \min \quad & 10d_c + 4d_1 + 8d_2 \\ \text{s.t.} \quad & d_c + d_1 = 18, d_c + d_2 = 20 \\ & d_c \geq 0, d_1 \geq 0, d_2 \geq 0 \end{aligned}$$

其最优解为 $(d_c, d_1, d_2) = (18, 0, 2)$，成本为 196 万元。

当价格组合是 (5,6) 时，工厂决策问题为

$$\begin{aligned} \min \quad & 10d_c + 5d_1 + 6d_2 \\ \text{s.t.} \quad & d_c + d_1 = 18, d_c + d_2 = 20 \\ & d_C \geq 0, d_1 \geq 0, d_2 \geq 0 \end{aligned}$$

其最优解仍为 $(d_c, d_1, d_2) = (18, 0, 2)$，成本为 192 万元。因此，合约市场购电 18 单位，价格组合 (4,8) 为最坏场景。

(b) 设实时市场价格组合为 (p_1, p_2)，用等式约束 $d_1 = 18 - d_c$ 和 $d_2 = 20 - d_c$ 消去 d_1 和 d_2，将目标函数表示为 d_c 的函数

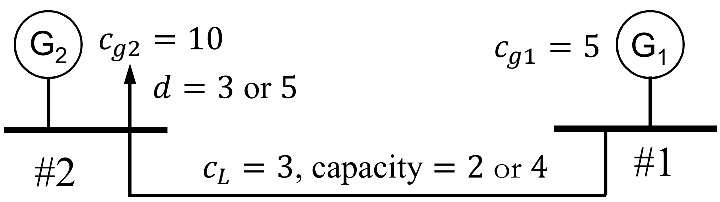
$$10d_c + p_1(18 - d_c) + p_2(20 - d_c) = 18p_1 + 20p_2 + (10 - p_1 - p_2)d_c$$

由于 $d_1 \geq 0$，故 $0 \leq d_c \leq 18$。当 $p_1 + p_2 > 10$ 时，工厂才倾向于从合约市场购电，但 d_c 不能超过 18，因此在时段 2 还要从实时市场购电。

(c) 合约市场给电力系统预留了充足的时间制定发电计划，减小了不确定性，因此合约市场的电价较低；对工厂而言，合约市场的低电价可以降低总成本。

□

3. 如图所示的 2 节点电力系统，节点 1 的发电机生产成本系数为 5，节点 2 的发电机生产成本系数为 10，两节点之间原先没有传输线相连。运营商现计划修建一条传输线连接节点 1 和节点 2，用更廉价的电力满足节点 2 处负荷中心的电能需求。根据输电距离，有两种电压等级的输电线路可供选择，容量分别为 2 或 4，折算后单位容量的投资成本为 3。已知节点 2 的负荷可能是 3 或 5，运营商希望最坏场景下的总成本最低。将上述问题建模为两阶段鲁棒优化并求解。



解 决策变量为：

- x: 线路容量，第一阶段变量
- y_1: 发电机 1 产能，第二阶段变量
- y_2: 发电机 2 产能，第二阶段变量

两阶段鲁棒优化模型如下

$$\min_{x\in\{2,4\}} \max_{d\in\{3,5\}} \min_{y\in Y(x,d)} 3x + 5y_1 + 10y_2$$

$$Y(x,d) = \{(y_1,y_2) \mid y_1 + y_2 = d, 0 \leqslant y_1 \leqslant d, y_2 \geqslant 0\}$$

其中负荷 d 是不确定参数。由于 x 和 d 只有有限种策略，可以采用枚举法求解。

- 若 $x = 2$, $d = 3$, 优化问题变为

$$\begin{aligned} \min \quad & 3\cdot 2 + 5y_1 + 10y_2 \\ \text{s.t.} \quad & y_1 + y_2 = 3 \\ & 0 \leqslant y_1 \leqslant 2, y_2 \geqslant 0 \end{aligned}$$

  最优解是 $(y_1, y_2) = (2, 1)$，最优值为 26。

- 若 $x = 2$, $d = 5$, 优化问题变为

$$\begin{aligned} \min \quad & 3\cdot 2 + 5y_1 + 10y_2 \\ \text{s.t.} \quad & y_1 + y_2 = 5 \\ & 0 \leqslant y_1 \leqslant 2, y_2 \geqslant 0 \end{aligned}$$

  最优解是 $(y_1, y_2) = (2, 3)$，最优值为 46。

- 若 $x = 4$, $d = 3$, 优化问题变为

$$\begin{aligned} \min \quad & 3\cdot 4 + 5y_1 + 10y_2 \\ \text{s.t.} \quad & y_1 + y_2 = 3 \\ & 0 \leqslant y_1 \leqslant 4, y_2 \geqslant 0 \end{aligned}$$

  最优解是 $(y_1, y_2) = (3, 0)$，最优值为 27。

- 若 $x = 4$, $d = 5$, 优化问题变为

$$\begin{aligned} \min \quad & 3\cdot 4 + 5y_1 + 10y_2 \\ \text{s.t.} \quad & y_1 + y_2 = 3 \\ & 0 \leqslant y_1 \leqslant 4, y_2 \geqslant 0 \end{aligned}$$

  最优解是 $(y_1, y_2) = (4, 1)$，最优值为 42。

由此可见，$d=5$ 是最坏情况，为使最坏情况下总成本最低，应该修建容量为 4 的传输线。此时，若 $d=3$，总成本高于修建容量为 2 的传输线。本例有两个值得深入思考的点：

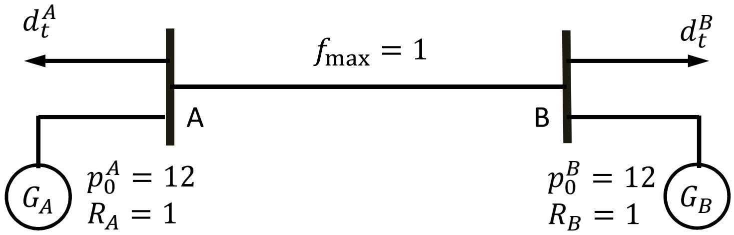
- 考虑随机规划的情况，$d=3/5$ 的概率是 ρ_1/ρ_2，目标函数是极小化总期望成本，可以预料的是，最优策略受到概率分布的影响，因为当 $\rho_1 \to 1$ 时 $x=2$；当 $\rho_2 \to 1$ 时 $x=4$。
- 若传输线造价极低，显然应该修建大容量线路，反之则不修建传输线。在本例的数据下，若对负荷估计得乐观即 $d=3$，则修建低容量线路；若对负荷估计得保守即 $d=5$，则修建高容量线路。经过分析，当线路造价在 $[2.5,5]$ 内时，采用乐观估计和保守估计得到的结果不同，否则结果与不确定性无关。

□

4. 阅读材料。如图所示的 2 节点电力系统，节点 A 和 B 分别接有发电机 G_A 和 G_B、新能源发电和负荷，d_t^A 和 d_t^B 表示每个节点的净负荷；连接节点 A 和 B 的传输线最大传输功率为 1 单位。两台发电机参数相同, 上爬坡和下爬坡都是每小时 1 单位，容量是 15 单位，$t=0$ 时段的初始功率是 12 单位，最小最大输出功率分别为 6 单位和 15 单位。已知 $t=1$ 时段两节点的净负荷为 $d_1^A=d_1^B=12$ 单位。$t=2$ 时段由于预测误差，可能的净负荷在集合 $\mathcal{D}$ 中取值

$$\mathcal{D}=\left\{(d_2^A,d_2^B)\mid 10\le d_2^A\le 15, 10\le d_2^B\le 15, d_2^A+d_2^B=25\right\}$$

调度策略指的是机组出力关于净负荷 $\mathbf{d}=(d_1^A,d_1^B,d_2^A,d_2^B)$ 的函数 $p_1^A(\mathbf{d}),p_2^A(\mathbf{d}),p_1^B(\mathbf{d}),p_2^B(\mathbf{d})$。



(a) 论证：对于任意的 $\mathbf{d}_2=(d_2^A,d_2^B)\in\mathcal{D}$，调度策略

$$\begin{aligned}
p_1^A(\mathbf{d}) &= 12+0.4(d_2^A-12.5)\\
p_2^A(\mathbf{d}) &= 12.5+0.6(d_2^A-12.5)\\
p_1^B(\mathbf{d}) &= 12-0.4(d_2^A-12.5)\\
p_2^B(\mathbf{d}) &= 12.5-0.6(d_2^A-12.5)
\end{aligned}$$

给出的调度方案都不违反机组和网络的约束条件。

(b) 若 $t=1$ 时段的调度策略与 $t=2$ 时段的净负荷 $\mathbf{d}_2$ 无关，即

$$p_1^A=p_1^A(\mathbf{d}_1), p_2^A=p_2^A(\mathbf{d}), p_1^B=p_1^B(\mathbf{d}_1), p_2^B=p_2^B(\mathbf{d})$$

则称调度策略具有因果性或非预期性。对于上述系统，是否存在因果调度策略，对于任意的 $\mathbf{d}_2 = (d_2^A, d_2^B) \in \mathcal{D}$ 给出的调度方案都不违反机组和网络的约束条件？若存在，试找出一个，并证明其鲁棒可行性，若不存在，说明理由。

解

(a) 对于给出的调度策略

$$p_1^A(\mathbf{d}) = 12 + 0.4(d_2^A - 12.5)$$

$$p_2^A(\mathbf{d}) = 12.5 + 0.6(d_2^A - 12.5)$$

$$p_1^B(\mathbf{d}) = 12 - 0.4(d_2^A - 12.5)$$

$$p_2^B(\mathbf{d}) = 12.5 - 0.6(d_2^A - 12.5)$$

可以验证:

(1) 功率平衡条件满足

$$t = 1 : p_1^A(\mathbf{d}) + p_1^B(\mathbf{d}) = 24,\ \forall \mathbf{d}_2 \in \mathcal{D}$$

$$t = 2 : p_2^A(\mathbf{d}) + p_2^B(\mathbf{d}) = 25,\ \forall \mathbf{d}_2 \in \mathcal{D}$$

(2) 由于 $\mathbf{d}_2 = (d_2^A, d_2^B) \in \mathcal{D}$，由调度策略表达式可知

$$p_1^A(\mathbf{d}) \in [11, 13],\quad p_1^B(\mathbf{d}) \in [11, 13]$$

故 $t = 1$ 时段的爬坡约束满足；由于

$$p_2^A(\mathbf{d}) - p_1^A(\mathbf{d}) = 0.5 + 0.2(d_2^A - 12.5) \in [0, 1]$$

故 $t = 2$ 时段机组 A 爬坡约束满足；同理可得 $t = 2$ 时段机组 B 爬坡约束满足。

(3) 在 $t = 1$ 时段,

$$p_1^A(\mathbf{d}) - d_1^A = 0.4(d_2^A - 12.5) \in [-1, 1]$$

传输线约束满足；在 $t = 2$ 时段，

$$p_2^A(\mathbf{d}) - d_2^A = 5 - 0.4d_2^A \in [-1, 1]$$

传输线约束满足。

综上，对任意的 $\mathbf{d}_2 = (d_2^A, d_2^B) \in \mathcal{D}$，调度策略给出的方案都不违反机组和网络的约束条件。

(b) 在因果调度策略中，p_1^A 只取决于 $t = 1$ 时段的负荷，故 p_1^A 是常数。在 $t = 1$ 时段，由于机组爬坡约束，必有 $p_1^A \in [11, 13]$，$p_1^B \in [11, 13]$。若 $p_A^1 \le 12$，考虑 $t = 2$ 时段集合 $\mathcal{D}$ 中 $\mathbf{d}_2 = (15, 10)$ 这一场景。由于爬坡约束，$p_2^A \le 13$，而由于传输线容量只有 1，故节点 A 负荷无法满足。若 $p_1^A \ge 12$，考虑 $t = 2$ 时段集合 $\mathcal{D}$ 中 $\mathbf{d}_2 = (10, 15)$ 这一场景。由于网络的对称性, 节点 B 负荷无法满足。故无论 p_1^A 取何定值，均不存在鲁棒可行的因果调度策略。

□