清華大學
Tsinghua University

运筹学 (20220532)

课程信息

魏韡

2025年2月19日

主讲教师与教材

Wei WEI（魏韡)

联系方式

- 办公室：西主楼3-406
- 电子邮件：wei-wei04@mails.tsinghua.edu.cn
- 答疑时间：星期五下午4:00-5:00

教材与参考书

- 自编讲义中、英文版
- 参考书若干，附于每讲课件最后

教学进度安排

- 第01周 线性规划基本知识 (第一次作业)
- 第02周 线性规划对偶理论 (第二次作业)
- 第03周 单纯形算法 I
- 第04周 单纯形算法II (第三次作业)
- 第05周 投影与参数线性规划 (第四次作业)
- 第06周 习题课
- 第07周* 从线性规划到线性锥优化
- 第08周* 锥优化与电力系统最优潮流
- 第09周 凸优化与拉格朗日对偶 (第五次作业)
- 第10周 混合整数规划 I
- 第12周 混合整数规划 II (第六次作业)
- 第13周* 静态鲁棒优化
- 第14周* 两阶段鲁棒优化 (第七次作业)
- 第15周 确定性动态规划 (第八次作业)
- 第16周 随机动态规划

1.3 课程要求

课堂：按时上课。
课下：阅读教材，复习课件，独立完成作业
把例题当作业检验自己的课堂效果
把作业当考试检验自己的掌握水平
答疑：周五下午**4:00-5:00**

作业要求：

- 纸版或电子版，标注姓名、学号、班级、周次。
- 符号步骤清晰规范。
- 网络学堂提交，上课前一天**23:59**截止。

分数——期末考试**70**％，平时作业**30**％
（只允许携带一张无外挂的**A4**纸，不可以带讲义、作业）

相关软件

- **求解器**

线性/整数规划	锥优化	非线性规划
• CPLEX • GUROBI • MOSEK • LINPROG	• MOSEK • SDPT3 • SEDUMI	• IPOPT (OPTI) • KNITRO • SNOPT • BARON

- 编程语言: MATLAB
- GAMS/Python
- 接口工具: YALMIP

最简配置: MOSEK + OPTI

- 电力系统潮流分析工具包: Matpower

清華大学
Tsinghua University

运筹学

第一讲 线性规划与对偶理论

魏韡

2025年2月19日

内容

1.1 投资问题

用 $70000 购买一些增值产品，给出以下要求
满足市场规则，平衡风险与收益

- 购买 MB 的资金不超过 20%
- 购买 CDs 的资金不超过其余三者
- 至少投资 30% 用于购买 t-bills 和 CDs
- (t-bills + CDs)/(MB + stock) ≥ 1.2
- 所有 $70,000 全部支出

产品	缩写	回报率
Municipal bonds (市政债券)	MB	8.5%
Certificates of deposit (定期存款)	CD	5.0%
Treasury bills (国库券)	T-bills	6.5%
Growth stock (股票)	Stock	13%

1.1 投资问题

决策变量

x_1	用于购买 MB 的资金 ($)
x_2	用于购买 CD 的资金 ($)
x_3	用于购买 T-bills 的资金 ($)
x_4	用于购买 stock 的资金 ($)

约束条件

$x_1 \le 14000$	购买 MB 的资金不超过 20%
$x_2 \le x_1 + x_3 + x_4$	购买 CDs 的资金不超过其余三者
$x_2 + x_3 \ge 21000$	至少投资 30% 用于购买 t-bills 和 CDs
$(x_2+x_3)/(x_1+x_4) \ge 1.2$	比例约束
$x_1+x_2+x_3+x_4=70000$	所有 $70,000 全部支出
$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$	投资非负 (不允许贷款)

目标函数（收益）：$0.085x_1 + 0.05x_2 + 0.065\, x_3 + 0.130x_4$

1.1 投资问题

投资问题的线性规划表述

$$
\begin{aligned}
\max \quad & 0.085x_1 + 0.05x_2 + 0.065x_3 + 0.130x_4 \\
\text{s.t.} \quad & x_1 \le 14000 \\
& -x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \le 0 \\
& x_2 + x_3 \ge 21000 \\
& -1.2x_1 + x_2 + x_3 - 1.2x_4 \ge 0 \\
& x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 70000 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0
\end{aligned}
$$

这个约束有意义吗?

1.2 健康饮食问题

一家健康中心希望为老年人提供健康的早餐

早餐食品	热量 (cal)	脂肪 (g)	胆固醇 (mg)	铁 (mg)	钙 (mg)	蛋白质 (g)	纤维 (g)	价格 ($)
1. 麸皮谷物 (杯)	90	0	0	6	20	3	5	0.18
2. 干麦片 (杯)	110	2	0	4	48	4	2	0.22
3. 燕麦片 (杯)	100	2	0	2	12	5	3	0.10
4. 燕麦麸 (杯)	90	2	0	3	8	6	4	0.12
5. 鸡蛋	75	5	270	1	30	7	0	0.10
6. 培根 (片)	35	3	8	0	0	2	0	0.09
7. 橙子	65	0	0	1	52	1	1	0.40
8. 低脂牛奶-2% (杯)	100	4	12	0	250	9	0	0.16
9. 橙汁 (杯)	120	0	0	0	3	1	0	0.50
10. 小麦吐司 (片)	65	1	0	1	26	3	3	0.07

健康早餐标准:

至少包括420卡热量, 5毫克铁, 400毫克钙, 20克蛋白质, 12克纤维

脂肪不超过 20 克，胆固醇不超过 30 毫克.

1.2 健康饮食问题

决策变量

x_1 = 麸皮谷物 (杯)	x_6 = 培根 (片)
x_2 = 干麦片 (杯)	x_7 = 橙子
x_3 = 燕麦片 (杯)	x_8 = 牛奶 (杯)
x_4 = 燕麦麸 (杯)	x_9 = 橙汁 (杯)
x_5 = 鸡蛋	x_{10} = 小麦吐司 (片)

优化模型

$$
\begin{aligned}
\min\quad & 0.18x_1 + 0.22x_2 + 0.10x_3 + 0.12x_4 + 0.10x_5 + 0.09x_6 + 0.40x_7 + 0.16x_8 + 0.50x_9 + 0.07x_{10} \\
\text{s.t.}\quad & 90x_1 + 110x_2 + 100x_3 + 90x_4 + 75x_5 + 35x_6 + 65x_7 + 100x_8 + 120x_9 + 65x_{10} \geq 420 \\
& 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 5x_5 + 3x_6 + 4x_8 + x_{10} \leq 20 \\
& 270x_5 + 8x_6 + 12x_8 \leq 30 \\
& 6x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_5 + x_7 + x_{10} \geq 5 \\
& 20x_1 + 48x_2 + 12x_3 + 8x_4 + 30x_5 + 52x_7 + 250x_8 + 3x_9 + 26x_{10} \geq 400 \\
& 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 7x_5 + 2x_6 + x_7 + 9x_8 + x_9 + 3x_{10} \geq 20 \\
& 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + x_7 + 3x_{10} \geq 12 \\
& x_i \geq 0, \text{ for all } i
\end{aligned}
$$

1.2 健康饮食问题　　第一个线性规划模型是谁提出的?

通常认为**Stigler**在1945年提出的饮食问题是第一个现代线性规划模型

```
Set
   n 'nutrients' / calorie    'thousands',  protein   'grams',        calcium    'grams'
                   iron       'milligrams', vitamin-a 'thousand ius', vitamin-b1 'milligrams'
                   vitamin-b2 'milligrams', niacin    'milligrams'  , vitamin-c  'milligrams' /

   f 'foods'     / wheat    , cornmeal , cannedmilk, margarine , cheese    , peanut-b , lard
                   liver    , porkroast, salmon    , greenbeans, cabbage   , onions   , potatoes
                   spinach, sweet-pot, peaches   , prunes    , limabeans, navybeans          /;

Parameter b(n) 'required daily allowances of nutrients'
               / calorie      3,  protein    70, calcium     .8
                 iron        12,  vitamin-a   5, vitamin-b1  1.8
                 vitamin-b2  2.7, niacin     18, vitamin-c  75   /;

Table a(f,n) 'nutritive value of foods (per dollar spent)'
                calorie  protein  calcium  iron  vitamin-a  vitamin-b1  vitamin-b2  niacin  vitamin-c
*               (1000)     (g)      (g)    (mg)   1000iu)      (mg)        (mg)      (mg)     (mg)
   wheat         44.7     1411      2.0    365                 55.4        33.3      441
   cornmeal      36        897      1.7     99     30.9        17.4         7.9      106
   cannedmilk     8.4      422     15.1      9     26           3          23.5       11       60
   margarine     20.6       17       .6      6     55.8          .2
   cheese         7.4      448     16.4     19     28.1          .8        10.3        4
   peanut-b      15.7      661      1       48                  9.6         8.1      471
   lard          41.7                                .2                      .5        5
   liver          2.2      333       .2    139    169.2         6.4        50.8      316      525
   porkroast      4.4      249       .3     37                 18.2         3.6       79
   salmon         5.8      705      6.8     45      3.5         1           4.9      209
   greenbeans     2.4      138      3.7     80     69           4.3         5.8       37      862
   cabbage        2.6      125      4       36      7.2         9           4.5       26     5369
   onions         5.8      166      3.8     59     16.6         4.7         5.9       21     1184
   potatoes      14.3      336      1.8    118      6.7        29.4         7.1      198     2522
   spinach        1.1      106             138    918.4         5.7        13.8       33     2755
   sweet-pot      9.6      138      2.7     54    290.7         8.4         5.4       83     1912
   peaches        8.5       87      1.7    173     86.8         1.2         4.3       55       57
   prunes        12.8       99      2.5    154     85.7         3.9         4.3       65      257
   limabeans     17.4     1055      3.7    459      5.1        26.9        38.2       93
   navybeans     26.9     1691     11.4    792                 38.4        24.6      217        ;

Positive Variable x(f) 'dollars of food f to be purchased daily (dollars)';
```

https://www.gams.com/latest/gamslib_ml/libhtml/gamslib_diet.html

George J. Stigler

1982年Nobel

经济学奖得主

1.3 运输问题

一家公司将生产资源从仓库运送到工厂。表格显示了将单位资源从仓库$i \in \{1,2,3\}$运输到工厂$j \in \{1,2,3\}$的运输成本

运输成本		工厂			库存
		1	2	3	
仓库	1	2	1	3	50
	2	2	2	4	30
	3	3	4	2	20
需求		40	25	35	

求成本最低的运输计划

1.3 运输问题

决策变量: 从仓库 i 运输到工厂 j 的物资为 x_{ij}, $i,j=1,2,3$

$$\min\ 2x_{11}+x_{12}+3x_{13}+2x_{21}+2x_{22}+4x_{23}+3x_{31}+4x_{32}+2x_{33}$$

$$\text{s.t.}\quad \left.\begin{aligned} x_{11}+x_{12}+x_{13}&=50\\ x_{21}+x_{22}+x_{23}&=30\\ x_{31}+x_{32}+x_{33}&=20 \end{aligned}\right\}\ \text{库存约束}$$

$$\left.\begin{aligned} x_{11}+x_{21}+x_{31}&=40\\ x_{12}+x_{22}+x_{32}&=25\\ x_{13}+x_{23}+x_{33}&=35 \end{aligned}\right\}\ \text{工厂需求}$$

$$x_{ij}\ge 0, i=1,2,3\ j=1,2,3$$

1.3 运输问题

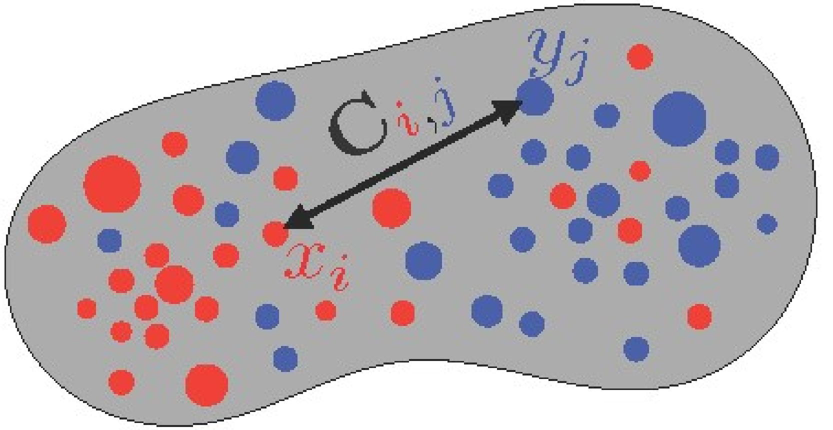
给定两个离散的概率分布

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{a}_i \delta_{x_i} \quad \beta = \sum_{j=1}^{m} \mathbf{b}_j \delta_{y_j}$$

$$x_i, i = 1{:}\,m, \; y_j, j = 1{:}\,n$$

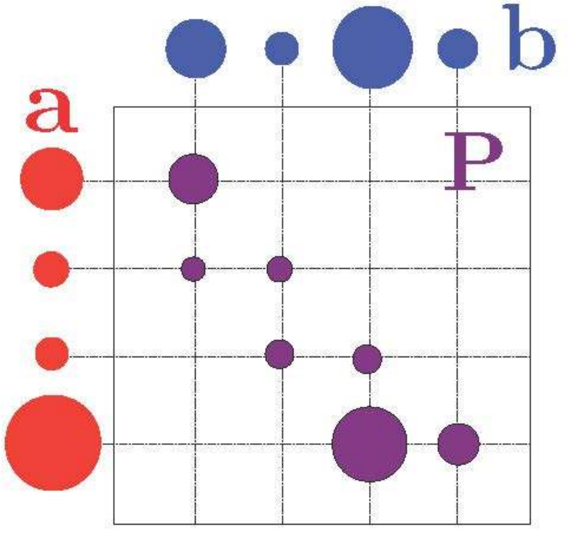
$$a_i \geq 0, \sum_{i=1}^{m} a_i = 1$$

$$b_j \geq 0, \sum_{j=1}^{n} b_j = 1$$



联合概率分布

$$\mathbf{U}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \left\{ \mathbf{P} \in \mathbf{R}_{+}^{n \times m} \;\middle|\; \begin{aligned} \mathbf{P}\mathbf{1}_m &= \mathbf{a} \\ \mathbf{P}^{\top}\mathbf{1}_n &= \mathbf{b} \end{aligned} \right\}$$



最优传输问题 [Kantorovich 1942]

$$W(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \min \left\{ \sum_{ij} \mathbf{C}_{ij} \mathbf{P}_{ij} \;\middle|\; \mathbf{P} \in \mathbf{U}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \right\}$$

两个概率分布函数距离的Wasserstein度量

1.4 直流最优潮流

模型1：基于潮流方程

$$\min \sum_i \left(a_i P_{gi}^2 + bP_{gi} \right)$$

$$\text{s.t.}\quad B_{11}\theta_1 + \cdots + B_{1n}\theta_n = P_{g1} - P_{d1}$$

$$\vdots$$

$$B_{n1}\theta_1 + + \cdots + B_{1n}\theta_n = P_{gn} - P_{dn}$$

$$-F_{ij} \le \frac{\theta_i - \theta_j}{x_{ij}} \le F_{ij}, \forall (i,j)$$

$$\theta_n = 0,\quad \text{lower-upper bounds}$$

决策变量：P_{gi}, θ_i

参数：$\begin{cases} B_{ij}, x_{ij}, F_{ij} \\ P_{di} \end{cases}$

模型2：基于转移分布因子

$$\min \sum_i \left(a_i p_i^2 + bp_i \right)$$

$$\text{s.t.}\quad \sum_i p_i = \sum_j d_j$$

$$-F_{ij} \le \sum_i \pi_{il} p_{it}$$

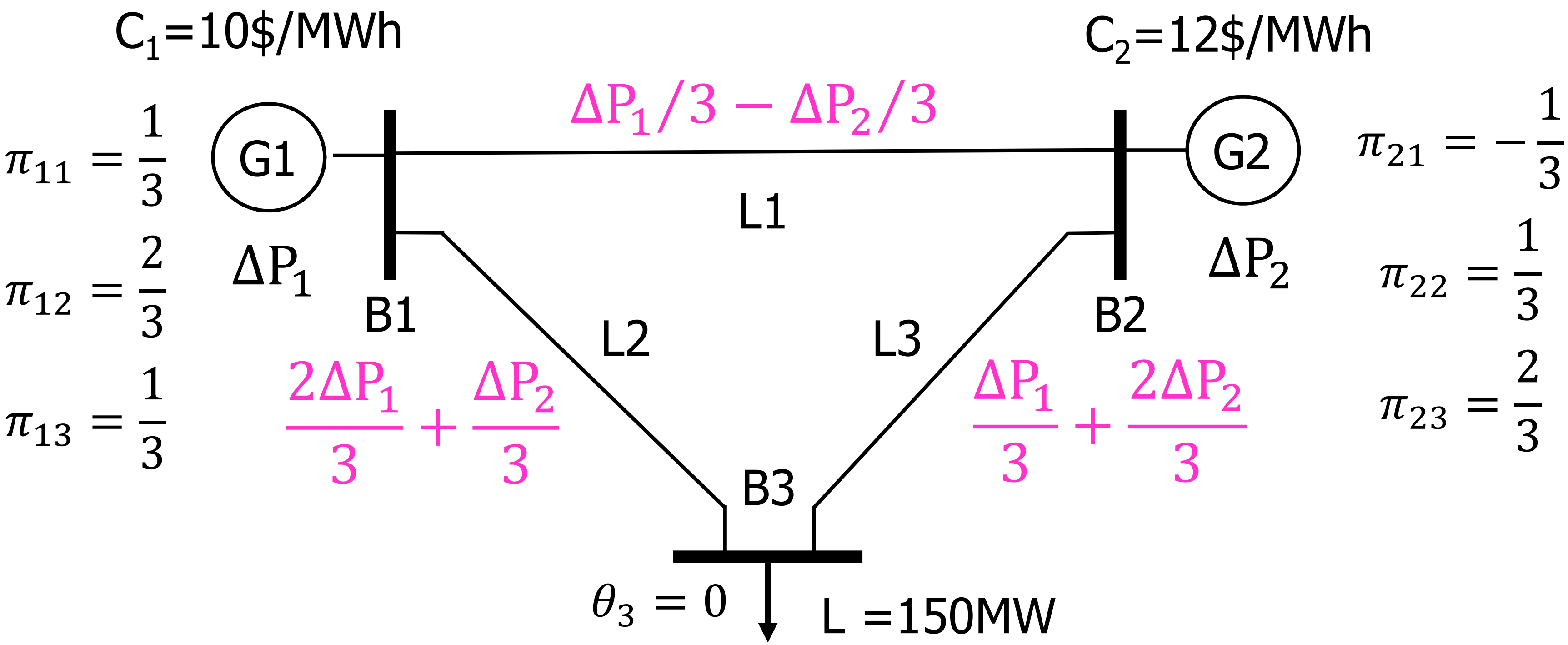
$$-\sum_j \pi_{jl} d_{jt} \le F_{ij}, \forall (i,j)$$

lower and upper bounds

决策变量：p_i

参数：$\begin{cases} \pi_{il}, F_{ij} \\ d_j \end{cases}$

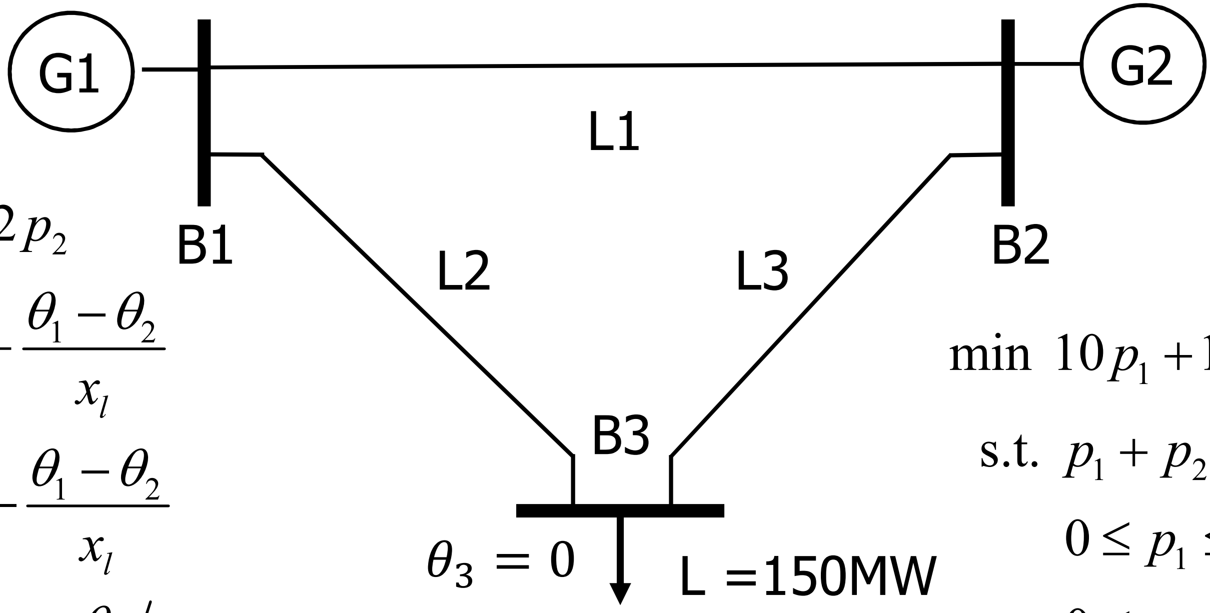
1.4 直流最优潮流



- 所有线路电抗相同，均为 0.25 p.u.
- 忽略线路损耗，电阻为 0

Fu Y, Li Z. Different models and properties on LMP calculations[C]// Power Engineering Society General Meeting. 2006.

1.4 直流最优潮流



$$\min\ 10p_1 + 12p_2$$

$$\text{s.t.}\ \ p_1 = \frac{\theta_1}{x_l} + \frac{\theta_1 - \theta_2}{x_l}$$

$$p_2 = \frac{\theta_2}{x_l} - \frac{\theta_1 - \theta_2}{x_l}$$

$$150 = \theta_1 / x_l + \theta_2 / x_l$$

$$0 \le p_1 \le p_1^m$$

$$0 \le p_2 \le p_2^m$$

$$-F_{l2} \le \theta_1 / x_l \le F_{l2}$$

$$-F_{l3} \le \theta_2 / x_l \le F_{l3}$$

$$-F_{l1} \le \frac{\theta_1 - \theta_2}{x_l} \le F_{l1}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x_l p_1 &= 2\theta_1 - \theta_2 \\ x_l p_2 &= 2\theta_2 - \theta_1 \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \theta_1 &= \left(2x_l p_1 + x_l p_1\right)/3 \\ \theta_2 &= \left(x_l p_1 + 2x_l p_1\right)/3 \end{aligned}}$$

$$\min\ 10p_1 + 12p_2$$

$$\text{s.t.}\ \ p_1 + p_2 = 150$$

$$0 \le p_1 \le p_1^m$$

$$0 \le p_2 \le p_2^m$$

$$-F_{l2} \le \frac{2p_1}{3} + \frac{p_2}{3} \le F_{l2}$$

$$-F_{l3} \le \frac{p_1}{3} + \frac{2p_2}{3} \le F_{l3}$$

$$-F_{l1} \le \frac{p_1 - p_2}{3} \le F_{l1}$$

内容

1. 线性规划若干实例

2. 线性规划的数学形式

3. 线性规划的对偶理论

2.1 线性规划的一般形式

线性规划是满足如下条件的优化问题:

- 决策变量是连续变量
- 目标函数是线性函数
- 约束是线性等式和不等式

- max ⇒ min

$$\max c^{\mathrm{T}} x \Leftrightarrow -\left[\min -c^{\mathrm{T}} x\right]$$

一般形式的线性规划

$$\begin{aligned}
\min\ & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\
\text{s.t.}\ & \sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j \le a_i, \quad \forall i \\
& \sum_{j=1}^{n} B_{ij} x_j \ge b_i, \quad \forall i \\
& \sum_{j=1}^{n} E_{ij} x_j = e_i, \quad \forall i \\
& x_j \le 0, \text{or} \ge 0, \ \text{or}\ \ \text{free}, \ \forall j
\end{aligned}$$

矩阵形式

$$\begin{aligned}
\min\ & c^{\mathrm{T}} x \\
\text{s.t.}\ & Ax \le a \\
& Bx \ge b \\
& Ex = e \\
& x_j \le 0, j \in V_1 \\
& x_j \ge 0, j \in V_2
\end{aligned}$$

2.2 线性规划的标准形式

在线性规划的标准形式中:

- 目标函数被极小化
- 所有变量有非负约束
- 没有其他不等式约束

直观理解问题　　建立单纯形算法

标准形式

$$\begin{aligned} \min\ & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \text{s.t.}\ & \sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j = b_i, \forall i \\ & x_j \geq 0,\ \forall j \end{aligned}$$

矩阵形式

$$\begin{aligned} \min\ & c^{\mathrm{T}} x \\ \text{s.t.}\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

一般形式 $\Rightarrow$ 标准形式

- 不等式约束的转化

$$\sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j \leq b_i \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j + s_i = b_i,\ s_i \geq 0$$

$$\sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j \geq b_i \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j - s_i = b_i,\ s_i \geq 0$$

- 无符号变量的转化

$$x_j \ \text{free} \Leftrightarrow \begin{cases} x_j = x_j^+ - x_j^- \\ x_j^+ \geq 0,\ x_j^- \geq 0 \end{cases}$$

2.3 识别线性规划

以下问题是线性规划吗？ □ 代表 ≥, ≤ 或 =

$$\begin{aligned} \max\ & 3x_1 + 4x_2 \\ \text{s.t.}\ & x_1 + 2x_2 \square\ 5 \\ & 2x_1 + x_2 \square\ 5 \\ & x_1 \square\ 0,\ x_2 \square\ 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min\ & 3x_1 + 4x_2 \\ \text{s.t.}\ & x_1 + 2x_2 \square\ 5 \\ & 2x_1 + x_2 < 5 \\ & x_1 \square\ 0,\ x_2 \square\ 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max\ & 3x_1 + 4x_2 \\ \text{s.t.}\ & x_1 + 2x_2 \le 5 \\ & x_1 x_2 \le 100 \\ & x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max\ & 3x_1 + 4x_2 \\ \text{s.t.}\ & x_1 + 2x_2 \le 5 \\ & x_1 / x_2 \le 1 \\ & x_1 \ge 0.1,\ x_2 \ge 0.1 \end{aligned}$$

2.3 识别线性规划

以下问题是否可转化为线性规划?

$$
\begin{aligned}
\max\ & 3x_1 + 4x_2 \\
\text{s.t.}\ & x_1 + 2x_2 \le 5 \\
& |2x_1 + x_2| \le 5 \\
& x_1 \ge 0,\ x_2 \text{ free}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\max\ & |x_1| + |x_2| \\
\text{s.t.}\ & x_1 + 2x_2 \le 5 \\
& 2x_1 + x_2 \le 5 \\
& x_1 \ge -9,\ x_2 \ge -9
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\max\ & 3x_1 + 4x_2 \\
\text{s.t.}\ & x_1 + 2x_2 \le 5 \\
& |2x_1 + x_2| \ge 5 \\
& x_1 \ge 0,\ x_2 \text{ free}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\min\ & |x_1| + |x_2| \\
\text{s.t.}\ & x_1 + 2x_2 \le 5 \\
& 2x_1 + x_2 \le 5 \\
& x_1 \ge -9,\ x_2 \ge -9
\end{aligned}
$$

线性规划的表示能力：含绝对值函数的优化问题

将以下含绝对值函数的优化问题转化为线性规划

$$
\begin{aligned}
\min \quad & |x_1| + |x_2| \\
\text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 \geq 5,\ x_1 \leq 4
\end{aligned}
$$

方法1	方法2
$\begin{aligned} \min \quad & t_1 + t_2 \\ \text{s.t.} \quad & t_1 \geq -x_1,\ t_1 \geq x_1 \\ & t_2 \geq -x_2,\ t_2 \geq x_2 \\ & x_1 + x_2 \geq 5 \\ & x_1 \leq 4 \end{aligned}$	$\begin{aligned} \min \quad & x_1^+ + x_1^- + x_2^+ + x_2^- \\ \text{s.t.} \quad & x_1^+ - x_1^- + x_2^+ - x_2^- \geq 5 \\ & x_1^+ - x_1^- \leq 4 \\ & x_1^+, x_1^-, x_2^+, x_2^- \geq 0 \end{aligned}$

线性规划的表示能力：含分段线性函数的优化问题

将以下含分段线性函数的优化问题转化为线性规划

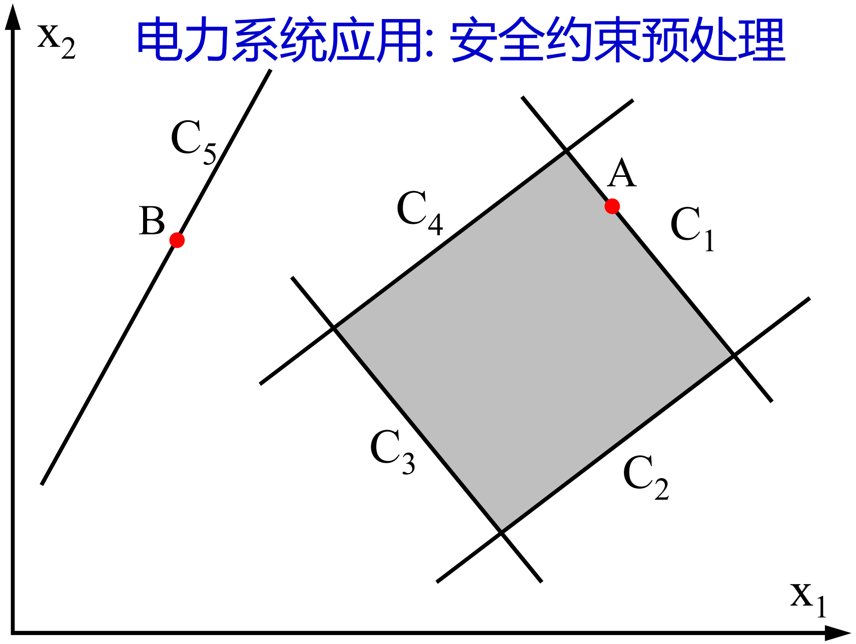
$$
\begin{aligned}
\min\ & f(3x_1+4x_2) \\
\text{s.t.}\ & -5 \le x_1+2x_2 \le 5 \\
& -5 \le 2x_1+x_2 \le 5 \\
& g(x_1)+x_2 \le 4
\end{aligned}
$$

$$
f(z)=\begin{cases} -2z & \text{if } z\le 0 \\ 2z-3 & \text{if } z\ge 2 \\ z/2 & \text{otherwise} \end{cases}
$$

$$
g(z)=\begin{cases} -z/2 & \text{if } z\le 0 \\ 3z & \text{if } z\ge 0 \end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
\min\ & \sigma \\
\text{s.t.}\ & -5 \le x_1+2x_2 \le 5,\ \ -5 \le 2x_1+x_2 \le 5 \\
& 3x_1+x_2 \le 4,\ \ -x_1/2+x_2 \le 4 \\
& \sigma \ge -2(3x_1+4x_2) \\
& \sigma \ge 2(3x_1+4x_2)-3 \\
& \sigma \ge (3x_1+4x_2)/2
\end{aligned}
$$

应用实例: 通过线性规划鉴别冗余约束



$$C_1 = \{x \mid a_1^T x \le b_1\},\ C_2 = \{x \mid a_2^T x \le b_2\}$$

$$C_3 = \{x \mid a_3^T x \le b_3\},\ C_4 = \{x \mid a_4^T x \le b_4\}$$

$$C_5 = \{x \mid a_5^T x \le b_5\}$$

$$X = C_1 \cap C_2 \cap C_3 \cap C_4 \cap C_5$$

$$= C_1 \cap C_2 \cap C_3 \cap C_4$$

移除约束 C_5 不影响可行域 X.

称 $a_5^T x \le b_5$ 为冗余约束

冗余约束和非冗余约束的区别

- 非冗余约束，如图中的C_1，至少存在一点A使该约束成立等式，且A点满足所有其余约束.
- 冗余约束，如图中的C_5，无法找到使C_5成立等式且不违背其余约束的点, 图中B点不满足C_3和C_4.

冗余检验问题

$$\begin{aligned} &\min\ s \\ &\text{s.t.}\ a_i^T x \le b_i, \forall i,\ s \ge 0 \\ &\qquad a_j^T x + s \ge b_j \end{aligned}$$

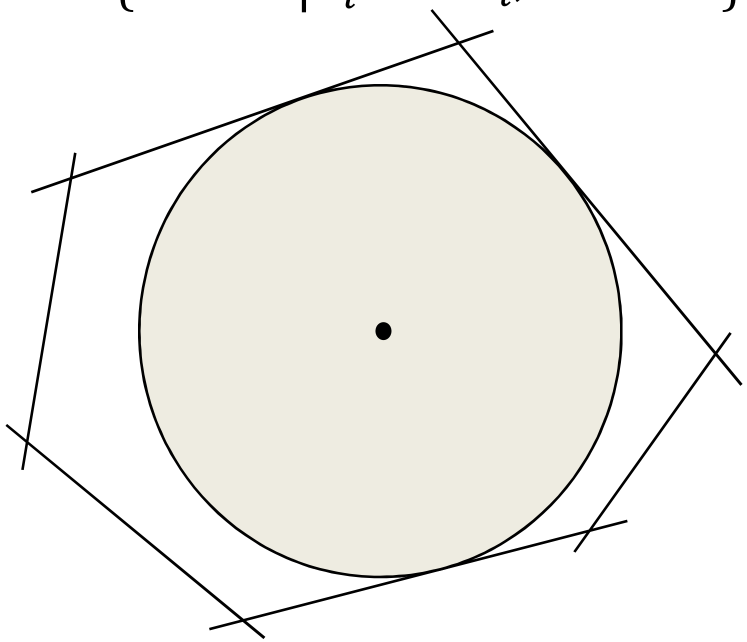
若 $s^* = 0$, C_j 是非冗余约束;

若 $s^* > 0$, C_j 是冗余约束

应用实例: 多面体的切比雪夫中心

找出给定多面体最大的内切球

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n | a_i^{\mathrm{T}} x \le b_i, i = 1{:}m\}$$



切比雪夫中心是多面体内部距离边界最远的点

电力系统应用:
最大化调度安全域

将切比雪夫球表示为

$$B = \{x_c + u \mid \|u\|_2 \le r\}$$

决策变量: x_c, r

目标函数: max r

约束: $B \subseteq P$

$$\|u\|_2 \le r \Rightarrow a_i^{\mathrm{T}}(x_c + u) \le b_i, \forall i$$

$$\max_{\|u\|_2 \le r} a_i^{\mathrm{T}} u \le b_i - a_i^{\mathrm{T}} x_c, \forall i$$

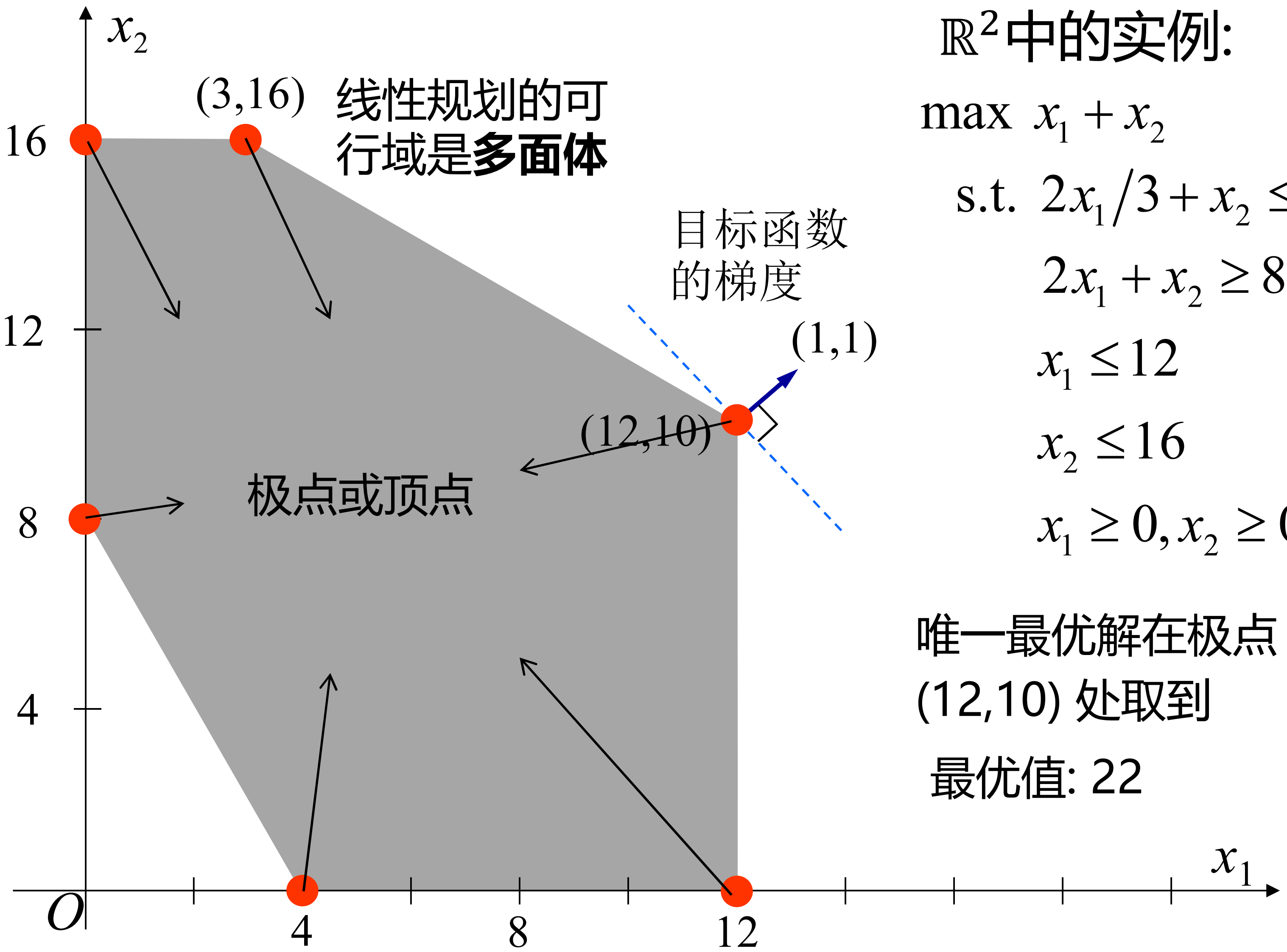
$$r\|a_i\|_2 \le b_i - a_i^{\mathrm{T}} x_c, \forall i$$

$$a_i^{\mathrm{T}} x_c + r\|a_i\|_2 \le b_i, \forall i$$

线性规划求切比雪夫中心

$$\begin{aligned} &\max \quad r \\ &\text{s.t.} \quad a_i^{\mathrm{T}} x_c + r\|a_i\|_2 \le b_i, \forall i = 1{:}m \end{aligned}$$

2.4 线性规划的图解法



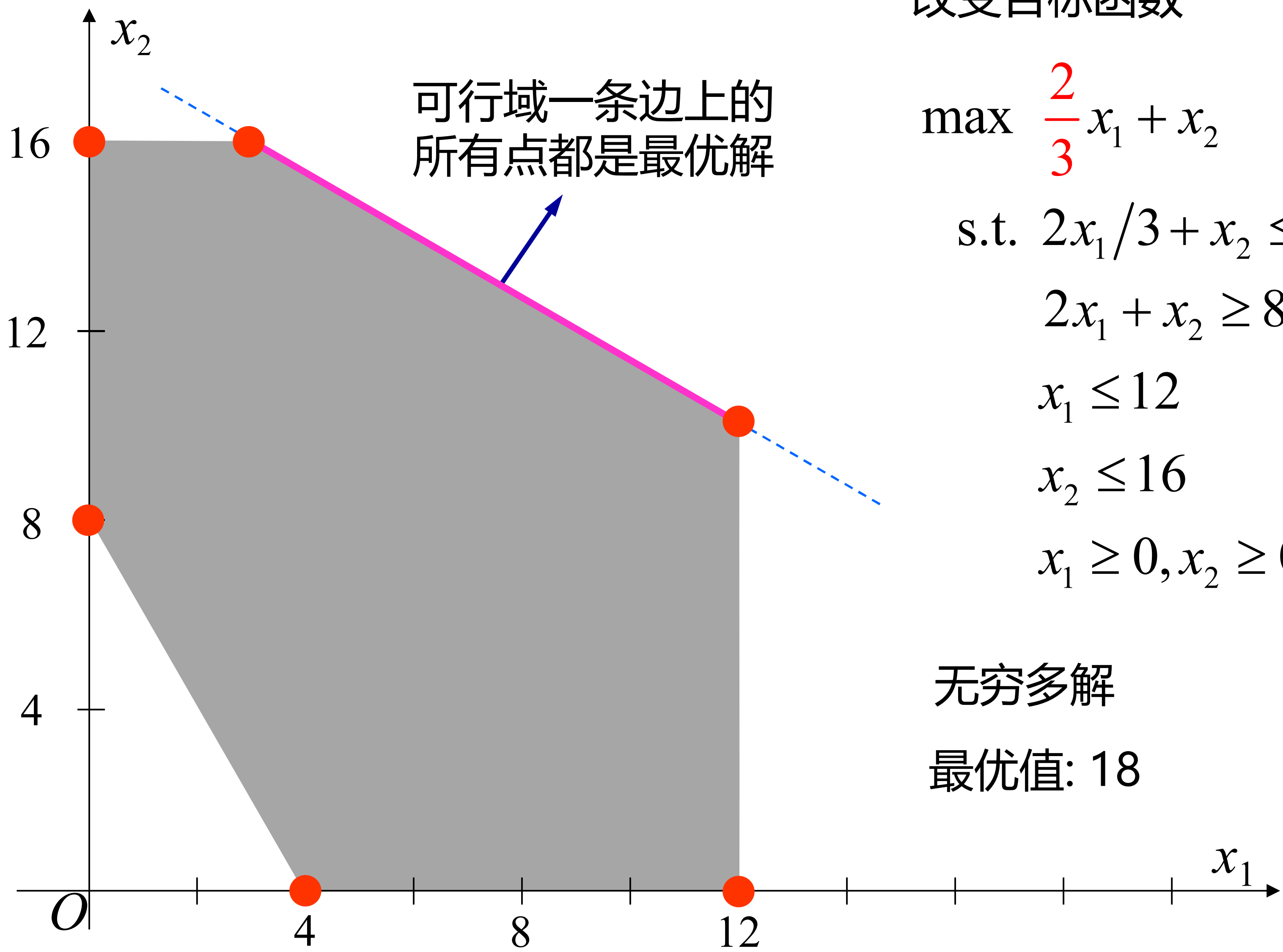
$\mathbb{R}^2$中的实例:

$$\begin{aligned} \max\ & x_1 + x_2 \\ \text{s.t.}\ & 2x_1/3 + x_2 \le 18 \\ & 2x_1 + x_2 \ge 8 \\ & x_1 \le 12 \\ & x_2 \le 16 \\ & x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

唯一最优解在极点 (12,10) 处取到

最优值: 22

2.4 线性规划的图解法



改变目标函数

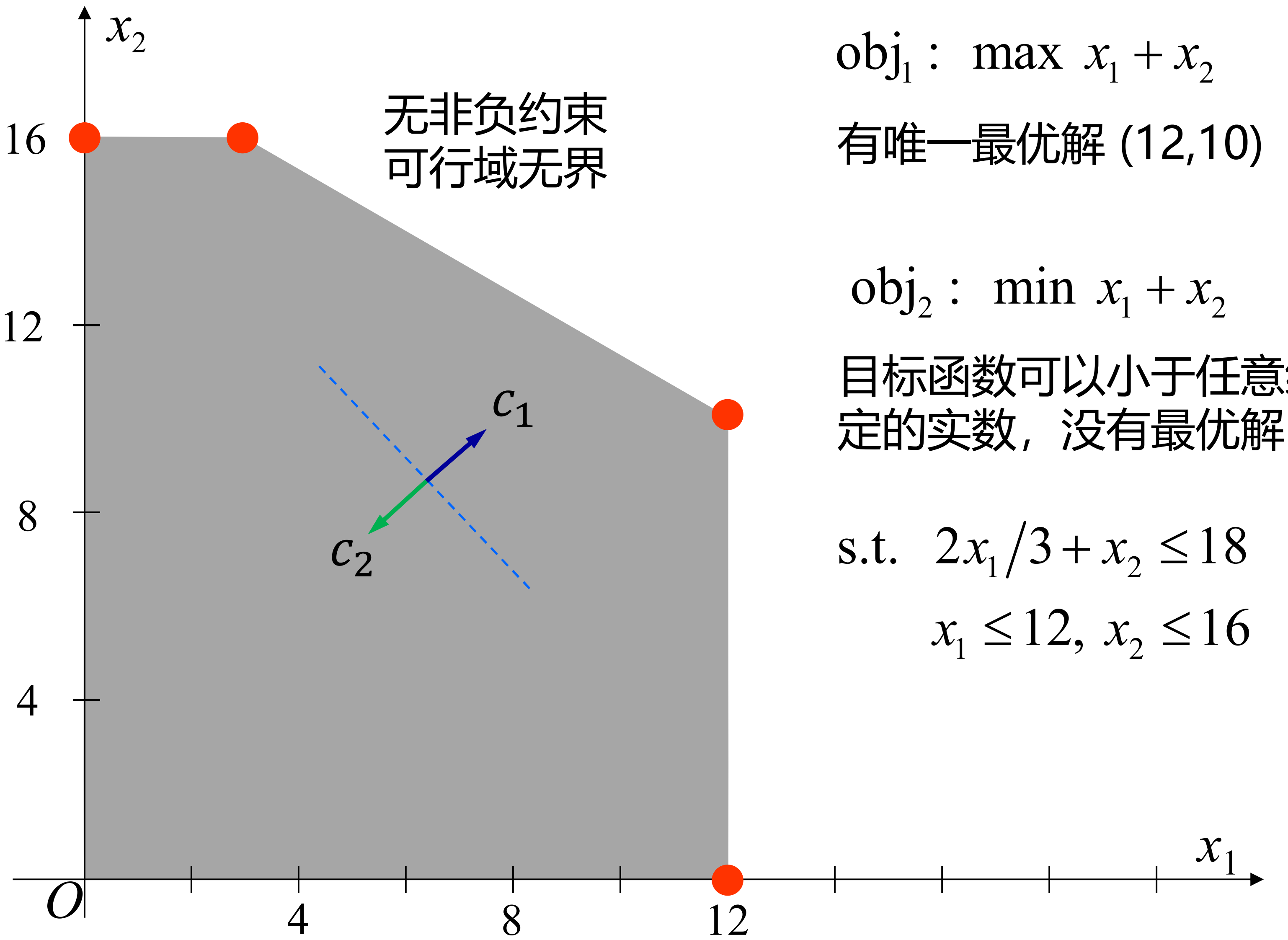
$$\max \quad \frac{2}{3}x_1 + x_2$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.} \quad & 2x_1/3 + x_2 \le 18 \\ & 2x_1 + x_2 \ge 8 \\ & x_1 \le 12 \\ & x_2 \le 16 \\ & x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

无穷多解

最优值: 18

2.4 线性规划的图解法



obj_1： $\max\ x_1 + x_2$

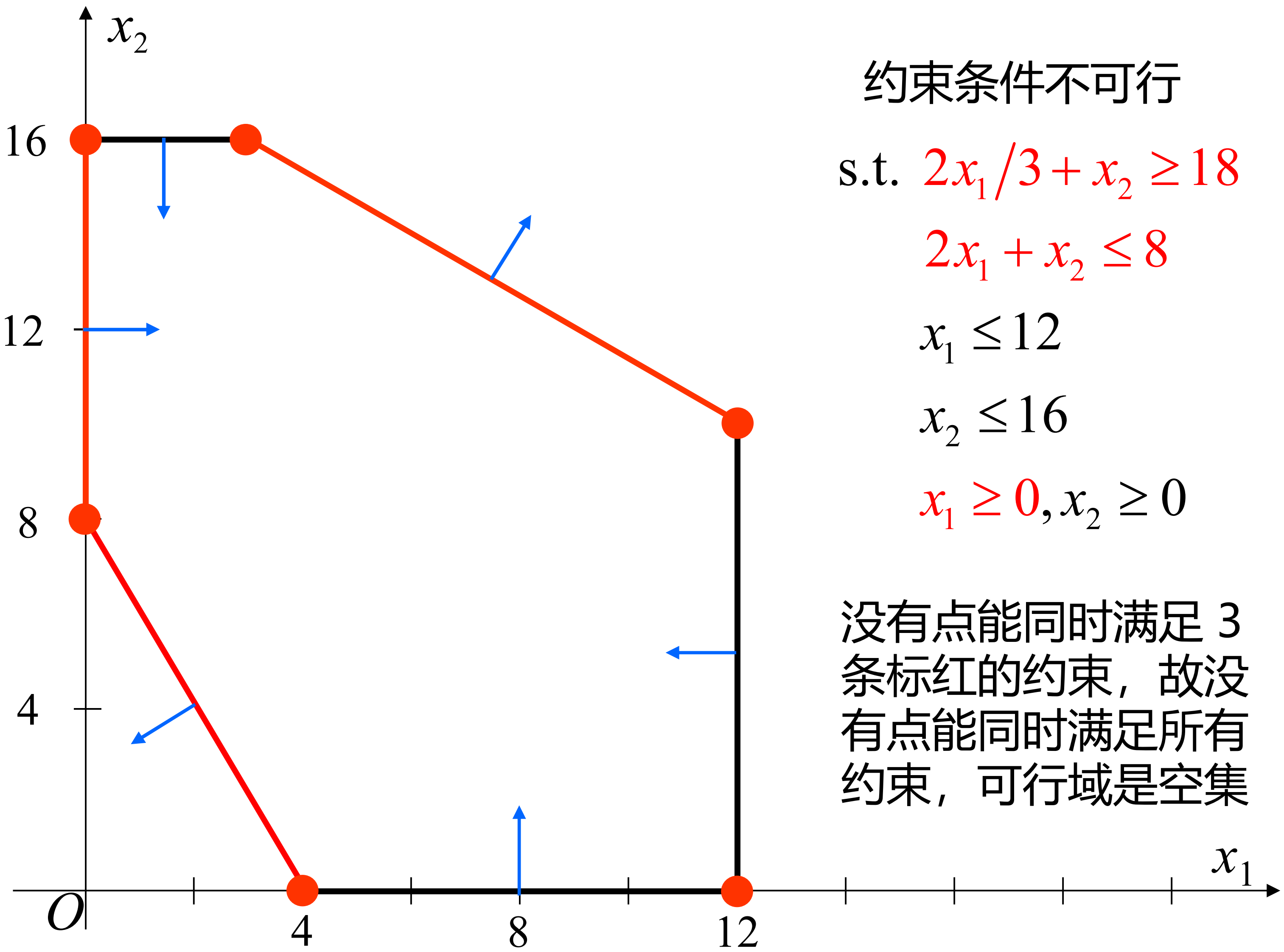
有唯一最优解 (12,10)

obj_2： $\min\ x_1 + x_2$

目标函数可以小于任意给定的实数，没有最优解

$$\text{s.t.}\quad 2x_1/3 + x_2 \le 18$$
$$x_1 \le 12,\ x_2 \le 16$$

2.4 线性规划的图解法



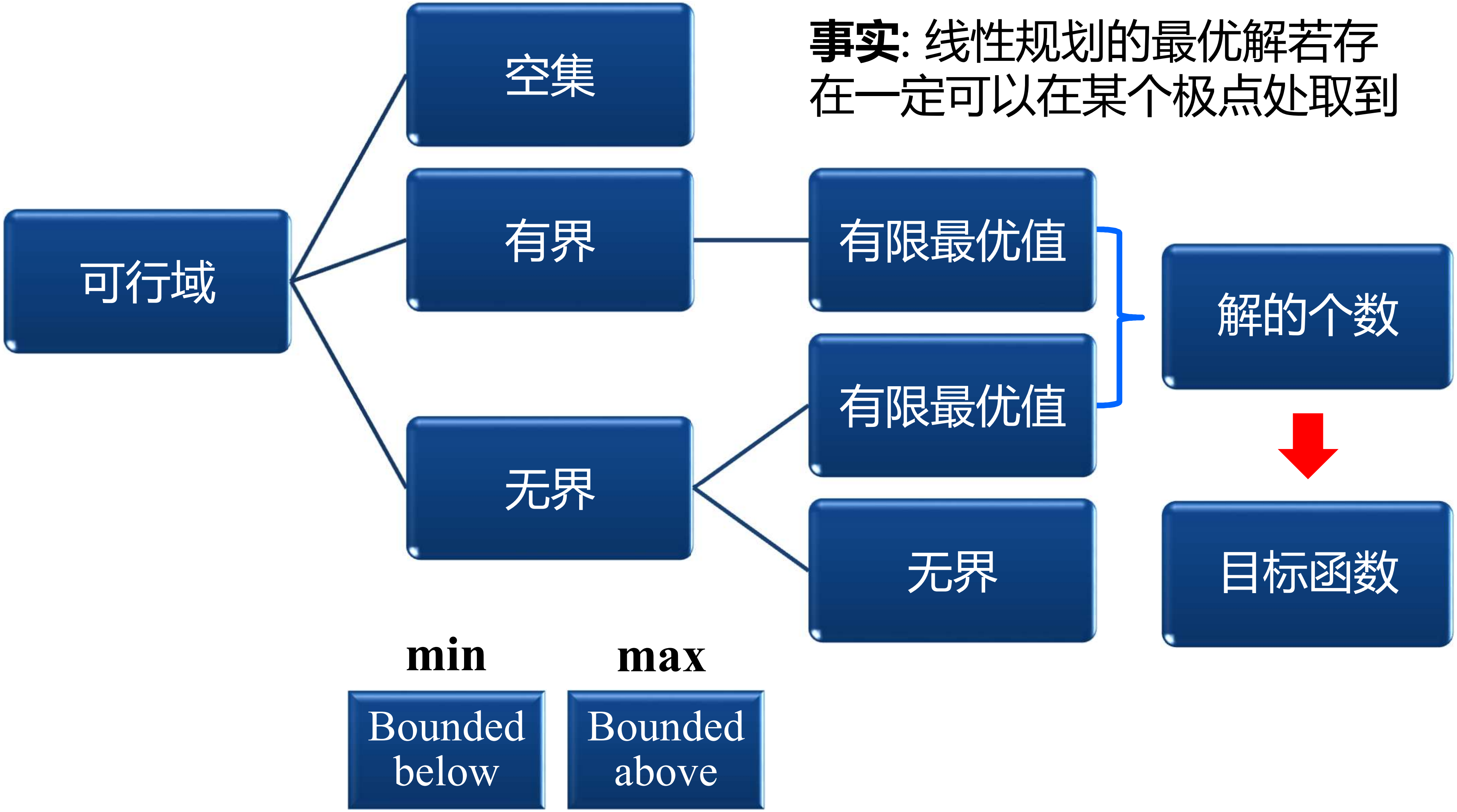
约束条件不可行

$$\text{s.t.}\quad \begin{aligned} &2x_1/3 + x_2 \geq 18 \\ &2x_1 + x_2 \leq 8 \\ &x_1 \leq 12 \\ &x_2 \leq 16 \\ &x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

没有点能同时满足 3 条标红的约束，故没有点能同时满足所有约束，可行域是空集

2.4 线性规划的图解法

事实: 线性规划的最优解若存在一定可以在某个极点处取到



内容

1. 线性规划若干实例

2. 线性规划的数学形式

3. 线性规划的对偶理论

3.1 从经济学视角理解对偶问题

- 一家工厂消耗 s 种资源生产 r 种商品满足社会需求:

  $f_k, k = 1{:}r$

  第 k 种商品的需求

  $h_l, l = 1{:}s$

  第 l 种资源的供给

- 企业有 n 套生产设备:

  $x_j, j = 1{:}n$ 设备j的生产水平

  $c_j, j = 1{:}n$ 设备j的成本系数

- 当设备 j 的生产水平为1时，可生产第k种商品 e_{kj} 单位，同时消耗第l种资源 g_{lj} 单位

工厂最优生产问题:

求每套生产设备的生产水平，利用给定的资源生产社会需求的商品，使生产成本最低

- **线性规划模型**

$$\min\ z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{s.t.}\quad \sum_{j=1}^{n} e_{kj} x_j \ge f_k, k = 1, 2, \ldots, r$$

$$\sum_{j=1}^{n} g_{lj} x_j \le h_l,\ l = 1, 2, \ldots, s$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1, 2, \ldots, n$$

3.1 从经济学视角理解对偶问题

- 承包商提出向工厂购买所有 s 种资源，生产其所需的 r 种商品后再出售给工厂
- 承包商需要给出合理的资源购买价格和商品出售价格，工厂才有可能接受承包商的提案

v_k：商品出售价格 $k = 1, 2, \dots, r.$

w_l：资源购买价格 $l = 1, 2, \dots, s.$

$$\min\ z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} e_{kj} x_j \ge f_k \qquad k = 1, 2, \dots, r \qquad \boxed{v_k}$$

$$\sum_{j=1}^{n} g_{lj} x_j \le h_l \qquad l = 1, 2, \dots, s \qquad \boxed{w_l}$$

$$x_j \ge 0 \qquad j = 1, 2, \dots, n$$

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{r} e_{kj} v_k}_{\text{回购商品}} - \underbrace{\sum_{l=1}^{s} g_{lj} w_l}_{\text{出售资源}} \ \boxed{\le}\ c_j$$

考虑生产设备 j，其消耗的资源出售给承包商，生产的商品从承包商处回购，只有差额小于设备 j 的成本c_j时外包才能降低工厂的成本

3.1 从经济学视角理解对偶问题

- **承包商定价问题**

在工厂能接受的价格下最大化利润

$$\max \quad \sum_{k=1}^{r} f_k v_k - \sum_{l=1}^{s} h_l w_l$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{k=1}^{r} e_{kj} v_k - \sum_{l=1}^{s} g_{lj} w_l \le c_j \qquad j = 1,2,\dots,n$$

$$v_k \ge 0 \qquad k = 1,2,\dots,r$$

$$w_l \ge 0 \qquad l = 1,2,\dots,s$$

3.1 从经济学视角理解对偶问题

工厂视角：原始问题

$$\min\ z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$$

$$\text{S.t.}\qquad \sum_{j=1}^{n}e_{kj}x_j\geq f_k \qquad k=1,2,\ldots,r\ (\text{需求})$$

$$-\sum_{j=1}^{n}g_{lj}x_j\geq -h_l \qquad l=1,2,\ldots,s\ \ (\text{资源})$$

$$x_j\geq 0 \qquad j=1,2,\ldots,n$$

$$\begin{array}{cccccc}
e_{11} & e_{12} & \bullet & e_{1j} & \bullet & e_{1n}\\
e_{21} & e_{22} & \bullet & e_{2j} & \bullet & e_{2n}\\
e_{r1} & & & & & e_{rn}\\
-g_{11} & & & & & -g_{1n}\\
-g_{21} & -g_{22} & \bullet & -g_{2j} & \bullet & -g_{2n}\\
 & & & \vdots & & \\
-g_{s1} & -g_{s2} & \bullet & -g_{sj} & \bullet & -g_{sn}
\end{array}
\qquad
\begin{bmatrix} E \\ -G \end{bmatrix}$$

承包商视角：对偶问题

$$\max\ p=\sum_{k=1}^{r}f_kv_k-\sum_{l=1}^{s}h_lw_l$$

$$\text{S. t.}\qquad \sum_{k=1}^{r}e_{kj}v_k-\sum_{l=1}^{s}g_{lj}w_l\leq c_j \qquad j=1,2,\ldots,n$$

$$v_k\geq 0 \qquad k=1,2,\ldots,r$$

$$w_l\geq 0 \qquad l=1,2,\ldots,s$$

$$\begin{array}{ccccc|ccccc}
e_{11} & \bullet & e_{k1} & \bullet & e_{r1} & -g_{11} & \bullet & -g_{l1} & \bullet & -g_{s1}\\
e_{12} & \bullet & & & & & & g_{l2} & \bullet & -g_{s2}\\
e_{1n} & \bullet & e_{kn} & \bullet & e_{rn} & g_{1n} & \bullet & g_{ln} & \bullet & -g_{sn}
\end{array}
\qquad
\begin{bmatrix} E^{\mathrm{T}} & -G^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}$$

3.1 从经济学视角理解对偶问题

原始问题

$$\min\ z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$$

$$\text{s.t.}\quad \sum_{j=1}^{n}e_{kj}x_j\ge f_k \qquad k=1,2,\dots,r$$

$$-\sum_{j=1}^{n}g_{lj}x_j\ge -h_l \qquad l=1,2,\dots,s$$

$$x_j\ge 0 \qquad j=1,2,\dots,n$$

$$\min\ \ z=c^{\mathrm{T}}x$$

s.t.

$$\begin{bmatrix}E\\-G\end{bmatrix}x\ge\begin{bmatrix}f\\-h\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}v\\w\end{bmatrix}$$

$$x\ge 0$$

$$\begin{aligned}\min\quad & c^{\mathrm{T}}x\\ \text{s.t.}\quad & Ax\ge b\\ & x\ge 0\end{aligned}$$

对偶问题

$$\max\ \ p=\sum_{k=1}^{r}f_kv_k-\sum_{l=1}^{s}h_lw_l$$

$$\text{s.t.}\quad \sum_{k=1}^{r}e_{kj}v_k-\sum_{l=1}^{s}g_{lj}w_l\le c_j,\quad j=1,2,\dots,n$$

$$v_k\ge 0 \qquad k=1,2,\dots,r$$

$$w_l\ge 0 \qquad l=1,2,\dots,s$$

$$\max\ \ p=\begin{bmatrix}f^{\mathrm{T}} & \vdots -h^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v\\w\end{bmatrix}$$

S. t.

$$\begin{bmatrix}E^{\mathrm{T}} & \vdots -G^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v\\w\end{bmatrix}\le c$$

$$v,\ w\ge 0$$

$$\begin{aligned}\max\quad & b^{\mathrm{T}}y\\ \text{s.t.}\quad & A^{\mathrm{T}}y\le c\\ & y\ge 0\end{aligned}$$

3.2 从计算视角理解对偶问题

在10 秒钟内估计以下线性规划问题的最优值

$$
\begin{aligned}
\min\ & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \\
\text{s.t. } & 2x_1 + 1x_2 + 3x_3 + 8x_4 + 5x_5 + 3x_6 \geq 5 \\
& 6x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 1x_4 + 1x_5 + 4x_6 \geq 2 \\
& 2x_1 + 7x_2 + 1x_3 + 1x_4 + 4x_5 + 3x_6 \geq 1
\end{aligned}
$$

0

将所有约束相加得到

$$10(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6) \geq 8$$

故最优值不会小于0.8

线性规划的对偶问题即将上述估界技巧一般化!

3.2 从计算视角理解对偶问题

如果不需要精确求解一个线性规划，一个重要的问题是

$$\begin{aligned} \min\ & c^{\mathrm{T}} x \\ \text{s.t.}\ & Ax \square b \end{aligned}$$

如何找到一种一般化的方法估计(最小化问题)最优值的下界? $c^{\mathrm{T}}x \geq ?$

$$\begin{array}{lll}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1 & \text{两边同乘} & \lambda_1 \leq 0 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \geq b_2 & \text{两边同乘} & \lambda_2 \geq 0 \\
\qquad\qquad \vdots & & \quad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m & \text{两边同乘} & \lambda_m \text{ free} \\
d_1x_1 + d_2x_2 + \cdots + d_nx_n \geq \sum_{i=1}^m \lambda_i b_i & & \\
c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \geq ? & &
\end{array}$$

再相加

$$d_j = \sum_{i=1}^m \lambda_i a_{ij},\ j = 1:n$$

$$? = \sum_{i=1}^m \lambda_i b_i,\quad c = d$$

3.2 从计算视角理解对偶问题

为了得到最好(大)的下界, 需要最大化 $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i b_i$

对偶问题归结为求最大下界

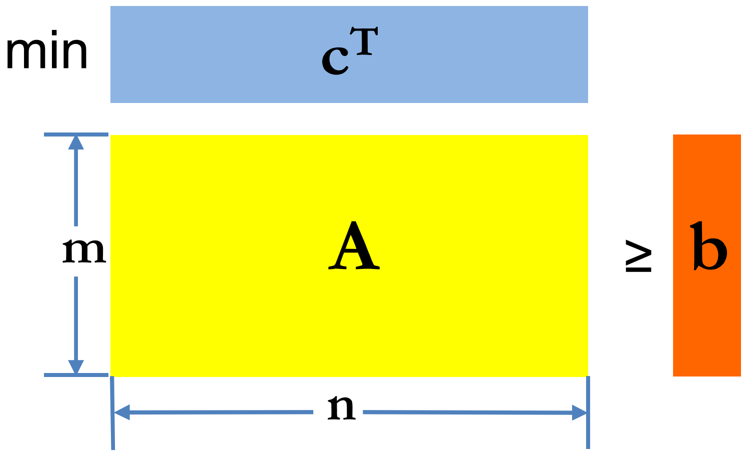
$$
\begin{aligned}
\max\ & \sum_{i=1}^{m} b_i \lambda_i \\
\text{s.t. } & a_{11}\lambda_1 + a_{21}\lambda_2 + \cdots + a_{m1}\lambda_m = c_1 \\
& a_{12}\lambda_1 + a_{22}\lambda_2 + \cdots + a_{m2}\lambda_m = c_2 \\
& \qquad \vdots \\
& a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = c_m \\
& \lambda_1 \le 0,\ \lambda_2 \ge 0,\ \cdots
\end{aligned}
$$

3.2 从计算视角理解对偶问题

原始-对偶线性规划对的矩阵形式

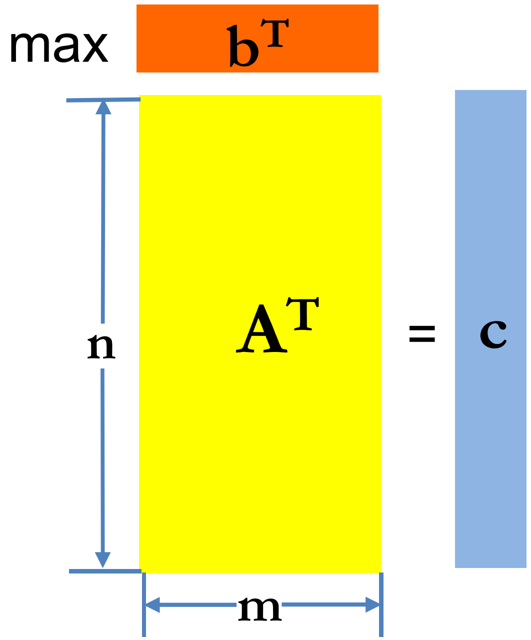
原始形式

$$\begin{aligned} \min \quad & c^{\mathrm{T}} x \\ \text{s.t.} \quad & Ax \geq b \end{aligned}$$



对偶形式

$$\begin{aligned} \max \quad & b^{\mathrm{T}} \lambda \\ \text{s.t.} \quad & A^{\mathrm{T}} \lambda = c \\ & \lambda \geq 0 \end{aligned}$$



3.2 从计算视角理解对偶问题

变量符号的影响：包含非负、非正以及无符号变量

原始问题

$$
\begin{aligned}
\min \quad & c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 \\
\text{s.t.} \quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \ \boxed{\geq} \ b_1 : y_1 \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \ \boxed{\leq} \ b_2 : y_2 \\
& a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \ \boxed{=} \ b_3 : y_3 \\
& x_1 \geq 0 \quad : \quad u \\
& x_2 \leq 0 \quad : \quad v
\end{aligned}
$$

对偶问题

$$
\begin{aligned}
\max \quad & b_1y_1 + b_2y_2 + b_3y_3 \\
\text{s.t.} \quad & a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + a_{31}y_3 \ \boxed{\leq} \ c_1 \\
& a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + a_{32}y_3 \ \boxed{\geq} \ c_2 \\
& a_{13}y_1 + a_{23}y_2 + a_{33}y_3 \ \boxed{=} \ c_3 \\
& y_1 \geq 0 \\
& y_2 \leq 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\max \quad & b_1y_1 + b_2y_2 + b_3y_3 \\
\text{s.t.} \quad & a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + a_{31}y_3 + u = c_1 \\
& a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + a_{32}y_3 + v = c_2 \\
& a_{13}y_1 + a_{23}y_2 + a_{33}y_3 \qquad = c_3 \\
& y_1 \geq 0,\ y_2 \leq 0,\ u \geq 0,\ v \leq 0
\end{aligned}
$$

3.2 从计算视角理解对偶问题

对偶转换规则 (极小化问题)

<table>
<tr><th colspan="2">原始线性规划</th><th colspan="2">对偶线性规划</th></tr>
<tr><td colspan="2">目标函数方向: min
目标函数系数: c^T
约束条件系数: (A,b)</td><td colspan="2">目标函数方向: max
目标函数系数: b^T
约束条件系数: (A^T,c)</td></tr>
<tr><td>变量:</td><td>第n个变量
≥ 0
≤ 0
free</td><td>约束:</td><td>第n个约束
≤
≥
=</td></tr>
<tr><td>约束:</td><td>第m个约束
≤
≥
=</td><td>变量:</td><td>第m个变量
≤ 0
≥ 0
free</td></tr>
</table>

3.2 从计算视角理解对偶问题

极大化问题的对偶

$$
\begin{aligned}
\max\ & c^{\mathrm{T}}x \\
\text{s.t.}\ & Ax \square b
\end{aligned}
$$

如何找到一种一般化的方法估计(最大化问题)最优值的上界?
$c^{\mathrm{T}}x \le ?$

$$
\begin{array}{lllll}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \le b_1 & \text{两边同乘} & \lambda_1 \ge 0 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \ge b_2 & \text{两边同乘} & \lambda_2 \le 0 \\
\qquad\qquad \vdots & & \quad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m & \text{两边同乘} & \lambda_m \ \text{free}
\end{array}
$$

再相加

$$d_1x_1 + d_2x_2 + \cdots + d_nx_n \le \sum_{i=1}^{m} \lambda_i b_i \qquad d_j = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_{ij},\ j = 1,\cdots,n$$

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \le ? \qquad ? = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i b_i,\quad c = d$$

3.2 从计算视角理解对偶问题

为了得到最好(小)的上界, 需要最小化 $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i b_i$

对偶问题归结为求最小上界

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{i=1}^{m} b_i \lambda_i \\
\text{s.t.} \quad & a_{11}\lambda_1 + a_{21}\lambda_2 + \cdots + a_{m1}\lambda_m = c_1 \\
& a_{12}\lambda_1 + a_{22}\lambda_2 + \cdots + a_{m2}\lambda_m = c_2 \\
& \qquad \vdots \\
& a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = c_m \\
& \lambda_1 \geq 0,\ \lambda_2 \leq 0,\ \cdots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\max \quad & c^{\mathrm{T}} x \\
\text{s.t.} \quad & Ax \,\square\, b
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\min \quad & b^{\mathrm{T}} \lambda \\
\text{s.t.} \quad & A^{\mathrm{T}} \lambda = c \\
& \lambda \,\square^{*}\, 0
\end{aligned}
$$

3.2 从计算视角理解对偶问题

变量符号的影响：包含非负、非正以及无符号变量

原始问题

$$\begin{aligned} \max\ & c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 \\ \text{s.t.}\ & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \ge b_1 : y_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \le b_2 : y_2 \\ & a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 : y_3 \\ & x_1 \ge 0 \ :\ u \\ & x_2 \le 0 \ :\ v \end{aligned}$$

对偶问题

$$\begin{aligned} \min\ & b_1y_1 + b_2y_2 + b_3y_3 \\ \text{s.t.}\ & a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + a_{31}y_3 \ge c_1 \\ & a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + a_{32}y_3 \le c_2 \\ & a_{13}y_1 + a_{23}y_2 + a_{33}y_3 = c_3 \\ & y_1 \le 0 \\ & y_2 \ge 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min\ & b_1y_1 + b_2y_2 + b_3y_3 \\ \text{s.t.}\ & a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + a_{31}y_3 + u = c_1 \\ & a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + a_{32}y_3 + v = c_2 \\ & a_{13}y_1 + a_{23}y_2 + a_{33}y_3 \qquad = c_3 \\ & y_1 \le 0,\ y_2 \ge 0,\ u \le 0,\ v \ge 0 \end{aligned}$$

3.2 从计算视角理解对偶问题

对偶转换规则 (极大化问题)

<table>
<tr><td colspan="2">原始线性规划</td><td colspan="2">对偶线性规划</td></tr>
<tr><td colspan="2">目标函数方向: max
目标函数系数: $\mathbf{c}^{\mathrm{T}}$
约束条件系数: (A,b)</td><td colspan="2">目标函数方向: min
目标函数系数: $\mathbf{b}^{\mathrm{T}}$
约束条件系数: $(\mathbf{A}^{\mathrm{T}},\mathbf{c})$</td></tr>
<tr><td>变量:</td><td>第n个变量
≥ 0
≤ 0
free</td><td>约束:</td><td>第n个约束
≥
≤
=</td></tr>
<tr><td>约束:</td><td>第m个约束
≤
≥
=</td><td>变量:</td><td>第m个变量
≥ 0
≤ 0
free</td></tr>
</table>

3.3 线性规划的对偶定理

1. **对称性**: P** = P (对偶的对偶是原问题)

$$\begin{array}{l} \min\ z = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \\ \text{s.t.}\ \ \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b} \\ \qquad\quad \mathbf{x} \geq 0 \end{array} \quad \underset{\text{对偶}}{\overset{\text{对偶}}{\rightleftarrows}} \quad \begin{array}{l} \max\ w = \mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{y} \\ \text{s.t.}\ \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{y} \leq \mathbf{c} \\ \qquad\quad \mathbf{y} \geq 0 \end{array}$$

P D

2. **弱对偶**: $c^{\mathrm{T}}x \geq b^{\mathrm{T}}y,\ \forall x \in X, \forall y \in Y$

3. **强对偶**: 若原问题P和对偶问题D满足下列条件之一

(a) P和D都可行

(b) P可行且有有限最优值

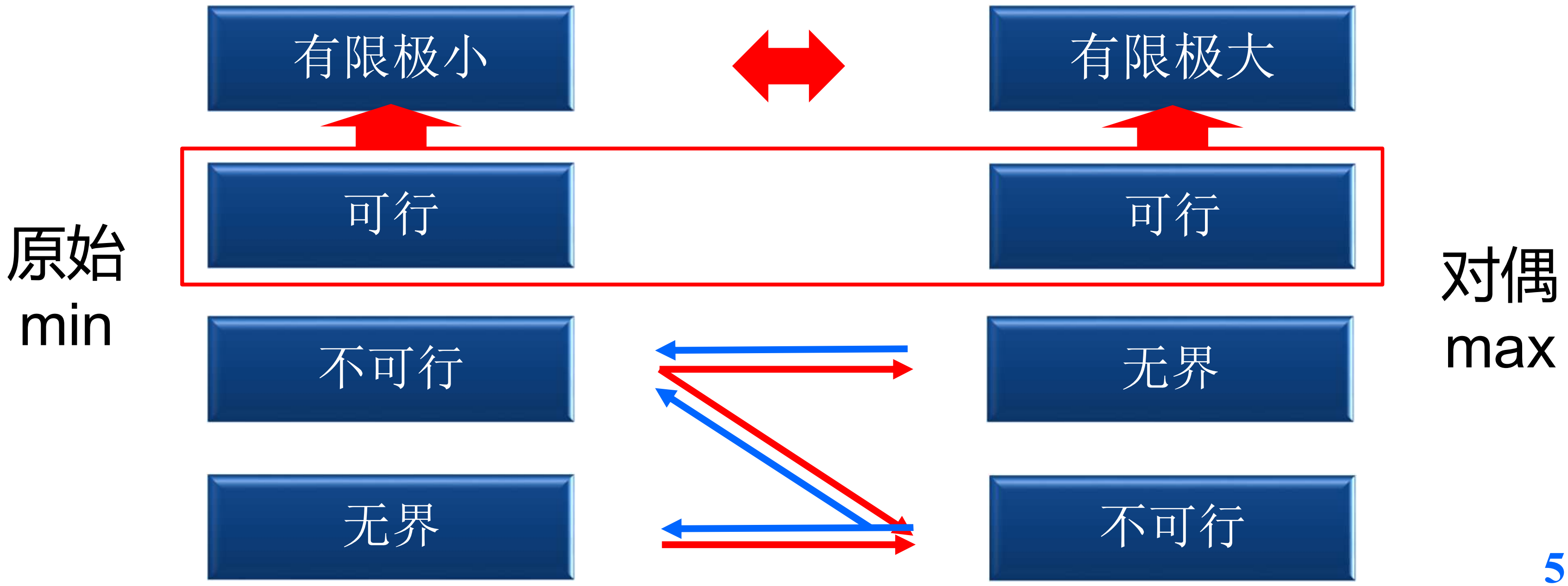
(c) D可行且有有限最优值

则对偶间隙为0，即$\exists x^* \in X, y^* \in Y$: $c^{\mathrm{T}}x^* = b^{\mathrm{T}}y^*$

3.3 线性规划的对偶定理

原始-对偶问题最优值的关系

	有限最优值	无界	不可行
有限最优值	★	✖	✖
无界	✖	✖	★
不可行	✖	★	★



3.3 线性规划的对偶定理

$$\begin{array}{ll} \min\ z = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \\ \text{s.t.}\ \ \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b} \\ \qquad \mathbf{x} \geq 0 \end{array} \quad \underset{\text{对偶}}{\overset{\text{对偶}}{\rightleftarrows}} \quad \begin{array}{ll} \max\ w = \mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{y} \\ \text{s.t.}\ \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{y} \leq \mathbf{c} \\ \qquad \mathbf{y} \geq 0 \end{array}$$

P　　　　　　　　D

4. **互补松弛**: 若上述形式线性规划的原问题和对偶问题有最优解x^*和y^*, 则解和约束条件存在如下关系

$$a_i^{\mathrm{T}} x^* > b_i \Rightarrow y_i^* = 0 \qquad y^{*\mathrm{T}} A_j < c_j \Rightarrow x_j^* = 0$$

$$y_i^* > 0 \Rightarrow a_i^{\mathrm{T}} x^* = b_i \qquad x_j^* > 0 \Rightarrow y^{*\mathrm{T}} A_j = c_j$$

$$\boxed{y_i^*\left(a_i^{\mathrm{T}} x^* - b_i\right) = 0, \forall i} \qquad \boxed{x_j^*\left(c_j - y^{*\mathrm{T}} A_j\right) = 0, \forall j}$$

3.3 线性规划的对偶定理

$$\boxed{u_i = y_i^*(a_i^{\mathrm{T}} x^* - b_i), \forall i}$$

$$\boxed{v_j = x_j^*(c_j - y^{*\mathrm{T}} A_j), \forall j}$$

5. 互补松弛 $\Leftrightarrow$ 强对偶

证明: 对任何原问题可行解 x 和对偶问题可行解 y 有:

$$u_i \geq 0, \forall i \quad v_j \geq 0, \forall j$$

由于 $\sum_i u_i = y^{*\mathrm{T}} A x^* - y^{*\mathrm{T}} b \quad \sum_j v_j = c^{\mathrm{T}} x^* - y^{*\mathrm{T}} A x^*$

故 $\quad c^{\mathrm{T}} x^* - y^{*\mathrm{T}} b = \sum_i u_i + \sum_j v_j$

强对偶: $c^{\mathrm{T}} x^* = y^{*\mathrm{T}} b$

$$\Leftrightarrow \sum_i u_i + \sum_j v_j = 0$$

$$u_i \geq 0, \forall i, v_j \geq 0, \forall j, \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\begin{array}{l} u_i = 0, \forall i \\ v_j = 0, \forall j \end{array}}$$

3.4 最优性条件

P

$$\min\ z = c^T x \quad \text{s.t.}\ Ax \ge b,\quad x \ge 0$$

$$\max\ w = b^T y \quad \text{s.t.}\ A^T y \le c,\quad y \ge 0$$

D

- 原始-对偶条件

$Ax \ge b,\ x \ge 0$	原变量可行
$A^T y \le c, y \ge 0$	对偶变量可行
$c^T x = b^T y$	强对偶

- Karush-Kuhn-Tucker (KKT) 条件

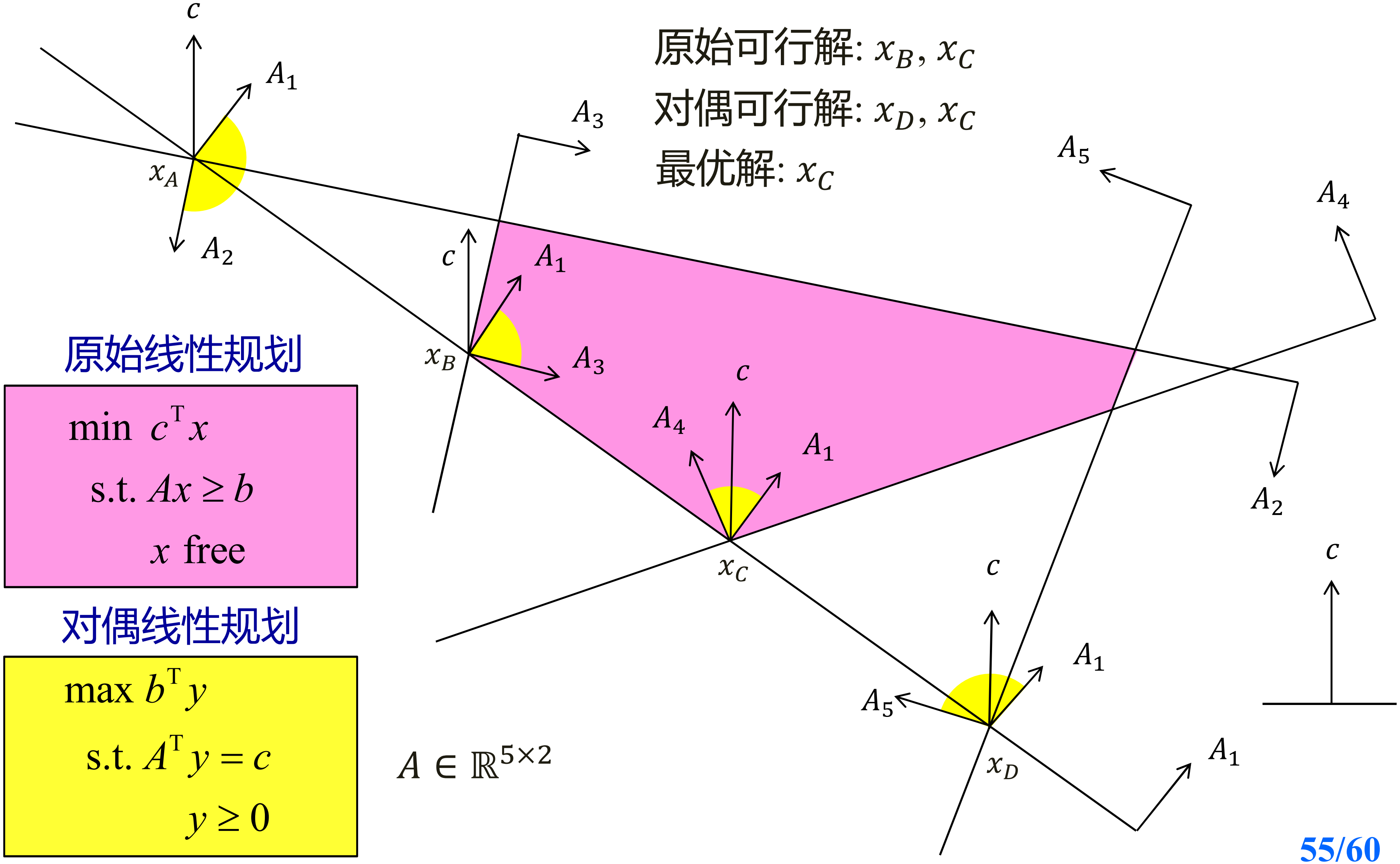
$Ax \ge b,\ x \ge 0$	原变量可行
$A^T y \le c, y \ge 0$	对偶变量可行
$y^T (Ax - b) = 0$ $(c^T - y^T A)x = 0$	互补松弛

3.5 原始-对偶可行性的可视化

原始可行解: x_B, x_C

对偶可行解: x_D, x_C

最优解: x_C



原始线性规划

$$\begin{aligned} \min\ & c^{\mathrm{T}} x \\ \text{s.t. } & Ax \geq b \\ & x \text{ free} \end{aligned}$$

对偶线性规划

$$\begin{aligned} \max\ & b^{\mathrm{T}} y \\ \text{s.t. } & A^{\mathrm{T}} y = c \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

$A \in \mathbb{R}^{5\times 2}$

练习1: 论证 $x^* = (9/7, 0, 1/7)$ 是以下线性规划的最优解

$$\begin{aligned} \max\ & x_1 - 2x_2 + 3x_3 \\ \text{s.t. } & x_1 + x_2 - 2x_3 \le 1 \\ & 2x_1 - x_2 - 3x_3 \le 4 \\ & x_1 + x_2 + 5x_3 \le 2 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3 \ge 0 \end{aligned} \quad \xrightarrow{\text{对偶}} \quad \begin{aligned} \min\ & y_1 + 4y_2 + 2y_3 \\ \text{s.t. } & y_1 + 2y_2 + y_3 \ge 1 \\ & y_1 - y_2 + y_3 \ge -2 \\ & -2y_1 - 3y_2 + 5y_3 \ge 3 \\ & y_1,\ y_2,\ y_3 \ge 0 \end{aligned}$$

假设 x^* 是最优解，根据互补松弛条件

$$x_1^* + x_2^* - 2x_3^* = 1$$

$$2x_1^* - x_2^* - 3x_3^* < 4$$

$$x_1^* + x_2^* + 5x_3^* = 2$$

$$x_1^* = \frac{9}{7},\quad x_2^* = 0,\quad x_3^* = \frac{1}{7}$$

$$\left.\begin{aligned} y_1^* + 2y_2^* + y_3^* &= 1 \\ y_2^* &= 0 \\ -2y_1^* - 3y_2^* + 5y_3^* &= 3 \end{aligned}\right\} \quad y_1^* = \frac{2}{7},\quad y_2^* = 0,\quad y_3^* = \frac{5}{7}$$

$$x_1^*,\ x_2^*,\ x_3^* \ge 0$$

x^*是原始可行解

$$y_1^* - y_2^* + y_3^* \ge -2$$

$$y_1^*,\ y_2^*,\ y_3^* \ge 0$$

y^*是对偶可行解

x^* 和 y^* 是最优解

若原问题目标函数变为 $x_1 + 2x_2 + 3x_3$, x^*还是最优解吗?

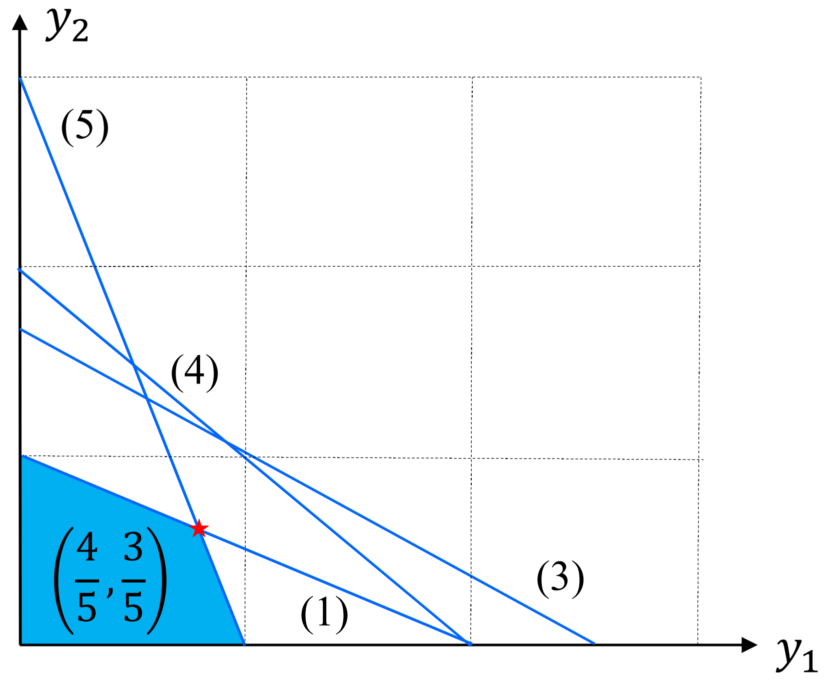
练习2: 考虑如下线性规划问题

$$\begin{aligned} \min\ & 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 \\ \text{s.t.}\ & x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 \ge 4 \\ & 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 \ge 3 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 \ge 0 \end{aligned}$$

(1) 写出对偶问题并用图解法求最优解.

对偶问题为:

$$\begin{aligned} \max\ & 4y_1 + 3y_2 \\ \text{s.t.}\ & y_1 + 2y_2 \le 2 \qquad (1) \\ & \cancel{y_1 - y_2 \le 3 \qquad (2)} \\ & \cancel{2y_1 + 3y_2 \le 5 \qquad (3)} \\ & \cancel{y_1 + y_2 \le 2 \qquad (4)} \\ & 3y_1 + y_2 \le 3 \qquad (5) \\ & y_1,\ y_2 \ge 0 \end{aligned}$$



练习2: 考虑如下线性规划问题

$$
\begin{aligned}
\min\ & 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 \\
\text{s.t.}\ & x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 \ge 4 \\
& 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 \ge 3 \\
& x_1,\quad x_2,\quad x_3,\quad x_4,\quad x_5 \ge 0
\end{aligned}
$$

(2) 根据对偶问题最优解推出原问题最优解 x^* .

对偶问题最优解为 $(y_1^*, y_2^*) = (4/5, 3/5)$

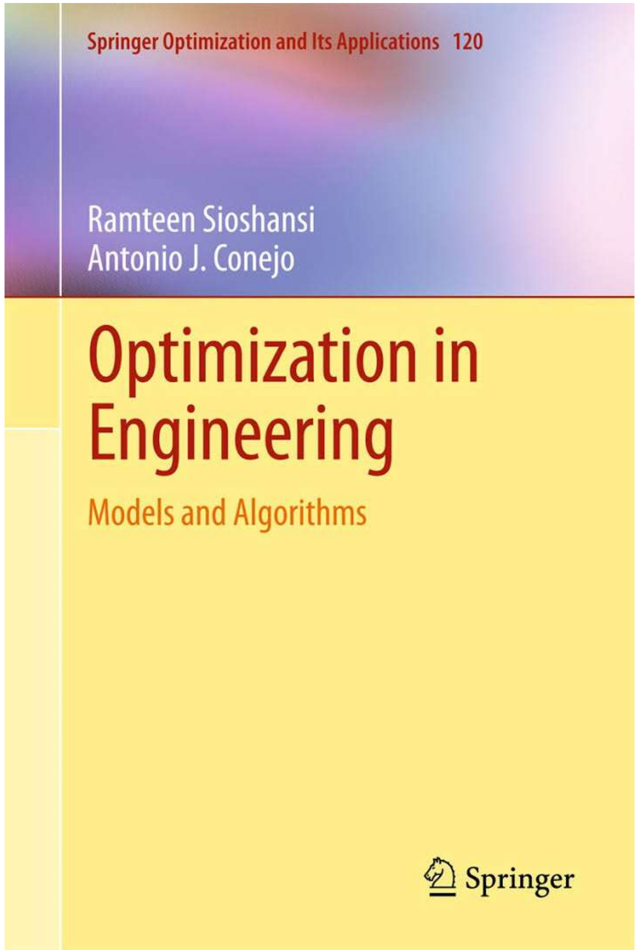
$$y_1^* + 2y_2^* = 2$$

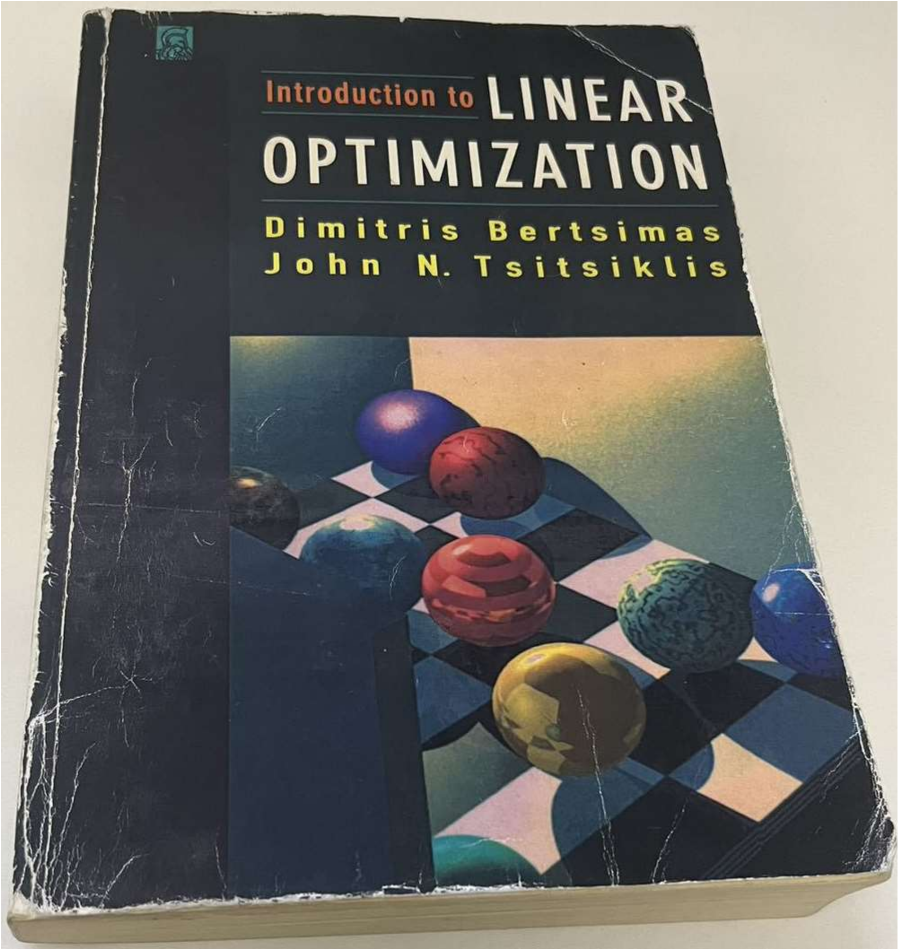
$$
\left.\begin{aligned}
y_1^* - y_2^* &< 3 \\
2y_1^* + 3y_2^* &< 5 \\
y_1^* + y_2^* &< 2
\end{aligned}\right\}
\Rightarrow
\left.\begin{aligned}
x_2^* &= 0 \\
x_3^* &= 0 \\
x_4^* &= 0
\end{aligned}\right\}
\Rightarrow
\begin{aligned}
x_1^* + 3x_5^* &= 4 \\
2x_1^* + x_5^* &= 3
\end{aligned}
\Rightarrow
\begin{aligned}
x_1^* &= 1 \\
x_5^* &= 1
\end{aligned}
$$

$$3y_1^* + y_2^* = 3$$

$$
\left.\begin{aligned}
y_1^* &> 0 \\
y_2^* &> 0
\end{aligned}\right\}
\Rightarrow
\begin{aligned}
x_1^* + x_2^* + 2x_3^* + x_4^* + 3x_5^* &= 4 \\
2x_1^* - x_2^* + 3x_3^* + x_4^* + x_5^* &= 3
\end{aligned}
$$

参考书





Sioshansi R, Conejo A J. Optimization in Engineering: Models and Algorithms. Springer, 2017
Bertsimas D, Tsitsiklis J. Introduction to Linear Optimization. Athena Scientific, 1997
陈宝林. 最优化理论与算法（第2版）， 清华大学出版社, 2005

相关论文

- 机组组合中约束预处理(识别冗余约束)

  Guo Z, Wei W, Chen L, et al. Fast screen of redundant transmission constraints in line contingency-constrained dispatch. IEEE Transactions on Power Systems, 2020, 35(4): 3305-3307.

- 最大化灵活性的电力系统调度(最大化切比雪夫球)

  Wei W, Wang J, Mei S. Dispatchability maximization for co-optimized energy and reserve dispatch with explicit reliability guarantee. IEEE Transactions on Power Systems, 2016, 31(4): 3276-3288.