



清华大学
Tsinghua University

运筹学

第三讲 投影与参数规划

魏韓

2025年3月26日

1. 多面体正交投影

2. 多参数规划与灵敏度分析

1. 多面体正交投影

1.1 新能源发电安全域实例

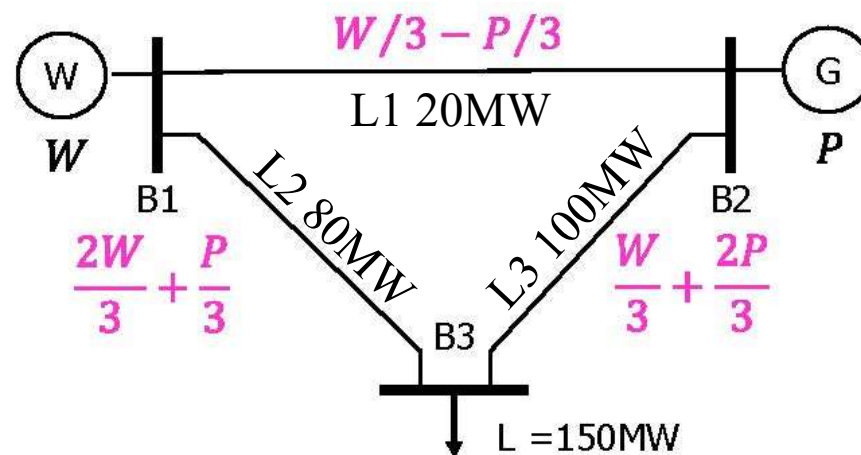
电力系统概况

节点#1: 风电场, 风电功率 W

节点#2: 燃气机组, $P \in [50, 150]$ MW

节点#3: 负荷150MW

三条线路电抗相等, PTDF如图所示



(1) 求风电出力 W 的安全范围?

(2) 限制电力系统在更大范围内安全利用清洁风力发电的瓶颈环节何在?

(1) 给定风电出力 W , 是否存在发电调度 P 使得 (P, W) 满足系统运行约束?

(2) 哪些不等式在风电出力变化时难以满足?

系统运行约束

线路L1容量: $-60 \leq W - P \leq 60$

线路L2容量: $2W + P \leq 240$

线路L3容量: $2P + W \leq 300$

机组发电容量: $50 \leq P \leq 150$

系统功率平衡: $P + W = 150$

1.2 不等式组消元与多面体正交投影

定义 (多面体正交投影)

给定多面体集合

$$\mathcal{P} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mid Ax + By \leq b\}$$

其中系数矩阵维数相容矩阵乘法。 $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^n$ 是变量 x 所在坐标轴构成的子空间。多面体 \mathcal{P} 在 \mathcal{X} 上的正交投影为

$$\Pi_{\mathcal{X}}\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists y \in \mathbb{R}^m: By \leq b - Ax\}$$

定义 (不等式组消元)

给定不等式组构成的多面体集合

$$\mathcal{P} = \{(x, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid Ax + A_{n+1}x_{n+1} \leq b\}$$

其中系数矩阵 A 的维数相容矩阵乘法, A_{n+1} 是列向量。消去最后一个变量 x_{n+1} 得到的集合是

$$\Pi_{1:n}\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists x_{n+1} \in \mathbb{R}: A_{n+1}x_{n+1} \leq b - Ax\}$$

多面体投影可以通过多次消元得到

1.3 Fourier-Motzkin 消元

n 个变量

m 个约束

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

- 多面体 \mathcal{P} 有界: $m > n$
- 矩阵 A 列满秩: $\text{rank}(A) = n$
- 无冗余约束 (或冗余约束已消去)

1.3 Fourier-Motzkin 消元

消去最后一个变量 x_n :

将不等式按照 x_n 的系数重新整理归类:

■ Type-1 型不等式: $a_{in} > 0$ -- $x_n \leq \left(b_i - \sum_{j=1}^{n-1} a_{ij} x_j\right) / a_{in}$

■ Type-2 型不等式: $a_{in} < 0$ -- $x_n \geq \left(b_i - \sum_{j=1}^{n-1} a_{ij} x_j\right) / a_{in}$

■ Type-3 型不等式: $a_{in} = 0$ -- $\sum_{j=1}^{n-1} a_{ij} x_j \leq b_i$

- x_n 的任何一个上界必须 $\geq x_n$ 的任何一个下界:

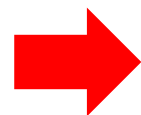
$$\left\{ x \in \mathbb{R}^{n-1} \left| \begin{array}{l} \frac{b_i - \sum_{j=1}^{n-1} a_{ij} x_j}{a_{in}} \leq \frac{b_k - \sum_{j=1}^{n-1} a_{kj} x_j}{a_{kn}} \quad k : \text{Type-1} \\ \sum_{j=1}^{n-1} a_{lj} x_j \leq b_l \quad l : \text{Type-3} \end{array} \right. \right.$$

1.3 Fourier-Motzkin 消元

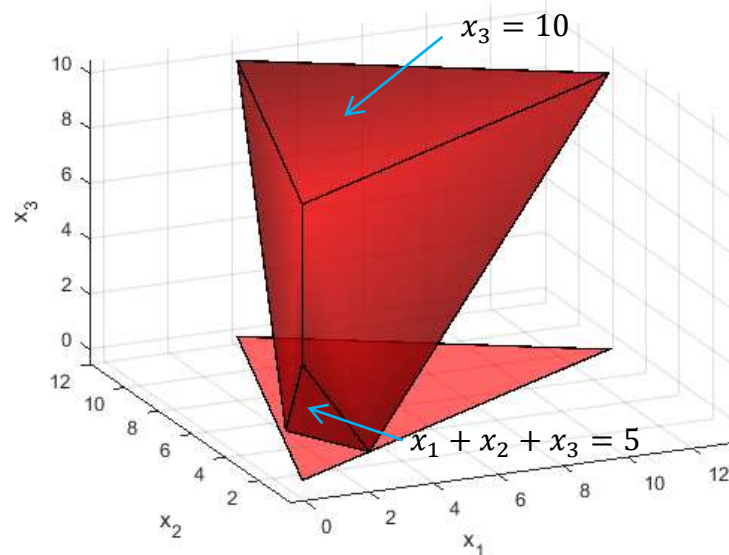
$$\left\{ x \in \mathbb{R}^3 \left| \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 - 2x_3 \leq 7 \\ x_1 - 2x_2 \leq -1 \\ -3x_1 + x_2 \leq 0 \\ x_3 \leq 10 \\ x_1 + x_2 + x_3 \geq 5 \end{array} \right. \right\}$$

消去变量 x_3 :

$x_1 - 2x_2 \leq -1$	Type-3
$-3x_1 + x_2 \leq 0$	Type-3
$x_3 \leq 10$	Type-1
$x_3 \geq 5 - x_1 - x_2$	Type-2
$x_3 \geq \frac{x_1 + 2x_2 - 7}{2}$	Type-2



$$\begin{array}{l} 5 - x_1 - x_2 \leq 10 \\ 0.5(x_1 + 2x_2 - 7) \leq 10 \\ x_1 - 2x_2 \leq -1 \\ -3x_1 + x_2 \leq 0 \end{array}$$



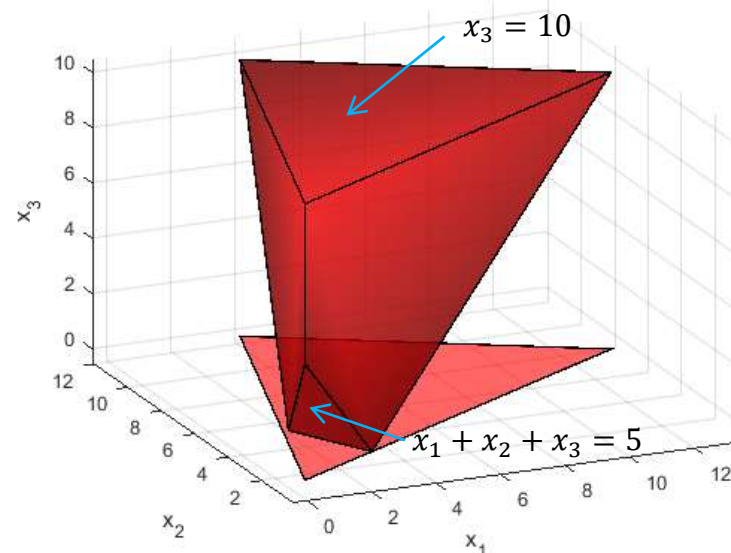
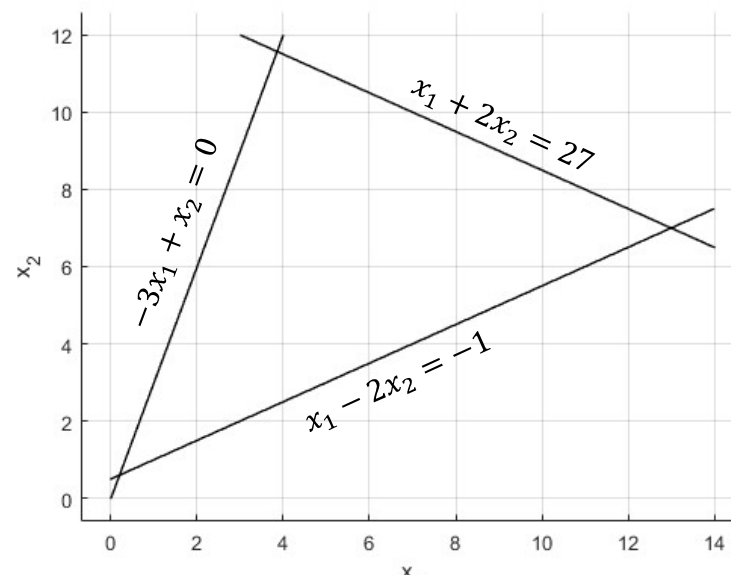
1. 多面体正交投影

1.3 Fourier-Motzkin 消元

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^2 \left| \begin{array}{l} x_1 - 2x_2 \leq -1 \\ -3x_1 + x_2 \leq 0 \\ x_1 + 2x_2 \leq 27 \\ -x_1 - x_2 \leq 5 \end{array} \right. \right\}$$

冗余约束

- 没消去1个变量最多产生 $m^2/4$ 个新不等式约束
- 最坏情况计算复杂度 $O(m^{2d})$
- 计算过程中需要清理冗余约束
- 当矩阵 A 稀疏时通常可用



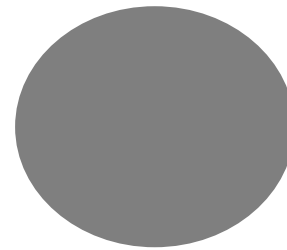
1.3 Fourier-Motzkin 消元

横截面与投影的比较



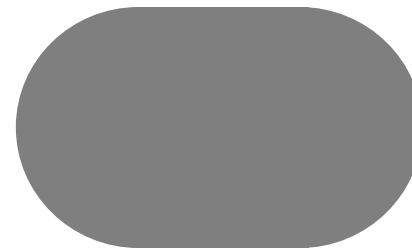
- 横截面

$$\{x \mid Ax + By \Big|_{y=y_c} \leq b\}$$



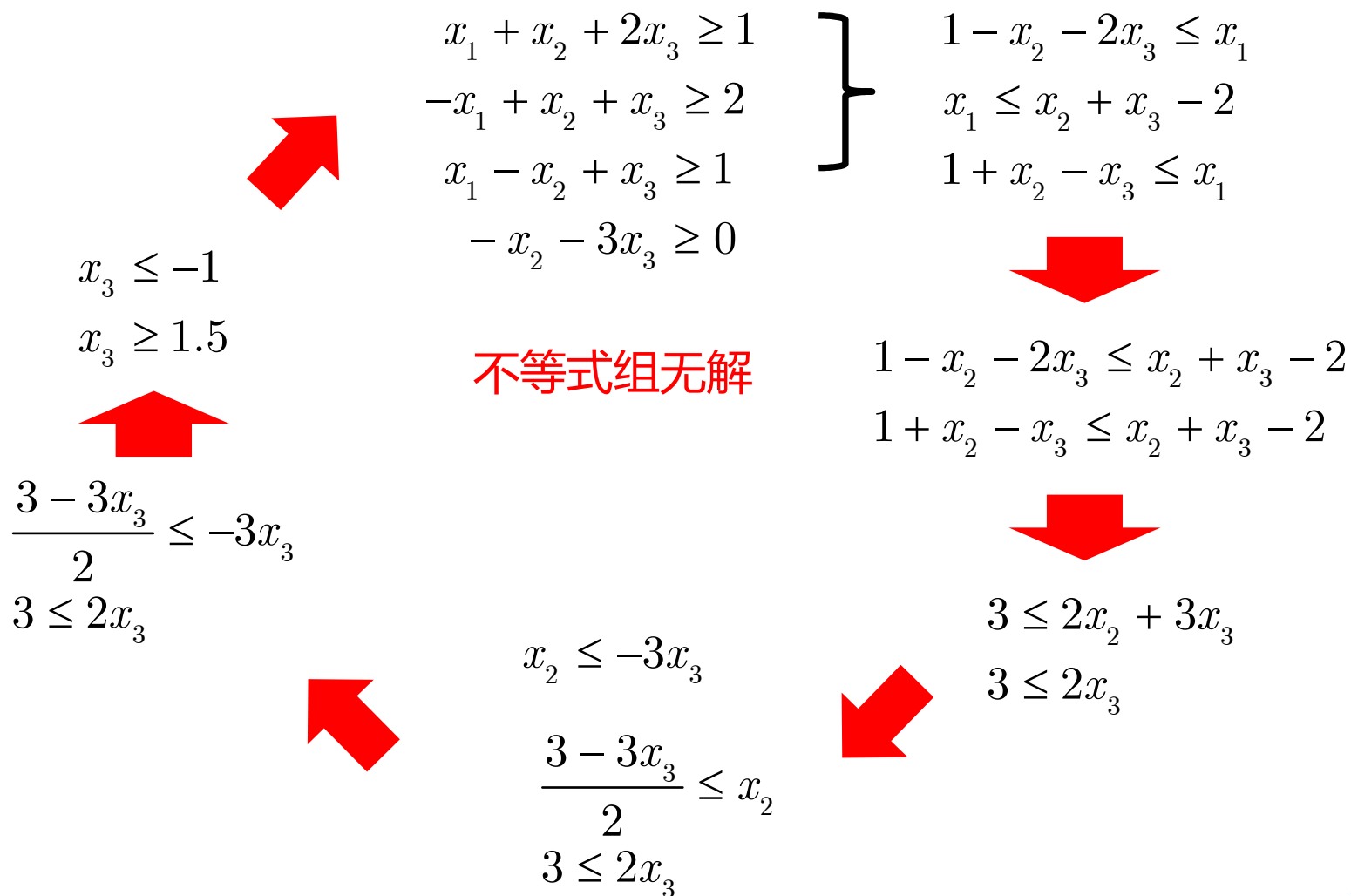
- 投影

$$\{x \mid \exists y : Ax + By \leq b\}$$



1.4 应用实例

例1: 判断如下不等式组是否有解



1.4 应用实例

例2: 用Fourier-Motzkin消元法求解线性规划问题

$$\min x_1 + 2x_2$$

$$\text{s.t. } x_1 + 3x_2 \geq 4$$

$$-x_1 + x_2 \geq 0$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

转化为可行性判断
求z的最小值

$$x_1 + 2x_2 = z \quad (1)$$

$$x_1 + 3x_2 \geq 4 \quad (2)$$

$$-x_1 + x_2 \geq 0 \quad (3)$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \quad (4)$$

消去 x_1

$$x_1 = z - 2x_2$$

$$z + x_2 \geq 4$$

$$-z + 3x_2 \geq 0$$

$$z - 2x_2 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

$$z \geq 8/3$$

$$x_2 \geq 4/3$$

$$x_2 \geq 8/9$$

$$x_2 \leq 4/3$$

$$x_2 \geq 0$$

$$z/2 \geq 4 - z$$

$$z/2 \geq z/3$$

$$z/2 \geq 0$$

$$x_2 \geq 4 - z$$

$$x_2 \geq z/3$$

$$x_2 \leq z/2$$

$$x_2 \geq 0$$

1. 多面体正交投影

1.4 应用实例

系统运行约束

线路L1容量: $-60 \leq W - P \leq 60$

线路L2容量: $2W + P \leq 240$

线路L3容量: $2P + W \leq 300$

机组发电容量: $50 \leq P \leq 150$

系统功率平衡: $P + W = 150$

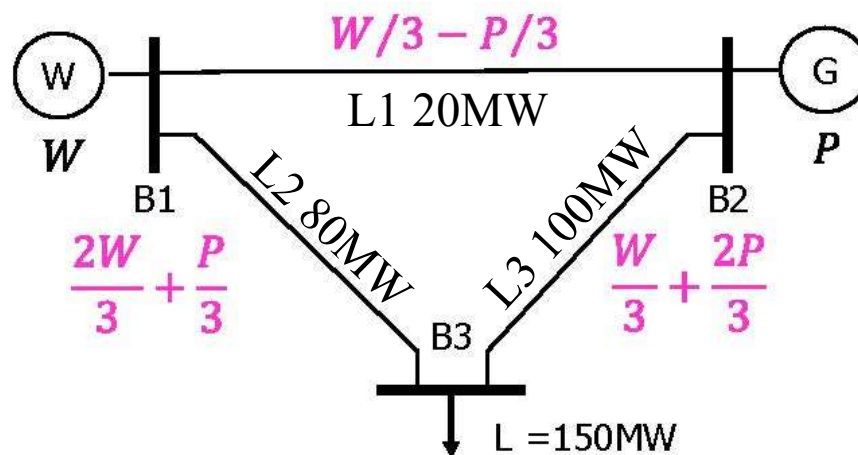
从等式约束 $P = 150 - W$ 消去 P 将其代入不等式约束可得:

线路L1容量: $-60 \leq 2W - 150 \leq 60$

线路L2容量: $W + 150 \leq 240$

线路L3容量: $300 - W \leq 300$

机组发电容量: $50 \leq 150 - W \leq 150$



线路 L1 和 L2 阻塞是此电力系统平抑新能源波动的主要瓶颈

$$90 \leq 2W \leq 210$$

$$45 \leq W$$

$$W \leq 90$$

$$W \leq 90$$

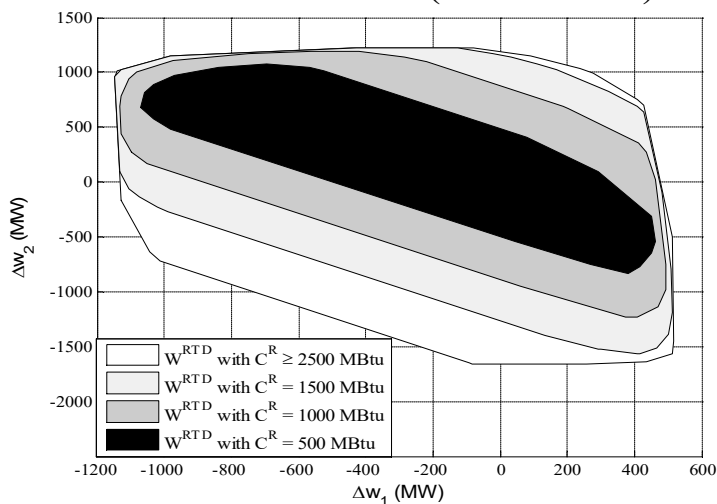
$$0 \leq W$$

$$0 \leq W \leq 100$$

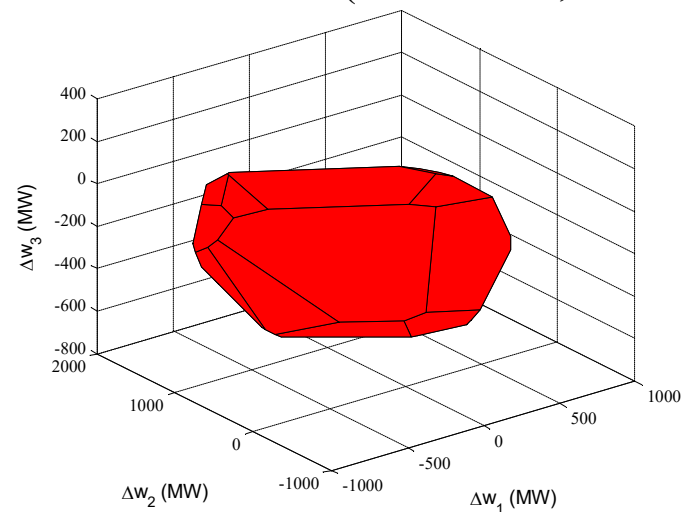
1. 多面体正交投影

实际电力系统中的新能源发电安全域

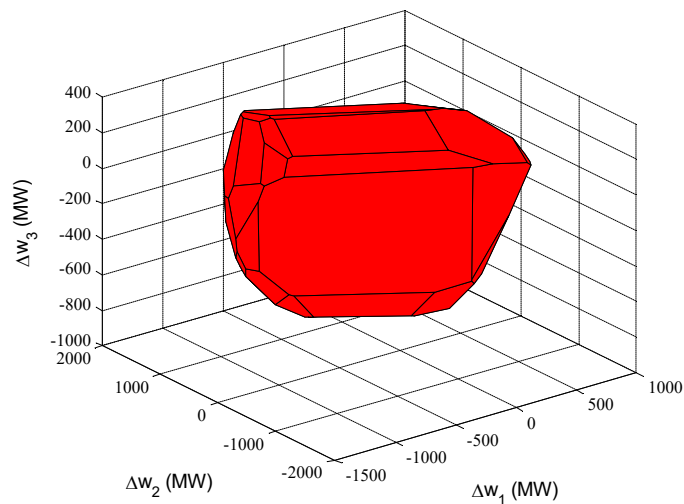
PJM 5节点系统 (2 个风电场)



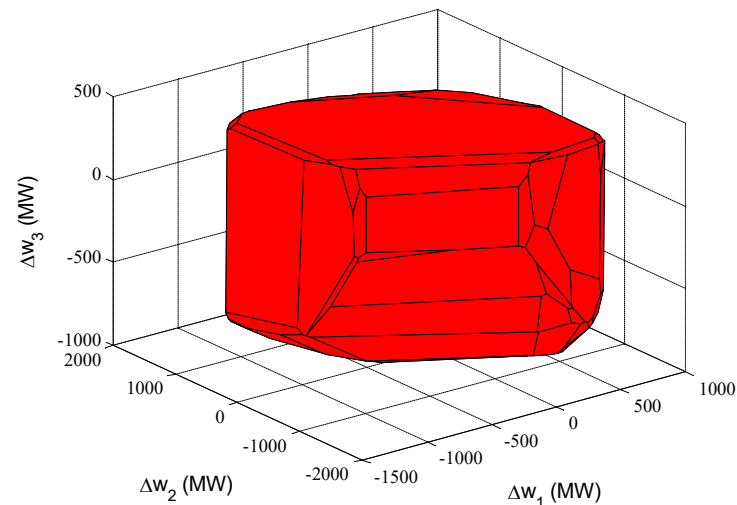
IEEE 118节点系统 (3 个风电场, 低成本)



IEEE 118节点系统 (3 个风电场, 中成本)



IEEE 118节点系统 (3 个风电场, 高成本)



1. 多面体正交投影

2. 多参数规划与灵敏度分析

2. 多参数规划与灵敏度分析

2.1 参数最优潮流实例

风力发电如何影响电力系统调度成本？

$$v(w_1, w_2) = \min \sum_i b p_i$$

$$\text{s.t. } w_1 + w_2 + \sum_i p_i = \sum_j d_j$$

$$\text{参数: } w_1, w_2 \quad -F_{ij} \leq \pi_{1l}^w w_1 + \pi_{2l}^w w_2 + \sum_i \pi_{il} p_{it}$$

$$\text{变量: } p_i \quad -\sum_j \pi_{jl} d_{jt} \leq F_{ij}, \forall(i, j)$$

lower and upper bounds

- 最优值函数 $v(w_1, w_2)$
- 最优调度策略(函数) $p_i(w_1, w_2)$

2. 多参数规划与灵敏度分析

2.2 参数线性规划

$$\forall \theta \in \Theta$$

$$v(\theta) = c^T x(\theta)$$

$$x(\theta) = \arg \min_x c^T x$$
$$\text{s.t. } Ax \leq b + B\theta$$

最优值函数(关于参数 θ): $v(\theta)$

最优解函数(关于参数 θ): $x(\theta)$

参数线性规划

- 找出 $v(\theta)$ 和 $x(\theta)$ (关于参数 θ) 的解析表达式

2. 多参数规划与灵敏度分析

2.3 参数线性规划解的性质

$$\begin{array}{ccc} \min_x c^T x & \xrightarrow{\text{对偶}} & \max_{\lambda} \lambda^T (b + B\theta) \\ \text{s.t. } Ax \geq b + B\theta : \lambda & \text{ } & \text{s.t. } A^T \lambda = c, \lambda \geq 0 \end{array}$$

对任意给定的 θ , KKT最优性条件如下

$$Ax \geq b + B\theta \quad \text{原始可行条件}$$

$$\left. \begin{array}{l} A^T \lambda = c \\ \lambda \geq 0 \end{array} \right\} \quad \text{对偶可行条件}$$

$$\lambda^T (Ax - b - B\theta) = 0 \quad \text{互补松弛条件}$$

2. 多参数规划与灵敏度分析

2.3 参数线性规划解的性质

非退化情况

- 最优解在某个极点处取到，极点取决于起作用约束集
若 $x \in \mathbb{R}^n$ ，则极点由 n 个起作用约束决定

起作用约束集 $\bar{A}x = \bar{b} + \bar{B}\theta : \bar{\lambda} > 0$ \bar{A} 可逆



不起作用约束
为严格不等式

$$x = \bar{A}^{-1}(\bar{b} + \bar{B}\theta) \quad \text{对其他 } \theta \text{ 成立吗?}$$

$$\tilde{A}x > \tilde{b} + \tilde{B}\theta : \tilde{\lambda} = 0$$

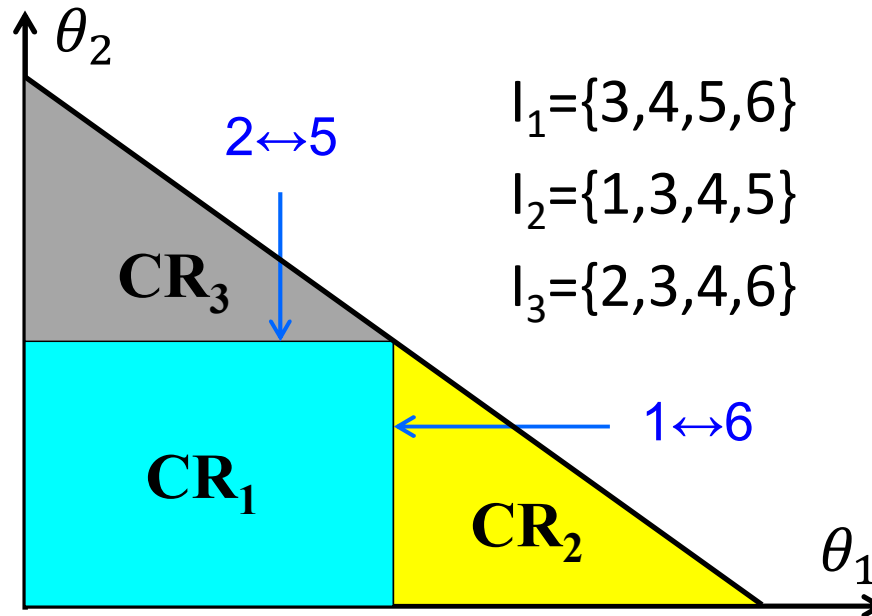


$$(\tilde{A}\bar{A}^{-1}\bar{B} - \tilde{B})\theta > \tilde{b} - \tilde{A}\bar{A}^{-1}\bar{b}$$

保证最优基不变的 θ 集合

2. 多参数规划与灵敏度分析

2.3 参数线性规划解的结构



$$\min_x c^T x$$

$$\text{s.t. } Ax \geq b + B\theta : \lambda$$



无穷多关于 θ 的仿射函数逐点求极大

$$\max_{\lambda} \lambda^T (b + B\theta)$$

$$\text{s.t. } A^T \lambda = c, \lambda \geq 0$$

解的结构

- 参数集 Θ 被划分为若干关键区域，每个区域是一个多面体
- 在每个关键区域内部， $v(\theta)$ 和 $x(\theta)$ 是 θ 的仿射函数(带常数项的线性函数)，它们在 Θ 上是分段线性函数
- $v(\theta)$ 在 Θ 上是 θ 的分段线性凸函数 (后续课程会讲)

2. 多参数规划与灵敏度分析

2.3 参数线性规划解的结构

	最优值函数	最优解函数
分段线性 凸函数	$v(\theta) = \max \left\{ \lambda_i^T (b + B\theta) \right\}$ $\left\{ \lambda_1 \quad \cdots \quad \lambda_K \right\} \in \Lambda$	
if-then 分 段线性函数	$v(\theta) = \begin{cases} \lambda_1^T (b + B\theta) & \text{if } \theta \in \text{CR}_1 \\ \vdots & \\ \lambda_K^T (b + B\theta) & \text{if } \theta \in \text{CR}_K \end{cases}$	$x(\theta) = \begin{cases} P_1\theta + p_1 & \text{if } \theta \in \text{CR}_1 \\ \vdots & \\ P_K\theta + p_K & \text{if } \theta \in \text{CR}_K \end{cases}$

2. 多参数规划与灵敏度分析

2.4 灵敏度分析

例: 标准形式线性规划的系数矩阵如下

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad c = [-4 \quad -2 \quad 0 \quad 1 \quad 3]^T$$

已知 $B = \{1, 2, 3\}$ 是最优基索引, $x^* = (1, 2, 0, 0, 0)^T$ 是最优解, $N = \{4, 5\}$. 以下考虑系数矩阵的元素变化如何影响最优解

改变目标函数中非基变量的系数 $c_j, j \notin B$

非基变量 x_4 的系数 c_4 从 1 变为 θ , x_5 的系数 c_5 从 3 变为 λ . 求此二参数的取值范围集合, 对该集合内的任意 (θ, λ) , A_B 仍是最优基。

由于约束条件中的系数矩阵 A 和右端常数项 b 不变, 若要当前最优解 x^* 仍然保持最优, 基变量的规约成本 $c_B^T - c_B^T A_B^{-1} A_B = 0 \Leftrightarrow c_B^T - y^{*T} A_B$ (也即互补松弛条件); 由此得对偶最优解 $y^* = (-1, -1, -1)^T$.

非基变量系数改变后, 若要最优解不变, 非基变量的规约成本非负

$$c_N^T - y^{*T} A_N = \begin{bmatrix} \theta & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix} \geq 0 \Rightarrow \theta \geq 0, \quad \lambda \geq -1$$

2. 多参数规划与灵敏度分析

2.4 灵敏度分析

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad c = [-4 \quad -2 \quad 0 \quad 1 \quad 3]^T$$

已知 $B = \{1, 2, 3\}$ 是最优基索引, $x^* = (1, 2, 0, 0, 0)^T$ 是最优解, $N = \{4, 5\}$.

改变目标函数中基变量的系数 $c_j, j \in B$

基变量系数 c_2 从 -2 变为 θ 。求不影响最优解的参数 θ 的取值范围。

$$y^{*T} A_B = c_B^T \Rightarrow (y_1 \quad y_2 \quad y_3) \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = [-4 \quad \theta \quad 0] \quad \begin{aligned} y_1 &= y_2 = \frac{-8 - \theta}{6} \\ y_3 &= \theta/2 \end{aligned}$$

$$y^{*T} A_N \leq c_N^T \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{-8 - \theta}{6} & \frac{-8 - \theta}{6} & \frac{\theta}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \leq [1 \quad 3] \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ \theta \\ \frac{\theta}{2} \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \theta \leq 6$$

2. 多参数规划与灵敏度分析

2.4 灵敏度分析

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} -4 & -2 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}^T$$
$$B = \{1, 2, 3\}, N = \{4, 5\}$$
$$x^* = (1, 2, 0, 0, 0)^T$$

改变不等式约束右端的常数项 b

常数项元素 b_2 从 3 变为 θ 。求不影响最优基的参数 θ 的取值范围。
向量 b 出现在对偶问题的目标函数中，改变向量 b 不影响对偶可行集，在本问题中，修改常数向量 b 后， $y^* = (-1, -1, -1)^T$ 仍是对偶可行解。若要最优基不变，矩阵 A_B 必须确定一个基本可行解

$$A_B x_B^* = b \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \theta \\ 5 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1^* = \frac{\theta}{3}, x_2^* = -\frac{\theta}{6} + \frac{5}{2}, x_3^* = -\frac{5\theta}{6} + \frac{5}{2}$$

$$\frac{\theta}{3} \geq 0, \quad -\frac{\theta}{6} + \frac{5}{2} \geq 0, \quad -\frac{5\theta}{6} + \frac{5}{2} \geq 0 \quad \Rightarrow 0 \leq \theta \leq 3$$

- **多面体投影**

Wei W, et al. Real-time dispatchability of bulk power systems with volatile renewable generations. IEEE Trans Sustain Energy, 2015.

Chen W, et al. Exploiting the flexibility of district heating system for distribution system operation: Set-based characterization and temporal decomposition. IEEE Trans Sustain Energy, 2025.

- **参数规划**

Guo Z, et al. Impact of energy storage on renewable energy utilization: A geometric description. IEEE Trans Sustain Energy, 2021.

Guo Z, et al. Economic value of energy storages in unit commitment with renewables and its implication on storage sizing. IEEE Trans Sustain Energy, 2021.

Guo Z, et al. Parametric distribution optimal power flow with variable renewable generation. IEEE Trans Power Syst, 2022

“线性规划是一项伟大技术革命中的一部分。它使人类看清自己的目标，制定详细的决策方案，让人类即使在面对极为复杂的实际情形时也能够‘最佳’地实现其目标……我们在这条路上已经走的很远了，但仍要继续走下去……”

引自《中国科学：数学》创刊70周年特邀综述《现代优化理论与应用》