引力波信号处理

吴晨聪　20222010311　wucc22@mails.tsinghua.edu.cn

**摘 要**

引力波是由剧烈天文事件（如黑洞合并、中子星合并和超新星爆发）产生的时空涟漪，对研究宇宙起源、黑洞物理、广义相对论以及宇宙大尺度结构等具有重要的意义。引力波信号具有极其微弱且难以探测的特点，这需要高灵敏度的探测器和先进的数据处理技术。本文首先介绍引力波信号的基本特征，即其产生机制和传播特性。随后阐述用于引力波探测的基本理论和方法，包括匹配滤波、时频分析和信号去噪等关键技术。最后总结引力波信号处理的具体应用实例，如双中子星合并、黑洞合并和宇宙背景引力波的探测。

关键词：引力波；信号处理；匹配滤波；时频分析；探测器

**1 引 言**

1916年, 爱因斯坦提出了广义相对论并首次预言了引力波的存在。引力波可以作为传统电磁波观测的补充，用于探测宇宙中除普通物质以外的暗物质和暗能量。因此, 自预言以来, 人们不断致力于引力波的探测[1]。

尽管引力波在理论上早已被提出，但因其信号极其微弱的特性，使得直接探测引力波成为了一项重大挑战。直到2015年，激光干涉引力波天文台成功探测到来自双黑洞合并事件的引力波信号，这一突破性发现不仅验证了广义相对论的预言，也开启了引力波天文学的新时代[2]。

引力波探测的成功依赖于高灵敏度的探测器和先进的数据处理技术。探测器通过激光干涉技术，能够极其精确地测量信号在时空上的微小变化，从而捕捉引力波信号。然而，这些探测器也面临着巨大的技术挑战，特别是需要在强噪声环境中提取极其微弱的引力波信号。因此，引力波信号处理成为研究的核心内容，其中从噪声中识别和提取信号，更是需要解决的首要技术难点。

對于引力波信号处理技术，本文将着重介绍以下三点: 匹配滤波、时频分析和信号去噪。匹配滤波是引力波信号检测的标准方法，通过将探测器数据与预先计算的波形模板进行相关，来识别特定类型的引力波信号。此外，时频分析技术，如短时傅里叶变换和小波变换能够用于研究非平稳信号，分析引力波信号的瞬时频率和能量分布。信号去噪技术，如卡尔曼滤波、主成分分析（PCA）和独立成分分析（ICA）技术可以有效地去除背景噪声，提取出真实的引力波信号。

引力波信号处理技术不仅在理论研究中具有重要意义，还在实际应用中取得了显著成果。例如，双中子星合并事件GW170817的探测，不仅揭示了中子星的物理性质，还通过多信使观测验证了重元素的合成过程。此外，黑洞合并事件GW150914的探测提供了大量关于黑洞质量、自旋和合并过程的宝贵信息[3]。

**2 引力波基本特性**

引力波是由加速质量产生的时空涟漪，这一概念最早由爱因斯坦在1916年的广义相对论中预言。引力波的传播不依赖于介质，可以在真空中以光速传播，因此能够提供有关宇宙中剧烈天文事件的独特信息。下文将主要介绍引力波的三个主要特性包括其产生机制、频率范围和波形特征。

引力波的主要产生来源包括双星系统的合并、超新星爆发和黑洞的非对称塌缩等剧烈天文事件。

双星系统（如双黑洞和双中子星）在合并过程中会释放大量能量，以引力波的形式辐射出去。黑洞合并是目前已探测到的最强引力波源之一，2015年，LIGO探测到的GW150914事件首次验证了这一理论，该事件由两个质量分别约为36倍和29倍太阳质量的黑洞合并引起[4]。中子星是由超新星爆发后遗留的极端致密天体。在双中子星系统合并时，不仅会产生引力波，还可能伴随电磁辐射和伽马射线暴。例如，2017年LIGO和Virgo探测到的GW170817事件，是首个同时探测到引力波和电磁波信号的双中子星合并事件。

当一颗大质量恒星耗尽其核燃料并发生核心塌缩时，会产生超新星爆发。在这一剧烈爆发过程中，恒星核心的非对称塌缩和外壳抛射会产生引力波。尽管目前尚未直接探测到由超新星引起的引力波，但这一机制仍被认为是引力波的重要来源之一。

此外，黑洞的形成过程中，如果塌缩过程具有非对称性（例如由于快速自转或不均匀质量分布），也会产生引力波。这种引力波信号通常具有复杂的波形特征，能够提供关于黑洞形成过程的重要信息，如黑洞的自旋参数、质量分布、非对称塌缩过程等。

引力波的频率范围取决于其源的物理特性。根据LIGO和Virgo的探测结果，引力波的频率通常在10 Hz到几千赫兹之间。这个频率范围涵盖了许多致密天体合并事件的引力波辐射。例如，双黑洞合并的引力波信号频率通常在10 Hz到1000 Hz之间，而双中子星合并的引力波信号频率可以达到几千赫兹。未来的空间引力波探测器，如激光干涉空间天线，将能够探测到更低频率（0.1 mHz至1 Hz）的引力波信号，这个频段涵盖了许多大质量黑洞合并和星系核心黑洞的引力波信号[4]。

引力波的波形包含丰富的物理信息，可以用来反演天体物理事件的细节。引力波信号的波形主要包括三个阶段：进动阶段、合并阶段和环绕阶段。在进动阶段，两个致密天体互相旋转，逐渐接近，产生频率和振幅都逐渐增加的引力波信号。在合并阶段，两个天体最终合并，产生强烈的引力波爆发。环绕阶段则是新形成的天体的回荡和稳定过程。每个阶段的波形特征都包含着有关天体质量、自旋和轨道参数的信息[5]。

**3 引力波信号分析的基本理论**

**3.1 匹配滤波**

在引力波信号分析的基本理论中，匹配滤波是一种重要的信号处理技术。匹配滤波被广泛应用于引力波信号检测、雷达信号处理、通信系统和图像处理等多个领域。匹配滤波的核心目的是在已知信号模板的情况下，通过优化信噪比来检测信号的存在。具体来说，匹配滤波器是一种与期望信号模板相匹配的线性滤波器，能够在噪声背景中最大化信号的可检测性。这种技术对于从大量噪声数据中提取微弱的引力波信号尤其有效，成为现代引力波天文学的重要工具之一。

匹配滤波的基本原理是将接收到的信号与已知的信号模板进行相关运算，从而在噪声中检测出信号。以下是其推導過程:

假设接收到的信号包含目标信号和噪声即：

匹配滤波器的输出是接收信号与滤波器脉冲响应的卷积：

匹配滤波器的脉冲响应选择为与期望信号的时间反转和延迟的形式：

波器的其中是信号的持续时间。这样，匹配滤波器的输出可以表示为：

通过上述公式，可以看出匹配滤波器的作用是将接收信号与期望信号模板进行相关运算，从而在噪声背景中突出信号。

而匹配滤波的设计目的是最大化信噪比（SNR），意味在给定的噪声背景中，使信号的检测更加可靠和准确。以下是其方法的理論推導:

首先，定义匹配滤波器输出的瞬时信噪比为：

其中是信号成分的输出, 是噪声成分的输出。

匹配滤波器输出的信号成分可以表示为：

时，信号成分达到最大值：

对于噪声成分，假设噪声是零均值、方差为的高斯白噪声，其自相关函数为：

匹配滤波器输出的噪声功率为：

因此，匹配滤波器输出的最大信噪比为：

匹配滤波器通过最大化输出信噪比，能够在噪声中有效地检测到期望信号。在引力波探测中，匹配滤波器被用来从庞大的噪声数据中提取出微弱的引力波信号，LIGO和Virgo等引力波探测器正是通过匹配滤波技术，将接收信号与理论波形模板进行相关，从而成功识别出引力波信号[6]。

**3.2 时频分析**

与传统的傅里叶变换不同，时频分析能够提供信号在不同时间点上的频谱信息，这在处理非平稳信号如本文中的引力波信号时尤为重要。常见的时频分析方法包括短时傅里叶变换、小波变换和希尔伯特-黄变换，下文将以希尔伯特-黄变换为例重点介绍其原理和推导过程。

希尔伯特-黄变换（Hilbert-Huang Transform, HHT）是一种自适应的时频分析方法，适用于分析非线性和非平稳信号。与传统的时频分析方法不同，HHT能够提供高精度的瞬时频率和瞬时振幅信息，因此在引力波信号处理等领域具有广泛应用。HHT主要包括两个步骤：经验模态分解（Empirical Mode Decomposition, EMD）和希尔伯特谱分析（Hilbert Spectral Analysis, HSA）[7]。

经验模态分解（EMD）：EMD是一种数据驱动的方法，用于将信号分解为若干个本征模态函数（Intrinsic Mode Functions, IMFs），每个IMF都是窄带信号。EMD的基本步骤如下：

1. 寻找极值点: 找到信号中的所有局部极大值和极小值。
2. 构造上包络线和下包络线：使用样条插值分别构造通过所有局部极大值的上包络线和通过所有局部极小值的下包络线。
3. 计算局部均值：上包络线和下包络线的均值即为局部均值
4. 计算细节信号: 细节信号为原始信号减去局部均值
5. 判断IMF条件：判断是否满足IMF条件，即：在整个数据范围内，极值点数和零交点数相等或相差不超过一个以及任意一点处的局部均值为零。
6. 迭代：如果满足IMF条件，则将其作为一个IMF；否则，将作为新的输入信号，重复上述步骤，直到满足IMF条件。

经过EMD处理后，信号可以表示为若干个IMF和一个残差信号的和：

其中验表示第个本征模态函数， 表示残差信号。

希尔伯特谱分析（HSA）：对每个IMF应用希尔伯特变换，得到瞬时频率和瞬时振幅。希尔伯特变换的定义为：

对于，其希尔伯特变换为 换结合IMF，可以得到瞬时振幅 到和瞬时相位

其中，瞬时振幅和瞬时相位的计算公式为：

瞬时频率则由瞬时相位的导数得到：

通过对所有IMF进行希尔伯特变换，可以得到信号的希尔伯特时频谱:

在引力波信号处理中，希尔伯特-黄变换能够提供高精度的瞬时频率和瞬时振幅信息，特别适用于分析引力波信号中的非线性和非平稳成分。例如在检测双星系统合并的引力波信号时，HHT能够准确捕捉到信号的瞬时频率变化和振幅变化，有助于提高引力波事件检测的准确性和可靠性。

**3.3 信号去噪**

引力波探测器（如LIGO和Virgo）在运行过程中捕捉到的信号中包含大量的环境噪声和仪器噪声，这些噪声会掩盖引力波信号的微弱特征。因此，信号去噪在引力波信号处理中至关重要。常用的信号去噪技术包括卡尔曼滤波、主成分分析（PCA）和独立成分分析（ICA），下文将以卡尔曼滤波为例重点介绍其原理和推导过程。

卡尔曼滤波是一种递归滤波算法，广泛应用于动态系统的状态估计中，尤其适用于具有噪声的线性系统。卡尔曼滤波器通过两个步骤分別是预测和更新对系统状态进行估计，以最小化估计误差的方差，从而实现对信号的最优滤波，以下将详细介绍卡尔曼滤波的原理和推导过程。

1. 预测步骤: 利用上一时刻的状态估计和控制输入，预测当前时刻的状态和协方差：

状态预测：

协方差预测：

其中，和推是对时刻的状态预测，是预测状态的协方差矩阵。

1. 更新步骤: 利用当前时刻的观测值修正预测的状态和协方差：

计算卡尔曼增益：

状态更新：

协方差更新：

1. 推导过程：

状态预测方程通过将上一步的状态估计代入系统状态方程得到：

协方差预测方程考虑了过程噪声的影响，通过矩阵运算得到：

更新步骤的关键在于卡尔曼增益的计算。为了最小化估计误差的方差，定义残差（预测观测值与实际观测值之差）：

的状卡尔曼增益通过最小化估计误差协方差矩阵的来求解：

状态更新方程则是利用卡尔曼增益对预测状态进行修正：

协方差更新方程则由更新后的估计误差协方差矩阵给出：

程则通过以上步骤，卡尔曼滤波器能够递归地对系统状态进行估计，最大化信噪比，实现对引力波信号的有效去噪。

**4 引力波信号具体应用**

引力波信号的检测和分析不仅是理论物理学的重大突破，也为天体物理学和宇宙学提供了新的观测手段和研究工具。下文将介绍的引力波信号分析的具体应用，包括双中子星合并和黑洞合并。

双中子星合并产生的引力波信号能够揭示中子星的物理性质和合并过程中的动态行为。2017年，LIGO和Virgo探测器首次检测到双中子星合并事件GW170817，这是引力波天文学的一大里程碑。通过分析这一事件的引力波信号，科学家们不仅确定了中子星的质量和轨道参数，还发现了与此事件相关的电磁信号，包括伽马射线暴和光学辐射。

黑洞合并是引力波的强烈来源之一。自2015年LIGO首次探测到黑洞合并事件GW150914以来，LIGO和Virgo已经多次检测到此类事件。这些检测结果不仅证实了爱因斯坦广义相对论的预言，还提供了测量黑洞质量、自旋和合并后回波的重要数据。例如，GW150914事件的引力波信号表明合并前的两个黑洞质量分别约为36倍和29倍太阳质量，合并后的黑洞质量约为62倍太阳质量，剩余的质量以引力波的形式辐射出去。

**5 结合课程学习的内容**

如前文所介绍，引力波是一种由剧烈天文事件产生的时空涟漪，通过课程中学到的信号分析方法，如拉普拉斯变换和傅里叶变换，可以简单地对引力波信号进行频率分析，然而想要更加准确识别和分类这些信号，就需要在信号分析有更深层的认识，如利用希尔伯特变换和卡尔曼滤波等处理方法，课程上学到的处理方法更多是让我们对信号的分析建立一个初步的了解，当谈及对现实信号的处理时往往需要考虑更多的因素。回到引力波，了解更多的信号分析变换方法对于理解引力波探测系统中的信号行为至关重要。这些变换有助于简化系统分析，使得工程师能够设计出更为复杂且功能强大的探测系统。引力波探测技术与“信号与系统”课程紧密相关，后者为前者提供了理论基础和技术支持。同时，信号与系统这门课的应用领域远不止在引力波探测中，真正学懂这一门课，才能在未来更好地将理论知识和工程技术进一步融合。

**6 参考文献**

[1] Einstein, A. (1916). "Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie." Annalen der Physik, 49(7), 769-822. doi:10.1002/andp.19163540702.

[2] Abbott, B. P., et al. (2016). "Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger." Physical Review Letters, 116(6), 061102. doi:10.1103/PhysRevLett.116.061102.

[3] Abbott, B. P., et al. (2017). "GW170817: Observation of Gravitational Waves from a Binary Neutron Star Inspiral." Physical Review Letters, 119(16), 161101.

[4] 王娟,齐克奇,王少鑫,等.面向空间引力波探测的激光干涉技术研究进展及展望[J/OL].中国科学:物理学力学 天文学:1-19[2024-06-30].

[5] Thorne, K. S. (1987). "Gravitational radiation." In Hawking, S. W., & Israel, W. (Eds.), 300 Years of Gravitation (pp. 330-458). Cambridge University Press. ISBN 978-0-521-37976-2.

[6] Harry, G. M., & LIGO Scientific Collaboration. (2010). "Advanced LIGO: The next generation of gravitational wave detectors." Classical and Quantum Gravity, 27(8), 084006.

[7] 吕文,郭永刚,胡锦.基于HHT方法对监测信息的处理及分析[J].西藏科技,2019(08):68-72.