ĐỀ THI và ĐÁP ÁN THAM KHẢO TOÁN 1

Câu I. Giải phương trình vi phân:

$$1/\ y'-4y=\left(8x^3-12x^2+10x-3\right)e^{4x}$$

$$2/\ y''+8y'+15y=-32e^{-x}$$

Câu II. 1/ Khảo sát sự hội tụ của chuỗi số: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n(n+3)}.\left(\frac{5}{2}\right)^n$

2/ Tìm miền hội tục của chuỗi lũy thừa: $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n.\frac{x^n}{(2n+1)(3n+4)}$

Câu III: 1/ Khảo sát cực trị và tìm tiệm cận của hàm số $y=\frac{x^4-10}{x^2-3}$

2/ Cho $u(x,y)=\ln\left(3x^2-4xy+2y^2\right)$. Tính giá trị biểu thức $A=3\frac{\partial u}{\partial x}-2\frac{\partial u}{\partial y}$ tại điểm x=2, y=1.

Tính vi phân du tại điểm x =1, y= -1

Câu IV: 1/ Tính tích phân phân $I=\iint_D \frac{dxdy}{\left(x^2+y^2\right).\left(\sqrt{x^2+y^2}+1\right)}$ với D là hình vành khăn

$1\le x^2+y^2\le 9$

2/ Cho $P(x,y)=x^2y^3, Q(x,y)=x\left(1+y^2\right)$. Tìm hàm $h(x,y)=x^{\alpha}.y^{\beta};\ \alpha,\beta$ là hằng số sao cho biểu thức $h(x,y)P(x,y)dx+h(x,y)Q(x,y)dy$ là vi phân toàn phần của hàm u(x,y) nào đó. Với h(x,y) vừa tìm, tính tích phân $J=\int_L\left[h(x,y)P(x,y)dx+h(x,y)Q(x,y)dy\right]$, trong đó L là phần đường cong: $y=\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$ từ điểm $A\left(1;\frac{\pi}{2}\right)$ đến B(0;1).

Câu V: 1/ Khảo sát cực trị hàm $z=y^3-12x^2y-48x$

2/ Chứng minh tích phân suy rộng $K=\int_1^{+\infty}\frac{\left(x^2+1\right)\left(x^2-3x-1\right)}{x^6+4x^3-1}dx$ hội tụ. Tính K

ĐÁP ÁN THAM KHẢO MÔN TOÁN

Câu I. 1/ Nghiệm tổng quát $y = e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)\bullet e^{-\int p(x)dx}dx + C\right)$

Với $p(x) = -4; q(x) = \left(8x^3 - 12x^2 + 10x - 3\right)e^{4x}$

$$\begin{aligned}\Rightarrow y &= e^{\int 4dx}\left(\int\left(8x^3 - 12x^2 + 10x - 3\right)e^{4x}\bullet e^{-\int 4dx}dx + C\right)\\ &= e^{4x}\left(\int\left(8x^3 - 12x^2 + 10x - 3\right)e^{4x}\cdot e^{-4x}dx + C\right)\\ &= e^{4x}\left(\int\left(8x^3 - 12x^2 + 10x - 3\right)dx + C\right)\\ &= e^{4x}\left(2x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 3x + C\right)\end{aligned}$$

Câu I. 2/ Phương trình đặc trưng: $k^2 + 8k + 15 = 0 \Leftrightarrow (k+3)(k+5) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k_1 = -3 \\ k_2 = -5 \end{array}\right.$

Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất: $y_0 = C_1e^{-3x} + C_2e^{-5x}$

Tìm nghiệm riêng:

Ta có f(x) có dạng: $f(x) = e^{\alpha(x)}\cdot p_n(x);\ \alpha \in \mathbb{R}; p_n(x)$:là một đa thức bậc n.

ở đây $\alpha = -1; p(x) = -32;\ \alpha = -1$ không là ngiệm của phương trình đặc trưng và p(x) là đa thức bậc 0

Tìm nghiệm riêng dạng $y_r = e^{-x}C$; C là hằng số

$y'_r = -Ce^{-x}; y''_r = Ce^{-x}$.

Thay vào phương trình không thuần nhất: $y'' + 8y' + 15y = -32e^{-x}$

Ta có

$$\begin{aligned}&Ce^{-x} - 8Ce^{-x} + 15Ce^{-x} = -32e^{-x}\\ &\Leftrightarrow 8Ce^{-x} = -32e^{-x}\\ &\Rightarrow C = -4\end{aligned}$$

Nghiệm tổng quát của phương trình ban đầu là: $y_{tq} = y_o + y_r = C_1e^{-3x} + C_2e^{-5x} + -4e^{-x}$

Câu II. 1/ Áp dụng tiêu chuẩn Cauchy: $C_n = \sqrt[n]{u_n} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{(n+3)}\frac{5}{2}$

$$\lim_{n\to+\infty} C_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{(n+3)}\cdot\frac{5}{2} = \lim_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n\left(\frac{-n-3}{n}\right)}\cdot\frac{5}{2} = e^{-1}\cdot\frac{5}{2} = \frac{5}{2e} < 1$$

Vậy chuỗi hội tụ

Câu II. 2/ $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n.\frac{x^n}{(2n+1)(3n+4)}$ là chuỗi lũy thừa có dạng $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$

Với $a_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{(2n+1)(3n+4)}$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{(2n+3)(3n+7)} : \frac{1}{(2n+1)(3n+4)}\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{(2n+1)(3n+4)}{(2n+3)(3n+7)} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n^2\left(2+\frac{1}{n}\right)\left(3+\frac{4}{n}\right)}{n^2\left(2+\frac{3}{n}\right)\left(3+\frac{7}{n}\right)} = \frac{2.3}{2.3} = 1 = \rho$$

Bán kính hội tụ là $r = \frac{1}{\rho} = 1$

Khoảng hội tụ là (-1; 1)

* Xét x= -1 chuỗi ban đầu trở thành: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)(3n+4)}$

Ta có: $\frac{1}{(2n+1)(3n+4)} = \frac{1}{n^2\left(2+\frac{1}{n}\right)\left(3+\frac{4}{n}\right)} \sim \frac{1}{6n^2}$

Mà chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ hội tụ $\Rightarrow$ chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{6n^2}$ hội tụ $\Rightarrow$ chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)(3n+4)}$ hội tụ

* Xét x= 1 chuỗi ban đầu trở thành: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)(3n+4)}$, đây là chuỗi Leibnitz. Vậy chuỗi hội tụ theo tiêu chuẩn Leibnitz.

Kết luận: Miền hội tụ của chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n.\frac{x^n}{(2n+1)(3n+4)}$ là $[-1;1]$

Câu III: 1/ Tập xác định là: $\mathbb{R}\setminus\left\{\pm\sqrt{3}\right\}$

$$y = \frac{x^4-10}{x^2-3} = x^2+3-\frac{1}{x^2-3}$$

$$\Rightarrow y' = 2x + \frac{2x}{\left(x^2-3\right)^2} = 2x\left(1+\frac{1}{\left(x^2-3\right)^2}\right)$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
y'	-	||	-	0	+	||	+	
y	$\searrow$	||	$\searrow$	CT	$\nearrow$	||	$\nearrow$	

Vậy hàm số đạt Cực tiểu tại x =0 và giá trị cực tiểu là $y_{CT} = y(0) = \frac{10}{3}$

* Tìm tiệm cận đứng: $\lim\limits_{x\to\pm\sqrt{3}} y = \lim\limits_{x\to\pm\sqrt{3}} \frac{x^4 - 10}{x^2 - 3} = \infty$

Vậy $x = \sqrt{3}; x = -\sqrt{3}$ là hai tiệm cận đứng của hàm số.

* Tìm tiệm cận xiên: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{y}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left[x + \frac{3}{x} - \frac{1}{x\left(x^2-3\right)}\right] = \pm\infty$

Vậy hàm số không có tiệm cận xiên.

Câu III: 2/ Ta có: $u(x,y) = \ln\left(3x^2 - 4xy + 2y^2\right)$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{6x - 4y}{3x^2 - 4xy + 2y^2};$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-4x + 4y}{3x^2 - 4xy + 2y^2}$$

Vậy

$$\frac{\partial u}{\partial x}(2,1) = \frac{12 - 4}{3.4 - 4.2.1 + 2} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}(2,1) = \frac{-4.2 + 4.1}{3.4 - 4.2.1 + 2} = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$$

Do đó $A = 3\frac{\partial u}{\partial x}(2,1) - 2\frac{\partial u}{\partial y}(2,1) = 3.\frac{4}{3} - 2.\frac{-2}{3} = \frac{16}{3}$

Vi phân $du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(1,-1) = \frac{6.1 + 4.1}{3.1 - 4.1.(-1) + 2.1} = \frac{10}{9}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}(1,-1) = \frac{-4.1 + 4.(-1)}{3.1 - 4.1.(-1) + 2.1} = -\frac{8}{9}$$

Vậy $du(1,-1) = \frac{\partial u}{\partial x}(1,-1)dx + \frac{\partial u}{\partial y}(1,-1)dy = \frac{10}{9}dx - \frac{8}{9}dy$

Câu IV: 1/ Đổi biến sang tọa độ cực: $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 1 \le r \le 3 \end{cases}$

Khi đó:

$$I=\iint_D \frac{dxdy}{\left(x^2+y^2\right).\left(\sqrt{x^2+y^2}+1\right)}=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_1^3 f\left(r\cos\varphi;r\sin\varphi\right)rdr$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_1^3\frac{rdr}{r^2\left(r+1\right)}=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_1^3\frac{dr}{r\left(r+1\right)}$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\left(\int_1^3\frac{dr}{r}-\int_1^3\frac{dr}{\left(r+1\right)}\right)$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(\ln\left(r\right)\Big|_1^3-\ln\left(r+1\right)\Big|_1^3\right)d\varphi$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(\ln 3+\ln 2-\ln 4\right)d\varphi=\int_0^{2\pi}\left(\ln\frac{3}{2}\right)d\varphi=\ln\frac{3}{2}\cdot\varphi\Big|_0^{2\pi}=2\pi.\ln\frac{3}{2}$$

Câu IV: 2/ Để $h(x,y)P(x,y)dx+h(x,y)Q(x,y)dy$ là vi phân toàn phần, điều kiện cần và đủ là:

$$\left(h(x,y)P(x,y)\right)_y^{'}=\left(h(x,y)Q(x,y)\right)_x^{'}$$

$$\Leftrightarrow h_y^{'}.P(x,y)+h.\left(P(x,y)\right)_y^{'}=h_x^{'}.Q(x,y)+h.\left(Q(x,y)\right)_x^{'}$$

$$\Leftrightarrow \beta x^{\alpha}y^{\beta-1}.x^2y^3+x^{\alpha}y^{\beta}.3x^2y^2=\alpha x^{\alpha-1}y^{\beta}.x(1+y^2)+x^{\alpha}y^{\beta}.(1+y^2)$$

$$\Leftrightarrow \beta x^{\alpha+2}y^{\beta+2}+3x^{\alpha+2}y^{\beta+2}=\left(\alpha x^{\alpha}y^{\beta}+x^{\alpha}y^{\beta}\right).(1+y^2)$$

$$\Leftrightarrow x^{\alpha+2}y^{\beta+2}\left(\beta+3\right)=x^{\alpha}y^{\beta}\left(\alpha+1\right).(1+y^2)$$

$$\Leftrightarrow x^2y^2\left(\beta+3\right)=\left(\alpha+1\right).(1+y^2),\ \ \forall x,y$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\alpha+1=0\\ \beta+3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\beta=-3\\ \alpha=-1\end{cases}$$

Vậy $h(x,y)=x^{-1}.y^{-3}$

Ta có:

$$J=\int_L\left[h(x,y)P(x,y)dx+h(x,y)Q(x,y)dy\right]=\int_L x^{-1}y^{-3}.x^2y^3dx+x^{-1}y^{-3}x(1+y^2)dy$$

$$=\int_L xdx+y^{-3}\left(1+y^2\right)dy=\int_L\left[P(x,y)dx+Q(x,y)dy\right]$$

Với $\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=0$ nên tích phân không phụ thuộc đường đi.

Ta chọn đường tích phân là ACB với $C\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$

AC là đoạn nằm ngang ; CB là đoạn thẳng đứng.

Vậy:

$$I=\int\limits_{AC} xdx+y^{-3}\left(1+y^2\right)dy+\int\limits_{CB} xdx+y^{-3}\left(1+y^2\right)dy$$
$$=\int_1^0 xdx+\int_{\frac{\pi}{2}}^1 y^{-3}\left(1+y^2\right)dy=\int_1^0 xdx+\int_{\frac{\pi}{2}}^1 \frac{dy}{y^3}+\int_{\frac{\pi}{2}}^1 \frac{dy}{y}$$
$$=\frac{x^2}{2}\Big|_1^0-\frac{1}{2}\frac{1}{y^2}\Big|_{\pi/2}^1+\ln|y|\Big|_{\pi/2}^1$$
$$=-\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi^2}-\frac{1}{2}-\ln\frac{\pi}{2}$$

Câu V. 1/ Ta có: $z_x^{'}$ và $z_y^{'}$ tồn tại $\forall x,y\in\mathbb{R}$ nên z đạt cực đại tại Mo thì tại đó $z_x^{'}$ và $z_y^{'}$ phải bằng 0.

Điểm dừng: $\begin{cases} z_x^{'}=-24xy-48=0 \\ z_y^{'}=3y^2-12x^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy=-2 \\ y^2=4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases} \end{array}\right.$

Có 3 điểm dừng: $P_1\left(1,-2\right);\ P_2(-1,2)$

Đạo hàm riêng cấp 2: $\begin{cases} z_{xx}^{"}=-24y \\ z_{xy}^{"}=-24x \\ z_{yy}^{"}=6y \end{cases}$

Xét từng điểm dừng:

1) $P_1(1,-2): A=z_{xx}^{"}(P_1)=48;\ B=z_{xy}^{"}(P_1)=-24;\ C=z_{yy}^{"}(P_1)=-12$

$\Delta=B^2-AC=\left(-24\right)^2-48.(-12)=1152>0$: Không có cực trị tại $P_1(1,-2)$

2) $P_2(-1,2): A=z_{xx}^{"}(P_2)=-48;\ B=z_{xy}^{"}(P_2)=24;\ C=z_{yy}^{"}(P_2)=12$

$\Delta=B^2-AC=\left(24\right)^2-(-48).12=1152>0$: Không có cực trị tại $P_2(-1,2)$

Kết luận: Hàm số không có cực trị tại $P_1\left(1,-2\right);\ P_2(-1,2)$

Câu V: 2/ Chứng minh tích phân suy rộng $K=\int_1^{+\infty}\frac{\left(x^2+1\right)\left(x^2-3x-1\right)}{x^6+4x^3-1}dx$ hội tụ.

Ta có $\dfrac{\left(x^2+1\right)\left(x^2-3x-1\right)}{x^6+4x^3-1}=\dfrac{x^4\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)\left(1-\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)}{x^6\left(1+\dfrac{4}{x^3}-\dfrac{1}{x^6}\right)}\sim\dfrac{1}{x^2}$ khi $x\to+\infty$

Mà: $\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x^2}dx=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\dfrac{1}{x^2}dx=\lim_{b\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{x}\Big|_1^b\right)=1$. Vậy tích phân K hội tụ

* Tính K

Phân tích mẫu thành $\left(x^6+4x^3-1\right)=\left(x^2+x-1\right)\left(x^4-x^3+2x^2+x+1\right)$

Từ đây viết lại tích phân $K=\int_1^{+\infty}\dfrac{\left(x^2+1\right)\left(x^2-3x-1\right)}{x^6+4x^3-1}dx=\int_1^{+\infty}\dfrac{\left(x^2+1\right)\left(x^2-3x-1\right)}{\left(x^2+x-1\right)\left(x^4-x^3+2x^2+x+1\right)}dx$

Dùng PP đồng nhất thức, biểu thức dưới dấu tích phân phân tích được thành

$$K=\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\frac{4x^3-3x^2+4x+1}{x^4-x^3+2x^2+x+1}-\frac{2}{3}\cdot\frac{2x+1}{x^2+x-1}\right)dx=\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\frac{4x^3-3x^2+4x+1}{x^4-x^3+2x^2+x+1}\right)dx-\int_1^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{2x+1}{x^2+x-1}\right)dx$$

$$=\lim_{h\to+\infty}\frac{1}{3}\ln\left(x^4-x^3+2x^2+x+1\right)\Big|_1^h-\lim_{h\to+\infty}\frac{2}{3}\ln\left(x^2+x-1\right)\Big|_1^h$$

$$=-\frac{1}{3}\ln(4)+\frac{2}{3}\ln(1)=-\frac{2}{3}\ln(2)$$

CHÚC TẤT CẢ CÁC BẠN ĐẬU CAO HỌC

***

Lưu ý:

Trong quá trình giải đề rất có thể phát sinh sai sót. Nếu có chúng tôi hết sức xin lỗi và rất mong các bạn phản hồi về hộp mail

onthicaohoc_toankinhte@yahoo.com

Rất mong sẽ luôn là nơi khởi đầu cho mọi ước mơ Đậu cao học và học Cao học của bạn. Xem thêm tại **www.onthicaohoc.com** hoặc **diendan.onthicaohoc.com**.

Chúng tôi chiêu sinh các khóa ôn thi Cao học vào Đại học Bách Khoa và các trường Kỹ thuật, Kiến trúc, Khai Giảng vào tháng 12 hàng năm với số lượng học viên mỗi lớp chỉ khoảng 20 người.

www.onthicaohoc.com

“First step to get Master”

diendan.onthicaohoc.com