TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA TP HỒ CHÍ MINH
ĐỀ THI TUYỂN SINH CAO HỌC NĂM 2011 (Đợt 2)
MÔN THI TOÁN CAO CẤP 1
Thời gian làm bài 180 phút.

Câu I. Giải các phương trình vi phân

1) $y'-3y'=4e^{3x}\cos 5x$

2) $y''-5y'+6y=22\cos 2x+6\sin 2x$.

Câu II.

1) Khảo sát sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+3}{n+1}\right)^{n(n-3)}.\left(\frac{1}{8}\right)^{n}$

2) Tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}.x^{n}}{2n-1}$.

Câu III.

1) Khảo sát cực trị và tiệm cận của hàm số $y=\frac{4x-5}{x^2-1}$.

2) Cho $u(x,y)=\frac{x+2y}{x-3y}$. Tính giá trị các biểu thức $A=3\frac{\partial u}{\partial x}+2\frac{\partial u}{\partial y}$ và $B=2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ tại điểm $x=4;y=1$.

Câu IV.

1) Tính $I=\iint_D\frac{(x^2+y^2+1)dxdy}{(x^2+y^2)}$ với D là hình vành khăn $1\le x^2+y^2\le 16$.

2) Cho $P(x,y)=xe^{-\frac{x}{y}}+1, Q(x,y)=1-\frac{x}{y}$. Tìm hàm $g\left(\frac{x}{y}\right)$ thỏa $g(0)=1$ và biểu thức $g\left(\frac{x}{y}\right)P(x,y)dx+g\left(\frac{x}{y}\right)Q(x,y)dy$ là vi phân toàn phần của hàm $u(x,y)$ nào đó. Với g vừa tìm , tính $J=\int_L\left[g\left(\frac{x}{y}\right)P(x,y)dx+g\left(\frac{x}{y}\right)Q(x,y)dy\right]$, với L là phần đường cong $y=\cosh x-\frac{1}{4}$ từ điểm $A\left(0;\frac{3}{4}\right)$ đến $B(\ln 2;1)$.

Câu V.

1) Khảo sát cực trị hàm $z=x^3-8y^3+6xy$.

2) Chứng minh tích phân suy rộng $K=\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x.\sqrt[3]{x\left(1+\sqrt{x}\right)}}$ hội tụ. Tính K.

\

===*Hết*===

BÀI GIẢI.

Câu I.

1) $y' - 3y' = 4e^{3x}\cos 5x$

Đây là phương trình vi phân tuyến tính với $p(x) = -3$; $q(x) = 4e^{3x}\cos 5x$

$u(x) = e^{-\int p(x)dx} = e^{\int 3dx} = e^{3x}$

$v(x,C) = \int \frac{1}{u(x)} q(x)dx = \int 4\cos 5x dx = \frac{4}{5}\sin 5x + C$

Suy ra nghiệm tổng quát của phương trình là $y = u(x)v(x,C) = e^{3x}\left(\frac{4}{5}\sin 5x + C\right)$.

2) $y'' - 5y' + 6y = 22\cos 2x + 6\sin 2x$

Phương trình đặc trưng $k^2 - 5k + 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = 2 \\ k = 3 \end{array}\right.$

Suy ra nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng là $\overline{y} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$.

Xét phương trình $y'' - 5y' + 6y = 22\cos 2x + 6\sin 2x$ $\left(P_n(x) = 22 \text{ ; } Q_m(x) = 6 \text{ ; } \beta = 2\right)$

Do $\pm\beta i = \pm 2i$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng, nên một nghiệm của phương trình có dạng

$Y = A\cos 2x + B\sin 2x$

$\Rightarrow Y' = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x$

$\Rightarrow Y'' = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x$

Thay vào phương trình ta được

$(2A - 10B)\cos 2x + (10A + 2B)\sin 2x = 22\cos 2x + 6\sin 2x$

Đồng nhất các hệ số ta có $\begin{cases} 2A - 10B = 22 \\ 10A + 2B = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -2 \end{cases} \Rightarrow Y = \cos 2x - 2\sin 2x$

Suy ra nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = \overline{y} + Y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + \cos 2x - 2\sin 2x$$

Câu II.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+3}{n+1}\right)^{n(n-3)} \left(\frac{1}{8}\right)^n$.

Xét $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+3}{n+1}\right)^{n-3} . \frac{1}{8} = \frac{1}{8} e^{\lim_{n\to\infty}(n-3)\left(\frac{n+3}{n+1} - 1\right)} = \frac{1}{8} e^{\lim_{n\to\infty}\frac{2n-6}{n+1}} = \frac{e^2}{8} < 1$

Suy ra chuỗi số trên hội tụ theo tiêu chuẩn Cauchy.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}.x^n}{2n-1}$

$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{2n+1} . \frac{2n-1}{2^{n-1}} = 2 \Rightarrow R = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{2}$

Với $x = -\frac{1}{2}$, chuỗi lũy thừa trở thành $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{4n-2}$, là chuỗi hội tụ theo Leibnitz.

Với $x = \frac{1}{2}$, chuỗi lũy thừa trở thành $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n-2}$, là chuỗi phân kỳ.

Vậy miền hội tụ của chuỗi lũy thừa đã cho là $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

Câu III.

1) Khảo sát cực trị và tiệm cận của hàm số $y=\frac{4x-5}{x^2-1}$.

- Tiệm cận.

$\lim\limits_{x\to\pm1} y=\infty \Rightarrow x=\pm1$ là phương trình của hai tiệm cận đứng.

$\lim\limits_{x\to\infty} y=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x-5}{x^2-1}=0 \Rightarrow y=0$ là phương trình của tiệm cận ngang.

- Khảo sát cực trị

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{\pm1\}$

$$y'=\frac{-4x^2+10x-4}{\left(x^2-1\right)^2}$$

$$y'=0 \Leftrightarrow -4x^2+10x-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{2} \\ x=2 \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên.

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		1		2		$+\infty$
y'		$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
y	0	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$\Vert$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Từ bảng biến thiên ta suy ra hàm số

Đạt cực tiểu tại $x=\frac{1}{2}$ với $y_{\min}=y\left(\frac{1}{2}\right)=4$

Đạt cực đại tại $x=2$ với $y_{\max}=y(2)=1$.

2)

Ta có $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{-5y}{(x-3y)^2}$; $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{5x}{(x-3y)^2}$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{10y}{(x-3y)^3}\ ;\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{30x}{(x-3y)^3}$$

Suy ra $A(4;1)=3\frac{\partial u}{\partial x}(4;1)+2\frac{\partial u}{\partial y}(4;1)=3.(-5)+2.20=25$

$$B(4;1)=2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(4;1)+3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(4;1)=2.10+3.120=380.$$

Câu IV.

1) Tính $I=\iint\limits_D \frac{\left(x^2+y^2+1\right)dxdy}{\left(x^2+y^2\right)}$

Chuyển sang hệ tọa độ cực bằng cách đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$

Suy ra $I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^4 \frac{(r^2+1)}{r^2}.rdr = 2\pi\int_1^4 \left(r + \frac{1}{r}\right)dr = 2\pi\left(\frac{r^2}{2} + \ln r\right)\Bigg|_1^4 = 2\pi\left(\frac{15}{2} + 2\ln 2\right)$

2) Đặt $u(x,y) = \frac{x}{y}$

$M(x,y) = g\left(\frac{x}{y}\right)P(x,y) = g(u)\left(xe^{-u}+1\right)$

$N(x,y) = g\left(\frac{x}{y}\right)N(x,y) = g(u)(1-u)$

$M(x,y)dx + N(x,ydy)$ là vi phân toàn phần của hàm $u(x,y)$ nào đó

$\Leftrightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ (*)

Ta có

$\frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}g'(u)\left(xe^{-u}+1\right) + g(u).\frac{x^2}{y^2}e^{-u}$

$= -\frac{x^2}{y^2}e^{-u}g'(u) - \frac{x}{y^2}g'(u) + \frac{x^2}{y^2}e^{-u}g(u)$

$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{1}{y}g'(u)(1-u) + g(u)\left(-\frac{1}{y}\right)$

$= \frac{1}{y}g'(u) - \frac{x}{y^2}g'(u) - \frac{1}{y}g(u)$

Khi đó $(*) \Leftrightarrow g'(u) = g(u) \Leftrightarrow g(u) = e^u + C$

Mà $g(0) = 1 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow g(u) = e^u$

$\Rightarrow g\left(\frac{x}{y}\right) = e^{\frac{x}{y}}$

Với g vừa tìm thì $M(x,y) = e^{\frac{x}{y}}\left(xe^{-\frac{x}{y}}+1\right)$; $N(x,y) = e^{\frac{x}{y}}\left(1-\frac{x}{y}\right)$ và tích phân J không phụ thuộc vào đường lấy tích phân.

Chọn đường nối A, B là đường gấp khúc ACB với $C(0;1)$.

Ta có $AC: x = 0\left(y: \frac{3}{4} \to 1\right)$, $CB: y = 1\left(x: 0 \to \ln 2\right)$

Khi đó $J = \int_{AC} Mdx + Ndy + \iint_{CB} Mdx + Ndy = \int_{\frac{3}{4}}^1 dy + \int_0^{\ln 2} e^x\left(xe^{-x}+1\right)dx$

$= \frac{1}{4} + \int_0^{\ln 2}\left(x + e^x\right)dx = \frac{1}{4} + \left(\frac{x^2}{2} + e^x\right)\Bigg|_0^{\ln 2} = \frac{5}{4} + \frac{\ln^2 2}{2}$

Câu V.

1) $z = x^3 - 8y^3 + 6xy$

Tọa độ điểm dừng thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} z'_x = 3x^2 + 6y = 0 \\ z'_y = -24y^2 + 6x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2y = 0 & (1) \\ -4y^2 + x = 0 & (2) \end{cases}$$

$(2) \Rightarrow x = 4y^2$, thay vào (1) ta có

$$16y^4 + 2y = 0 \Leftrightarrow 2y\left(8y^3 + 1\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 0 \Rightarrow x = 0 \\ y = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow x = 1 \end{array}\right.$$

Suy ra hàm số có 2 điểm dừng $M_1(0;0)$ và $M_2\left(1;-\dfrac{1}{2}\right)$.

$A = z''_{xx} = 6x$; $B = z''_{xy} = 6$; $C = z''_{yy} = -48y$; $\Delta = B^2 - AC = 36 + 288xy$

Tại $M_1(0;0)$, ta có $\Delta = 36 > 0 \Rightarrow M_1(0;0)$ không phải cực trị.

Tại $M_2\left(1;-\dfrac{1}{2}\right)$ ta có $\begin{cases} \Delta = -108 < 0 \\ A = 6 > 0 \end{cases} \Rightarrow M_2\left(1;-\dfrac{1}{2}\right)$ là cực tiểu với

$z_{\min} = z\left(1;-\dfrac{1}{2}\right) = -1$.

2) $K = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x.\sqrt[3]{x\left(1+\sqrt{x}\right)}}$.

Ta có $\dfrac{1}{x\sqrt[3]{x\left(1+\sqrt{x}\right)}} = \dfrac{1}{x\sqrt{x}\sqrt[3]{\dfrac{1}{\sqrt{x}}+1}} \sim \dfrac{1}{x.x^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$ khi $x \to +\infty$

Mà $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}}$ hội tụ, nên tích phân K cũng hội tụ.

- Tính $K = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x.\sqrt[3]{x\left(1+\sqrt{x}\right)}} = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x.\sqrt{x}.\sqrt[3]{\dfrac{1}{\sqrt{x}}+1}}$

Đặt $t = \sqrt[3]{\dfrac{1}{\sqrt{x}}+1} \Rightarrow t^3 - 1 = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow 3t^2dt = -\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}dx$

Với $x = 1 \Rightarrow t = \sqrt[3]{2}$; $x \to +\infty \Rightarrow t \to 1$

$\Rightarrow K = 6\displaystyle\int_1^{\sqrt[3]{2}} tdt = 3t^2\Big|_1^{\sqrt[3]{2}} = 3\left(\sqrt[3]{4} - 1\right)$