Đề 1:

Câu 1: Tìm khai triển Taylor của $f(x,y)=\dfrac{2x+y}{x+y}$ **tại điểm (2,1) đến cấp 3.**

X=x-2, Y=y-1

f(X,Y)= $\frac{2X+Y+5}{X+Y+3} = 1+\frac{X+2}{3\left(1+\frac{X}{3}+\frac{Y}{3}\right)} = 1+\frac{X+2}{3}$ [1-(X/3 +Y/3)+ (X/3 +Y/3)² -(X/3 +Y/3)³ + o(ρ³)]

$=\frac{5}{3}+\frac{1}{9}X-\frac{2}{9}Y-\frac{1}{27}X^2+\frac{2}{27}Y^2+\frac{1}{27}XY+\frac{1}{81}X^3-\frac{2}{81}Y^3-\frac{1}{27}XY^2+o(\rho^3)$

$=\frac{5}{3}+\frac{1}{9}(x-2)-\frac{2}{9}(y-1)-\frac{1}{27}(x-2)^2+\frac{2}{27}(y-1)^2+\frac{1}{27}(x-2)(y-1)+\frac{1}{81}(x-2)^3-\frac{2}{81}(y-1)^3-\frac{1}{27}(x-2)(y-1)^2+o(\rho^3)$

Câu 2:tìm cực trị của hàm $z=x^2+y^2+xy-12x-3y$

Điểm dừng: $\begin{cases} z'_x = 2x+y-12=0 \\ z'_y = 2y+x-3=0 \end{cases}$ <=> x=7, y=-2

A= z''_{xx}=2, B=z''_{xy}=1, C=z''_{yy}=2

$\Delta=AC-B^2=3>0$, A=2>0 =>z(x,y) đạt cực tiểu tại (7,-2)

Câu 3: Khảo sát sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{v_n}$ **với** $u_n=\left(2+\frac{1}{n^2}\right)^n$ **và** $v_n=\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n^2}$

$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{u_n}{v_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+1/n^2}{(1+\frac{2}{n})^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+1/n^2}{[(1+\frac{2}{n})^{n/2}]^2}=2/e^2<1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{v_n}$ hội tụ theo tiêu chuẩn Cauchy

Câu 4. Tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{4^n(3n-1)}$

$\rho=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{4^n(3n-1)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4\sqrt[n]{3n-1}}=1/4$

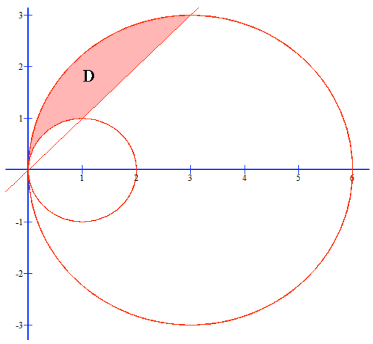
=> $-4<x^2<4 \Rightarrow -2<x<2$

x=±2 : $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(\pm 2)^{2n}}{4^n(3n-1)}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(3n-1)}$ hội tụ theo tc Leibnitz

Miền hội tụ: [-2;2]

Câu 5: Tính tích phân kép $I=\iint\limits_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$**, trong đó D là miền phẳng giới hạn bởi**

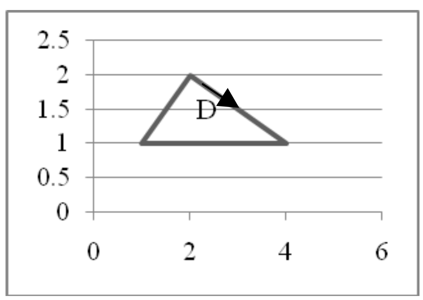
$$2x \le x^2+y^2 \le 6x, y \ge x$$



x=rcosφ, y=rsinφ

$$I=\iint\limits_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy=\int_{\pi/4}^{\pi/2} d\varphi \int_{2\cos\varphi}^{6\cos\varphi} \frac{1}{r} r dr=\int_{\pi/4}^{\pi/2} 4\cos\varphi\, d\varphi=4-2\sqrt{2}$$

Câu 6: Tính tích phân $I=\int\limits_C \left(e^{x^2}+xy\right)dx+\left(y\cos y+x^2\right)dy$ **với C là chu vi tam giác ABC, A(1,1), B(2,2), C(4,1), chiều kim đồng hồ.**



Các đk công thức Green thỏa

Chiều C ngược chiều quy ước

$$I=\int\limits_C \left(e^{x^2}+xy\right)dx+\left(y\cos y+x^2\right)dy=-\iint_D (2x-x)dxdy=-\int_1^2 dy\int_y^{6-2y} xdx=-7/2$$

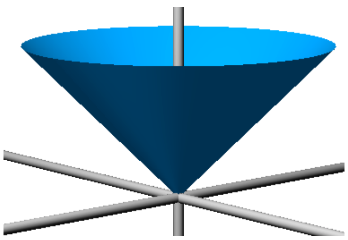
Câu 7: Tính $I=\oint\limits_C ydx+(z+x)dy+xdz$**, với C là giao của** $x^2+y^2=1$ **và** $z=y+1$**, chiều kim đồng hồ theo hướng dương trục 0z.**

Công thức Stokes

$I = \iint_S -1dydz - dxdz + 0dxdy = \iint_S (-0.1 - 1.1 - 0.(-1))dS = -\iint_S dS$

$= -\iint_D \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dxdy = -\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \sqrt{2} r dr = -\pi\sqrt{2}$

Câu 8: Tính tích phân mặt loại một $I = \iint\limits_S (x^2 + y^2) dS$**, trong đó S là phần mặt nón** $z^2 = x^2 + y^2$**, nằm giữa hai mặt phẳng** $z = 0, z = 1$**.**



D=pr_{xOy}S là hình chiếu của phần mặt nón xuống xOy, D={x^2+y^2=1}

$I = \iint\limits_S (x^2 + y^2) dS = \iint_D (x^2+y^2)\sqrt{2}dxdy = \sqrt{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r^2 r dr = \pi\sqrt{2}/2$

Đề 2:

Câu 1. Cho hàm $f(x, y) = xe^{xy^2}$ **. Tính** $d^2 f(2,1)$**.**

f'$_x$= e^{xy^2}+x$y^2$$e^{xy^2}$

f''$_{xx}$= 2$y^2$$e^{xy^2}$ + x$y^4$$e^{xy^2}$=> f''$_{xx}$(2,1)= 4$e^2$

f''$_{xy}$= 4xye^{xy^2}+ 2$x^2$$y^3$$e^{xy^2}$ => f''$_{xy}$(2,1)=16e^2

f'$_y$=2x^2ye^{xy^2}

f''$_{yy}$= 2$x^2$$e^{xy^2}$+4$x^3$$y^2$$e^{xy^2}$=> f''$_{yy}$(2,1)=40$e^2$

⇨ d^2f(2,1)=4e^2dx^2 + 32e^2dxdy + 40e^2dy^2

Câu 2. Tìm gtln, gtnn của $f(x, y) = (y^2 - x^2)e^{1-x^2+y^2}$ **trên miền** $D = \{(x, y) |\ x^2 + y^2 \le 4\}$

$$\begin{cases} f'x = -2xe^{1-x^2-y^2} + (y^2 - x^2)(-2x)e^{1-x^2-y^2} = 0 \\ f'y = 2ye^{1-x^2-y^2} + (y^2 - x^2)(2y)e^{1-x^2-y^2} = 0 \end{cases}$$ ⇔ x=0,y=0 v x=1,y=0 v x=-1,y=0

Xét: $L(x,y,\lambda) = (y^2 - x^2)e^{1-x^2-y^2} + \lambda(x^2+y^2-4)$

$$\begin{cases} L'x = -2xe^{1-x^2-y^2} + (y^2 - x^2)(-2x)e^{1-x^2-y^2} + 2\lambda x = 0 \\ L'y = 2ye^{1-x^2-y^2} + (y^2 - x^2)(2y)e^{1-x^2-y^2} + 2\lambda y = 0 \\ L'\lambda = x^2 + y^2 - 4 = 0 \end{cases}$$ ⇔ $x=0, y=\pm 2, \lambda=-5e^5$ v $x=\pm 2, y=0, \lambda=-3e^{-3}$

f(0,0)=0 f(1,0)=-1 f(-1,0)=1

$f(0,2) = f(0,-2) = 4e^5$ $f(2,0) = f(-2,0) = -4e^{-3}$

$\underset{x^2+y^2\leq 4}{\text{Max}} f = 4e^5$

$\underset{x^2+y^2\leq 4}{\text{Min}} f = -1$

Câu 3. Khảo sát sự hội tụ của các chuỗi số: a/ $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n+2}\right)^{n(n+2)}$ **b/** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...(2n)}.3^{n+1}$

a) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n-1}{n+2}\right)^{n(n+2)}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+2}\right)^{(n+2)} = \lim_{n\to\infty}[(1-\frac{3}{n+2})^{\frac{n+2}{3}}]^3 = 1/e^3 < 1$

⇨ $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n+2}\right)^{n(n+2)}$ hội tụ theo tc Cauchy

b) $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n+2}3 = 6 > 1$

⇨ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...(2n)}.3^{n+1}$ phân kỳ theo tc D'alembert

Câu 4. Tìm bán kính hội tụ của chuỗi luỹ thừa $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-3)^n}{2n+\ln^3 n}$

$\rho = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{2n+ln^3n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{2n}} = 1$

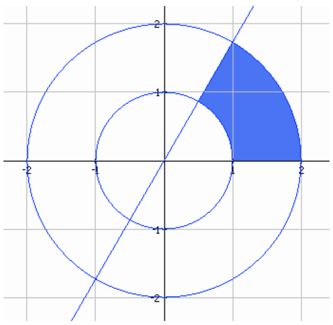
=> -1<x-3<1=> 2<x<4

x=2: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+ln^3n}$ phân kỳ theo tc so sánh

x=4: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+ln^3n}$ hội tụ theo tc Leibnitz

Miền hội tụ (2,4]

Câu 5. Tính tích phân kép $I = \iint_D e^{-x^2-y^2}dxdy$**, trong đó D là miền phẳng giới hạn bởi** $1 \le x^2+y^2 \le 4, y \ge 0, y \le x\sqrt{3}$



$I = \iint_D e^{-x^2-y^2}dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int_1^2 e^{-r^2} r dr = -\frac{\pi}{6}(e^{-4}-e^{-1})$

Câu 6. Tính tích phân $I = \int_C (x+y)dx + (x-y)dy$**, với C là phần đường cong** $y = x + \sin x$**, từ** $A(0,0)$ **đến** $B(\pi,\pi)$**.**

$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ => tích phân ko phụ thuộc đường đi

$I = \int_C (x+y)dx + (x-y)dy = \int_0^{\pi} x dx \int_0^{\pi} (\pi - y)dy = \pi^2$

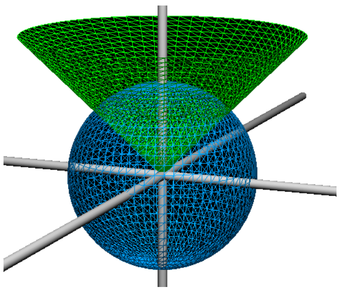
Câu 7. Tìm diện tích phần mặt cầu $z = \sqrt{R^2-x^2-y^2}$ **nằm trong hình trụ** $x^2+y^2 = Rx$**.**

Gọi S là phần mặt cầu $z = \sqrt{R^2-x^2-y^2}$ nằm trong hình trụ $x^2+y^2 = Rx$

D=pr_{xOy}S, D={$x^2+y^2 \le Rx$}

S=$\iint_D \sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}$dxdy = $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{R\cos\varphi} \frac{R}{\sqrt{R^2-r^2}}$rdr =2R($\pi - 2$)

Câu 8. Tính tích phân mặt loại hai $I = \iint\limits_S x^3 dydz + y^3 dxdz + z^3 dxdy$**, với S là biên vật thể giới hạn bởi** $x^2 + y^2 + z^2 \le 4, z \ge \sqrt{x^2 + y^2}$**, phía trong.**



Các đk công thức Gauss thỏa

$I = \iint\limits_S x^3 dydz + y^3 dxdz + z^3 dxdy = -3 \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dxdydz$

$= -3\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^2 r^2 r^2 \sin\theta dr = \frac{192}{5}(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1)$

Đề 3:

Câu 1. Cho hàm $f(x, y) = (2x + y)\ln\frac{x}{y}$**. Tính** $d^2 f(1,1)$

f'x= $2\ln\frac{x}{y}$ + (2x+y)/x

f''xx= 2/x –y/x^2 => f''xx(1,1)=1

f''xy= -2/y +1/x => f''xy(1,1)=-1

f'y= $\ln\frac{x}{y}$ - (2x+y)/y = $\ln\frac{x}{y}$ -2x/y -1

f''yy= -1/y +2x/y^2 => f''yy(1,1)=1

⇨ $d^2f(1,1)=dx^2-2dxdy+dy^2$

Câu 2. Tìm cực trị của hàm số z = xy + $\frac{3}{x} + \frac{9}{y}$ **với x > 0, y > 0**

Điểm dừng:

$$\begin{cases} z'_x = y - \frac{3}{x^2} = 0 \\ z'_y = x - \frac{9}{y^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x=1,\ y=3$$

$A=z''_{xx}=6/x^3$ $B=z''_{xy}=1$ $C=z''_{yy}=18/y^3$

$\Delta=AC-B^2=\frac{108}{x^3y^3}-1$

$x=1, y=3 \Rightarrow \Delta=3>0, A=6>0 \Rightarrow z(x,y)$ đạt cực tiểu tại $x=1, y=3$

Câu 3. Khảo sát sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 4\cdot 7\text{L}\ (3n-2)}{(2n-1)!!}$

Câu 4. Tìm bán kính hội tụ của chuỗi luỹ thừa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(x-4)^n}{n^n}$

$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\frac{n^n}{n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n=1/e$

$\Rightarrow -e<x-4<e \Rightarrow -e+4<x<e+4$

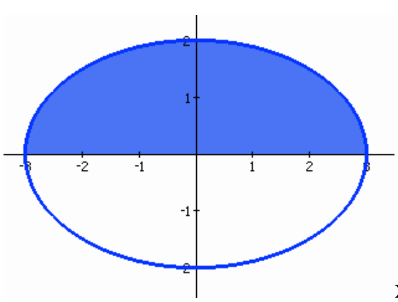
$x=-e+4$: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!(-e)^n}{n^n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n!e^n}{n^n}$ phân kỳ

$x=e+4$: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!e^n}{n^n}$ phân kỳ theo so sánh

Miền hội tụ $(-e+4,e+4)$

Câu 5. Tính tích phân kép $I=\iint_D (x+2)dxdy$**, trong đó D là miền phẳng giới hạn bởi**

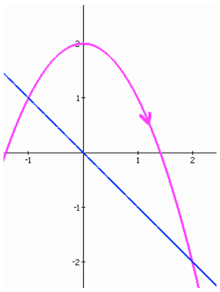
$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}\le 1,\ y\ge 0$$



$x=3r\cos\varphi,\ y=2r\sin\varphi$

$I=\iint\limits_D (x+2)dxdy = \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{1} (3r\cos\varphi + 2)rdr = 6\pi$

Câu 6. Tính tích phân $I=\oint\limits_C (2x+y)dx+(3x+2y)dy$**, trong đó C là biên của miền phẳng giới hạn bởi** $y=2-x^2, y=-x$**, chiều kim đồng hồ.**

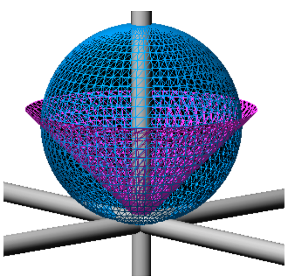


S là biên của miền phẳng giới hạn bởi $y=2-x^2, y=-x$

Các đk CT Green thỏa, C ngược chiều quy ước

$I=\oint\limits_C (2x+y)dx+(3x+2y)dy = -\iint_S (3-1)dxdy = -2\int_{-1}^{2} dx \int_{-x}^{2-x^2} dy = -9$

Câu 7. Tìm diện tích phần mặt $z=\sqrt{x^2+y^2}$ **nằm trong hình cầu** $x^2+y^2+z^2=2z$**.**



S là phần mặt $z=\sqrt{x^2+y^2}$ nằm trong hình cầu $x^2+y^2+z^2=2z$.

D=pr_{xOy}S, D={$x^2+y^2 \le 1$}

S= $\iint_D \sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,dxdy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \sqrt{2}\,rdr = \pi\sqrt{2}$

Câu 8. Tính $I=\iint\limits_S 2xdS$**, với S là phần mặt trụ** $x^2+y^2=4$ **nằm giữa hai mặt phẳng** $z=1, z=4$**.**

S1={x= $-\sqrt{4-y^2}$}, S2={ x= $\sqrt{4-y^2}$}

D1=pr_{yOz}S1=D2=pr_{yOz}S2

$$I=\iint\limits_S 2xdS = \iint_{S1} 2xdS + \iint_{S2} 2xdS = 2\iint_{D1} -\sqrt{4-y^2}\,\frac{2}{\sqrt{4-y^2}}dydz + 2\iint_{D2} \sqrt{4-y^2}\,\frac{2}{\sqrt{4-y^2}}dydz = 0$$

Đề 4:

Câu 1. Cho hàm $f(x,y)=4y^2+\sin^2(x-y)$. **Tính** $d^2f(0,0)$

f'x= 2sin(x-y)cos(x-y)=sin2(x-y)

f''xx= 2cos2(x-y)=> f''xx(0,0)=2

f''xy= -2cos(x-y)=> f''xy(0,0)=-2

f'y= 8y-2sin(x-y)cos(x-y)=8y-sin2(x-y)

f''yy= 8+2cos2(x-y) => f''yy(0,0)=10

- ⇨ $d^2f(0,0)=2dx^2-4dxdy+10dy^2$

Câu 2. Tìm cực trị của hàm $z=x^3y+12x^2-8y$.

Điểm dừng:

$\begin{cases} z'_x = 3x^2y+24x=0 \\ z'_y = x^3-8=0 \end{cases}$ ⇔ x=2, y=-4

$A=z''_{xx}=6xy+24$ $B=z''_{xy}=3x^2$ $C=z''_{yy}=0$

$\Delta=AC-B^2=-9x^4=-144<0$

- ⇨ z(x,y) ko có cực trị

Câu 3. Khảo sát sự hội tụ của chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot5\cdot8L\ (3n-1)}{1\cdot5\cdot9L\ (4n-3)}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+2}{4n+1}=3/4<1$

- ⇨ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot5\cdot8L\ (3n-1)}{1\cdot5\cdot9L\ (4n-3)}$ hội tụ theo tc D'alembert

Câu 4. Tìm bán kính hội tụ của chuỗi luỹ thừa $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x+1)^n}{2^{3n}(n+1)\ln(n+1)}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{3n}(n+1)\ln(n+1)}{2^{3n+3}(n+2)\ln(n+2)}$ =1/8

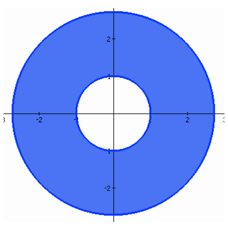
=> -8<x+1<8 => -9<x<7

x=-9: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)\ln(n+2)}$ phân kỳ theo tc tích phân

x=7: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+2)\ln(n+2)}$ hội tụ theo tc Leibnitz

- ⇨ Miền hội tụ (-9,7]

Câu 5. Tính tích phân $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}.\ln(x^2+y^2)$ dxdy với D là miền 1 ≤ $x^2+y^2 \le e^2$



x=rcosφ, y=rsinφ

$\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}.\ln(x^2+y^2)$ dxdy = $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_2^{e} r(\ln r^2)$rdr = $4\pi(2/9e^3+1/9)$

Câu 6. Cho P(x,y)= y, Q(x,y)= 2x-ye^y. Tìm hàm h(y) thảo mãn điều kiện: h(1)=1 và biểu thức h(y)P(x,y)dx+ h(y)Q(x,y)dy là vi phân toàn phần của hàm u(x,y) nào đó. Với h(y) vừa tìm, tính tích phân $\int\limits_L [h(y)P(x,y)dx + h(y)Q(x,y)dy]$ trong đó L là đường cong có phương trình: $4x^2+9y^2=36$, chiều ngược kim đồng hồ từ điểm A(3,0) đến B(0,2).

h(y)P(x,y)dx+ h(y)Q(x,y)dy là vi phân toàn phần của hàm u(x,y) nào đó

⇔ $\frac{\partial h(y)Q(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial h(y)P(xy)}{\partial y}$ => h(y) =y+c

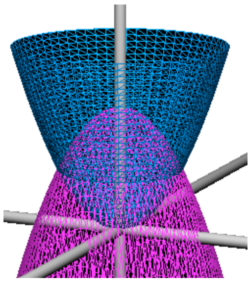
h(1)=1 => c=0

- ⇨ h(y)= y

$\int\limits_L [h(y)P(x,y)dx + h(y)Q(x,y)dy]$= $\int_L y^2dx + (2xy - y^2e^y)dy$

$= \int_0^2 -y^2 e^y dy$ = -2e^2+2

Câu 7. Tìm diện tích phần mặt $z + x^2 + y^2 = 2$ nằm trong hình paraboloid $z = x^2 + y^2$.



S là phần mặt $z + x^2 + y^2 = 2$ nằm trong hình paraboloid $z = x^2 + y^2$.

D=pr$_{xOy}$S, D={x^2+y^2≤1}

S=$\iint_D \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}$ dxdy= $\iint_D \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}$dxdy= $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \sqrt{1 + r^2}$ rdr= $\frac{2\pi}{3}(2\sqrt{2}$-1)

Câu 8. Tính $I = \iint\limits_S x^2dydz + y^2dxdz + z^2dxdy$, với S là nửa dưới mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$, phía trên.

$I = \iint\limits_S x^2dydz + y^2dxdz + z^2dxdy$= $\iint_S$ $\boldsymbol{x^2}$dydz+ $\iint_S$ $\boldsymbol{y^2}$dydz+ $\iint_S$ $\boldsymbol{z^2}$dydz

$\iint_S$ $\boldsymbol{x^2}$dydz=$\iint_{x=\sqrt{1-y^2-(z-1)^2}} x^2dydz + \iint_{x=-\sqrt{1-y^2-(z-1)^2}} x^2dydz$

= -$\iint_{D_{yOz}}[1 - y^2 - (z-1)^2]dydz$ +$\iint_{D_{yOz}}[1 - y^2 - (z-1)^2]dydz$ =0

Tương tự $\iint_S$ $\boldsymbol{z^2}$dydz=0

$\iint_S$ $\boldsymbol{z^2}$dydz =$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (1 + \sqrt{1 + r^2})^2$ rdr =$\frac{17\pi}{6}$

I= $\iint_S x^2dydz + y^2dxdz + z^2dxdy$= $\frac{17\pi}{6}$

Đề 5

Câu 1. Tính $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, với $\begin{cases} f = f(u) = u^3 + \sin u; \\ u = 2xy + e^x \end{cases}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (3u^2 + cosu)(2y + e^x)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2x(6u - sinu)(2y + e^x) + 2(3u^2 + cosu)$$

Câu 2. Tìm cực trị có điều kiện: $f(x,y) = 2x^2 + 12xy + y^2;\ x^2 + 4y^2 = 25$

$L(x,y,\lambda) = 2x^2+12xy+y^2 + \lambda(x^2+4y^2-25)$

$$\begin{cases} L'x = 4x + 12y + 2\lambda x = 0 \\ L'y = 12x + 2y + 8\lambda y = 0 \\ L'\lambda = x^2 + 4y^2 - 25 = 0 \end{cases}$$

⇔ $x=3, y=-2, \lambda=2$ v $x=-3, y=2, \lambda=2$ v $x=4, y=3/2, \lambda=-17/4$ v $x=-4, y=-3/2, \lambda=-17/4$

$d^2L = (4+2\lambda)dx^2 + (2+8\lambda)dy^2 + 24dxdy$

$x^2 = -4y^2+25 \Rightarrow 2xdx=-8ydy$

$x=3, y=-2, \lambda=2$ v $x=-3, y=2, \lambda=2 \Rightarrow d^2L>0$

- ⇨ f(x,y) đạt cực tiểu tại (3,-2), (-3,2)

$x=4, y=3/2, \lambda=-17/4$ v $x=-4, y=-3/2, \lambda=-17/4 \Rightarrow d^2L<0$

- ⇨ f(x,y) đạt cực đại tại (4,3/2), (-4,-3/2)

Câu 3. Khảo sát sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{n+2}\left(\frac{2n}{n-1}\right)^{3n}$

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sqrt[3]{n+2}\left(\frac{2n}{n-1}\right)^{3n}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{n-1}\right)^3 \sqrt[n]{\sqrt[3]{n+2}} = 8 > 1$

- ⇨ $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{n+2}\left(\frac{2n}{n-1}\right)^{3n}$ phân kỳ theo tc Cauchy

Câu 4. Tìm miền hội tụ của chuỗi: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^{n+1} (x-5)^n}{(n+1)\sqrt{\ln(n+1)}}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2(n+1)}{(n+2)} \frac{\sqrt{\ln(n+1)}}{\sqrt{\ln(n+2)}} = 2$

=> -1/2<x-5<1/2 => 9/2<x<11/2

x=9/2: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2}{(n+1)\sqrt{\ln(n+1)}}$ phân kỳ theo tc tích phân

x=11/2: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{(n+1)\sqrt{\ln(n+1)}}$ hội tụ theo tc Leibnitz

Miền hội tụ (9/2,11/2]

Câu 5. Tính tích phân $\iint\limits_D arctg\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy$ **với D là hình tròn:** $x^2+y^2 \le 3$

I= $\iint\limits_D arctg\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{3}} (arctanr^2) rdr = 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} (arctanr^2) rdr = 2\pi(\frac{3}{2} arctan3 - \frac{1}{4} ln10)$

Câu 6. Chứng tỏ tích phân $I = \int\limits_C e^{x-y}\left[(1+x+y)dx + (1-x-y)dy\right]$ **không phụ thuộc đường đi. Tính tích phân I với C là phần ellipse** $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ **từ A(3,0) đến B(0,2), ngược chiều kim đồng hồ.**

$\frac{\partial[e^{x-y}(1-x-y)]}{\partial x} = \frac{\partial[e^{x-y}(1+x+y)]}{\partial x}$

$I = \int\limits_C e^{x-y}\left[(1+x+y)dx + (1-x-y)dy\right] = \int_3^0 e^x(1+x)dx + \int_0^2 e^{-y}(1-y)dy$ = $-3e^3 + 2e^{-2}$

Câu 7. Tìm thể tích vật thể giới hạn bởi $y = 2 - x^2, y = 1, z = 0, z = 3x$, **lấy phần** $z \ge 0$.

V= $\iiint_\Omega dxdydz = 2\int_0^1 dx \int_1^{2-x^2} dy \int_0^{3x} dz = 2\int_0^1 dx \int_1^{2-x^2} 3xdy = 2\int_0^1 3x(1-x^2)dx = 3/2$

Câu 8. Tính $I = \iint\limits_S xdydz + (2y+3z)dxdz + z^2dxdy$, **với S là phần mặt phẳng** $x+y+z=4$ **nằm trong hình trụ** $x^2+y^2=2y$, **phía trên.**

$I = \iint_S xdydz + (2y+3z)dxdz + z^2dxdy = \frac{1}{\sqrt{3}}\iint_S (x + 2y + 3z + z^2)dS$

$= \frac{1}{\sqrt{3}}\iint_{x^2+y^2\le 2y}(x + 2y + 3(4 - x - y) + (4 - x - y)^2)\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}dxdy$

$= \iint_{x^2+y^2\le 2y}(x^2 + y^2 - 10x - 9y + 2xy + 28)dxdy$

x=rcosφ, y-1=rsinφ

I= $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (r^2 - 10r\cos\varphi - 7(r\sin\varphi + 1) + 2r\cos\varphi(r\sin\varphi + 1) + 27)rdr$

$=\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (r^3 - 10r^2\cos\varphi - 7(r^2\sin\varphi + r) + r^3\sin2\varphi + 2r^2\cos\varphi + 27r)dr$

$=\int_0^{2\pi}(\frac{1}{4} - \frac{10}{3}\cos\varphi - \frac{7}{3}\sin\varphi - \frac{7}{2} + \frac{1}{4}\sin2\varphi + \frac{2}{3}\cos\varphi + \frac{27}{2})d\varphi$

$=\int_0^{2\pi}(\frac{41}{4} - \frac{8}{3}\cos\varphi - \frac{7}{3}\sin\varphi + \frac{1}{4}\sin2\varphi)d\varphi = \frac{41\pi}{2}$

Đề 6

Câu 1. Cho hàm 2 biến z = z(x, y) = $3e^{x^2y^3}$. Tính dz(1,1) và $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(1,1)$

dz = $6xy^3e^{x^2y^3}$dx + $9x^2y^2e^{x^2y^3}$dy => dz(1,1) = 6edx+9edy

$\frac{\partial z}{\partial x} = 6xy^3e^{x^2y^3}$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = 18xy^2e^{x^2y^3} + 6xy^3 3x^2y^2e^{x^2y^3} = 18xy^2e^{x^2y^3} + 18x^3y^5e^{x^2y^3}$ => $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(1,1)$= 36e

Câu 2. Khảo sát cực trị hàm số z= x^3+ y^3+ $3x^2$- 3xy +3x-3y +1

Điểm dừng: $\begin{cases} z'_x = 3x^2 + 6x - 3y + 3 = 0 \\ z'_y = 3y^2 - 3x - 3 = 0 \end{cases}$ ⇔ x=0, y=1 v x=-1,y=0

A= z''_{xx}=6x+6 B=z''_{xy}=-3   C=z''_{yy}=6y

Δ=AC-B^2=36(x+1)y-9

x=0, y=1 => Δ=27>0, A=6>0 => z(x,y) đạt cực tiểu tại (0,1) x=-1,y=0 => Δ=-9<0 => ko có cực trị

Câu 3. Khảo sát sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 9 \mathrm{L}\ n^2}{(4n-3)!!}$

Câu 4. Tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n . 3^{n+1}}{4^{n+2} . \sqrt[3]{n+1}} (x-1)^n$

ρ= $\lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+2}}{4^{n+3} . \sqrt[3]{n+2}} \frac{4^{n+2} . \sqrt[3]{n+1}}{3^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3\sqrt[3]{n+1}}{4\sqrt[3]{n+2}}$ =3/4

=> -4/3<x-1<4/3 => -1/3<x<7/3

x= -1/3: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{16\sqrt[3]{n+1}}$ phân kỳ

x= 7/3: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3(-1)^n}{16\sqrt[3]{n+1}}$ hội tụ theo tc Leibnitz

Miền hội tụ (-1/3,7/3]

Câu 5. Tính tích phân kép $I = \iint_D \sqrt{4 - x^2 - y^2}\, dxdy$**, trong đó D là miền phẳng giới hạn bởi**

$x^2 + y^2 = 1, y \le x$

$I = \iint_D \sqrt{4 - x^2 - y^2}\, dxdy$= $\int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^1 \sqrt{4 - r^2}\, .rdr = \frac{\pi}{3}(8 - 3\sqrt{3})$

Câu 6. Tính tích phân $I = \int_C (x^2 y + x - y)dx + (y - x - xy^2)dy$**, với C là nửa bên phải của đường tròn** $x^2 + y^2 = 4y$**, chiều kim đồng hồ.**

$I = \int_C (x^2 y + x - y)dx + (y - x - xy^2)dy = -\iint_D (-1 - y^2 - x^2 + 1)\, dxdy$ - $\int_0^4 ydy$

= $\int_0^{pi/2} d\varphi \int_0^{4sin\varphi} r^3 dr$ - 8= $12\pi - 8$

Câu 7. Tính tích phân đường loại một I=$\int_c \sqrt{x^2 + y^2}\, dl$**, với C là nửa trên đường tròn** $x^2 + y^2 = 2y$**.**

x=rcost, y=rsint => r= 2sint

I=$\int_c \sqrt{x^2+y^2}dl$=$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} 4sintdt = 4\sqrt{2}$

Câu 8. Dùng công thức Stokes, tính $I = \oint_C (x+y)dx + (2x-z)dy + ydz$**, với C là giao của** $x^2+y^2+z^2=4$ **và** $x+y+z=0$**, chiều kim đồng hồ theo hướng dương trục 0z.**

S là mặt giao của C là giao của $x^2+y^2+z^2=4$ và $x+y+z=0$

$I = \oint_C (x+y)dx + (2x-z)dy + ydz = \iint_S 2dydz + dxdy$ (S có n=$(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}})$)

=$\frac{-1}{\sqrt{3}} \iint_S 3dS = -\sqrt{3} \iint_D dS$= -$\sqrt{3}$S = -$\sqrt{3}\pi 2^2$ = -4$\sqrt{3}\,\pi$

Đề 7

Câu 1. Cho hàm 2 biến z = z(x, y)= y ln(x^2- y^2). Tính dz($\sqrt{2}$**,1) và** $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(\sqrt{2},1)$

dz= $\frac{2xy}{x^2-y^2}dx + [\ln(x^2-y^2) - \frac{2y^3}{x^2-y^2}]dy$ => dz($\sqrt{2}$,1)=$2\sqrt{2}dx - 2dy$

$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2xy}{x^2-y^2}$ $\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{-2x^2y-2y^3}{(x^2-y^2)^2}$ => $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(\sqrt{2},1)$= -6

Câu 2. Tìm cực trị có điều kiện: $f(x,y) = 1-4x-8y;\ x^2-8y^2=8$.

L(x,y,λ)= 1-4x-8y+λ(x^2-8y^2-8)

$\begin{cases} L'x = -4 + 2\lambda x = 0 \\ L'y = -8 - 16\lambda y = 0 \\ L'\lambda = x^2 - 8y^2 - 8 = 0 \end{cases}$ ⇔ x=-4,y=1, λ=-1/2 v x=4,y=-1, λ=1/2

d^2L= 2λdx^2 -16λdy^2

x^2= 8y^2+8 => 2xdx=16ydy

x=-4,y=1, λ=-1/2 => d^2L>0 => f(x,y) đạt cực tiểu tại (-4,1)

x=4,y=-1, λ=1/2 => d^2L<0 => f(x,y) đạt cực đại tại (4,-1)

Câu 3. Khảo sát sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} 2(\frac{n}{n+1})^n = \frac{2}{e} < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$ hội tụ

Câu 4. Tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+2)(x+1)^n}{5^{n+2}.\sqrt{n^6+1}}$

ρ= $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+3)\sqrt{n^6+1}}{5(n+2)\sqrt{(n+1)^6+1}} = \frac{1}{5}$

=> -5<x+1<5 => -6<x<4

x=-6: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(n+2)}{25\sqrt{n^6+1}}$ *hội tụ*

x=4: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+2)}{25\sqrt{n^6+1}}$ *hội tụ*

Miền hội tụ [-6,4]

Câu 5. Tính tích phân $\iint_0 \frac{dxdy}{\sqrt{3+x^2+y^2}}$ **với D là miền phẳng hữu hạn giới hạn bởi các đường $x^2+y^2= 1$(x, y ≥ 0), $x^2+y^2=33$ (x, y ≥ 0), y=x, y = x $\sqrt{3}$.**

$\iint_0 \frac{dxdy}{\sqrt{3+x^2+y^2}} = \int_{pi/4}^{pi/3} d\varphi \int_1^{\sqrt{33}} \frac{r}{\sqrt{3+r^2}} dr = \frac{pi}{3}$

Câu 6. Cho 2 hàm P(x,y)= $2ye^{xy} + e^{\alpha x}\cos y$, Q(x,y)= $2xe^{xy} - e^{\alpha x}\sin y$ trong đó α là hằng số. Tìm α để biểu thức Pdx + Qdy là vi phân toàn phần của hàm u(x,y) nào đó. Với α vừa tìm được, tính tích phân đường $\oint_\gamma [(x,y)-y^3]dx + [Q(x,y)+x^3]dy$ **trong đó (γ) là đường tròn $x^2+y^2 = 2x$ lấy theo chiều dương (ngược chiều kim đồng hồ).**

Câu 7. Tính tích phân mặt loại một $I = \iint_S x^2 dS$, **với S là nửa trên mặt** $x^2+y^2+z^2=4$

$I = \iint_S x^2 dS = \int_{x^2+y^2\leq 4} \frac{x^2 2}{\sqrt{4-x^2-y^2}} = 2\int_0^{2pi} d\varphi \int_0^2 \frac{r^2\cos^2\varphi}{\sqrt{4-r^2}} r dr = \frac{32pi}{3}$

Câu 8. Dùng công thức Stokes, tính $I = \oint_C (3x - y^2)dx + (3y - z^2)dy + (3z - x^2)dz$**, với C là giao của** $z = x^2 + y^2$ **và** $z = 2 - 2y$**, chiều kim đồng hồ theo hướng dương trục 0z.**

S là mặt giao của **của** $z = x^2 + y^2$ **và** $z = 2 - 2y$, n= $(0, -\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}})$

$I = \oint_C (3x - y^2)dx + (3y - z^2)dy + (3z - x^2)dz = \iint_S 2zdxdy + 2xdxdz + 2ydxdy$

$= 2\iint_S \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}x - \frac{1}{\sqrt{5}}y\right) dS = 2\iint_{x^2+y^2+2y\le 2}(-2x - y)dxdy = -2\int_0^{2pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{3}} (2rcos\varphi + rsin\varphi)rdr = 4\sqrt{3}$

Đề 8

Câu 1. Tìm z'_x, z'_y **của hàm ẩn z = z(x,y) xác định từ phương trình** $x^3 + y^2 + yz = \ln z$

F(x,y)= $x^3+y^3+yz-\ln z$

$z'_x = -\frac{F'x}{F'z} = -\frac{3x^2z}{yz-1}$

$z'_y = -\frac{F'y}{F'z} = -\frac{(2y+z)z}{yz-1}$

Câu 2. Tìm gtln, gtnn của $f(x, y) = x^2 + y^2 + x^2y + 4$ **trên miền** $D = \{(x, y) \mid |x| \le 1, |y| \le 1\}$

$\begin{cases} f'x = 2x + 2xy = 0 \\ f'y = 2y + x^2 = 0 \end{cases}$ ⇔ x=0,y=0

x=± 1: f(y) =y^2+y+5
f'(y)=2y+1=0 =>y=-1/2
y=-1: f(x)= 5 với mọi x
y=1: f(x)=$2x^2+5>0$
f(0,0)= 4 f(-1,-1)=f(1,-1)=5
f(± 1,1/2) = 19/4 f(1,1)=f(-1,1)=7

Maxf= 7
Minf= 4

Câu 3. Khảo sát sự hội tụ của chuỗi số a/ $\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{2n}{2n+1}\right]^{n(n-1)}$ **b/** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1.4.9...n^2}{1.3.5...(2n-1)n!}.5^{n+2}$

a)

b) $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(n+1)}5 = 5 > 1$ => $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1.4.9...n^2}{1.3.5...(2n-1)n!}.5^{n+2}$ phân kỳ theo tc D'alembert

Câu 4. Tìm miền hội tụ chuỗi lũy thừa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-2)^n}{3^{n+1}\sqrt[3]{n^4+n^2+1}}$

ρ= $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{3}$

=>-3<x-2<3 => -1<x<5

x=-1 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3\sqrt[3]{n^4+n^2+1}}$ hội tụ

x=5 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3\sqrt[3]{n^4+n^2+1}}$ hội tụ theo tc Leibnitz

Miền hội tụ [-1,5]

Câu 5. Tính tích phân kép $\iint_D \sqrt{9-x^2-y^2}$ **dxdy với D là miền phẳng hữu hạn giới hạn bởi nữa đường tròn** $x^2 + y^2 = 9$, $y \geq 0$ **và các đường thẳng y = x, y = -x**

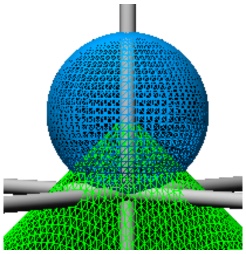
$\iint_D \sqrt{9-x^2-y^2} = \int_{pi/4}^{3pi/4} d\varphi \int_0^3 \sqrt{9-r^2}\,.rdr = 9pi/2$

Câu 6. Cho 2 hàm P(x,y)= (1+x+y)e^{-y}, $Q(x,y) = (1-x-y)e^{-y}$. **Tìm hàm h(x) để biểu thức h(x)P(x, y)dx + h(x)Q(x, y)dy là vi phân toàn phần của hàm u(x,y) nào đó. Với h(x) vừa tìm, tính tích phân** $\int_L [h(x)P(x,y)dx + h(x)Q(x,y)dy]$ **trong đó L là nữa đường tròn** $x^2 + y^2 = 9$ **nằm bên phải trục tung, chiều đi từ điểm A(0, -3) đến điểm B(0, 3).**

$\frac{\partial h(x).Q(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial h(x).P(x,y)}{\partial y} \Leftrightarrow h(x)= e^x$

$\int_L [h(x)P(x,y)dx + h(x)Q(x,y)dy] = \int_{-3}^{3}(1-y)e^{-y}dy = 3e^{-3} + 3e^3$

Câu 7. Tính $I = \iiint_V 2zdxdydz$, **với V giới hạn bởi** $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z$ **và** $z + \sqrt{x^2+y^2} = 1$.

 D= $pr_{xOy}V$, D={$x^2 + y^2 = 1/2$}

$$I = \iiint\limits_V 2z dxdydz = \int_0^{2pi} d\varphi \int_{3pi/4}^{pi} d\theta \int_0^1 2r\cos\theta r^2 \sin\theta dr = -\frac{pi}{4}$$

Câu 8. Tính tích phân mặt $I = \iint\limits_S (x+2y)dydz + (y+2z)dxdz + (z+2x)dxdy$**, với S là phần mặt paraboloid** $z = x^2 + y^2$**, bị cắt bởi** $z = 2-2x$ **, phía dưới.**

D =$pr_{xOy}S$={ $(x+1)^2+y^2 = 3$}, x+1=rcosφ,y=rsinφ

$$I = \iint\limits_S (x+2y)dydz + (y+2z)dxdz + (z+2x)dxdy$$

$$= \iiint_V 3dxdydz - \iint_{z=2-2x} (x+2y)dydz + (y+2z)dxdz + (z+2x)dxdy$$

$$=3\int_0^{2pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{3}} dr \int_0^{4-r\cos\varphi} rdz - 1/\sqrt{5} \iint_S (4x+4y+z)dS$$

$$=18\pi - \iint_D (2x+4y+2)dxdy$$

$$=18\pi - \int_0^{2pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{3}} (2r\cos\varphi + 4r\sin\varphi) rdr = 18\pi$$

Đề 9

Câu 1. Tìm miền xác định và miền giá trị của $f(x,y) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{x^2+y^2}}, & \text{if } (x,y) \neq (0,0) \\ -3, & \text{if } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Miền xác định: {R\ xy=0}

f(x,y)= $e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}$, (x,y) khác (0,0)

⇔ lnf(x,y) = $-\frac{1}{x^2+y^2}$, (x,y) khác (0,0)

⇔ $x^2+y^2=-\frac{1}{lnf(x,y)}$, (x,y) khác (0,0)

⇔ $-\frac{1}{lnf(x,y)}>0$

⇔ 0<f(x,y)<1

Miền giá trị: {(0,1) với (x,y) khác (0,0)}

{-3 với (x,y)=(0,0)}

Câu 2. Tìm cực trị của hàm f(x, y)= x^2- 2xy+ $2y^2$- 2x+ 2y +4

Điểm dừng: $\begin{cases} f'_x = 2x-2y-2=0 \\ f'_y = 4y-2x+2=0 \end{cases}$ ⇔ x=1, y=0

A= f''_{xx}=2 B=f''_{xy}=-2 C=f''_{yy}=4

Δ=AC-B^2=4>0, A=2>0

⇨ f(x,y) đạt cực tiểu tại (1,0)

Câu 3. Khảo sát sự hội tụ của $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ **với** $u_n=\left(\frac{4n-1}{4n+1}\right)^{n(4n+1)}$, $v_n=\frac{2.4.6...(2n).n^n}{4.7.10...(3n+1).n!}$

$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{v_n}=\lim_{n\to\infty}(\frac{4n-1}{4n+1})^{4n+1}=\lim_{n\to\infty}(1-\frac{2}{4n+1})^{\frac{4n+1}{2}.2}=\frac{1}{e^2}<1$ => $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ hội tụ theo tc Cauchy

$\lim_{n\to\infty}\frac{v_{n+1}}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+2}{3n+4}\right)\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=\frac{2}{3}e>1$ => $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ phân kỳ theo tc D'alembert

⇨ $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ phân kỳ

Câu 4. Tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{4^{n+2}.\sqrt[4]{n^3+1}}$

ρ= $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{4}$

=> -4<x+3<4 => -7<x<1

x=-7: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{16\sqrt[4]{n^3+1}}$ hội tụ theo tc Leibnitz x=1: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{16\sqrt[4]{n^3+1}}$ phân kỳ

- ⇨ Miền hội tụ [-7,1)

Câu 5. Tính J= $\iint\limits_D dxdy$ với D là miền phẳng giới hạn bởi 2 đường tròn $x^2+y^2 = 2x$, $x^2+y^2 = 6x$ và các đường thẳng y = x, y = 0.

J= $\iint\limits_D dxdy = \int_0^{pi/4} d\varphi \int_{2cos\varphi}^{6cos\varphi} rdr = 16(\frac{\pi}{4} + 1)$

Câu 6. Tìm hàm $h(x^2- y^2)$, h(1) = 1 để tích phân đường sau đây không phụ thuộc đường đi

I= $\int\limits_{AB} h(x^2 - y^2)\left[x(x^2 + y^2)dy - y(x^2 + y^2)dx\right]$ với AB là cung không cắt đường $x^2 = y^2$.

$\frac{\partial h(x^2-y^2).Q(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial h(x^2-y^2).P(x,y)}{\partial y}$ ⇔ $h(x^2-y^2)= c$

h(1)=1 => c=1

- ⇨ $h(x^2-y^2)= 1$

Câu 7. Tính $I = \iiint\limits_V (x + yz)dxdydz$, với V giới hạn bởi $z = x^2 + y^2$ và $z + x^2 + y^2 = 2$.

$I = \iiint\limits_V (x + yz)dxdydz = \int_0^{2pi} d\varphi \int_0^1 dr \int_{r^2}^{2-r^2} rdz$

$= \int_0^{2pi} d\varphi \int_0^1 (2 - 2r^2)rdr = \int_0^{2pi} \frac{1}{2} d\varphi = \pi$

Câu 8. Tính tích phân mặt $I = \iint\limits_S 2xdydz + (3y + z)dxdz + (2z + 4y)dxdy$, với S là phần mặt $x^2 + y^2 + z^2 = 2x$, phần $z \le 0$, phía dưới.

Thêm mặt z=0

Công thức Gauss

$I = \iint\limits_S 2xdydz + (3y + z)dxdz + (2z + 4y)dxdy = \iiint_V 7dxdydz - \iint_{z=0} 4ydxdy$

$= \frac{7}{2}\left(\frac{4\pi}{3}\right) - \int_0^{2pi} d\varphi \int_0^{2cos\varphi} 4rsin\varphi.rdr = \frac{14\pi}{3}$

Đề 10

Câu 1. Tính $f^{//}{}_{xy}(0,0)$ $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{if } (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & \text{if } (x,y)=(0,0)\end{cases}$

(x,y) khác (0,0): $f'_x(x,y) = \frac{-x^2y+y^3}{(x^2+y^2)^2}$

$f'_x(0,0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x} = 0$

$f''_{xy}(0,0) = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f'_x(0,\Delta y)-f'_x(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{1}{(\Delta y)^2} = \infty$

Câu 2. Tìm cực trị của hàm $z = x^4+y^4-x^2-y^2-2xy,\ \ x\neq 0.$

Điểm dừng: $\begin{cases}f'_x = 4x^3-2x-2y=0\\ f'_y = 4y^3-2y-2x=0\end{cases}$ ⇔ x=1, y=1 v x=-1,y=-1

A= $f''_{xx}=12x^2-2$ B=$f''_{xy}=-2$ C=$f''_{yy}=12y^2-2$

$\Delta = AC-B^2 = (12x^2-2)(12y^2-2)-4$

- ⇨ $x=\pm 1, y=\pm 1$=> Δ= 96>0, A= 10>0
- ⇨ f(x,y) đạt cực tiểu tại (1,1), (-1,-1)

Câu 3. Khảo sát sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^{2n}$

$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^2 = \frac{1}{4} < 1$ => $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^{2n}$ hội tụ theo tc Cauchy

Câu 4. Tìm bán kính hội tụ của chuỗi luỹ thừa $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-4)^n}{n\sqrt{n+2}}$

ρ= $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$

=> -1<x-4<1 => 3<x<5

x=3: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\sqrt{n+2}}$ hội tụ theo tc Leibnitz

x=5: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n+2}}$ hội tụ

- ⇨ Miền hội tụ [3,5]

Câu 5. Tính tích phân kép $I=\iint_D (x+|y|)dxdy$**, trong đó D là miền phẳng giới hạn bởi** $x^2+y^2\le 4,\ x\ge 0$

$$I=\iint_D (x+|y|)dxdy$$

$$=\iint_{x\ge 0, y\le\sqrt{4-x^2}}(x+y)dxdy+\iint_{x\ge 0,y\le-\sqrt{4-x^2}}(x-y)dxdy$$

$$=\int_0^{pi/2}d\varphi\int_0^2 rsin\varphi+rscos\varphi)rdr+\int_{-pi/2}^{0}d\varphi\int_0^2(rsin\varphi-rscos\varphi)rdr=\frac{32}{3}$$

Câu 6. Tính tích phân $I=\int_{(1,1)}^{(2,3)}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{y}{x^2}\right)dx+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{1}{x}\right)dy$ **, theo đường cong C không qua gốc O và không cắt trục tung.**

$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}$ => tp ko phụ thuộc đường đi

$$I=\int_{(1,1)}^{(2,3)}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{y}{x^2}\right)dx+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{1}{x}\right)dy$$

$$=\int_1^2\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-\frac{1}{x^2}\right)dx+\int_1^3\left(\frac{y}{\sqrt{y^2+4}}-\frac{1}{2}\right)dx=\sqrt{13}-\sqrt{2}+\frac{1}{2}$$

Câu 7. $I=\iiint_V\frac{1}{x^2+y^2+z^2}dxdydz$**, với V được giới hạn bởi** $x^2+y^2+z^2\le 4$ **và** $z\ge\sqrt{x^2+y^2}$

$$I=\iiint_V\frac{1}{x^2+y^2+z^2}dxdydz$$

$= \int_0^{2pi} d\varphi \int_0^{pi/4} d\theta \int_0^2 sin\theta dr = 4\pi(1 - \frac{1}{\sqrt{2}})$

Câu 8. Tính tích phân mặt $I = \iint_S (x+z)dydz + (y+x)dxdz + (z+y)dxdy$**, với S là phần mặt paraboloid** $z = x^2 + y^2$ **nằm dưới mặt** $x + z = 2$**, phía trên.**

$D = pr_{xOy}S = \{(x+1/2)^2 + y^2 = 9/4\}$

Thêm mặt $x + z = 2$

Công thức Gauss

$$I = \iint_S (x+z)dydz + (y+x)dxdz + (z+y)dxdy$$

$$= -\iiint_V 3dxdydz - \iint_{x+z=2} (x+z)dudz + (y+x)dxdz + (z+y)dxdy$$

$$= -3\int_0^{2pi} d\varphi \int_0^{\frac{3}{2}} dr \int_{r^2 - rcos\varphi + \frac{1}{4}}^{-rcos\varphi + \frac{5}{2}} rdz - \frac{1}{\sqrt{2}} \iint_{x+z=2} (-2x - 2z)dS$$

$$= \frac{-243}{32}\pi + 2\sqrt{2}\iint_{x+z=2} dS = \frac{-243}{32}\pi + 9\pi = \frac{45}{32}\pi$$