



Chương 1: QUAN HỆ (Relation)

- Các khái niệm
- Quan hệ tương đương
- Quan hệ thứ tự
- Biểu diễn quan hệ hai ngôi hữu hạn



CÁC KHÁI NIỆM

- Quan hệ hai ngôi
- Quan hệ n-ngôi

QUAN HỆ HAI NGÔI

- Quan hệ hai ngôi: Một quan hệ giữa tập A và tập B (từ A đến B) là một tập con $R \subset$ của tập $A \times B$
 - Nếu $(a, b) \in R$, ký hiệu $a R b$, ta nói a quan hệ R với b
 - Một quan hệ giữa A và A được gọi là quan hệ trên A

QUAN HỆ HAI NGÔI

- **Ví dụ 1:** Cho $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{a, b\}$

thì $R = \{(0, a), (0, b), (1, a)\}$

là một quan hệ hai ngôi giữa A và B

- **Ví dụ 2:** Quan hệ bằng nhau “=” là một quan hệ hai ngôi R trên tập A bất kỳ: $a R b$ khi và chỉ khi $a = b$

QUAN HỆ HAI NGÔI

- **Ví dụ 3:** Cho $n > 1$, định nghĩa quan hệ:

$$a R b \Leftrightarrow a - b \text{ chia hết cho } n$$

thì R là một quan hệ hai ngôi trên \mathbb{Z}

Quan hệ này được gọi là **quan hệ đồng dư modulo n** trên \mathbb{Z}

Nếu $a R b$ thì ta viết $a \equiv b \pmod{n}$

Với $n = 5$, $2 R 7$ vì $2 - 7$ chia hết cho 5 hay $2 \equiv 7 \pmod{5}$

QUAN HỆ n-NGÔI

- Một quan hệ n-ngôi trên n tập hợp A_1, A_2, \dots, A_n là một tập con R của tích Descartes $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$, ký hiệu $R(A_1, A_2, \dots, A_n)$
- **Ví dụ:** Quan hệ $R(Z, Z, Z)$, tập con của $Z \times Z \times Z$, gồm các bộ ba (a, b, c) , trong đó a, b, c là các số nguyên với $a < b < c$ là một quan hệ 3-ngôi trên Z

QUAN HỆ TƯƠNG ĐƯƠNG

- Một quan hệ hai ngôi R trên tập A có tính chất:
 - **Phản xạ**: nếu $\forall x \in A \Rightarrow x R x$
 - **Đối xứng**: nếu $\forall x, y \in A, x R y \Rightarrow y R x$
 - **Bắc cầu**: nếu $\forall x, y, z \in A, x R y$ và $y R z \Rightarrow x R z$
- **Quan hệ tương đương**: Một quan hệ R có các tính chất **phản xạ, đối xứng và bắc cầu** được gọi là quan hệ tương đương.
- Ký hiệu: \sim
nếu $x R y$ thì ta nói x tương đương với y và viết $x \sim y$

QUAN HỆ TƯƠNG ĐƯƠNG

Ví dụ 1:

- Quan hệ “=” là các quan hệ tương đương
- Quan hệ tương đương “ \Leftrightarrow ” trên tập các mệnh đề là quan hệ tương đương
- Cho ánh xạ $f: A \rightarrow B$, định nghĩa quan hệ R trên A như sau:

$$x R y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$$

thì R là một quan hệ tương đương (bài tập)

QUAN HỆ TƯƠNG ĐƯƠNG

Ví dụ 2:

- Cho quan hệ φ trên tập số thực \mathbb{R} được xác định như sau: $\forall x, y \in \mathbb{R}, x \varphi y \Leftrightarrow x-y \in \mathbb{Z}$. Chứng minh φ là một quan hệ tương đương
- **Chứng minh:** φ có tính phản xạ, đối xứng, bắc cầu
 - $\forall x \in \mathbb{R}, x-x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \varphi x$ (phản xạ).
 - $\forall x, y \in \mathbb{R}$ và $x \varphi y$ thì $x-y \in \mathbb{Z} \Rightarrow y-x \in \mathbb{Z} \Rightarrow y \varphi x$ (đối xứng)
 - $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ và $x \varphi y, y \varphi z$ thì $x-y \in \mathbb{Z}, y-z \in \mathbb{Z} \Rightarrow x-z = (x-y)+(y-z) \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \varphi z$ (bắc cầu)

LỚP TƯƠNG ĐƯƠNG

- **Lớp tương đương:** cho R là một quan hệ tương đương trên A và $x \in A$, tập hợp $\{y \in A \mid y \sim x\}$ được gọi là lớp tương đương chứa x , ký hiệu \overline{x} , x/\sim hay $[x]$. Tập tất cả các lớp tương đương gọi là tập thương, ký hiệu A/\sim
- **Ví dụ:** xét quan hệ $xRy \Leftrightarrow x - y$ nguyên, thì
 - $\overline{x} = \{y \in A \mid y - x \text{ nguyên}\}$
 - $\overline{1.5} = \{\dots, -1.5, -0.5, 0.5, 1.5, \dots\}$

QUAN HỆ TƯƠNG ĐƯƠNG

- **Định lý 1:** Giả sử R là một quan hệ tương đương trên A khi ấy:

➤ $\forall x \in A, x \in \overline{x}$

➤ $\forall x, y \in A, xRy \Leftrightarrow \overline{x} = \overline{y}$

➤ Hai lớp tương đương x và y sao cho $\overline{x} \cap \overline{y} \neq \emptyset$ thì $\overline{x} = \overline{y}$

QUAN HỆ TƯƠNG ĐƯƠNG

- Chứng minh:

➤ Do tính phản xạ $x \sim x \Rightarrow x \in \overline{x}$

➤ Giả sử xRy và $z \in \overline{x}$ suy ra $z \sim x$ nên $z \sim y \Rightarrow z \in \overline{y}$. Vậy $\overline{x} \subset \overline{y}$.

Chứng minh tương tự $\overline{y} \subset \overline{x}$

➤ Giả sử $\overline{x} \cap \overline{y} \neq \emptyset$ thì có $z \in \overline{x} \cap \overline{y}$, nghĩa là $z \sim x$ và $z \sim y$ Từ kết quả phần hai ta suy ra $\overline{x} = \overline{z} = \overline{y}$

QUAN HỆ TƯƠNG ĐƯƠNG

Ví dụ 3: xét quan hệ $\equiv (\text{mod } 3)$ trên \mathbb{Z} thì

➤ Lớp $\bar{0} = \{\dots, -6, -3, 0, 3, \dots\}$

➤ Lớp $\bar{1} = \{\dots, -5, -2, 1, 4, \dots\}$

➤ Lớp $\bar{2} = \{\dots, -4, -1, 2, 5, \dots\}$

- **Lưu ý:** mọi $x \in \mathbb{Z}$ đều thuộc một trong 3 lớp trên. Tập \mathbb{Z} bị phân hoạch thành 3 lớp đôi một rời nhau. $\mathbb{Z}/\sim = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$
- Khái quát: quan hệ $\equiv (\text{mod } n)$ phân hoạch \mathbb{Z} thành n lớp tương đương, ký hiệu $\mathbb{Z}_n = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{n-1}\}$

QUAN HỆ THỨ TỰ

- **Phản đối xứng (phản xứng):** quan hệ hai ngôi R trên tập A có tính chất:

Nếu $\forall x, y \in A, x R y$ và $y R x \Rightarrow x=y$ gọi là **phản đối xứng**

- **Quan hệ thứ tự:** một quan hệ R có tính **chất phản xạ, phản đối xứng và bắc cầu** quan hệ R được gọi là quan hệ thứ tự.

ký hiệu: $<$

- **Tập có thứ tự:** nếu $\forall x, y \in A, x R y$ là quan hệ thứ tự thì ta nói “ x nhỏ hơn y ” và viết $x < y$. Khi đó tập A với quan hệ thứ tự R gọi là **một tập có thứ tự**

QUAN HỆ THỨ TỰ

Ví dụ 1:

- Quan hệ “ \leq ” thông thường trên tập số thực \mathbf{R} là một quan hệ thứ tự
- Trên tập $\wp(X)$ ta định nghĩa quan hệ

$$A < B \Leftrightarrow A \subset B$$

thì quan hệ “ $<$ ” là một quan hệ thứ tự trên $\wp(X)$ (bài tập)

QUAN HỆ THỨ TỰ

Ví dụ 2:

- Gọi R là quan hệ hai ngôi trên N xác định: $\forall m, n \in N, n R m \Leftrightarrow n|m$ (n chia hết m), chứng minh R là một quan hệ thứ tự trên N
- **Chứng minh:** R có tính phản xạ, phản đối xứng, bắc cầu
 - $\forall n \in N, n|n \Rightarrow n R n$ (phản xạ)
 - $\forall m, n \in N$ và $n R m, m R n \Rightarrow n|m, m|n$ thì $n = m$ (phản đối xứng)
 - $\forall m, n, p \in N$ và $n R m, m R p$ (có nghĩa: $n|m, m|p$) $\Rightarrow n|p$ hay $n R p$ (bắc cầu)

QUAN HỆ THỨ TỰ

Lưu ý:

- Một quan hệ thứ tự $<$ trên A gọi là toàn phần, nếu $\forall x, y \in A$ thì $x < y$ hoặc $y < x$; ngược lại gọi là quan hệ thứ tự bộ phận.
- **Ví dụ:** Quan hệ “ \leq ” trên \mathbf{R} là toàn phần còn quan hệ “ $|$ ” (chia hết) là bộ phận.

QUAN HỆ THỨ TỰ

- Cho tập A và quan hệ thứ tự $<$ trên A , giả sử $B \subset A$
 - Phần tử $m \in B$ gọi là **nhỏ nhất của B** ký hiệu $\min(B)$ nếu $\forall x \in B$ ta có $m < x$
 - Phần tử $n \in B$ gọi là **lớn nhất của B** ký hiệu $\max(B)$ nếu $\forall x \in B$ ta có $x < n$
 - Phần tử $a \in A$ gọi là một **chặn trên của B** nếu $\forall x \in B$ ta có $x < a$
 - Phần tử $b \in A$ gọi là một **chặn dưới của B** nếu $\forall x \in B$ ta có $b < x$

QUAN HỆ THỨ TỰ

- **Nhận xét**

- Phần tử bé nhất (lớn nhất) của B nếu có là **duy nhất**
- Thật vậy: gọi m và m' là 2 phần tử bé nhất của B $\Rightarrow \forall x \in B$ ta có $m' < x$ và $m < x \Rightarrow m' < m$ và $m < m'$ suy ra $m = m'$ (tính phản đối xứng)
- Chứng minh tương tự cho phần tử lớn nhất

QUAN HỆ THỨ TỰ

Ví dụ 3:

- Cho tập $X = \{a, b, c\}$, $A = \wp(X)$ và quan hệ thứ tự trên A là: $\forall x, y \in A, x \leq y \Leftrightarrow x \subset y$ (x và y là các tập con của X)
- Xét $B = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$, thì
 - $\min(B) = \{a\}$, không có $\max(B)$
 - Chặn dưới của B là \emptyset và $\{a\}$, B có một chặn trên là $\{a, b, c\}$

QUAN HỆ THỨ TỰ

- Cho tập A và quan hệ thứ tự $<$ trên A , giả sử $B \subset A$
 - Tập B được gọi là **bị chặn trên** nếu B có ít nhất một chặn trên
 - Tập B được gọi là **bị chặn dưới** nếu B có ít nhất một chặn dưới
 - Tập B được gọi là **bị chặn** nếu B vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới

QUAN HỆ THỨ TỰ

- Cho tập A và quan hệ thứ tự $<$ trên A , giả sử $B \subset A$
 - Giả sử B bị chặn trên, thì phần tử bé nhất nếu có của tập các chặn trên của B gọi là **chặn trên nhỏ nhất của B** , ký hiệu $\sup B$
 - Giả sử B bị chặn dưới, thì phần tử lớn nhất nếu có của tập các chặn dưới của B gọi là **chặn dưới lớn nhất của B** , ký hiệu $\inf B$

QUAN HỆ THỨ TỰ

Ví dụ 4

- Cho tập $X = \{a, b, c\}$, $A = P(X)$ và quan hệ thứ tự trên A là:
 $\forall x, y \in A, x \leq y \Leftrightarrow x \subset y$
- Xét $B = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$, thì
 - Tập các chặn trên của B là $\{\{a, b, c\}\}$, $\sup B = \{a, b, c\}$
 - Tập các chặn dưới của B là $\{\emptyset, \{a\}\}$, $\inf B = \{a\}$

QUAN HỆ THỨ TỰ

- Cho tập A và quan hệ thứ tự $<$ trên A , giả sử $B \subset A$
 - Nếu $\min(B)$ tồn tại thì $\inf B = \min(B)$
 - Nếu $\max(B)$ tồn tại thì $\sup B = \max(B)$
 - Nếu $\inf B$ tồn tại và $\inf B \in B$ thì $\min(B)$ tồn tại và $\min(B) = \inf B$
 - Nếu $\sup B$ tồn tại và $\sup B \in B$ thì $\max(B)$ tồn tại và $\max(B) = \sup B$

QUAN HỆ THỨ TỰ

- Chứng minh: mệnh đề thứ nhất và thứ ba
 - Gọi L là tập các chặn dưới của B , ta có $\min(B) \in L$. Mặt khác $\forall x \in L$ thì $x < \min B$ (do $\min B \in B$). Theo định nghĩa $\Rightarrow \min B$ là chặn dưới lớn nhất hay $\min(B) = \inf B$.
 - Giả sử $\inf B$ tồn tại và ta có $\inf B \in B \Rightarrow \forall x \in B, \inf B \leq x$. Theo định nghĩa $\inf B = \min(B)$.

QUAN HỆ THỨ TỰ

- Xét một tập có thứ tự (A, \leq) , x và y là hai phần tử bất kỳ của A
 - Nếu $x \leq y$ ta nói y là **trội của x** (y lớn hơn x) hay x được trội bởi y
 - y là **trội trực tiếp** của x nếu y trội x và **không tồn tại một trội z của x** sao cho:

$$x \leq z \leq y \text{ và } x \neq z \neq y$$

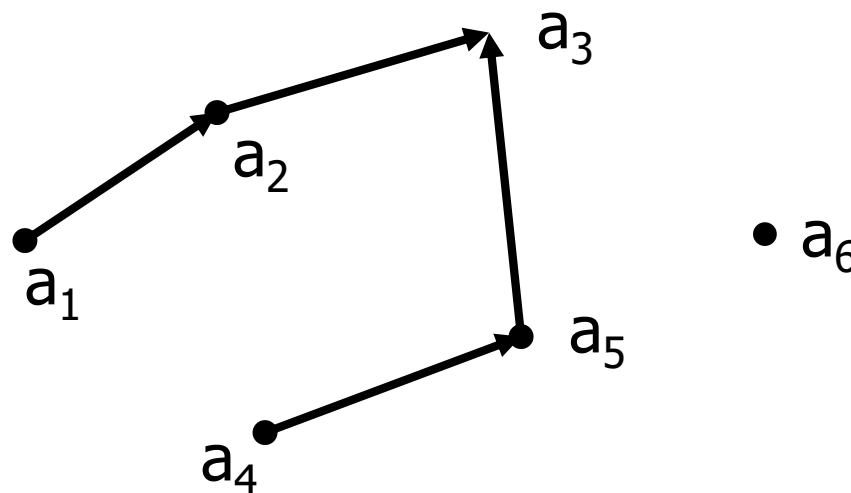
QUAN HỆ THỨ TỰ

- Biểu đồ Hasse của một tập hữu hạn có thứ tự (A, \leq) bao gồm:
 - Một tập các điểm trong mặt phẳng tương ứng 1-1 với tập A , gọi là các đỉnh
 - Một tập các cung có hướng nối một số đỉnh: hai đỉnh x, y được nối bởi một cung có hướng từ x tới y nếu y là trội trực tiếp của x

QUAN HỆ THỨ TỰ

Ví dụ 5:

- Cho tập $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$ trong đó $a_1 < a_2 < a_3$ và $a_4 < a_5 < a_3$, thì biểu đồ Hasse như sau:



- Phần tử a_6 không so sánh được với các phần tử khác nên không có cung nào đến và ra khỏi nó

BIỂU DIỄN QUAN HỆ HAI NGÔI

- Biểu diễn quan hệ thứ tự theo ma trận: Một quan hệ hai ngôi giữa các tập hữu hạn có thể được biểu diễn bởi một ma trận 0-1
- Giả sử R là quan hệ giữa tập $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ và tập $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$. Quan hệ R có thể được biểu diễn bằng ma trận $\mathbf{MR} = [r_{ij}]$, cấp $m \times n$ trong đó:

$$r_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{neá } (a_i, b_j) \in R \\ 0 & \text{neá } (a_i, b_j) \notin R \end{cases}$$

BIỂU DIỄN QUAN HỆ HAI NGÔI

- **Ví dụ 1:** cho $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{a, b\}$

quan hệ giữa A và B là $R = \{(0, a), (0, b), (1, a)\}$, thì ma trận biểu diễn R như sau:

$$M_R = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$