Chương 4: HỆ THỨC TRUY HỒI

- Hệ thức truy hồi
- Hàm sinh (giới hạn)

HỆ THỨC TRUY HỒI

- Các khái niệm
- Giải toán bằng mô hình hệ thức truy hồi
- Giải công thức truy hồi

CÁC KHÁI NIỆM

- Hệ thức truy hồi đối với dãy $\{a_n\}$ là một biểu thức

  Có dạng $a_n = f(a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_{n-k})$, $\forall n \geq n_0 \geq 0$

  và các điều kiện đầu $a_0 = C_0, a_1 = C_1, \ldots, a_{k-1} = C_{k-1}$

- **Ví dụ** $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, $\forall n \geq 2$ và $a_0 = 0, a_1 = 1$

CÁC KHÁI NIỆM

- Dãy $\{a_n\}$ được gọi là nghiệm của hệ thức truy hồi nếu các số hạng của nó thỏa mãn hệ thức truy hồi này
- **Ví dụ** dãy $\{a_n\} = 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13,\ldots$ là nghiệm của hệ thức truy hồi $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \forall n \geq 2$ và $a_0 = 0, a_1 = 1$

CÁC KHÁI NIỆM

- Các điều kiện đầu là các giá trị của các số hạng đầu tiên của dãy kể từ đó hệ thức truy hồi có hiệu lực
- **Ví dụ** Hệ thức truy hồi $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \forall n \geq 2$ với điều kiện đầu $a_0 = 0, a_1 = 1$

ỨNG DỤNG HỆ THỨC TRUY HỒI

- **Ví dụ 1** Một người gửi 10.000$ vào tài khoản tại ngân hàng với lải kép 11% mỗi năm. Hỏi sau 30 năm anh ta có bao nhiêu tiền trong tài khoản.
- **Giải** Gọi P_n là tổng số tiền có sau n năm, vì số tiền sau n năm bằng số tiền sau n-1 năm cộng với số tiền lải kép năm thứ n ($0.11.P_{n-1}$)
  - ➢ $P_n = P_{n-1} + 0.11P_{n-1} = 1.11P_{n-1}$, hay $P_n = 1.11P_{n-1}$, $P_0 = 10.000\$$
  - ➢ $P_1 = (1.11)P_0$, $P_2 = (1.11)P_1 = (1.11)^2P_0$, ... , $P_n = (1.11)^nP_0$
  - ➢ Vậy $P_{30} = (1.11)^{30}10.000\$ = 228922,97\$$

ỨNG DỤNG HỆ THỨC TRUY HỒI

- **Ví dụ 2** Tìm tất cả các xâu nhị phân n bits không có 2 số 0 liên tiếp
- **Giải ?**

ỨNG DỤNG HỆ THỨC TRUY HỒI

- **Giải** Gọi S_n là số xâu nhị phân n bits không có 2 số 0 liên tiếp. Chia tập các xâu như vậy thành 2 tập $B_1 = \{(b_1b_2...b_{n-1}1) \mid b_ib_{i+1} \neq 00\}$ và $B_2=\{(b_1b_2...b_{n-1}0) \mid b_ib_{i+1} \neq 00\}$.
  - $S_n = |B_1| + |B_2|$
  - $|B_1| = S_{n-1}$
  - $|B_2| = S_{n-2}$ (vì $b_n = 0$ nên $b_{n-1} = 1$, $B_2=\{(b_1b_2...b_{n-2}10) \mid b_ib_{i+1} \neq 00\}$)
  - Vậy $S_n = S_{n-1} + S_{n-2}$, $s_1 = 2$, $s_2 = 3$
  - $S_3 = S_2 + S_1 = 3 + 2 = 5$
  - $S_4 = S_3 + S_2 = 5 + 3 = 8, \ldots.$

GIẢI HỆ THỨC TRUY HỒI

- Một hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất bậc $k > 0$ là một hệ thức dạng
  - $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k}$, $n \geq k$ (1)
  - Với $c_1, c_2, \ldots, c_k$ là các hằng số thực, $c_k \neq 0$
- **Ví dụ** Hệ thức Fibonacci $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, $\forall n \geq 2$ và $a_0 = 0, a_1 = 1$ là hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất bậc 2
- **Lưu ý** Phần này chỉ giải hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất

GIẢI HỆ THỨC TRUY HỒI

- Dãy $a_n = r^n$ là nghiệm của $a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \dots + c_ka_{n-k}$
  - ➢ $r^n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \dots + c_ka_{n-k}$
  - ➢ $r^n = c_1r^{n-1} + c_2r^{n-2} + \dots + c_kr^{n-k}$ (chia 2 vế cho r^{n-k})
  - ➢ $r^k - c_1r^{k-1} - c_2r^{k-2} - \dots - c_k = 0$ (2)
- Phương trình (2) được gọi là phương trình đặc trưng của (1), và nghiệm của nó được gọi là nghiệm đặc trưng

GIẢI HỆ THỨC TRUY HỒI

- **Định Lý 1** Cho c_1, c_2 là các hằng số. Giả sử $r^2 - c_1 r - c_2 = 0$ có hai nghiệm phân biệt r_1, r_2. Khi đó dãy $\{a_n\}$ là nghiệm của hệ thức truy hồi $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$

nếu và chỉ nếu $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$ với n = 0, 1, 2,.... Trong đó α_1, α_2 là các hằng số.

GIẢI HỆ THỨC TRUY HỒI

- **Ví dụ 1** Tìm nghiệm của hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất bậc hai $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$, $n \geq 2$, $a_0 = 2$, $a_1 = 7$
- **Giải** Phương trình đặc trưng $r^2 - r - 2 = 0$
  - Nghiệm phương trình đặc trưng $r_1 = 2$, $r_2 = -1$
  - Nghiệm hệ thức $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n = \alpha_1 2^n + \alpha_2 (-1)^n$, $n = 0, 1, \ldots$
  - Thế điều kiện đầu $\Rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 = 2$ và $\alpha_1 2 + \alpha_2(-1) = 7$
  - suy ra $\alpha_1 = 3$ và $\alpha_2 = -1$
  - Vậy nghiệm của hệ thức truy hồi là $a_n = 3.2^n - (-1)^n$, $n \geq 0$

GIẢI HỆ THỨC TRUY HỒI

- **Ví dụ 2** Tìm nghiệm của hệ thức truy hồi Fibonacci $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, $n \geq 2$, $f_0 = 0$, $f_1 = 1$
- Giải ?
  - PT đặc trưng: $r^2 - r - 1 = 0$, $\Delta = 1 - 4*(-1)(1) = 5$; $r_1 = (1+\sqrt{5})/2$; $r_1 = (1-\sqrt{5})/2$
  - Nghiệm của hệ thứ truy hồi có dạng: $f_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$, với α_1, α_2 hằng số
  - Theo điều kiện ban đầu:

$f_0 = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 + \alpha_2 = 0$

$f_1 = 1 \Leftrightarrow \alpha_1(1+\sqrt{5})/2 + \alpha_2 (1-\sqrt{5})/2 = 1$

$\Rightarrow f_n = (\sqrt{5})*[(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n]/10$

GIẢI HỆ THỨC TRUY HỒI

- **Định Lý 2** Cho c_1, c_2 là các hằng số. Giả sử $r^2 - c_1 r - c_2 = 0$ chỉ có một nghiệm kép r_o. Khi đó dãy $\{a_n\}$ là nghiệm của hệ thức truy hồi $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$

  Nếu và chỉ nếu $a_n = \alpha_1 r_0^n + \alpha_2 n\, r_o^n$ với n = 0, 1, 2,.... Trong đó α_1, α_2 là các hằng số.

GIẢI HỆ THỨC TRUY HỒI

- **Ví dụ 3** Tìm nghiệm của hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất bậc hai $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}, n \geq 2, a_0 = 1, a_1 = 6$
- **Giải** Phương trình đặc trưng: $r^2 - 6r + 9 = 0$
  - Nghiệm kép phương trình đặc trưng $r = 3$
  - Nghiệm hệ thức $a_n = \alpha_1 r^n + \alpha_2 n r^n = \alpha_1 3^n + \alpha_2 n 3^n, n = 0, 1, \ldots$
  - Thế điều kiện đầu $\Rightarrow \alpha_1 = 1$ và $\alpha_1 3 + \alpha_2 3 = 6$
  - suy ra $\alpha_1 = 1$ và $\alpha_2 = 1$
  - Vậy nghiệm của hệ thức truy hồi là $a_n = 3^n + n3^n, n \geq 0$

Bài tập

Giải các hệ thức truy hồi cùng các điều kiện sau:

a). $a_n = 2a_{n-1}$ với $n \geq 1, a_0 = 3$

b). $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$ với $n \geq 2, a_0 = 1, a_1 = 0$

c). $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$ với $n \geq 2, a_0 = 6, a_1 = 8$

GIẢI HỆ THỨC TRUY HỒI

- **Định Lý 3** Cho $c_1, c_2, ..., c_k$ là các hằng số. Giả sử phương trình đặc trưng $r^k - c_1 r^{k-1} - ... - c_k = 0$, có k nghiệm phân biệt $r_1, r_2, ..., r_k$.

Khi đó dãy $\{a_n\}$ là nghiệm của hệ thức truy hồi $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + ... + c_k a_{n-k}$

Nếu và chỉ nếu $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n + ... + \alpha_k r_k^n$ với n= 0, 1, ...

Trong đó $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ là các hằng số.

GIẢI HỆ THỨC TRUY HỒI

- **Ví dụ 4** Tìm nghiệm của hệ thức truy hồi bậc ba:

  $a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3}, n \geq 3, a_0 = 2, a_1 = 5, a_2 = 15$

- **Giải** Phương trình đặc trưng $r^3 - 6r^2 + 11r - 6 = 0$
  - Nghiệm phương trình đặc trưng $r_1 = 1, r_2 = 2, r_3 = 3$
  - Nghiệm hệ thức $a_n = \alpha_1 1^n + \alpha_2 2^n + \alpha_3 3^n, n = 0, 1, \ldots$
  - Thế điều kiện đầu $\Rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 2,\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 5$ và $\alpha_1 + 4\alpha_2 + 9\alpha_3 = 15$
  - suy ra $\alpha_1 = 1$ và $\alpha_2 = -1, \alpha_3 = 2$
  - Vậy nghiệm của hệ thức truy hồi là $a_n = 1 - 2^n + 2.3^n, n \geq 0$

HÀM SINH

- Khái niệm hàm sinh
- Một số phép toán trên hàm sinh
- Áp dụng hàm sinh

KHÁI NIỆM HÀM SINH

- Hàm sinh g(x) của dãy số $\{h_n \mid n = 0, 1, \ldots\}$ là chuỗi vô hạn

$$g(x) = h_0 + h_1 x + h_2 x^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} h_n x^n$$

- **Lưu ý** Như vậy hàm g(x) sinh ra dãy số đã cho như là dãy các hệ số của nó. Nếu là dãy hữu hạn thì sẽ tìm được m sao cho $h_i = 0$, $i>m$. Khi đó g(x) là một đa thức bậc m.

KHÁI NIỆM HÀM SINH

- **Ví dụ 1** Hàm $g(x) = (1+x)^m$ sinh ra dãy các hệ số tổ hợp

$$\{h_k = C(m, k) = C^k_m, k = 0, 1, ..., m\}$$

bởi vì $(1+x)^m = \Sigma^m_{k=0} C(m, k) x^k$

KHÁI NIỆM HÀM SINH

- **Ví dụ 2** Tìm dãy được sinh bởi $g(x) = 1/(1-x)$
- **Giải** Lấy 1 chia cho 1- x theo phép chia đa thức ta có

  $g(x) = 1/(1-x) = 1+x+x^2+x^3+\ldots$

  Vậy g(x) sinh ra dãy 1, 1, 1, ...

KHÁI NIỆM HÀM SINH

- **Ví dụ 3** Tìm dãy được sinh bởi $g(x) = 1/(1-x)^k$, $k>1$
- **Giải** Từ ví dụ 2, ta có $g(x) = 1/(1-x)^k = (1+x+x^2+x^3+\ldots)^k$
  - Khai triển biểu thức bằng cách nhân phá ngoặc, thì số lần xuất hiện x^n là số nghiệm không âm của phương trình

    $$t_1 + t_2 + \ldots + t_k = n$$

  - Suy ra hệ số của x^n là tổ hợp lặp chập n của k: $C(n+k-1, n)$
  - Vậy hàm g(x) sinh ra dãy $\{C(n+k-1, n) \mid n = 0, 1, 2, \ldots\}$

CÁC PHÉP TOÁN TRÊN HÀM SINH

- Cho hai hàm f(x) = $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ và g(x) = $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ và α là số thực
  - f(x)+g(x) = $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$
  - αf(x) = $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha\, a_n x^n$
  - f(x)g(x) = $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, trong đó

    $c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \ldots + a_k b_0 = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$

ỨNG DỤNG HÀM SINH

- Bài toán đếm
- Giải hệ thức truy hồi

BÀI TOÁN ĐẾM

- **Ví dụ 1** Tìm số cách chọn n bông hoa từ 3 bông cúc, 2 bông layơn và 4 bông hồng
- **Giải** Xét $g(x) = (1 + x + x^2 + x^3)(1 + x + x^2)(1 + x + x^2 + x^3 + x^4)$
  - ➢ Hệ số của x^n là số nghiệm của phương trình $t_1 + t_2 + t_3 = n$, với $0 \leq t_1 \leq 3$, $0 \leq t_2 \leq 2$, $0 \leq t_3 \leq 4$
  - ➢ Số nghiệm này là số cách chọn n bông hoa từ 3 loại cúc, layơn và hồng với các điều kiện trên

BÀI TOÁN ĐẾM

- Một số khai triển thường được sử dụng trong các hàm sinh
  - $x^k/(1 - x) = x^k(1 + x + x^2 + \ldots) = x^k + x^{k+1} + x^{k+2} + \ldots$
  - $(1 - x^{k+1})/(1 - x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^k$
  - $1/(1 - x^2) = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \ldots$
  - $x/(1 - x^2) = x(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \ldots) = x + x^3 + x^5 + x^7 + \ldots$

BÀI TOÁN ĐẾM

- **Ví dụ 2** Tìm hàm sinh cho h_n là số cách chọn ra n quả từ 4 loại quả táo, chuối, cam và đào (mỗi loại đều có số lượng ít ra là n) mà trong đó có một số chẵn quả táo, số lượng chuối chia hết cho 5, không nhiều hơn 4 quả cam và không qúa 1 quả đào
- **Giải ?**

BÀI TOÁN ĐẾM

- **Ví dụ 2** Rõ ràng hàm sinh cho h_n phải có dạng

  $g(x) = (1 + x^2 + x^4 + x^6 + \ldots)(1 + x^5 + x^{10} + x^{15} + \ldots)(1 + x + x^2 + x^3 + x^4)(1 + x)$

  $=[1/(1 - x^2)][1/(1 - x^5)][(1 - x^5)/(1 - x)](1 + x)$

  $=[1/(1 - x)(1 + x)][1/(1 - x)](1 + x)$

  $=1/(1 - x)^2$

- $g(x) = 1/(1 - x)^2$ sinh ra dãy $h_n = C(n + 2 - 1, n) = C(n + 1, n) = n + 1$.Vậy có n + 1 cách chọn n quả từ 4 loại quả táo, chuối, cam và đào thỏa đầu bài

GIẢI HỆ THỨC TRUY HỒI

- **Ví dụ 1** Giải hệ thức truy hồi $h_n = 4h_{n-2}$, $n \geq 2$, $h_0 = 0$, $h_1 = 1$
- **Giải** Gọi $g(x) = h_0 + h_1x + h_2x^2 + \ldots + h_nx^n + \ldots$ Ta có
  - $g(x) = h_0 + h_1x + h_2x^2 + \ldots + h_nx^n + \ldots$ (1)
  - $-4x^2g(x) = -4h_0x^2 - 4h_1x^3 - 4h_2x^4 - \ldots - 4h_{n-2}x^n - \ldots$ (2)
  - Do $h_n = 4h_{n-2}$ và $h_0 = 0$, $h_1 = 1$, cộng (1) và (2) ta có:
  - $g(x) - 4x^2g(x) = h_0 + h_1x = x$
  - Hay $g(x) = x/(1-4x^2) = x/(1-2x)(1+2x)$

GIẢI HỆ THỨC TRUY HỒI

- **Giải** Sử dụng phép tách phân thức ta viết
  - $g(x) = a/(1-2x) + b/(1+2x)$, a và b là các hằng
  - Suy ra $a = 1/4$, $b = -1/4$
  - $g(x) = 1/4[1/(1 - 2x) - 1/(1 + 2x)]$

    $= 1/4[(1+2x+(2x)^2+\ldots) – (1+(-2x)+(-2x)^2+\ldots)]$

    $$=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(2^n-(-2)^n)x^n$$
  - Vậy $h_n = 1/4[2^n - (-2)^n]$, $n = 0, 1, 2,\ldots$

GIẢI HỆ THỨC TRUY HỒI

- **Ví dụ 2** Sử dụng phương pháp hàm sinh để giải hệ thức truy hồi $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, $n \geq 2$, $f_0 = 1$, $f_1 = 1$
- **Giải:**
  - Gọi $g(x) = f_0 + f_1x + f_2x^2 + \ldots..$ (1)

$\Rightarrow$ $-xg(x) = -f_0x - f_1x^2 - f_2x^3 - \ldots..$ (2)

$\Rightarrow$ $-x^2g(x) = -f_0x^2 - f_1x^3 - f_2x^4 - \ldots..$ (3)

Cộng (1), (2) và (3); $f_0 = 1$, $f_1 = 1$

$g(x)(1 – x - x^2) = 1$

$\Rightarrow g(x) = 1/(1 – x – x^2)$; Chia đa thức ta được:

$g(x) = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^5 + \ldots$

Hàm g(x) sinh ra dãy {1, 1, 2, 3, 5, 8, ….}