Chương 1: TẬP HỢP - ÁNH XẠ

- Tập Hợp
- Ánh xạ

TẬP HỢP

- Các khái niệm và ký hiệu
- Các phép toán trên tập hợp
- Tập các tập con của một tập hợp
- Tính chất các phép toán trên tập hợp

CÁC KHÁI NIỆM VÀ KÝ HIỆU

1. Tập hợp: là một khái niệm cơ bản của toán học không được định nghĩa. Tập hợp có thể mô tả, chẳng hạn:
   - Tập các sinh viên lớp IT82, tập các số nguyên tố vv..
   - Tập rỗng: là tập hợp không có phần tử nào. ký hiệu ∅

CÁC KHÁI NIỆM VÀ KÝ HIỆU

2. Biểu diễn tập hợp: có 2 cách

- Liệt kê: $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$
- Nêu tính chất: $A = \{x \in \Omega | p(x)\}$; đọc tập các phần tử x thuộc Ω có tính chất p

Ví dụ $A = \{x \in R \mid 2x^2 + 3x - 5 = 0\}$

CÁC KHÁI NIỆM VÀ KÝ HIỆU

- Tập con: Cho A, B là hai tập hợp, nếu $\forall x \in A \Rightarrow x \in B$ thì A là tập con của B, ký hiệu: $A \subset B$
- Tập hợp bằng nhau: Nếu $A \subset B$ và $B \subset A$ thì tập A bằng tập B, ký hiệu: $A = B$
- Bản số: Số phần tử của tập hợp A được gọi là bản số của A (cardinality), ký hiệu: $|A|$

  Ví dụ $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$, thì $|A| = n$

CÁC PHÉP TOÁN TRÊN TẬP HỢP

Cho tập Ω (gọi là tập vũ trụ) và A, B các tập con của Ω

- Hợp của hai tập: $A \cup B = \{x \in \Omega \mid x \in A \text{ hoặc } x \in B\}$
- Giao của hai tập: $A \cap B = \{x \in \Omega \mid x \in A \text{ và } x \in B\}$
- Hiệu của hai tập: $A - B = \{x \in \Omega \mid x \in A \text{ và } x \notin B\}$

CÁC PHÉP TOÁN TRÊN TẬP HỢP

- Phần bù $\overline{A} = \{x \in \Omega \mid x \notin A\}$
- Tích Descartes $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) | a_i \in A_i, i=1,\ldots, n\}$

TẬP CÁC TẬP CON CỦA MỘT TẬP HỢP

- Tập các tập con: Cho tập X, tập $\wp(X) = \{A \mid A \subset X\}$ gọi là tập các tập con của tập X
  - Tập các tập con còn được ký hiệu $\wp(X) = 2^{|X|}$; nếu $|X|=n$ thì $|\wp(X)|= 2^n$
  - Ví dụ $X =\{a_1, a_2, a_3\}$, thì $\wp(X) = \{\varnothing, \{a_1\}, \{a_2\}, \{a_3\}, \{a_1, a_2\}, \{a_1, a_3\}, \{a_2, a_3\}, \{a_1, a_2, a_3\}\}$

TÍNH CHẤT CÁC PHÉP TOÁN

Cho A, B các tập con của tập Ω. Các phép toán $\cup$, $\cap$, trên tập hợp có tính chất:

- Giao hoán: $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$
- Kết hợp: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

  $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
- Phân bố: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

TÍNH CHẤT CÁC PHÉP TOÁN

- Luật De Morgan: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

  $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

- Tính chất của phần bù: $A \cup \overline{A} = \Omega$

  $\overline{A} \cap A = \varnothing$

ÁNH XẠ

- Các khái niệm
- Ánh xạ ngược
- Ánh xạ hợp
- Ánh xạ đồng nhất
- Các tính chất

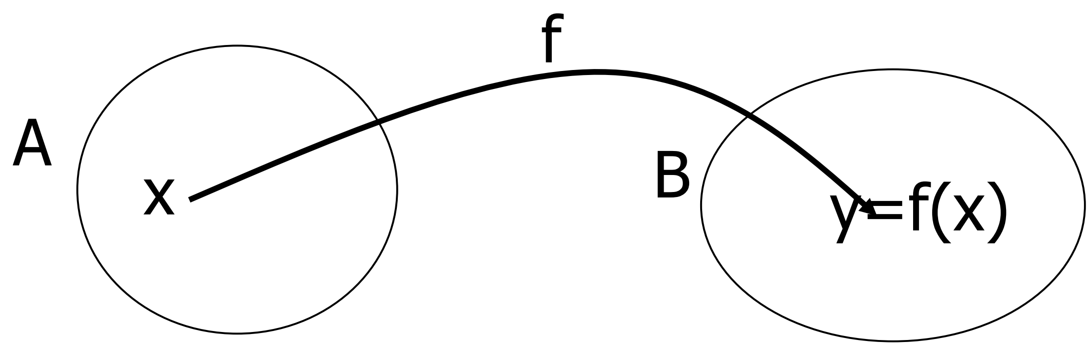
CÁC KHÁI NIỆM

- Ánh xạ: Một ánh xạ f từ tập A vào tập B là phép gán tương ứng mỗi phần tử x của A với một phần tử duy nhất y của B; y là ảnh của x qua f; x: là tạo ảnh của y

ký hiệu: $f: A \to B$

$x \mapsto f(x)$

➢ $x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$



CÁC KHÁI NIỆM

- Ánh xạ bằng nhau: cho 2 ánh xạ f: $A \to B$ và g : $A \to B$ được gọi là bằng nhau nếu:

  $\forall x \in A,\ f(x) = g(x)$

- Ảnh tập con: Nếu $E \subset A$ thì ảnh của E qua f là tập

  $f(E) = \{y \in B \mid \exists x \in E,\ y = f(x)\}$

  Nghĩa là $f(E) = \{f(x) \mid x \in E\}$

CÁC KHÁI NIỆM

- Nếu $F \subset B$ thì ảnh ngược (tạo ảnh) của F là tập

  $$f^{-1}(F) = \{x \in A \mid f(x) \in F\}$$

- Nếu $y \in B$, $f^{-1}(\{y\}) = f^{-1}(y) = \{x \in A \mid f(x) = y\}$

CÁC KHÁI NIỆM

- Giả sử ánh xạ f: $A \to B$, khi đó:
  - f là toàn ánh: nếu $f(A) = B$

    $\forall y \in B, \exists x \in A, y=f(x)$
  - f là đơn ánh: nếu hai phần tử khác nhau bất kỳ của A có ảnh khác nhau

    $\forall x, x' \in A, x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$
  - f là song ánh nếu đồng thời là đơn ánh và toàn ánh

    $\forall y \in B, \exists! x \in A, y = f(x)$

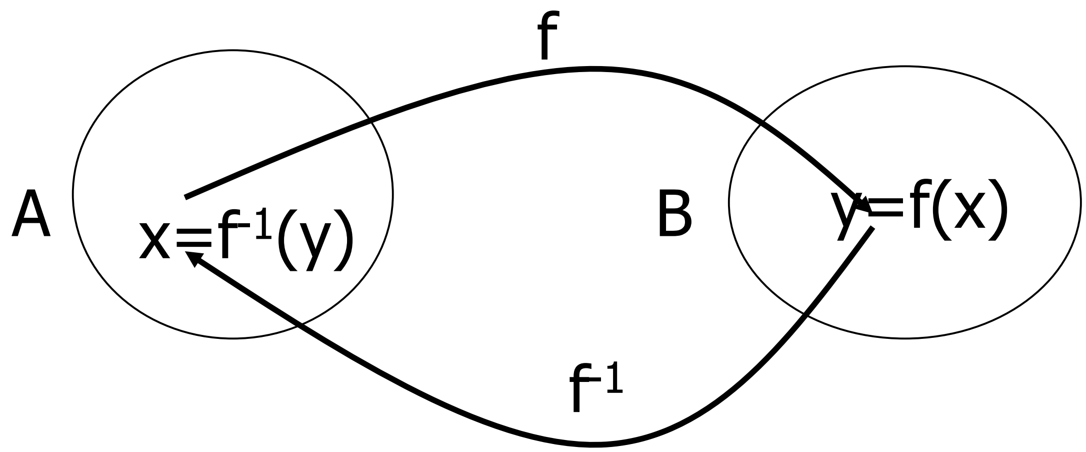
CÁC KHÁI NIỆM

Cho $A = \{a_1, a_2\}$, $B= \{b_1, b_2, b_3\}$, $C=\{c_1, c_2, c_3\}$

- $f: A \rightarrow B$; $f(a_1)= b_1$, $f(a_2)= b_3$ là một đơn ánh
- $g: C \rightarrow A$; $g(c_1)= a_1$, $g(c_2)= a_1$, $g(c_3)= a_2$ là một toàn ánh
- $h: B \rightarrow C$; $h(b_1)= c_2$, $h(b_2)= c_1$, $h(b_3)= c_3$ là một song ánh
- Tìm một ánh xạ không đơn ánh, không toàn ánh?

ÁNH XẠ NGƯỢC

- Ánh xạ ngược: Cho $f: A \to B$ là một song ánh;
- Tương ứng f^{-1}: $B \to A$, sao cho với mỗi $y \in B$ ứng với $x \in A$ mà $f(x) = y$.
- Khi đó: f^{-1} được gọi là ánh xạ ngược của f

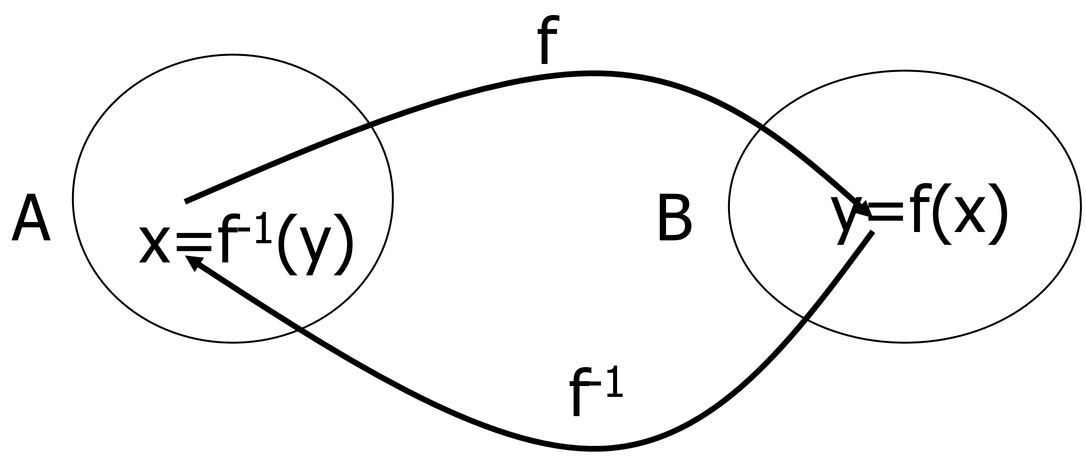


➢ $f^{-1}(y) = x$ khi và chỉ khi $f(x) = y$

ÁNH XẠ NGƯỢC

- Từ định nghĩa suy ra $\forall y \in B,\ f(f^{-1}(y)) = y$ và

  $\forall x \in A,\ f^{-1}(f(x)) = x$



ÁNH XẠ NGƯỢC

- Ví dụ: Cho $f: Z \to Z$, $x \mapsto x+1$ là một song ánh

  Ánh xạ ngược $f^{-1}: Z \to Z$

  $y \mapsto y - 1$ (nghĩa là $f^{-1}(y) = y-1$)

  Thật vậy, gọi x là ảnh của y qua f^{-1} thì

  $f^{-1}(y) = x$ (*)

  Theo định nghĩa ta có $f(x) = y$, hay $x + 1 = y \Leftrightarrow x = y-1$, thay vào (*) ta có $f^{-1}(y) = y - 1$

ÁNH XẠ HỢP

- Cho hai ánh xạ f: $A \to B$ và g: $B \to C$, ánh xạ hợp (tích) của hai ánh xạ f và g là ánh xạ h: $A \to C$ xác định bởi

$$h: A \to C$$

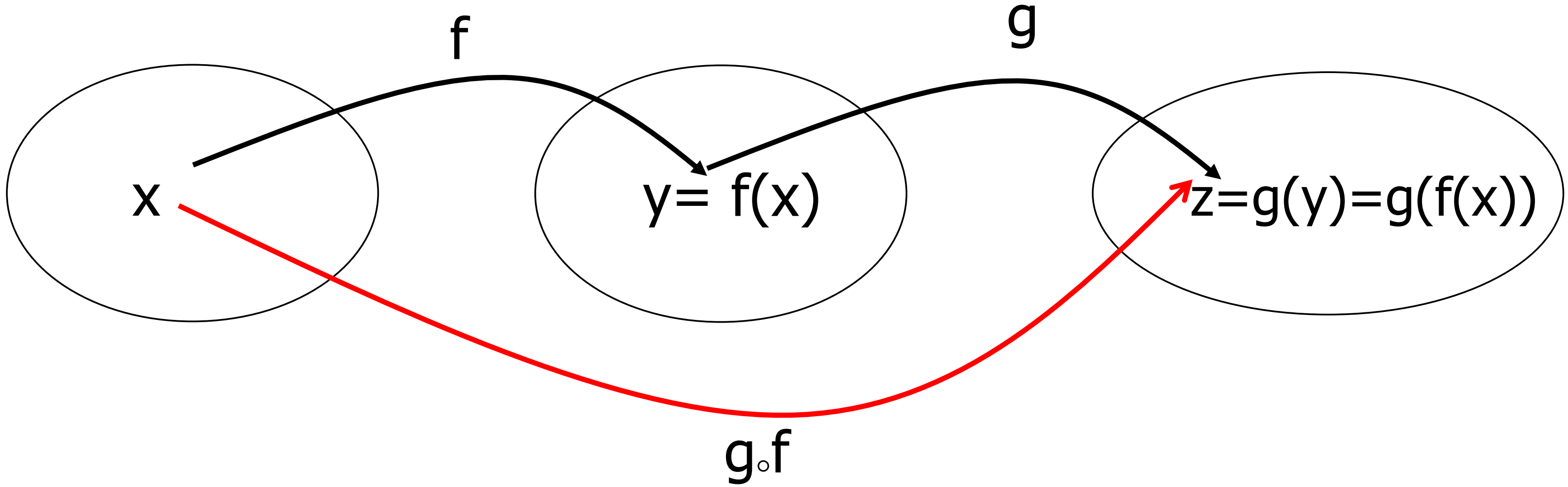
$$x \mapsto h(x)=g(f(x))$$

Ta viết $h = g^\circ f : A \to B \to C$

$$x \mapsto f(x) \mapsto h(x) = g(f(x))$$

ÁNH XẠ HỢP

- Ánh xạ hợp $h = g \circ f : A \to B \to C$ của hai ánh xạ $f: A \to B$ và $g: B \to C$



ÁNH XẠ ĐỒNG NHẤT

- Cho X là tập bất kỳ, ánh xạ

$$id_X: \; X \to X$$

$$x \mapsto x$$

$\forall x \in X$, được gọi là ánh xạ đồng nhất trên X

CÁC TÍNH CHẤT

- Cho các ánh xạ $f: A \to B$, $g: B \to C$ và $h: C \to D$
  - ➢ $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ (kết hợp)
  - ➢ $f \circ id_A = f$ và $id_B \circ f = f$

Chứng minh: $\forall x \in A$, $(h \circ (g \circ f))(x) = h[(g \circ f)(x)]$

$$= h[g(f(x))]$$

$$= (h \circ g)(f(x))$$

$$= ((h \circ g) \circ f)(x)$$

lưu ý: nói chung là $f \circ g \neq g \circ f$ (không giao hoán)

CÁC TÍNH CHẤT

- Cho $f: A \to B$, $g: B \to C$ là các song ánh

➢ $f \circ f^{-1} = id_B$ và $f^{-1} \circ f = id_A$

➢ $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ (xem như bài tập).

Chứng minh: rõ ràng $f \circ f^{-1}$ là ánh xạ từ B vào B và

$\forall y \in B, f \circ f^{-1}(y) = f(f^{-1}(y)) = y$

Vậy: $f \circ f^{-1} = id_B$

CÁC TÍNH CHẤT

Gọi $f: A \to B$, $E_1, E_2 \subset A$ và $F_1, F_2 \subset B$ ta có

- $f(E_1 \cup E_2) = f(E_1) \cup f(E_2)$
- $f(E_1 \cap E_2) \subset f(E_1) \cap f(E_2)$
- $f^{-1}(F_1 \cup F_2) = f^{-1}(F_1) \cup f^{-1}(F_2)$
- $f^{-1}(F_1 \cap F_2) = f^{-1}(F_1) \cap f^{-1}(F_2)$

Chứng minh: Xem như bài tập