GÓC EULER TRONG ĐIỀU KHIỂN CÁNH TAY ROBOT VỚI 6 BẬC TỰ DO

EULER ANGLES WITH APPLICATIONS TO SIX-AXIS ROBOTIC ARMS

Chu Bình Minh[1], **Hà Bình Minh**[2], **Nguyễn Mai Quyên**[3]

[1]*Khoa Khoa học cơ bản - Trường Đại học Kinh tế - Kỹ thuật Công nghiệp*

[2]*Khoa Hệ thống thông tin quản lý - Trường Đại học Ngân hàng Thành phố Hồ Chí Minh*

[3]*Khoa Toán kinh tế - Trường Đại học Kinh tế quốc dân*

Đến Tòa soạn ngày 11/02/2020, chấp nhận đăng ngày 24/02/2020

Tóm tắt: Các góc Euler đóng một vai trò quan trọng trong việc lập trình điều khiển cánh tay robot với 6 bậc tự do. Trong bài báo này chúng tôi xây dựng các công thức để xác định các góc Euler từ ma trận quay tổng quát. Các công thức được tác giả lập trình tính toán bằng ngôn ngữ lập trình Matlab và được mô tả bằng các ví dụ cụ thể.

Từ khóa: Góc Euler, cánh tay robot 6 bậc tự do.

Abstract: The Euler angles have important roles in programming and controlling six-axis robotic arms. In this paper we formulate the formulas to determine these Euler angles based on the general rotation matrix. The formulas are calculated by using the Matlab programming language and by numerical examples.

Keywords: Euler angles, six-axis robotic arms.

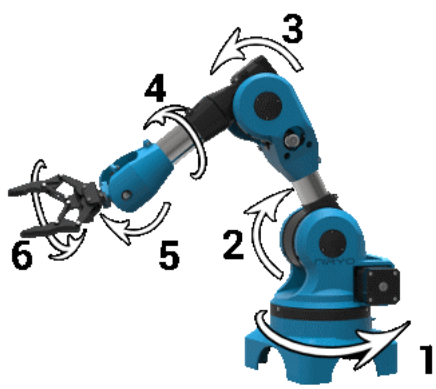
1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Ngày nay robot được sử dụng rộng rãi trong công nghiệp do chi phí đầu tư ngày càng rẻ, cộng với những lợi ích thu được từ sự hiệu quả, tốc độ, sự linh hoạt của những robot công nghiệp. Robot giúp cho các nhà máy giảm chi phí nhân công, tăng năng suất lao động, sản xuất chính xác, chất lượng đồng đều cùng với số lượng lớn, giúp giảm thời gian giao hàng, giảm chi phí vận hành.

Robot trong công nghiệp rất đa dạng và có nhiều bậc tự do, cho phép robot có sự linh hoạt và có thể sử dụng trong nhiều lĩnh vực sản xuất khác nhau. Cùng với đó, robot công nghiệp ngày càng được thu nhỏ về kích cỡ, cho phép các robot có thể thực hiện các thao tác tinh vi giống như bàn tay của con người. Cánh tay robot với nhiều bậc tự do là một trong những robot công nghiệp được sử dụng rộng rãi với số lượng ngày càng lớn, đặc biệt trong những ngành công nghiệp chế tạo như hàn, sơn, lắp ráp, đóng gói, với những thao tác chính xác và linh hoạt.

Cánh tay robot với 6 bậc tự do có sự linh hoạt tối đa so với những cánh tay robot với ít bậc tự do hơn. Với 6 bậc tự do, cánh tay robot có thể di chuyển bàn tay của nó (là điểm cuối của cánh tay) đến mọi vị trí, cũng như có thể xoay theo mọi hướng trong không gian, để thực hiện các thao tác cần thiết. Những robot với ít hơn 6 bậc tự do bị hạn chế về vị trí và hướng xoay khi thực hiện các thao tác trong không gian. Con số 6 bậc tự do là con số tối thiểu để cánh tay robot có thể di chuyển và xoay bàn tay của nó với sự linh hoạt tối đa trong không gian. Điều này đã được chứng minh bằng toán học, dựa trên lý thuyết do nhà toán học Euler (1707-1783) đưa ra năm 1776, xem trong [1].

Việc lập trình điều khiển cánh tay robot với 6 bậc tự do là vấn đề khó (xem [2], [4]), và đòi hỏi nhiều kiến thức chuyên sâu về toán học, cơ học, tự động hóa. Việc hiểu rõ các khía cạnh toán học liên quan đến cánh tay robot là rất cần thiết, chẳng hạn như sự biến đổi của các hệ trục tọa độ trong quá trình xoay và di chuyển của cánh tay. Sự biến đổi này liên quan đến các góc Euler, là một khái niệm quan trọng trong toán học, được nhà toán học Euler đưa ra. Bài báo này sẽ giải thích về các góc Euler, về mối liên hệ giữa các góc Euler và ma trận quay tổng quát, cũng như việc tính toán các góc Euler này.



Hình 1. Cánh tay robot với 6 bậc tự do của Công ty Niryo (nguồn https://niryo.com)

Cấu trúc của bài báo được trình bày như sau: Phần 2 giới thiệu về các góc Euler, phép quay hệ trục tọa độ và ma trận quay tổng quát. Phần 3 trình bày về việc tính toán các góc Euler từ ma trận quay tổng quát. Kết luận và các vấn đề liên quan sẽ được đưa ra trong Phần 4.

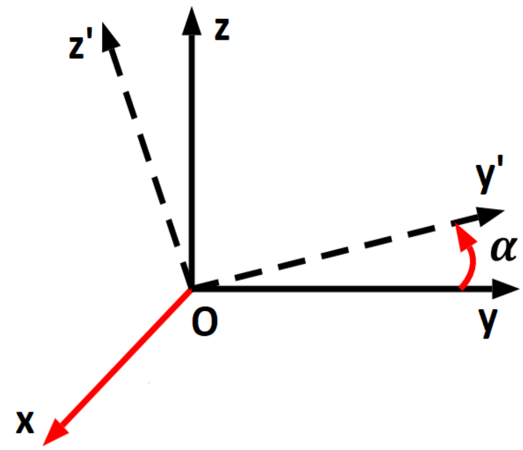
2. GÓC EULER VÀ MA TRẬN QUAY TỔNG QUÁT

2.1. Khái niệm góc Euler

Việc điều khiển cánh tay robot đòi hỏi phải di chuyển bàn tay của nó về những vị trí và hướng quay nhất định sau mỗi thao tác. Vị trí của bàn tay robot được đặc trưng bởi 3 tham số x, y, z, thể hiện các tọa độ theo chiều ngang, chiều dọc, và chiều cao tương ứng trong hệ tọa độ Cartesian. Hướng quay của bàn tay robot được đặc trưng bởi 3 tham số α, β, γ (hay còn gọi là các góc roll-pitch-yaw), là 3 góc Euler được định nghĩa thông qua 3 *phép quay cơ bản* như sau:

- ***Góc α:*** Nếu giữ nguyên trục Ox và quay mặt phẳng Oyz quanh trục Ox một góc α, thu được hệ trục tọa độ 3 chiều mới Oxy'z' như trong hình 2. Ma trận chuyển tương ứng với phép quay này là:

$$R_x(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \quad (1)$$



Hình 2. Giữ nguyên trục Ox và quay mặt phẳng Oyz quanh trục Ox một góc α

- ***Góc β:*** Tương tự như góc α, nếu giữ nguyên trục Oy và quay mặt phẳng Oxz quanh trục Oy một góc β, thu được hệ trục tọa độ 3 chiều mới Ox'yz'. Ma trận chuyển tương ứng với phép quay này là:

$$R_y(\beta) = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix} \quad (2)$$

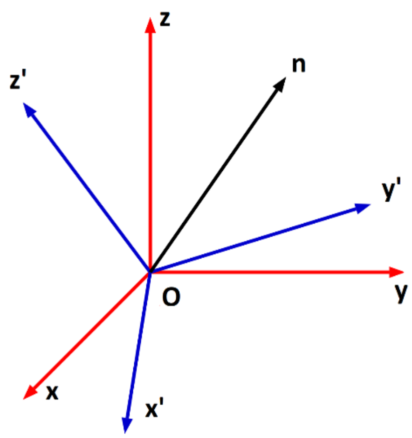
- ***Góc γ:*** Nếu ta giữ nguyên trục Oz và quay mặt phẳng Oxy quanh trục Oz một góc γ, thu được hệ trục tọa độ 3 chiều mới Ox'y'z. Ma trận chuyển tương ứng với phép quay này là:

$$R_z(\gamma) = \begin{bmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Để tham khảo chi tiết về các góc Euler, độc giả có thể tìm hiểu các tài liệu [2], [3].

2.2. Phép quay hệ trục tọa độ và ma trận quay tổng quát

Các phép quay cơ bản trong các công thức (1), (2), (3) là những trường hợp đặc biệt của phép quay hệ trục tọa độ được miêu tả như sau. Khi quay hệ trục tọa độ Oxyz quanh vector *n* một góc ϕ, thu được hệ trục tọa độ mới là Ox'y'z' như minh họa trong hình 3. Trong trường hợp vector *n* trùng với các vector đơn vị *i, j, k* tương ứng với mỗi trục toạ độ Ox, Oy, Oz, ta sẽ thu được các phép quay cơ bản trong các công thức (1), (2), và (3).



Hình 3. Phép quay hệ trục tọa độ

Ma trận chuyển tương ứng với phép quay hệ trục tọa độ nêu trên được gọi là *ma trận quay tổng quát*, là ma trận trực giao 3×3, và được cho dưới dạng sau (xem [3]):

$$R = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix} \qquad (4)$$

Ma trận *R* có thể biểu diễn dưới dạng tích của ba phép quay cơ bản được cho trong các công thức (1), (2) và (3). Chẳng hạn, giả sử ma trận *R* phân tích thành 3 phép quay cơ bản theo thứ tự sau: ta thực hiện phép quay theo trục z trước, sau đó thực hiện phép quay theo trục y và cuối cùng thực hiện phép quay theo trục x. Khi đó, kết quả của chuỗi các phép quay này sẽ được biểu diễn dưới dạng tích các ma trận như sau:

$$R = R_x(a)R_y(\beta)R_z(\gamma)$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\beta\cos\gamma & -\cos\beta\sin\gamma & \sin\beta \\ \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma + \cos\alpha\sin\gamma & -\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma + \cos\alpha\cos\gamma & -\sin\alpha\cos\beta \\ -\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma + \sin\alpha\sin\gamma & \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma + \sin\alpha\cos\gamma & \cos\alpha\cos\beta \end{bmatrix} \qquad (5)$$

Chú ý rằng ma trận quay tổng quát *R* thu được từ chuỗi phép quay trong công thức (5) được thực hiện theo thứ tự z-y-x. Nếu thực hiện chuỗi phép quay theo thứ tự khác với thứ tự z-y-x, sẽ thu được dạng biểu diễn khác của ma trận *R*. Lý do là vì phép nhân ma trận không có tính giao hoán nên thứ tự khác nhau của các phép quay cơ bản sẽ cho các kết quả khác nhau. Chẳng hạn, ma trận quay tổng quát theo chuỗi thứ tự x-y-z có dạng sau (xem [5]):

$$R = R_z(\gamma)R_y(\beta)R_x(a)$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\beta\cos\gamma & \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma & \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma + \sin\alpha\sin\gamma \\ \cos\beta\sin\gamma & \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma + \cos\alpha\cos\gamma & \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma - \sin\alpha\cos\gamma \\ -\sin\beta & \sin\alpha\cos\beta & \cos\alpha\cos\beta \end{bmatrix}$$

3. TÍNH TOÁN CÁC GÓC EULER TỪ MA TRẬN QUAY TỔNG QUÁT

3.1. Phát biểu bài toán

Bài toán. *Giả sử biết được ma trận quay tổng quát R thu được từ chuỗi phép quay được thực hiện theo thứ tự z-y-x, cần tính toán các góc Euler α, β, γ tương ứng với mỗi trục tọa độ.*

Nếu cho trước ma trận *R*, có thể tính được các góc Euler α, β, γ bằng cách cho các phần tử của *R* trong (4) trùng với các phần tử của ma trận tích $R_x(\alpha)R_x(\beta)R_x(\gamma)$ trong (5). Ta sẽ thu được 9 phương trình để tìm 3 ẩn số. Tuy nhiên, do ma trận *R* là trực giao nên các phần tử của *R* sẽ phụ thuộc với nhau bởi 6 ràng buộc. Như vậy, ta chỉ còn lại 3 phương trình để đi tìm 3 ẩn số.

Bài toán nêu trên được phát biểu tương tự trong [5], tuy nhiên thứ tự của chuỗi phép quay trong [5] được thực hiện theo thứ tự x-y-z. Có tất cả 12 cách tổ hợp các thứ tự trong chuỗi phép quay và được chia thành 2 nhóm, là: ***Proper Euler angles*** (*z-x-z, x-y-x,* *y-z-y*, *z-y-z*, *x-z-x*, *y-x-y*), và ***Tait-Bryan angles*** (*x-y-z*, *y-z-x*, *z-x-y*, *x-z-y*, *z-y-x*, *y-x-z*). Chuỗi thứ tự z-y-x được xét trong bài toán trên và chuỗi x-y-z trong [5] thuộc vào nhóm Tait-Bryan angles.

3.2. Hàm lượng giác ngược atan2

Để giải bài toán trên ta cần sử dụng một hàm số lượng giác ngược là atan2. Khác với hàm số lượng giác ngược arctan, hàm số atan2 có hai tham số là (*y*,*x*). Hàm atan2(*y*,*x*) là hàm trả về góc giữa trục Ox với tia qua O và điểm có toạ độ (x,*y*). Hàm này trả về giá trị dương nếu góc quay từ trục Ox ngược chiều kim đồng hồ và trả về giá trị âm nếu góc quay thuận chiều kim đồng hồ, các giá trị này nằm trong đoạn $[-\pi,\pi]$. Hàm atan2(*y*,*x*) có sẵn trong nhiều ngôn ngữ lập trình. Công thức của tính toán hàm atan2(*y*,*x*) được cho bởi:

$$\operatorname{atan2}=(x,y)=\begin{cases}\arctan\dfrac{\gamma}{x} & x>0\\ \pi-\arctan\dfrac{\gamma}{x} & x<0, y\ge 0\\ \arctan\dfrac{\gamma}{x}-\pi & x<0, y<0\\ +\dfrac{\pi}{2} & x=0, y>0\\ -\dfrac{\pi}{2} & x=0, y<0\\ underfined & x=0, y=0\end{cases}$$

3.3. Thuật toán tính các góc Euler

Để tính toán các góc Euler α, β, γ từ ma trận quay tổng quát *R*, ta sẽ đi theo sơ đồ thuật toán như sau:

$$R_{13}\to\beta\to(R_{23},R_{33})\to\alpha\to(R_{11},R_{12})\to\gamma$$

Bước 1: Tính góc β.

Từ phương trình $R_{13}=\sin\beta$, ta có $\beta_1=\sin^{-1}(R_{13})$ hoặc $\beta_2=\pi-\sin^{-1}(R_{13})$. Như vậy, sử dụng giá trị R_{13} ta sẽ xác định được hai giá trị cho góc β.

Bước 2: Tính góc α.

Để tính toán góc α, ta nhận thấy

$$\frac{R_{23}}{R_{33}}=\tan\alpha \tag{6}$$

Do đó,

$$\alpha=\operatorname{atan2}(-R_{23},-R_{33}) \tag{7}$$

Chú ý rằng trong phương trình (7): nếu $\cos\beta>0$ thì $\alpha=\operatorname{atan2}(-R_{23},R_{33})$ và nếu $\cos\beta<0$ thì $\alpha=\operatorname{atan2}(R_{23},-R_{33})$. Để giải quyết vấn đề này, ta sẽ sử dụng công thức sau:

$$\alpha=\operatorname{atan2}\left(-\frac{R_{23}}{\cos\beta},\frac{R_{33}}{\cos\beta}\right) \tag{8}$$

Phương trình (8) xác định trong trường hợp $\cos\beta\neq 0$. Trường hợp $\cos\beta=0$ sẽ được thảo luận trong mục 3.4. Như vậy, với 2 giá trị β thu được ở bước 1, ta tính được hai giá trị của α tương ứng như sau:

$$\alpha_1=\operatorname{atan2}\left(-\frac{R_{23}}{\cos\beta_1},\frac{R_{33}}{\cos\beta_1}\right) \tag{9}$$

$$\alpha_2=\operatorname{atan2}\left(-\frac{R_{23}}{\cos\beta_2},\frac{R_{33}}{\cos\beta_2}\right) \tag{10}$$

Bước 3: Tính góc γ

Ta có

$$\frac{-R_{12}}{R_{11}}=\tan\gamma$$

Tương tự như lập luận trong bước 2, ta thu được

$$\gamma=\operatorname{atan2}\left(-\frac{R_{12}}{\cos\beta},\frac{R_{11}}{\cos\beta}\right) \tag{11}$$

Phương trình (11) xác định trong trường hợp $\cos\beta\neq 0$. Trường hợp $\cos\beta=0$ sẽ được thảo luận trong mục 3.4. Ứng với các giá trị của β trong bước 1, ta tính được 2 giá trị tương ứng của γ.

$$\gamma_1 = \operatorname{atan2}\left(-\frac{R_{12}}{\cos\beta_1}, \frac{R_{11}}{\cos\beta_1}\right) \quad (12)$$

$$\gamma_2 = \operatorname{atan2}\left(-\frac{R_{12}}{\cos\beta_2}, \frac{R_{11}}{\cos\beta_2}\right) \quad (13)$$

Kết quả:

Như vậy trong trường hợp $\cos\beta \neq 0$, ta luôn xác định được 2 bộ ba góc Euler α, β, γ từ ma trận *R*:

$$(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1), (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$$

3.3. Trường hợp suy biến khi $\cos\beta = 0$

Trong trường hợp phần tử R_{13} của ma trận quay tổng quát bằng 1 hoặc bằng –1, ta sẽ không thể sử dụng các kỹ thuật tính toán trong mục 3.3 vì $\cos\beta = 0$ ứng với $\beta = -\pi/2$ hoặc $\beta = \pi/2$. Khi đó các phần R_{11}, R_{12}, R_{23}, R_{33} đều bằng không nên phương trình (8) và phương trình (11) trở thành

$$\alpha = \operatorname{atan2}\left(-\frac{0}{0}, \frac{0}{0}\right)$$

$$\gamma = \operatorname{atan2}\left(-\frac{0}{0}, \frac{0}{0}\right)$$

Do đó, các phần tử R_{11}, R_{12}, R_{23}, R_{33} không có giá trị để tính toán α, γ nên ta sẽ sử dụng các phần tử khác của ma trận quay tổng quát để tính toán. Để tính toán, ta sẽ lần lượt xét hai trường hợp sau đây.

Trường hợp $\beta = \pi/2$:

Ta có

$$R_{21} = \sin\alpha\cos\gamma + \cos\alpha\sin\gamma = \sin(\alpha+\gamma)$$

$$R_{31} = -\cos\alpha\cos\gamma + \sin\alpha\sin\gamma = -\cos(\alpha+\gamma)$$

$$R_{22} = -\sin\alpha\sin\gamma + \cos\alpha\cos\gamma = \cos(\alpha+\gamma) = -R_{31}$$

$$R_{32} = \cos\alpha\sin\gamma + \sin\alpha\cos\gamma = \sin(\alpha+\gamma) = R_{21}$$

Sử dụng phương trình của R_{21} và R_{31} ta có:

$$\alpha + \gamma = \operatorname{atan2}(R_{21}, -R_{31})$$

Từ đó suy ra

$$\alpha = -\gamma + \operatorname{atan2}(R_{21}, -R_{31})$$

Trường hợp $\beta = -\pi/2$:

Tương tự ta có

$$R_{21} = -\sin\alpha\cos\gamma + \cos\alpha\sin\gamma = -\sin(\alpha-\gamma)$$

$$R_{31} = \cos\alpha\cos\gamma + \sin\alpha\sin\gamma = \cos(\alpha-\gamma)$$

$$R_{22} = \sin\alpha\sin\gamma + \cos\alpha\cos\gamma = \cos(\alpha-\gamma) = R_{13}$$

$$R_{32} = -\cos\alpha\sin\gamma + \sin\alpha\cos\gamma = \sin(\alpha-\gamma) = -R_{21}$$

Sử dụng phương trình của R_{21} và R_{31} ta có

$$\alpha - \gamma = \operatorname{atan2}(-R_{21}, R_{31})$$

Từ đó suy ra

$$\alpha = \gamma + \operatorname{atan2}(-R_{21}, R_{31})$$

Nhận xét: Như vậy, trong cả hai trường hợp $\beta = \pi/2$ và $\beta = -\pi/2$ ta đều xây dựng được mối liên hệ giữa α và γ, hiện tượng này được gọi là Gimbal lock. Mặc dù trong các trường hợp này, ta có vô số nghiệm cho bài toán nhưng trong thực hành thì chỉ cần tìm một nghiệm nên ta sẽ cho $\gamma=0$ và tính α theo công thức trên.

Kết hợp các công thức trong hai mục 3.3 và 3.4, việc tính toán các góc Euler được lập trình bằng ngôn ngữ Matlab như sau:

```
function [alpha1,alpha2,beta1,beta2,
gamma1,gamma2] = euler_angle(R)
% Compute Euler angles from rotation
% matrix R.
% USAGE:
% [alpha1,alpha2,beta1,beta2,gamma1,
% gamma2] = euler_angle(R)
if (R(1,3)~=1)&&(R(1,3)~=1)
    beta1=asin(R(1,3))
```

```
        alpha1=atan2(-R(2,3)*cos(beta1),
                     R(3,3)*cos(beta1))
        gamma1=atan2(-R(1,2)*cos(beta1),
                     R(1,1)*cos(beta1))
        beta2=pi-beta1
        alpha2=atan2(-R(2,3)*cos(beta2),
                     R(3,3)*cos(beta2))
        gamma2=atan2(-R(1,2)*cos(beta2),
                     R(1,1)*cos(beta2))
else
        beta1=pi/2
        gamma1=0
        alpha1=atan2(R(2,1),-R(3,1))
        beta2=-pi/2
        gamma2=0
        alpha2=atan2(-R(2,1),R(3,1))
end
```

3.4. Ví dụ minh họa

Để minh hoạ cho việc tính toán các góc Euler, ta xét hai ví dụ sau.

Ví dụ 1. Trong ví dụ này, $\cos\beta \neq 0$, ta sẽ tính các góc Euler theo Thuật toán trong mục 3.3. Giả sử ma trận quay tổng quát R được cho bởi

$$R = \begin{bmatrix} 0,6124 & -0,6124 & 0,5000 \\ 0,2500 & 0,7500 & 0,6124 \\ -0,7500 & -0,2500 & 0,6124 \end{bmatrix}$$

Trước tiên, ta tính β theo công thức trong bước 1

$$\beta_1 = \sin^{-1}(0,5000) = \frac{\pi}{6}$$

$$\beta_2 = \pi - \beta_1 = \frac{5\pi}{6}$$

Sau đó, tính α

$$\alpha_1 = \operatorname{a}\tan 2\left(-\frac{0,6124}{\cos\pi/6}, \frac{0,6124}{\cos\pi/6}\right) = -\frac{\pi}{4}$$

$$\alpha_2 = \operatorname{a}\tan 2\left(-\frac{0,6124}{\cos 5\pi/6}, \frac{0,6124}{\cos 5\pi/6}\right) = \frac{3\pi}{4}$$

Cuối cùng, ta tìm γ

$$\gamma_1 = \operatorname{a}\tan 2\left(-\frac{-0,6124}{\cos\pi/6}, \frac{0,6124}{\cos\pi/6}\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$\gamma_2 = \operatorname{a}\tan 2\left(-\frac{-0,6124}{\cos 5\pi/6}, \frac{0,6124}{\cos 5\pi/6}\right) = -\frac{3\pi}{4}$$

Vậy ta có được hai bộ ba góc Euler (α, β, γ) là:

$$\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right), \left(\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, -\frac{3\pi}{4}\right)$$

Ví dụ 2. Trong ví dụ này, $\cos\beta = 0$, ta sẽ tính các góc Euler α, β, γ theo mục 3.4. Giả sử rằng

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0,8660 & 0,5000 & 0 \\ -0,5000 & 0,8660 & 0 \end{bmatrix}$$

Trước tiên, để tìm β ta có

$$\beta_1 = \sin^{-1}(1) = \frac{\pi}{2}$$

$$\beta_2 = -\beta_1 = -\frac{\pi}{2}$$

Xét trường hợp $\beta_1 = \frac{\pi}{2}$:

$$\alpha = -\gamma + \operatorname{a}\tan 2(R_{21}, -R_{31})$$

$$\alpha = -\gamma + \operatorname{a}\tan 2(0,8660; 0,5000) = -\gamma + \frac{\pi}{3}$$

Xét trường hợp $\beta_1 = -\frac{\pi}{2}$:

$$\alpha = \gamma + \operatorname{a}\tan 2(-R_{21}, R_{31})$$

$$\alpha = \gamma + \operatorname{a}\tan 2(-0,8660; -0,5000)$$

$$\alpha = \gamma - \frac{2\pi}{3}$$

Ta thấy có vô số góc Euler (α, β, γ) dạng

$$\left(-\gamma + \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \gamma\right)$$

hoặc

$$\left(\gamma-\frac{2\pi}{3},-\frac{\pi}{2},\gamma\right)$$

thỏa mãn bài toán. Nếu ta chọn $\gamma=0$ ta có thể lấy hai bộ góc Euler (α, β, γ) như sau:

$$\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2},0\right)$$

hoặc

$$\left(\frac{-2\pi}{3},-\frac{\pi}{2},0\right)$$

4. KẾT LUẬN

Dựa vào tính chất của các phép quay *z-y-x*, chúng tôi đã xây dựng được các công thức để xác định các góc Euler từ ma trận quay tổng quát. Các công thức để xác định các góc Euler được xây dựng cho hai trường hợp tổng quát và suy biến, được thể hiện qua ngôn ngữ lập trình Matlab và qua các ví dụ cụ thể. Dựa vào các kết quả này, chúng tôi có thể xây dựng các công thức xác định góc Euler cho các phép quay khác trong việc lập trình điều khiển cánh tay robot 6 bậc tự do.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Nauk, I.A., *"Novi Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae"*, Palala Press, United States, (2015).

[2] Robotic Systems Lab, *"Robot Dynamics Lecture Notes"*, ETH Zurich, (2017).

[3] Simon, L.A., "*Rotations, Quaternions, and Double Groups",* Dover Publications, New York (2005).

[4] Guida, R., De Simone, M.C., Dašić, P., Guida, D.*, " Modeling techniques for kinematic analysis of a six-axis robotic arm"*, IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, Vol. 568, Con. 1, (2019*).*

[5] Gregory G. Slabaugh, *"Computing Euler angles from a rotation matrix"*, (2011).

Thông tin liên hệ: **Chu Bình Minh**

Điện thoại: 0912207854; Email: cbminh@uneti.edu.vn

Đơn vị công tác: Khoa Khoa học cơ bản, Trường Đại học Kinh tế - Kỹ thuật Công nghiệp.

Hà Bình Minh

Điện thoại: 0976788196; Email: minhhb@buh.edu.vn

Đơn vị công tác: Khoa Hệ thống thông tin quản lý, Trường Đại học Ngân hàng Thành phố Hồ Chí Minh.

Nguyễn Mai Quyên

Điện thoại: 0914026515; Email: nguyen-mai-quyen@neu.edu.vn

Đơn vị công tác: Khoa Toán kinh tế, Trường Đại học Kinh tế quốc dân.