PHÉP BIẾN ĐỔI TÍCH CHẬP LAPLACE VÀ ỨNG DỤNG

ON THE LAPLACE CONVOLUTION TRANSFORM AND APPLICATIONS

Lê Xuân Huy, Trần Văn Toàn

Khoa Khoa học cơ bản, Trường Đại học Kinh tế - Kỹ thuật Công nghiệp

Đến Tòa soạn ngày 22/10/2021, chấp nhận đăng ngày 20/12/2021

Tóm tắt: Trong bài báo này đề cập tới thiết lập và nghiên cứu một lớp phép biến đổi tích phân liên quan đến tích chập Laplace. Qua đó ứng dụng vào việc giải một lớp các phương trình và hệ phương trình vi-tích phân dạng Volterra.

Từ khóa: biến đổi Laplace, tích chập, phương trình Volterra

Abstract: In this paper we introduce a class of integral transform related to convolution Laplace. As applications we apply this convolution transform to solve some classes of the Volterra integro-differential equations.

Keywords: Laplace transform, *convolution*, Volterra equation

1. MỞ ĐẦU

Phương trình vi phân và vi - tích phân luôn là đề tài được nhiều nhà toán học quan tâm nghiên cứu. Những phương trình này thường được xuất hiện trong các bài toán vật lý, điều khiển tự động, nhiệt học... Để giải các phương trình này, người ta thường sử dụng các phương pháp truyền thống. Tuy nhiên, không phải lúc nào việc sử dụng các phương pháp đó cũng thực hiện được một cách dễ dàng. Trong những năm gần đây, có nhiều nhóm nghiên cứu trong và ngoài nước đã xây dựng cách giải các phương trình trên dựa vào phép biến đổi tích phân kiểu tích chập, tức là phép biến đổi tích chập. Đó là các phép biến đổi tích chập Fourier, Mellin, Fourier cosine, Fourier sine và Kontorovich-Lebedev (xem [4, 7, 8]) hoặc các phép biến đổi tích chập suy rộng Laplace (xem [5, 6]). Tuy nhiên, theo sự hiểu biết của chúng tôi phép biến đổi tích chập Laplace (cổ điển) đến nay vẫn chưa được đề cập và nghiên cứu. Trong bài báo này, chúng tôi sẽ thiết lập và nghiên cứu một lớp phép biến đổi tích chập Laplace. Qua đó, chúng tôi áp dụng vào việc giải một lớp các phương trình, hệ phương trình vi-tích phân dạng Volterra cùng những ví dụ số cụ thể.

2. PHÉP BIẾN ĐỔI TÍCH CHẬP LAPLACE

Biến đổi Laplace của hàm gốc $k(x)$ là một hàm theo biến y được kí hiệu và xác định bởi (xem [1, 2, 3])

$$(Lk)(y) = \int_0^\infty k(x)e^{-xy}dx,\ y \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} y > 0.$$

Tuy nhiên trong nội dung bài báo này chúng tôi chỉ nghiên cứu với y là số thực dương. Tích chập của hai hàm f và k đối với phép biến đổi Laplace được định nghĩa

$$(f * k)(x) = \int_0^x f(y)k(x-y)dy,\ x > 0$$

và thỏa mãn đẳng thức nhân tử hóa:

$$L(f * k)(y) = (Lf)(y)(Lk)(y),\ y > 0.$$

Định lý 2.1. Giả sử f và k là hai hàm liên tục thuộc không gian hàm khả tích $L_1(\mathbb{R}_+)$. Khi đó tích chập $f*k$ cũng thuộc $L_1(\mathbb{R}_+)$ và thỏa mãn bất đẳng thức chuẩn

$$\|f*k\|_{L_1(\mathbb{R}_+)} \le \|f\|_{L_1(\mathbb{R}_+)} \|k\|_{L_1(\mathbb{R}_+)}. \qquad (2.1)$$

Chứng minh. Do k là hàm liên tục và thuộc $L_1(\mathbb{R}_+)$, nên k bị chặn trong $\mathbb{R}_+$. Kết hợp với $f \in L_1(\mathbb{R}_+)$ suy ra fk thuộc $L_1(\mathbb{R}_+)$.

$$|f*k| = \left|\int_0^x f(y)k(x-y)dy\right|$$

$$\le \int_0^x |f(y)k(x-y)|dy = \|fk\|_{L_1(\mathbb{R}_+)}.$$

Suy ra $f*k$ tồn tại, liên tục. Ta có

$$\|f*k\|_{L_1(\mathbb{R}_+)} = \int_0^\infty |f*k|dx = \int_0^\infty \left|\int_0^x f(y)k(x-y)dy\right|dx$$

$$\le \int_0^\infty\int_0^\infty |f(y)k(x-y)|dydx. \qquad (2.2)$$

Mặt khác, bằng cách đặt $t = x-y, t \in \mathbb{R}_+$ và chú ý rằng $k(t)$ là hàm gốc nên $k(t)=0, \forall t<0,$ suy ra $\int_{-y}^0 k(t)dt = 0, \forall y>0.$

Do đó ta có

$$\int_0^\infty k(x-y)dx = \int_{-y}^{\infty-y} k(t)dt$$

$$= \int_{-y}^0 k(t)dt + \int_0^\infty k(t)dt = \int_0^\infty k(t). \quad (2.3)$$

Từ (2.2) và (2.3), ta suy ra

$$\|f*k\|_{L_1(\mathbb{R}_+)} \le \int_0^\infty\int_0^\infty |f(y)||k(t)|dydt$$

$$= \int_0^\infty |f(y)|dy \int_0^\infty |k(y)|dt = \|f\|_{L_1(\mathbb{R}_+)}\|k\|_{L_1(\mathbb{R}_+)} < \infty.$$

Định lý đã được chứng minh.

Từ điều kiện của Định lý 2.1, tích chập $f*k$ tồn tại, liên tục và thuộc $L_1(\mathbb{R}_+)$. Suy ra $\frac{d}{dx}(f*k)(x)$ cũng thuộc $L_1(\mathbb{R}_+)$. Đây là điều kiện quan trọng để ta thiết lập và nghiên cứu phép biến đổi tích chập có dạng sau:

$$T_k : L_1(\mathbb{R}_+) \to L_1(\mathbb{R}_+)$$

$$f(x) \mapsto g(x) = \left(1+\frac{d}{dx}\right)\int_0^x f(y)k(x-y)dy. \quad (2.4)$$

Định lý 2.2. Giả sử f, k là hai hàm liên tục, thuộc $L_1(\mathbb{R}_+)$ và $|(1+y)(Lk)(y)| = 1, y>0.$

Khi đó, tồn tại phép biến đổi ngược có dạng

$$T^{-1} : L_1(\mathbb{R}_+) \to L_1(\mathbb{R}_+)$$

$$f(x) = \left(1+\frac{d}{dx}\right)\int_0^x g(y)\bar{k}(x-y)dy, \qquad (2.5)$$

trong đó $\bar{k}$ là liên hợp phức của k.

Chứng minh: Bằng cách sử dụng biến đổi Laplace L lên hai vế của (2.4) và sử dụng công thức biến đổi Laplace của đạo hàm (3.4.12) trong [3], ta có

$$(Lg)(y) = L\left[\left(1+\frac{d}{dx}\right)(f*k)(x)\right](y)$$

$$= L(f*k)(y) + yL(f*k)(y) - (f*k)(0)$$

$$= (1+y)L(f*k)(y) = (1+y)(Lf)(y)(Lk)(y).$$

Tương đương với

$$\overline{(1+y)(Lk)(y)}(Lg)(y) = |(1+y)(Lk)(y)|^2 (Lf)(y).$$

Kết hợp với giả thiết của Định lý 2.2, ta suy ra

$$(Lf)(y) = (1+y)\left(L\bar{k}\right)(y)\left(Lg\right)(y)$$

$$= (1+y)L\left(\bar{k}*g\right)(y) = (1+y)L\left(g*\bar{k}\right)(y)$$

$$= L\left[\left(1+\frac{d}{dx}\right)\left(g*\bar{k}\right)(x)\right](y).$$

Từ đó suy ra phép biến đổi ngược có dạng

$$f(x) = \left(1+\frac{d}{dx}\right)\left(g*\bar{k}\right)dx.$$

Tính chất 2.1. Giả sử f, k và k'(đạo hàm của k) là các hàm thuộc $L_1(\mathbb{R}_+)$ và $k(0)=0$. Khi đó ta có các đánh giá sau

$$\left(T_k f\right)(x)=\left(f*(k+k')\right)(x), \tag{2.6}$$

$$f(x)=\left(g*(\overline{k}+\overline{k}')\right)(x). \tag{2.7}$$

Trong đó $\overline{k}, \overline{k}'$ tương ứng là liên hợp phức của k, k'.

Chứng minh. Ta chứng minh (2.6). Ta có:

$$\begin{aligned}
&(Lg)(y)=L(T_k f)(y)\\
&=(1+y)L(f*k)(y)-(f*k)(0)\\
&=(1+y)L(f*k)(y)=L(f*(k+k'))(y)\\
&=(Lf)(y)(L(k)(y)+y(Lk))
\end{aligned}$$

Mặt khác vì

$y(Lk)(y)=(Lk')(y)+k(0)=L(k')(y)$ nên

$$\begin{aligned}
&L(T_k f)(y)=(Lf)(y)(Lk)(y)+(Lk')(y)\\
&=(Lf)(y)L(k+k')(y)=L(f*(k+k'))(y).
\end{aligned}$$

Suy ra (2.6).

Việc chứng minh công thức (2.7) là tương tự.

3. GIẢI PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH VI-TÍCH PHÂN VOLTERRA

Trong phần này, bằng cách sử dụng phép biến đổi tích chập Laplace (2.4) chúng ta có thể giải một lớp các phương trình và hệ phương trình vi-tích phân Volterra.

3.1. Giải phương trình vi-tích phân Volterra

a) Xét phương trình vi-tích phân có dạng

$$f(x)+\left(1+\frac{d}{dx}\right)\int_0^x f(y)k(x-y)dy$$
$$=h(x), \quad x>0. \tag{3.1}$$

Trong đó $k(x), h(x)$ là các hàm cho trước, $k(0)=0$, $f(x)$ là ẩn hàm cần tìm.

Bằng cách tác động phép biến đổi Laplace L lên hai vế của phương trình (3.1), ta được

$$(Lf)(y)+(1+y)(Lf)(y)(Lk)(y)=(Lh)(y).$$

Sử dụng công thức (3.4.12) trong [3] và điều kiện $k(0)=0$, ta có

$$(Lf)(y)=\frac{(Lh)(y)}{1+(1+y)(Lk)(y)}=L(f*(k+k'))(y).$$

Từ đó tác động phép biến đổi Laplace ngược ta nhận được công thức nghiệm

$$f(x)=L^{-1}\left[\frac{(Lh)(y)}{1+L(k+k')(y)}\right](x).$$

Ví dụ 1. Giải phương trình

$$f(x)+\left(1+\frac{d}{dx}\right)\int_0^x f(y)\sin(x-y)dy$$
$$=\cos x,\ x>0. \tag{3.2}$$

Áp dụng biến đổi Laplace L lên phương trình (3.2) và sử dụng các công thức (3.2.9), (3.2.10) trong [3], ta có

$$(Lf)(y)+(1+y)(Lf)(y)\frac{1}{y^2+1}=\frac{y}{y^2+1}.$$

Suy ra nghiệm của phương trình đại số này là

$$(Lf)(y)=\frac{y}{y^2+y+2}$$

$$=\frac{y+\frac{1}{2}}{\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}}-\frac{1}{\sqrt{7}}\frac{\frac{\sqrt{7}}{2}}{\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}}.$$

Kết hợp các công thức (3.4.3), (3.4.4) trong [3] và sử dụng biến đổi Laplace ngược, ta nhận được nghiệm của phương trình là

$$f(x)=e^{-\frac{x}{2}}\cos\frac{\sqrt{7}}{2}x-\frac{1}{\sqrt{7}}e^{-\frac{x}{2}}\sin\frac{\sqrt{7}}{2}x.$$

b) Xét phương trình vi-tích phân có dạng

$$f(x)+f'(x)+\left(1+\frac{d}{dx}\right)\int_0^x f(y)k(x-y)dy=h(x),$$
$$x>0,\ f(0)= \tag{3.3}$$

Trong đó $k(x), h(x)$ là các hàm cho trước, $f(x)$ là ẩn hàm cần tìm.

Bằng cách tác động phép biến đổi Laplace L lên hai vế của phương trình (3.3) kết hợp điều kiện $f(0)=0$, ta được

$$\left(Lf\right)(y)+y\left(Lf\right)(y)+(1+y)\left(Lf\right)(y)=\left(Lh\right)(y)$$

Sử dụng công thức (3.2.8) trong [3], suy ra

$$\left(Lf\right)(y)=\frac{\left(Lh\right)(y)}{(1+y)\left[1+(Lk)(y)\right]}=\frac{L\left(e^{-x}*h\right)(y)}{1+(Lk)(y)}.$$

Từ đó tác động phép biến đổi Laplace ngược ta nhận được công thức nghiệm

$$f(x)=L^{-1}\left[\frac{L\left(e^{-x}*h\right)(y)}{1+(Lk)(y)}\right](x).$$

Ví dụ 2. Giải phương trình

$$f(x)+f'(x)+\left(1+\frac{d}{dx}\right)\int_0^x f(y)e^{-(x-y)}dy$$
$$=\sinh 2x,\quad x>0. \qquad (3.4)$$

Áp dụng biến đổi Laplace L lên phương trình (3.4) và sử dụng các công thức (3.2.8), (3.2.11) trong [3], ta nhận được

$$\left(Lf\right)(y)+y\left(Lf\right)(y)+(1+y)\left(Lf\right)(y)\frac{1}{y+1}=\frac{2}{y^2-4}.$$

Suy ra

$$\left(Lf\right)(y)=\frac{2}{(y+2)(y^2-4)}=L(f*(k+k'))(y).$$

Kết hợp các công thức (3.4.11), (3.4.2) trong [3] và sử dụng biến đổi Laplace ngược, ta nhận được nghiệm của phương trình là

$$f(x)=\frac{1}{4}\sinh 2x-\frac{1}{2}e^{-2x}x.$$

3.2. Giải hệ phương trình vi-tích phân Volterra

Xét hệ phương trình vi-tích phân có dạng

$$f(x)+\left(1+\frac{d}{dx}\right)\int_0^x g(y)k_1(x-y)dy=h_1(x),$$
$$g(x)+\left(1+\frac{d}{dx}\right)\int_0^x f(y)k_2(x-y)dy=h_2(x),\ x>0. \qquad (3.5)$$

Trong đó $k_1(x),h_1(x),k_2(x),h_2(x)$ là các hàm cho trước và $f(x),g(x)$ là các ẩn hàm cần tìm.

Trước hết, ta viết lại hệ (3.5) dưới dạng

$$f(x)+\left(1+\frac{d}{dx}\right)\left(g*k_1\right)(x)=h_1(x),$$
$$g(x)+\left(1+\frac{d}{dx}\right)\left(f*k_2\right)(x)=h_2(x),\ x>0. \qquad (3.6)$$

Tác động phép biến đổi Laplace $\mathcal{L}$ lên hai vế của phương hệ trình (3.6) và sử dụng công thức biến đổi Laplace của đạo hàm (3.4.12), ta được hệ phương trình đại số

$$\left(Lf\right)(y)+(1+y)L(f*k_1)(y)-(f*k_1)(0)=\left(Lh_1\right)(y),$$
$$\left(Lg\right)(y)+(1+y)L(f*k_2)(y)-(f*k_2)(0)=\left(Lh_2\right)(y).$$

Do $(g*k_1)(0)=0,(f*k_2)(0)=0$, suy ra

$$\left(Lf\right)(y)+(1+y)(Lg)(y)(Lk_1)(y)=\left(Lh_1\right)(y),$$
$$\left(Lg\right)(y)+(1+y)(Lf)(y)(Lk_2)(y)=\left(Lh_2\right)(y). \qquad (3.7)$$

Giải hệ (3.7), ta nhận được

$$\left(Lf\right)(y)=\frac{\left(Lh_1\right)(y)-(1+y)(Lk_1)(y)(Lh_2)(y)}{1-(1+y)^2(Lk_1)(y)(Lk_2)(y)},$$
$$\left(Lg\right)(y)=\frac{\left(Lh_2\right)(y)-(1+y)(Lk_2)(y)(Lh_1)(y)}{1-(1+y)^2(Lk_1)(y)(Lk_2)(y)}.$$

Từ đó tác động phép biến đổi Laplace ngược ta nhận được công thức nghiệm

$$f(x)=L^{-1}\left[\frac{\left(Lh_1\right)(y)-(1+y)(Lk_1)(y)(Lh_2)(y)}{1-(1+y)^2(Lk_1)(y)(Lk_2)(y)}\right](x),$$
$$g(x)=L^{-1}\left[\frac{\left(Lh_2\right)(y)-(1+y)(Lk_2)(y)(Lh_1)(y)}{1-(1+y)^2(Lk_1)(y)(Lk_2)(y)}\right](x).$$

Ví dụ 3. Giải hệ phương trình

$$f(x)+\left(1+\frac{d}{dx}\right)\int_0^x g(y)e^{-(x-y)}dy=\cos x,$$
$$g(x)+\left(1+\frac{d}{dx}\right)\int_0^x f(y)e^{-(x-y)}(x-y)dy=-\sin x,\ x>0.$$
$$(3.7)$$

Áp dụng biến đổi Laplace L lên phương trình (3.7) và kết hợp với các công thức (3.2.8) (3.2.9), (3.2.10) và (3.4.2) trong [3], ta có

$$(Lf)(y)+(1+y)(Lg)(y)\frac{1}{y+1}=\frac{y}{y^2+1}$$

$$(Lg)(y)+(1+y)(Lf)(y)\frac{1}{(y+1)^2}=-\frac{1}{y^2+1}$$

Suy ra nghiệm của hệ phương trình này là

$$(Lf)(y)=\frac{y^2+2y+1}{y(y^2+1)},\ (Lg)(y)=\frac{2y+1}{y(y^2+1)}.$$

Tương đương với

$$(Lf)(y)=\frac{1}{y}+\frac{1}{y^2+1},$$

$$(Lg)(y)=-\frac{1}{y}-\frac{2}{y^2+1}+\frac{y}{y^2+1}.$$

Kết hợp các công thức (3.2.7), (3.2.8), (3.2.9) trong [3] và sử dụng biến đổi Laplace ngược, ta nhận được nghiệm của hệ phương trình là

$$f(x)=1+2\sin x,\quad g(x)=-1-2\sin x+\cos x.$$

4. KẾT LUẬN

Bài báo đã chứng minh được tính bị chặn của tích chập Laplace trong không gian hàm khả tích $L_1(\mathbb{R}_+)$ Thiết lập và nghiên cứu phép biến đổi tích chập Laplace T_k trong $L_1(\mathbb{R}_+)$ và chỉ ra sự tồn tại của phép biến đổi ngược. Từ đó áp dụng giải một lớp các phương trình vi-tích phân dạng Volterra có nhân liên quan đến phép biến đổi này. Những kết quả của bài báo góp phần làm phong phú thêm Lý thuyết về phép biến đổi tích phân và ứng dụng của nó trong việc giải phương trình và hệ phương trình vi-tích phân.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] I.N. Sneddon, 1951. *Fourier Transforms*, McGray-Hill, New York.

[2] J.L. Schiff, 1999. *The Laplace Transforms: Theory and Applications*, Springer-Verlag, New York, Inc.

[3] L. Debnath, D. Bhatta, 2007. *Integral Transforms and Their Applications*, Chapman and Hall/CRC, Boca Raton.

[4] L.E. Britvina, 2005. *A class of integral transforms related to the Fourier cosine convolution*, Integral Transforms Spec. Funct. 16, No.5-6, pp.379-389.

[5] L.X. Huy and N.X. Thao, 2014. On the Laplace generalized convolution transform, *Annales Univ. Sci. Budapest. Sect. Comp.,* Vol.43, pp.303–316.

[6] N.X. Thao, V.K. Tuan, L.X. Huy and N.T. Hong, 2015. *On the Fourier Laplace convolution transforms*, Integral Transforms Spec. Funct. 16, 26 (4), pp.303-313.
S.B. Yakubovich and A.I. Moshinskii, 1993. *Integral equations and convolutions related to the Kontorovich-Lebedev type integral transforms*, Differentzial'nye uravneniya, 29, No.7, pp.1272-1284.

[7] V.K. Tuan, 1999. *Integral transforms of Fourier cosine convolution type*, J. Math. Anal. Appl. 229, pp.519-529.

Thông tin liên hệ: **Lê Xuân Huy**

Điện thoại: 0914341077 - Email: lxhuy@uneti.edu.vn

Khoa Khoa học cơ bản, Trường Đại học Kinh tế - Kỹ thuật Công nghiệp.