NGHIÊN CỨU HAI PHƯƠNG PHÁP TOÁN HỌC ĐỂ XÁC ĐỊNH MÔMEN QUÁN TÍNH CỦA CÁC VẬT RẮN ĐỒNG CHẤT

STUDY ON TWO MATHEMATICAL METHODS TO DETERMINE THE OHERENT SYMMETRY OF SOLID OBJECTS

Đinh Văn Tình

Khoa Khoa học cơ bản, Trường Đại học Kinh tế - Kỹ thuật Công nghiệp

Đến Tòa soạn ngày 12/04/2021, chấp nhận đăng ngày 13/05/2021

Tóm tắt: Mômen quán tính là một đại lượng trong vật lý. Đây được xem như một đại lượng giúp tính toán cho một vật rắn đang trải qua một chuyển động quay quanh một trục cố định. Nó được tính toán dựa trên sự phân bố khối lượng trong vật thể và vị trí của trục quay, do đó, cùng một đối tượng có thể có các giá trị quán tính rất khác nhau tùy thuộc vào vị trí và hướng của trục quay. Ngoài ra mômen quán tính có thể được coi là đại diện cho lực cản của vật thể thay đổi vận tốc góc, tương tự như khối lượng biểu thị khả năng chống lại sự thay đổi vận tốc trong chuyển động tịnh tiến theo các định luật chuyển động của Newton.

Từ khóa: Mômen quán tính, vật rắn đồng chất.

Abstract: The moment of inertia is a quantity in physics. This is seen as a quantity that helps calculate for a solid body to undergo a rotation around a fixed axis. It is calculated based on the mass distribution in the object and the position of the spindle, so the same object can have very different inertia values depending on the position and direction of the axis of rotation. In addition, the moment of inertia can be considered to represent the resistance of an object changing angular velocity, similar to the mass indicating its resistance to velocity changes in translational motion according to the laws of displacement. Newton's movement.

Keywords: Moment of inertia, homogeneous solid.

1. GIỚI THIỆU

Mômen quán tính I của một vật quay quanh trục cố định có vai trò quan trọng trong việc tính toán các đại lượng chính trong chuyển động quay như: Mômen lực $M = I\beta$, động năng quay $K = \frac{I\omega^2}{2}$ và động lượng quay $L = I\omega$.

Việc xác định được mômen quán tính đối với các vật rắn là việc không dễ đặc biệt là những vật thể có hình dạng, kích thước bất kì. Theo các tài liệu tôi đã biết thì chưa có tài liệu nào giải chi tiết cách xác định mômen quán tính mà chỉ đưa ra các công thức cho các vật thể. Vì vậy tác giả đã nghiên cứu các phương pháp toán học khác nhau để xác định mômen quán tính của ba dạng vật rắn đó là dạng: dài, mặt, khối.

2. PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU

Tác giả sử dụng hai phương pháp toán học của giải tích để chứng minh các công thức tính mômen quán tính của các vật rắn đồng chất.

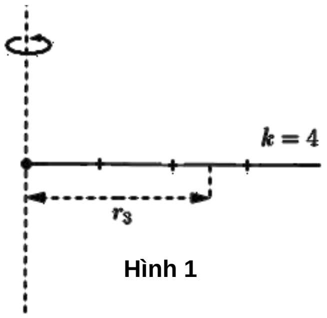
3. KẾT QUẢ VÀ THẢO LUẬN

Ví dụ 1: Tính mômen quán tính của thanh đồng chất khối lượng *m*, chiều dài *l*, trục quay nằm ở một đầu thanh.

Cách 1: Phương pháp tính tổng, giới hạn:

Mômen quán tính của hệ chất điểm m_i đối với trục quay Δ cách nó một khoảng r_i được xác định là: $I_\Delta = \sum_{i=1}^{k} m_i r_i^2$.

Giải: Chia thanh đồng chất thành k phần bằng nhau, như vậy mỗi phần có khối lượng $m_i = \frac{m}{k}$, phần thứ i tính từ trục quay ra có khoảng cách đến trục quay $r_i = \frac{(2i-1)l}{2k}$.



Hình 1

Mômen quán tính của thanh bằng tổng mômen quán tính của các đoạn tạo nên nó (các đoạn này có thể xem như một chất điểm khi k tiến đến vô cùng)

$$I = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k} m_i r_i^2$$

Thay các giá trị m_i và r_i đã tính ở trên ta được kết quả:

$$I = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k} \frac{m}{k} \frac{(2i-1)^2 l^2}{4k^2}$$

$$I = \lim_{k\to\infty} ml^2 \frac{1^2 + 3^2 + ... + (2k-1)^2}{4k^3}$$

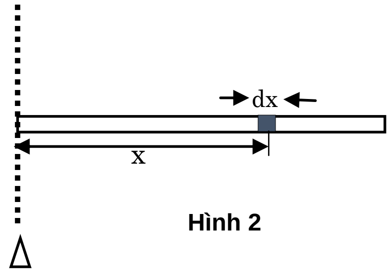
$$= \lim_{k\to\infty} ml^2 \left(\frac{k(2k-1)(2k+1)}{12k^3} \right) \qquad (1)$$

$$= \lim_{k\to\infty} ml^2 \frac{4k^3 - k}{12k^3}$$

$$= \frac{ml^2}{3}$$

Cách 2: Phương pháp tích phân

Công thức chung để xác định mômen quán tính của vật thể: $I_\Delta = \int_{Vr} r^2 dm$.



Hình 2

Vr: Có chiều dài l; khối lượng m; khoảng cách từ dm đến trục quay Δ là $r=x$ nên tích phân sẽ lấy trên thanh có chiều dài từ 0 đến l.

Giải: Chia thanh thành các đoạn nhỏ có chiều dài dx, gọi x là khoảng cách từ dx đến trục quay, dm là khối lượng của dx;

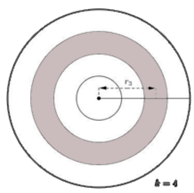
Vì thanh đồng chất nên $\frac{dm}{m} = \frac{dx}{l}$, suy ra

$$dm = m\frac{dx}{l}$$

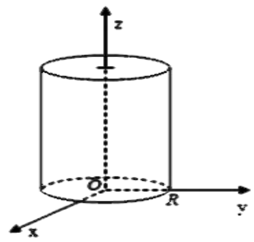
$$I_\Delta = \int_{Vr} r^2 dm = \int_{Vr} x^2 dm = \int_0^l x^2 \frac{m}{l} dx = \frac{ml^2}{3} \qquad (2)$$

Ví dụ 2: Tính mômen quán tính của đĩa tròn mỏng hoặc khối trụ đặc đồng chất.

Cách 1: Phương pháp tính tổng, giới hạn (tính mômen quán tính của đĩa tròn mỏng, đồng chất).



Hình 3



Hình 4

Giải: Ta sẽ chia đĩa thành k lớp, mỗi lớp dày $\frac{R}{k}$, diện tích lớp thứ i tính từ tâm ra là

$S_i = \pi\left[(\frac{iR}{k})^2 - (\frac{(i-1)R}{k})^2 \right]$ nên khối lượng lớp thứ i tính từ tâm đĩa ra sẽ là $m_i = m\frac{S_i}{\pi R^2}$, khoảng cách từ tâm đến đường trung bình của lớp là $r_i = \frac{(2i-1)R}{2k}$.

Mômen quán tính của đĩa bằng tổng mômen quán tính của các các lớp tạo nên nó (các lớp này có thể xem như các vành tròn khi k tiến đến vô cùng) $I = \lim\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{k} m_i r_i^2$

Thay các giá trị m_i và r_i đã tính ở trên ta được

$$I = \lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{k} m\frac{\pi\left[(\frac{iR}{k})^2 - (\frac{(i-1)R}{k})^2 \right]}{\pi R^2}.\frac{(2i-1)^2 R^2}{4k^2}$$

$$I = \lim_{k\to\infty} mR^2 \sum_{i=1}^{k} \frac{(2i-1)^3}{4k^4}$$

$$= \lim_{k\to\infty} mR^2 \frac{2k^4 - 2k^2}{4k^4} \qquad (3)$$

$$= \frac{mR^2}{2}$$

Cách 2: Phương pháp tích phân bội. (Tính mômen quán tính của khối trụ đặc đồng chất).

Các công thức sau đây được trích dẫn và xây dựng từ chương 1 (Phần hệ tọa độ Descartes) - [3] Vũ Kim Thái, Đinh Văn Tình, *“Giáo trình Vật lí đại cương”*, NXB Lao động (2016).

Cụ thể như sau: $\vec{r} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k}$, trong đó $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ là 3 vectơ chỉ phương, đơn vị, nên ta có:

$$r^2 = \vec{r}.\vec{r} = (x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k})(x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k})$$
$$= x^2\vec{i}^2 + y^2\vec{j}^2 + z^2\vec{k}^2 + xy.\vec{i}.\vec{j} + xz.\overrightarrow{i.k}$$
$$+ yx.\overrightarrow{j.i} + yz.\vec{j}.\vec{k} + zx.\vec{k}.\vec{i} + zy.\vec{k}.\vec{j}$$
$$= x^2 + y^2 + z^2$$

Vì:

$$\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1;$$
$$\vec{i}.\vec{j} = \vec{i}.\vec{k} = \vec{j}.\vec{i} = \vec{j}.\vec{k} = \vec{k}.\vec{i} = \vec{k}.\vec{j} = 0$$

Áp dụng kết quả trên vào việc tính mômen quán tính của vật thể chiếm thể tích V có khối lượng riêng $\rho(x,y,z)$ cách trục quay Δ một khoảng r được xác định: $I_\Delta = \iiint\limits_V r^2\rho(x,y,z)dxdydz$.

Vậy mômen quán tính đối với các trục Ox, Oy, Oz lần lượt là:

$$I_x = \iiint_V (y^2+z^2)\rho(x,y,z)dxdydz$$
$$I_y = \iiint_V (x^2+z^2)\rho(x,y,z)dxdydz$$
$$I_z = \iiint_V (x^2+y^2)\rho(x,y,z)dxdydz$$

Tương tự ta có mômen quán tính đối với các mặt phẳng Oxy, Oyz, Oxz lần lượt là:

$$I_{Oxy} = \iiint_V z^2\rho(x,y,z)dxdydz$$
$$I_{Oyz} = \iiint_V x^2\rho(x,y,z)dxdydz$$
$$I_{Oxz} = \iiint_V y^2\rho(x,y,z)dxdydz$$

Mômen quán tính đối với gốc tọa độ của vật rắn là: $I_O = \iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)\rho(x,y,z)dxdydz$.

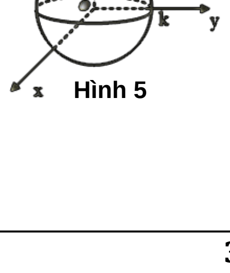
Giải: Chọn trục hình trụ là Oz, mặt đáy Oxy, chiều cao h, bán kính hình trụ là R, tỉ khối $\rho = const$.

Ta có: $I_{oz} = \rho\iiint\limits_V (x^2+y^2)dxdydz$

Chuyển sang hệ tọa độ trụ ta được:

$$\begin{cases} x = r\sin\theta \\ y = r\cos\theta; \\ z = z \end{cases}$$

$$\begin{cases} \theta : 0 \to 2\pi \\ r : 0 \to R \\ z : 0 \to h \end{cases}$$



Hình 5

$$I_{oz} = \rho\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^R r^3dr\int_0^h dz = \rho.2\pi.\frac{R^4}{4}.h = \frac{1}{2}\rho\pi R^4h$$
$$= \frac{1}{2}(\rho\pi R^2h)R^2 = \frac{1}{2}mR^2 \quad (4)$$

Với $m = \rho\pi R^2h$ là khối lượng của khối trụ.

Ví dụ 3: Tính mômen quán tính của khối cầu đặc đồng chất khối lượng m, bán kính R, mật độ khối lượng $\rho = const$.

Cách 1: Phương pháp tính tổng, giới hạn:

Giải: Tương tự như việc tính mômen quán tính của đĩa tròn đặc, ta chia khối cầu thành *k* lớp có độ dày $\frac{R}{k}$, thể tích của lớp thứ *i* tính từ tâm ra là $V_i = \frac{4}{3}\pi\left[(\frac{iR}{k})^3 - (\frac{(i-1)R}{k})^3\right]$, tương ứng với khối lượng $m_i = m\frac{V_i}{4\pi R^3/3} = m\left[(\frac{i}{k})^3 - (\frac{i-1}{k})^3\right]$, bán kính của mặt cầu trung bình của lớp thứ *I* là $r_i = \frac{(2i-1)R}{2k}$.

Mômen quán tính của khối tròn được tính bằng tổng mômen quán tính của các lớp (có dạng mặt cầu) tạo nên nó $I = \lim\limits_{k\to\infty}\frac{2}{3}\sum_{i=1}^{k} m_ir_i^2$

Thay các giá trị m_i và r_i đã tính ở trên và rút gọn ta được:

$$I = \frac{2}{3}mR^2\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{k}\frac{(3i^2-3i+1)(2i-1)^2}{4k^5}$$
$$= \frac{2}{3}mR^2\lim_{k\to\infty}\frac{12k^5/5+...}{4k^5} = \frac{2}{5}mR^2 \quad (5)$$

Cách 2: Phương pháp tích phân bội:

Giải: Gọi *R* là bán kính khối cầu, $\rho = const$, trục quay theo Oz, tâm khối cầu tại O:

Áp dụng công thức tính mômen quán tính đối với trục quay Oz ta có:

$$I_{Oz} = \iiint_V (x^2+y^2)\rho dxdydz$$
$$= \rho\iiint_V (x^2+y^2)dxdydz$$

Trong đó: *V* là khối cầu tâm O, bán kính *R*.

Chuyển sang hệ tọa độ trụ

$$\begin{cases} x = r\sin\theta \\ y = r\cos\theta; \\ z = z \end{cases} \quad \begin{cases} \theta: 0 \to 2\pi \\ r: 0 \to R \\ z: -\sqrt{R^2-r^2} \to \sqrt{R^2-r^2} \end{cases}$$

$$I_{Oz} = \rho\iiint_{V'} r^3drd\theta dz$$
$$= \rho\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^R r^3dr\int_{-\sqrt{R^2-r^2}}^{\sqrt{R^2-r^2}} dz$$
$$= 2\rho\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^R r^3dr\int_0^{\sqrt{R^2-r^2}} dz$$
$$= 2\rho\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^R r^3\sqrt{R^2-r^2}dr$$
$$= \rho\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^R \sqrt{R^2-r^2}(R^2-r^2-R^2)d(R^2-r^2)$$
$$= 2\pi\rho\left[\frac{2}{5}(R^2-r^2)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}R^2(R^2-r^2)^{\frac{3}{2}}\right]\Bigg|_0^R$$
$$= \frac{8\pi}{15}\rho R^5$$
$$= \frac{2}{5}mR^2 \quad (6)$$

Với $m = \frac{4}{3}\pi R^3\rho$ là khối lượng của khối cầu.

Ví dụ 4: Tính mômen quán tính của vật thể đồng chất $\rho(x,y,z) = const$ giới hạn bởi miền V: $x \ge 0; y \ge 0; z \ge 0;$ $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right) \le 1$ đối với gốc tọa độ.

Giải:

Mômen quán tính đối với gốc tọa độ của vật rắn là:

$$I_O = \iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)\rho dxdydz$$

$$= \rho\int_0^a dx \int_0^{b(1-\frac{x}{a})} dy \int_0^{c(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b})} \left(x^2+y^2+z^2\right)dz$$

$$= \rho\int_0^a dx \int_0^{b(1-\frac{x}{a})} \left[(x^2+y^2)z+\frac{1}{3}z^3\right]\Bigg|_0^{c(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b})} dy$$

$$= \rho\{\int_0^a dx \int_0^{b(1-\frac{x}{a})} [\mathrm{c}(\mathrm{x}^2+y^2)(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b})$$

$$+\frac{1}{3}c^3(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b})^3]dy\}$$

$$= \rho\{\int_0^a dx \int_0^{b(1-\frac{x}{a})} [\mathrm{cx}^2(1-\frac{x}{a})+cy^2(1-\frac{x}{a})$$

$$-\frac{c}{b}(x^2y+y^3)+\frac{c^3}{3}(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b})^3]dy\}$$

$$= \rho\{\int_0^a [cx^2(1-\frac{x}{a})y+\frac{1}{3}cy^3(1-\frac{x}{a})$$

$$-\frac{c}{b}(\frac{1}{2}x^2y^2+\frac{1}{4}y^4)-\frac{1}{12}c^3b(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b})^4]\Bigg|_0^{b(1-\frac{x}{a})} dx\}$$

$$= \rho[\int_0^a bcx^2(1-\frac{x}{a})^2+\frac{1}{3}cb^3(1-\frac{x}{a})^4-\frac{bc}{2}x^2(1-\frac{x}{a})^2$$

$$-\frac{1}{4}cb^3(1-\frac{x}{a})^4+\frac{bc^3}{12}(1-\frac{x}{a})^4]\mathrm{dx}$$

$$= \rho[\frac{bc}{2}\int_0^a x^2(1-\frac{x}{a})^2dx+\frac{bc^3+cb^3}{12}\int_0^a(1-\frac{x}{a})^4dx]$$

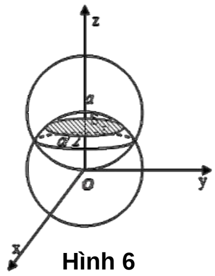
$$= \rho[\frac{bc}{2}\int_0^a (x^2-\frac{2x^3}{a}+\frac{x^4}{a^2})dx+\frac{bc^3+cb^3}{12}\int_0^a(1-\frac{x}{a})^4dx]$$

$$= \rho[\frac{bc}{2}(\frac{x^3}{3}-\frac{2x^4}{4a}+\frac{x^5}{5a^2})\Bigg|_0^a+\frac{bc^3+cb^3}{12}(1-\frac{x}{a})^5(\frac{-a}{5})\Bigg|_0^a]$$

$$= \rho[\frac{bc}{2}.\frac{a^3}{30}+\frac{bc^3+cb^3}{12}.\frac{a}{5}]$$

$$= \rho.\frac{a^3bc+ab^3c+abc^3}{60}$$

$$= \rho.\frac{abc}{60}(a^2+b^2+c^2) \quad (7)$$



Hình 6

Ví dụ 5: Tính mômen quán tính của vật thể đồng chất $\rho(x,y,z)=const$ đối với mặt phẳng Oxy được giới hạn bởi miền V với:

$$(x^2+y^2+z^2)\le 2az;\ (x^2+y^2+z^2)\le a^2\ (a>0)$$

Giải:

Những điểm trên giao tuyến của hai mặt cầu $(x^2+y^2+z^2)\le 2az;\ (x^2+y^2+z^2)\le a^2$ có độ cao thỏa mãn $2az=a^2$ do đó $z=\frac{a}{2}$

$$I_{Oxy} = \rho\iiint\limits_V z^2dxdydz$$

$$= \rho\iiint\limits_{V_1} z^2dxdydz+\rho\iiint\limits_{V_2} z^2dxdydz$$

$$= I_1+I_2$$

Mặt phẳng $z=\frac{a}{2}$ chia miền V thành hai miền:

$$V_1=\left\{(x,y,z)\in V: z\ge\frac{a}{2}\right\}$$

$$V_2=\left\{(x,y,z)\in V: z<\frac{a}{2}\right\}$$

Ta có: $I_1=\rho\int_{\frac{a}{2}}^a z^2dz\iint\limits_{S_{(z)}} dxdy$ mà $\iint\limits_{S_{(z)}} dxdy = S_{(z)}=\pi(x^2+y^2)=\pi(a^2-z^2)$ do đó

$$I_1=\pi\rho\int_{\frac{a}{2}}^a z^2(a^2-z^2)dz=\rho\pi(\frac{a^2z^3}{3}-\frac{z^5}{5})\Bigg|_{\frac{a}{2}}^a=\frac{47a^5\pi\rho}{480}$$

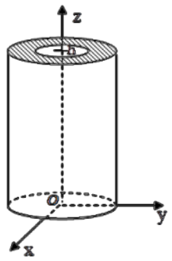
Tương tự:

$$I_2=\pi\rho\int_0^{\frac{a}{2}} z^2(2az-z^2)dz=\pi\rho(\frac{2az^4}{4}-\frac{z^5}{5})\Bigg|_0^{\frac{a}{2}}=\frac{a^5\pi\rho}{40}$$

Vậy

$$I_O=I_1+I_2=(\frac{47}{480}+\frac{1}{40})a^5\pi\rho=\frac{59}{480}a^5\pi\rho \quad (8)$$

Ví dụ 6: Tính mômen quán tính của vật thể hình trụ rỗng bán kính hai đáy là R_1 và R_2 ($R_1 < R_2$) đối với gốc tọa độ biết $\rho(x, y, z) = const.$



Hình 7

Giải:

Gọi chiều cao của hình trụ là h, áp dụng công thức tính mômen đối với gốc tọa độ:

$$I_O = \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2)\rho(x, y, z)dxdydz$$

Chuyển sang tọa độ trụ:

$$\begin{cases} x = r\sin\theta \\ y = r\cos\theta; \\ z = z \end{cases} \quad \begin{cases} \theta : 0 \to 2\pi \\ r : R_1 \to R_2 \\ z : 0 \to h \end{cases}$$

Khi đó ta có: $I_O = \rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_{R_1}^{R_2} dr \int_0^h r(r^2 + z^2)dz$

$$= \rho 2\pi \int_{R_1}^{R_2} dr \int_0^h (r^3 + rz^2)dz$$

$$= \rho 2\pi \int_{R_1}^{R_2} (r^3 z + \frac{rz^3}{3})\Big|_0^h dr$$

$$= \rho 2\pi \int_{R_1}^{R_2} (r^3 h + \frac{rh^3}{3})dr$$

$$= 2\pi\rho(\frac{r^4 h}{4} + \frac{r^2 h^3}{6})\Big|_{R_1}^{R_2}$$

$$= \pi\rho h(\frac{R_2^4 - R_1^4}{2} + h^2\frac{R_2^2 - R_1^2}{3}). \qquad (9)$$

4. KẾT LUẬN

Như vậy rõ ràng khi sử dụng hai phương pháp toán học khác nhau tôi đã tính được mômen quán tính của các vật rắn đồng chất cho ba dạng vật thể: chiều dài, mặt, khối tương ứng với các công thức (1), (3), (5), (7), (8), (9). Trong các ví dụ 4, ví dụ 5 và ví dụ 6 tôi chỉ sử dụng tích phân để tính mômen quán tính. Với mỗi cách sẽ có những thuận lợi và khó khăn riêng tùy thuộc vào sở trường của người học.

Có thể mở rộng để tính mômen quán tính cho thanh đồng chất với trục quay đi qua tâm thanh: $I = \frac{ml^2}{12}$, cho quả cầu rỗng $I = \frac{2}{3}mR^2, \ldots$

Trên đây là những kết quả mà tôi đã nghiên cứu và tính toán, hy vọng với những kết quả này có thể là tài liệu tham khảo cho giảng viên và các em sinh viên khi cần xác định mômen quán tính.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Nguyễn Đình Trí, Trần Việt Dũng, Trần Xuân Hiển và Nguyễn Xuân Thảo, "*Toán học cao cấp, Tập 2, 3*", NXB Giáo dục Việt Nam (2015).

[2] Nguyễn Thừa Hợp, *"Giải tích tập 2, 3"*, NXB Đại học Quốc gia Hà Nội (2004).

[3] Vũ Kim Thái, Đinh Văn Tình, *"Giáo trình Vật lí đại cương"*, NXB Lao động (2016).

Thông tin liên hệ: **Đinh Văn Tình**

Điện thoại: 0909351978 - Email: dvtinh@uneti.edu.vn

Khoa Khoa học cơ bản, Trường Đại học Kinh tế - Kỹ thuật Công nghiệp.