ÁP DỤNG LÝ THUYẾT ĐIỂM BẤT ĐỘNG ĐỂ CHỨNG MINH TÍNH DUY NHẤT NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH TOÁN TỬ NGẪU NHIÊN CÓ NHIỄU

THE APPLICATION OF THE FIXED POINT TO DEMONSTRATE THE UNIQUE SOLUTION OF THE INTERFERENCE RANDOM EQUATIONS

Trần Thị Kim Thanh

Khoa Khoa học cơ bản, Trường Đại học Kinh tế - Kỹ thuật công nghiệp

Đến Tòa soạn ngày 15/6/2016, chấp nhận đăng ngày 5/12/2016

Tóm tắt: Phương trình toán tử ngẫu nhiên có nhiễu là một trong các hướng nghiên cứu của lý thuyết xác suất hiện đại. Bài báo nghiên cứu tính duy nhất nghiệm của phương trình toán tử ngẫu nhiên có nhiễu, áp dụng lý thuyết điểm bất động để tìm điều kiện đủ của bài toán trên. Kết quả nghiên cứu là cơ sở để tìm lời giải phương trình ngẫu nhiên có nhiễu.

Từ khóa: Toán tử ngẫu nhiên có nhiễu, điểm bất động.

Abstract: The interference random equations is one of research directions of the theory of modern probability. The article studies the unique solution of the interference random equations, applying the fixed point to find of the problem. The result of the research is the base to soluve the interference random equations.

Keywords: The interference random equations, the fixed point.

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Định lý điểm bất động của Banach đối với ánh xạ co trên không gian metric đầy đủ là một kết quả kinh điển của toán học. Sau Banach, lý thuyết điểm bất động là một trong những vấn đề thu hút sự quan tâm nghiên cứu của nhiều nhà toán học trên thế giới và từ đó đã có các ứng dụng rộng rãi trong nhiều lĩnh vực khác như: giải tích, phương trình vi tích phân, lý thuyết tối ưu, các bao hàm thức vi phân, vật lý,…

Bên cạnh đó, phương trình toán tử ngẫu nhiên là một trong các hướng nghiên cứu của lý thuyết toán tử ngẫu nhiên mà các bài viết đặc sắc của A. T. Bharucha - Ried năm 1976 thực sự là bước tiến nhảy vọt cho mảng lý thuyết này. Ngày nay, phương trình toán tử ngẫu nhiên trở thành trung tâm nghiên cứu của giải tích phi tuyến và lý thuyết xác suất. Ở Việt Nam, nhóm nghiên cứu do GS. TSKH Đặng Hùng Thắng (Trường Đại học Khoa học tự nhiên Hà Nội) hướng dẫn với Seminar định kỳ hàng tháng đã thu được nhiều kết quả giá trị. Một trong các hướng nghiên cứu của các thành viên trong nhóm này là *xây dựng các định lý về sự tồn tại nghiệm ngẫu nhiên* (tìm **điều kiện đủ**) của phương trình toán tử ngẫu nhiên (với các loại toán tử khác nhau: ngẫu nhiên, ngẫu nhiên có nhiễu, hoàn toàn ngẫu nhiên,...) trên các không gian khác nhau (Banach, mêtric đầy đủ, Polish,...). Hướng nghiên cứu còn lại tức là tìm nghiệm tường minh (giải quyết **điều kiện cần**) là điều rất khó và còn nhiều hạn chế.

Bài báo dựa trên các kiến thức về lý thuyết xác suất và giải tích hàm tổng hợp và đưa ra các phương pháp thông thường để chứng minh tính duy nhất nghiệm của phương trình toán tử ngẫu nhiên có nhiễu, tác giả cũng nghiên cứu và xây dựng mối quan hệ giữa điểm bất động và giải phương trình toán tử ngẫu nhiên có nhiễu nhằm tìm **điều kiện đủ** để phương trình này có nghiệm duy nhất trên không gian Banach tách được (định lý 3.2.1).

2. ĐỐI TƯỢNG NGHIÊN CỨU

2.1. Toán tử ngẫu nhiên và điểm bất động ngẫu nhiên

Cho F là tập con khác $\varnothing$ trên không gian Banach tách được và (Ω, *A*) là không gian đo với Ω là không gian mẫu, khác $\varnothing$.

Định nghĩa 2.1.1. Ánh xạ T: $\Omega \times F \to F$ được gọi là toán tử ngẫu nhiên nếu với mỗi $x \in F$, $T(.\,, x)$ là đo được.

Toán tử T: $\Omega \times F \to F$ được gọi là toán tử ngẫu nhiên liên tục nếu với mỗi $w \in \Omega$, $T(w, .)$ là liên tục.

Toán tử T: $\Omega \times F \to F$ được gọi là toán tử ngẫu nhiên ρ(w) – co nếu $\forall x, y \in F$ và $w \in \Omega$ ta có

$$\|T(w,x)-T(w,y)\| \le \rho(w)\|x-y\|$$

trong đó ρ: $\Omega \to [0, 1]$ là ánh xạ đo được.

Nếu $\rho(w) = 1\ \forall w \in \Omega$ thì T được gọi là toán tử ngẫu nhiên không giãn.

Định nghĩa 2.1.2. Ánh xạ đo được ξ: $\Omega \to F$ là điểm bất động ngẫu nhiên của toán tử ngẫu nhiên T: $\Omega \times F \to$ F khi và chỉ khi $T(w, \xi(w)) = \xi(w)\ \forall\ w \in \Omega$.

Nếu ánh xạ T: $\Omega \times F \to F$ có điểm bất động ngẫu nhiên thì với mỗi $w \in \Omega$, $T(w, .)$ có điểm bất động ngẫu nhiên trong F.

2.2. Phương trình toán tử ngẫu nhiên

Cho (Ω, *A*, *P*) là không gian xác suất và X, Y là không gian Banach tách được.

Định nghĩa 2.2.1. Ánh xạ ξ: $\Omega \to F$ là biến ngẫu nhiên X - giá trị nếu ξ là (*A*, B) – đo được với B là σ - đại số Borel. Kí hiệu: $\xi(w) \in L_0^X$.

Định nghĩa 2.2.2. Cho ánh xạ T: $X \to Y$ là toán tử ngẫu nhiên và η(w) là biến ngẫu nhiên Y - giá trị.

Phương trình toán tử ngẫu nhiên là phương trình có dạng: $T(w, x) = \eta(w)$.

Ánh xạ $\xi(w) \in L_0^X$ được gọi là nghiệm của phương trình toán tử ngẫu nhiên nếu $T(\xi(w), x) = \eta(w)$.

Định nghĩa 2.2.3. Cho ánh xạ T: $X \to Y$ là toán tử ngẫu nhiên và $\eta(w)$ là biến ngẫu nhiên Y - giá trị.

Phương trình toán tử ngẫu nhiên có nhiễu là phương trình có dạng: $T(w, x) + k(w).x = \eta(w)$ với $k(w)$ là biến ngẫu nhiên nhận giá trị dương. Ánh xạ $\xi(w) \in L_0^X$ được gọi là nghiệm của phương trình toán tử ngẫu nhiên có nhiễu nếu $T(\xi(w), x) + k(w).\xi(w) = \eta(w)$.

3. CÁC KẾT QUẢ NGHIÊN CỨU

3.1. Điều kiện đủ để giải phương trình toán tử ngẫu nhiên có nhiễu [2], [3]

Một số kết quả thường được dùng để chứng minh tính duy nhất nghiệm của phương trình toán tử ngẫu nhiên.

Định lý 3.1.1. Cho X là không gian Hilbert tách được và T là ánh xạ ngẫu nhiên liên tục trên X, đơn điệu mạnh và tồn tại biến ngẫu nhiên nhận giá trị thực dương $m(w)$ sao cho $\forall x_1, x_2 \in X$ ta có:

$$\langle T(w,x_1)-T(w,x_2), x_1-x_2\rangle \ge m(w)\|x_1-x_2\|^2 \qquad (1)$$

Khi đó, với bất kì $\eta(w) \in L_0^Y(\Omega)$, phương trình $T(w, x) = \eta(w)$ có nghiệm duy nhất.

Định lý 3.1.2. Cho X là không gian Banach tách được và T là ánh xạ ngẫu nhiên trên X sao cho với mỗi $w \in \Omega$, $T(w, x)$ là toán tử ngẫu nhiên liên tục được định nghĩa bởi $\|T\|w$.

Nếu $\|T\|w < k(w)$ (2)

thì phương trình $T(w, x) + k(w).x = \eta(w)$ có nghiệm duy nhất.

Định lý 3.1.3. Cho T là toán tử ngẫu nhiên liên tục trên không gian Hilbert tách được và thỏa mãn tính chất đơn điệu tức là $\forall x_1, x_2 \in X$ ta có:

$$\langle T(w,x_1) - T(w,x_2), x_1 - x_2 \rangle \geq 0 \quad (3)$$

Khi đó, với bất kì $\eta(w) \in L_0^Y(\Omega)$, phương trình $T(w, x) + k(w).x = \eta(w)$ có nghiệm duy nhất.

Định lý 3.1.4. Cho T là toán tử ngẫu nhiên liên tục trên không gian Hilbert tách được và thỏa mãn tính chất Lipschitz tức là tồn tại biến ngẫu nhiên giá trị thực không âm $L(w)$ sao cho $\forall x_1, x_2 \in X$ ta có:

$$\|T(w,x) - T(w,y)\| \geq L(w)\|x - y\| \quad (4)$$

Khi đó, với bất kì $\eta(w) \in L_0^Y(\Omega)$, phương trình $T(w, x) + k(w).x = \eta(w)$ có nghiệm duy nhất.

Từ đó, có hai phương pháp thường dùng để tìm điều kiện đủ cho lời giải phương trình toán tử ngẫu nhiên có nhiễu.

3.1.1. Sử dụng trực tiếp các kết quả về tính duy nhất nghiệm của phương trình toán tử ngẫu nhiên có nhiễu

Ví dụ 3.1.1. Xét phương trình tích phân ngẫu nhiên:

$$\int_0^1 K(w,t,s)x(s)ds + h(w)x(t) = \eta(w,t) \quad (5)$$

với $K(w, t, s)$, $\eta(w,t)$ là các hàm ngẫu nhiên liên tục xác định trên [0, 1] × [0, 1] và [0, 1] còn $h(w)$ là biến ngẫu nhiên nhận giá trị dương. Đặt $M(w) = \max_{[0,1]\times[0,1]} |K(w,t,s)|$.

Chứng minh rằng nếu $M(w) < h(w)$ (6)

thì phương trình (5) có nghiệm duy nhất $x(w, t)$ là hàm ngẫu nhiên liên tục trên [0, 1].

Chứng minh:

Ta định nghĩa ánh xạ T trên $X = C[0, 1]$ như sau: với $x = x(t) \in X$, $T(w, x)(t) = \int_0^1 K(w,t,s)x(s)ds$

Dễ thấy với mỗi $w \in \Omega$, $x \to T(w, x)$ là toán tử tuyến tính liên tục. Ta có

$$\|T(w,x)(t)\| = \max_{[0,1]} \left| \int_0^1 K(w,t,s)x(s)ds \right|$$

$$\geq \int_0^1 M(w) \max_{[0,1]} |x(s)| = M(w)\|x\|$$

Với $x = x(t) \in C[0,1]$ =>
$\|T\|(w) \leq M(w) < h(w)$

Mặt khác, phương trình (5) có thể viết dưới dạng: $T(w, x) + k(w).x = \eta(w)$.

Sử dụng định lý 3.1.2 => điều phải chứng minh.

3.1.2. Đưa phương trình toán tử ngẫu nhiên có nhiễu về phương trình toán tử ngẫu nhiên

Thuật toán:

Xét phương trình toán tử ngẫu nhiên có nhiễu
$T(w, x) + k(w).x = \eta(w)$ (7)

Đặt $\varnothing(w, x) = T(w, x) + k(w).x$

Khi đó, ta thấy $\varnothing$ cũng là toán tử ngẫu nhiên và phương trình (7) trở thành phương trình toán tử ngẫu nhiên:

$$\varnothing(w, x) = \eta(w) \quad (8)$$

Ta chứng minh tính duy nhất nghiệm của phương trình (8).

Ví dụ 3.1.2. Xét phương trình tích phân ngẫu nhiên:

$$K(w,t)\int_0^t K(w,s)x(s)ds + h(w,t)x(t) = \eta(w,t) \quad (9)$$

với $K(w, t)$, $h(w,t)$ là các hàm ngẫu nhiên liên tục và $\eta(w, t)$ là hàm ngẫu nhiên sao cho

$\int_0^1 \eta^2(w,t) > 0$. Đặt $L(w) = \min_{t\in[0,1]} h(w,t)$ và $U(w) = \min_{t\in[0,1]} K(w,t)$.

Chứng minh rằng nếu

$$L(w) > \frac{U^2(w)}{\sqrt{2}} \tag{10}$$

thì phương trình (9) có nghiệm duy nhất $x(w, t)$ mà $\int_0^1 x^2(w,t) > 0$.

Chứng minh:

Ta định nghĩa ánh xạ T trên $X = L_2[0, 1]$ như sau: với $x = x(t) \in X$

$$T(w,x)(t) = K(w,t)\int_0^t K(w,s)x(s)ds + h(w,t)x(t)$$

Dễ thấy T là toán tử ngẫu nhiên liên tục và $T(w, x_1) - T(w, x_2) = T(w, x_1 - x_2)$.

Ta có:

$$\langle T(w,x), x\rangle$$

$$= \int_0^1 K(w,t)x(t)[\int_0^t K(w,s)x(s)ds]dt + \int_0^1 h(w,t)x^2(t)dt$$

và $[\int_0^1 K(w,t)x(t)(\int_0^t K(w,s)x(s)ds)dt]^2$

$$\le \int_0^1 K^2(w,t)x^2(t)dt.\int_0^1(\int_0^t K^2(w,s)x^2(s)ds).\int_0^t ds]dt$$

$$\le \int_0^1 K^2(w,t)x^2(t)dt.\int_0^1 K^2(w,s)x^2(s)ds.\int_0^1 tdt$$

$$= \frac{1}{2}[\int_0^1 K^2(w,t)x^2(t)dt]^2.$$

Do đó:

$$\langle T(w,x), x\rangle \ge \int_0^1 h(w,t)x^2(t)dt - \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2}}K^2(w,t)x^2(t)dt$$

$$= \int_0^1 [h(w,t) - \frac{1}{\sqrt{2}}K^2(w,t)]x^2(t)dt$$

$$\ge m(w)\|x\|^2$$

với $m(w) = L(w) - \frac{U^2(w)}{\sqrt{2}}$ là biến ngẫu nhiên nhận giá trị thực dương (theo (10)).

Do đó

$$\langle T(w,x_1) - T(w,x_2), x_1 - x_2\rangle$$

$$= \langle T(w,x_1 - x_2), x_1 - x_2\rangle \ge m(w)\|x_1 - x_2\|^2$$

Áp dụng *Định lý 3.1.1*, suy ra phương trình (9) có nghiệm duy nhất $x(w, t)$ mà $\int_0^1 x^2(w,t) > 0$. □

3.2. Áp dụng lý thuyết điểm bất động để chứng minh tính duy nhất nghiệm phương trình toán tử ngẫu nhiên có nhiễu

Định lý 3.2.1. Cho X là không gian Banach tách được, (Ω, A) là không gian đo với Ω là không gian mẫu, khác $\varnothing$ và ánh xạ $T: \Omega \times X \to X$ được gọi là toán tử ngẫu nhiên và $\eta(w)$ là biến ngẫu nhiên Y - giá trị và $k(w)$ là biến ngẫu nhiên nhận giá trị dương. Xét ánh xạ Φ xác định như sau:

$$\Phi(w,x) = -\frac{T(w,x)}{k(w)} + \frac{\eta(w)}{k(w)} \tag{11}$$

Khi đó:

i, Φ là toán tử ngẫu nhiên.

ii, nếu Φ có điểm bất động thì phương trình ngẫu nhiên có nhiễu

$$T(w, x) + k(w).x = \eta(w) \tag{12}$$

có nghiệm *iii*, nếu Φ là toán tử $\rho(w) - co$ thì Φ có điểm bất động duy nhất

Chứng minh:

i, T là toán tử ngẫu nhiên nên Φ được xác định theo công thức (11) cũng là toán tử ngẫu nhiên (theo tính chất hàm đo được với độ đo xác suất)

ii, gọi ξ là điểm bất động của Φ.

Suy ra: $\Phi(w, \xi(w)) = \xi(w)$

Hay

$$-\frac{T(w,\xi(w))}{k(w)}+\frac{\eta(w)}{k(w)}=\xi\,(\mathrm{w})$$

Do đó

$$T(w,\xi(w))+\xi\,(\mathrm{w})\mathrm{k}(\mathrm{w})=\eta(w)$$

Suy ra $\xi(w)$ cũng là nghiệm của phương trình ngẫu nhiên có nhiễu (12).

Tương tự, nếu $\zeta(w)$ là nghiệm của phương trình (12) thì cũng là điểm bất động của toán tử Φ.

iii, gọi ξ là điểm bất động của Φ

Suy ra: $\Phi(w, \xi(w)) = \xi(w)$ (13)

Gọi η là điểm bất động khác của Φ

Suy ra: $\Phi(w, \eta(w)) = \eta(w)$ (14)

Từ (13) và (14) ta có

$$\|\xi(w)-\eta(w)\|=\|\Phi(w,\xi(w))-\Phi(w,\eta(w))\| \tag{15}$$

Vì Φ là toán tử $\rho(w)$ – co nên

$$\|\Phi(w,\xi(w))-\Phi(w,\eta(w))\|\le\rho(w)\|\xi(w)-\eta(w)\| \tag{16}$$

trong đó ρ: $\Omega\to[0, 1]$ là ánh xạ đo được.

Từ (15) và (16) ta có

$$(1-\rho(w))\|\xi(w)-\eta(w)\|\le 0$$

Hay $\xi(w) = \eta(w)$ h.c.c

Vậy Φ có điểm bất động duy nhất. □

Áp dụng: Ta áp dụng định lý 3.2.1 để *giải lại* các ví dụ 3.1.1 và 3.1.2.

Ví dụ 3.1.1. Từ phương trình (5) ta có

$$x(t)=-\frac{1}{h(w)}\int_0^1 K(w,t,s)x(s)ds+\frac{\eta(w,t)}{h(w)}$$

Đặt

$$\Phi(w,x)=-\frac{1}{h(w)}\int_0^1 K(w,t,s)x(s)ds+\frac{\eta(w,t)}{h(w)}$$

Với $u = u(w, t)$ và $v = v(w, t)$ là hai hàm liên tục trên [0, 1], ta có

$$\|\Phi(w,u)-\Phi(w,v)\|$$

$$\le\frac{1}{h(w)}\int_0^1 M(w)\max_{s\in[0,1]}|u(w,s)-v(w,s)|ds$$

$$=\frac{M(w)}{h(w)}\|u-v\|$$

Lại có: $\rho(w)=\dfrac{M(w)}{h(w)}<1$ (theo giả thiết (6))

Do đó, Φ là toán tử ρ(w) – co. Suy ra điều phải chứng minh. □

Ví dụ 3.1.2. Từ phương trình (9) ta có

$$-\frac{K(w,t)}{h(w,t)}\int_0^t K(w,s)x(s)ds+\frac{\eta(w,t)}{h(w,t)}=x(w,t)$$

Đặt

$$\Phi(w,x)=-\frac{K(w,t)}{h(w,t)}\int_0^t K(w,s)x(s)ds+\frac{\eta(w,t)}{h(w,t)}$$

Do đó

$$\|\Phi(w,u)-\Phi(w,v)\|^2\le\frac{U^4(w)}{L^2(w)}\int_0^1[\int_0^t(v(s)-u(s))ds]^2dt \tag{17}$$

Ta có

$$\left[\int_0^t(v(s)-u(s))ds\right]^2\le\int_0^t ds\int_0^t(u(s)-v(s))^2ds \tag{18}$$

$$\le t.\int_0^1(u(s)-v(s))^2ds=t.\|u-v\|^2$$

Thay (17) vào (18) ta có

$$\|\Phi(w,u)-\Phi(w,v)\|^2\le\frac{U^4(w)}{2L^2(w)}\|u-v\|^2$$

Suy ra

$$\|\Phi(w,u)-\Phi(w,v)\|\le\frac{U^2(w)}{\sqrt{2}L(w)}\|u-v\|$$

Đặt $\rho(w)=\dfrac{U^2(w)}{\sqrt{2}L(w)}<1$(theo (10))

Do đó, Φ là toán tử ρ(w) – co. Suy ra điều phải chứng minh.□

Hệ quả 3.2.2. Nếu T là toán tử ngẫu nhiên liên tục thì Φ cũng là toán tử ngẫu nhiên liên tục.

Hệ quả 3.2.3. (Mở rộng)

Đặt $\psi(w, x) = x + T(w, x) - \eta(w)$ (19)

Giải phương trình toán tử ngẫu nhiên:

$T(w, x) = \eta(w)$ (20)

được đưa về bài toán tìm điểm bất động ngẫu nhiên của toán tử ψ.

Chú ý 3.2.4.

Như vậy, giải phương trình toán tử ngẫu nhiên có nhiễu (12) được đưa về bài toán tìm điểm bất động của toán tử *Φ* được xác định theo công thức (11).

Tương tự, với phương trình toán tử ngẫu nhiên (20) được thay bằng tìm điểm bất động của toán tử ψ được xác định theo công thức (19). Tuy nhiên do *ψ* xây dựng phức tạp nên áp dụng nguyên lý điểm bất động vào giải *phương trình toán tử ngẫu nhiên* là không khả quan. Do đó, phương pháp này chỉ thực sự hiệu quả với *phương trình toán tử ngẫu nhiên có nhiễu*.

4. KẾT LUẬN

Bài báo nghiên cứu phương trình toán tử ngẫu nhiên có nhiễu, dựa trên các kiến thức về lý thuyết xác suất, tác giả tổng hợp hai phương pháp thường dùng để chứng minh tính duy nhất nghiệm của phương trình toán tử ngẫu nhiên có nhiễu (*mục 3.1*).

Bài báo dựa trên kiến thức về Giải tích hàm, đề xuất một hướng chứng minh khác để tìm điều kiện đủ để phương trình toán tử ngẫu nhiên có nhiễu có nghiệm duy nhất (*định lý 3.2.1*). Bài báo cũng phân tích lý do tại sao không áp dụng nguyên lý điểm bất động với *phương trình toán tử ngẫu nhiên* thông thường, mà chỉ nên áp dụng với *phương trình toán tử ngẫu nhiên có nhiễu* (*chú ý 3.2.4*).

Kết quả nghiên cứu là cơ sở cho việc giải phương trình toán tử ngẫu nhiên có nhiễu.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Nguyễn Viết Phú, Nguyễn Duy Tiến. *Cơ sở lý thuyết xác suất*, tr 129-130, NXB Đại học Quốc gia Hà Nội, 2004.

[2] Trần Thị Kim Thanh. Luận văn thạc sỹ: *Phương trình toán tử ngẫu nhiên*, Trường Đại học Khoa học tự nhiên, 2012.

[3] Tạ Ngọc Ánh. Luận án tiến sĩ: *Một số vấn đề về phương trình ngẫu nhiên*, Trường Đại học Khoa học tự nhiên, 2012.

[4] Thang D.H, Anh T.N. *Some Results on random equations*. Vietnam J. Math, 38(1), pp. 35-44, 2009.

Thông tin liên hệ: **Trần Thị Kim Thanh**

Điện thoại: 0984 439 508 - Email: ttkthanh@uneti.edu.vn

Khoa Khoa học cơ bản, Trường Đại học Kinh tế - Kỹ thuật Công nghiệp