NGHIÊN CỨU TÍNH DUY NHẤT NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH TOÁN TỬ NGẪU NHIÊN CÓ NHIỄU TRÊN KHÔNG GIAN HILBERT TÁCH ĐƯỢC

STUDYING THE UNIQUENESS OF SOLUTIONS OF THE RANDOM EQUATIONS WITH PERTURBATIONS ON SEPARABLE HILBERT SPACES

Trần Thị Kim Thanh

Khoa Khoa học cơ bản, Trường Đại học Kinh tế - Kỹ thuật Công nghiệp

Đến Tòa soạn ngày 24/06/2020, chấp nhận đăng ngày 19/08/2020

Abstract: Phương trình toán tử ngẫu nhiên là trung tâm nghiên cứu của Giải tích phi tuyến và Lý thuyết xác suất. Phương trình toán tử ngẫu nhiên có nhiễu là một trong các dạng của phương trình toán tử ngẫu nhiên. Bài báo nghiên cứu tính duy nhất nghiệm của phương trình toán tử ngẫu nhiên có nhiễu trên không gian Hirlbert tách được, từ đó xây dựng tính duy nhất nghiệm của phương trình toán tử ngẫu nhiên nhiễu đối. Kết quả nghiên cứu là cơ sở để tìm lời giải phương trình ngẫu nhiên có nhiễu.

Keywords: Toán tử ngẫu nhiên có nhiễu, toán tử ngẫu nhiên.

Tóm tắt: The random equations are the research center of nonlinear analysis and probability theory. The random equations with perturbations are one of the forms of the random equations. Separable Hirlbert space, which is applied to study the unique solution of the random equations with perturbations, applying studies the unique solution of the random equations with opposites perturbations. The result of the research is the basic for the answer to the random equations with perturbations.

Từ khóa: The interference random, the random.

1. GIỚI THIỆU

Phương trình toán tử ngẫu nhiên được bắt nguồn từ nghiên cứu lý thuyết điểm bất động với các công trình nổi tiếng của O. Hans và A. Spacek trong những năm 1950. Sau đó, các bài viết đặc sắc của A.T. Bharucha – Ried năm 1976 thực sự là bước tiến nhảy vọt cho mảng lý thuyết này. Ngày nay, phương trình toán tử ngẫu nhiên trở thành trung tâm nghiên cứu của Giải tích phi tuyến và Lý thuyết xác suất. Trên thế giới có rất nhiều công trình nghiên cứu phong phú về phương trình ngẫu nhiên với nhiều kiểu toán tử và trên nhiều không gian khác nhau. Tuy nhiên, một điều đáng lưu ý là trong các kết quả đó, điều kiện các tác giả đặt lên các toán tử ngẫu nhiên và trong các không gian thường khá phức tạp, nhiều khi ta khó có thể tìm được ví dụ về toán tử ngẫu nhiên thỏa mãn – đây là hạn chế hiện nay của mảng lý thuyết này.

Ở Việt Nam, nhóm nghiên cứu do GS. TSKH Đặng Hùng Thắng (Trường Đại học Khoa học tự nhiên Hà Nội) hướng dẫn với Seminar định kỳ hàng tháng đã thu được nhiều kết quả giá trị. Nhóm nghiên cứu đã mở rộng các kết quả của Xu, Tans, Yuan, Shahzad,... Một trong các hướng nghiên cứu của các thành viên trong nhóm này là xây dựng các định lí về sự tồn tại nghiệm ngẫu nhiên (tìm điều kiện đủ) của phương trình toán tử ngẫu nhiên (*với các loại toán tử khác nhau*: ngẫu nhiên, ngẫu nhiên có nhiễu, hoàn toàn ngẫu nhiên,...) *trên các không gian khác nhau* (Banach, mêtric đầy đủ, Polish,...).

Trong bài báo, tác giả trình bày các nghiên cứu về tính duy nhất nghiệm của phương trình

toán tử ngẫu nhiên có nhiễu thông thường(có dạng *T(w, x) + k(w).x = η(w))* trên không gian Hilbert tách được. Câu hỏi đặt ra là với phương trình toán tử ngẫu nhiên có dạng *T(w, x) − k(w).x = η(w)* (phương trình này tác giả đặt tên là phương trình ***toán tử ngẫu nhiên nhiễu đối***) thì tính duy nhất nghiệm sẽ ra sao? Có sự khác biệt nào không? Bài báo dựa trên các kiến thức về Giải tích hàm và Lý thuyết xác suất xây dựng hướng nghiên cứu này.

2. ĐỐI TƯỢNG NGHIÊN CỨU

2.1. Toán tử ngẫu nhiên

Cho F là tập con khác ϕ trên không gian Hilbert tách được và (Ω, $\mathcal{A}$) là không gian đo với Ω là không gian mẫu, khác ϕ.

Định nghĩa 2.1.1.

Ánh xạ T: Ω x F$\to$F được gọi là toán tử ngẫu nhiên nếu với mỗi x $\in$ F, T(. , *x*) là đo được.

Toán tử T: Ω x F$\to$ F được gọi là toán tử ngẫu nhiên liên tục nếu với mỗi $w \in \Omega$, T(*w*, .) là liên tục.

Toán tử T: Ω x F$\to$ F được gọi là toán tử ngẫu nhiên tuyến tính nếu với mỗi $w \in \Omega$, T(*w*, .) là tuyến tính.

Toán tử T: Ω x F$\to$ F được gọi là toán tử ngẫu nhiên Lipschitz nếu với mỗi $w \in \Omega$, $\forall x, y \in$ X ta có:

$$\|T(w,x)-T(w,y)\| \le L(w)\|x-y\|$$

2.2. Phương trình toán tử ngẫu nhiên

Cho (Ω, $\mathcal{A}$, |P) là không gian xác suất và X, Y là không gian Hilbert tách được.

Định nghĩa 2.2.1. Ánh xạ ξ: $\Omega \to$F là biến ngẫu nhiên X – giá trị nếu ξ là ($\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$) – đo được với $\mathcal{B}$ là σ - đại số Borel. Kí hiệu: $\xi(w) \in L_0^X$.

Định nghĩa 2.2.2. Cho ánh xạ T: X$\to$Y là toán tử ngẫu nhiên và $\eta(w)$ là biến ngẫu nhiên *Y* - giá trị.

Phương trình toán tử ngẫu nhiên là phương trình có dạng: *T*(*w*, *x*) = $\eta(w)$.

Ánh xạ $\xi(w) \in L_0^X$ được gọi là nghiệm của phương trình toán tử ngẫu nhiên nếu *T*($\xi(w)$, x) = η(w).

Định nghĩa 2.2.3. Ánh xạ đo được ξ : $\Omega \to$F là điểm bất động ngẫu nhiên của toán tử ngẫu nhiên T: Ω x F$\to$ F khi và chỉ khi T(*w*, $\xi(w)$) = $\xi(w)$ $\forall w \in \Omega$.

Nếu ánh xạ T: Ω x F$\to$ F có điểm bất động ngẫu nhiên thì với mỗi w$\in \Omega$, T(*w*, .) có điểm bất động ngẫu nhiên trong F.

Định lí 2.2.1. Cho X là không gian Hilbert tách được và T là ánh xạ ngẫu nhiên liên tục trên X, đơn điệu mạnh và tồn tại biến ngẫu nhiên nhận giá trị thực dương *m*(*w*) sao cho $\forall x_1, x_2 \in$X ta có:

$$\langle T(w,x_1)-T(w,x_2), x_1-x_2\rangle \ge m(w)\|x_1-x_2\|^2$$

Khi đó, với bất kì $\eta(w) \in L_0^Y(\Omega)$, phương trình T(w, x) = η(w) có nghiệm duy nhất.

2.3. Phương trình toán tử ngẫu nhiên có nhiễu và phương trình toán tử ngẫu nhiên nhiễu đối

Định nghĩa 2.3.1. Cho ánh xạ T: X$\to$Y là toán tử ngẫu nhiên và $\eta(w)$ là biến ngẫu nhiên Y - giá trị.

Phương trình toán tử ngẫu nhiên có nhiễu (bình thường) là phương trình có dạng: T(*w*, *x*) + *k*(*w*).*x* = $\eta(w)$ với *k*(*w*) là biến ngẫu nhiên nhận giá trị dương. Ánh xạ $\xi(w) \in L_0^X$ được gọi là nghiệm của phương trình toán tử ngẫu nhiên có nhiễu nếu T($\xi(w)$, x) + *k*(*w*). $\xi(w)$ = $\eta(w)$.

Định nghĩa 2.3.2. Cho ánh xạ T: X$\to$Y là toán tử ngẫu nhiên và $\eta(w)$ là biến ngẫu nhiên Y - giá trị.

Phương trình toán tử ngẫu nhiên nhiễu đối là phương trình có dạng: T(w, x) – $k(w).x$ = η (w) với $k(w)$ là biến ngẫu nhiên nhận giá trị dương. Ánh xạ $\xi(w) \in L_0^X$ được gọi là nghiệm của phương trình toán tử ngẫu nhiên có nhiễu nếu

T(ξ (w), x) – $k(w)$. ξ (w) = η (w).

3. CÁC KẾT QUẢ NGHIÊN CỨU

3.1. Tính duy nhất nghiệm của phương trình toán tử ngẫu nhiên có nhiễu trên không gian Hilbert tách được [1, 2]

Định lí 3.1.1.

Cho T là toán tử ngẫu nhiên liên tục trên không gian Hilbert tách được. Khi đó, với bất kì $\eta(w) \in L_0^Y(\Omega)$, phương trình toán tử ngẫu nhiên có nhiễu $T(w, x)$ + k(w).x = η (w) có nghiệm duy nhất khi thỏa mãn một trong hai điều kiện:

i)T thỏa mãn tính chất Lipschitz tức là tồn tại biến ngẫu nhiên giá trị thực không âm $L(w)$ với $L(w) < k(w)$ sao cho $\forall x, y \in$ X ta có:

$$\|T(w,x)-T(w,y)\| \le L(w)\|x-y\| \tag{1}$$

ii) T là ánh xạ ngẫu nhiên trên X sao cho với mỗi $w \in \Omega$, $T(w, x)$ là toán tử ngẫu nhiên tuyến tính liên tục được định nghĩa bởi

$$\|T\|(w) \text{ và } \|T\|(w) < k(w) \tag{2}$$

Chứng minh

i) Xét phương trình ngẫu nhiên $S(w, x) = \eta(w)$, trong đó S là ánh xạ ngẫu nhiên được cho bởi

$S(w, x) = T(w, x) + k(w)x$

Ta có

$$\begin{aligned}&\langle S(w,x)-S(w,y), x-y\rangle = \\ &\langle T(w,x)-T(w,y), x-y\rangle + k(w)\|x-y\|^2\end{aligned} \tag{3}$$

Từ (1) và (3) suy ra:

$$\langle S(w,x)-S(w,y), x-y\rangle \ge k(w).\|x-y\|^2 - \|T(w,x)-T(w,y)\|.\|x-y\|$$

Hay

$$\langle S(w,x)-S(w,y), x-y\rangle \ge [k(w)-L(w)].\|x-y\|^2$$

Theo giả thiết ta có $k(w) - L(w) > 0$ và sử dụng định lý 2.2.1 cho toán tử ngẫu nhiên S =>đpcm.

ii) Cố định w$\in \Omega$, vì $\|T\|(w) < k(w)$ nên toán tử liên tục $x \to S(w, x) = T(w,x) + k(w)x$ có nghịch đảo liên tục xác định bởi $x \to S^{-1}(w, x)$

Đặt $\xi(w) = S^{-1}(w, x)$ thì ξ đo được và ta có

T(w, $\xi(w)$) + $k(w)$ $\xi(w)$ = $\eta(w)$ hay phương trình có nhiễu có nghiệm duy nhất $\xi(w)$ với mỗi w $\in \Omega$ cố định =>đpcm.

Ví dụ 3.1.1. *(Ví dụ về phương trình toán tử ngẫu nhiên có nhiễu)* Xét phương trình tích phân ngẫu nhiên:

$$\int_0^1 K(w,t,s)x(w,s)ds + h(w)x(w,t) = \eta(w,t) \quad (4)$$

với $K(w, t, s)$, $\eta(w,t)$ là các hàm ngẫu nhiên liên tục xác định trên [0, 1] x [0, 1] và [0, 1] còn $h(w)$ là biến ngẫu nhiên nhận giá trị dương. Đặt $M(w) = \max_{[0,1]\times[0,1]}|K(w,t,s)|$. Chứng minh rằng nếu $M(w) < h(w)$ (5) thì phương trình (4) có nghiệm duy nhất $x(w, t)$ là hàm ngẫu nhiên liên tục trên [0, 1].

Chứng minh

Ta định nghĩa ánh xạ T trên $X = C[0, 1]$ như sau: với $x = x(t) \in X$, $T(w, x)(t) = \int_0^1 K(w,t,s)x(s)ds$

Ta thấy với mỗi w $\in \Omega$, $x \to T(w, x)$ là toán tử tuyến tính liên tục. Thật vậy:

* $\forall x, y \in X$:

$T(w,x)(t) + T(w, y)(t)$

$$= \int_0^1 K(w,t,s)x(w,s)ds + \int_0^1 K(w,t,s)y(w,s)ds$$

Hay $T(w,x)(t) + T(w, y)(t)$=

$$\int_0^1 K(w,t,s)(x(w,s)+y(w,s))ds$$

Suy ra: $T(w,x)(t) + T(w,y)(t) = T(w,x+y)(t)$ (6)

* $\forall\ \alpha \in$ R hoặc C:

$$\mathrm{T}(\mathrm{w},\alpha x)(\mathrm{t}) = \int_0^1 K(w,t,s)(\alpha x)(s)ds$$

Hay $\mathrm{T}(\mathrm{w},\alpha x)(\mathrm{t}) = \alpha \int_0^1 K(w,t,s)x(w,s)ds$

Suy ra: $T(w,\alpha x)(t) = \alpha T(w,x)$ (7)

*Ta có:

$$|T(w,x)(s)| \le \int_0^1 |K(w,t,s)\|x(w,s)|ds$$

Suy ra

$$|T(w,x)(s)| \le \int_0^1 \max_{0\le s\le 1}|K(w,t,s)| \max_{0\le s\le 1}|x(w,s)|ds$$

Do đó

$$|T(w,x)(s)| \le M(w)\|x\|$$

Suy ra: T bị chặn bởi $M(w)$ (8)

Từ (6), (7), (8) suy ra T là toán tử tuyến tính liên tục.

Ta lại có

$$\|T(w,x)(t)\| = \max_{[0,1]}\left|\int_0^1 K(w,t,s)x(w,s)ds\right|$$

$$\ge \int_0^1 M(w)\max_{[0,1]}|x(w,s)| = M(w)\|x\|$$

Với $x = x(.,t) \in$ C[0,1] =>
$\|T\|(w) \le M(w) < h(w)$

Mặt khác, phương trình (4) có thể viết dưới dạng: T(w, x) + h(w).x = η (w).

Sử dụng *Định lí 3.3.1* =>đpcm.

3.2. Tính duy nhất nghiệm của phương trình toán tử ngẫu nhiên nhiễu đối trên không gian Hilbert tách được [2,3,4]

Định lí 3.2.1.

Cho T là toán tử ngẫu nhiên liên tục trên không gian Hilbert tách được. Khi đó, với bất kì $\eta(w) \in L_0^Y(\Omega)$, phương trình toán tử ngẫu nhiên nhiễu đối $T(w, x) - k(w).x = \eta(w)$ có nghiệm duy nhất khi thỏa mãn một trong hai điều kiện:

i) T thỏa mãn thỏa mãn tính chất Lipschitz tức là tồn tại biến ngẫu nhiên giá trị thực không âm $L(w)$ với $0 < k(w) < [1+\sqrt{2}]L(w)$ sao cho $\forall\ x, y \in X$ ta có:

$$\|T(w,x) - T(w,y)\| \le L(w)\|x-y\| \quad (9)$$

ii) ([3]) T là ánh xạ ngẫu nhiên trên X với X khả ly sao cho với mỗi $w \in \Omega$, $T(w, x)$ là toán tử ngẫu nhiên tuyến tính liên tục được định nghĩa bởi $T(w, x)$ và $\|T\|(w) <$ k(w) (10)

Chứng minh

i) Xét phương trình ngẫu nhiên $S(w, x) = \eta(w)$, trong đó S là ánh xạ ngẫu nhiên được cho bởi

$S(w, x) = T(w, x) - k(w)x$

Ta có

$$\langle S(w,x)-S(w,y), x-y\rangle = \langle T(w,x)-T(w,y), x-y\rangle - k(w)\|x-y\|^2 \quad (11)$$

Suy ra

$$\langle S(w,x)-S(w,y), x-y\rangle^2 = \langle T(w,x)-T(w,y), x-y\rangle^2 + k^2(w)\|x-y\|^4 - 2k(w)\|x-y\|^2\langle T(w,x)-T(w,y), x-y\rangle \quad (12)$$

Hay $\langle S(w,x)-S(w,y), x-y\rangle^2 \ge$

$$\ge -\|T(w,x)-T(w,y)\|^2.\|x-y\|^2 + k^2(w)\|x-y\|^4 - 2k(w)\|x-y\|^3\|T(w,x)-T(w,y)\| \quad (13)$$

Từ (9) và (13) ta có

$$\langle S(w,x)-S(w,y), x-y\rangle^2 \ge$$
$$\ge [-L^2(w) + k^2(w) - 2k(w)L(w)]\|x-y\|^4 \quad (14)$$

Đặt $A(w) = -L^2(w) + k^2(w) - 2k(w)L(w)$ và chú ý rằng với $0 < k(w) < [1+\sqrt{2}]L(w)$ thì A > 0.

Khi đó (14) trở thành

$$\langle S(w,x) - S(w,y), x-y\rangle^2 \geq \sqrt{A}\|x-y\|^4$$

Suy ra $\langle S(w,x) - S(w,y), x-y\rangle \geq \sqrt{A}.\|x-y\|^2$

Sử dụng định lý 2.2.1 cho toán tử ngẫu nhiên S =>đpcm.

ii) Ta viết lại phương trình nhiễu đối có dạng *f*(*w*, *x*) = *g*(*w*, *x*) với *f*, *g* là các toán tử ngẫu nhiên xác định bởi *f*(*w*, *x*) = *T*(*w*, *x*) – *k*(*w*).*x* và *g*(*w*, *x*) = $\eta(w)$. Khi đó, *f* và *g* là các toán tử ngẫu nhiên liên tục. Theo giả thiết, tồn tại tập D có xác suất 1 sao cho $\|T\|(w) < k(w)$ với mỗi *w* $\in$ D. Do đó, với mỗi *w* $\in$ D, $\exists\, !u(w) \in X$ sao cho *T*(*w*, *u*(*w*)) – *k*(*w*). u(w) = $\eta(w)$. Suy ra, phương trình *f*(*w*, *x*) = *g*(*w*, *x*) có nghiệm duy nhất =>đpcm.

Ví dụ 3.2.2. *(Ví dụ về phương trình toán tử ngẫu nhiên nhiễu đối)* Xét phương trình tích phân ngẫu nhiên:

$$\int_0^1 K(w,t,s)x(w,s)ds - h(w)x(w,t) = \eta(w,t) \quad (15)$$

với *K*(*w*, *t*, *s*), $\eta(w,t)$ là các hàm ngẫu nhiên liên tục xác định trên [0, 1] x [0, 1] và [0, 1] còn h(w) là biến ngẫu nhiên nhận giá trị dương. Đặt $M(w) = \max_{[0,1]\times[0,1]}|K(w,t,s)|$. Chứng minh rằng nếu *M*(*w*) < *h*(w) (16) thì phương trình (15) có nghiệm duy nhất *x*(*w*, *t*) là hàm ngẫu nhiên liên tục trên [0, 1].

Chứng minh

Ta định nghĩa ánh xạ T trên *X* = *C*[0, 1] như sau:

với $x = x(t) \in X$, $T(w,x)(t) = \int_0^1 K(w,t,s)x(s)ds$

Khi đó, phương trình (15) là phương trình ngẫu nhiên nhiễu đối: *T*(*w*, *x*) - *h*(*w*).*x* = $\eta(w)$.

Theo chứng minh ở Ví dụ 3.1.1 thì với mỗi w $\in \Omega$, T(w, x) là toán tử ngẫu nhiên tuyến tính liên tục được định nghĩa bởi *T*(*w*, *x*) và $\|T\|(w) < h(w)$ với *M*(*w*) < *h*(*w*). Từ đó, theo Định lý 3.2.1 suy ra đpcm.

Nhận xét 3.2.3. Trên không gian Hilbert tách được, điều kiện chứng minh tính duy nhất nghiệm của phương trình ngẫu nhiên có nhiễu và nhiễu đối giống nhau nếu *T*(*w*, *x*) là toán tử ngẫu nhiên tuyến tính liên tục (công thức (2) và (10)) và khác nhau trong trường hợp *T*(*w*, *x*) là toán tử ngẫu nhiên *Lipschitz* (công thức (1) và (9)).

4. KẾT LUẬN

Bài báo nghiên cứu phương trình toán tử ngẫu nhiên có nhiễu, dựa trên các kiến thức về Lý thuyết xác suất, tác giả tổng hợp các công thức chứng minh tính duy nhất nghiệm của phương trình toán tử ngẫu nhiên có nhiễu thông thường trên không gian Hilbert tách được (mục 3.1).

Dựa trên công thức tổng quát của phương trình *toán tử ngẫu nhiên có nhiễu* thông thường, bài báo xây dựng một dạng phương trình toán tử ngẫu nhiên có nhiễu mới, gọi là *phương trình toán tử ngẫu nhiên nhiễu đối*. Trên cơ sở các kiến thức về phương trình toán tử ngẫu nhiên có nhiễu, tác giả tổng hợp công thức (9) và xây dựng công thức (10) trong Định lý 3.2.1 chỉ ra phương pháp chứng minh tính tính duy nhất nghiệm của phương trình toán tử ngẫu nhiên nhiễu đối. Bài báo cũng so sánh sự giống và khác nhau khi xác định điều kiện đủ để tìm nghiệm duy nhất của phương trình ngẫu nhiên có nhiễu và nhiễu đối (nhận xét 3.2.3).

Kết quả nghiên cứu là cơ sở cho việc giải phương trình toán tử ngẫu nhiên.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Trần Thị Kim Thanh, Luận văn thạc sỹ: “*Phương trình toán tử ngẫu nhiên”*, Trường Đại học Khoa học tự nhiên (2012), trang 11-28.

[2] Trần Thị Kim Thanh, “*Áp dụng lý thuyết điểm bất động để chứng minh tính duy nhất nghiệm của phương trình toán tử ngẫu nhiên có nhiễu*”, Tạp chí Khoa học & Công nghệ, Trường Đại học Kinh tế - Kỹ thuật Công nghiệp số 12 (3/2017).

[3] Tạ Ngọc Ánh, Luận án tiến sĩ: “*Một số vấn đề về phương trình ngẫu nhiên”*, Trường Đại học Khoa học tự nhiên (2012), trang 22-23.

[4] Thang D.H, Anh T.N, “*Some Results on random equations* ”, Vietnam J. Math, 38(1), pp. 35-44, (2009).

Thông tin liên hệ: **Trần Thị Kim Thanh**

Điện thoại: 0984 439 508 - Email: ttkthanh@uneti.edu.vn

Khoa Khoa học cơ bản, Trường Đại học Kinh tế - Kỹ thuật Công nghiệp.