No. ....
Date ....

Nguyễn đại Phát 54.

*Bài 8,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & -4 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

a, $P(\lambda) = |A - \lambda I_3| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 4 \\ 2 & -\lambda & -4 \\ -1 & 1 & 5-\lambda \end{vmatrix}$

$= (1-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & -4 \\ 1 & 5-\lambda \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 5-\lambda \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 2 & -\lambda \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$

$= (1-\lambda)(-5\lambda + \lambda^2 + 4) - (10 - 2\lambda - 4) + 4(2-\lambda).$

$= -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6.$

$\Rightarrow$ PT đặc trưng là $-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6 = 0$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = 2 \\ \lambda_3 = 1. \end{array}\right.$

Vậy A có 3 trị riêng là $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 1$.

Vì A có 3 giá trị riêng phân biệt và A là ma trận vuông cấp 3 $\Rightarrow$ A chéo hoá được

b, Với $\lambda_1 = 3$, xét hệ.

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x_2 = 0 \\ -2x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 0. \\ x_1 = 2x_3 \end{cases}$

Các vt có dạng $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$

Vậy ~~các vectơ~~ với $\lambda_1 = 3$, vectơ riêng ứng là:

$k \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \ \forall k \in R^*$

No.
Date Nguyễn Đại Phát 5.4

Với $\lambda_2 = 2$, xét hệ pt:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_1 = x_2 \end{cases}$$

Các no có dạng $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Vậy vs $\lambda_2 = 2 \Rightarrow$ vec tơ riêng ứng λ_1: $k \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\forall k \in \mathbb{R}^*$.

Với $\lambda_3 = 1$, xét hệ pt:

$$\begin{cases} x_2 + 4x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - 4x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 + 4x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -4x_3 \\ x_1 = 0 \end{cases}$$

Các nghiệm có dạng $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -4x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$

Các vectơ riêng ứng $\lambda_3 = 1$ có dạng:

$k \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$ với $k \in \mathbb{R}^*$.

c,

No. ....
Date ....

Nguyễn Đại Phát 54

c, Ma trận chéo hoá A là:

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ma trận chéo dạng A là:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Bài 5

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

a, $D(\lambda) = \det|A - \lambda I_3| = \begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 0-\lambda \end{vmatrix}$.

$= -\lambda \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1-\lambda \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$.

$= -\lambda^3 + \lambda^2 + 2\lambda$.

$\Rightarrow$ Pt đặc trưng của A là:

$-\lambda^3 + \lambda^2 + 2\lambda = 0$.

$\Rightarrow \lambda_1 = 2 \quad , \lambda_2 = -1 \quad , \lambda_3 = 0$.

Vậy A có 3 trị riêng $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 0$.

Vì A có 3 trị riêng phân biệt và A vuông cấp 3 nên A chéo hoá:

+ Với $\lambda_1 = 2$, ta có:

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$(\Leftrightarrow) \begin{cases} -x_2 + x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_2 + x_2 = 0 \end{cases} \quad (\Leftrightarrow) \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_3 \end{cases}$

THIÊN TRƯỜNG

No. ....
Date ....

Nguyễn Đại Phát 54

Nghiệm có dạng: $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Với $\lambda_2 = -1$, xét hệ

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 \\ x_2 = x_3 \end{cases}$

Nghiệm có dạng: $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Với $\lambda_3 = 0$, xét hệ:

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -x_3 \\ x_1 = x_3 \end{cases}$

Nghiệm là: $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 \\ -x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$\Rightarrow$ Ma trận chéo hoá A là:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

b, $A^{2022} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{2022}$.

~~Ma trận đ~~

No. ....
Date ....

Nguyễn Đại Phát 54.

$\Rightarrow \hat{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Có $\hat{A} = P^{-1} . A . P$.

$\Rightarrow A = P . \hat{A} . P^{-1}$.

$\Rightarrow A^{2022} = (P \hat{A} P^{-1})^{2022}$.

$= \underbrace{(P . \hat{A} . P^{-1})(P\hat{A} . P^{-1}) \dots (P\hat{A}P^{-1})}_{2022 \text{ lần}}$.

$= P . \hat{A}^{2022} P^{-1}$

$= \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^{2022} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1} \quad (*)$.

Có $\det(P) = 1 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 6$.

$P_{11} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$; $P_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2$; $P_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$P_{21} = -\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3$; $P_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$; $P_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3$

$\Rightarrow P^* = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix}$.

$\Rightarrow P^{-1} = \frac{1}{|P|} . P^* = \frac{1}{6} . \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix}$.

$= \begin{bmatrix} 1/3 & 1/2 & 1/6 \\ -1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$.

Từ $(*) \Rightarrow A^{2022} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^{2022} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 & 1/2 & 1/6 \\ -1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$

No. ....
Date ....

Nguyễn Đại Phát 54

$$= \begin{bmatrix} 2^{2022} & -2 & 0 \\ 2^{2022} & 1 & 0 \\ 2^{2022} & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/3 & 1/2 & 1/6 \\ -1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{2^{2022}-3}{3} & \frac{2^{2022}}{2} & \frac{2^{2022}-4}{6} \\ \frac{2^{2022}-1}{3} & \frac{2^{2022}}{2} & \frac{2^{2022}+2}{6} \\ \frac{2^{2022}-1}{3} & \frac{2^{2022}}{2} & \frac{2^{2022}+2}{6} \end{bmatrix}$$

Bài 13

a, $Au = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 11 \\ -10 \end{bmatrix}$

Có $v = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$.

$\Rightarrow (Au, v) = -2 + 33 + 10 = 41$ (1)

+) Có $u = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}$

$Av = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -5 \\ 7 \end{bmatrix}.$

$\Rightarrow (u, Av) = -2 + 15 + 28 = 41$ (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow (Au, v) = (u, Av)$.

b, Đặt $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$, $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$.

$Au = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2u_1 + u_2 + u_3 \\ u_1 - 2u_2 + u_3 \\ u_1 + u_2 - 2u_3 \end{bmatrix}$

No. ....
Date ....

Nguyễn Đại Phát 54

Có $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow (Au, v) = \begin{bmatrix} -2u_1 \cdot v_1 + u_2 v_1 + u_3 v_1 \\ u_1 v_2 - 2u_2 v_2 + u_3 v_2 \\ u_1 v_3 + u_2 v_3 - 2u_3 v_3 \end{bmatrix}$ (1).

$Av = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2v_1 + v_2 + v_3 \\ v_1 - 2v_2 + v_3 \\ v_1 + v_2 - 2v_3 \end{bmatrix}$.

Có $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$.

$\Rightarrow (u, Av) = \begin{bmatrix} -2v_1 u_1 + v_2 u_1 + v_3 u_1 \\ v_1 u_2 - 2v_2 u_2 + v_3 u_2 \\ v_1 u_3 + v_2 u_3 - 2u_3 v_3 \end{bmatrix}$ (2)

(1), (2), ta thấy nếu đối với mọi u với v $\Rightarrow (Au, v) = (u, Av)$.

c, $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$.

Đa thức đặc trưng của A là

$D(\lambda) = |A - \lambda I_3| = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -2-\lambda \end{vmatrix}$.

$= (-2-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & -2-\lambda \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$

$= -\lambda^3 - 6\lambda^2 - 9\lambda$.

Do đó phương trình đặc trưng là:

$-\lambda^3 - 6\lambda^2 - 9\lambda = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = -3 \end{cases}$

THIÊN TRƯỜNG

No. ....

Date ....

Nguyễn Đại Phát 54.

Vì A có giá trị riêng phân biệt mà A vuông cấp 3 nên ma trận A có chéo hoá.

+) Với $\lambda_1 = 0$, xét hệ pt:

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_3 \end{cases}.$$

Nghiệm có dạng: $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

+) Với $\lambda_2 = -3$, xét hệ pt:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x_1 = -x_2 - x_3$.

Nghiệm có dạng: $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 - x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

17, $A = \begin{bmatrix} 4a - 3b & 12a - 12b & 6a - 6b \\ -a + b & -3a + 4b & -2a + 2b \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$.

$a = 4$, $b = 1$.

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 13 & 36 & 18 \\ -3 & -8 & -6 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

Đa thức đặc trưng của A là:

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda . I_3) = \begin{vmatrix} 13 - \lambda & 36 & 18 \\ -3 & -8 - \lambda & -6 \\ 0 & 0 & 4 - \lambda \end{vmatrix}$$

No. ....
Date ....

Nguyễn Đại Phát 54

$= (13-\lambda)(-8-\lambda)(4-\lambda) + 36(-6)\cdot 0 + 18(-3)\cdot 0$

$-0(-8-\lambda)18 - 0(-6)(13-\lambda) - (4-\lambda)\cdot 36(-3)$

$= -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 24\lambda + 16$

Do đó PT đặc trưng của A là:

$-\lambda^3 + 9\lambda^2 - 24\lambda + 16 = 0$

$\Leftrightarrow -(\lambda-1)\cdot(\lambda-4)^2 = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 4 \end{cases}$

$\Rightarrow$ A có giá trị riêng là $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 4$.

Vì A có 2 giá trị riêng phân biệt mà A vuông cấp 3 nên ma trận A có chéo hoá.

+ Với $\lambda_1 = 1$, xét hệ pt

$\begin{cases} 12x_1 + 36x_2 + 18x_3 = 0 \\ -3x_1 - 9x_2 - 6x_3 = 0 \\ 3x_2 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = 0 \\ -3x_1 - 9x_2 = 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = 0 \\ x = -3x_2 \end{cases}$

Nghiệm có dạng $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Không gian riêng tương ứng với $\lambda_1 = 1$ là số không gian con, 1 chiều sinh ra bởi $u_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$: $N(1) = \text{span}\{u_1\}$

+ Với $\lambda_2 = 4$, xét hệ pt

$\begin{cases} 9x_1 + 36x_2 + 18x_3 = 0 \\ -3x_1 - 12x_2 - 6x_3 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0$

$\Leftrightarrow x_1 = -4x_2 - 2x_3$

No. ....
Date ....

Nguyễn Đại Phát 54.

Nghiệm có dạng $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4x_2 - 2x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Không gian riêng tương ứng với $\lambda_2 = 4$ là không gian con 2 chiều sinh ra bởi hai vector $u_1 = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ và $u_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$N(4) = \text{span}\{u_1, u_2\}$.