# Giải tích
# Chương 1. Phép tính vi phân hàm một biến và nhiều biến

Vũ Hữu Như

PHENIKAA University

# Tên học phần và tài liệu tham khảo

- Tên học phần: **Giải tích**
- Số tín chỉ: 03
- Tài liệu tham khảo:
  1. Erwin Kreyszig (10th Edition, 2011), Advanced Engineering Mathematics.
  2. Nguyễn Đình Trí (Chủ biên), Tạ Văn Đĩnh, Nguyễn Hồ Quỳnh (2014),Toán học cao cấp Tập III, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam.
  3. Nguyễn Đình Trí (Chủ biên), Tạ Văn Đĩnh, Nguyễn Hồ Quỳnh (2014),Toán học cao cấp Tập II- Phép tính giải tích một biến số, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam.

### 1.1.1 Đạo hàm và hàm số khả vi

**Definition**

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$ và $x_0 \in (a; b)$.

- Đạo hàm của hàm số tại $x = x_0$ :

$$f'(x_0) := \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \qquad (1)$$

### 1.1.1 Đạo hàm và hàm số khả vi

**Definition**

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng $(a;b)$ và $x_0 \in (a;b)$.

- Đạo hàm của hàm số tại $x = x_0$ :

$$f'(x_0) := \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \qquad (1)$$

- Nếu hàm số có đạo hàm tại $x = x_0$, ta nói hàm số *khả vi* tại $x = x_0$.

### 1.1.1 Đạo hàm và hàm số khả vi

Definition

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng $(a;b)$ và $x_0 \in (a;b)$.
- Đạo hàm của hàm số tại $x = x_0$ :

$$f'(x_0) := \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \qquad (1)$$

- Nếu hàm số có đạo hàm tại $x = x_0$, ta nói hàm số *khả vi* tại $x = x_0$.

• **Ý nghĩa Vật lý**: Xét một chất điểm M chuyển động theo công thức:

$$S = f(t).$$

- Vật tốc $v = f'(t)$
- Gia tốc $a = f''(t)$

- **Ý nghĩa hình học (vẽ hình)**

$+$ Đường cong $(C)$ có phương trình $y = f(x)$

$\Longrightarrow$ Phương trình tiếp tuyến của $(C)$ tại điểm $M(x_0, f(x_0))$?

• **Ý nghĩa hình học (vẽ hình)**

+ Đường cong $(C)$ có phương trình $y = f(x)$

$\Longrightarrow$ Phương trình tiếp tuyến của $(C)$ tại điểm $M(x_0, f(x_0))$?

Tiếp tuyến của $(C)$ tại $M(x_0, y_0) \in (C)$ là:

$$\boxed{d : y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).}$$

**Nhắc lại một số công thức đạo hàm của các hàm số cơ bản**

$(c)' = 0 \quad (c = \text{hằng số}),$ $\qquad (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$

$(\sin x)' = \cos x$ $\qquad (\cos x)' = -\sin x$

$(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ $\qquad (\cot x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

$(\ln |x|)' = \dfrac{1}{x}$ $\qquad (\log_a(|x|)' = \dfrac{1}{x \ln a} \quad (0 < a \neq 1)$

$(e^x)' = e^x$ $\qquad (a^x)' = a^x \ln a \quad (a > 0)$

$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, (|x| < 1)$ $\qquad (\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, (|x| < 1)$

$(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$ $\qquad (\text{arccot} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

**Các quy tắc tính đạo hàm**

**(1) Định lí 1.** Giả sử $f(x)$ và $g(x)$ xác định trên $(a; b)$ và có đạo hàm tại $x \in (a; b)$. Khi đó: $f(x) + g(x)$ và $f(x)g(x)$ khả vi tại $x$. Hơn nữa:

(i) $[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$,

(ii) $[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$,

(iii) Nếu $g(x) \neq 0$, thì $\frac{f(x)}{g(x)}$ cũng khả vi tại $x$ và

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

- **Hàm số hợp.**

• **Hàm số hợp.** Cho hàm số $u : (a; b) \to (c; d)$ và $f : (c; d) \to (m; n)$. Khi đó ta có hàm số: $h : (a; b) \to (m; n)$ cho bởi:

• **Hàm số hợp.** Cho hàm số $u : (a; b) \to (c; d)$ và $f : (c; d) \to (m; n)$. Khi đó ta có hàm số: $h : (a; b) \to (m; n)$ cho bởi:

$$h(x) = f(u(x)).$$

• **Hàm số hợp.** Cho hàm số $u : (a; b) \to (c; d)$ và $f : (c; d) \to (m; n)$. Khi đó ta có hàm số: $h : (a; b) \to (m; n)$ cho bởi:

$$h(x) = f(u(x)).$$

Hàm số $h(x)$ được gọi là hàm số hợp của hai hàm số $u(x)$ và $f(u)$. Kí hiệu: $h(x) = f(u(x))$ hoặc $h = f \circ u$.

• **Hàm số hợp.** Cho hàm số $u : (a; b) \to (c; d)$ và $f : (c; d) \to (m; n)$. Khi đó ta có hàm số: $h : (a; b) \to (m; n)$ cho bởi:

$$h(x) = f(u(x)).$$

Hàm số $h(x)$ được gọi là hàm số hợp của hai hàm số $u(x)$ và $f(u)$. Kí hiệu: $h(x) = f(u(x))$ hoặc $h = f \circ u$.

• **Ví dụ.** Cho $u(x) = x^2 + x - 2$ và $f(u) = \sin 3u$.

• **Hàm số hợp.** Cho hàm số $u : (a; b) \to (c; d)$ và $f : (c; d) \to (m; n)$. Khi đó ta có hàm số: $h : (a; b) \to (m; n)$ cho bởi:

$$h(x) = f(u(x)).$$

Hàm số $h(x)$ được gọi là hàm số hợp của hai hàm số $u(x)$ và $f(u)$. Kí hiệu: $h(x) = f(u(x))$ hoặc $h = f \circ u$.

• **Ví dụ.** Cho $u(x) = x^2 + x - 2$ và $f(u) = \sin 3u$. Khi đó:

$$h(x) = f(u(x)) = \sin 3(x^2 + x - 2).$$

# (2) Định lí 2.

(Đạo hàm hàm số hợp) Giả sử hàm số $u = u(x)$ khả vi tại $x_0$, hàm số $f(u)$ khả vi tại $u_0 = u(x_0)$. Khi đó hàm số hợp $y = h(x) = f(u(x))$ khả vi tại $x_0$ và

$$h'(x_0) = f'_u(u_0)u'_x(x_0).$$

# (2) Định lí 2.

(Đạo hàm hàm số hợp) Giả sử hàm số $u = u(x)$ khả vi tại $x_0$, hàm số $f(u)$ khả vi tại $u_0 = u(x_0)$. Khi đó hàm số hợp $y = h(x) = f(u(x))$ khả vi tại $x_0$ và

$$h'(x_0) = f'_u(u_0)u'_x(x_0).$$

Hay ta hay dùng công thức sau:

$$y'_x = y'_u u'_x.$$

# (2) Định lí 2.

(Đạo hàm hàm số hợp) Giả sử hàm số $u = u(x)$ khả vi tại $x_0$, hàm số $f(u)$ khả vi tại $u_0 = u(x_0)$. Khi đó hàm số hợp $y = h(x) = f(u(x))$ khả vi tại $x_0$ và

$$h'(x_0) = f'_u(u_0)u'_x(x_0).$$

Hay ta hay dùng công thức sau:

$$y'_x = y'_u u'_x.$$

- **Ví dụ.** Tính đạo hàm của hàm số: $y = e^{\sin x}$.

# (2) Định lí 2.

(Đạo hàm hàm số hợp) Giả sử hàm số $u = u(x)$ khả vi tại $x_0$, hàm số $f(u)$ khả vi tại $u_0 = u(x_0)$. Khi đó hàm số hợp $y = h(x) = f(u(x))$ khả vi tại $x_0$ và

$$h'(x_0) = f'_u(u_0)u'_x(x_0).$$

Hay ta hay dùng công thức sau:

$$y'_x = y'_u u'_x.$$

• **Ví dụ.** Tính đạo hàm của hàm số: $y = e^{\sin x}$.
Đặt $u = \sin x \Longrightarrow y = e^u$. Ta có:

# (2) Định lí 2.

(Đạo hàm hàm số hợp) Giả sử hàm số $u = u(x)$ khả vi tại $x_0$, hàm số $f(u)$ khả vi tại $u_0 = u(x_0)$. Khi đó hàm số hợp $y = h(x) = f(u(x))$ khả vi tại $x_0$ và

$$h'(x_0) = f'_u(u_0)u'_x(x_0).$$

Hay ta hay dùng công thức sau:

$$y'_x = y'_u u'_x.$$

• **Ví dụ.** Tính đạo hàm của hàm số: $y = e^{\sin x}$.

Đặt $u = \sin x \Longrightarrow y = e^u$. Ta có:

$u'_x = \cos x, \quad y'_u = e^u$

# (2) Định lí 2.

(Đạo hàm hàm số hợp) Giả sử hàm số $u = u(x)$ khả vi tại $x_0$, hàm số $f(u)$ khả vi tại $u_0 = u(x_0)$. Khi đó hàm số hợp $y = h(x) = f(u(x))$ khả vi tại $x_0$ và

$$h'(x_0) = f'_u(u_0)u'_x(x_0).$$

Hay ta hay dùng công thức sau:

$$y'_x = y'_u u'_x.$$

• **Ví dụ.** Tính đạo hàm của hàm số: $y = e^{\sin x}$.

Đặt $u = \sin x \Longrightarrow y = e^u$. Ta có:

$u'_x = \cos x, \quad y'_u = e^u$

$$\Longrightarrow y' = y'_x = y'_u u'_x = e^u \cos x = e^{\sin x} \cos x.$$

# Bài tập

Tính đạo hàm của các hàm số sau đây

1) $y = \sin^2(3x^5 - 7x - 1)$

2) $y = (x+1)e^{\cos 2x}$

3) $y = \dfrac{1+e^x}{1-e^x}$

4) $y = \log_2(2^x + 2^{-x})$

5) $y = \arcsin(x^2 - 3x) + \arccos(x^2 - 3x)$

6) $y = e^{\frac{1+\sin 2x}{1+\cos 2x}}$

7) $y = \sqrt[3]{1+2x} - \sqrt[3]{1-2x}$

8) $y = (2x)^{x-1}$

9) $y = \dfrac{1+\ln x}{1-\ln x}$

10) $y = (2x - \dfrac{1}{x^2})^5$

11) $y = \arctan(x^4 - 5x) - \operatorname{arccot}(x^4 - 5x)$

**Cực trị.** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(a; b)$. Điểm $x_0 \in (a; b)$ được gọi là:

# 1.1.2 Một số định lý giá trị trung bình

**Cực trị.** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(a; b)$. Điểm $x_0 \in (a; b)$ được gọi là:
- *cực đại* nếu tồn tại $\delta > 0$ sao cho:

$$f(x_0 + \Delta x) \leq f(x_0) \quad \text{với mọi} \quad |\Delta x| < \delta.$$

**Cực trị.** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(a; b)$. Điểm $x_0 \in (a; b)$ được gọi là:
- *cực đại* nếu tồn tại $\delta > 0$ sao cho:

$$f(x_0 + \Delta x) \leq f(x_0) \quad \text{với mọi} \quad |\Delta x| < \delta.$$

- *cực tiểu* nếu tồn tại $\delta > 0$ sao cho:

$$f(x_0 + \Delta x) \geq f(x_0) \quad \text{với mọi} \quad |\Delta x| < \delta.$$

**Cực trị.** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(a; b)$. Điểm $x_0 \in (a; b)$ được gọi là:
- *cực đại* nếu tồn tại $\delta > 0$ sao cho:

$$f(x_0 + \Delta x) \leq f(x_0) \quad \text{với mọi} \quad |\Delta x| < \delta.$$

- *cực tiểu* nếu tồn tại $\delta > 0$ sao cho:

$$f(x_0 + \Delta x) \geq f(x_0) \quad \text{với mọi} \quad |\Delta x| < \delta.$$

- *cực trị* nếu $x_0$ hoặc là cực đại, hoặc là cực tiểu.

# 1.1.2 Một số định lý giá trị trung bình

**(1) Định lí 1. (Định lí Fermat)** Giả sử hàm số $f(x)$ khả vi trên $(a; b)$. Nếu $x = x_0 \in (a; b)$ là cực trị của $f(x)$ thì

$$f'(x_0) = 0. \qquad (1)$$

# 1.1.2 Một số định lý giá trị trung bình

**(1) Định lí 1. (Định lí Fermat)** Giả sử hàm số $f(x)$ khả vi trên $(a;b)$. Nếu $x = x_0 \in (a;b)$ là cực trị của $f(x)$ thì

$$f'(x_0) = 0. \qquad (1)$$

**(2) Hệ quả. (Định lí Rolle).** Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a;b]$ và khả vi trong $(a;b)$. Nếu $f(a) = f(b)$, thì tồn tại số **trung gian** $c \in (a;b)$ sao cho $f'(c) = 0$.

# • Ví dụ.

Cho $f(x) = (x-2)(x+3)^2(e^{2x}+3)+5$. CMR phương trình $f'(x) = 0$ có ít nhất 1 nghiệm.

## • Ví dụ.

Cho $f(x) = (x-2)(x+3)^2(e^{2x}+3)+5$. CMR phương trình $f'(x) = 0$ có ít nhất 1 nghiệm.
LG. Ta có, $f(x)$ liên tục và khả vi trên $\mathbb{R}$.

# • Ví dụ.

Cho $f(x) = (x-2)(x+3)^2(e^{2x}+3)+5$. CMR phương trình $f'(x) = 0$ có ít nhất 1 nghiệm.
LG. Ta có, $f(x)$ liên tục và khả vi trên $\mathbb{R}$.

$$f(2) = f(-3) = 5.$$

# • Ví dụ.

Cho $f(x) = (x-2)(x+3)^2(e^{2x}+3)+5$. CMR phương trình $f'(x) = 0$ có ít nhất 1 nghiệm.
LG. Ta có, $f(x)$ liên tục và khả vi trên $\mathbb{R}$.

$$f(2) = f(-3) = 5.$$

Theo định lí Rolle, phương trình $f'(x) = 0$ có ít nhất 1 nghiệm thuộc $(-3; 2)$.

Example

Thử lại Định lý Rolle đối với hàm số sau trên đoạn $[1, 3]$

$$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3).$$

Tìm số **trung gian** $c$?

**(3) Định lí 2. (Định lí Lagrange).** Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a;b]$ và khả vi trong $(a;b)$. Khi đó tồn tại số **trung gian** $c \in (a;b)$ sao cho

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \quad \text{hay} \quad f(b)-f(a) = f'(c)(b-a). \quad (2)$$

**(3) Định lí 2. (Định lí Lagrange).** Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và khả vi trong $(a; b)$. Khi đó tồn tại số **trung gian** $c \in (a; b)$ sao cho

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \text{hay} \quad f(b) - f(a) = f'(c)(b - a). \qquad (2)$$

Chứng minh. Đặt

$$h(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - f(x).$$

**(3) Định lí 2. (Định lí Lagrange).** Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a;b]$ và khả vi trong $(a;b)$. Khi đó tồn tại số **trung gian** $c \in (a;b)$ sao cho

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \quad \text{hay} \quad f(b)-f(a) = f'(c)(b-a). \quad (2)$$

Chứng minh. Đặt

$$h(x) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) - f(x).$$

Khi đó, $h(x)$ liên tục trên $[a;b]$ và khả vi trong $(a;b)$ và

$$h'(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} - f'(x).$$

**(3) Định lí 2. (Định lí Lagrange).** Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a;b]$ và khả vi trong $(a;b)$. Khi đó tồn tại số **trung gian** $c \in (a;b)$ sao cho

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \quad \text{hay} \quad f(b)-f(a) = f'(c)(b-a). \qquad (2)$$

Chứng minh. Đặt

$$h(x) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) - f(x).$$

Khi đó, $h(x)$ liên tục trên $[a;b]$ và khả vi trong $(a;b)$ và

$$h'(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} - f'(x).$$

Hơn nữa $h(a) = h(b) = 0$, nên theo định lí Rolle, tồn tại $c \in (a;b)$ sao cho $h'(c) = 0$.

**(3) Định lí 2. (Định lí Lagrange).** Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và khả vi trong $(a; b)$. Khi đó tồn tại số **trung gian** $c \in (a; b)$ sao cho

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \text{hay} \quad f(b) - f(a) = f'(c)(b - a). \quad (2)$$

Chứng minh. Đặt

$$h(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - f(x).$$

Khi đó, $h(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và khả vi trong $(a; b)$ và

$$h'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} - f'(x).$$

Hơn nữa $h(a) = h(b) = 0$, nên theo định lí Rolle, tồn tại $c \in (a; b)$ sao cho $h'(c) = 0$. Hay $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

- **Chú ý.** Từ định lí 2 suy ra

- **Chú ý.** Từ định lí 2 suy ra

$$f(x+h) - f(x) = f'(x+\theta h)h, \quad \theta \in (0;1). \quad (3).$$

- **Chú ý.** Từ định lí 2 suy ra

$$f(x+h) - f(x) = f'(x+\theta h)h, \quad \theta \in (0;1). \quad (3).$$

Thật vậy. Thay $a = x, b = x + h$ và $c = x + \theta h$ vào (2) ta có:

$$\theta = \frac{c-a}{b-a} \in (0;1),$$
$$f(x+h) - f(x) = f(b) - f(a) = f'(c)(b-a) = f'(x+\theta h)h.$$

- **Chú ý.** Từ định lí 2 suy ra

$$f(x+h) - f(x) = f'(x+\theta h)h, \quad \theta \in (0;1). \quad (3).$$

Thật vậy. Thay $a = x, b = x + h$ và $c = x + \theta h$ vào (2) ta có:

$$\theta = \frac{c-a}{b-a} \in (0;1),$$
$$f(x+h) - f(x) = f(b) - f(a) = f'(c)(b-a) = f'(x+\theta h)h.$$

**Nhận xét.** Công thức (3) cho ta tính giá trị của $f$ tại điểm gần $x$ khi biết giá trị $f(x)$ và giá trị của đạo hàm $f'$ tại những điểm gần $x$.

# • Ví dụ 1.

Tìm số **trung gian** $c$ trong định lí Lagrange biết

$$f(x) = x^3 + 4x^2, a = 0, b = 1.$$

# • Ví dụ 1.

Tìm số **trung gian** $c$ trong định lí Lagrange biết

$$f(x) = x^3 + 4x^2, a = 0, b = 1.$$

Ta có $f(x)$ liên tục trên $[0; 1]$ và khả vi trong $(0; 1)$.

# • Ví dụ 1.

Tìm số **trung gian** $c$ trong định lí Lagrange biết

$$f(x) = x^3 + 4x^2, a = 0, b = 1.$$

Ta có $f(x)$ liên tục trên $[0; 1]$ và khả vi trong $(0; 1)$.
$f'(x) = 3x^2 + 8x, f(0) = 0, f(1) = 5$. Từ công thức Lagrange, tồn tại $c \in (0; 1)$ sao cho

# • Ví dụ 1.

Tìm số **trung gian** $c$ trong định lí Lagrange biết

$$f(x) = x^3 + 4x^2, a = 0, b = 1.$$

Ta có $f(x)$ liên tục trên $[0; 1]$ và khả vi trong $(0; 1)$.
$f'(x) = 3x^2 + 8x, f(0) = 0, f(1) = 5$. Từ công thức Lagrange, tồn tại $c \in (0; 1)$ sao cho

$$f'(c) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} \Leftrightarrow 3c^2 + 8c = 5$$

# • Ví dụ 1.

Tìm số **trung gian** $c$ trong định lí Lagrange biết

$$f(x) = x^3 + 4x^2, a = 0, b = 1.$$

Ta có $f(x)$ liên tục trên $[0; 1]$ và khả vi trong $(0; 1)$.
$f'(x) = 3x^2 + 8x, f(0) = 0, f(1) = 5$. Từ công thức Lagrange, tồn tại $c \in (0; 1)$ sao cho

$$f'(c) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} \Leftrightarrow 3c^2 + 8c = 5$$

$$c = \frac{-4 - \sqrt{31}}{3} \quad \text{(loại)} \quad \text{hoặc} \quad c = \frac{-4 + \sqrt{31}}{3}.$$

# • Ví dụ 1.

Tìm số **trung gian** $c$ trong định lí Lagrange biết

$$f(x) = x^3 + 4x^2, a = 0, b = 1.$$

Ta có $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ và khả vi trong $(0;1)$.
$f'(x) = 3x^2 + 8x, f(0) = 0, f(1) = 5$. Từ công thức Lagrange, tồn tại $c \in (0;1)$ sao cho

$$f'(c) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} \Leftrightarrow 3c^2 + 8c = 5$$

$$c = \frac{-4 - \sqrt{31}}{3} \quad \text{(loại)} \quad \text{hoặc} \quad c = \frac{-4 + \sqrt{31}}{3}.$$

Vậy $c = \frac{-4+\sqrt{31}}{3}$.

# (SV tự nghiên cứu)

- **Ví dụ 2.**

Chứng minh rằng:

$$1) |\sin b - \sin a| \leq |b - a|$$
$$2) |\arctan b - \arctan a| \leq |b - a|.$$
$$3) |\arcsin x - \arcsin y| \geq |x - y|, \quad x, y \in (-1, 1).$$

Chứng minh rằng:

$$1)|\sin b - \sin a| \leq |b - a|$$
$$2)|\arctan b - \arctan a| \leq |b - a|.$$
$$3)|\arcsin x - \arcsin y| \geq |x - y|, \quad x, y \in (-1, 1).$$

1) Đặt $f(x) = \sin x \Longrightarrow f'(x) = \cos x$.

Chứng minh rằng:

$$1)|\sin b - \sin a| \leq |b - a|$$
$$2)|\arctan b - \arctan a| \leq |b - a|.$$
$$3)|\arcsin x - \arcsin y| \geq |x - y|, \quad x, y \in (-1, 1).$$

1) Đặt $f(x) = \sin x \Longrightarrow f'(x) = \cos x$. Theo công thức Lagrange, tồn tại $c$ nằm giữa $a$ và $b$ sao cho

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) \leftrightarrow \sin b - \sin a = (b - a)\cos c$$

Chứng minh rằng:

$$1) |\sin b - \sin a| \le |b - a|$$
$$2) |\arctan b - \arctan a| \le |b - a|.$$
$$3) |\arcsin x - \arcsin y| \ge |x - y|, \quad x, y \in (-1, 1).$$

1) Đặt $f(x) = \sin x \Longrightarrow f'(x) = \cos x$. Theo công thức Lagrange, tồn tại $c$ nằm giữa $a$ và $b$ sao cho

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) \leftrightarrow \sin b - \sin a = (b - a)\cos c$$

$$\Longrightarrow |\sin b - \sin a| = |\cos c||b - a| \le |b - a|.$$

Chứng minh rằng:

$$1) |\sin b - \sin a| \leq |b - a|$$
$$2) |\arctan b - \arctan a| \leq |b - a|.$$
$$3) |\arcsin x - \arcsin y| \geq |x - y|, \quad x, y \in (-1, 1).$$

1) Đặt $f(x) = \sin x \Longrightarrow f'(x) = \cos x$. Theo công thức Lagrange, tồn tại $c$ nằm giữa $a$ và $b$ sao cho

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) \leftrightarrow \sin b - \sin a = (b - a)\cos c$$

$$\Longrightarrow |\sin b - \sin a| = |\cos c||b - a| \leq |b - a|.$$

2) Tương tự $f(x) = \arctan x$.

## (4) Định lí 3. (Định lí Cauchy).

Cho hàm số $f(x), g(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và khả vi trong $(a; b)$. Giả sử $g(a) \neq g(b)$ và $g'(x) \neq 0$ với mọi $x \in (a; b)$. Khi đó tồn tại $c \in (a; b)$ sao cho

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

**Chú ý.** Khi $g(x) = x$ thì Định lí Cauchy trở thành Định lí Lagrange.

**1.2.1 Đạo hàm và vi phân cấp cao (1) Đạo hàm và vi phân cấp cao.** Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $(a; b)$.

**1.2.1 Đạo hàm và vi phân cấp cao (1) Đạo hàm và vi phân cấp cao.** Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $(a;b)$.

- ĐH cấp 1: $f'(x)$
- ĐH cấp 2: $f''(x) = \big(f'(x)\big)'$
- ĐH cấp n: $f^{(n)}(x) = \big(f^{(n-1)}(x)\big)'$

- VP cấp 1: $df = f'(x)dx$
- VP cấp 2: $d^2f = f''(x)dx^2$
- VP cấp n: $d^nf = f^{(n)}(x)dx^n$

**Chú ý.** Từ định nghĩa ta có công thức vi phân cấp

$$\boxed{f^{(n)}(x) = \frac{d^nf}{dx^n}}$$

**1.2.1 Đạo hàm và vi phân cấp cao (1) Đạo hàm và vi phân cấp cao.** Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $(a; b)$.

- ĐH cấp 1: $f'(x)$ - VP cấp 1: $df = f'(x)dx$

- ĐH cấp n: $f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'$ - VP cấp n: $d^n f = f^{(n)}(x)dx^n$

**Chú ý.** Từ định nghĩa ta có công thức vi phân cấp

$$\boxed{f^{(n)}(x) = \frac{d^n f}{dx^n}}$$

**1.2.1 Đạo hàm và vi phân cấp cao (1) Đạo hàm và vi phân cấp cao.** Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $(a; b)$.

- ĐH cấp 1: $f'(x)$
- ĐH cấp 2: $f''(x) = \left(f'(x)\right)'$
- ĐH cấp n: $f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'$
- VP cấp 1: $df = f'(x)dx$
- VP cấp 2: $d^2f = f''(x)dx^2$
- VP cấp n: $d^nf = f^{(n)}(x)dx^n$

**1.2.1 Đạo hàm và vi phân cấp cao (1) Đạo hàm và vi phân cấp cao.** Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $(a; b)$.

- ĐH cấp 1: $f'(x)$
- ĐH cấp 2: $f''(x) = \left(f'(x)\right)'$
- ĐH cấp n: $f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'$

- VP cấp 1: $df = f'(x)dx$
- VP cấp 2: $d^2f = f''(x)dx^2$
- VP cấp n: $d^nf = f^{(n)}(x)dx^n$

**Chú ý.** Từ định nghĩa ta có công thức vi phân cấp

$$\boxed{f^{(n)}(x) = \frac{d^nf}{dx^n}}$$

**Example**

Tính đạo hàm cấp 1, 2, 3 của hàm số

$$y = x^2 e^{3x}.$$

• **Ví dụ 2.** Bằng qui nạp ta chứng minh được một số công thức sau:

$$1)\quad (x^k)^{(n)} = \begin{cases} k(k-1)...(k-n+1)x^{k-n} & \text{nếu} \quad n \le k \\ 0 & \text{nếu} \quad n > k \quad (k \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

$$2)\quad (e^{ax})^{(n)} = a^n e^{ax}, \quad n \ge 1$$

$$3)\quad (\sin x)^{(n)} = \sin(x + \frac{n\pi}{2}), \quad n \ge 1$$

$$4)\quad (\cos x)^{(n)} = \cos(x + \frac{n\pi}{2}), \quad n \ge 1$$

**(3) Công thức khai triển Taylor.** Cho $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và khả vi trên $(a; b)$. Xét $x_0, x = x_0 + h \in (a; b)$.

**(3) Công thức khai triển Taylor.** Cho $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và khả vi trên $(a; b)$. Xét $x_0, x = x_0 + h \in (a; b)$.

- Áp dụng định lí Lagrange với $a = x_0, b = x_0 + h$, tồn tại số trung gian

$$c = x_0\theta + (x_0 + h)(1 - \theta) = x_0 + \theta h, \quad \theta \in (0; 1),$$

sao cho

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) = f(b) &= f(a) + f'(c)(b - a) \\ &= f(x_0) + f'(x_0 + \theta(x - x_0))(x - x_0). \end{aligned}$$

**(3) Công thức khai triển Taylor.** Cho $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và khả vi trên $(a; b)$. Xét $x_0, x = x_0 + h \in (a; b)$.

- Áp dụng định lí Lagrange với $a = x_0, b = x_0 + h$, tồn tại số trung gian

$$c = x_0\theta + (x_0 + h)(1 - \theta) = x_0 + \theta h, \quad \theta \in (0; 1),$$

sao cho

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) = f(b) &= f(a) + f'(c)(b - a) \\ &= f(x_0) + f'(x_0 + \theta(x - x_0))(x - x_0). \end{aligned}$$

- Tổng quát ta có định lí sau:

**(1) Định lí (Công thức khai triển Taylor)** Giả sử $f(x)$ khả vi liên tục cấp $n$ trên $[a;b]$ và khả vi cấp $(n+1)$ trên $(a;b)$. Xét $x, x_0 \in (a;b)$. Ta có công thức khai triển Taylor tới cấp $n$ tại $x = x_0$ sau

**(1) Định lí (Công thức khai triển Taylor)** Giả sử $f(x)$ khả vi liên tục cấp $n$ trên $[a; b]$ và khả vi cấp $(n+1)$ trên $(a; b)$. Xét $x, x_0 \in (a; b)$. Ta có công thức khai triển Taylor tới cấp $n$ tại $x = x_0$ sau

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots +$$
$$\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \theta \in (0; 1).(1)$$

**(1) Định lí (Công thức khai triển Taylor)** Giả sử $f(x)$ khả vi liên tục cấp $n$ trên $[a; b]$ và khả vi cấp $(n+1)$ trên $(a; b)$. Xét $x, x_0 \in (a; b)$. Ta có công thức khai triển Taylor tới cấp $n$ tại $x = x_0$ sau

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots +$$
$$\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \theta \in (0; 1).(1)$$

- Phần đa thức

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

**(1) Định lí (Công thức khai triển Taylor)** Giả sử $f(x)$ khả vi liên tục cấp $n$ trên $[a; b]$ và khả vi cấp $(n+1)$ trên $(a; b)$. Xét $x, x_0 \in (a; b)$. Ta có công thức khai triển Taylor tới cấp $n$ tại $x = x_0$ sau

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots +$$

$$\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \theta \in (0; 1).(1)$$

- Phần đa thức

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

- Phần dư:

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

$$= o((x - x_0)^n).$$

**Chú ý 1.** Công thức khai triển Taylor (1) có dạng khác:

**Chú ý 1.** Công thức khai triển Taylor (1) có dạng khác:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n). \quad (1')$$

ở đây

$$\lim_{x \to x_0} \frac{o((x - x_0)^n)}{(x - x_0)^n} = 0$$

và ta gọi $o((x - x_0)^n)$ là **vô cùng bé (VCB) bậc cao hơn** $(x - x_0)^n$ khi $x \to x_0$.

**Chú ý 1.** Công thức khai triển Taylor (1) có dạng khác:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n). \quad (1')$$

ở đây

$$\lim_{x \to x_0} \frac{o((x - x_0)^n)}{(x - x_0)^n} = 0$$

và ta gọi $o((x - x_0)^n)$ là **vô cùng bé (VCB) bậc cao hơn** $(x - x_0)^n$ khi $x \to x_0$.

**Chú ý 2.** Khi hàm số $f(x)$ là đa thức bậc $n$, ta có khai triển sau:

**Chú ý 1.** Công thức khai triển Taylor (1) có dạng khác:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n). \quad (1')$$

ở đây

$$\lim_{x \to x_0} \frac{o((x - x_0)^n)}{(x - x_0)^n} = 0$$

và ta gọi $o((x - x_0)^n)$ là **vô cùng bé (VCB) bậc cao hơn** $(x - x_0)^n$ khi $x \to x_0$.

**Chú ý 2.** Khi hàm số $f(x)$ là đa thức bậc $n$, ta có khai triển sau:

$$f(x) = P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

**Chú ý 1.** Công thức khai triển Taylor (1) có dạng khác:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n). \quad (1')$$

ở đây

$$\lim_{x \to x_0} \frac{o((x - x_0)^n)}{(x - x_0)^n} = 0$$

và ta gọi $o((x - x_0)^n)$ là **vô cùng bé (VCB) bậc cao hơn** $(x - x_0)^n$ khi $x \to x_0$.

**Chú ý 2.** Khi hàm số $f(x)$ là đa thức bậc $n$, ta có khai triển sau:

$$f(x) = P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Khi $x_0 = 0$, ta có công thức khai triển Taylor được gọi là **công thức khai triển Maclaurin**

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n). \quad (2)$$

# Ví dụ 1.

Viết thành đa thức của ẩn $X = x - 1$ của đa thức

$$P(x) = x^5 - 3x^2 - 1.$$

# Ví dụ 1.

Viết thành đa thức của ẩn $X = x - 1$ của đa thức

$$P(x) = x^5 - 3x^2 - 1.$$

Ta có. $P'(x) = 5x^4 - 6x$, $P''(x) = 20x^3 - 6$, $P'''(x) = 60x^2$, $P^{(4)}(x) = 120x$, $P^{(5)}(x) = 120$.

# Ví dụ 1.

Viết thành đa thức của ẩn $X = x - 1$ của đa thức

$$P(x) = x^5 - 3x^2 - 1.$$

Ta có. $P'(x) = 5x^4 - 6x, P''(x) = 20x^3 - 6, P'''(x) = 60x^2, P^{(4)}(x) = 120x, P^{(5)}(x) = 120.$
Theo công thức khai triển Taylor ta có:

$$P(x) = P(1) + \frac{P'(1)}{1!}(x-1) + \frac{P''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{P'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \frac{P^{(4)}(1)}{4!}(x-1)^4 + \frac{P^{(5)}(1)}{5!}(x-1)^5$$
$$= -3 + \frac{-1}{1!}(x-1) + \frac{14}{2!}(x-1)^2 + \frac{60}{3!}(x-1)^3 + \frac{120}{4!}(x-1)^4 + \frac{120}{5!}(x-1)^5.$$

# Ví dụ 2.

Viết khai triển Maclaurin đến cấp 3 của các hàm số sau:

1. $f(x) = (1+x)^\alpha, \alpha \neq 0,$ 2. $f(x) = \sin x,$ 3. $f(x) = \cos x$

# Ví dụ 2.

Viết khai triển Maclaurin đến cấp 3 của các hàm số sau:

1. $f(x) = (1+x)^{\alpha}, \alpha \neq 0,$ 2. $f(x) = \sin x,$ 3. $f(x) = \cos x$

Ta có.

# Ví dụ 2.

Viết khai triển Maclaurin đến cấp 3 của các hàm số sau:

1. $f(x) = (1+x)^\alpha, \alpha \neq 0,$ 2. $f(x) = \sin x,$ 3. $f(x) = \cos x$

Ta có.

1. $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + o(x^3).$
2. $\sin x = x - \dfrac{1}{6}x^3 + o(x^3)$
3. $\cos x = 1 - \dfrac{1}{2}x^2 + o(x^3) = 1 - \dfrac{1}{2}x^2 + o(x^2)$

# Ví dụ 3.

Viết khai triển Maclaurin của hàm số $f(x) = e^x$.

# Ví dụ 3.

Viết khai triển Maclaurin của hàm số $f(x) = e^x$.
Ta có. $f^{(n)}(x) = e^x$.

# Ví dụ 3.

Viết khai triển Maclaurin của hàm số $f(x) = e^x$.
Ta có. $f^{(n)}(x) = e^x$.
Công thức khai triển Maclaurin:

$$\begin{aligned} e^x &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n) \\ &= 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + o(x^n). \end{aligned}$$

# Ví dụ 3.

Viết khai triển Maclaurin của hàm số $f(x) = e^x$.
Ta có. $f^{(n)}(x) = e^x$.
Công thức khai triển Maclaurin:

$$
\begin{aligned}
e^x &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n) \\
&= 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + o(x^n).
\end{aligned}
$$

- **Đặt biệt ta có khai triển sau:**

$$
\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + o(x). \\
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \\
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)
\end{aligned}
$$

### 1.3.1 Sơ lược về chuỗi số

Definition (Chuỗi số)

Biểu thức

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots \tag{2}$$

được gọi là chuỗi số và ký hiệu là $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

### 1.3.1 Sơ lược về chuỗi số

Definition (Chuỗi số)

Biểu thức

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots \tag{2}$$

được gọi là chuỗi số và ký hiệu là $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

- Số hạng tổng quát: $u_n$
- Tổng riêng thứ $n$ : $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$.

### 1.3.1 Sơ lược về chuỗi số

**Definition (Chuỗi số)**

Biểu thức

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots \tag{2}$$

được gọi là chuỗi số và ký hiệu là $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

- Số hạng tổng quát: $u_n$
- Tổng riêng thứ $n$ : $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$.
- Nếu tồn tại $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S \in \mathbb{R}$, thì ta nói rằng chuỗi (2) **hội tụ và có tổng là** $S$ và viết

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S.$$

- Xét chuỗi (2) có tổng là $S$. Phần dư thứ $n$ : $R_n = S - S_n \to 0$ khi $n \to \infty$.

- Xét chuỗi (2) có tổng là $S$. Phần dư thứ $n$ : $R_n = S - S_n \to 0$ khi $n \to \infty$.
- Nếu chuỗi (2) không hội tụ, ta nói chuỗi (2) **phân kỳ.**

## Example

Xét chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} \quad (a \neq 0).$$

- Xét chuỗi (2) có tổng là $S$. Phần dư thứ $n$ : $R_n = S - S_n \to 0$ khi $n \to \infty$.
- Nếu chuỗi (2) không hội tụ, ta nói chuỗi (2) **phân kỳ.**

## Example

Xét chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} \quad (a \neq 0).$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = \begin{cases} \frac{a}{1-q} & \text{nếu } |q| < 1 \\ \text{chuỗi phân kỳ} & \text{nếu } |q| \geq 1 \end{cases}$$

**Theorem (Điều kiện cần)**

*Nếu chuỗi* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *hội tụ, thì*

$$\lim_{n \to \infty} u_n = 0.$$

## Theorem (Điều kiện cần)

*Nếu chuỗi* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *hội tụ, thì*

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0.$$

**Chú ý:** Nếu $u_n \nrightarrow 0$ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ phân kỳ.

Theorem (Điều kiện cần)

*Nếu chuỗi* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *hội tụ, thì*

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0.$$

**Chú ý:** Nếu $u_n \nrightarrow 0$ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ phân kỳ.

Example

Xét sự hội tụ của chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{\sqrt[3]{n^3+2}}$$

• **Chuỗi Taylor** của hàm số $f(x)$ tại $x = x_0$: Giả sử hàm số $f(x)$ có đạo hàm mọi cấp trong một lân cận $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ của $x_0$. Khi đó với mọi $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, ta xét chuỗi

$$S(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots \tag{3}$$

# 1.3.2 Chuỗi Taylor. Chuỗi Maclaurin

- **Chuỗi Taylor** của hàm số $f(x)$ tại $x = x_0$: Giả sử hàm số $f(x)$ có đạo hàm mọi cấp trong một lân cận $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ của $x_0$. Khi đó với mọi $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, ta xét chuỗi

$$S(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots \tag{3}$$

- **Chuỗi Maclaurin** của hàm số $f(x)$

$$S(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots \tag{4}$$

- **Chuỗi Taylor** của hàm số $f(x)$ tại $x = x_0$: Giả sử hàm số $f(x)$ có đạo hàm mọi cấp trong một lân cận $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ của $x_0$. Khi đó với mọi $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, ta xét chuỗi

$$S(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots \tag{3}$$

- **Chuỗi Maclaurin** của hàm số $f(x)$

$$S(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots \tag{4}$$

**Question:** Khi nào thì

$$\boxed{f(x) = S(x)}????$$

**Theorem**

*Nếu $f(x)$ có đạo hàm mọi cấp trong lân cận $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ và tồn tại số $M > 0$ sao cho*

$$|f^{(n)}(x)| \leq M \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

*Khi đó $f(x) = S(x)$ với mọi $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, tức là $f(x)$ có thể khai triển thành chuỗi Taylor trong khoảng $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ :*

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots$$

# Khai triển một số hàm sơ cấp thành chuỗi Maclaurin

# Khai triển một số hàm sơ cấp thành chuỗi Maclaurin

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, x \in \mathbb{R}, \tag{5}$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots, x \in \mathbb{R}, \tag{6}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots, x \in \mathbb{R} \tag{7}$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + \cdots, -1 < x < 1. \tag{8}$$

### 1.4.1 Hàm nhiều biến số, miền xác định và đồ thị

Definition (Hàm số nhiều biến số)

Cho $D \subset \mathbb{R}^n$. Một ánh xạ

$$\begin{array}{rccl} f: & D & \to & \mathbb{R} \\ & x = (x_1, x_2, ..., x_n) & \mapsto & u = f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_n) \end{array}$$ được

gọi là hàm số $n$ biến số.

Nếu $M(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, ta có thể viết $u = f(M)$.

- **Miền xác định** $D$
- Các biến số độc lập: $x_1, x_2, ..., x_n$.
- Tập $\{(M, f(M)) \mid M \in D\}$ được gọi là **đồ thị** của hàm số.

### 1.4.1 Hàm nhiều biến số, miền xác định và đồ thị

**Definition (Hàm số nhiều biến số)**

Cho $D \subset \mathbb{R}^n$. Một ánh xạ
$$\begin{array}{rccl} f: & D & \to & \mathbb{R} \\ & x = (x_1, x_2, ..., x_n) & \mapsto & u = f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_n) \end{array}$$ được
gọi là hàm số $n$ biến số.

Nếu $M(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, ta có thể viết $u = f(M)$.

- **Miền xác định** $D$

- Các biến số độc lập: $x_1, x_2, ..., x_n$.

- Tập $\{(M, f(M)) \mid M \in D\}$ được gọi là **đồ thị** của hàm số.

- Với $n = 2$, ta thường kí hiệu $z = f(x, y)$.
- Với $n = 3$, ta thường kí hiệu $u = f(x, y, z)$.

Example

Tìm miền xác định và vẽ đồ thị của hàm số $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

# Một số đồ thị của hàm hai biến thường gặp

- Nửa mặt cầu: $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \quad (R > 0)$
- Nửa mặt Elipxoit

$$z = c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \quad (a, b, c > 0)$$

- paraboloit-eliptic

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \quad (a, b > 0)$$

- Mặt nón

$$z = c\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}(a, b, c > 0)$$

## (1) Đạo hàm riêng

**Definition (Đạo hàm riêng)**

Cho hàm số $u = f(x, y)$ xác định trên $D. M_0(x_0, y_0) \in D$.

- Đạo hàm riêng của $f$ theo $x$ tại $M_0$ :

$$f'_x(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) := \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

- Đạo hàm riêng của $f$ theo $y$ tại $M_0$ :

$$f'_y(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) := \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

## Example

Cho $u = xy^2 - 3x^2$. Tính $u'_x = \frac{\partial u}{\partial x} = ?$, $\quad u'_y = \frac{\partial u}{\partial y} = ?$

# Chú ý.

- Khi tính đạo hàm riêng theo $x$, thì ta coi $x$ là biến, còn $y, z, ....$ là các hằng số.
- Khi tính đạo hàm riêng theo $y$, thì ta coi $y$ là biến, còn $x, z, ....$ là các hằng số.

# Chú ý.

- Khi tính đạo hàm riêng theo $x$, thì ta coi $x$ là biến, còn $y, z, ....$ là các hằng số.
- Khi tính đạo hàm riêng theo $y$, thì ta coi $y$ là biến, còn $x, z, ....$ là các hằng số.

## Example

Tính các đạo hàm riêng của hàm số sau:

- $u = x^3y^2 + \frac{x}{y+1}$.
- $f(x, y) = \arctan \frac{x}{x^2+3y^2}$
- $u = x^2e^{y \sin z}$.

# (2) Vi phân toàn phần

Cho hàm số $z = f(x, y)$ xác định trên $D$ và $M_0(x_0, y_0) \in D$.
- Số gia toàn phần của hàm số tại $M_0$ :

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0).$$

- Ký hiệu

$$\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}.$$

## Definition (Vi phân toàn phần)

Nếu tồn tại $A, B$ chỉ phụ thuộc vào $x_0, y_0$ sao cho

$$\Delta z = A.\Delta x + B.\Delta y + o(\rho), \quad \Delta x \to 0, \Delta y \to 0, \tag{9}$$

thì ta gọi

$$dz := A.\Delta x + B.\Delta y$$

là **vi phân toàn phần** của hàm số tại $M_0$.
Khi đó, ta gọi hàm số $z = f(x, y)$ **khả vi** tại $M_0(x_0, y_0)$.
Hàm số $z = f(x, y)$ được gọi là khả vi trên $D$ nếu nó khả vi tại mọi điểm thuộc $D$.

Example

Tìm vi phân toàn phần của $z = xy$.

## Theorem (1)

*Nếu hàm số $z = f(x, y)$ có các đạo hàm riêng $z'_x, z'_y$ liên tục trong lân cận của $M_0(x_0, y_0)$. Khi đó hàm số $z = f(x, y)$ khả vi tại $M_0$ và*

$$dz = z'_x \Delta x + z'_y \Delta y, \tag{10}$$

*hay*

$$\boxed{dz = z'_x dx + z'_y dy}. \tag{11}$$

### Theorem (1)

*Nếu hàm số* $z = f(x, y)$ *có các đạo hàm riêng* $z'_x, z'_y$ *liên tục trong lân cận của* $M_0(x_0, y_0)$. *Khi đó hàm số* $z = f(x, y)$ *khả vi tại* $M_0$ *và*

$$dz = z'_x \Delta x + z'_y \Delta y, \tag{10}$$

*hay*

$$\boxed{dz = z'_x dx + z'_y dy}. \tag{11}$$

**Tổng quát:** *Cho* $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ *với các đạo hàm riêng liên tục. Khi đó*

$$\boxed{dz = f'_{x_1} dx_1 + f'_{x_2} dx_2 + \cdots + f'_{x_n} dx_n}$$

Example

1. Cho $f(x,y) = \frac{x^4}{x^2+y^2} + y^2$. Tính $df(1,0)$

2. Cho $f(x,y) = \arctan \frac{x}{x^2+2y^2}$. Tính $df(2,1)$.

# (3) Công thức số gia hữu hạn

Cho hai điểm $a, b \in \mathbb{R}^2$. **Đoạn** nối $a$ và $b$ được cho bởi

$$[a, b] := \{c = ta + (1 - t)b \mid 0 \leq t \leq b\}.$$

**Theorem (Công thức số gia hữu hạn)**

*Giả sử hàm số $z = f(x, y)$ khả vi trên tập mở $D$ và $[a, b] \subset D$ với $a = (x_1, y_1), b = (x_2, y_2)$. Khi đó, tồn tại $c = at + (1 - t)b \in [a, b]$ với $t \in (0, 1)$ sao cho*

$$z(x_2, y_2) = z(x_1, y_1) + z'_x(c)(x_2 - x_1) + z'_y(c)(y_2 - y_1).$$

# Bài tập

**Bài 1**. Tính các đạo hàm riêng và vi phân toàn phần của các hàm số sau:

1. $u = x^2y + \dfrac{x+1}{y-1}$
2. $u = \sqrt{x^2+y^2}$
3. $u = \dfrac{x+y}{x^2+y^2}$
4. $u = \arcsin(x^3+y^3+z^3)$
5. $f = \arctan\dfrac{x+y}{1-xyz}$
6. $f = x^{y^z}$
7. $f = \ln(x^2+y^2+z^2)$
8. $f = \arcsin(x^3+yz)$.

**Bài 2**. Cho $u(x,y,z) = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}$. Tính giá trị của $A$ tại $(1,2,-3)$ biết

$$A = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}.$$

# (4) Đạo hàm riêng và vi phân cấp cao

(Sinh viên tự nghiên cứu)

**(a) Đạo hàm riêng cấp cao**

# (4) Đạo hàm riêng và vi phân cấp cao

(Sinh viên tự nghiên cứu)

**(a) Đạo hàm riêng cấp cao**

Cho $z = f(x, y)$.

- Đạo hàm riêng cấp 1:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f'_x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = f'_y$$

# (4) Đạo hàm riêng và vi phân cấp cao

(Sinh viên tự nghiên cứu)

**(a) Đạo hàm riêng cấp cao**

Cho $z = f(x, y)$.

- Đạo hàm riêng cấp 1:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f'_x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = f'_y$$

- Đạo hàm riêng cấp 2:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = f''_{xx}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = f''_{xy}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = f''_{yx}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = f''_{yy}$$

## Example

1. Tính các đạo hàm riêng cấp 2 của $z = x^3y^4 + 4y^2$.
2. Cho $u = x\ln(xy)$. Tính các đạo hàm riêng sau

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = ?, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = ?, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = ?,$$

### Theorem (Schwarz)

*Giả sử hàm số* $z = f(x, y)$ *có các đạo hàm riêng* $f''_{xy}, f''_{yx}$ *liên tục trong lân cận của điểm* $(x_0, y_0)$. *Khi đó*

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0).$$

# (b) Vi phân toàn phần cấp cao

## (b) Vi phân toàn phần cấp cao

Cho hàm số $z = f(x, y)$ và $x, y$ là các biến số độc lập.

- Vi phân toàn phần cấp 1:

$$dz = f'_x dx + f'_y dy$$

## (b) Vi phân toàn phần cấp cao

Cho hàm số $z = f(x, y)$ và $x, y$ là các biến số độc lập.

- Vi phân toàn phần cấp 1:

$$dz = f'_x dx + f'_y dy$$

- Vi phân toàn phần cấp 2:

$$\begin{aligned} d^2z = d(dz) &= \left(f'_x dx + f'_y dy\right)'_x dx + \left(f'_x dx + f'_y dy\right)'_y dy \\ &= f''_{xx} dx^2 + (f''_{xy} + f''_{yx}) dxdy + f''_{yy} dy^2. \end{aligned}$$

# (b) Vi phân toàn phần cấp cao

Cho hàm số $z = f(x, y)$ và $x, y$ là các biến số độc lập.

- Vi phân toàn phần cấp 1:

$$dz = f'_x dx + f'_y dy$$

- Vi phân toàn phần cấp 2:

$$\begin{aligned} d^2z &= d(dz) = \left(f'_x dx + f'_y dy\right)'_x dx + \left(f'_x dx + f'_y dy\right)'_y dy \\ &= f''_{xx} dx^2 + (f''_{xy} + f''_{yx}) dxdy + f''_{yy} dy^2. \end{aligned}$$

Nếu $f''_{xy}, f''_{yx}$ liên tục, thì

$$d^2z = f''_{xx} dx^2 + 2f''_{xy} dxdy + f''_{yy} dy^2.$$

Example

Cho $z = x^2 \sin y$. Tính $d^2 z(1, \frac{\pi}{4})$