Chương 1. Ma trận, định thức và hệ phương trình tuyến tính

Phan Quang Sáng
sang.phanquang@phenikaa-uni.edu.vn

Bộ môn Toán- Khoa KHCB- PKA

Hà Nội, Ngày 31 tháng 10 năm 2021

Nội dung chính

Ví dụ: .....

Định nghĩa

Một ma trận (thực hoặc phức) là một bảng các số (thực hoặc phức) được sắp xếp theo hàng và cột.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Ma trận m hàng và n cột như trên được gọi là có cấp $m \times n$. Các số a_{ij} được gọi là các phần tử của ma trận.
Ký hiệu $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, hoặc $A = [a_{ij}]$.

Ta nói hai ma trận bằng nhau nếu chúng có cùng cấp và cùng các phần tử tương ứng bằng nhau.

Một số ma trận đặc biệt:

- Ma trận không, ký hiệu θ

- Ma trận cột, hàng

- Ma trận vuông: $m = n$

- Ma trận tam giác trên, dưới

- Ma trận đường chéo

- Ma trận đơn vị I_n

Các phép toán cơ bản với ma trận

Chuyển vị

Chuyển vị của ma trận A cấp $m \times n$ là ma trận cấp $n \times m$, ký hiệu A^T, có được từ A bằng cách chuyển hàng thành cột và ngược lại.

Ví dụ:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}^T.$$

Phép cộng các ma trận cùng cấp

Ví dụ: Cho các ma trận sau

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$A + B$ là gì?

Phép cộng các ma trận cùng cấp

Ví dụ: Cho các ma trận sau

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

$A + B$ là gì?

Định nghĩa

Giả sử $A = [a_{ij}]$ và $B = [b_{ij}]$ là hai ma trận cấp $m \times n$. Khi đó

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n}.$$

Một số tính chất:

Phép nhân một số với một ma trận

Ví dụ: 2C là gì?, với $C = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Phép nhân một số với một ma trận

Ví dụ: $2C$ là gì?, với $C = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Định nghĩa

Cho $A = [a_{ij}]_{m\times n}$. Khi đó với mỗi số k, ta định nghĩa

$$kA = [ka_{ij}]_{m\times n}.$$

Phép nhân một số với một ma trận

Ví dụ: 2C là gì?, với $C = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Định nghĩa

Cho $A = [a_{ij}]_{m\times n}$. Khi đó với mỗi số k, ta định nghĩa

$$kA = [ka_{ij}]_{m\times n}.$$

Thực hiện các phép tính $A + B + 2C$, $A - B$.

Một số tính chất:...

Phép nhân hai ma trận

Ví dụ: tích của hai véc tơ cùng độ dài $u = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ và $v = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$, thì

$$uv = u \times v = 2 \times 3 + (-1) \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times (-2) + 5 \times 4 = 18$$

Cũng coi $u \times v^T = uv = 18$.

Ví dụ: dự đoán và tính

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} =$$

Phép nhân hai ma trận

Ví dụ: tích của hai véc tơ cùng độ dài $u = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ và $v = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$, thì

$$uv = u \times v = 2 \times 3 + (-1) \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times (-2) + 5 \times 4 = 18$$

Cũng coi $u \times v^T = uv = 18$.

Ví dụ: dự đoán và tính

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & x & y \\ -13 & 12 & z & t \end{bmatrix}.$$

Nêu nhận xét về cỡ của A, B và $C = AB$?

Định nghĩa

Cho $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ và $B = [b_{ij}]_{n\times k}$. Khi đó định nghĩa $C = AB = [c_{ij}]_{m\times k}$, với

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}.$$

(c_{ij} là tích của hàng thứ i của ma trận trước A và cột thứ j của ma trận sau B)

Một số ví dụ: ....

Chú ý: $A\theta = \theta$, $\theta A = \theta$, $AI_n = I_nA = A$ nếu A vuông cấp n, phép nhân ma trận không giao hoán.

Một số tính chất:

1. $(A + B)C = AC + BC$, $A(B + C) = AB + AC$.
2. $(AB)C = A(BC)$.
3. $(AB)^T = B^T A^T$.

Cho ma trận A cấp n, khi đó định thức của ma trận A, ký hiệu là $det(A)$ hoặc $\mid A \mid$, được định nghĩa quy nạp theo $n = 1, 2, \ldots$.

Lấy ví dụ cụ thể...(khai triển theo hàng, cột khác nhau)

Cho ma trận A cấp n, khi đó định thức của ma trận A, ký hiệu là $det(A)$ hoặc $\mid A \mid$, được định nghĩa quy nạp theo $n = 1, 2, \ldots$.

Lấy ví dụ cụ thể...(khai triển theo hàng, cột khác nhau)

Áp dụng tính định thức sau: $\mid A \mid = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

Định nghĩa

Đặt M_{ij} là định thức của ma trận con và $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ gọi là phần bù đại số của a_{ij}.

$$\det(A) = \mid A \mid = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} A_{1j}.$$

Định lý

Định thức của ma trận chuyển vị bằng định thức của ma trận ban đầu,

$$| A^T | = | A | .$$

$\Rightarrow$ Một tính chất nào đó về định thức đúng theo hàng thì cũng đúng theo cột.

Tính chất

Nhân một hàng (hoặc một cột) với một hằng số k thì giá trị định thức cũng được nhân với k.
$\Rightarrow$ Có thể đưa nhân tử chung của một hàng hoặc một cột ra ngoài định thức.

Ví dụ: $\begin{vmatrix} -2 & 6 & 4 \\ 3 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \times \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

Tính chất

Nếu một hàng (hoặc một cột) là tổng của hai hàng (hoặc hai cột) thì định thức có thể viết tổng của hai định thức tương ứng...

$$\begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_k^{(1)} + A_k^{(2)} \\ \vdots \\ A_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_k^{(1)} \\ \vdots \\ A_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_k^{(2)} \\ \vdots \\ A_n \end{vmatrix},$$

với A_i ký hiệu các hàng của định thức.

Hình vẽ minh họa...và ví dụ...

Định lý

Đổi chỗ hai dòng hoặc hai cột thì định thức đổi dấu.

Hệ quả

Định thức có hai dòng hoặc hai cột giống hệt nhau thì bằng 0.

Hệ quả

Định thức có hai dòng hoặc hai cột tỷ lệ thì bằng 0.

Một số tính chất mở rộng từ các tính chất trên

Tính chất

Định thức không thay đổi khi cộng vào một hàng (hoặc một cột) bội số của các hàng (hoặc cột) khác.

Vẽ hình minh họa...

Định lý

Định thức của ma trận tích bằng tích các định thức,

$$det(AB) = det(A)det(B)$$

Một số chú ý:

1. Định thức của ma trận tam giác trên hoặc dưới bằng tích các phần từ nằm trên đường chéo chính.
   Đặc biệt $\mid I_n \mid = 1$.

2. Áp dụng các phép biến đổi cơ bản như trong các định lý và tính chất trên để đưa định thức về dạng tam giác

Ví dụ: tính định thức

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -3 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 3 \end{vmatrix}$$

Định nghĩa

Cho A là ma trận cấp $m \times n$. Hạng của ma trận A là cấp cao nhất (có thể) của một định thức vuông con khác không của A, ký hiệu là $r(A)$.

Ví dụ: tính hạng của ma trận sau

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 8 & 5 \end{bmatrix}$$

Đáp số: $r(A) = 2$.

Ma trận bậc thang

Echelon forms

(a) $\begin{bmatrix} \blacksquare & * & * & * & * \\ 0 & \blacksquare & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} \blacksquare & * & * \\ 0 & \blacksquare & * \\ 0 & 0 & \blacksquare \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * \end{bmatrix}$

Ví dụ ma trận bậc thang

$$\begin{bmatrix} -7 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 11 & 5 \\ 0 & -14 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Chú ý: hạng ma trận bậc thang bằng số hàng khác không của nó.

$\Rightarrow$ Để tìm hạng của ma trận thực hiện các phép đổi sơ cấp trên hàng (hoặc cột) của ma trận để đưa nó về dạng bậc thang mà không làm thay đổi hạng.

Ví dụ: tìm hạng của ma trận sau

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & 3 & 0 \\ 5 & 2 & 1 & 3 & 9 \\ -1 & 2 & -5 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

Định nghĩa

Ma trận A vuông cấp n được gọi là khả nghịch (hoặc không suy biến) nếu có một ma trận B vuông cấp n sao cho

$$AB = BA = I_n.$$

Khi đó ma trận B như trên là duy nhất và được gọi là ma trận nghịch đảo của A, ký hiệu là A^{-1}.

Ví dụ: cho $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, kiểm tra được $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

Định nghĩa

Ma trận A vuông cấp n được gọi là khả nghịch (hoặc không suy biến) nếu có một ma trận B vuông cấp n sao cho

$$AB = BA = I_n.$$

Khi đó ma trận B như trên là duy nhất và được gọi là ma trận nghịch đảo của A, ký hiệu là A^{-1}.

Ví dụ: cho $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, kiểm tra được $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

Một vài tính chất:

1. $(A^{-1})^{-1} = A$
2. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
3. Nếu A và B khả nghịch thì $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Định lý

Ma trận A khả nghịch khi và chỉ khi $det(A) \neq 0$. Khi đó

1. $$det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)},$$
2. Ma trận nghịch đảo A^{-1} cho bởi công thức

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} A^*,$$

trong đó $A^* = [A_{ij}]^T$, gọi là ma trận phụ hợp của A.
Nhắc lại: $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

Đặc biệt: nếu $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ có $\det(A) = ad - bc \neq 0$ thì

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Chú ý:
(1) Ma trận A khả nghịch thì chỉ cần có B sao cho $AB = I_n$, hoặc $BA = I_n$. (vì có $\det(A) \neq 0$)
(2*) Nếu A là ma trận vuông cấp n thì

$$A \text{ khả nghịch} \iff \det(A) \neq 0 \iff r(A) = n.$$

Ví dụ: tìm ma trận nghịch đảo của các ma trận sau (nếu có)

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ví dụ:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 & = 1 \\ -x_1 + 3x_2 + 5x_3 & = 2 \end{cases}$$

Đặt các ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}, \; x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \; b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Khi đó Hpt được viết tương đương dưới dạng ma trận

$$Ax = b.$$

Tổng quát, một hệ gồm m PTTT của n ẩn số có dạng:

$$\left\{\begin{array}{ll} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = b_m \end{array}\right. \quad (1)$$

Đặt $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, gọi là ma trận hệ số; $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$.

Dạng ma trận của hệ: $Ax = b$.
Đặc biệt: nếu vế phải $b = 0$ thì hệ gọi là HPTTT **thuần nhất**.

Tổng quát, một hệ gồm m PTTT của n ẩn số có dạng:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

Đặt $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, gọi là ma trận hệ số; $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$.

Dạng ma trận của hệ: $Ax = b$.
Đặc biệt: nếu vế phải $b = 0$ thì hệ gọi là HPTTT **thuần nhất**.

Khi nào hệ (1) có nghiệm và cách tìm nghiệm?

Định nghĩa và Định lý

Hệ (1) gọi là hệ Cramer nếu A là ma trận vuông $(m = n)$ và $det(A) \neq 0$. Khi đó hệ Cramer có nghiệm duy nhất

$$x = A^{-1}b.$$

Hơn nữa

$$x_j = \frac{det(A_j)}{det(A)}, j = 1, 2, \cdots, n,$$

trong đó A_j là ma trận có được từ A bằng cách thay cột thứ j bằng cột vế phải.

Ví dụ...

Ví dụ 1: Giải hệ

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 & = 4 \\ 3x_1 - 4x_2 & = -5 \end{cases}$$

Ví dụ 2: Giải hệ

$$\begin{cases} 2x - y + 3z & = 6 \\ 3x + 2y - z & = 7 \\ -4x + 3y + 2z & = -3 \end{cases}$$

Lấy ví dụ giải một số HPT đơn giản bằng pp khử...

Đặt $A^{bs} = [A \mid b]$, gọi là ma trận bổ sung của Hpt (1).

Các phép biến đổi sơ cấp với hàng:
- Đổi chỗ hai hàng;
- Nhân, hoặc chia một hàng với một số khác không;
- Nhân một hàng với 1 số rồi cộng vào một hàng khác.

Phương pháp khử Gauss: biến đổi tương đương Hpt bằng cách sử dụng các phép biến đổi sơ cấp với hàng để đưa ma trận A^{bs} về một ma trận dạng "bậc thang".

Định lý (về nghiệm của HPTTT)

HPTTT dạng tổng quát (1) có nghiệm khi và chỉ khi

$$r(A) = r(A^{bs}) := r.$$

Hơn nữa:

1. Nếu $r = \text{ số ẩn } = n$ thì hệ có nghiệm duy nhất.
2. Nếu $r < \text{ số ẩn } = n$ thì hệ có vô số nghiệm: ta có thể chọn r ẩn chính và biểu diễn chúng theo $n - r$ ẩn (phụ) nhận giá trị bất kỳ còn lại.

Như vậy HPT sẽ vô nghiệm khi $r(A) < r(A^{bs})$.

Chú ý: HPTTT thuần nhất có nghiệm không tầm thường khi và chỉ khi $r(A) = r(A^{bs}) = r < n$. Đặc biệt nếu A vuông thì điều đó tương đương với $\det(A) = 0$.

Giải hpt bằng pp khử Gauss

Ví dụ 1: giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y + 2z & = 4 \\ -2x + y + z & = 0 \\ 3x - 2y + 5z & = 6 \end{cases}$$

Ví dụ 2: giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y + 2z & = 4 \\ -2x + y + z & = 0 \\ x + 4y + 7z & = 12 \end{cases}$$

Ví dụ 3: giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x - 2y + 2z + 3t & = 4, \\ -2x + 3y - z + 2t & = 2, \\ 3x - 5y + 3z + t & = 2. \end{cases}$$

Cho A vuông cấp n, tìm X cấp n sao cho $AX = I_n$.
$\Longrightarrow$ Giải đồng thời n hệ phương trình tuyến tính có dạng

$$AX_i = e_i, i = 1, 2, \cdots n,$$

trong đó X_i ký hiệu các cột của X, e_i ký hiệu các cột của ma trận đơn vị I_n.
Tiến hành quá trình khử Gauss-Jordan cho đồng thời n HPT này để đưa ma trận hệ số về dạng ma trận đơn vị,

$$\begin{array}{rl} & [A \quad | \quad I_n] \\ \Rightarrow & [I_n \quad | \quad K] \end{array}$$

Khi đó ma trận nghiệm $X = K = A^{-1}$.

Ví dụ: tìm ma trận nghịch đảo bằng phương pháp Gauss-Jordan

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

- Một số ứng dụng của ma trận, HPTTT
- Giới thiệu phần mềm tính toán như Mathematica