TRƯỜNG ĐẠI HỌC PHENIKAA
KHOA KHOA HỌC CƠ BẢN
BỘ MÔN TOÁN

ĐỀ THI HỌC PHẦN
Học kỳ 1, Năm học 2020–2021 (Đợt học...)
Hệ đào tạo: Chính quy, Bậc học: Đại học

Tên học phần: Đại số tuyến tính. **Số TC:** 03
Thi ngày........tháng........năm 20......
Thời gian làm bài: 90 phút (*Không kể thời gian phát đề*)

Đề số 1

Câu 1 (2,0 điểm). Cho các ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 3 & -1 \\ -3 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

(a) Tính $A + 2A^T$, trong đó A^T là ma trận chuyển vị của A.

(b) Tính AB.

Câu 2 (2,0 điểm). Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x - 2y + 3z &= 1 \\ x + 2y - z &= 1 \\ 2x + y - 3z &= 0. \end{cases}$$

Câu 3 (2,0 điểm). Trong không gian $\mathbb{R}^3$ cho hệ véc tơ:

$$V = \{v_1 = (3, 4, 2);\ v_2 = (-2, 0, 7);\ v_3 = (4, -5, 0)\}.$$

(a) Kiểm tra xem hệ véc tơ trên là độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính?

(b) Biểu diễn tuyến tính véc tơ $x = (10, 6, -3)$ qua các véc tơ của hệ V.

Câu 4 (2,0 điểm). Cho ma trận

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 5 & -1 & -5 \\ 2 & -2 & -4 \end{bmatrix}.$$

(a) Tìm các giá trị riêng của C.

(b) Tìm ma trận P sao cho $P^{-1}CP$ là ma trận chéo và viết ma trận chéo đó?

Câu 5 (2,0 điểm). Tìm A^{12} biết

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}.$$

Ghi chú:

- Sinh viên **không được** sử dụng tài liệu;
- Cán bộ coi thi không được giải thích gì thêm.

Đáp án Đề số 1

SV giải đúng bằng cách khác vẫn được điểm tối đa.
Câu 1. Ta có (a) 1 điểm

$$A + 2A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 3 & -1 \\ -3 & 2 & 4 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & 2 \\ -3 & -1 & 4 \end{pmatrix} \qquad (0{,}5 \text{ điểm})$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & -2 & -9 \\ 2 & 9 & 3 \\ -9 & 0 & 12 \end{pmatrix} \qquad (0{,}5 \text{ điểm})$$

(b) Ta có

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 3 & -1 \\ -3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \qquad (0{,}25 \text{ điểm})$$

$$= \begin{pmatrix} 10 & 12 \\ 8 & 4 \\ -1 & -10 \end{pmatrix} \qquad (0{,}75 \text{ điểm})$$

Câu 2 (2,0 điểm)

Cách 1: Giải theo công thức Cramer:
- Sinh viên xác định được ma trận hệ số: (0.25 đ)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

- Sinh viên xác định được định thức của A: (0.25 đ)

$$\det(A) = -16 \neq 0.$$

- Sinh viên viết và tính định thức của A_1: (0.25 đ)

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}, \ \det(A_1) = -8$$

- Sinh viên tính được nghiệm x: (0.25 đ)

$$x = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{1}{2}.$$

- Sinh viên viết và tính định thức của A_2: (0.25 đ)

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \ \det(A_2) = -8$$

- Sinh viên tính được nghiệm y: (0.25 đ)

$$y = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{1}{2}.$$

- Sinh viên viết và tính định thức của A_3: (0.25 đ)

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \ \det(A_3) = -8$$

- Sinh viên tính được nghiệm z: (0.25 đ)

$$z = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = \frac{1}{2}.$$

Cách 2: Giải theo phương pháp khử Gauss:
- Viết được mở trận mở rộng (bổ sung) $\bar{A}$: (0.25 đ)

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

- Bước 1: H1 - H2: (0.25 đ)

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

- Bước 2: 2H1 - H3: (0.25 đ)

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & -5 & 9 & 2 \end{bmatrix}.$$

- Bước 3: 5*H2 - 4*H3: (0.25 đ)

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -16 & -8 \end{bmatrix}.$$

- Viết lại được hệ phương trình mới: (0.25 đ)
- Tính được z từ hàng cuối: (0.25 đ)

$$-16z = -8 \to z = \frac{1}{2}.$$

- Tính được y từ hàng hai: (0.25 đ)

$$-4y + 4z = 0 \to y = z = \frac{1}{2}.$$

- Tính được x: (0.25 đ)

$$x - 2y + 3z = 1 \to x = \frac{1}{2}.$$

Cách 3: Giải theo phương pháp Gauss-Jordan: Từ phương pháp khử Gauss thêm 3 bước biến đổi nữa để đưa A về ma trận đơn vị, mỗi bước 0,25 điểm.

Câu 3.

a) (1,0 điểm):
Xét ma trận:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ -2 & 0 & 7 \\ 4 & -5 & 0 \end{bmatrix} \qquad (0,25 \text{ điểm})$$

$$\to \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 0 & 8 & 25 \\ 0 & -31 & -8 \end{bmatrix} \qquad (0,25 \text{ điểm})$$

$$\to \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 0 & 8 & 25 \\ 0 & 0 & 237 \end{bmatrix} \qquad (0,25 \text{ điểm})$$

Suy ra $r(A) = 3 \Rightarrow$ nên hệ véc tơ là độc lập tuyến tính. (0.25 đ)

Cách 2: Tính định thức của ma trận các véc tơ hàng (hoặc cột): $\det(A) = 237 \neq 0$ (0.75 đ)
Suy ra $r(A) = 3 \Rightarrow$ và do đó $r(V) = 3$ nên hệ véc tơ là độc lập tuyến tính. (0.25 đ)

b) (1,0 điểm):
Giả sử $x = k_1v_1 + k_2v_2 + k_3v_3,\ k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$ (0.25 đ)

$$\begin{cases} 3k_1 - 2k_2 + 4k_3 = 10 \\ 4k_1 - 5k_3 = 6 \\ 2k_1 + 7k_2 = -3 \end{cases} \qquad (0.25 \text{ đ})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = \frac{448}{237} \\ k_2 = \frac{-241}{237} \\ k_3 = \frac{106}{237} \end{cases} \qquad (0.25 \text{ đ})$$

Kết luận $x = \frac{448}{237}v_1 + \frac{-241}{237}v_2 + \frac{106}{237}v_3$. (0.25 đ)

Câu 4.
a) (1,0 điểm):
+ Đa thức đặc trưng

$$|C - \lambda I_3| = -\lambda^3 - 4\lambda^2 + 20\lambda + 48. \qquad (0,5 \text{ điểm})$$

+ Giá trị riêng $\lambda_1 = -2$; $\lambda_2 = 4$ và $\lambda_3 = -6$ (0,5 điểm)

b) (1,0 điểm):
+ Với $\lambda_1 = -2$, véc tơ riêng $u_1 = k(1, 0, 1)$ với $k \neq 0$. (0,25 điểm)
+ Với $\lambda_2 = 4$, véc tơ riêng $u_2 = k(1, 1, 0)$ với $k \neq 0$. (0,25 điểm)
+ Với $\lambda_3 = -6$, véc tơ riêng $u_3 = k(0, 1, 1)$ với $k \neq 0$. (0,25 điểm)
+ Ma trận P và ma trận chéo cần tìm là

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ P^{-1}CP = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}. \qquad (0,25 \text{ điểm})$$

Câu 5. Viết được:

$$A = \begin{bmatrix} \cos\pi/6 & -\sin\pi/6 \\ \sin\pi/6 & \cos\pi/6 \end{bmatrix}. \qquad (0.5 \text{ đ})$$

Tính được:

$$A^{12} = \begin{bmatrix} \cos 2\pi & -\sin 2\pi \\ \sin 2\pi & \cos 2\pi \end{bmatrix}. \qquad (1.0 \text{ đ})$$

Kết quả

$$A^{12} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \qquad (0.5 \text{ đ})$$

Chú ý: nếu chéo hoá rồi tính, các bước và điểm tương tự cho như trên.

Trưởng bộ môn/khoa	**Giảng viên ra đề**
TS. Phan Quang Sáng	**GV. Bộ môn Toán**

TRƯỜNG ĐẠI HỌC PHENIKAA
KHOA KHOA HỌC CƠ BẢN
BỘ MÔN TOÁN

ĐỀ THI HỌC PHẦN
Học kỳ 1, Năm học 2020–2021 (Đợt học...)
Hệ đào tạo: Chính quy, Bậc học: Đại học

Tên học phần: Đại số tuyến tính. **Số TC:** 03
Thi ngày........tháng........năm 20......
Thời gian làm bài: 90 phút (*Không kể thời gian phát đề*)

Đề số 2

Câu 1 (2,0 điểm). Cho hai ma trận A và B:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Hãy xác định ma trận C sao cho $A + C = B$.

(b) Tính $D = AB$.

Câu 2 (2,0 điểm). Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} -2x + y - z &= 2 \\ x - 2y + z &= 2 \\ -x + y - 2z &= 2. \end{cases}$$

Câu 3 (2,0 điểm). Trong không gian $\mathbb{R}^3$ cho hệ véc tơ:

$$V = \{v_1 = (4, -2, 3); \ v_2 = (0, 3, -5); \ v_3 = (6, -2, 0)\}.$$

(a) Kiểm tra xem hệ véc tơ trên là độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính?

(b) Biểu diễn tuyến tính véc tơ $x = (7, 9, -2)$ qua các véc tơ của hệ V.

Câu 4 (2,0 điểm). Cho ma trận

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 5 & 1 \\ -2 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

(a) Tìm các giá trị riêng của C.

(b) Tìm ma trận P sao cho $P^{-1}CP$ là ma trận chéo và đưa ra ma trận chéo đó?

Câu 5 (2,0 điểm). Tìm A^{20} biết

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Ghi chú:

- Sinh viên **không được** sử dụng tài liệu;
- Cán bộ coi thi không được giải thích gì thêm.

Đáp án Đề số 2

SV giải đúng bằng cách khác vẫn được điểm tối đa.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Câu 1.
(a) 1 điểm

$$A + C = B \Rightarrow C = B - A \qquad \text{(0,25 điểm)}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{(0,25 điểm)}$$

$$C = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}. \qquad \text{(0,5 điểm)}$$

(b) 1 điểm

$$D = AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}. \qquad \text{(0,25 điểm)}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & 9 & 6 \\ 6 & 6 & 6 \\ 6 & 9 & 6 \end{bmatrix}. \qquad \text{(0,75 điểm)}$$

Câu 2. Ma trận hệ số và véc tơ cột vế phải: (0,25 điểm)

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

+ $\det(A) = -4 \neq 0$ nên hệ đã cho là hệ Crammer. (0,5 điểm)

+ $\det(A_1) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 6$ (0,25 điểm)

+ $\det(A_2) = \begin{vmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 10$ (0,25 điểm)

+ $\det(A_3) = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6$ (0,25 điểm)

+ Hệ đã cho có nghiệm duy nhất

$$x = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = -\frac{3}{2}; \quad y = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = -\frac{5}{2}; \quad z = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = -\frac{3}{2} \qquad \text{(0,5 điểm)}$$

Câu 3.
a) (1,0 điểm):
Xét ma trận:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -5 \\ 6 & -2 & 0 \end{bmatrix} \qquad (0{,}25 \text{ điểm})$$

$$\to \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 2 & -9 \end{bmatrix} \qquad (0{,}25 \text{ điểm})$$

$$\to \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & -17 \end{bmatrix} \qquad (0{,}25 \text{ điểm})$$

Suy ra $r(A) = 3 \Rightarrow$ nên hệ véc tơ là độc lập tuyến tính. (0.25 đ)

Cách 2: Tính định thức của ma trận các véc tơ hàng (hoặc cột): $\det(A) = -34 \neq 0$ (0.75 đ)
Suy ra $r(A) = 3 \Rightarrow$ và do đó $r(V) = 3$ nên hệ véc tơ là độc lập tuyến tính. (0.25 đ)

b) (1,0 điểm):
Giả sử $x = k_1v_1 + k_2v_2 + k_3v_3,\ k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$ (0.25 đ)

$$\begin{cases} 4k_1 & & + & 6k_3 & = & 7 \\ -2k_1 & + & 3k_2 & - & 2k_3 & = & 9 \\ 3k_1 & - & 5k_2 & & & = & -2 \end{cases}. \qquad (0.25 \text{ đ})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k_1 & = & 152/17 \\ k_2 & = & 98/17 \\ k_3 & = & -163/17 \end{cases} \qquad (0.25 \text{ đ})$$

Kết luận $x = -\frac{152}{17}v_1 + \frac{98}{17}v_2 - \frac{163}{17}v_3$. (0.25 đ)

Câu 4.
(a) (1,0 điểm):
+ Đa thức đặc trưng

$$|C - \lambda I_3| = -\lambda^3 + 12\lambda^2 - 44\lambda + 48 \qquad (0{,}75 \text{ điểm})$$

+ Giá trị riêng $\lambda_1 = 2$; $\lambda_2 = 4$ và $\lambda_3 = 6$ (0,25 điểm)

b) (1,0 điểm):
+ Với $\lambda_1 = 2$, véc tơ riêng $u_1 = k(1, 0, 1)$ với $k \neq 0$. (0,25 điểm)
+ Với $\lambda_2 = 4$, véc tơ riêng $u_2 = k(1, 1, 0)$ với $k \neq 0$. (0,25 điểm)
+ Với $\lambda_3 = 6$, véc tơ riêng $u_3 = k(0, 1, 1)$ với $k \neq 0$. (0,25 điểm)
+ Ma trận P và ma trận chéo cần tìm là

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ P^{-1}CP = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}. \qquad (0{,}25 \text{ điểm})$$

Câu 5. Viết được:

$$A = \begin{bmatrix} \cos\pi/4 & -\sin\pi/4 \\ \sin\pi/4 & \cos\pi/4 \end{bmatrix}. \qquad (0.5 \text{ đ})$$

Tính được:

$$A^{20} = \begin{bmatrix} \cos 5\pi & -\sin 5\pi \\ \sin 5\pi & \cos 5\pi \end{bmatrix}. \qquad (1.0 \text{ đ})$$

Kết quả

$$A^{20} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \qquad (0.5 \text{ đ})$$

Chú ý: nếu chéo hoá rồi tính, các bước và điểm tương tự cho như trên.

Trưởng bộ môn/khoa	**Giảng viên ra đề**
TS. Phan Quang Sáng	**GV. Bộ môn Toán**

TRƯỜNG ĐẠI HỌC PHENIKAA	**ĐỀ THI HỌC PHẦN**
KHOA KHOA HỌC CƠ BẢN	**Học kỳ 1, Năm học 2020–2021 (Đợt học...)**
BỘ MÔN TOÁN	**Hệ đào tạo: Chính quy, Bậc học: Đại học**

Tên học phần: Đại số tuyến tính. **Số TC:** 03

Thi ngày........tháng........năm 20......

Thời gian làm bài: 90 phút (*Không kể thời gian phát đề*)

Đề số 3

Câu 1 (2,0 điểm). Cho các ma trận sau:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 4 & -6 \\ 5 & 7 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -7 & 4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Tính các ma trận $A^T + 2B$ và BA, trong đó A^T là ma trận chuyển vị của A.

Câu 2 (2,0 điểm). Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} 4x + 3y + z = 2 \\ -5x + 2y + 8z = -3 \\ x + 3y + 5z = 7. \end{cases}$$

Câu 3 (2,0 điểm). Trong trong không gian véc tơ $\mathbb{R}^3$ cho hệ véc tơ

$$S = \{v_1 = (0, 1, 1);\ v_2 = (1, 0, 1);\ v_3 = (1, 1, 0)\}.$$

(a) Chứng minh hệ S độc lập tuyến tính. Từ đó suy ra rằng S là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

(b) Tìm tọa độ của véc tơ $u = (1, 2, 1)$ trong cơ sở S.

Câu 4 (2,0 điểm). Cho ma trận

$$C = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -11 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

(a) Tìm các giá trị riêng của C.

(b) Tìm ma trận P sao cho $P^{-1}CP$ là ma trận chéo và đưa ra ma trận chéo đó?

Câu 5 (2,0 điểm). Cho hai ma trận vuông, thực A và B thoả mãn các điều kiện sau:

$$A^{2021} = 0 \text{ và } AB = A + B.$$

Chứng minh rằng $\det(B) = 0$.

Ghi chú:

- Sinh viên **không được** sử dụng tài liệu;
- Cán bộ coi thi không được giải thích gì thêm.

Đáp án Đề số 3

SV giải đúng bằng cách khác vẫn được điểm tối đa.
Câu 1.

$$A^T + 2B = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 4 & 7 \\ -6 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 10 \\ -14 & 8 \\ 2 & -6 \end{bmatrix} \qquad \text{(0,5 điểm)}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 15 \\ -10 & 15 \\ -4 & -3 \end{bmatrix} \qquad \text{(0,5 điểm)}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -7 & 4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 4 & -6 \\ 5 & 7 & 3 \end{bmatrix} \qquad \text{(0,25 điểm)}$$

$$= \begin{bmatrix} 19 & 43 & 3 \\ 41 & 0 & 54 \\ -18 & -17 & -15 \end{bmatrix} \qquad \text{(0,75 điểm)}$$

Câu 2. Ma trận hệ số và véc tơ cột vế phải: (0,25 điểm)

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -5 & 2 & 8 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

+ $\det(A) = 26 \neq 0$ nên hệ đã cho là hệ Crammer. (0,5 điểm)

+ $\det(A_1) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -3 & 2 & 8 \\ 7 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 162$ (0,25 điểm)

+ $\det(A_2) = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -5 & -3 & 8 \\ 1 & 7 & 5 \end{vmatrix} = -250$ (0,25 điểm)

+ $\det(A_3) = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -5 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 154$ (0,25 điểm)

+ Hệ đã cho có nghiệm duy nhất

$$x = \frac{\det(A_1)}{\Delta} = \frac{81}{13}; \quad y = \frac{\det(A_2)}{\Delta} = \frac{-125}{13}; \quad z = \frac{\det(A_3)}{\Delta} = \frac{77}{13} \qquad \text{(0,5 điểm)}$$

Câu 3.
a) (1,0 điểm):
Cách 1: Tính định thức của ma trận các véc tơ cột (hoặc hàng):

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \qquad \text{(0,5 điểm)}$$

Suy ra $r(A) = 3 \Rightarrow$ và do đó $r(V) = 3$ nên hệ véc tơ là độc lập tuyến tính. (0.25 đ)
Số chiều của $\mathbb{R}^3$. bằng 3, và V gồm 3 véc tơ ĐLTT nên V là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$. (0.25 đ)

Cách 2: Ta xét phương trình véc tơ sau (**0,25 điểm**):

$$c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 = 0 \qquad \text{(0,25 điểm)}$$

$$\begin{cases} c_2 + c_3 = 0 \\ c_1 + c_2 + c_3 = 0 \\ c_1 + c_2 = 0 \end{cases} \qquad \text{(0,25 điểm)}$$

$$c_1 = c_2 = c_3 = 0 \qquad \text{(0,25 điểm)}$$

(Có thể giải trực tiếp hệ trên hoặc tính định thức ma trận hệ số $\det(A) = 2 \neq 0$ nên hệ có nghiệm duy nhất $c_1 = c_2 = c_3 = 0$)
Do đó hệ véc tơ là ĐLTT.
Số chiều của $\mathbb{R}^3$ bằng 3, và V gồm 3 véc tơ ĐLTT nên V là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$. (0.25 đ)

(b) (1,0 điểm) Giả sử

$$u = c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3. \qquad \text{(0,25 điểm)}$$

$$\begin{cases} c_2 + c_3 = 1 \\ c_1 + c_3 = 2 \\ c_1 + c_2 = 1 \end{cases} \qquad \text{(0,25 điểm)}$$

$$c_1 = 1,\ c_2 = 0,\ c_3 = 1 \qquad \text{(0,25 điểm)}$$

Tọa độ của u trong cơ sở S là $(1, 0, 1)$ (0.25 đ)
Hoặc tọa độ cột của u là:

$$[u]_S = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Câu 4.
(a) (1,0 điểm):
+ Phương trình đặc trưng $|C - \lambda I_3| = 0$:

$$-\lambda^3 - 6\lambda^2 + \lambda + 6 = 0 \qquad \text{(0,75 điểm)}$$

+ Giá trị riêng $\lambda_1 = -6$; $\lambda_2 = 1$ và $\lambda_3 = 1$ (0,25 điểm)

b) (1,0 điểm):
+ Với $\lambda_1 = -6$, véc tơ riêng $u_1 = k(1, -1, 3)$ với $k \neq 0$. (0,25 điểm)
+ Với $\lambda_2 = 4$, véc tơ riêng $u_2 = k(0, 1, 1)$ với $k \neq 0$. (0,25 điểm)
+ Với $\lambda_3 = 6$, véc tơ riêng $u_3 = k(-1, 1, 4)$ với $k \neq 0$. (0,25 điểm)
+ Ma trận P và ma trận chéo cần tìm là

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix},\ P^{-1}CP = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \qquad \text{(0,25 điểm)}$$

Câu 5. Từ điều kiện $A^{2021} = 0$ ta suy ra $\det(A^{2021}) = [\det(A)]^{2021} = 0$, (0,5 điểm)
từ đó $\det(A) = 0$. (0,5 điểm)
Mặt khác, từ điều kiện $A + B = AB$ ta suy ra $B = A(B - I)$ (0,5 điểm)
Do đó, $\det(B) = \det(A(B - I)) = \det(A)\det(B - I) = 0$ (Đpcm). (0,5 điểm)

Trưởng bộ môn/khoa **Giảng viên ra đề**

TS. Phan Quang Sáng **GV Bộ môn Toán**

TRƯỜNG ĐẠI HỌC PHENIKAA
KHOA KHOA HỌC CƠ BẢN
BỘ MÔN TOÁN

ĐỀ THI HỌC PHẦN
Học kỳ 1, Năm học 2020–2021 (Đợt học...)
Hệ đào tạo: Chính quy, Bậc học: Đại học

Tên học phần: Đại số tuyến tính. **Số TC:** 03
Thi ngày........tháng........năm 20......
Thời gian làm bài: 90 phút (*Không kể thời gian phát đề*)

Đề số 4

Câu 1 (2,0 điểm). Cho các ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 3 & -1 \\ -3 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

(a) Tính $2A + A^T$, trong đó A^T là ma trận chuyển vị của A.

(b) Tính AB.

Câu 2 (2,0 điểm). Giải hệ phương trình tuyến tính sau:

$$\begin{cases} x - 2y - 3z = 0 \\ 3x + 2y + z = 2 \\ 3x + y - 2z = 0. \end{cases}$$

Câu 3 (2,0 điểm). Trong không gian véc tơ $\mathbb{R}^3$ cho hệ véc tơ

$$S = \{u_1 = (1, -2, 3); u_2 = (2, 3, 5); u_3 = (-7, -9, 2)\}.$$

(a) Chứng minh rằng hệ S độc lập tuyến tính. Từ đó chỉ ra rằng S là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

(b) Tìm tọa độ của véc tơ $v = (2, 1, 4)$ trong cơ cở S.

Câu 4 (2,0 điểm). Cho ma trận sau:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Tìm các giá trị riêng của C.

(b) Tìm ma trận P sao cho $P^{-1}CP$ là ma trận chéo và đưa ra ma trận chéo đó?

Câu 5 (2,0 điểm).

(a) Cho A là ma trận phản đối xứng cấp n (tức A là ma trận thực vuông cấp n thỏa mãn $A^T = -A$). Chứng minh rằng nếu n lẻ thì $\det(A) = 0$.

(b) Cho ma trận cấp 2:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

- Chứng minh rằng nếu $A^{2020} = 0$ thì $A^2 = 0$.
- Tìm a, b, c sao cho tồn tại n để $A^n = I$, với I là ma trận đơn vị cấp 2.

Ghi chú:

- Sinh viên **không được** sử dụng tài liệu;
- Cán bộ coi thi không được giải thích gì thêm.

Đáp án Đề số 4

SV giải đúng bằng cách khác vẫn được điểm tối đa.
Câu 1. Ta có (a) 1 điểm

$$2A + A^T = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -6 \\ -4 & 6 & -2 \\ -6 & 4 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & 2 \\ -3 & -1 & 4 \end{bmatrix} \quad (0,5 \text{ điểm})$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 2 & -9 \\ -2 & 9 & 0 \\ -9 & 3 & 12 \end{bmatrix} \quad (0,5 \text{ điểm})$$

(b) Ta có

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 3 & -1 \\ -3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \quad (0,25 \text{ điểm})$$

$$= \begin{bmatrix} 10 & 12 \\ 8 & 4 \\ -1 & -10 \end{bmatrix} \quad (0,75 \text{ điểm})$$

Câu 2.
Cách 1: Giải theo công thức Cramer:

- Sinh viên xác định được ma trận hệ số: (0.25 đ)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

- Sinh viên xác định được định thức của A: (0.25 pt)

$$\det(A) = -14 \neq 0.$$

- Sinh viên viết và tính định thức của A_1: (0.25 đ)

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

- Sinh viên tính được nghiệm x: (0.25 đ)

$$\det(A_1) = -14 \to x = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = 1.$$

- Sinh viên viết và tính định thức của A_2: (0.25 đ)

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

- Sinh viên tính được nghiệm y: (0.25 đ)

$$\det(A_2) = 14 \to y = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = -1.$$

- Sinh viên viết và tính định thức của A_3: (0.25 đ)

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

- Sinh viên tính được nghiệm z: (0.25 đ)

$$\det(A_3) = -14 \to z = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = 1.$$

Cách 2: Giải theo phương pháp khử Gauss:

- Viết được mở trận mở rộng (bổ sung) $\bar{A}$: (0.25 đ)

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

- Bước 1: H1 - H2: (0.25 đ)

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -2 \\ 3 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

- Bước 2: 3*H1 - H3: (0.25 đ)

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & -7 & -7 & 0 \end{bmatrix}.$$

- Bước 3: 7*H2 - H3: (0.25 đ)

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -14 & -14 \end{bmatrix}.$$

- Viết lại được hệ phương trình mới: (0.25 đ)
- Tính được z từ hàng cuối: (0.25 đ)

$$-14z = -14 \to z = 1.$$

- Tính được y từ hàng hai: (0.25 đ)

$$-y - 3z = -2 \to y = -3z + 2 = -1.$$

- Tính được x từ hàng đầu: (0.25 đ)

$$x - 2y - 3z = 0 \to x = 2y + 3z = 1.$$

Cách 3: Giải theo phương pháp Gauss-Jordan: Từ phương pháp khử Gauss thêm 3 bước biến đổi nữa để đưa A về ma trận đơn vị, mỗi bước 0,25 điểm.

Câu 3.
a) (1,0 điểm):

+ Định thức của ma trận có các cột là các véc tơ u_1, u_2, u_3

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -7 \\ -2 & 3 & -9 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 138 \neq 0. \qquad \text{(0,5 điểm)}$$

+ Suy ra $r(A) = 3 = r(S)$ nên hệ S độc lập tuyến tính. (0,25 điểm)
+ Vì $\dim(\mathbb{R}^3) = 3 =$ "Số phần tử của S" nên S là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$. (0,25 điểm)
(b) (1,0 điểm): Biểu diễn

$$v = \alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 \qquad \text{(0,25 điểm)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta - 7\gamma = 2 \\ -2\alpha + 3\beta - 9\gamma = 1 \\ 3\alpha + 5\beta + 2\gamma = 4 \end{cases} \qquad \text{(0,25 điểm)}$$

+ Giải hệ ta được $\alpha = \frac{25}{46}, \beta = \frac{1}{2}, \gamma = -\frac{3}{46}$. (0,25 điểm)
+ Vậy tọa độ của v trong cơ sở S là $(v)_S = (\frac{25}{46}, \frac{1}{2}, -\frac{3}{46})$. (0,25 điểm)

Câu 4

(a) (**1,0 điểm**)

+ Phương trình đặc trưng $|C - \lambda I_3| = 0$:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{(0,25 điểm)}$$

$$\Leftrightarrow -\lambda^3 + 3\lambda + 2 = 0 \qquad \text{(0,5 điểm)}$$

+ Giá trị riêng $\lambda_1 = -1$ (bội 2) và $\lambda_2 = 2$ (bội 1) (0,25 điểm)

b) (1,0 điểm):
+ Với $\lambda_1 = -1$, các véc tơ riêng là nghiệm khác không của hpt

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow x_3 = -x_1 - x_2 \qquad \text{(0,25 điểm)}$$

Cho $x_1 = 1$, $x_2 = 0$ thì $x_3 = -1$ hoặc $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ thì $x_3 = -1$ nên ta chọn được 2 véc tơ riêng ĐLTT là

$$p_1 = (1, 0, -1),\ p_2 = (0, 1, -1). \qquad \text{(0,25 điểm)}$$

+ Với $\lambda_2 = 2$, chọn 1 véc tơ riêng $p_3 = (1, 1, 1)$ từ là nghiệm khác không của hpt: (0,25 điểm)

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \ x_1 = x_2 = x_3$$

+ Ma trận P và ma trận chéo cần tìm là

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix},\ P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}. \qquad \text{(0,25 điểm)}$$

Câu 5.
a. (1 điểm) Giả thiết $A^T = -A$ suy ra

$$\det(A^T) = \det(-A) \qquad \text{(0,25 điểm)}$$

Từ các tính chất của định thức chúng ta luôn có

$$\det(A^T) = \det(A) \ \text{ và } \det(-A) = (-1)^n \cdot \det(A), \qquad \text{(0,25 điểm)}$$

nên đẳng thức ban đầu suy ra

$$\det(A) = (-1)^n \cdot \det(A). \qquad \text{(0,25 điểm)}$$

Mặt khác do n lẻ nên đẳng thức trên trở thành

$$\det(A) = -\det(A) \Rightarrow \det(A) = 0 \qquad \text{(0,25 điểm)}$$

b. (1 điểm) Biến đổi A thành tổng của hai ma trận giao hoán:

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = B + D. \qquad \text{(0,25 điểm)}$$

Từ đó:

$$A^n = (B+D)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k . B^{n-k} . D^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k . \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}^{n-k} \cdot \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^k \qquad \text{(0,25 điểm)}$$

Với chú ý rằng $D^k = 0$, với mọi $k \geq 2$, nên

$$\begin{aligned} A^n &= \begin{bmatrix} a^n & 0 \\ 0 & c^n \end{bmatrix} + n. \begin{bmatrix} a^{n-1} & 0 \\ 0 & c^{n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a^n & 0 \\ 0 & c^n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & n.a^{n-1}.b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \qquad \text{(0,25 điểm)}$$

Từ đó suy ra: (0,25 điểm)

- Nếu $A^{2020} = 0$ thì $a = c = 0$ suy ra $A^2 = 0$.
- Nếu $A^n = I$ thì $a^n = c^n = 1$ và $a^{n-1}.b = 0$. Suy ra $a = c = 1, b = 0$ hoặc $a = c = -1, b = 0$ (n chẵn).

Trưởng bộ môn/khoa **Giảng viên ra đề**

TS. Phan Quang Sáng **GV Bộ môn Toán**

TRƯỜNG ĐẠI HỌC PHENIKAA
KHOA KHOA HỌC CƠ BẢN
BỘ MÔN TOÁN

ĐỀ THI HỌC PHẦN
Học kỳ 1, Năm học 2020–2021 (Đợt học...)
Hệ đào tạo: Chính quy, Bậc học: Đại học

Tên học phần: Đại số tuyến tính. **Số TC:** 03
Thi ngày........tháng........năm 20......
Thời gian làm bài: 90 phút (*Không kể thời gian phát đề*)

Đề số 5

Câu 1 (2,0 điểm). Cho ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tính

(a) $2A + A^T$;

(b) $A^T A$, ở đó A^T là ma trận chuyển vị của A.

Câu 2 (2,0 điểm). Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} -x + 5y + 9z = -1 \\ -4x + 5y + 13z = 4 \\ 5x + 6y + 6z = 9. \end{cases}$$

Câu 3 (2,0 điểm). Cho họ véc tơ $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ trong không gian véc tơ $\mathbb{R}^3$ với $v_1 = (0,1,1)$, $v_2 = (1,0,1)$ và $v_3 = (1,1,0)$.

(a) Chứng minh rằng hệ S độc lập tuyến tính. Từ đó chỉ ra rằng S là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

(b) Tìm tọa độ của véc tơ $v = (1,1,1)$ trong cơ cở S.

Câu 4 (2,0 điểm). Cho ma trận sau

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -5 & -2 \\ 2 & 7 & 2 \\ -2 & -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Tìm các giá trị riêng của C.

(b) Tìm ma trận P sao cho $P^{-1}CP$ là ma trận chéo và viết ma trận chéo đó?

Câu 5 (2,0 điểm). Cho các ma trận

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Đặt $E = D - M$. Chứng minh rằng: $EM = ME$ và $D^2 = E^2 + 2ME + M^2$.

(b) Tính D^{2021}.

Ghi chú:

- Sinh viên **không được** sử dụng tài liệu;
- Cán bộ coi thi không được giải thích gì thêm.

Đáp án Đề số 5

SV giải đúng bằng cách khác vẫn được điểm tối đa.
Câu 1. (a) Ta có

$$2A + A^T = 2\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{(0,5 điểm)}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -1 & -3 & -1 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix} \qquad \text{(0,5 điểm)}$$

(b) Ta có

$$A^T A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \qquad \text{(1 điểm)}$$

Câu 2. Ma trận hệ số

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 9 \\ -4 & 5 & 13 \\ 5 & 6 & 6 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

+ $\det(A) = 52 \neq 0$ nên hệ đã cho là hệ Crammer. (0,5 điểm)

+ $\Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & 5 & 9 \\ 4 & 5 & 13 \\ 9 & 6 & 6 \end{vmatrix} = 324$ (0,5 điểm)

+ $\Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 9 \\ -4 & 4 & 13 \\ 5 & 9 & 6 \end{vmatrix} = -500$

+ $\Delta_3 = \begin{vmatrix} -1 & 5 & -1 \\ -4 & 5 & 4 \\ 5 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 308$ (0,5 điểm)

+ Hệ đã cho có nghiệm duy nhất

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{81}{13}; \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-125}{13}; \quad z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{77}{13} \qquad \text{(0,5 điểm)}$$

Câu 3 (2,0 điểm)
(a) + Xét định thưc ma trận gồm các cột là các véc tơ v_1, v_2, v_3:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

Vậy hệ S độc lập tuyến tính. (0,75 điểm)
+ Vì $\dim \mathbb{R}^3 = 3 =$ "Số phần tử của hệ S" nên S là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$ (0,25 điểm)
(b) + Để tính ma trận toạ độ của vector $u = (1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$ đối với cơ sở (họ) S, ta xét phương trình vector sau:

$$v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3. \qquad \text{(0,25 điểm)}$$

Phương trình vector này cho ta hệ phương trình tuyến tính sau:

$$\begin{cases} c_2 + c_3 = 1 \\ c_1 + c_3 = 1 \\ c_1 + c_2 = 1 \end{cases} \qquad \text{(0,25 điểm)}$$

+) Giải hệ phương trình này cho ta nghiệm $c_1 = c_2 = c_3 = 1/2$. (0,25 điểm)
+) Như vậy, ma trận toạ độ của vector v đối với cơ sở S là

$$[u]_S = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}. \qquad \text{(0,25 điểm)}$$

Câu 4.

(a) :

+ Đa thức đặc trưng: $D(t) = -t^3 + 9t^2 - 26t + 24$. (0,75 điểm)

+ $D(t) = 0$ khi và chỉ khi $t \in \{2, 3, 4\}$. (0,25 điểm)

(b) :

+ Xét $t_1 = 2$: giải hệ phương trình

$$(C - 2I)x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 - 3x_3 &= 0 \\ x_2 + x_3 &= 0 \end{cases}$$

Chọn một véc tơ riêng tương ứng với t_1 là $v_1 = (3, -2, 2)$. (0,25 điểm)

+ Xét $t_2 = 3$: giải hệ phương trình

$$(C - 3.I)x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_3 &= 0 \\ x_2 + x_3 &= 0 \end{cases}$$

Chọn một véc tơ riêng tương ứng với t_2 là $v_2 = (1, -1, 1)$. (0,25 điểm)

+ Xét $t_3 = 4$: giải hệ phương trình

$$(C - 4.I)x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_3 &= 0 \\ x_2 + 2x_3 &= 0 \end{cases}$$

Chọn một véc tơ riêng tương ứng với t_3 là $v_3 = (2, -2, 1)$. (0,25 điểm)

+ Hệ véc tơ $\{v_1, v_2, v_3\}$ độc lập tuyến tính.

Kết luận:

$$P = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \ P^{-1}CP = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad \text{(0,25 điểm)}$$

Câu 5. (a) + Ta có

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \qquad ME = M = EM \qquad \text{(0,5 điểm)}$$

+ Chứng minh

$$\begin{aligned} D^2 &= (E+M)^2 \\ &= (E+M)(E+M) \\ &= E^2 + EM + ME + M^2 \\ &= E^2 + 2ME + M^2 \end{aligned}$$

(0,5 điểm)

(b) + Ta có $M^2 = O$. (0,25 điểm)
+ Vì M và E giao hoán ($ME = EM$) nên ta có

$$\begin{aligned} D^{2021} &= (E+M)^{2021} \\ &= \sum_{k=0}^{2021} C_{2021}^k M^k E^{2021-k} && \text{(0,25 điểm)} \\ &= E^{2021} + 2021 M E^{2020} && \text{(0,25 điểm)} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6063 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. && \text{(0,25 điểm)} \end{aligned}$$

Trưởng bộ môn/khoa	Giảng viên ra đề
TS. Phan Quang Sáng	**GV Bộ môn Toán**

TRƯỜNG ĐẠI HỌC PHENIKAA
KHOA KHOA HỌC CƠ BẢN
BỘ MÔN TOÁN

ĐỀ THI HỌC PHẦN
Học kỳ 1, Năm học 2020–2021 (Đợt học...)
Hệ đào tạo: Chính quy, Bậc học: Đại học

Tên học phần: Đại số tuyến tính. **Số TC:** 03
Thi ngày........tháng........năm 20......
Thời gian làm bài: 90 phút (*Không kể thời gian phát đề*)

Đề số 6

Câu 1 (2,0 điểm). Cho các ma trận sau:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 7 \\ -4 & -6 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 6 & -8 \\ 5 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Tính

(a) $A + 2B^T$, ở đó B^T là ma trận chuyển vị của B;

(b) AB.

Câu 2 (2,0 điểm). Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = -2 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 6 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = -2. \end{cases}$$

Câu 3 (2,0 điểm). Trong $\mathbb{R}^3$ cho hệ véc tơ

$$S = \{u_1 = (1, 2, 3); u_2 = (2, -3, 5); u_3 = (7, 9, 2)\}.$$

(a) Chứng minh rằng hệ S độc lập tuyến tính. Từ đó chỉ ra rằng S là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

(b) Tìm tọa độ của véc tơ $v = (2, -4, 8)$ trong cơ cở S.

Câu 4 (2,0 điểm). Cho ma trận sau

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

(a) Tìm các giá trị riêng của C.

(b) Tìm ma trận P sao cho $P^{-1}CP$ là ma trận chéo và viết ma trận chéo đó?

Câu 5 (2,0 điểm). Cho các ma trận

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Đặt $E = D - M$. Chứng minh rằng: $EM = ME$ và $D^2 = E^2 + 2ME + M^2$.

(b) Tính D^{2021}.

Ghi chú:

- Sinh viên **không được** sử dụng tài liệu;
- Cán bộ coi thi không được giải thích gì thêm.

Đáp án Đề số 6

SV giải đúng bằng cách khác vẫn được điểm tối đa.

Câu 1 (2,0 điểm). (a) Ta có

$$A + 2B^T = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 7 \\ -4 & -6 & 1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 6 & 5 & -1 \\ -8 & 3 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{(0,5 điểm)}$$

$$= \begin{bmatrix} 17 & 12 & 5 \\ -20 & 0 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{(0,5 điểm)}$$

(b) Ta có

$$A.B = \begin{bmatrix} 33 & -48 \\ -55 & 12 \end{bmatrix} \quad \text{(1,0 điểm)}$$

Câu 2.

+ Ma trận hệ số mở rộng

$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & 6 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \end{array}\right] \quad \text{(0.5 điểm)}$$

+ Khử Gauss

$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \quad \text{(0.5 điểm)}$$

+ Thế ngược

$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \quad \text{(0.5 điểm)}$$

+ Nghiệm $x_1 = 1$, $x_2 = 1$ và $x_3 = -1$. (0.5 điểm)

Chú ý, nếu dùng định thức hay ma trận nghịch đảo hay biến đổi thông thường, các bước tính và điểm tương ứng cho như trên.

Câu 3.

(a) + Định thức của ma trận có các cột là các véc tơ u_1, u_2, u_3

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & -3 & 9 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 128 \neq 0. \quad \text{(0,5 điểm)}$$

+ Do đó hệ S độc lập tuyến tính. (0,25 điểm)

+ Vì $\dim(\mathbb{R}^3) = 3 =$ "Số phần tử của S" nên S là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$. (0,25 điểm)

(b) Ta có

$$v = \alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 \quad \text{(0,25 điểm)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta + 7\gamma = 2 \\ 2\alpha - 3\beta + 9\gamma = -4 \\ 3\alpha + 5\beta + 2\gamma = 8 \end{cases} \quad \text{(0,25 điểm)}$$

+ Giải hệ ta được $\alpha = \frac{43}{64}, \beta = \frac{81}{64}, \gamma = -\frac{11}{64}$. (0,25 điểm)

+ Vậy tọa độ của v trong cơ sở S là $(v)_S = (\frac{43}{64}, \frac{81}{64}, -\frac{11}{64})$. (0,25 điểm)

Câu 4 (2,0 điểm).

(a) :

+ Đa thức đặc trưng: $D(t) = -t^3 + 10t^2 - 27t + 18$. (0.75 điểm)

+ $D(t) = 0$ khi và chỉ khi $t \in \{1, 3, 6\}$. (0,25 điểm)

(b) :

+ Xét $t_1 = 1$: giải hệ phương trình

$$(C - I)x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 &= 0 \\ \quad x_3 &= 0 \end{cases}$$

Chọn một véc tơ riêng tương ứng với t_1 là $v_1 = (-1, 1, 0)$. (0,25 điểm)

+ Xét $t_2 = 3$: giải hệ phương trình

$$(C - 3.I)x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_3 &= 0 \\ 2x_2 + x_3 &= 0 \end{cases}$$

Chọn một véc tơ riêng tương ứng với t_2 là $v_2 = (-1, -1, 2)$. (0,25 điểm)

+ Xét $t_3 = 6$: giải hệ phương trình

$$(C - 6.I)x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_3 &= 0 \\ x_2 - x_3 &= 0 \end{cases}$$

Chọn một véc tơ riêng tương ứng với t_3 là $v_3 = (1, 1, 1)$. (0,25 điểm)

+ Hệ véc tơ $\{v_1, v_2, v_3\}$ độc lập tuyến tính.

+ Kết luận:

$$P = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \ \hat{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$ (0,25 điểm)

Câu 5. (a) + Ta có

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow$ $$ME = M = EM$$ (0,5 điểm)

+ Chứng minh

$$\begin{aligned} D^2 &= (E + M)^2 \\ &= (E + M)(E + M) \\ &= E^2 + EM + ME + M^2 \\ &= E^2 + 2ME + M^2 \end{aligned}$$ (0,5 điểm)

(b) + Ta có $M^2 = O$. (0,25 điểm)

+ Vì M và E giao hoán ($ME = EM$) nên ta có

$$\begin{aligned} D^{2021} &= (E + M)^{2021} \\ &= \sum_{k=0}^{2021} C_{2021}^k M^k E^{2021-k} && \text{(0,25 điểm)} \\ &= E^{2021} + 2021ME^{2020} && \text{(0,25 điểm)} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 6063 & 0 & 1 \end{pmatrix}. && \text{(0,25 điểm)} \end{aligned}$$

TRƯỜNG ĐẠI HỌC PHENIKAA	**ĐỀ THI HỌC PHẦN**
KHOA KHOA HỌC CƠ BẢN	**Học kỳ 1, Năm học 2020–2021 (Đợt học...)**
BỘ MÔN TOÁN	**Hệ đào tạo: Chính quy, Bậc học: Đại học**

Tên học phần: Đại số tuyến tính. **Số TC:** 03

Thi ngày........tháng........năm 20......

Thời gian làm bài: 90 phút (*Không kể thời gian phát đề*)

Đề số 7

Câu 1 (2,0 điểm). Cho hai ma trận A và B xác định như sau:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Tìm ma trận D sao cho $A - D = B$.

(b) Tính AB.

Câu 2 (2,0 điểm). Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} -3x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 2 \\ 2x_1 + 4x_2 + 9x_3 = 5 \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 = -9. \end{cases}$$

Câu 3 (2,0 điểm). Trong $\mathbb{R}^3$ cho hệ véc tơ

$$S = \{u_1 = (1, -2, 3); u_2 = (2, 3, 5); u_3 = (-7, -9, 2)\}.$$

(a) Chứng minh rằng hệ S độc lập tuyến tính. Từ đó chỉ ra rằng S là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

(b) Tìm tọa độ của véc tơ $v = (2, 1, 4)$ trong cơ cở S.

Câu 4 (2,0 điểm). Cho ma trận

$$C = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -11 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

(a) Tìm các giá trị riêng của C.

(b) Tìm ma trận P sao cho $P^{-1}CP$ là ma trận chéo và viết ma trận chéo đó?

Câu 5 (2,0 điểm). Gọi A là ma trận vuông, thực cấp n thoả mãn tính chất sau $A^{-1} = 3A$. Hãy tính $\det(A^{2021} - A)$.

Ghi chú:

- Sinh viên **không được** sử dụng tài liệu;
- Cán bộ coi thi không được giải thích gì thêm.

Đáp án Đề số 7

SV giải đúng bằng cách khác vẫn được điểm tối đa.
Câu 1
(a) Ta có

$$D = A - B \qquad \text{(0,5 điểm)}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \text{(0,5 điểm)}$$

(b) Ta có

$$AB = \begin{bmatrix} 6 & 7 & 7 \\ 7 & 6 & 7 \\ 7 & 7 & 6 \end{bmatrix} \qquad \text{(1,0 điểm)}$$

Câu 2 (2,0 điểm).

$$\begin{bmatrix} -3 & 5 & 7 & 2 \\ 2 & 4 & 9 & 5 \\ 4 & 3 & -5 & -9 \end{bmatrix} \xrightarrow{0.5 \text{ điểm}} \begin{bmatrix} -3 & 5 & 7 & 2 \\ 0 & 22 & 41 & 19 \\ 0 & 29 & 13 & -19 \end{bmatrix} \xrightarrow{0.5 \text{ điểm}} \begin{bmatrix} -3 & 5 & 7 & 2 \\ 0 & 22 & 41 & 19 \\ 0 & 0 & -301 & -323 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -3x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 2 \\ \qquad 22x_2 + 41x_3 = 19 \\ \qquad\quad - 301x_3 = -323 \end{cases} \xrightarrow{1 \text{ điểm}} \begin{cases} x_1 = \frac{-17}{301} \\ x_2 = \frac{-342}{301} \\ x_3 = \frac{-323}{301} \end{cases}$$

Câu 3.
(a) + Định thức của ma trận có các cột là các véc tơ u_1, u_2, u_3

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -7 \\ -2 & 3 & -9 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 138 \neq 0. \qquad \text{(0,5 điểm)}$$

+ Do đó hệ S độc lập tuyến tính. (0,25 điểm)
+ Vì $\dim(\mathbb{R}^3) = 3 =$ "Số phần tử của S" nên S là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$. (0,25 điểm)
(b) Ta có

$$v = \alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 \qquad \text{(0,25 điểm)}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta - 7\gamma = 2 \\ -2\alpha + 3\beta - 9\gamma = 1 \\ 3\alpha + 5\beta + 2\gamma = 4 \end{cases} \qquad \text{(0,25 điểm)}$$

+ Giải hệ ta được $\alpha = \frac{25}{46}, \beta = \frac{1}{2}, \gamma = -\frac{3}{46}$. (0,25 điểm)
+ Vậy tọa độ của v trong cơ sở S là $(v)_S = (\frac{25}{46}, \frac{1}{2}, -\frac{3}{46})$. (0,25 điểm)
Câu 4. (a) + Đa thức đặc trưng

$$|C - \lambda I_3| = -\lambda^3 - 6\lambda^2 + \lambda + 6. \qquad \text{(0,5 điểm)}$$

+ Giá trị riêng $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = -6$ và $\lambda_3 = -1$ (0,5 điểm)
(b) + Với $\lambda_1 = 1$, véc tơ riêng $u_1 = k(-1, 1, 4)$ với $k \neq 0$. (0,25 điểm)
+ Với $\lambda_2 = -6$, véc tơ riêng $u_2 = k(1, -1, 3)$ với $k \neq 0$. (0,25 điểm)

+ Với $\lambda_3 = -1$, véc tơ riêng $u_3 = k(0,1,1)$ với $k \neq 0$. (0,25 điểm)
+ Ma trận P cần tìm là

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad P^{-1}CP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \qquad \text{(0,25 điểm)}$$

Câu 5. Nhân hai vế của phương trình $3A = A^{-1}$ với A ta có

$$3A^2 = I \to A^2 = \frac{I}{3}, \qquad \text{(0,5 điểm)}$$

với I là ma trận đơn vị cấp n.
Từ đây ta suy ra

$$\det(A^2) = \det\left(\frac{I}{3}\right) = \frac{1}{3^n} \Leftrightarrow [\det(A)]^2 = \frac{1}{3^n} \to \det(A) = \frac{1}{3^{n/2}} \qquad \text{(0,5 điểm)}$$

và

$$A^{2020} = (A^2)^{1010} = \left(\frac{I}{3}\right)^{1010} = \frac{I}{3^{1010}}. \qquad \text{(0,5 điểm)}$$

Do đó, ta tính được

$$\begin{aligned} \det(A^{2021} - A) &= \det(A(A^{2020} - I)) \\ &= \det\left(A\left(\frac{I}{3^{1010}} - I\right)\right) \\ &= \det\left(A\left(\frac{1}{3^{1010}} - 1\right)\right) \\ &= \frac{1}{3^{n/2}}\left(\frac{1}{3^{1010}} - 1\right)^n. \end{aligned} \qquad \text{(0,5 điểm)}$$

Trưởng bộ môn/khoa	**Giảng viên ra đề**
TS. Phan Quang Sáng	**GV Bộ môn Toán**

TRƯỜNG ĐẠI HỌC PHENIKAA
KHOA KHOA HỌC CƠ BẢN
BỘ MÔN TOÁN

ĐỀ THI HỌC PHẦN
Học kỳ 1, Năm học 2020–2021 (Đợt học...)
Hệ đào tạo: Chính quy, Bậc học: Đại học

Tên học phần: Đại số tuyến tính. **Số TC:** 03
Thi ngày........tháng........năm 20......
Thời gian làm bài: 90 phút (*Không kể thời gian phát đề*)

Đề số 8

Câu 1 (2,0 điểm). Cho các ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & 5 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Tính

(a) $2A + A^T$;

(b) AB, ở đó A^T là ma trận chuyển vị của A.

Câu 2 (2,0 điểm). Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} -3x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 2 \\ 2x_1 + 4x_2 + 9x_3 = 5 \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 = -9. \end{cases}$$

Câu 3 (2,0 điểm). Trong không gian $\mathbb{R}^3$ cho hệ véc tơ:

$$V = \{v_1 = (3, 4, 2);\ v_2 = (-2, 0, 7);\ v_3 = (4, -5, 0)\}.$$

(a) Kiểm tra xem hệ véc tơ trên là độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính?

(b) Biểu diễn tuyến tính véc tơ $x = (10, 6, -3)$ qua các véc tơ của hệ V.

Câu 4 (2,0 điểm). Cho ma trận sau:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Tìm các giá trị riêng của C.

(b) Tìm ma trận P sao cho $P^{-1}CP$ là ma trận chéo và viết ma trận chéo đó?

Câu 5 (2,0 điểm). Cho A và B là các ma trận vuông cấp n thoả mãn $AB = BA$ và $B^{2021} = 0$.

(a) Chứng minh rằng nếu $A^{2020} = 0$ thì tồn tại số tự nhiên k để $(A + B)^k = 0$.

(b) Chứng minh rằng $r(I + A + B) = r(I - A - B) = n$ (trong đó $r(M)$ là hạng của ma trận M).

(c) Chứng minh rằng nếu A là khả nghịch thì $A + B$ là khả nghịch.

Ghi chú:

- Sinh viên **không được** sử dụng tài liệu;
- Cán bộ coi thi không được giải thích gì thêm.

Đáp án Đề số 8

SV giải đúng bằng cách khác vẫn được điểm tối đa.
Câu 1. Ta có (a)

$$2A+A^T = 2\begin{bmatrix}3&2&-1\\2&-3&1\\3&5&-1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3&2&3\\2&-3&5\\-1&1&-1\end{bmatrix} \qquad \text{(0,5 điểm)}$$

$$=\begin{pmatrix}9&6&1\\6&-9&7\\5&11&-3\end{pmatrix}. \qquad \text{(0,5 điểm)}$$

(b) Ta có

$$AB=\begin{bmatrix}3&2&-1\\2&-3&1\\3&5&-1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-1&3\\-3&1\\1&3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-10&8\\8&6\\-19&11\end{bmatrix} \qquad \text{(1,0 điểm)}$$

Câu 2 (2,0 điểm).

$$\begin{bmatrix}3&-2&5&7\\-4&1&4&-5\\2&4&9&6\end{bmatrix}\xrightarrow{0.5\text{ điểm}}\begin{bmatrix}3&-2&5&7\\0&-5&32&13\\0&16&17&4\end{bmatrix}\xrightarrow{0.5\text{ điểm}}\begin{bmatrix}3&-2&5&7\\0&-5&32&13\\0&0&199&76\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases}-3x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 2\\ \quad\;\; - 5x_2 + 32x_3 = 13\\ \quad\quad\quad\;\; + 199x_3 = 76\end{cases}\xrightarrow{1\text{ điểm}}\begin{cases}x_1 = \frac{317}{199}\\ x_2 = \frac{-31}{199}\\ x_3 = \frac{76}{199}\end{cases}$$

Câu 3 (2,0 điểm).
a.
+ Xét ma trận:

$$A=\begin{bmatrix}3&4&2\\-2&0&7\\4&-5&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}3&4&2\\0&8&25\\0&-31&-8\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}3&4&2\\0&8&25\\0&0&237\end{bmatrix} \qquad \text{(0,5 điểm)}$$

(Có thể tính $\det(A)=237\neq 0$)
+ Suy ra $r(A)=3 \Rightarrow$ hệ véc tơ V là độc lập tuyến tính. (0,25 điểm)
+ Vì $\dim(\mathbb{R}^3)=3=$ "Số phần tử của V" nên V là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$. (0,25 điểm)
b. (1,0 điểm):
Giả sử tồn tại $k_1,k_2,k_3\in\mathbb{R}$ sao cho $x=k_1.v_1+k_2.v_2+k_3.v_3$. Suy ra

$$\begin{cases}3k_1 - 2k_2 + 4k_3 = 10\\ 4k_1 \quad\quad\; - 5k_3 = 6\\ 2k_1 + 7k_2 \quad\quad\; = -3\end{cases}\xrightarrow{0.75\text{ điểm}}\begin{cases}3k_1 - 2k_2 + 4k_3 = 10\\ \quad\;\; + 8k_2 - 31k_3 = -22\\ \quad\quad\quad\; + 237\ k_3 = 106\end{cases}\xrightarrow{0.25\text{ điểm}}\begin{cases}k_1 = \frac{448}{237}\\ k_2 = \frac{-241}{237}\\ k_3 = \frac{106}{237}\end{cases}$$

Câu 4. (2,0 điểm)
(a)

+ Viết được phương trình đặc trưng và tìm được trị riêng:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow -\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \qquad \text{(0,75 điểm)}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \lambda = -1 \\ \lambda = 1 \\ \lambda = 2 \end{cases} \qquad \text{(0,25 điểm)}$$

(b)
+ Tìm vector riêng ứng với trị riêng $\lambda = -1$: Gọi $x = (x_1, x_2, x_3)$ là vector riêng cần tìm. Nó thoả mãn phương trình sau

$$(A - \lambda I)x = 0.$$

Phương trình này tương ứng với hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Nghiệm của hệ phương trình này có dạng $x_1 = t$, $x_2 = -2t$, và $x_3 = t$, với t là số thực khác không tuỳ ý. Do đó, vector riêng có dạng tổng quát

$$x = (t, -2t, t) = t(1, -2, 1).$$

Cho $t = 1$ ta có vector riêng đơn giản nhất (và là một cơ sở) của không gian riêng ứng với trị riêng $\lambda = -1$:

$$p_1 = (1, -2, 1). \qquad \text{(0,25 điểm)}$$

+ Tìm vector riêng ứng với trị riêng $\lambda = 1$:
Hệ phương trình tương ứng có dạng sau:

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

Nghiệm của hệ phương trình này có dạng $x_1 = s$, $x_2 = 0$, và $x_3 = -s$ với s là số thực khác không tuỳ ý. Do đó, vector riêng có dạng tổng quát

$$x = (s, 0, -s) = s(1, 0, -1).$$

Cho $s = 1$ ta có vector riêng đơn giản nhất (và là một cơ sở) của không gian riêng ứng với trị riêng $\lambda = 1$:

$$p_2 = (1, 0, -1). \qquad \text{(0,25 điểm)}$$

+ Tìm vector riêng ứng với trị riêng $\lambda = 2$:
Hệ phương trình tương ứng có dạng sau:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

Nghiệm của hệ phương trình này có dạng $x_3 = x_2 = x_1 = k$ với k là số thực khác không tuỳ ý. Do đó, vector riêng có dạng tổng quát

$$x = (k, k, k) = k(1, 1, 1).$$

Cho $k = 1$ ta có vector riêng đơn giản nhất (và là một cơ sở) của không gian riêng ứng với trị riêng $\lambda = 2$:

$$p_3 = (1, 1, 1). \qquad \text{(0,25 điểm)}$$

+ Viết được ma trận P làm chéo hoá ma trận C có dạng:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad P^{-1}CP = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}. \qquad \text{(0,25 điểm)}$$

Câu 5 (2,0 điểm).
a. Có: $(A+B)^k = \sum_{i=0}^{k} .C_k^i.A^k.B^{k-i}$.
Do đó chọn $k = 2021 + 2020 = 4041$ suy ra đpcm. (0,5 điểm)
b. Có $I = I - (A+B)^k = (I - A - B)(I + (A+B) + \cdots + (A+B)^{k-1})$.
Suy ra $\det(I - A - B).\det(I + (A+B) + \cdots + (A+B)^{k-1}) = \det(I) = 1$. Suy ra $\det(I - A - B) \neq 0 \Rightarrow r(I - A - B) = n$. Tương tự $r(I + A + B) = n$. (0,75 điểm)
c. Có $A^{2021} = A^{2021} + B^{2021} = (A+B)(A^{2020} - A^{2019}.B + \cdots + B^{2020})$. Vì A khả nghịch nên $\det(A) \neq 0$, suy ra $\det(A+B) \neq 0$. (0,75 điểm)

Trưởng bộ môn/khoa **Giảng viên ra đề**

TS. Phan Quang Sáng **GV Bộ môn Toán**