Môn học: Giải tích

Giảng viên: Lê Đức Ninh (khoa Khoa học cơ bản)

Bài 1: Hàm một biến, Đạo hàm, Vi phân

1, Hàm số

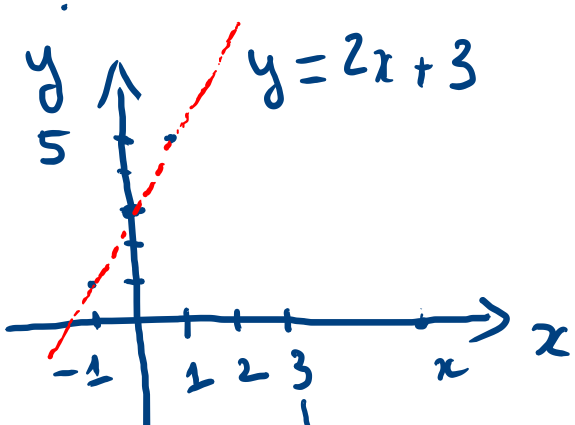
Tập số $X \in R$: $x \in X \xrightarrow{f} y = f(x) \in Y \subset R$

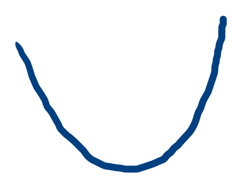
$$f : x \longmapsto y$$

Ví dụ: $f = 2x + 3$; $X = R \Rightarrow Y = R$

$x = 0 \Rightarrow y = 3$

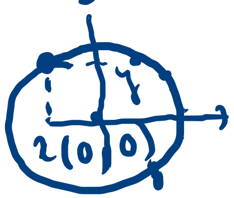
$x = 1 \Rightarrow y = 5$





$f = ax^2 + bx + c$

$f = ?$



$\rightarrow f = ?$

$$y = f = \left[\begin{array}{l} \sin x \\ \cos x \end{array}\right.$$

f: $x^2 + y^2 = 1$

$y^2 = 1 - x^2$

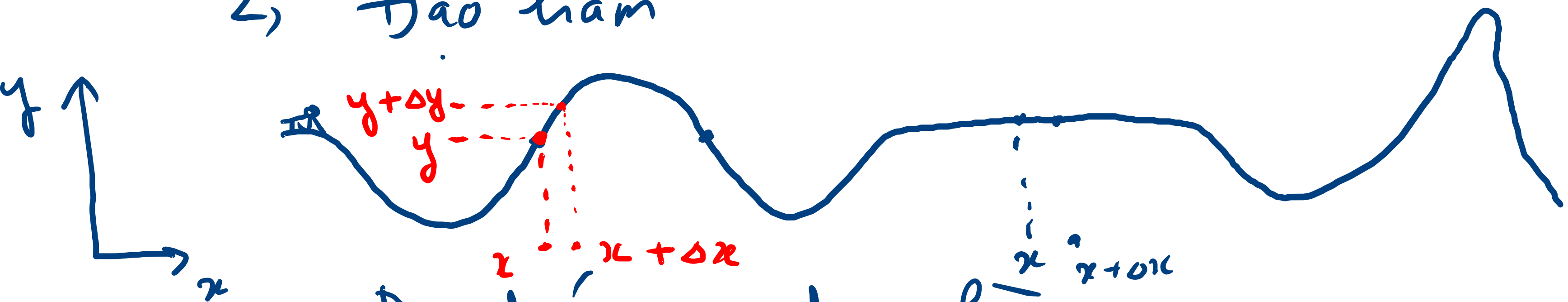
$$\left[\begin{array}{l} y = \sqrt{1 - x^2} \\ y = -\sqrt{1 - x^2} \end{array}\right.$$

$|x| \leq 1$

$X = [-1, 1]$

$Y = [-1, 1]$

2, Đạo hàm



Độ dốc ⇒ đạo hàm

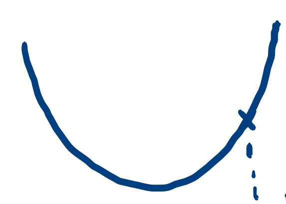
Đạo hàm tại 1 điểm: Sự thay đổi của $y (=f)$ tại lân cận của điểm đó.

Tại lân cận của x: $x \to x+\Delta x$

$f(x) \to f(x+\Delta x)$

$\Delta f \equiv f(x+\Delta x) - f(x)$; Δx : nhỏ

$$\text{Đạo hàm} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x) = f'_x = y'_x$$



Ví dụ: $f = x^2 + 5$

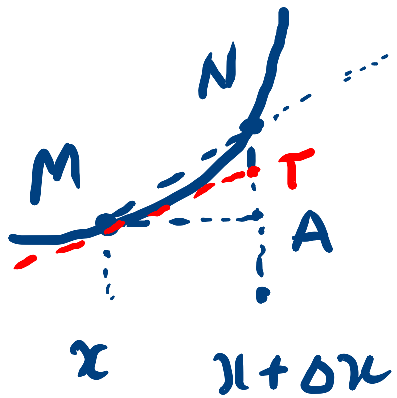
$f'(x) = 2x$ (?)

$\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x) = [(x+\Delta x)^2 + 5] - [x^2 + 5]$

$= 2x\Delta x + \Delta x^2$

$\frac{\Delta f}{\Delta x} = 2x + \Delta x$; $\Delta x \to 0$: $f'(x) = 2x$

Ý nghĩa hình học của đạo hàm



$\Delta x = MA$

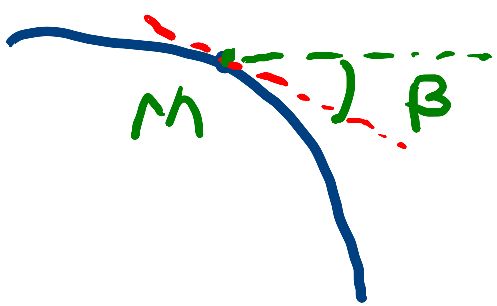
$\Delta f = NA$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{NA}{MA} = tg(\widehat{NMA})$$

$\Delta x \to 0: N \to M\ (MN \to MT)$

$$f'(M) = tg(\widehat{TMA})$$

MT: tiếp tuyến của đồ thị f(x) tại M.



$$f'(M) = -tg(\beta) < 0$$

Đạo hàm trong Vật lý

$\Delta t \to \Delta s \Rightarrow v = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta s}{\Delta t} = s'(t)$: vận tốc tức thời

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = v'(t)$$

Ví dụ: tính đạo hàm

1) $y = 9x^8 + 6x^3 - 4x + 15$

$y'(x) = 72x^7 + 18x^2 - 4$ (đúng)

2) $y = \sqrt{x} + \frac{1}{x}$

$y' = (\sqrt{x})' + \left(\frac{1}{x}\right)'$

$= \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2}$

$(\sqrt{x})' = (x^{1/2})'$

$= \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

$[f(x) + g(x)]' = f' + g'$

$(x^a)' = a x^{a-1}$

3, $y = \sin(x^2) + \cos(x)$ ⋮ $(\cos(x))' = -\sin x$

$y' = 2x\cos(x^2) - \sin(x)$ (100%)

$(\sin x^2)' = 2x\cos(x^2)$

$u = x^2$; $(\sin x^2)'_x = \underbrace{(\sin u)'_u}_{=\cos u} \cdot \overset{2x}{\overset{\parallel}{u'_x}}$

Hàm hợp: $f(x) = f[g(x)]$

$f'_x = f'_g \cdot g'_x$

Một số công thức quan trọng

$$[C \cdot f(x)]' = C f'$$

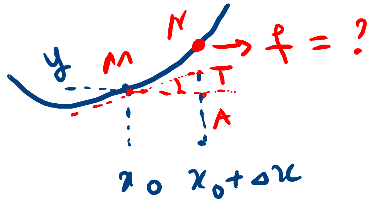
$$[f(x) \cdot g(x)]' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

$$\left[\frac{f}{g}\right]' = \frac{f'g - g' \cdot f}{g^2}$$

$$\left[\frac{1}{g(x)}\right]'_x = \frac{-1}{g^2} \cdot g'_x$$

$$\left(f \cdot \frac{1}{g}\right)' = f' \frac{1}{g} + f\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{f'}{g} - f \cdot \frac{1}{g^2} g' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$$

Vi phân của hàm số



Công thức số gia hàm số:

$$f(x_0+\Delta x) = f(x_0) + \underbrace{f'(x_0)\Delta x}_{AT} + \underbrace{O(\Delta x)}_{\text{Vô cùng bé bậc cao}}$$

Ví dụ: $f(x) = x^2$; $f(x_0) = x_0^2$; $f'(x_0) = 2x_0$

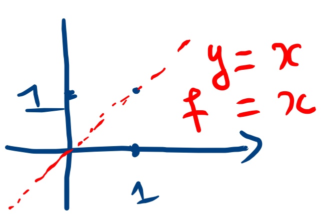
$$f(x_0+\Delta x) = (x_0+\Delta x)^2 = x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2$$
$$= f(x_0) + f'(x_0)\cdot\Delta x + \Delta x^2$$

Nếu Δx rất nhỏ (vd: $\Delta x = 0{,}01 \Rightarrow \Delta x^2 = 0{,}0001$):

$$f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0) + \underbrace{f'(x_0)\Delta x}_{\text{Vi phân của } f \text{ tại } x_0}$$

$$\underbrace{\text{Vi phân của } f}_{df} = f'(x)\cdot\Delta x$$
$$df = f'(x)\cdot\Delta x$$

Trường hợp đặc biệt: $f = x$



$$df = x'\cdot\Delta x = \Delta x$$
$$\boxed{dx = \Delta x} \qquad \Delta x = dx$$

$$\boxed{df = f'(x)\cdot dx} \Rightarrow \boxed{f'(x) = \frac{df}{dx}}$$

Ví dụ: $f(x) = 3x^5$

$$df = f'dx = 15x^4\,dx$$

Đạo hàm bậc cao

$$f' = f'(x) = g(x)$$

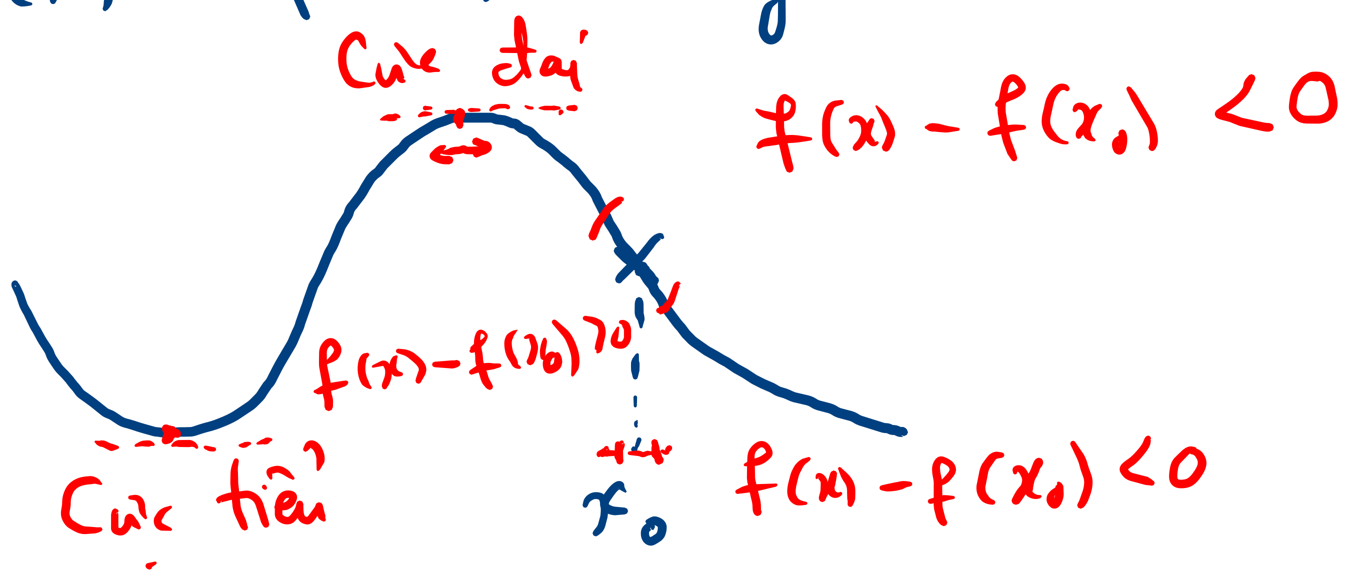
$$f'' = [f'(x)]' = [g(x)]'$$

$$f(x)^{(n)} = [f(x)^{(n-1)}]'$$

Các định lý về giá trị trung bình

1) Khái niệm cực trị

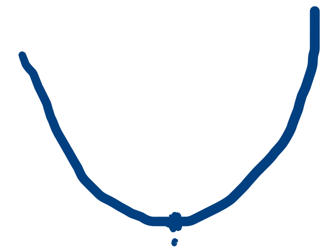
Định nghĩa: hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại điểm x_0 nếu $\exists$ một lân cận tại x_0 sao cho $f(x) - f(x_0)$ không đổi dấu trong lân cận đó.



Định lý: Fermat

Nếu $f(x)$ đạt cực trị tại x_0 thì:

$$f'(x_0) = 0.$$



Áp dụng: $f = x^2 - 2x + 7$

1) $f' = 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1$

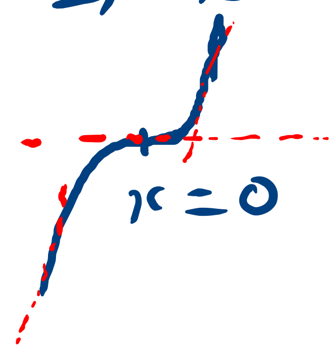
2) $f = x^3$

$f(x) - f(0)$: đảo dấu tại 0

$f' = 3x^2$; $f' = 0 \Rightarrow x = 0$.

$f'' = 6x$

Điểm uốn: $y''(x) = 0$

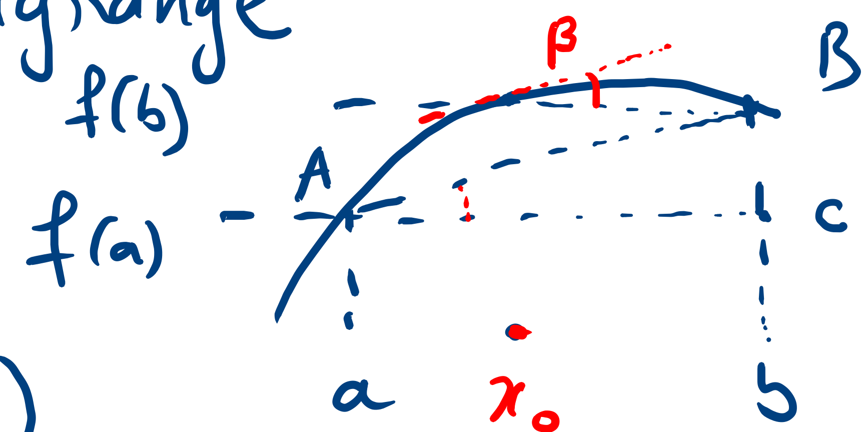


: điểm uốn

Định lý Lagrange

$f(x)$: +, liên tục trên $[a,b]$

+, Có đạo hàm trong (a,b)



Khi đó, có thể tìm được điểm $x_0 \in (a,b)$ thoả mãn:

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

Hình học: $f(b) - f(a) = BC$; $b - a = AC$; $f'(x_0) = \frac{BC}{AC} = tg(\widehat{BAC})$

$$f(b) - f(a) = f'(x_0)(b-a)$$

$$a = x_1 \; ; \; b = x_1 + \Delta x$$

$$f(x_1 + \Delta x) = f(x_1) + f'(\underline{\underline{x_0}}) \cdot \Delta x$$

$$x_0 \in (x_1, x_1 + \Delta x)$$

CT số gia hàm số:

$$f(x_1 + \Delta x) = f(x_1) + f'(\underline{\underline{x_1}}) \Delta x + O(\Delta x)$$

Định lý Cauchy:

Nếu $f(x)$ và $g(x)$ liên tục trên $[a, b]$, và khả vi trên (a, b). Khi đó, $\exists\, x_0 \in (a, b)$ thỏa mãn:

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Với đk: $g(b) - g(a) \neq 0$.

Chọn: $g(x) = x \Rightarrow g(b) - g(a) = b - a$

$$g'(x) = 1 \Rightarrow g'(x_0) = 1$$

$\rightarrow$ ĐL Lagrange!

Định lý: De L'Hospital

Nếu f, g khả vi tại lân cận của x_0,

và nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ thì:

$= \infty$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Áp dụng: Tính $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = ?$

$\lim\limits_{x \to 0} \sin x = \sin 0 = 0$ $\qquad \frac{0}{0}$ = không xác định

$\lim\limits_{x \to 0} x = 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{(\sin x)'}{x'} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = \lim_{x \to 0} \cos x$$

$= \cos 0 = 1$!

Ví dụ: $\lim\limits_{x \to 0} x \ln(x)$; $\ln(x) = \log(x)$

$= ?$ $\qquad\qquad = \log_e(x)$

$\lim\limits_{x \to 0} \underbrace{x \ln(x)}_{0 \cdot \infty} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(x)}{1/x}$

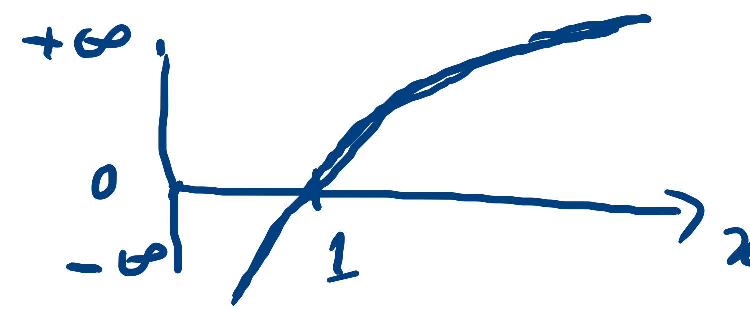
$x \to 0 : \ln(x) \to -\infty$

$x \to \infty : \ln(x) \to +\infty$

$x = 1 : \ln(1) = 0$

$\lim\limits_{x \to 0} \ln(x) = \ln(0) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{0} = \infty$



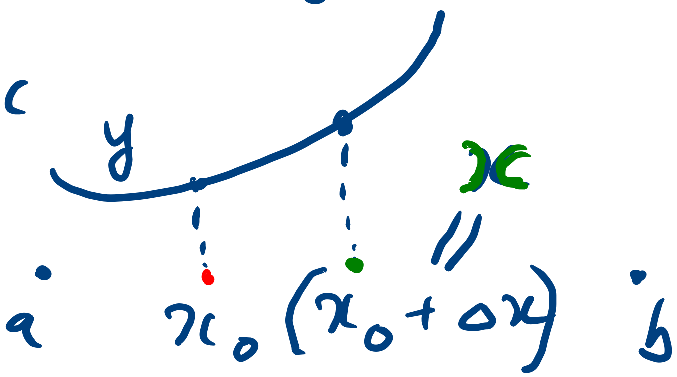
$\infty = \dfrac{1}{0}$

$\boxed{0 \times \infty = \dfrac{0}{0}}$ $= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(x)'}{(1/x)'} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1/x}{-1/x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-x^2}{x}$

$= \lim\limits_{x \to 0} (-x) = 0$

Công thức Taylor

Nếu $f(x)$ khả vi liên tục cho đến cấp $(n+1)$ trong khoảng (a, b)



thì $\forall x_0 \in (a,b)$ ta có:

$$f(x_0+\Delta x) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + \frac{f''(x_0)}{2!}\Delta x^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}\Delta x^3 + \dots + \boxed{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\Delta x^{n+1}}$$

Δx : lớn bất kỳ. Trong đó: $c \in (x_0, x_0+\Delta x)$.

Ví dụ: $f = x^2$; $f' = 2x$; $f'' = 2$; $f''' = 0$, ...

$f^{(n)} = 0$ nếu $n \geq 3$.

$$f(x_0+\Delta x) = f(x_0) + 2x\,\Delta x + \frac{2}{2}\Delta x^2 \quad (v)$$