BÀI TẬP - ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

BỘ MÔN TOÁN – ĐẠI HỌC PHENIKAA

Biên soạn: Phan Quang Sáng

CHƯƠNG 1: MA TRẬN - ĐỊNH THỨC – HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

Bài 1. Tìm các số m,n,k biết :

1) $A_{m\times 3}.B_{n\times 4}=C_{2\times k}$ 2) $A_2.B_{m\times n}=C_{k\times 5}$

ĐS: 1) $m=2,n=3,k=4$ 2) $m=2,n=5,k=2$

Bài 2. Cho 2 ma trận $A=\begin{bmatrix} 6 & 9 \\ -4 & -6 \end{bmatrix}$ và $B=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. Tính : A^2, AB và BA.

ĐS: $A^2=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -3 & 12 \\ 2 & -8 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -6 & -9 \end{bmatrix}$

Bài 3. Cho các ma trận: $A=\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$.

Tính $A+3B^t$, AB, BA, ABC, CB.

ĐS: $A+3B^t=\begin{bmatrix} 4 & 10 & 15 \\ -1 & 14 & 18 \end{bmatrix}$, $AB=\begin{bmatrix} 21 & 29 \\ 12 & 13 \end{bmatrix}$, $BA=\begin{bmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 8 & 23 & 6 \\ 16 & 46 & 12 \end{bmatrix}$, $ABC=\begin{bmatrix} 129 & 118 \\ 63 & 71 \end{bmatrix}$,

không tồn tại CB.

Bài 4. Cho các ma trận $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ và $C=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

1) Hai ma trận nào có thể nhân được với nhau ?
2) Tính AB, ABC, C^n.

ĐS: 1) AB, BA, BC, CA

2) $AB=\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, $ABC=\begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$, $C^n=\begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Bài 5. Thực hiện các phép tính sau:

1) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^3$.

ĐS: 1) $\begin{bmatrix} 14 \\ 10 \end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix} -1 & 27 & -9 \\ 18 & -28 & 0 \\ 0 & 9 & -1 \end{bmatrix}$.

Bài 6. Cho 2 ma trận $A=\begin{bmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ và $B=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$

a) Tìm ma trận X sao cho $A-X=-2B^t$.
b) Tìm ma trận Y sao cho $Y^t-BA=0$.

ĐS: a) $X=\begin{bmatrix}1 & 3 & -2\\ 4 & 8 & -5\end{bmatrix}$ b) $Y=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 3\\ -1 & -10 & -7\\ -2 & -15 & -9\end{bmatrix}$

Bài 7. Cho hai ma trận $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 2 & 1\\ 2 & 3 & 4 & 2\end{bmatrix}; B=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 2 & -1\\ -2 & 3\\ 1 & 5\end{bmatrix}$

Hãy thực hiện phép tính: AB, B^tA^t. Kiểm tra lại đẳng thức $(AB)^t = B^tA^t$ có đúng với các ma trận A, B hay không .

ĐS: $AB=\begin{bmatrix}0 & 10\\ -2 & 21\end{bmatrix}; B^tA^t=\begin{bmatrix}0 & -2\\ 10 & 21\end{bmatrix}.$

Bài 8. Cho các ma trận:

$$A=\begin{bmatrix}3 & 2 & 1\\ 3 & -1 & 2\\ 0 & 2 & 0\\ 3 & -2 & 1\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}3 & -1\\ 1 & 5\\ 1 & 3\\ 2 & 2\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & -2 & -1\end{bmatrix}$$

Tìm phần tử nằm ở hàng 2, cột 3 của ma trận $3A^tBC$.

ĐS: 15

Bài 9. Cho ma trận $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}$

1) Tìm ma trận X thỏa mãn $A^2+2A-3X=0$
2) Tính A^{2017}.

ĐS: 1) $X=\begin{bmatrix}\frac{8}{3} & 2\\ 0 & \frac{8}{3}\end{bmatrix}$; 2) $A^{2017}=\begin{bmatrix}2^{2017} & 2017.2^{2016}\\ 0 & 2^{2017}\end{bmatrix}$

Bài 10. Tính các định thức sau:

a) $\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 0 & 2\\ -1 & 2 & 5\end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix}1 & 2 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 2 & 1\end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix}4 & 0 & 0 & -1\\ 3 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 2 & 2\\ 1 & 2 & -1 & 0\end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix}1 & -1 & 3\\ 1 & 1 & -2\\ -2 & 5 & 4\end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix}1 & 3 & -6\\ 1 & -1 & 2\\ -8 & 5 & 4\end{vmatrix}$ f) $\begin{vmatrix}1 & 2 & 1 & -1\\ 0 & 1 & -1 & 2\\ 2 & 1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 2 & 0\end{vmatrix}$

ĐS: a) -24 b) -7 c) -37 d)35 e)-56 f)-24

Bài 11. Tính các định thức sau:

1) $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x \\ 1 & x & 0 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} 1 & -a & 1 \\ -2 & 1 & -a \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$; 4) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & 5 & 0 \end{vmatrix}$; 5) $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$.

ĐS: 1) $(x+2)(x-1)^2$ 2) 0 3) $3a^2-4a+2$ 4) 40 5) -45

Bài 12. Cho ma trận $A=\begin{bmatrix} -2 & 1 & m \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

1) Với $m=1$ hãy tính $\det A,\ \det(5A^t),\ \det(A^4)$.
2) m là giá trị nào đó mà $\det A=3$. Với những giá trị m đó hãy tính $\det(A^{-1}),\ \det(2A^2)$

ĐS: 1) $\det A=2$, $\det(5A^t)=250$, $\det(A^4)=16$

2) $\det A^{-1}=\dfrac{1}{3}$, $\det(2A^2)=72$

Bài 13. Tính các định thức sau:

a) $\begin{vmatrix} 4 & -2 & m \\ -5 & m & 1 \\ 2 & 4 & -3 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & m & m & 2 \\ 1 & m & 2 & m \\ 1 & 2 & m & m \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

ĐS: a) $-2m^2-32m+10$

b) $3(2m+3)(m-1)(m-2)^2$

Bài 14. Cho hai ma trận A,B vuông cấp 3 có: $\det(2A)=-4,\ \det(B^3)=8$, $\det(A+B)=\dfrac{5}{2}$.

Tính $\det A$, $\det B$, $\det(A^tB^t)$, $\det(5A^4B^{-1})$, $\det(AB+B^2)$.

ĐS: $\det A=-1/2$; $\det B=2$; $\det(A^tB^t)=-1$; $\det(5A^4B^{-1})=125/32$; $\det(AB+B^2)=5$.

Bài 15. Cho ma trận A cấp 3 có $\det(2A)=80$.

a) Chứng minh ma trận A khả nghịch.
b) Tính $\det(A^{-1}),\det(A^t)$ và $\det(A^6)$.

ĐS: a) $\det A=10\neq 0$, nên ma trận A khả nghịch.

b) $\det(A^{-1})=\dfrac{1}{10}$, $\det(A^t)=10$, $\det(A^6)=10^6$

Bài 16. Cho các ma trận:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} -2 & -6 & 5 \\ -1 & -4 & 3 \\ 3 & 9 & -7 \end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ và } D=\begin{bmatrix} -2 & -2 & 3 \\ -1 & -4 & 3 \\ 3 & 3 & -3 \end{bmatrix}.$$

1) Hãy tính các tích AB và BA. Từ đó hãy cho biết ma trận A có khả nghịch không? chỉ ra ma trận nghịch đảo (nếu có) của ma trận A.
2) Ma trận C có phải ma trận nghịch đảo của ma trận B hay không? Vì sao?
3) Tìm ma trận X (nếu có) thỏa mãn: $XA=B$.
4) Hãy tính tích CD. Từ đó hãy cho biết ma trận D có khả nghịch không? chỉ ra ma trận nghịch đảo (nếu có) của ma trận D.

ĐS: 1) $AB=BA=I_3$, $A^{-1}=B$ 2) không 3) $X=B^2=...$ 4) $CD=3I_3$

Bài 17. Tìm ma trận nghịch đảo (nếu có) của các ma trận sau:

a) $A=\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$ b) $B=\begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ c) $C=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

ĐS: a) $A^{-1}=\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{5}{9} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{9} \end{bmatrix}$ b) $B^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -1 \\ \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & -3 \\ -\frac{7}{3} & \frac{5}{3} & 5 \end{bmatrix}$ c) $C^{-1}=\frac{-1}{6}\begin{bmatrix} 2 & 10 & -14 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & -5 \end{bmatrix}$

Bài 18. Cho ma trận $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & x \end{bmatrix}$.

1) Tìm x để ma trận A khả nghịch và thỏa mãn $\det\left(A^{-1}\right)=2$.

2) Tìm ma trận nghịch đảo của A khi $x=2$.

ĐS: 1) $x=\frac{3}{4}$; 2) $A^{-1}=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -8/3 & 5/3 & -4/3 \\ 1/3 & -1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$.

Bài 19. Cho hai ma trận: $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ và $B=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

1) Tìm ma trận nghịch đảo của A.

2) Tìm ma trận X sao cho $XA=B^t$.

3) Tìm ma trận Y sao cho $AYA=B$.

ĐS: 1) $A^{-1}=\begin{bmatrix} 1/5 & 3/5 \\ 1/5 & -2/5 \end{bmatrix}$; 2) $X=\begin{bmatrix} 3/5 & -1/5 \\ 1/5 & -7/5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$; 3) Không tồn tại ma trận Y.

Bài 20. Cho ma trận $A=\begin{bmatrix} m-1 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -3 & 5 & -2 \end{bmatrix}$,

a) Tìm m để ma trận A khả nghịch.

b) Với $m=3$, tìm ma trận nghịch đảo nếu có của ma trận A.

ĐS: a) $\det A=-8m+21$. A khả nghịch $\Leftrightarrow m\neq 21/8$

b) $A^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{8}{3} & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{7}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \end{bmatrix}$

Bài 21. Cho ma trận $A=\begin{bmatrix} m & 1 & 2 \\ 1 & m & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

a) Tìm m để ma trận A khả nghịch.

b) Khi A khả nghịch, tính $\det(A^{-1})$.

ĐS: a) $\det A = m^2-6m+5.$ $\det A \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 1, \\ m \neq 5. \end{cases}$ b) $\det\left(A^{-1}\right)=\dfrac{1}{m^2-6m+5}$

Bài 22(+). Cho ma trận $A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & m & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

1) Tìm m để ma trận A khả nghịch.
2) Giả sử m là những giá trị mà ma trận A khả nghịch. Chứng minh rằng với những giá trị m đó thì A^2, A^3 cũng khả nghịch.
3) Với $m=-1$, hãy tìm ma trận nghịch đảo của A.

ĐS: 1) $m \neq -1/2$ 3) $A^{-1}=\begin{bmatrix} 4 & -5 & -3 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Bài 23(+). Cho ma trận $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & -2 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & m & 2 \end{bmatrix}$.

a) Tìm điều kiện của m để ma trận A khả nghịch.
b) Khi A khả nghịch, hãy tìm phần tử nằm ở hàng 4, cột 3 của ma trận nghịch đảo của A.

ĐS: a) $m \neq 2$ b) $\dfrac{m+5}{m-2}$

Bài 24(+). Cho ma trận $A=\begin{bmatrix} 1+m & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+m & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+m \end{bmatrix}$

1) Tìm điều kiện của m để A khả nghịch.
2) Khi A khả nghịch, giả sử ma trận nghịch đảo của A là $A^{-1}=\left(c_{ij}\right)_{4\times 4}$. Tìm m để $c_{23}=\dfrac{1}{4}$ và $\det\left(A^{-1}\right)=-\dfrac{1}{16}$

ĐS: 1) $m \neq 0$ và $m \neq -4$ 2) $m=-2$

Bài 25. Cho hai ma trận $A=\begin{bmatrix}1&0&0&2\\1&-2&2&2\\1&3&3&-1\\3&0&1&2\end{bmatrix}$ và $B=\begin{bmatrix}1&0&0&-2\\1&1&-2&-2\\1&1&1&1\\3&1&1&1\end{bmatrix}$.

1) Tìm phần tử nằm ở vị trí hàng 3, cột 2 của ma trận A^2.
2) Tính $A+B$.
3) Chứng minh A khả nghịch. Tìm phần tử nằm ở vị trí hàng 1, cột 3 của ma trận A^{-1}.
4) Tính $\det(A+B)$ và $\det(A^2+BA)$.

ĐS: 1) Phần tử cần tìm là tích của "hàng 3 ma trận A" với "cột 2 ma trận A";

2) $A+B=\begin{bmatrix}2&0&0&0\\2&-1&0&0\\2&4&4&0\\6&1&2&3\end{bmatrix}$; 4) $\det(A+B)=-24$; $\det(A^2+BA)=-1008$.

Bài 26. Tìm hạng của các ma trận sau:

$$A=\begin{bmatrix}2&7&3&1&6\\3&5&2&2&4\\9&4&1&7&2\end{bmatrix};\quad B=\begin{bmatrix}3&4&1&2\\1&4&7&2\\1&10&17&4\\4&1&3&3\end{bmatrix};\quad C=\begin{bmatrix}0&1&0&1&0\\1&3&1&3&1\\3&5&3&5&3\\7&9&7&9&7\end{bmatrix}.$$

ĐS: $r(A)=2,\ r(B)=3,\ r(C)=2$

Bài 27. Tìm hạng của các ma trận sau :

$$A=\begin{bmatrix}1&-3&4&2\\2&1&1&4\\-1&-2&1&-2\end{bmatrix};\quad B=\begin{bmatrix}1&0&-2\\-4&-1&5\\1&3&7\\5&0&-11\end{bmatrix};\quad C=\begin{bmatrix}3&21&0&9&0\\0&7&-1&-2&-1\\0&0&0&6&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

ĐS: $r(A)=2;\ r(B)=3;\ r(C)=3$.

Bài 28: Xác định hạng của các ma trận sau tùy theo tham số a :

1) $A=\begin{bmatrix}1&1&-3\\2&1&a\\1&a&3\end{bmatrix}$ 2) $B=\begin{bmatrix}3&a&1&2\\1&4&7&2\\1&10&17&4\\4&1&3&3\end{bmatrix}$

ĐS: 1) Với $a=0;-5\to r(A)=2; a\neq 0;-5\to r(A)=3.$
2) Với $a=0\to r(B)=2; a\neq 0\to r(B)=3.$

Bài 29. Tìm m để ma trận sau có hạng bằng 2:

$$A=\begin{bmatrix}3&1&4&1\\m&2&3&1\\3&-1&1&0\\3&3&7&2\end{bmatrix}$$

ĐS : $m=0$

Bài 30. Cho $A=\begin{bmatrix}-3 & -3 & 3\\ 0 & 1 & -1\\ 6 & 5 & -8\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\ 3 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$ và I là ma trận đơn vị cấp 3.

1) Tìm ma trận X sao cho $2A-3X=5I$.

2) Tính $A+B^2$ và $B.A^t$.

Từ đó hãy cho biết ma trận B có khả nghịch không ? nếu có, hãy suy ra ma trận nghịch đảo của ma trận B.

3) Tìm $x\in\mathbb{R}$ sao cho $\det(B-xI)=0$. Tìm ma trận Y thỏa mãn: $(B-3I)Y=0$.

<u>ĐS:</u> 1) $X=\begin{bmatrix}-11/3 & -2 & 2\\ 0 & -1 & -2/3\\ 4 & 10/3 & -7\end{bmatrix}$; 2) $A+B^2=\begin{bmatrix}4 & -3 & 9\\ -3 & 12 & 4\\ 9 & 4 & -6\end{bmatrix}$; $B.A^t=-3I$.

3) $x=3\vee x=\dfrac{-3\pm\sqrt{13}}{2}$; $Y=\begin{bmatrix}3z & 2z & z\end{bmatrix}^t, z\in\mathbb{R}$.

Bài 31. Cho $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & -1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 3 & 2\end{bmatrix}$ và $B=\begin{bmatrix}5\\ 7\\ 6\end{bmatrix}$. Tìm các ma trận X sao cho $AX=B$.

<u>ĐS:</u> $X=\begin{bmatrix}2z+1\\ 0.5z-4\\ z\\ 3-1.5z\end{bmatrix}, z\in\mathbb{R}$.

Bài 32. Giải các phương trình sau:

a) $\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}X=\begin{bmatrix}3 & 5\\ 5 & 9\end{bmatrix}$ b) $X\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 3 & -2 & 4\\ 2 & 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 3 & 0\\ 3 & 1 & 3\\ 3 & 4 & 4\end{bmatrix}$

<u>ĐS:</u> a) $X=\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 2 & 3\end{bmatrix}$ b) $X=\begin{bmatrix}20 & -15 & 13\\ 17 & -12 & 11\\ 48 & -35 & 30\end{bmatrix}$

Bài 33. Giải các hệ phương trình tuyến tính sau :

1) $\begin{cases}x+y-2z-4t=0\\ 3x-y+2z-8t=0\\ x+4y-z-7t=0\end{cases}$; 2) $\begin{cases}2x+2y-z+t=2\\ 4x+3y-z+2t=3\\ 8x+5y-3z+4t=6\\ 3x+3y-2z+2t=3\end{cases}$

3) $\begin{cases}3x+2y+3z+4t=1\\ x+y+z=-2\\ 6x+5y+6z+4t=-5\\ 7x+5y+7z+8t=0\end{cases}$; 4) $\begin{cases}x-4y+3z=1\\ 5x+5y-z=2\\ 7x+2y+3z=10\\ -2x+3y+z=5\end{cases}$.

<u>ĐS:</u> 1) $\{x=3t;\ y=t;\ z=0;\ t\in\mathbb{R}\}$ 2) $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};-\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$

3) $\{x=-4t-z+5;\ y=4t-7;\ z,t\in\mathbb{R}\}$ 4) VN.

Bài 34. Tìm m để hệ phương trình sau trở thành hệ Cramer? Khi đó hãy tính thành phần x trong công thức nghiệm:

$$\begin{cases} x-2y+z=2 \\ 2my-2z=1 \\ -x+y-3z=3 \end{cases}$$

ĐS: $m\neq -1/2$

Bài 35. Với giá trị nào của m thì các hệ phương trình sau có nghiệm:

a) $\begin{cases} x-2y+z-t=-1 \\ 3x+y-2z+t=2 \\ x+5y-4z+mt=5 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x+y+10z-6t=3 \\ x+2y+mz-t=1 \\ 2x+5y-z+mt=2 \end{cases}$.

ĐS: a) $m\neq 4$ b) $m\neq 3$

Bài 36. Với giá trị nào của m thì các hệ phương trình sau có nghiệm:

a) $\begin{cases} x-2y+z-t=-1 \\ 3x+y-2z+t=2 \\ x+5y-4z+mt=5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y+10z-6t=3 \\ x+2y+mz-t=1 \\ 2x+5y-z+mt=2 \end{cases}$

ĐS: a) $m\neq 4$ b) $m\neq 3$

Bài 37. Với giá trị nào của m thì hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất? Có vô số nghiệm?

$$\begin{cases} x+3y-2t=0 \\ -y+2z-t=0 \\ 2x-z+t=0 \\ 4x+y+mz=0 \end{cases}$$

ĐS: $\det(A)=11m+5$ với A là ma trận hệ số của hệ (Hệ vuông thuần nhất có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $\det(A)\neq 0$, có vô số nghiệm khi và chỉ khi $\det(A)=0$)

Bài 38. Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+3y-z=4 \\ 3x+3y+(m+4)z=m^2+2 \end{cases}$$

a) Hệ phương trình có nghiệm duy nhất?
b) Giải hệ phương trình với $m=-1$.

ĐS: a) $m\neq -1$ b) $\begin{cases} x=-1-4z \\ y=2+3z \\ z\in\mathbb{R} \end{cases}$

Bài 39. Tìm tất cả các ma trận X (nếu có) thỏa mãn:

1) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} X = X \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$; 2) $X \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ 3) $X \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{bmatrix}$

4) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ 5) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{bmatrix}$

<u>ĐS</u>: 1) $X = \begin{bmatrix} x & y \\ y & x+y \end{bmatrix}, x, y \in \mathbb{R}$; 2) $X = \begin{bmatrix} -3 & 7 & 2 \\ 1 & -1.5 & 0.5 \end{bmatrix}$;

3) $X = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$; 4) $X = \begin{bmatrix} 7/4 \\ 5/4 \\ -7/4 \end{bmatrix}$; 5) $X = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$

BÀI TẬP THAM KHẢO – ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

CHƯƠNG 2: KHÔNG GIAN VÉC TƠ VÀ ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

Bài 1. Tập hợp nào dưới đây là không gian véctơ con của các không gian tương ứng? Nêu lý do?

1) $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,|\, 2x+3z=1\}$ trong $\mathbb{R}^3$.
2) $Q=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,|\, xy-2z=0\}$ trong $\mathbb{R}^3$.
3) $F=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \,|\, x+2t-3=0, y-t-z=0\}$ trong $\mathbb{R}^4$.
4) $J=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,|\, 2x+3z=0\}$ trong $\mathbb{R}^3$.
5) $H=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,|\, x-2y\geq 0\}$.

ĐS: 4)

Bài 2. Cho các vec tơ $u_1=(3,4,-1,0), u_2=(4,2,0,1), u_3=(1,1,2,0)$.

1) Hãy tìm vec tơ $v=u_1-2u_2+3u_3$
2) Tìm vec tơ u thoả mãn hệ thức: $3(u_1+2u_2-u_3+u)=u-u_1+u_2$

ĐS: a) $v=(-2,3,5,-2)$ b) $u=\left(\frac{-5}{2},\frac{9}{2},1,\frac{-5}{2}\right)$

Bài 3. Tìm $u+v,\ u-v,\ 2u-3v,\ |3u|,\ |v-u|$ với u,v là các vec tơ sau đây.

1) $u=(5,-12),\ \ v=(-3,-6)$.
2) $u=(4,0,3),\ \ v=(-2,1,5)$.
3) $u=4i+j,\ \ v=i-2j$ biết $i=(1,0),\ \ j=(0,1)$ là các vec tơ đơn vị trong $\mathbb{R}^2$.
4) $u=i+2j-3k,\ \ v=-2i-j+5k$ biết $i=(1,0,0),\ \ j=(0,1,0),\ \ k=(0,0,1)$ là các vec tơ đơn vị trong $\mathbb{R}^3$.
5) (+) $u=2i-4j+4k,\ \ v=2j-k$ biết $i=(1,0,0),\ \ j=(0,1,0),\ \ k=(0,0,1)$ là các vec tơ đơn vị trong $\mathbb{R}^3$.

ĐS:

a) $u+v=(2,-18),\ u-v=(8,-6),\ 2u-3v=(19,-6),\ |3u|=39,\ |\mathrm{v}-u|=10.$

b) $u+v=(2,1,8),\ u-v=(6,-1,-2),\ 2u-3v=(14,-3,-9),$
$|3u|=15,\ |\mathrm{v}-u|=\sqrt{41}.$

c) $u+v=(5,-1),\ u-v=(3,3),\ 2u-3v=(5,8),\ |3u|=3\sqrt{17},\ |\mathrm{v}-u|=3\sqrt{2}.$

d) $u+v=(-1,1,2),\ u-v=(3,3,-8),\ 2u-3v=(8,7,-21),$
$u+v=(-1,1,2),\ u-v=|3u|=3\sqrt{14},\ |\mathrm{v}-u|=\sqrt{82}.$

e) $u+v=(2,-2,3),\ u-v=(2,-6,5),\ 2u-3v=(4,-14,11),$
$|3u|=18,\ |\mathrm{v}-u|=\sqrt{65}.$

Bài 4. Trong $\mathbb{R}^3$, véctơ u sau đây có phải là tổ hợp tuyến tính của các véctơ còn lại không? Tại sao? Với $u_1=(1,1,1), u_2=(0,-1,1), u_3=(-2,-1,3), u=(2,-1,5)$.

ĐS: Có vì $u=2u_1+3u_2$.

Bài 5. Tìm điều kiện của m để véctơ u trong $\mathbb{R}^3$ sau đây là tổ hợp tuyến tính của các véctơ còn lại với $u_1=(0,1,-1), u_2=(-2,1,3), u_3=(m,2,-1), u=(1,m,2)$.

Bài 6(+). Hãy xác định các mệnh đề sau là đúng hay sai.

1) Nếu S là một hệ vec tơ phụ thuộc tuyến tính thì mỗi vec tơ trong hệ S biểu diễn được tuyến tính thông qua các vec tơ còn lại của hệ.
2) Mọi hệ vec tơ chứa vec tơ 0 là phụ thuộc tuyến tính.
3) Hệ rỗng là hệ phụ thuộc tuyến tính.
4) Các hệ con của hệ phụ thuộc tuyến tính là phụ thuộc tuyến tính.
5) Các hệ con của hệ độc lập tuyến tính là hệ độc lập tuyến tính.

ĐS: a) S b) Đ c)S d)S e)Đ

Bài 7. Họ các véctơ sau độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính trong không gian tương ứng?

1) $V=\{v_1=(-2,4), v_2=(1,-2)\}$ trong $\mathbb{R}^2$.
2) $V=\{v_1=(2,-1,1,0), v_2=(4,-2,2,1)\}$ trong $\mathbb{R}^4$
3) $U=\{u_1=(1,-2,0,4), u_2=(3,-2,1,1), u_3=(0,0,0,0)\}$ trong $\mathbb{R}^4$.
4) $U=\{u_1=(1,-2,0), u_2=(3,-2,1), u_3=(2,0,1)\}$ trong $\mathbb{R}^3$.
5) $U=\{u_1=(-1,2,4), u_2=(3,-2,2), u_3=(1,0,3), u_4=(1,1,1)\}$ trong $\mathbb{R}^3$.
6) $S=\{s_1=(0,-1,2,4), s_2=(-1,2,4,0), s_3=(2,4,0,-1), s_4=(4,0,-1,2)\}$ trong $\mathbb{R}^4$.

ĐS: 1) PTTT 2) ĐLTT 3) PTTT 4)PTTT 5) PTTT 6) ĐLTT

Bài 8. Họ vec tơ sau là độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính:

1) $V=\{v_1=(1,0,-2,5), v_2=(2,1,0,-1), v_3=(1,1,2,1)\}$ trong không gian $\mathbb{R}^4$.
2) $S=\{v_1=(1,0,0),\ v_2=(1,-1,0),\ v_3=(1,1,2),\ v_4=(2,3,m)\}$.

ĐS: a) ĐLTT b) PTTT

Bài 9. Với giá trị nào của m thì họ vec tơ sau là họ vec tơ độc lập tuyến tính? Phụ thuộc tuyến tính?

1) $U=\{u_1=(1,2,3), u_2=(m,2,0), u_3=(m-1,1,4)\}$ trong $\mathbb{R}^3$.
2) (+) $V=\{v_1=(2,1,2m), v_2=(2,1,-1), v_3=(m+1,2,-3)\}$ trong $\mathbb{R}^3$.
3) (+) $S=\{s_1=(2;1;1;m); s_2=(2;1;-1,m); s_3=(10;5;-1;5m)\}$ trong $\mathbb{R}^4$.

ĐS: a) $m=\dfrac{14}{11}$ thì U pttt b) $\left[\begin{array}{l} m=3 \\ m=\dfrac{-1}{2} \end{array}\right.$ thì V pttt c) S pttt với mọi m

Bài 10. Với giá trị nào của m thì họ véctơ sau đây độc lập tuyến tính? Phụ thuộc tuyến tính?

1) $V=\{v_1=(2,1,1,m), v_2=(2,1,-1,m), v_3=(10,5,-1,5m)\}$ trong $\mathbb{R}^4$.
2) $U=\{u_1=(2,1,2m), u_2=(2,1,-1), u_3=(1+m,2,-3)\}$ trong $\mathbb{R}^3$.
3) $W=\{w_1=(m,2,1), w_2=(1,-2,m), w_3=(2,2,3)\}$ trong $\mathbb{R}^3$.

ĐS:

1) PTTT khi $m=-1/2$; ĐLTT khi $m\neq -1/2$
2) PTTT khi $m=-1/2$ hoặc $m=3$; ĐLTT khi $m\neq -1/2$ và $m\neq 3$
3) PTTT khi $m=-1$ hoặc $m=0$; ĐLTT khi $m\neq -1$ và $m\neq 0$

Bài 11: Chứng minh $U=\{u=(1,-1), v=(0,3)\}$ là một hệ sinh của không gian véctơ $\mathbb{R}^2$. Hãy tìm biểu thị tuyến tính của mỗi véctơ $w=(4,2),\ t=(-2,5),\ s=-3w+t$ qua hệ véctơ U.

ĐS: $w=4u+2v,\ t=-2u+v,\ s=-14u-5v$

Bài 12.

1) Trong không gian véctơ $\mathbb{R}^3$ cho họ véctơ:

$$V = \{v_1 = (-1,2,4), v_2 = (3,-2,1), v_3 = (2,-1,5)\}$$

a) Chứng minh rằng họ V là cơ sở của không gian $\mathbb{R}^3$.

b) Các họ véctơ $I = \{v_1, v_2\}$ và $J = \{v_1, v_3\}$ độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính? Vì sao?

c) Hãy tìm một biểu thị tuyến tính của véctơ v_1 qua các véctơ còn lại của họ véctơ V.

2) Chứng minh họ véctơ $U = \{u_1 = (1,3), u_2 = (2,-2)\}$ là một cơ sở của không gian véctơ $\mathbb{R}^2$.

3) Họ véctơ sau đây có phải là một cơ sở của không gian véctơ $\mathbb{R}^3$ không?

$$W = \{w_1 = (-2,3,4), w_2 = (3,-2,5), w_3 = (5,0,23)\}$$

<u>ĐS</u>: 1b) họ véctơ I, J ĐLTT 1c) không có 3) không

Bài 13. Trong không gian véctơ $\mathbb{R}^3$ cho tập hợp: $Q = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2z = 0, x - y - z = 0\}$.

1) Chứng minh rằng Q là không gian véctơ con của $\mathbb{R}^3$.

2) Tìm một cơ sở và tính số chiều của không gian Q.

3) Chứng minh véctơ $u = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \in Q$ và tìm tọa độ của u trong cơ sở tìm được ở trên.

<u>ĐS</u>: 2) Một cơ sở $U = \{v = (2,1,1)\}$ $\dim V = 1$ 3) $u_U = \left(\frac{1}{2}\right)$

Bài 14. Trong không gian véctơ $\mathbb{R}^3$ cho tập hợp $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 3y + z = 0\}$

1) Véctơ $u = (1,2,3)$ có thuộc W không? Chỉ ra một véctơ (khác véc tơ không) thuộc W.

2) Chứng minh rằng W là một không gian véctơ con của $\mathbb{R}^3$.

3) Tìm một cơ sở, số chiều của không gian W.

4) Chứng minh véctơ $u = (1,2,5) \in W$ và tìm tọa độ của u trong cơ sở của W tìm được ở trên.

<u>ĐS</u>:

1) Không. VD chọn $u = (1,1,2) \in W$

2) Cách 1: Chứng minh W đóng kín với phép toán cộng và nhân với vô hướng.
   Cách 2: Viết $W = span\{u_1, u_2\}$

3) Một cơ sở $S = \{u_1 = (3,1,0), u_2 = (-1,0,1)\}$; $\dim W = 2$

4) $u_S = (2,5)$

Bài 15. Trong không gian véctơ $\mathbb{R}^4$ cho tập hợp $S = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2t = 0, y - z - t = 0\}$

1) Véctơ $u = (1,2,5,4)$ có thuộc S không?

2) Chứng minh rằng S là một không gian véc tơ con của $\mathbb{R}^4$.

3) Tìm một cơ sở và tính số chiều của không gian S.

<u>ĐS</u>: 1) Không 3) Một cơ sở $U = \{u_1 = (-2,1,1,0), u_2 = (0,1,0,1)\}$, $\dim S = 2$.

Bài 16. Trong không gian véctơ $\mathbb{R}^4$ cho tập hợp $H = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid y + 2t = 0\}$.

1) Chứng minh H là một không gian véctơ con của $\mathbb{R}^4$

2) Tìm một cơ sở, số chiều của không gian H

3) Chứng minh véctơ $u=(-4;2;-1;1)$ thuộc H và tìm tọa độ của u trong cơ sở tìm được ở trên.

ĐS: 2) Một cơ sở $U=\{u_1=(1,0,0,0),u_2=(0,-2,1,0),u_3=(0,0,0,1)\}$; $\dim H=3$;

3) $u_S=(-4,-2,1)$

Bài 17. Tìm hạng của họ các véctơ sau:

1) $U=\{u_1=(-2,1,1),u_2=(2,-3,1),u_3=(-1,0,1),u_4=(1,-3,2)\}$ trong không gian véctơ $\mathbb{R}^3$.

2) $V=\{v_1=(-2,1,1),v_2=(2,-3,1),v_3=(4,0,1)\}$ trong không gian véctơ $\mathbb{R}^3$.

3) $W=\{w_1=(2,2,0,0,-1),w_2=(3,-3,1,5,2),w_3=(1,-1,-1,0,0)\}$ trong KGVT $\mathbb{R}^5$.

ĐS: 1) 2; 2) 3; 3) 3.

Bài 18. Trong không gian véctơ $\mathbb{R}^4$ hãy tìm hạng của họ các véctơ sau tùy theo m :

$$U=\{u_1=(2,1,1,m),u_2=(1,3,-1,2),u_3=(-3,1,-3m,0)\}$$

ĐS: $m=1$ thì hạng của họ véctơ là 2; $m\neq 1$ thì hạng của họ véctơ là 3.

Bài 19. Trong không gian véctơ $\mathbb{R}^2$ cho hai tập hợp

$$U=\{u_1=(1,-1),u_2=(2,1)\} \text{ và } V=\{v_1=(3,1),v_2=(1,-1)\}$$

1) Chứng minh rằng U và V là hai cơ sở của $\mathbb{R}^2$.
2) Tìm ma trận chuyển cơ sở từ U sang V.
3) Tìm ma trận chuyển cơ sở từ V sang U.
4) Tìm tọa độ của véctơ $x=(3,-1)$ trong cơ sở U.
5) Tìm véctơ y trong $\mathbb{R}^2$ có tọa độ trong cơ sở U là $y_U=(4,-5)$.
6) Biết tọa độ của véctơ z trong cơ sở U là $z_U=(7,2)$, tìm tọa độ của z trong cơ sở V.

ĐS: 2) $A=\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 1 \\ \frac{4}{3} & 0 \end{bmatrix}$; 3) $B=\begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{4} \\ 1 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$; 4) $x_U=\left(\frac{5}{3},\frac{2}{3}\right)$; 5) $y=(-6,-9)$; 6) $z_V=\left(\frac{3}{2},\frac{13}{2}\right)$

Bài 20. Trong không gian véctơ $\mathbb{R}^3$ cho hai tập hợp $U=\{u_1=(1,1,-1),u_2=(1,1,0),u_3=(2,1,-1)\}$ và $V=\{v_1=(1,1,0),v_2=(1,0,-1),v_3=(1,1,1)\}$.

1) Chứng minh U và V là hai cơ sở của $\mathbb{R}^3$.
2) Tìm ma trận chuyển cơ sở từ U sang V.
3) Tìm ma trận chuyển cơ sở từ V sang U.
4) Tìm tọa độ của véctơ $x=(2,3,-1)$ trong cơ sở U.
5) Tìm véctơ y trong $\mathbb{R}^3$ có tọa độ trong cơ sở U là $y_U=(1,1,-1)$.
6) Biết tọa độ của véctơ z trong cơ sở V là $z_V=(1,0,2)$, tìm tọa độ của z trong cơ sở U.

ĐS: 2) $A=\begin{bmatrix}0 & 0 & -1\\ 1 & -1 & 2\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$; 3) $B=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 0\end{bmatrix}$; 4) $x_U=(2,2,-1)$;

5) $y=(0,1,0)$; 6) $z_U=(0,2,-1)$

Bài 21. Trong các ánh xạ sau, ánh xạ nào không phải ánh xạ tuyến tính ?

1) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2,\ x\in\mathbb{R},\ f(x)=(x,3x)$

2) $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\ (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ g(x,y)=(x+2y,3x-y+1)$

3) $h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\ (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ h(x,y)=(xy,x-y)$

4) $k:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3,\ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ k(x,y,z)=(x+2y,x-y+z,x-2z)$

5) $l:\mathbb{R}^2\to Mat_{2\times 2}(\mathbb{R}),\ (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ l(x,y)=\begin{bmatrix}2x-y & x+y\\ -x+3y & 3x-y\end{bmatrix}$

ĐS: g,h

Bài 22. Cho ánh xạ $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ xác định bởi: $\forall u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ f(u)=(x+y,y-z)$

1) Chứng minh rằng f là ánh xạ tuyến tính.

2) Tìm $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ sao cho và $f(u)=0$.

3) Tìm ma trận của f trong cơ sở $U=\{u_1=(1,1,0),\ u_2=(1,0,1),\ u_3=(1,1,1)\}$ của $\mathbb{R}^3$ và cơ sở $V=\{v_1=(1,1),\ v_2=(1,2)\}$ của $\mathbb{R}^2$.

ĐS: $\{u=(-t,t,t)\mid t\in\mathbb{R}\}$; $A=\begin{bmatrix}3 & 3 & 4\\ -1 & -2 & -2\end{bmatrix}$.

Bài 23. Cho ánh xạ tuyến tính $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ xác định bởi:

$$\forall u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ f(u)=(x+2y,3y+z,3x-2z)$$

1) Chứng minh rằng f là ánh xạ tuyến tính.

2) Tìm ma trận A của f trong cơ sở $U=\{u_1=(0,1,1),u_2=(1,0,1),u_3=(1,1,1)\}$ của $\mathbb{R}^3$.

ĐS: 2) $A=\begin{bmatrix}-4 & 0 & -2\\ -6 & 0 & -3\\ 8 & 1 & 6\end{bmatrix}$.

Bài 24. Giả sử $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ là một ánh xạ tuyến tính sao cho $f(1,1)=(3,4)$ và $f(2,3)=(5,2)$

1) Tìm $f(3,-4)$

2) Xác định $f(x,y)$ với mọi $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

ĐS: 1) $f(3,-4)=(16,54)$; 2) $f(x,y)=(4x-y,10x-6y)$.

Bài 25. Giả sử $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ là một ánh xạ tuyến tính sao cho

$$f(1,-1)=(-1,1,2),\ f(-2,3)=(2,3,-4).$$

1) Chứng minh rằng $U=\{u_1=(1,-1),\ u_2=(-2,3)\}$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^2$

2) Tìm $f(3,-5)$

3) Tổng quát, tìm $f(x,y)$ với mọi $u=(x,y)\in\mathbb{R}^2$

ĐS: 2) $f(3,-5)=(-3,-7,2)$;

3) Biểu diễn $u=(x,y)=(3x+2y)u_1+(x+y)u_2$, từ đó $f(x,y)=(-x,6x+5y,2x)$.

Bài 26. Tính tích vô hướng $\langle u,v\rangle$ của các cặp vec tơ sau

1) $u=(2,-1,3), v=(-1,1,1)$
2) $u=(1,-1,9,7,4), v=(2,1,0,-1,0)$

ĐS: a) $\langle u,v\rangle=0$, b) $\langle u,v\rangle=-6$,

CHƯƠNG 3. BÀI TOÁN GIÁ TRỊ RIÊNG VÀ CHÉO HÓA MA TRẬN

Bài 1. Cho ma trận $A=\begin{bmatrix}1 & 6\\ 5 & 2\end{bmatrix}$ và $u=\begin{bmatrix}6\\ -5\end{bmatrix}$, $v=\begin{bmatrix}3\\ -2\end{bmatrix}$. Hỏi u,v có là những véctơ riêng của ma trận A không ? vì sao ?

Bài 2. Cho ma trận

$$A=\begin{bmatrix}3 & -1\\ 2 & 0\end{bmatrix}$$

1) Tìm các giá trị riêng và các véctơ riêng tương ứng của ma trận A.
2) Ma trận A có chéo hóa được không ? nếu có, hãy viết ma trận P làm chéo hóa A và ma trận chéo kết quả.

Bài 3. Cho ma trận $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 4\\ 2 & 0 & -4\\ -1 & 1 & 5\end{bmatrix}$.

1) Tìm các giá trị riêng của ma trận A. Ma trận A có chéo hóa được không? Vì sao?
2) Tìm các véc tơ riêng của A.
3) Xác định ma trận P làm chéo hóa ma trận A và đưa ra ma trận chéo $P^{-1}AP$.

Bài 4. Cho các ma trận

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

1) Các ma trận trên có chéo hóa được không ? Vì sao?
2) Tìm các giá trị riêng và các véctơ riêng của các ma trận A, B.
3) Hãy tìm các ma trận làm chéo hóa các ma trận trên.
4) Tìm ma trận trực giao làm chéo hóa A và B.

Bài 5. Ma trận sau có chéo hóa được không ? Nếu được hãy đưa ma trận đó về dạng chéo:

$$A=\begin{bmatrix}2 & 4 & 3\\ -4 & -6 & -3\\ 3 & 3 & 1\end{bmatrix}.$$

Bài 6. Cho ma trận đối xứng

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{bmatrix}.$$

1) Cho các véc tơ $u=\begin{bmatrix}2 & 4 & 5\end{bmatrix}^t$, $v=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\end{bmatrix}^t$, hãy kiểm tra rằng $(Au,v)=(u,Av)$.
2) Chứng minh rằng $(Au,v)=(u,Av)$ với mọi véc tơ $u,v\in\mathbb{R}^3$.
3) Hãy chéo hóa ma trận A.
4) Tìm ma trận trực giao P sao cho $P^T AP$ có dạng chéo.

Bài 7. Cho ma trận đối xứng

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

1) Cho các véc tơ $u = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}^t$, $v = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}^t$, hãy kiểm tra rằng $(Au, v) = (u, Av)$.
2) Chứng minh rằng $(Au, v) = (u, Av)$ với mọi véc tơ $u, v \in \mathbb{R}^3$.
3) Hãy chéo hóa ma trận A.
4) Tìm ma trận trực giao P sao cho $P^T AP$ có dạng chéo.