NGUYỄN ĐÌNH TRÍ (chủ biên)
TẠ VĂN ĐĨNH - NGUYỄN HỒ QUỲNH

TOÁN HỌC CAO CẤP

TẬP BA

PHÉP TÍNH GIẢI TÍCH NHIỀU BIẾN SỐ

(Tái bản lần thứ chín)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

Chương I

HÀM SỐ NHIỀU BIẾN SỐ

1.1. KHÁI NIỆM MỞ ĐẦU

1.1.1. Định nghĩa hàm số nhiều biến số

Xét không gian Euclide n chiều $\mathbf{R}^n$ $(n > 1)$. Một phần tử $x \in \mathbf{R}^n$ là một bộ n số thực $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. D là một tập hợp trong $\mathbf{R}^n$. Người ta gọi ánh xạ

$$f : D \to \mathbf{R}$$

xác định bởi

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D \mapsto u = f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}$$

là một *hàm số của n biến số* xác định trên D ; D được gọi là *miền xác định* của hàm số f ; $x_1, x_2, \ldots, x_n$ được gọi là các *biến số độc lập*. Nếu xem $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là các tọa độ của một điểm $M \in \mathbf{R}^n$ trong một hệ tọa độ nào đó thì cũng có thể viết $u = f(M)$.

Trong trường hợp thường gặp n = 2 hay n = 3, người ta dùng kí hiệu $z = f(x, y)$ hay $u = f(x, y, z)$.

Trong giáo trình này ta sẽ chỉ xét những hệ tọa độ đêcac vuông góc.

1.1.2. Tập hợp trong $\mathbf{R}^n$

• Giả sử $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $N(y_1, y_2, \ldots y_n)$ là hai điểm trong $\mathbf{R}^n$. Khoảng cách giữa hai điểm ấy, kí hiệu là d(M, N), được cho bởi công thức

$$d(M, N) = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2\right)^{1/2}$$

Có thể chứng minh được rằng với ba điểm A, B, C bất kì trong $\mathbf{R}^n$, ta có

$d(A,C) \leq d(A,B) + d(B,C)$ (bất đẳng thức tam giác)

• M_0 là một điểm thuộc $\mathbf{R}^n$. Người ta gọi ε – *lân cận* của M_0 là tập hợp tất cả những điểm M của $\mathbf{R}^n$ sao cho $d(M_0,M) < \varepsilon$. Người ta gọi *lân cận* của M_0 là mọi tập hợp chứa một ε – lân cận nào đó của M_0.

• E là một tập hợp trong $\mathbf{R}^n$. Điểm $M \in E$ được gọi là *điểm trong* của E nếu tồn tại một ε – lân cận nào đó của M nằm hoàn toàn trong E. Tập hợp E được gọi là *mở* nếu mọi điểm của nó đều là điểm trong.

• Điểm $N \in \mathbf{R}^n$ được gọi là *điểm biên* của tập hợp E nếu mọi ε – lân cận của N đều vừa chứa những điểm thuộc E, vừa chứa những điểm không thuộc E. Điểm biên của tập hợp E có thể thuộc E, cũng có thể không thuộc E. Tập hợp tất cả những điểm biên của E được gọi là *biên* của nó.

• Tập hợp E được gọi là *đóng* nếu nó chứa mọi điểm biên của nó (tức là biên của E là một bộ phận của E).

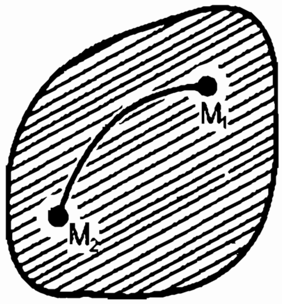
Ví dụ : Tập hợp tất cả những điểm M sao cho $d(M_0, M) < r$, trong đó M_0 là một điểm cố định, r là một số dương, là một tập hợp mở. Thật vậy, gọi E là tập hợp ấy. Giả sử M là một điểm bất kì của E, ta có $d(M_0,M) < r$. Đặt $\varepsilon = r - d(M_0, M)$. ε – lân cận của M nằm hoàn toàn trong E vì nếu P là một điểm của lân cận ấy thì ta có $d(M, P) < \varepsilon$, do đó theo bất đẳng thức tam giác

$$d(M_0,P) \leq d(M_0,M) + d(M,P) < d(M_0,M) + \varepsilon = r. \blacksquare$$

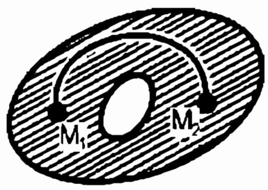
Tập hợp E ấy được gọi là *quả cầu mở* tâm M_0, bán kính r. Biên của tập hợp ấy gồm những điểm M sao cho $d(M_0,M) = r$, được gọi là *mặt cầu* tâm M_0 bán kính r. Tập hợp những điểm M sao cho $d(M_0,M) \leq r$ là một tập hợp đóng được gọi là *quả cầu đóng* tâm M_0 bán kính r.

● Tập hợp E được gọi là *bị chặn* nếu tồn tại một quả cầu nào đó chứa nó.

● Tập hợp E được gọi là *liên thông* nếu có thể nối hai điểm bất kì M_1, M_2 của E bởi một đường liên tục nằm hoàn toàn trong E ; tập hợp liên thông được gọi là *đơn liên* nếu nó bị giới hạn bởi một mặt kín (hình 1.1a), là *đa liên* nếu nó bị giới hạn bởi nhiều mặt kín rời nhau từng đôi một (hình 1.1b).



Hình 1.1a



Hình 1.1b

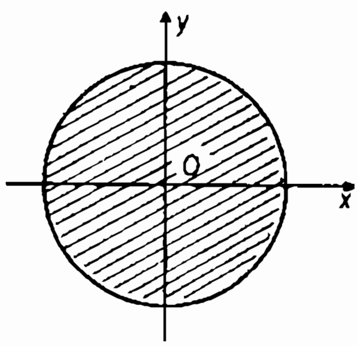
1.1.3. Miền xác định của hàm số nhiều biến số

Ta quy ước rằng nếu hàm số u được cho bởi biểu thức $u = f(M)$ mà không nói gì thêm về miền xác định của nó thì miền xác định của u được hiểu là tập hợp tất cả những điểm M sao cho biểu thức f(M) có nghĩa, thường đó là một tập hợp liên thông.

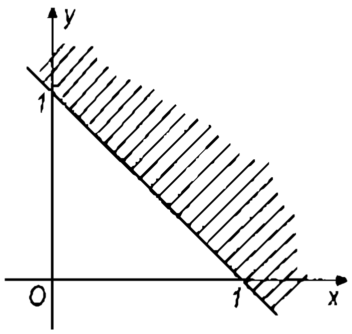
Ví dụ 1 : Hàm số $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ được xác định trong miền $x^2 + y^2 \leq 1$, tức là trong quả cầu đóng tâm O bán kính 1 (hình 1.2).

Ví dụ 2 : Miền xác định của hàm số $z = \ln(x + y - 1)$ là miền $x + y > 1$ (hình 1.3).

Ví dụ 3 : Hàm số $u = \dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}}$ được xác định khi $x^2 + y^2 + z^2 < 1$,



Hình 1.2



Hình 1.3

miền xác định của nó là quả cầu mở tâm O bán kính 1.

Sau này các khái niệm sẽ được trình bầy chi tiết cho trường hợp n = 2 hay n = 3 ; các khái niệm ấy cũng được mở rộng cho trường hợp n nguyên dương bất kì.

1.1.4. Giới hạn của hàm số nhiều biến số

• Ta nói rằng dãy điểm $\{M_n(x_n, y_n)\}$ dần tới điểm $M_0(x_0, y_0)$ trong $\mathbf{R}^2$ và viết $M_n \to M_0$ khi $n \to \infty$ nếu $\lim_{n\to\infty} d(M_0, M_n) = 0$ hay nếu

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \,,\ \lim_{n\to\infty} y_n = y_0 .$$

• Giả sử hàm số $z = f(M) = f(x,y)$ xác định trong một lân cận V nào đó của điểm $M_0(x_0, y_0)$, có thể trừ tại M_0. Ta nói rằng hàm số f(M) có *giới hạn l* khi M(x,y) dần đến M_0 nếu với mọi dãy điểm $M_n(x_n,y_n)$ (khác M_0) thuộc lân cận V dần đến M_0 ta đều có

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = l .$$

Khi đó ta viết

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = l \quad \text{hay} \quad \lim_{M\to M_0} f(M) = l.$$

Cũng như khi xét giới hạn của hàm số một biến số, có thể chứng minh rằng định nghĩa trên tương đương với định nghĩa sau : Hàm số f(M) có giới hạn l khi M dần đến M_0 nếu $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ sao cho

$$d(M_0,M) < \delta \Rightarrow |f(M) - l| < \varepsilon.$$

• Khái niệm giới hạn vô hạn cũng được định nghĩa tương tự như đối với hàm số một biến số. Chẳng hạn

$$\frac{1}{x^2 + y^2} \to +\infty \qquad \text{khi } (x,y) \to (0,0).$$

• Các định lí về giới hạn của tổng, tích, thương đối với hàm số một biến số cũng đúng cho hàm số nhiều biến số và được chứng minh tương tự.

Ví dụ 1 : Tìm $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, với $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$.

Hàm số f(x,y) xác định trên $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Nếu cho $(x,y) \to (0,0)$ theo phương của đường thẳng $y = kx$, ta có

$$f(x, kx) = \frac{k}{1+k^2} \text{ khi } x \neq 0 .$$

Do đó

$$\lim_{x\to 0} f(x, kx) = \frac{k}{1+k^2} .$$

Vậy khi $(x,y) \to (0,0)$ theo những phương khác nhau, f(x,y) dần tới những giới hạn khác nhau. Do đó không tồn tại $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Ví dụ 2 : Tìm $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$, với $g(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Hàm số g(x,y) xác định trên $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Vì $\dfrac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq 1$, $\forall (x,y) \neq (0,0)$ nên

$$|g(x,y)| = \frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}} |y| \leq |y| .$$

Vậy

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = 0 .$$

Ví dụ 3 : Tìm $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} h(x, y)$, với $h(x, y) = \dfrac{xy^3}{2x^2 + 3y^6}$.

Hàm số h(x, y) xác định trên $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Nếu cho $(x, y) \to (0, 0)$ theo phương của đường thẳng $y = kx$, ta có

$$h(x, kx) = \frac{k^3x^2}{2 + 3k^6x^4}, \ \forall x \neq 0.$$

Do đó $h(x, y) \to 0$ khi $(x, y) \to (0, 0)$ theo mọi phương $y = kx$. Nhưng điều đó không có nghĩa là giới hạn phải tìm tồn tại và bằng 0. Thật vậy, nếu cho $(x, y) \to (0, 0)$ trên đường $x = y^3$, ta có

$$h(y^3, y) = \frac{y^6}{5y^6} = \frac{1}{5}.$$

Do đó $h(x, y) \to \frac{1}{5}$ khi $(x, y) \to (0, 0)$ dọc theo đường parabôn bậc ba $x = y^3$.

1.1.5. Tính liên tục của hàm số nhiều biến số

- Giả sử hàm số f(M) xác định trong miền D, M_o là một điểm thuộc D. Ta nói rằng hàm số f(M) liên tục tại M_o nếu tồn tại giới hạn

$$\lim_{M \to M_o} f(M) = f(M_o).$$

Nếu miền D đóng, M_o là một điểm biên của D thì $\lim\limits_{M \to M_o} f(M)$ được hiểu là giới hạn của f(M) khi M dần đến M_o ở bên trong của D.

Giả sử M_o có tọa độ là (x_o, y_o), M có tọa độ là $(x_o + \Delta x, y_o + \Delta y)$. Đặt $\Delta f = f(x_o + \Delta x, y_o + \Delta y) - f(x_o, y_o)$. Định nghĩa trên có thể phát biểu như sau : Hàm số f(x, y) được gọi là liên tục tại (x_o, y_o) nếu nó xác định tại đó và nếu $\Delta f \to 0$ khi $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$.

Hàm số f(M) được gọi là liên tục trong miền D nếu nó liên tục tại mọi điểm thuộc D.

● Hàm số f(M) được gọi là liên tục đều trên miền D nếu $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\ \delta > 0$ sao cho với mọi cặp điểm M', M'' thuộc D mà $d(M', M'') < \delta$ ta đều có

$$|f(M') - f(M'')| < \varepsilon$$

● Hàm số nhiều biến số liên tục cũng có những tính chất như hàm số một biến số liên tục. Chẳng hạn, nếu hàm số nhiều biến số liên tục trong một miền đóng, bị chặn thì nó bị chặn trong miền ấy, nó đạt giá trị lớn nhất và giá trị bé nhất của nó trong miền ấy, nó liên tục đều trong miền ấy.

Ví dụ 4 : Khảo sát tính liên tục của hàm số

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{|xy|^{\alpha}}{x^2 + y^2} & \text{nếu } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{nếu } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

trong đó α là một hằng số dương.

f(x,y) liên tục $\forall(x,y) \neq (0,0)$ vì là thương của hai hàm số liên tục mà mẫu số khác không. Vậy chỉ cần xét tại điểm (0,0). Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có

$$|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \Rightarrow |f(x, y)| \leq \frac{1}{2^{\alpha}}(x^2 + y^2)^{\alpha - 1}.$$

Do đó nếu $\alpha > 1$ thì $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$, vậy f(x,y) liên tục tại (0,0).

Giả sử $\alpha \leq 1$. Ta có

$$f(x, x) = \frac{x^{2\alpha}}{2x^2} = \frac{1}{2x^{2(1-\alpha)}} \text{ không dần tới 0 khi } x \to 0,$$

vậy f(x,y) không liên tục tại (0,0).

1.2. ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN

1.2.1. Đạo hàm riêng

Cho hàm số $u = f(x,y)$ xác định trong một miền D ; $M_o(x_o, y_o)$ là một điểm của D. Nếu cho $y = y_o$, hàm số một biến số $x \mapsto f(x,y_o)$ có đạo hàm tại $x = x_o$, thì đạo hàm đó được gọi là *đạo hàm riêng của f đối với x* tại M_o và được kí hiệu là

$$f'_x(x_o, y_o) \text{ hay } \frac{\partial f}{\partial x}(x_o, y_o) \text{ hay } \frac{\partial u}{\partial x}(x_o, y_o)\ .$$

Đặt $\Delta_x f = f(x_o + \Delta x, y_o) - f(x_o, y_o)$. Biểu thức đó được gọi là số gia riêng của $f(x,y)$ theo x tại (x_o, y_o). Ta có

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_o, y_o) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x f}{\Delta x}\ .$$

Tương tự như vậy, người ta định nghĩa đạo hàm riêng của f đối với y tại M_o, kí hiệu là

$$f'_y(x_o, y_o) \text{ hay } \frac{\partial f}{\partial y}(x_o, y_o) \text{ hay } \frac{\partial u}{\partial y}(x_o, y_o)\ .$$

Các đạo hàm riêng của hàm số n biến số ($n \geq 3$) được định nghĩa tương tự. Khi tính đạo hàm riêng của một hàm số theo biến số nào, chỉ việc xem như hàm số chỉ phụ thuộc biến số ấy, các biến số khác được coi như không đổi, rồi áp dụng các quy tắc tính đạo hàm của hàm số một biến số.

Ví dụ 1 : $z = x^y$ $(x > 0)$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1},\ \frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x\ .$$

Ví dụ 2 : $u = x^3 z \operatorname{arctg}\frac{y}{z}$ $(z \neq 0)$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 z \operatorname{arctg}\frac{y}{z},\ \frac{\partial u}{\partial y} = x^3 z \frac{1}{1 + \frac{y^2}{z^2}} \cdot \frac{1}{z} = \frac{x^3 z^2}{y^2 + z^2}\ ;$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = x^3 \operatorname{arctg}\frac{y}{z} + x^3 z \frac{1}{1 + \frac{y^2}{z^2}} \left(- \frac{y}{z^2} \right) = x^3 \left(\operatorname{arctg}\frac{y}{z} - \frac{yz}{y^2 + z^2} \right).$$

Chú thích : $\frac{\partial f}{\partial x}$ là một kí hiệu, chứ không phải là một thương ; ∂f và ∂x đứng riêng rẽ không có ý nghĩa gì.

1.2.2. Vi phân toàn phần

- Cho hàm số $z = f(x,y)$ xác định trong miền D. Lấy các điểm $M_0(x_0, y_0) \in D$, $M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \in D$. Biểu thức $\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ được gọi là số gia toàn phần của f tại M_0. Nếu có thể biểu diễn nó dưới dạng

$$\Delta f = A.\Delta x + B.\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y, \tag{1.1}$$

trong đó A, B là những số chỉ phụ thuộc x_0, y_0, còn α, β dần tới 0 khi $M \to M_0$, tức là khi $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$, thì ta nói rằng hàm số z là *khả vi tại* M_0, còn biểu thức $A\Delta x + B\Delta y$ được gọi là *vi phân toàn phần* của $z = f(x, y)$ tại M_0 và được kí hiệu là dz hay df.

Hàm số $z = f(x,y)$ được gọi là *khả vi trong miền D* nếu nó khả vi tại mọi điểm của miền ấy.

Chú thích. Nếu hàm số $f(x,y)$ khả vi tại $M_0(x_0, y_0)$ thì từ đẳng thức (1.1) suy ra rằng $\Delta f \to 0$ khi $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$, vậy $f(x,y)$ liên tục tại M_0.

- Đối với hàm số một biến số $y = f(x)$, nếu tại $x = x_0$ tồn tại đạo hàm (hữu hạn) $f'(x_0)$ thì ta có

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \alpha\Delta x,$$

trong đó $\alpha \to 0$ khi $\Delta x \to 0$, tức là $f(x)$ khả vi tại $x = x_0$. Đối với hàm số nhiều biến số $z = f(x, y)$, sự tồn tại của các đạo hàm riêng tại $M_0(x_0,y_0)$ chưa đủ để hàm số khả vi tại đó. Thật vậy, xét ví dụ sau :

Cho hàm số

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{nếu } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{nếu } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Ta có

$$f'_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)}{h} = 0,$$

vì $f(h,0) = 0$ nếu $h \neq 0$. Tương tự, ta có $f'_y(0,0) = 0$. Các đạo hàm riêng f'_x, f'_y tại $(0,0)$ đều tồn tại, nhưng hàm số $f(x,y)$ không liên tục tại $(0,0)$ (xem ví dụ 3, mục 1.1.5) nên không khả vi tại $(0,0)$.

Định lí sau đây cho ta điều kiện đủ để hàm số $z = f(x,y)$ khả vi tại $M_0(x_0, y_0)$.

Định lí 1.1. Nếu hàm số $z = f(x,y)$ có các đạo hàm riêng ở lân cận điểm $M_0(x_0, y_0)$ và nếu các đạo hàm riêng ấy liên tục tại M_0 thì $f(x,y)$ khả vi tại M_0 và ta có

(1.2) $$dz = f'_x\Delta x + f'_y\Delta y.$$

Thật vậy, ta có

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) =$$

$$= [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y)] + [f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)]$$

Áp dụng công thức số gia giới nội cho hàm số một biến số, ta được

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y) = \Delta x . f'_x(x_0 + \theta_1\Delta x, y_0 + \Delta y)$$

$$f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = \Delta y . f'_y(x_0, y_0 + \theta_2\Delta y),$$

trong đó $0 < \theta_1 < 1$, $0 < \theta_2 < 1$. Nhưng vì f'_x và f'_y liên tục tại M_0 nên

$$f'_x(x_0 + \theta_1\Delta x, y_0 + \Delta y) = f'_x(x_0, y_0) + \alpha,$$

$$f'_y(x_0, y_0 + \theta_2\Delta y) = f'_y(x_0, y_0) + \beta$$

trong đó $\alpha \to 0$, $\beta \to 0$ khi $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$. Do đó

$$\Delta f = f'_x(x_o, y_o).\Delta x + f'_y(x_o,y_o).\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y,$$

vậy $f(x,y)$ khả vi tại M_o và ta có đẳng thức (1.2).

Chú thích. Cũng như đối với hàm số một biến số, nếu x, y là biến số độc lập thì $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$, do đó

$$dz = f'_x dx + f'_y dy.$$

● Từ định nghĩa ta thấy rằng vi phân toàn phần df chỉ khác số gia toàn phần Δf một vô cùng bé bậc cao hơn $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$. Do đó khi Δx và Δy có trị số tuyệt đối khá bé, ta có thể xem $\Delta f \approx df$, tức là

(1.3) $\quad f(x_o + \Delta x, y_o + \Delta y) \approx f(x_o, y_o) + f'_x(x_o, y_o)\Delta x + f'_y(x_o, y_o)\Delta y$

Ví dụ : Tính gần đúng $\operatorname{arctg} \dfrac{1,02}{0,95}$.

Xét hàm số $z = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$. Ta cần tính $z(x_o + \Delta x, y_o + \Delta y)$, với $x_o = 1$, $y_o = 1$, $\Delta x = -0,05$, $\Delta y = 0,02$. Ta có $z'_x = -\dfrac{y}{x^2+y^2}$, $z'_y = \dfrac{x}{x^2+y^2}$. Theo công thức (3), ta có

$$z(1 - 0,05\ ;\ 1 + 0,02) \approx z(1,1) + \frac{1 . 0,02 + 1 . 0,05}{2} =$$

$$= \frac{\pi}{4} + 0,035 = 0,785 + 0,035 = 0,82 \text{ radian.}$$

1.2.3. Đạo hàm của hàm số hợp

D là một tập hợp trong $\mathbf{R}^n$. Xét hai ánh xạ $\varphi : D \to \mathbf{R}^m$, $f : \varphi(D) \to \mathbf{R}$. Ánh xạ tích $f o \varphi$ xác định bởi

$$f o\varphi : (x_1, ..., x_n) \in D \overset{\varphi}{\longmapsto} (u_1(x_1, ..., x_n), ..., u_m(x_1,..., x_n)) \in \varphi(D)$$

$$\overset{f}{\longmapsto} f(u_1(x_1,...,x_n), ..., u_m(x_1,..., x_n)) \in \mathbf{R}$$

được gọi là hàm số hợp của các biến số $x_1, ..., x_n$ qua các biến số trung gian $u_1,..., u_m$. Để cho đơn giản, ta xét trường hợp $n = m = 2$. Đặt $F = f o\varphi$, ta có

$$F : (x,y) \in D \overset{\varphi}{\longmapsto} (u(x,y), v(x,y)) \in \varphi(D) \overset{f}{\longmapsto} f(u(x,y), v(x,y)) = F(x,y)$$

Định lí 1.2. Nếu f có các đạo hàm riêng $\frac{\partial f}{\partial u}$, $\frac{\partial f}{\partial v}$ *liên tục trong* $\varphi(D)$ *và nếu u, v có các đạo hàm riêng* $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ *trong D thì trong D tồn tại các đạo hàm riêng* $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}$ *và ta có*

$$(1.4) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y}. \end{cases}$$

Chứng minh. Giả sử $(x_o, y_o) \in D$, $(x_o + h, y_o) \in D$. Đặt

$$\delta = F(x_o + h, y_o) - F(x_o, y_o)$$
$$= f(u(x_o + h, y_o), v(x_o + h, y_o)) - f(u(x_o, y_o), v(x_o, y_o))$$

và kí hiệu $u_o = u(x_o, y_o)$, $u_1 = u(x_o + h, y_o)$, $v_o = v(x_o, y_o)$, $v_1 = v(x_o + h, y_o)$. Ta có

$$\delta = f(u_1, v_1) - f(u_o, v_o) = [f(u_1, v_1) - f(u_o, v_1)] + [f(u_o, v_1) - f(u_o, v_o)]$$

$$\frac{\delta}{h} = \frac{f(u_1, v_1) - f(u_o, v_1)}{u_1 - u_o} \cdot \frac{u_1 - u_o}{h} + \frac{f(u_o, v_1) - f(u_o, v_o)}{v_1 - v_o} \cdot \frac{v_1 - v_o}{h}.$$

Vì $\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}$ liên tục trong Δ nên công thức số gia giới nội áp dụng vào $f(u_1, v_1) - f(u_o, v_1)$ và $f(u_o, v_1) - f(u_o, v_o)$ cho ta

$$\frac{\delta}{h} = \frac{\partial f}{\partial u}(u_2, v_1) \cdot \frac{u_1 - u_o}{h} + \frac{\partial f}{\partial v}(u_o, v_2)\,\frac{v_1 - v_o}{h},$$

trong đó $u_2 = u_o + \theta_1(u_1 - u_o)$, $v_2 = v_o + \theta_2(v_1 - v_o)$, $0 < \theta_1 < 1$. $0 < \theta_2 < 1$. Cho $h \to 0$, ta được

$$\lim_{h \to 0} \frac{\delta}{h} = \frac{\partial F}{\partial x}(x_o, y_o) = \frac{\partial f}{\partial u}(u_o, v_o)\frac{\partial u}{\partial x}(x_o, y_o) + \frac{\partial f}{\partial v}(u_o, v_o)\frac{\partial v}{\partial x}(x_o, y_o).$$

Đó là đẳng thức đầu của (1.4). Đẳng thức thứ hai của (1.4) được chứng minh tương tự. ■

Các công thức (1.4) có thể viết dưới dạng ma trận

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x} \quad \frac{\partial F}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial u} \quad \frac{\partial f}{\partial v}\right)\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix},$$

trong đó ma trận

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$$

được gọi là *ma trận Jacobi* của ánh xạ φ hay ma trận Jacobi của u, v đối với x, y, còn định thức của ma trận ấy được gọi là *định thức Jacobi* của u, v đối với x, y và được kí hiệu là $\frac{D(u, v)}{D(x, y)}$.

Trong tính toán, người ta không phân biệt f và F, chúng lấy cùng giá trị tại những điểm tương ứng (u, v) và (x,y). Có thể viết

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Ví dụ : Cho $z = e^u \ln v$, $u = xy$, $v = x^2 + y^2$. Ta có

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^u \ln v \cdot y + e^u \cdot \frac{1}{v} \cdot 2x = e^{xy}\left[y \ln(x^2 + y^2) + \frac{2x}{x^2 + y^2}\right]$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^u \ln v \cdot x + e^u \cdot \frac{1}{v} \cdot 2y = e^{xy}\left[x \ln(x^2 + y^2) + \frac{2y}{x^2 + y^2}\right].$$

Chú thích 1. Nếu $z = f(x,y)$, $y = y(x)$ thì z là hàm số hợp của x, $z = f(x, y(x))$. Khi đó ta có

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y'(x).$$

Nếu $z = f(x,y)$, $x = x(t)$, $y = y(t)$ thì z là hàm số hợp của t thông qua hai biến trung gian x, y. Khi đó ta có

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}y'(t) .$$

Chú thích 2. Nếu giả thiết thêm rằng $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ liên tục thì từ (1.4) suy ra rằng $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ liên tục, do đó z xem như hàm số của x, y là khả vi và ta có

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy .$$

Thế các công thức (1.4) vào, ta có

$$dz = \left(\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy\right) + \frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy\right) =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial u}du + \frac{\partial f}{\partial v}dv .$$

Vậy vi phân toàn phần của hàm số $z = f(u,v)$ có cùng một dạng dù cho u, v là các biến số độc lập hay là các hàm số của những biến số độc lập khác. Do đó *vi phân toàn phần của hàm số nhiều biến số cũng có dạng bất biến* như vi phân của hàm số một biến số.

Các công thức

$$d(u \pm v) = du \pm dv,\ d(uv) = udv + vdu,\ d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$$

đúng khi u, v là các biến số độc lập nên cũng đúng khi u, v là những hàm số của các biến số khác.

1.2.4. Đạo hàm và vi phân cấp cao

• Cho hàm số hai biến số $z = f(x,y)$. Các đạo hàm riêng f'_x, f'_y là những đạo hàm riêng cấp một. Các đạo hàm riêng của các đạo hàm riêng cấp một nếu tồn tại được gọi là những đạo hàm riêng cấp hai. Ta có bốn đạo hàm riêng cấp hai được kí hiệu như sau :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{x^2}(x, y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f''_{xy}(x, y)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{yx}(x, y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''_{y^2}(x, y).$$

Các đạo hàm riêng của các đạo hàm riêng cấp hai, nếu tồn tại, được gọi là các đạo hàm riêng cấp ba,...

Ví dụ : $z = x^2y^3 + x^4$

$z'_x = 2xy^3 + 4x^3$ $\qquad$ $z'_y = 3x^2y^2$

$z''_{x^2} = 2y^3 + 12x^2$ $\qquad$ $z''_{yx} = 6xy^2$

$z''_{xy} = 6xy^2$ $\qquad$ $z''_{y^2} = 6x^2y$.

Trong ví dụ trên ta nhận thấy rằng $z''_{xy} = z''_{yx}$. Liệu điều đó có luôn luôn đúng không ? Ta có định lí quan trọng sau đây :

Định lí 1.3 (Schwarz). Nếu trong một lân cận U nào đó của điểm $M_0(x_0, y_0)$ hàm số $z = f(x,y)$ có các đạo hàm riêng f''_{xy}, f''_{yx} và nếu các đạo hàm ấy liên tục tại M_0 thì $f''_{xy} = f''_{yx}$ tại M_0.

Chứng minh. Giả sử h, k là những số đủ nhỏ, khác 0 sao cho các điểm $(x_0 + h, y_0)$, $(x_0, y_0 + k)$, $(x_0 + h, y_0 + k)$ thuộc miền U. Tính biểu thức

$\Delta = [f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0 + k)] - [f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)]$ theo hai cách khác nhau. Trước hết, đặt

$$\varphi(y) = f(x_0 + h, y) - f(x_0, y),$$

ta có

$$\Delta = \varphi(y_o + k) - \varphi(y_o).$$

Theo công thức số gia giới nội, ta được

$$\Delta = k\varphi'(y_o + \theta_1 k),$$

trong đó $0 < \theta_1 < 1$. Nhưng

$$\varphi'(y) = f_y'(x_o + h, y) - f_y'(x_o, y)].$$

Vì vậy $\Delta = k[f'_y(x_o + h, y_o + \theta_1 k) - f'_y(x_o, y_o + \theta_1 k)]$.

Lại áp dụng công thức số gia giới nội đối với biến x ở vế phải, ta được $\Delta = khf''_{yx}(x_o + \theta_2 h, y_o + \theta_1 k)$,

trong đó $0 < \theta_2 < 1$. Bây giờ viết lại

$$\Delta = [f(x_o + h, y_o + k) - f(x_o + h, y_o)] - [f(x_o, y_o + k) - f(x_o, y_o)] =$$
$$= \psi(x_o + h) - \psi(x_o),$$

trong đó

$$\psi(x) = f(x, y_o + k) - f(x, y_o).$$

Cũng như trên, tồn tại hai số θ_3, θ_4, $0 < \theta_3 < 1$, $0 < \theta_4 < 1$, sao cho $\Delta = h\psi'(x_o + \theta_3 h) =$

$$= h[f_x'(x_o + \theta_3 h, y_o + k) - f_x'(x_o + \theta_3 h, y_o)] =$$
$$= hkf''_{xy}(x_o + \theta_3 h, y_o + \theta_4 k).$$

So sánh hai kết quả tính trên, ta thấy

$$f''_{yx}(x_o + \theta_2 h, y_o + \theta_1 k) = f''_{xy}(x_o + \theta_3 h, y_o + \theta_4 k)$$

cho $h \to 0$, $k \to 0$, do giả thiết liên tục của f''_{yx} và f''_{xy} tại M_o, ta được

$$f''_{yx}(x_o, y_o) = f''_{xy}(x_o, y_o).$$

Định lí ấy cũng đúng cho các đạo hàm riêng cấp cao hơn của hàm số n biến số với $n \geq 3$. Chẳng hạn, nếu $u = f(x, y, z)$ thì $u'''_{xyz} = u'''_{yzx} = u'''_{zxy} = u'''_{xzy} = \ldots$ nếu các đạo hàm ấy liên tục.

• Xét hàm số $z = f(x,y)$. Vi phân toàn phần của nó

$$dz = f'_x dx + f'_y dy,$$

nếu tồn tại, cũng là một hàm số của x, y. Vi phân toàn phần của dz nếu tồn tại, được gọi là vi phân toàn phần cấp hai của z và được kí hiệu là d^2z . Vậy :

$$d^2z = d(dz) = d(f'_x dx + f'_y dy) .$$

Cứ tiếp tục như vậy người ta định nghĩa các vi phân cấp cao hơn

$$d^3z = d\,(d^2z)$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$d^nz = d\,(d^{n-1}z) .$$

Giả sử x, y là những biến số độc lập, khi ấy $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$ đó là những hằng số không phụ thuộc x, y. Giả sử d^2z tồn tại. Ta có

$$d^2z = d(dz) = (f'_x dx + f'_y dy)'_x dx + (f'_x dx + f'_y dy)'_y dy =$$

$$= f''_{x^2} dx^2 + (f''_{xy} + f''_{yx}) dx\,dy + f''_{y^2} dy^2 .$$

Giả thiết rằng f''_{xy} và f''_{yx} liên tục, khi đó chúng bằng nhau, vì vậy

$$d^2z = f''_{x^2} dx^2 + 2 f''_{xy} dx\,dy + f''_{y^2} dy^2.$$

Người ta thường dùng kí hiệu tượng trưng

$$(1.5) \qquad d^2z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^2 f$$

trong đó các bình phương của $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$ chỉ phép lấy đạo hàm riêng hai lần đối với x, hai lần đối với y, $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$ chỉ phép lấy đạo hàm riêng một lần đối với y, một lần đối với x.

Tiếp tục tính toán như vậy, ta được công thức lũy thừa tượng trưng

$$(1.6) \qquad d^nz = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^n f.$$

Bây giờ giả sử x, y không phải là biến số độc lập, mà là các hàm số của các biến số độc lập s, t. Khi ấy dx, dy không phải là những hằng số nữa, mà phụ thuộc vào s, t. Do đó

$$d^2z = d(dz) = d(f'_x dx + f'_y dy) =$$

$$= d(f'_x)dx + f'_x d(dx) + d(f'_y)dy + f'_y d(dy)$$

$$= f''_{x^2}dx^2 + 2f''_{xy}dx\,dy + f''_{y^2}dy^2 + f'_x d^2x + f'_y d^2y.$$

Rõ ràng trong trường hợp này, công thức (1.5) không còn đúng nữa. Vi phân toàn phần cấp lớn hơn hoặc bằng 2 của hàm số nhiều biến số không có dạng bất biến.

1.2.5. Hàm số thuần nhất

D là một tập hợp trong $\mathbf{R}^n$ có tính chất sau : nếu điểm $M(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$, thì $\forall t > 0$ điểm $(tx_1, tx_2, \dots, tx_n)$ cũng thuộc D, tức là nếu D chứa điểm M thì D cũng chứa tia nối O với M.

Hàm số $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ xác định trên D được gọi là *thuần nhất bậc k* nếu

(1.7) $\quad f(tx_1, tx_2, \dots, tx_n) = t^k f(x_1, x_2, \dots, x_n)\ \forall t > 0.$

Ví dụ : $\sqrt{x^2 + y^2}$, $\ln\dfrac{x^2}{y^2}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$, $\dfrac{x^3y + y^2z^2 + xz^3}{x^2 + y^2 + z^2}$ là những hàm số thuần nhất theo thứ tự có bậc 1 xác định trên $\mathbf{R}^2$, bậc 0 xác định trên $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, bậc 2 xác định trên $\mathbf{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$.

● *Nếu f là một hàm số thuần nhất bậc k thì các đạo hàm riêng cấp một của nó là những hàm số thuần nhất bậc k − 1.*

Thật vậy, đạo hàm hai vế của (1.7) đối với x_i, ta được

$$t f'_{x_i}(tx_1, tx_2, \dots, tx_n) = t^k f'_{x_i}(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

do đó $f'_{x_i}(tx_1, tx_2, \dots, tx_n) = t^{k-1} f'_{x_i}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ■

● *Hàm số $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ là thuần nhất bậc k khi và chỉ khi*

(1.8) $$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = kf.$$

Công thức (1.8) được gọi là *công thức Euler.*

Thật vậy, giả sử f là hàm số thuần nhất bậc k, nó thỏa mãn (1.7). Lấy đạo hàm hai vế của (1.7) đối với t, ta được

$$\sum_{i=1}^{n} x_i f'_{x_i}(tx_1, \ldots, tx_n) = kt^{k-1} f(x_1, \ldots, x_n).$$

Cho t = 1 trong đẳng thức đó, ta được (1.8).

Đảo lại, giả sử hàm số f thỏa mãn đẳng thức (1.8). Trong (1.8) thay x_i bởi tx_i với mọi i ta được

$$\sum_{i=1}^{n} tx_i f'_{x_i}(tx_1, \ldots, tx_n) = kf(tx_1, \ldots, tx_n).$$

Nhân hai vế với t^{k-1}, ta có

$$\sum_{i=1}^{n} x_i f'_{x_i}(tx_1, \ldots, tx_n) t^k - kt^{k-1} f(tx_1, \ldots, tx_n) = 0.$$

Vế trái là tử số của đạo hàm theo t của $\frac{f(tx_1, \ldots, tx_n)}{t^k}$.

Đạo hàm đó bằng không, nên $\frac{f(tx_1, \ldots, tx_n)}{t^k}$ bằng hằng số C. Muốn tìm C chỉ việc cho t = 1, ta được $C = f(x_1, \ldots, x_n)$. Do đó

$$f(tx_1, \ldots, tx_n) = t^k f(x_1, \ldots, x_n).$$

Đó chính là đẳng thức (1.7). ■

1.2.6. Đạo hàm theo hướng. Gradiên

• u(x, y, z) là một hàm số xác định trong một miền $D \subset \mathbf{R}^3$. Qua điểm $M_0(x_0, y_0, z_0) \in D$ vẽ một đường thẳng định hướng mà vectơ đơn vị là $\vec{l}$; M là một điểm trên đường thẳng ấy, ta đó $\overrightarrow{M_oM} = \rho\vec{l}$, trong đó ρ là độ dài đại số của vectơ $\overrightarrow{M_oM}$ (hình 1.4). Nếu khi $\rho \to 0$ (tức là M dần tới M_o theo hướng $\vec{l}$), tỉ số

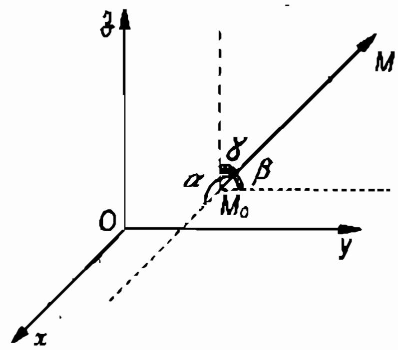
$$\frac{\Delta u}{\rho} = \frac{u(M) - u(M_o)}{\rho}$$

dần tới một giới hạn hữu hạn thì giới hạn ấy được gọi là *đạo hàm của hàm số u theo hướng* $\vec{l}$ tại M_o và được kí hiệu là $\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}(M_o)$.

Nếu $\vec{l}$ trùng với vectơ đơn vị $\vec{i}$ của trục Ox thì

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}(M_o) = \lim_{\rho\to 0} \frac{u(x_o+\rho, y_o, z_o) - u(x_o, y_o, z_o)}{\rho} = \frac{\partial u(x_o)}{\partial x}.$$

Vậy đạo hàm riêng $\frac{\partial u}{\partial x}$ chính là đạo hàm của u theo hướng của trục Ox. Cũng vậy $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$ là đạo hàm của u theo hướng của Oy, Oz.



Hình 1.4

Đạo hàm của hàm số u theo hướng $\vec{l}$ biểu thị tốc độ biến thiên của u theo hướng $\vec{l}$.

Định lí 1.4. *Nếu hàm số $u = u(x, y, z)$ khả vi tại điểm $M_o(x_o, y_o, z_o)$ thì tại điểm ấy nó có đạo hàm theo mọi hướng $\vec{l}$ và ta có*

$$(1.9) \quad \frac{\partial u(M_o)}{\partial \vec{l}} = \frac{\partial u(M_o)}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u(M_o)}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u(M_o)}{\partial z}\cos\gamma$$

trong đó $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ là các thành phần của $\vec{l}$.

Chứng minh. Vì u(x,y,z) khả vi tại M, nên

$$\Delta u = u(M) - u(M_o) = \frac{\partial u}{\partial x}(M_o)\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}(M_o)\Delta y + \frac{\partial u}{\partial z}(M_o)\Delta z + \alpha(\rho),$$

trong đó $\alpha(\rho)$ là vô cùng bé bậc cao đối với ρ. Vì

$$\Delta x = \rho\cos\alpha,\ \Delta y = \rho\cos\beta,\ \Delta z = \rho\cos\gamma$$

nên

$$\frac{\Delta u}{\rho} = \frac{\partial u}{\partial x}(M_o)\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}(M_o)\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}(M_o)\cos\gamma + \frac{\alpha(\rho)}{\rho}.$$

Chuyển qua giới hạn khi $\rho \to 0$, ta được (1.9). ■

• $u(x, y, z)$ là hàm số có các đạo hàm riêng tại $M_o(x_o, y_o, z_o)$. Người ta gọi gradiên của u tại M_o là vectơ có các thành phần là

$$\frac{\partial u}{\partial x}(M_o),\ \frac{\partial u}{\partial y}(M_o),\ \frac{\partial u}{\partial z}(M_o)$$

và kí hiệu nó là $\overrightarrow{\text{grad}}\,u(M_o)$. Nếu $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ là các vectơ đơn vị của các trục Ox, Oy, Oz, ta có

$$\text{(1.10)}\qquad \overrightarrow{\text{grad}}\,u(M_o) = \frac{\partial u}{\partial x}(M_o)\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}(M_o)\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}(M_o)\vec{k}.$$

Định lí 1.5. Nếu hàm số $u(x, y, z)$ khả vi tại M_o thì tại đó ta có

$$\text{(1.11)}\qquad \frac{\partial u}{\partial \vec{l}} = \text{ch}_{\vec{l}}\,\overrightarrow{\text{grad}}\,u.$$

Thật vậy, vì $\vec{l} = \cos\alpha\,\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j} + \cos\gamma\,\vec{k}$, nên công thức (1.9) có thể viết là

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}(M_o) = \overrightarrow{\text{grad}}\,u(M_o).\vec{l} = |\vec{l}|.\text{ch}_{\vec{l}}\overrightarrow{\text{grad}}\,u(M_o) = \text{ch}_{\vec{l}}\overrightarrow{\text{grad}}\,u(M_o)\ ■$$

Chú thích. Từ (1.11) suy ra rằng $\left|\dfrac{\partial u(M_o)}{\partial \vec{l}}\right|$ đạt giá trị lớn nhất bằng $|\overrightarrow{\text{grad}}\,u(M_o)|$. Khi $\vec{l}$ đồng phương với $\overrightarrow{\text{grad}}\,u$. Vậy *$\overrightarrow{\text{grad}}\,u(M_o)$ cho ta biết phương theo nó tốc độ biến thiên của u tại M_o có giá trị tuyệt đối cực đại.*

Ví dụ : Cho $u = x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz$. Tính $\overrightarrow{\text{grad}}\,u$ và $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{l}}$ tại $M_o(1, 2, -1)$ biết $\vec{l}$ là vectơ đơn vị của $\overrightarrow{M_oM_1}$ với $M_1(2, 0, 1)$.

Ta có $u_x = 3x^2 + 3yz$, $u_y = 3y^2 + 3zx$, $u_z = 3z^2 + 3xy$

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, u = 3(x^2 + yz)\vec{i} + 3(y^2 + zx)\vec{j} + 3(z^2 + xy)\vec{k}$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, u\,(M_0) = 3(-\vec{i} + 3\vec{j} + 3\vec{k}) .$$

Vì $\overrightarrow{M_0M_1}$ có các thành phần là $\{1, -2, 2\}$ nên

$$\cos\alpha = \frac{1}{3},\ \cos\beta = -\frac{2}{3},\ \cos\gamma = \frac{2}{3},\ \text{do đó}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}(M_0) = (-3)\left(\frac{1}{3}\right) + 9.\left(\frac{-2}{3}\right) + 9\left(\frac{2}{3}\right) = -1 .$$

1.2.7. Công thức Taylor

Công thức số gia giới nội, công thức Taylor đối với hàm số một biến số cũng được mở rộng cho hàm số nhiều biến số.

Định lí 1.6. Giả sử hàm số $f(x,y)$ có các đạo hàm riêng đến cấp $(n + 1)$ liên tục trong một lân cận nào đó của điểm $M_o(x_o, y_o)$. Nếu điểm $M(x_o + \Delta x, y_o + \Delta y)$ cũng nằm trong lân cận đó thì ta có

$$(1.12)\quad f(x_o+\Delta x, y_o+\Delta y) - f(x_o, y_o) = df(x_o, y_o) + \frac{1}{2!}d^2 f(x_o, y_o) + \dots + \frac{1}{n!}d^n f(x_o, y_o) + \frac{1}{(n+1)!}d^{n+1} f(x_o + \theta\Delta x, y_o + \theta\Delta y),\quad 0 < \theta < 1.$$

Công thức (1.12) gọi là *công thức Taylor* đối với hàm số $f(x,y)$.

Chứng minh. Đặt $F(t) = f(x_o + t\Delta x, y_o + t\Delta y)$, $0 \le t \le 1$.

Vế trái của (1.12) bằng $F(1) - F(0)$. Vì $f(x,y)$ có các đạo hàm riêng đến cấp $(n + 1)$ liên tục, nên hàm số $F(t)$ có các đạo hàm liên tục đến cấp $(n + 1)$ trong đoạn $[0,1]$. Công thức Taylor áp dụng cho hàm số $F(t)$ cho ta

$$(1.13)\quad F(1) - F(0) = F'(0) + \frac{1}{2!}F''(0) + \dots + \frac{1}{n!}F^{(n)}(0) + \frac{1}{(n+1)!}F^{(n+1)}(\theta),$$

$0 < \theta < 1$. Nhưng

$$F'(0) = f'_x(x_o,y_o)\Delta x + f'_y(x_o, y_o)\,\Delta y = df(x_o, y_o)$$

$$F''(0) = f''_{x^2}(x_o,y_o)\Delta x^2 + 2f''_{xy}(x_o,y_o)\Delta x\Delta y + $$

$$+ f''_{y^2}(x_o, y_o)\,\Delta y^2 = d^2f(x_o, y_o)$$

. . . .

$$F^{(n)}(0) = d^nf(x_o, y_o)$$

$$F^{(n+1)}(\theta) = d^{n+1}f(x_o + \theta\Delta x, y_o + \theta\Delta y).$$

Thế các đẳng thức này vào (1.13) ta được (1.12). ■

Dùng công thức lũy thừa tượng trưng để biểu diễn vi phân cấp cao ta có thể viết công thức Taylor (1.12) như sau :

$$(1.12') \qquad f(M) - f(M_o) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^k f(M_o) + $$

$$+ \frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^{n+1} f(M_1)$$

với M_1 nằm trên đoạn thẳng nối M_o với M.

Chú thích. Nếu trong công thức (1.12) hay (1.12') cho $n = 1$, ta được

$$(1.14) \quad f(x_o + \Delta x, y_o + \Delta y) - f(x_o, y_o) = df(x_o + \theta\Delta x, y_o + \theta\Delta y)$$

hay

$$(1.14') \qquad f(M) - f(M_o) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right) f(M_1).$$

Đó là *công thức số gia giới nội* đối với hàm số f(x,y).

1.3. CỰC TRỊ

1.3.1. Cực trị của hàm số nhiều biến số

Cho hàm số $z = f(x,y)$ xác định trong một miền D nào đó, $M_o(x_o, y_o)$ là một điểm trong của D. Ta nói rằng f(x,y) đạt *cực trị* tại M_o nếu với mọi điểm M trong một lân cận nào đó của M_o, nhưng khác M_o, hiệu số $f(M) - f(M_o)$ có dấu không đổi.

Nếu $f(M) - f(M_o) > 0$, ta có cực tiểu ; nếu $f(M) - f(M_o) < 0$ ta có cực đại.

Trong phần này, ta sẽ dùng các kí hiệu sau :

$p = f'_x(M)$, $q = f'_y(M)$, $r = f''_{x^2}(M)$, $s = f''_{xy}(M)$, $t = f''_{y^2}(M)$.

Định lí 1.7. Nếu hàm số $z = f(x, y)$ đạt cực trị tại M_o mà tại đó các đạo hàm riêng $p = f'_x(M)$, $q = f'_y(M)$ tồn tại thì các đạo hàm riêng ấy bằng không :

$$p = 0,\ q = 0 \text{ tại } M_o \tag{1.15}$$

Thật vậy. vì f đạt cực trị tại M_o nên nếu giữ $y = y_o$ thì hàm số một biến số $x \mapsto f(x, y_o)$ đạt cực trị tại $x = x_o$, vì đạo hàm riêng $f'_x(x_o, y_o)$ tồn tại, nó phải bằng không theo định lí Fermat. Cũng vậy $f'_y(x_o, y_o) = 0$. ■

Điều kiện (1.15) là điều kiện ắt có của cực trị, nó cho phép ta thu hẹp việc tìm cực trị tại những điểm ở đó cả p và q đều triệt tiêu hoặc những điểm ở đó p hoặc q không tồn tại. Những điểm ấy được gọi là *điểm tới hạn*.

Định lí 1.8. Giả sử hàm số $z = f(x,y)$ có các đạo hàm riêng đến cấp hai liên tục trong một lân cận nào đó của $M_o(x_o, y_o)$. Giả sử tại M_o ta có $p = 0$, $q = 0$. Khi đó tại M_o.

1) Nếu $s^2 - rt < 0$ thì $f(x, y)$ đạt cực trị tại M_o. Đó là cực tiểu nếu $r > 0$, là cực đại nếu $r < 0$.

2) Nếu $s^2 - rt > 0$ thì $f(x, y)$ không đạt cực trị tại M_o.

3) Nếu $s^2 - rt = 0$ thì $f(x,y)$ có thể đạt cực trị tại M_o, cũng có thể không đạt cực trị tại M_o (trường hợp nghi ngờ).

Chứng minh. Giả sử điểm $M(x_o + h, y_o + k)$ ở lân cận M_o. Đặt $\Delta = f(M) - f(M_o)$. Theo công thức Taylor, ta có

$$\Delta = \frac{1}{2}(rh^2 + 2shk + tk^2) + R(h, k) \tag{1.16}$$

trong đó R(h, k) là một vô cùng bé bậc ba đối với $\rho = \sqrt{h^2 + k^2}$. Do đó khi h và k khá nhỏ thì Δ cùng dấu với $g(h,k) = rh^2 + 2shk + tk^2$.

Nếu $k \neq 0$, $g(h, k) = k^2(ru^2 + 2su + t)$, trong đó $u = \frac{h}{k}$.

Giả sử $s^2 - rt < 0$, tam thức bậc hai $ru^2 + 2su + t$ luôn cùng dấu với r, Δ cũng vậy. Còn nếu $k = 0$ thì $g(h, k) = rh^2$, nó luôn có dấu của r ($r \neq 0$, vì $s^2 - rt < 0$).

Giả sử $s^2 - rt > 0$, tam thức $ru^2 + 2su + t$ đổi dấu khi u biến thiên, do đó Δ cũng đổi dấu, f không đạt cực trị tại M_o.

Giả sử $s^2 - rt = 0$, tam thức $ru^2 + 2su + t$ có một nghiệm kép u_o. Nếu $\frac{h}{k} = u_o$, dấu của Δ là dấu của vô cùng bé bậc ba R(h, k) trong công thức (1.16). Điều này ta không làm ở đây. ■

Ví dụ : Tìm cực trị của hàm số $z = x^3 + 2y^3 - 3x - 6y$.

Ta có $p = 3x^2 - 3$, $q = 6y^2 - 6$, $r = 6x$, $s = 0$, $t = 12y$. $p = 0$ và $q = 0$ khi $x = \pm 1$ và $y = \pm 1$. Vậy ta có bốn điểm tới hạn là $M_1(1,1)$, $M_2(-1,1)$, $M_3(-1,-1)$, $M_4(1, -1)$.

Tại M_1 ta có $r = 6$, $s = 0$, $t = 12$, $s^2 - rt = -72$, M_1 là điểm cực tiểu.

Tại M_3 ta có $r = -6$, $s = 0$, $t = -12$, $s^2 - rt = -72$, M_3 là điểm cực đại.

Tại M_2 ta có $r = -6$, $s = 0$, $t = 12$, $s^2 - rt = 72$, M_2 không là điểm cực trị.

Tại M_4 ta có $r = 6$, $s = 0$, $t = -12$, $s^2 - rt = 72$, M_4 không là điểm cực trị.

Chú thích. Nếu tại điểm M_o ta có $p = q = r = s = t = 0$, thì ta phải khai triển hàm số f theo công thức Taylor đến các số hạng cấp ba. Ta không xét trường hợp đó trong giáo trình này.

Trong trường hợp hàm số n biến số, ta phải xét dấu của các số hạng cấp hai trong khai triển Taylor, tức là phần xét dấu một dạng toàn phương n biến số. Giáo trình này cũng không xét trường hợp đó.

1.3.2. Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số nhiều biến số trong một miền đóng bị chặn. Ta biết rằng mọi hàm số nhiều biến số liên tục trong một miền đóng bị chặn D đều đạt giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của nó trong miền ấy. Nếu hàm số đạt giá trị lớn nhất hay giá trị nhỏ nhất tại một điểm trong của miền D thì điểm ấy phải là điểm cực trị của hàm số, do đó phải là điểm tới hạn. Hàm số cũng có thể đạt giá trị lớn nhất hay nhỏ nhất trên biên của miền D. Do đó muốn tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trong miền đóng D ta có thể tìm những điểm tới hạn của nó ở trong D, tính giá trị của hàm số tại các điểm ấy và so sánh chúng với những giá trị của hàm số trên biên của D.

Ví dụ : Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số

$$z = 8x^2 + 3y^2 + 1 - (2x^2 + y^2 + 1)^2$$

trong miền tròn đóng D xác định bởi $x^2 + y^2 \leq 1$.

Rõ ràng z liên tục với mọi x, y, nên nó đạt giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m trên miền D. Ta có

$$p = 16x - 2(2x^2 + y^2 + 1)\,4x = 8x(1 - 2x^2 - y^2)$$

$$q = 6y - 2(2x^2 + y^2 + 1)2y = 2y(1 - 4x^2 - 2y^2).$$

Cho $p = 0$, $q = 0$, ta được

1) $x = 0, y = 0$

2) $x = 0, 1 - 2y^2 = 0$ hay $x = 0, y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

3) $y = 0, 1 - 2x^2 = 0$ hay $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, y = 0$

4) $\begin{cases} 1 - 2x^2 - y^2 = 0 \\ 1 - 4x^2 - 2y^2 = 0 \end{cases}$, hệ này vô nghiệm.

Vậy ta có năm *điểm tới hạn* là gốc O, $A_1\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $A_2\left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $A_3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$, $A_4\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$. Cả năm điểm tới hạn này đều nằm trong miền D. Tính giá trị của z tại các điểm ấy, ta được

$$z(0) = 0,\ z(A_1) = z(A_2) = \frac{1}{4},\ z(A_3) = z(A_4) = 1.$$

Bây giờ ta xét giá trị của z trên biên của miền D. Trên biên ấy $x^2 + y^2 = 1$, vậy $y^2 = 1 - x^2$, do đó

$$z = 8x^2 + 3(1 - x^2) + 1 - (2x^2 + 1 - x^2 + 1)^2 =$$
$$= -x^4 + x^2 = x^2(1 - x^2).$$

Ta phải tìm giá trị của hàm số ấy với $-1 \leq x \leq 1$.

Rõ ràng hàm số ấy bằng 0 khi $x = \pm 1$ và đạt giá trị lớn nhất khi $x^2 = 1 - x^2 \Rightarrow 2x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$; giá trị lớn nhất ấy bằng $\frac{1}{4}$.

So sánh tất cả các giá trị đã tính, ta thấy rằng hàm số z đã cho đạt giá trị nhỏ nhất $m = 0$ tại gốc O và đạt giá trị lớn nhất $M = 1$ tại các điểm A_3, A_4.

1.4. HÀM SỐ ẨN. CỰC TRỊ CÓ ĐIỀU KIỆN

1.4.1. Khái niệm hàm số ẩn

Cho phương trình

$$F(x, y) = 0, \tag{1.17}$$

trong đó $F : U \to \mathbf{R}$ là một hàm số xác định trên tập hợp $U \subset \mathbf{R}^2$. Nếu với mỗi giá trị $x = x_0$ trong một khoảng I nào đó, có một hay nhiều giá trị y_0 sao cho $F(x_0, y_0) = 0$, ta nói rằng phương trình (1.17) xác định một hay nhiều hàm số ẩn y theo x trong khoảng I. Vậy hàm số $f : I \to \mathbf{R}$ là hàm số ẩn xác định bởi (1.17) nếu

$$\forall x \in I,\ (x, f(x)) \in U \text{ và } F(x, f(x)) = 0.$$

Chẳng hạn từ phương trình

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

ta được

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Phương trình ấy xác định hai hàm số ẩn trong khoảng $[-a, a]$. Trong trường hợp này, ta đã tìm được biểu thức tường minh của y theo x. Điều này không phải lúc nào cũng làm được, chẳng hạn, từ hệ thức $x^y = y^x$ $(x > 0, y > 0)$ không thể tính được tường minh y theo x.

Tương tự như vậy, phương trình

$$F(x, y, z) = 0$$

trong đó $F : U \to \mathbf{R}$ là một hàm số xác định trên tập hợp mở $U \subset \mathbf{R}^3$, có thể xác định một hay nhiều hàm số ẩn z của các biến số x, y. Hệ hai phương trình

$$\begin{cases} F(x, y, z, u, v) = 0 \\ G(x, y, z, u, v) = 0 \end{cases}$$

trong đó $F : U \to \mathbf{R}$, $G : U \to \mathbf{R}$ là các hàm số xác định trên tập hợp $U \subset \mathbf{R}^5$, có thể xác định một hay nhiều cặp hàm số ẩn u, v của các biến số x, y, z.

Ta có các định lí sau về sự tồn tại, tính liên tục và tính khả vi của các hàm số ẩn.

Định lí 1.9. Cho phương trình

$$(1.17) \qquad F(x, y) = 0,$$

trong đó $F : U \to \mathbf{R}$ là một hàm số có các đạo hàm riêng liên tục trên một tập hợp mở $U \subset \mathbf{R}^2$. Giả sử $(x_0, y_0) \in U$, $F(x_0, y_0) = 0$. Nếu $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$ thì phương trình (1.17) xác định trong một lân cận nào đó của x_0 một hàm số ẩn $y = f(x)$ duy nhất, hàm số ấy có giá trị bằng y_0 khi $x = x_0$, liên tục và có đạo hàm liên tục trong lân cận nói trên.

Chứng minh. Không giảm tính tổng quát, có thể giả thiết $F'_y(x_0, y_0) > 0$. Vì F'_y liên tục trên U nên tồn tại số $\alpha > 0$ sao cho

$$F'_y(x, y) > 0, \forall (x, y) \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \times [y_0 - \alpha, y_0 + \alpha].$$

Hàm số $y \mapsto f(x_o, y)$ có đạo hàm $F'_y(x_o, y) > 0$ trên đoạn $[y_o - \alpha, y_o + \alpha]$, nên tăng ngặt trên đoạn đó. Vì $F(x_o, y_o) = 0$, nên

$$f(x_o, y_o - \alpha) < 0,\ f(x_o, y_o + \alpha) > 0\,.$$

Các hàm số $x \mapsto F(x, y_o - \alpha)$ và $x \mapsto F(x, y_o + \alpha)$ liên tục trên đoạn $[x_o - \alpha, x_o + \alpha]$, nên tồn tại số $\delta > 0$ sao cho

$F(x, y_o - \alpha) < 0,\ F(x, y_o + \alpha) > 0,\ \forall x \in (x_o - \delta, x_o + \delta)$
Lấy x bất kì trên $(x_o - \delta, x_o + \delta)$. Hàm số $y \mapsto F(x, y)$ liên tục trên đoạn $[y_o - \alpha, y_o + \alpha]$, lấy những giá trị khác dấu tại $y_o - \alpha$ và $y_o + \alpha$. Do đó tồn tại $y \in (y_o - \alpha, y_o + \alpha)$ để cho $F(x, y) = 0$. Giá trị y ấy duy nhất, vì hàm số $y \mapsto F(x, y)$ tăng ngặt trên $[y_o - \alpha, y_o + \alpha]$. Vậy hệ thức (1.17) xác định y là hàm số ẩn của x duy nhất trên $(x_o - \delta, x_o + \delta)$.

Đặt $y = f(x)$, dương nhiên $f(x_o) = y_o$. Ta sẽ chứng minh rằng hàm số ẩn f liên tục trên $(x_o - \delta, x_o + \delta)$. Thật vậy, giả sử $x_1 \in (x_o - \delta, x_o + \delta)$, ε là một số dương cho trước. Đặt $y_1 = f(x_1)$. Theo trên, $y_1 \in (y_o - \alpha, y_o + \alpha)$, $f(x_1, y_1) = 0$. Khi đó, $\forall \alpha_1 > 0$ đủ nhỏ, tồn tại $\delta_1 > 0$ sao cho hệ thức (1.17) xác định một hàm số ẩn duy nhất f_1 :

$(x_1 - \delta_1, x_1 + \delta_1) \to (y_1 - \alpha_1, y_1 + \alpha_1)$. Chọn $\alpha_1 < \varepsilon$ sao cho

$(x_1 - \delta_1, x_1 + \delta_1) \times (y_1 - \alpha_1, y_1 + \alpha_1) \subset (x_o - \delta, x_o + \delta) \times (y_o - \delta, y_o + \delta)$.

Rõ ràng ta có

$$f_1(x) = f(x)\ \forall x \in (x_1 - \delta_1, x_1 + \delta_1).$$

Vậy

$|x - x_1| < \delta_1$ kéo theo $|f_1(x) - y_1| = |f(x) - f(x_1)| < \varepsilon$. Do đó $f(x)$ liên tục tại x_1.

Cuối cùng, ta chứng minh rằng f khả vi trên $(x_o - \delta, x_o + \delta)$. Giả sử $x \in (x_o - \delta, x_o + \delta)$, $x + h \in (x_o - \delta, x_o + \delta)$. Khi đó $F(x, f(x)) = 0$, $F(x + h, f(x + h)) = 0$.

Theo công thức số gia giới nội, ta có

$$0 = F(x + h\ ;\ f(x + h)) - F(x, f(x)) =$$

$$= hF'_x(x+\theta h,\ f(x) + \theta(f(x+h) - f(x))) +$$
$$+ (f(x+h) - f(x))F'_y(x+\theta h,\ f(x) + \theta(f(x+h) - f(x))).$$

Do đó

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = -\frac{F'_x(x+\theta h,\ f(x) + \theta(f(x+h) - f(x)))}{F'_y(x+\theta h,\ f(x) + \theta(f(x+h) - f(x)))}.$$

Cho $h \to 0$, vì F'_x và F'_y liên tục tại $(x, f(x))$, f liên tục tại x nên vế phải của đẳng thức trên có giới hạn là

$$-\frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}.$$

Do đó hàm f có đạo hàm tại x, cho bởi

$$f' = -\frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}$$

đạo hàm ấy liên tục vì F'_x, F'_y và f liên tục.

Chú thích. Nếu $F'_y(x_o, y_o) = 0$, nhưng $F'_x(x_o, y_o) \neq 0$ thì định lí 1.9 khẳng định rằng phương trình (1.17) xác định trong một lân cận nào đó của y_o một hàm số ẩn duy nhất $x = g(y)$, hàm số ấy có giá trị bằng x_o khi $y = y_o$, liên tục và có đạo hàm liên tục trong lân cận nói trên. Nếu $F'_y(x_o, y_o) = F'_x(x_o, y_o) = 0$ thì không kết luận được gì về sự tồn tại của hàm số ẩn xác định bởi (1.17). Điểm (x_o, y_o) tại đó $F'_x(x_o, y_o) = F'_y(x_o, y_o) = 0$ được gọi là *điểm kì dị* của phương trình (1.17).

Định lí 1.10. Cho phương trình

$$F(x, y, z) = 0, \tag{1.18}$$

trong đó $F : U \to \mathbf{R}$ *là một hàm số có các đạo hàm riêng liên tục trên một tập hợp mở* $U \subset \mathbf{R}^3$. *Giả sử* $(x_o, y_o, z_o) \in U$, $F(x_o, y_o, z_o) = 0$. *Nếu* $F'_z(x_o, y_o, z_o) \neq 0$ *thì phương trình* (1.18) *xác định trong một lân cận nào đó của điểm* (x_0, y_0) *một hàm số ẩn duy nhất* $z = f(x, y)$, *hàm số ấy có giá trị bằng* z_0 *khi* $x = x_0$, $y = y_0$, *liên tục và có các đạo hàm riêng liên tục trong lân cận nói trên.*

Chứng minh tương tự như chứng minh định lí 1.9.

Định lí 1.11. Cho hệ hai phương trình

$$(1.19) \qquad \begin{cases} F(x, y, z, u, v) = 0 \\ G(x, y, z, u, v) = 0, \end{cases}$$

trong đó $F : U \rightarrow \mathbf{R}$, $G : U \rightarrow \mathbf{R}$ *là hai hàm số có các đạo hàm riêng liên tục trên một tập hợp mở* $U \subset \mathbf{R}^5$. *Giả sử* $(x_0, y_0, z_0, u_0, v_0) \in U$, $F(x_0, y_0, z_0, u_0, v_0) = 0$, $G(x_0, y_0, z_0, u_0, v_0) = 0$. *Nếu tại điểm ấy, định thức Jacobi*

$$\frac{D(F, G)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} F'_u & F'_v \\ G'_u & G'_v \end{vmatrix} \neq 0$$

thì hệ (1.19) *xác định trong một lân cận nào đó của điểm* (x_0, y_0, z_0) *một cặp hàm số ẩn duy nhất* $u = f(x, y, z)$, $v = g(x, y, z)$, *các hàm số ấy có giá trị theo thứ tự bằng* u_0, v_0 *khi* $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$, *chúng liên tục và có các đạo hàm riêng liên tục trong lân cận nói trên.*

Ta thừa nhận định lí này.

1.4.2. Đạo hàm của hàm số ẩn

• Giả sử các giả thiết của định lí 1.9 được thỏa mãn. Khi ấy phương trình (1.17) xác định một hàm số ẩn $y = f(x)$, liên tục và có đạo hàm liên tục trong một khoảng nào đó. Trong khoảng ấy ta có

$$F(x, f(x)) = 0.$$

Lấy đạo hàm hai vế đối với x, ta được

$$F'_x + F'_y \frac{dy}{dx} = 0.$$

Vì $F'_y \neq 0$, ta có

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y}.$$

Ví dụ. $$F(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

$$F'_x = \frac{2x}{a^2},\ F'_y = \frac{2y}{b^2}.$$

Với $y \neq 0$, ta có $F'_y \neq 0$. Khi đó phương trình trên xác định một hàm số ẩn $y = y(x)$, và

$$y' = -\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x}{y}.$$

• Giả sử các giả thiết của định lí 1.10 được thỏa mãn. Phương trình (1.18) xác định một hàm số ẩn $z = f(x, y)$, liên tục và có các đạo hàm riêng liên tục trong một miền nào đó. Trong miền ấy ta có

$$F(x, y, f(x, y)) = 0.$$

Lấy đạo hàm hai vế lần lượt đối với x và y, ta được

$$F'_x + F'_z \cdot z'_x = 0$$

$$F'_y + F'_z \cdot z'_y = 0.$$

Vì $F'_z \neq 0$, ta được

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z},\ z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z}.$$

Ví dụ : $$F(x, y, z) = e^z + xy + x^2 + z^3 - 1 = 0$$

$$F'_x = y + 2x,\ F'_y = x,\ F'_z = e^z + 3z^2.$$

Vì $F'_z \neq 0\ \forall z$, nên phương trình trên xác định một hàm số ẩn $z = f(x, y)$ liên tục và có các đạo hàm riêng liên tục :

$$z'_x = -\frac{2x + y}{e^z + 3z^2},\ z'_y = -\frac{x}{e^z + 3z^2}.$$

• Giả sử các giả thiết của định lí 1.11 được thỏa mãn. Hệ phương trình (1.19) xác định hai hàm số ẩn $u = f(x, y, z)$, $v = g(x, y, z)$, liên tục và có các đạo hàm riêng liên tục trong một miền nào đó. Trong miền ấy, ta có

$$\begin{cases} F(x, y, z, f(x, y, z), g(x, y, z)) = 0 \\ G(x, y, z, f(x, y, z), g(x, y, z)) = 0. \end{cases}$$

Lấy đạo hàm đối với x từng phương trình của hệ trên, ta được

$$\begin{cases} F'_x + F_u'.u'_x + F'_v.v'_x = 0 \\ G'_x + G'_u.u'_x + G'_v.v'_x = 0 \end{cases}$$

Đó là một hệ hai phương trình tuyến tính đối với u'_x, v'_x. Vì định thức của hệ ấy là

$$\begin{vmatrix} F'_u & F'_v \\ G'_u & G'_v \end{vmatrix} = \frac{D(F, G)}{D(u, v)} \neq 0,$$

hệ ấy có một nghiệm duy nhất

$$u'_x = -\frac{\dfrac{D(F, G)}{D(x, v)}}{\dfrac{D(F, G)}{D(u, v)}}, \quad v'_x = -\frac{\dfrac{D(F, G)}{D(u, x)}}{\dfrac{D(F, G)}{D(u, v)}}.$$

Tương tự như vậy, có thể tính được u'_y, v'_y, u_z', v_z'.

1.4.3. Định lí về ánh xạ ngược

Định lí 1.12. Giả sử U *là một tập hợp mở trong* $\mathbf{R}^2$. *Cho ánh xạ* $T : U \to \mathbf{R}^2$, $(x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y))$ *các hàm số* $u(x, y)$, $v(x, y)$ *có các đạo hàm riêng liên tục trên* U. *Giả sử* $(x_0, y_0) \in U$, $u_0 = u(x_0, y_0)$, $v_0 = v(x_0, y_0)$. *Nếu tại* (x_0, y_0), *định thức Jacobi*

$$\frac{D(u, v)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix} \neq 0,$$

thì :

1) *Có một lân cận* V *của* (x_0, y_0) *sao cho* $W = T(V)$ *là một lân cận của* (u_0, v_0), *ánh xạ* T *hạn chế trên* V (*kí hiệu là* $T|_V$) *là một song ánh từ* V *lên* W.

2) *Ánh xạ ngược* T^{-1} *từ* W *lên* V *được xác định bởi*

$$(u, v) \longmapsto (x(u, v), y(u, v)),$$

x(u, v), y(u, v) *có các đạo hàm riêng liên tục trên* W.

3) (1.20) $$\frac{D(u, v)}{D(x, y)} \cdot \frac{D(x, y)}{D(u, v)} = 1.$$

Chứng minh. Đặt u = u(x, y), v = v(x, y). Xét hệ phương trình

(1.21) $$\begin{cases} F(x, y, u, v) = u(x, y) - u = 0 \\ G(x, y, u, v) = v(x, y) - v = 0, \end{cases}$$

F và G là hai hàm số có đạo hàm riêng liên tục trên $U \times \Omega$, trong đó $\Omega = F(U)$. Rõ ràng (x_0, y_0, u_0, v_0) là một nghiệm của hệ (1.21). Vì

$$\frac{D(F, G)}{D(x, y)}(x_0, y_0, u_0, v_0) = \begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix}(x_0, y_0) = \frac{D(u, v)}{D(x, y)}(x_0, y_0) \neq 0,$$

theo định lí 1.11, hệ (1.21) xác định một cặp hàm số ẩn duy nhất x = x(u, v), y = y(u, v), có các đạo hàm riêng liên tục trong một lân cận W của (u_0, v_0). $V = T^{-1}(W)$ là một lân cận của (x_0, y_0). $T|_V$ là một song ánh từ V lên W.

Lấy đạo hàm các phương trình của hệ (1.21) theo u và v, ta được

$$u'_x x'_u + u'_y y'_u - 1 = 0$$

$$v'_x x'_u + v'_y y'_u = 0 \quad u'_x x'_v + u'_y y'_v = 0 \quad v'_x x'_v + v'_y y'_v - 1 = 0.$$

Từ đó, ta có

$$\frac{D(u, v)}{D(x, y)} \cdot \frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} u'_x x'_u + u'_y y'_u & u'_x x'_v + u'_y y'_v \\ v'_x x'_u + v'_y y'_u & v'_x x'_v + v'_y y'_v \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Chú thích. Với hàm số $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ khả vi liên tục, nếu $f'(x) \neq 0$ $\forall x$ thì f có hàm số ngược toàn cục f^{-1} khả vi liên tục và $(f^{-1})'[f(x)] = \dfrac{1}{f'(x)}$. Định lí 1.12 là mở rộng kết quả ấy sang ánh xạ $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, $n \geq 2$. Nhưng điều kiện định thức Jacobi của T khác không chỉ đảm bảo rằng ánh xạ ngược T^{-1} chỉ tồn tại địa phương ở lân cận mỗi điểm.

1.4.4. Cực trị có điều kiện

Người ta gọi cực trị của hàm số

$$z = f(x,y) \tag{1.22}$$

trong đó các biến số x và y bị ràng buộc bởi hệ thức

$$g(x,y) = 0 \tag{1.23}$$

là cực trị có điều kiện.

- ***Điều kiện ắt có của cực trị có điều kiện***

Định lí. *Giả sử $M_o(x_o, y_o)$ là điểm cực trị có điều kiện của hàm số (1.22) với điều kiện (1.23). Giả sử*

1) Ở lân cận M_o các hàm số f(x,y), g(x,y) có các đạo hàm riêng cấp một liên tục,

2) Các đạo hàm riêng g'_x, g'_y không đồng thời bằng không tại M_o. Khi đó ta có tại M_o

$$\begin{vmatrix} f'_x & f'_y \\ g'_x & g'_y \end{vmatrix} = 0. \tag{1.24}$$

Chứng minh. Đương nhiên ta có $g(x_o, y_o) = 0$. Từ giả thiết 2, có thể xem như $g'_y(x_o, y_o) \neq 0$. Theo định lí về hàm số ẩn, hệ thức (1.23) xác định một hàm số ẩn $y = y(x)$ khả vi ở lân cận x_0. Thế $y = y(x)$ vào (1.22), hàm số một biến số $x \mapsto f(x, y(x))$ đạt cực trị tại $x = x_0$, do đó

$$f'_x(x_0, y_0) + f'_y(x_0, y_0)y'(x_0) = 0$$

hay

$$f'_x(x_0, y_0)dx + f'_y(x_0, y_0)dy = 0. \tag{1.25}$$

Mặt khác, lấy vi phân hai vế của (1.23), ta được

$$g'_x(x_0, y_0)dx + g'_y(x_0, y_0)dy = 0. \tag{1.26}$$

Xem hệ (1.25), (1.26) là hệ hai phương trình tuyến tính thuần nhất đối với dx, dy, hệ ấy có nghiệm không tầm thường, vậy định thức của nó bằng không

$$\begin{vmatrix} f'_x(x_0, y_0) & f'_y(x_0, y_0) \\ g'_x(x_0, y_0) & g'_y(x_0, y_0) \end{vmatrix} = 0$$

Đó chính là hệ thức (1.24) mà ta cần chứng minh.

Hệ thức (1.24) cùng với điều kiện (1.23) cho phép ta xác định (x_0, y_0).

Chú thích 1. Hệ thức (1.24) lại là điều kiện cần và đủ để cho hệ phương trình

$$\begin{cases} f'_x(x_0, y_0) + \lambda g'_x(x_0, y_0) = 0 \\ f'_y(x_0, y_0) + \lambda g'_y(x_0, y_0) = 0, \end{cases}$$

xem là hệ phương trình tuyến tính thuần nhất đối với $1, \lambda$ có nghiệm không tầm thường. Do đó *nếu các điều kiện của định lí được thỏa mãn thì tồn tại một số λ sao cho tại điểm M_0 ta có*

$$\begin{cases} f'_x(x, y) + \lambda g'_x(x, y) = 0 \\ f'_y(x, y) + \lambda g'_y(x, y) = 0. \end{cases} \tag{1.27}$$

Hệ phương trình (1.27) cùng với phương trình (1.23) cho phép ta tìm λ, x_0 và y_0. Số λ được gọi là *nhân tử Lagrange*. Phương pháp tìm (x_0, y_0) như vừa trình bầy được gọi là *phương pháp nhân tử Lagrange.*

Chú thích 2. Định lí trên cũng như phương pháp nhân tử Lagrange giúp ta thu hẹp việc tìm cực trị có điều kiện của hàm số (1.22) với điều kiện (1.23) tại những điểm có tọa độ thỏa mãn hệ thức (1.24) hay hệ (1.27) hoặc tại những điểm ở đó các điều kiện 1/ hoặc 2/ của định lí không được thỏa mãn. Những điểm ấy được gọi là *điểm tới hạn.* Ta còn phải xét xem những điểm ấy có thực sự là điểm cực trị không.

Ví dụ 1 : Tìm cực trị của hàm số $z = x^2 + y^2$ với điều kiện $ax + by + c = 0$ $(c \neq 0)$

Điều kiện (1.24) cho ta

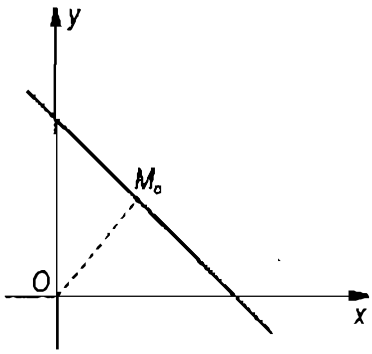
$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$$

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{b} \\ ax + by + c = 0 \end{cases},$$

ta được một điểm tới hạn duy nhất

$$M_0\left(-\frac{ac}{a^2+b^2}, -\frac{bc}{a^2+b^2}\right).$$



Hình 1.5

Về mặt hình học, ta phải tìm cực trị của bình phương khoảng cách từ gốc O đến một điểm trên đường thẳng $ax + by + c = 0$ (hình 1.5). Bài toán này có một cực tiểu, không có cực đại, do đó cực tiểu chỉ có thể đạt được tại điểm tới hạn, cực tiểu ấy bằng $\dfrac{c^2}{a^2+b^2}$, đây là một kết quả quen thuộc.

● Phương pháp khảo sát trên cũng được mở rộng cho hàm số n biến số ($n \geq 3$).

$$(1.31)\qquad \begin{cases} f'_x(x, y, z) + \lambda g'_x(x, y, z) = 0 \\ f'_y(x, y, z) + \lambda g'_y(x, y, z) = 0 \\ f'_z(x, y, z) + \lambda g'_z(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

Ví dụ 2 : Tìm cực trị của hàm số $u = x - 2y + 2z$ với điều kiện $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$.

Các hệ thức (1.30) cho ta $\frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{2}$. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{2} \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

ta tìm được hai điểm tới hạn $M_1\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ và $M_2\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$. Để xét xem điểm M_1 có là điểm cực trị không, ta cho x, y, z những số gia h, k, l ở lân cận M_1 và xét dấu của số gia

$$\Delta u = \left(\frac{1}{3} + h\right) - 2\left(-\frac{2}{3} + k\right) + 2\left(\frac{2}{3} + l\right) - \\ - \left[\frac{1}{3} - 2\left(-\frac{2}{3}\right) + 2\left(\frac{2}{3}\right)\right] = h - 2k + 2l.$$

Mặt khác, ta phải có

$$\left(\frac{1}{3} + h\right)^2 + \left(-\frac{2}{3} + k\right)^2 + \left(\frac{2}{3} + l\right)^2 = 1$$

hay

$$\frac{2h}{3} - \frac{4k}{3} + \frac{4l}{3} + h^2 + k^2 + l^2 = 0.$$

Do đó

$$\Delta u = h - 2k + 2l = -\frac{3}{2}(h^2 + k^2 + l^2) < 0$$

nếu h, k, l không đồng thời bằng không. Vậy M_1 là điểm cực đại, $u(M_1) = 3$, tương tự, có thể thấy M_2 là điểm cực tiểu, $u(M_2) = -3$.

Cũng có thể nhận xét như sau : Hàm số $u = x - 2y + 3z$ liên tục trong $\mathbf{R}^3$, nên nếu chỉ xét u trên mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ thì u cũng liên tục. Đương nhiên mặt cầu là một tập hợp đóng bị chặn, nên thu hẹp của u trên mặt cầu đạt giá trị lớn nhất và bé nhất của nó trên mặt cầu, vậy chỉ có thể có các giá trị ấy tại hai điểm tới hạn M_1, M_2.

● Trường hợp hàm số ba biến số bị ràng buộc với nhau bởi hai hệ thức :

Giả sử $M_o(x_o, y_o, z_o)$ là điểm cực trị của hàm số

(1.32) $$u = f(x,y,z),$$

trong đó các biến số x,y,z thỏa mãn hai hệ thức

(1.33) $$g(x, y, z) = 0$$

(1.34) $$h(x, y, z) = 0.$$

Giả sử : 1) các hàm số f, g, h có các đạo hàm riêng cấp một liên tục ở lân cận M_o,

2) định thức Jacobi

$$\frac{D(g,h)}{D(y,z)} \neq 0 \text{ tại } M_o.$$

Khi đó ta có tại M_o

(1.35) $$\begin{vmatrix} f'_x & f'_y & f'_z \\ g'_x & g'_y & g'_z \\ h'_x & h'_y & h'_z \end{vmatrix} = 0.$$

Thật vậy, lập luận như trong các trường hợp trên ta có tại M_o

$$\begin{cases} f'_x + f'_y y'_x + f'_z z'_x = 0 \\ g'_x + g'_y y'_x + g'_z z'_x = 0 \\ h'_x + h'_y y'_x + h'_z z'_x = 0. \end{cases}$$

Xem đó là một hệ ba phương trình tuyến tính thuần nhất đối với 1, y'_x, z'_x ; hệ ấy có nghiệm không tầm thường nên định thức của nó bằng không, vậy ta được hệ thức (1.35). ■

Hệ thức (1.35) cùng với các điều kiện (1.33), (1.34) giúp ta tìm (x_0, y_0, z_0).

Trong trường hợp này phương pháp nhân tử Lagrange được phát biểu như sau : Tìm năm số λ, μ, x_0, y_0, z_0 thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} f'_x + \lambda g'_x + \mu h'_x = 0 \\ f'_y + \lambda g'_y + \mu h'_y = 0 \\ f'_z + \lambda g'_z + \mu h'_z = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \\ h(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

TÓM TẮT CHƯƠNG I

- **Giới hạn của hàm số f(x, y) tại một điểm**

Ta nói rằng $f(x, y)$ dần đến l khi (x, y) dần tới (x_0, y_0) nếu $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ sao cho

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta \Rightarrow |f(x, y) - l| < \varepsilon.$$

Kí hiệu $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = l$.

- **Tính liên tục của hàm số f(x, y) tại một điểm**

Ta nói rằng $f(x, y)$ liên tục tại điểm (x_0, y_0) nếu $f(x, y)$ xác định tại (x_0, y_0) và $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$.

- **Đạo hàm riêng**

$$f'_x(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

Khi tính đạo hàm riêng của f theo x thì y được xem như không đổi. Định nghĩa tương tự với $f'_y(x_0, y_0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$.

- **Vi phân toàn phần**

$$df(x, y) = f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy.$$

Dạng của nó không đổi dù x, y là biến số độc lập hay x, y là hàm số của các biến số khác.

df(x, y) là phần chính của số gia f(x + Δx, y + Δy) − f(x, y).

Công thức tính gần đúng

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y.$$

- Đạo hàm của hàm số hợp

$$F = f \circ \varphi : (x, y) \overset{\varphi}{\longmapsto} (u(x, y), v(x, y)) \overset{f}{\longmapsto} f(u(x, y), v(x, y))$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y}. \end{cases}$$

- Đạo hàm của hàm số ẩn

Với một số điều kiện, hệ thức F(x, y) = 0 xác định một hàm số ẩn y = y(x). Ta có

$$y'(x) = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}.$$

Với một số điều kiện, hệ thức F(x, y, z) = 0 xác định một hàm số ẩn z = z(x, y). Ta có

$$z'_x(x, y) = -\frac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)},\ z'_y(x, y) = -\frac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}.$$

- Đạo hàm riêng cấp cao

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{x^2},\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f''_{xy},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{yx},\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''_{y^2}, \dots$$

Nếu hàm số f(x, y) có các đạo hàm riêng $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ trong miền D và nếu các đạo hàm riêng ấy liên tục tại điểm $M_o \in D$ thì tại điểm ấy

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

- Vi phân cấp cao

$$d(df) = d^2 f,\ d(d^2 f) = d^3 f,\ \ldots$$

Nếu z = f(x, y) thì

$$d^2 f = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 f$$

...

$$d^n f = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n f$$

với quy ước xem $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^k \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^l f$ là $\frac{\partial^{k+l} f}{\partial x^k \partial y^l}$.

Vi phân cấp n > 1 không có dạng bất biến.

- Đạo hàm theo hướng xác định bởi vectơ đơn vị $\vec{l}$

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}(M_o) = \lim_{\rho \to o} \frac{u(M) - u(M_o)}{\rho}, \text{ trong đó } \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_o} + \rho\vec{l}.$$

- Gradiên của hàm số u

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, u(M_o) = \frac{\partial u}{\partial x}(M_o)\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}(M_o)\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}(M_o)\vec{k}.$$

Ta có

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}(M_o) = \text{ch}_{\vec{l}}\, \overrightarrow{\text{grad}}\, u(M_o).$$

- Hàm số thuần nhất

Hàm số $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ được gọi là thuần nhất bậc k nếu

$$f(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n) = t^k f(x_1, x_2, \ldots, x_n),\ \forall t > 0.$$

Hàm số $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ là thuần nhất bậc k khi và chỉ khi

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = kf \text{ (công thức Euler).}$$

- Công thức số gia giới nội

$$f(x_o + \Delta x, y_o + \Delta y) - f(x_o, y_o) = \Delta x . f'_x(x_o + \theta\Delta x, y_o + \theta\Delta y) +$$

$$+ \Delta y . f'_y(x_o + \theta\Delta x, y_o + \theta\Delta y), \ 0 < \theta < 1.$$

- Công thức Taylor

$$f(x_o + \Delta x, y_o + \Delta y) - f(x_o, y_o) = df(x_o, y_o) + \frac{1}{2!}d^2f(x_o, y_o) + ... +$$

$$+ \frac{1}{n!}d^nf(x_o, y_o) + \frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}f(x_o + \theta\Delta x, y_o + \theta\Delta y), \ 0 < \theta < 1.$$

- Cực trị của hàm số

Điều kiện cần của cực trị : Nếu hàm số $f(x, y)$ đạt cực trị tại $M_o(x_o, y_o)$ thì tại đó $p = q = 0$ ($p = f'_x(x, y)$, $q = f'_y(x, y)$).

Điều kiện đủ của cực trị : Giả sử tại $M_o(x_o, y_o)$ ta có $p = q = 0$. Nếu tại M_o, $s^2 - rt < 0$ thì M_o là điểm cực trị, đó là điểm cực đại nếu $r < 0$, là điểm cực tiểu nếu $r > 0$. Nếu tại M_o, $s^2 - rt > 0$ thì M_o không là điểm cực trị ($r = f''_{x^2}(x, y)$, $s = f''_{xy}(x, y)$, $t = f''_{y^2}(x, y)$).

- Cực trị có điều kiện

Điều kiện cần của cực trị có điều kiện : Nếu hàm số $u = f(x, y, z)$ trong đó các biến số x, y, z thỏa mãn điều kiện $g(x, y, z) = 0$ đạt cực trị tại điểm $M_o(x_o, y_o, z_o)$ thì tại đó

$$\frac{f'_x}{g'_x} = \frac{f'_y}{g'_y} = \frac{f'_z}{g'_z}.$$

Có thể tìm (x_o, y_o, z_o) bằng phương pháp nhân tử Lagrange như sau : Tìm bốn số λ, x_o, y_o, z_o thỏa mãn hệ bốn phương trình

$$\begin{cases} f'_x + \lambda g'_x = 0 \\ f'_y + \lambda g'_y = 0 \\ f'_z + \lambda g'_z = 0 \\ g(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

Bài tập

1. Tìm miền xác định của các hàm số sau :

a) $z = \ln xy$; b) $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2} + \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$

c) $z = \dfrac{1}{\sqrt{x + y}} + \dfrac{1}{\sqrt{x - y}}$; d) $z = \arcsin \dfrac{y - 1}{x}$

e) $z = \sqrt{x \ln y}$; f) $z = \dfrac{1}{y - x^2}$.

2. Tìm giới hạn khi $(x, y) \to (0, 0)$ của các hàm số $f(x, y)$ sau :

a) $f(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$; b) $f(x, y) = x \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$

c) $f(x, y) = \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$; d) $f(x, y) = \dfrac{1 + x^2 + y^2}{y^2}(1 - \cos y)$.

3. Tính đạo hàm riêng của các hàm số sau :

a) $z = \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$; b) $z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$

c) $z = y^2 \sin \dfrac{x}{y}$; d) $z = x^{y^3}$ $(x > 0)$

e) $z = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$; f) $z = \arcsin(x - 2y)$

g) $z = \ln \dfrac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{\sqrt{x^2 + y^2} + x}$; h) $z = \operatorname{arctg} \sqrt{\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}}$

i) $u = x^{y^z}$ $(x > 0,\ y > 0)$; j) $u = e^{\frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}}$

k) $u = e^{xyz}\sin\dfrac{y}{z}$.

4. Khảo sát sự liên tục và sự tồn tại, liên tục của các đạo hàm riêng của các hàm số $f(x, y)$ sau :

a) $f(x,y) = \begin{cases} x\,\mathrm{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right)^2 & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$

b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\sin y - y\sin x}{x^2 + y^2} & \text{khi } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{khi } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

5. Chứng minh rằng hàm số $z = y\ln(x^2 - y^2)$ thỏa mãn phương trình $\dfrac{1}{x}z'_x + \dfrac{1}{y}z'_y = \dfrac{z}{y^2}$.

6. Tính đạo hàm của các hàm số hợp sau đây :

a) $z = e^{u^2 - 2v^2}$, $u = \cos x$, $v = \sqrt{x^2 + y^2}$

b) $z = \ln(u^2 + v^2)$, $u = xy$, $v = \dfrac{x}{y}$

c) $z = x^2\ln y$, $x = \dfrac{u}{v}$, $y = 3u - 2v$.

7. Bằng phép đổi biến số $u = x + y$, $v = x + 2y$, tìm hàm số $z(x, y)$ thỏa mãn phương trình

$$2z'_x - z'_y = 0.$$

8. Tìm vi phân toàn phần của các hàm số :

a) $z = \sin(x^2 + y^2)$; b) $z = e^x(\cos y + x\sin y)$

c) $z = \ln\mathrm{tg}\dfrac{y}{x}$; d) $z = \mathrm{arctg}\dfrac{x + y}{x - y}$

e) $u = x^{y^2 z}$ $(x > 0)$.

9. Tính gần đúng

a) $\sqrt[3]{(1,02)^2 + (0,05)^2}$; b) $\ln\left(\sqrt[3]{1,03} + \sqrt[4]{0,98} - 1\right)$.

10. Tính đạo hàm của các hàm số ẩn xác định bởi các phương trình sau :

a) $x^3y - y^3x = a^4$, tính y' ; b) $xe^y + ye^x - e^{xy} = 0$, tính y'

c) $\mathrm{arctg}\dfrac{x+y}{a} = \dfrac{y}{a}$, tính y' ; d) $\ln\sqrt{x^2+y^2} = \mathrm{arctg}\dfrac{y}{x}$, tính y', y''

e) $x + y + z = e^z$, tính z'_x, z'_y

f) $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0$, tính z'_x, z'_y.

11. $z = f(x, y)$ là hàm số ẩn xác định từ phương trình $z - x.e^{\frac{z}{y}} = 0$. Tính gần đúng $f(0,02 ; 0,99)$.

12. Cho $u = \dfrac{x+z}{y+z}$. Tính u'_x, u'_y biết rằng z là hàm số ẩn của x, y xác định bởi phương trình

$$ze^z = xe^x + ye^y.$$

13. Tính đạo hàm của các hàm số ẩn y(x), z(x) xác định bởi hệ

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1. \end{cases}$$

14. Phương trình $z^2 + \dfrac{2}{x} = \sqrt{y^2 - z^2}$ xác định hàm số ẩn $z = z(x, y)$. Chứng minh rằng

$$x^2z'_x + \frac{1}{y}z'_y = \frac{1}{z}.$$

15. Tính các đạo hàm riêng cấp hai của các hàm số sau :

a) $z = \dfrac{1}{3}\sqrt{(x^2 + y^2)^3}$; b) $z = x^2\ln(x + y)$

c) $z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$; d) $z = \mathrm{arctg}\dfrac{y}{x}$.

16. a) Tìm hàm số f(x, y) thỏa mãn phương trình $f''_{xy} = 0$.

b) Tìm hàm số f(x, y) thỏa mãn phương trình $f''_{x^2} = 0$.

c) Tìm hàm số u(x, y, z) thỏa mãn phương trình $u'''_{xyz} = 0$.

d) Tìm hàm số f(x, y) biết rằng $f''_{xx} = 12x^2y + 2$, $f'_y = x^4 - 30xy^5$, $f(0, 0) = 1$, $f(1, 1) = -2$.

e) Tìm hàm số u(x, y) biết rằng $u'_x = x^2 - 2xy^2 + 3$, $u'_y = y^2 - 2x^2y + 3$.

17. Chứng minh rằng hàm số $z = xf\left(\frac{y}{x}\right)$, trong đó f là một hàm số có đạo hàm cấp hai liên tục, thỏa mãn phương trình

$$z''_{x^2} \cdot z''_{y^2} = (z''_{xy})^2.$$

18. Chứng minh rằng hàm số :

a) $u = \ln\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ thỏa mãn phương trình

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

b) $u = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ thỏa mãn phương trình

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

19. Tìm hàm số f(x, y, z) có dạng g(r), trong đó $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ sao cho

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0.$$

20. Tính đạo hàm của hàm số ẩn y = y(x) xác định bởi hệ thức

$$\arcsin \sqrt[3]{\frac{x^3 + y^3 - 3x^2y}{x^3 + y^3 - 3xy^2}} = a, \text{ a là hằng số.}$$

21. Chứng minh rằng nếu f(x, y) là một hàm số thuần nhất bậc 1 thì ta có

$$(f''_{xy})^2 = f''_{x^2} . f''_{y^2}.$$

22. Tính đạo hàm của hàm số $u = xy^2z^3$ tại điểm $M_0(1, 2, -1)$ theo hướng xác định bởi vectơ $\overrightarrow{M_0M_1}$ với $M_1(0, 4, -3)$.

23. Tính đạo hàm của hàm số $u = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$ theo hướng của bán kính vectơ $\vec{r}$. Khi nào đạo hàm ấy bằng $|\overrightarrow{\text{grad}}\, u|$?

24. Tính đạo hàm của hàm số $u = \frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ theo hướng của vectơ $\vec{l}$, với $\vec{l}(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$. Khi nào thì đạo hàm ấy triệt tiêu ?

25. Cho $u = x^2y^2z^2$. Tính $\overrightarrow{\text{grad}}\, u$ và $\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}$ tại $M_0(1, -1, 3)$ biết rằng $\vec{l}$ được xác định bởi vectơ $\overrightarrow{M_0M_1}$ với $M_1(0, 1, 1)$.

26. Chứng minh rằng :

a) $\overrightarrow{\text{grad}}\,(c_1u_1 + c_2u_2) = c_1\overrightarrow{\text{grad}}\, u_1 + c_2\overrightarrow{\text{grad}}\, u_2$

(c_1, c_2 là hai hằng số)

b) $\overrightarrow{\text{grad}}\,(u_1 . u_2) = u_1 . \overrightarrow{\text{grad}}\, u_2 + u_2 . \overrightarrow{\text{grad}}\, u_1$

c) $\overrightarrow{\text{grad}}\,(f(u)) = f'(u) . \overrightarrow{\text{grad}}\, u.$

27. Tìm cực trị của các hàm số sau :

a) $z = 4(x - y) - x^2 - y^2$; b) $z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1$

c) $z = x + y - xe^y$ d) $z = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$.

e) $z = (x^2 + y^2)e^{-(x^2 + y^2)}$;

28. Tính giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của các hàm số sau :

a) $z = x^2 - y^2$ trong miền tròn $x^2 + y^2 \leq 4$

b) $z = x^2y(4 - x - y)$ trong hình tam giác giới hạn bởi cac đường thẳng $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 6$

c) $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$ trong hình chữ nhật giới hạn bởi các đường thẳng $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 2$

d) $z = e^{-(x^2+y^2)}(2x^2 + 3y^2)$ trong miền tròn $x^2 + y^2 \leq 1$

e) $z = \sin x + \sin y + \sin(x + y)$ trong hình chữ nhật giới hạn bởi $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$, $y = 0$, $y = \frac{\pi}{2}$.

29. Tìm cực trị có điều kiện :

a) $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ với điều kiện $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{a^2}$

b) $z = xy$ với điều kiện $x + y = 1$

c) $u = x + y + z$ với điều kiện $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$

d) $u = x^2 + y^2 + z^2$ với điều kiện $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ $(a > b > c)$.

30. Hình hộp chữ nhật nào nội tiếp trong hình cầu bán kính R có thể tích lớn nhất.

Đáp số và gợi ý

1. a) $\{(x, y) : x > 0, y > 0\} \cup \{(x, y) : x < 0, y < 0\}$.

b) Vành tròn đóng giới hạn bởi các đường tròn $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 4$.

c) Miền mở nằm giữa hai đường $y = x$, $y = -x$, nằm ở bên phải trục Oy.

d) $\{(x, y) : x > 0, 1 - x \leq y \leq 1 + x\} \cup \{(x, y) : x < 0, 1 + x \leq y \leq 1 - x\}$.

e) $\{(x, y) : x \geq 0, y \geq 1\} \cup \{(x, y) : x \leq 0, 0 < y \leq 1\}$.

f) $\{(x, y) : y \neq x^2\}$.

2. a) Giới hạn không tồn tại : $\lim\limits_{x\to 0} f(x,0) = 1$, $\lim\limits_{y\to 0} f(0,y) = -1$.

b) 0 ; c) 0 ; d) $\frac{1}{2}$.

3. a) $z'_x = \dfrac{x^4 + 3x^2y^2 - 2xy^3}{(x^2+y^2)^2}$, $z'_y = \dfrac{y^4 + 3x^2y^2 - 2x^3y}{(x^2+y^2)^2}$.

b) $z'_x = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $z'_y = \dfrac{y}{x^2+y^2+\sqrt{x^2+y^2}}$.

c) $z'_x = y\cos\dfrac{x}{y}$, $z'_y = 2y\sin\dfrac{x}{y} - x\cos\dfrac{x}{y}$.

d) $z'_x = y^3x^{y^3-1}$, $z'_y = x^{y^3}.\ln x.3y^2$.

e) $z'_x = -\dfrac{y}{x^2+y^2}$, $z'_y = \dfrac{x}{x^2+y^2}$

f) $z'_x = \dfrac{1}{\sqrt{1-(x-2y)^2}}$, $z'_y = -\dfrac{2}{\sqrt{1-(x-2y)^2}}$

g) $z'_x = \mp\dfrac{2}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $z'_y = \dfrac{2x}{y\sqrt{x^2+y^2}}$.

h) $z'_x = \dfrac{y^2}{x\sqrt{x^4-y^4}}$, $z'_y = -\dfrac{y}{\sqrt{x^4-y^4}}$.

i) $u'_x = y^zx^{y^z-1}$, $u'_y = x^{y^z}.\ln x.zy^{z-1}$, $u'_z = x^{y^z}.\ln x.y^z.\ln y$.

j) $u'_x = -\dfrac{2x}{(x^2+y^2+z^2)^2}u$, $u'_y = -\dfrac{2y}{(x^2+y^2+z^2)^2}u$, $u'_z = -\dfrac{2z}{(x^2+y^2+z^2)^2}u$.

k) $u'_x = yze^{xyz}\sin\dfrac{y}{z}$, $u'_y = xze^{xyz}\sin\dfrac{y}{z} + e^{xyz}.\dfrac{1}{z}\cos\dfrac{y}{z}$

$u'_z = xye^{xyz}\sin\dfrac{y}{z} - e^{xyz}.\dfrac{y}{z^2}\cos\dfrac{y}{z}$.

4. a) f liên tục trên $\mathbf{R}^2$; $f'_x = \text{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right)^2 - \dfrac{2x^2y^2}{x^4+y^4}$, $f'_y = \dfrac{2x^3y}{x^4+y^4}$

Chúng liên tục với $x \neq 0$. Cần khảo sát thêm khi $x = 0$. $f'_y(x, y)$ liên tục khắp nơi, $f'_x(x, y)$ liên tục khắp nơi trừ tại (0,0)

b) f liên tục trên $\mathbf{R}^2$, $f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 0$, nhưng f'_x, f'_y không liên tục tại (0, 0).

6. a) $z'_x = -e^{\cos^2 x - 2(x^2+y^2)}.(2\cos x \sin x + 4x)$

$z'_y = -e^{\cos^2 x - 2(x^2+y^2)}.4y$

b) $z'_x = \dfrac{2}{x}$, $z'_y = \dfrac{2(y^4 - 1)}{y(y^4+1)}$

c) $z'_u = 2\dfrac{u}{v^2}\ln(3u - 2v) + \dfrac{3u^2}{v^2(3u-2v)}$

$z'_v = -2\dfrac{u^2}{v^3}\ln(3u - 2v) - \dfrac{2u^2}{v^2(3u-2v)}$.

7. $z(x, y) = F(x + 2y)$, F là một hàm số khả vi tùy ý.

Với phép đổi biến số, phương trình trở thành $z'_u = 0$, vậy z không phụ thuộc u, nó chỉ phụ thuộc v.

8. a) $2(xdx + ydy)\cos(x^2 + y^2)$

b) $e^x[(x\cos y - \sin y)dy + (\sin y + \cos y + x\sin y)dx]$

c) $\dfrac{2(xdy - ydx)}{x^2\sin\dfrac{2y}{x}}$

d) $\dfrac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$

e) $y^2zx^{y^2z-1}dx + x^{y^2z}.\ln x.2yzdy + x^{y^2z}.\ln x.y^2dz$.

9. a) 1,013 ; b) 0,005.

10. a) $y' = \dfrac{y(3x^2 - y^2)}{x(3y^2 - x^2)}$; b) $y' = \dfrac{e^y + ye^x - ye^{xy}}{-xe^y - e^x + xe^{xy}}$

c) $y' = \frac{a^2}{(x+y)^2}$; d) $y' = \frac{x+y}{x-y}$, $y'' = \frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}$

e) $z'_x = z'_y = \frac{1}{x+y+z-1}$

f) $z'_x = -\frac{x^2-yz}{z^2-xy}$, $z'_y = -\frac{y^2-xz}{z^2-xy}$.

11. 0,02.

12. $u'_x = \frac{1}{y+z} + \frac{y-x}{(y+z)^2} \cdot \frac{e^x(1+x)}{e^z(1+z)}$

$$u'_y = -\frac{x+z}{(y+z)^2} + \frac{y-x}{(y+z)^2} \cdot \frac{e^y(1+y)}{e^z(1+z)}.$$

13. $y' = \frac{z-x}{y-z}$, $z' = \frac{y-x}{z-y}$.

15. a) $z''_{x^2} = \frac{2x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $z''_{xy} = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $z''_{y^2} = \frac{x^2+2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

b) $z''_{x^2} = 2\ln(x+y) + \frac{2x}{x+y} + \frac{x^2+2xy}{(x+y)^2}$

$$z''_{xy} = \frac{2x}{x+y} - \frac{x^2}{(x+y)^2}, \quad z''_{y^2} = -\frac{x^2}{(x+y)^2}$$

c) $z''_{x^2} = -\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}$, $z''_{xy} = -\frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}}$

$$z''_{y^2} = \frac{x^3+(x^2-y^2)\sqrt{x^2+y^2}}{(x^2+y^2)^{3/2}(x+\sqrt{x^2+y^2})^2}$$

d) $z''_{x^2} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$, $z''_{xy} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$, $z''_{y^2} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$.

16. a) $f(x, y) = F(x) + G(y)$, F và G là hai hàm số tùy ý

b) $f(x, y) = xF(y) + G(y)$, F và G là hai hàm số tùy ý.

c) $u(x, y, z) = G(y, z) + H(x, z) + F(x, y)$, F, G, H là các hàm số tùy ý

d) $f(x, y) = x^4y - 5xy^6 + x^2 + 1$

e) $u(x, y) = \dfrac{x^3 + y^3}{3} - x^2y^2 + 3(x + y) + C.$

19. $g(r) = -\dfrac{a}{r} + b$, (a, b là những hằng số tùy ý).

20. $y' = \dfrac{y}{x}$.

Đặt $F(x, y) = \arcsin \sqrt[3]{\dfrac{x^3 + y^3 - 3x^2y}{x^3 + y^3 - 3xy^2}} - a$, F(x, y) là một hàm số thuần nhất bậc 0, nên theo công thức Euler

$$xF'_x + yF'_y = 0.$$

Mặt khác $F'_x + F'_y y' = 0 \Rightarrow y' = \dfrac{y}{x}$.

21. Dùng công thức Euler.

Hàm số ở bài tập 17 là một hàm số thuần nhất bậc một nên cũng thỏa mãn hệ thức này.

22. $-\dfrac{28}{3}$.

23. $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{r}} = \dfrac{2u}{r}$; a = b = c.

24. $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{l}} = -\dfrac{\cos(\vec{l}, \vec{r})}{r^2}$, triệt tiêu khi $\vec{l} \perp \vec{r}$.

25. $\overrightarrow{\text{grad}}\, u(M_o) = -6(-3\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k})$

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}(M_o) = -22.$$

27. a) $z_{max} = 8$ tại (2, -2)

b) $z_{min} = 0$ tại (-1, 1).

c) Không có cực trị.

d) $z_{min} = -\frac{9}{8}$ tại $\left(-\frac{1}{2}, -1\right)$, $\left(\frac{1}{2}, -1\right)$, $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$, $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$

e) $z_{min} = 0$ tại $(0, 0)$; $z_{max} = \frac{1}{e}$ trên đường tròn $x^2 + y^2 = 1$.

28. a) Giá trị lớn nhất là 4 tại (2, 0), (−2, 0)

Giá trị nhỏ nhất là −4 tại (0, 2), (0, −2).

b) Giá trị lớn nhất là 4 tại (2, 1)

Giá trị nhỏ nhất là −64 tại (4, 2).

c) Giá trị lớn nhất là 17 tại (1, 2)

Giá trị nhỏ nhất là −3 tại (1, 0).

d) Giá trị lớn nhất là $\frac{3}{e}$ tại (0, 1), (0, −1)

Giá trị nhỏ nhất là 0 tại (0, 0).

e) Giá trị lớn nhất là $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ tại $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$

Giá trị nhỏ nhất là 0 tại (0, 0).

29. a) $z_{min} = -\frac{\sqrt{2}}{a}$ tại $\left(\frac{-a}{\sqrt{2}}, \frac{-a}{\sqrt{2}}\right)$, $z_{max} = \frac{\sqrt{2}}{a}$ tại $\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$.

b) $z_{max} = \frac{1}{4}$ tại $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

c) $u_{min} = 9$ tại (3, 3, 3)

d) $u_{min} = c^2$ tại $(0, 0, \pm c)$, $u_{max} = a^2$ tại $(\pm a, 0, 0)$.

30. Hình lập phương có cạnh bằng $\frac{2R}{\sqrt{3}}$.