BÀI TẬP ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH - CHƯƠNG 3
BÀI TOÁN GIÁ TRỊ RIÊNG VÀ CHÉO HÓA MA TRẬN
Bộ môn Toán - Đại học Phenikaa
Ngày 19 tháng 12 năm 2021

- Biên soạn: Phan Quang Sáng

Bài tập Chương 3
Bài toán giá trị riêng và chéo hóa ma trận

Bài 1 Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$. Các véc tơ dưới đây có phải véc tơ riêng của A không?

$$u = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ u = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, w = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Bài 2 Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 6 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$. Các véc tơ dưới đây có phải véc tơ riêng của A không?

$$u = \begin{bmatrix} -1 \\ -6 \\ 13 \end{bmatrix}, \ v = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}, \ w = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Bài 3 Cho ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}.$$

(a) Tìm các giá trị riêng của và các véc tơ riêng tương ứng của A.

(b) Ma trận A có chéo hóa được không. Nếu có hãy tìm ma trận làm chéo hóa A và ma trận chéo đồng dạng của A.

(c) Tính A^{2022}.

Bài 4 Cho ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

(a) Tìm các giá trị riêng của A.

(b) Tìm các véc tơ riêng thực của A.

Bài 5 Cho ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

(a) Tìm các giá trị riêng của và các véc tơ riêng tương ứng của A.

(b) Ma trận A có chéo hóa được không?

Bài 6 Hãy chéo hóa ma trận sau (nếu có thể)

$$\begin{bmatrix} -4 & -17 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Bài 7 Cho ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 6 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

(a) Tìm các giá trị riêng của và các véc tơ riêng tương ứng của A.

(b) Ma trận A có chéo hóa được không. Nếu có hãy tìm ma trận làm chéo hóa A và ma trận chéo đồng dạng của A.

Bài 8 Cho ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & -4 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

(a) Tìm các giá trị riêng của. Ma trận A có chéo hóa được không?

(b) Tìm các véc tơ riêng tương ứng của A.

(c) Xác định ma trận làm chéo hóa A và ma trận chéo đồng dạng của A.

Bài 9 Cho ma trận sau

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Chéo hóa A (nếu có thể).

(b) Tính A^{2022}.

Bài 10 Chéo hóa ma trận sau (nếu được)

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

Bài 11 Chéo hóa ma trận sau (nếu được)

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Bài 12 Chéo hóa ma trận sau (nếu được)

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Bài 13 Cho ma trận sau đối xứng

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

(a) Cho các véc tơ $u = (1, -3, 4)^T, v = (2, 3, -1)^T$. Hãy kiểm tra rằng $(Au, v) = (v, Au)$.

(b) Chứng minh rằng $(Au, v) = (v, Au)$ với mọi véc tơ cột $u, v \in \mathbb{R}^3$.

(c) Hãy chéo hóa A.

(d) Hãy chéo hóa trực giao A, tức là tìm một ma trận trực giao P sao cho $P^T AP$ có dạng chéo.

Bài 14 Gọi a là chữ số cuối cùng trong mã sinh viên, hãy chéo hóa ma trận sau

$$\begin{bmatrix} 6a - 25 & -3a + 15 \\ 10a - 50 & -5a + 30 \end{bmatrix}.$$

Bài 15 Gọi a, b là hai chữ số cuối cùng trong mã sinh viên, hãy chéo hóa ma trận sau

$$\begin{bmatrix} -4a+b+9 & -2a+b+5 \\ -2a+b+5 & -a+b+3 \end{bmatrix}.$$

Bài 16 Gọi a, b là hai chữ số cuối cùng trong mã sinh viên, hãy chéo hóa ma trận sau

$$\begin{bmatrix} 4a-3b & 12a-12b & 6a-6b \\ -a+b & -3a+4b & -2a+2b \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}.$$

Bài 17 Gọi a, b là hai chữ số cuối cùng trong mã sinh viên, hãy chéo hóa ma trận sau

$$\begin{bmatrix} 4a-3b & 12a-12b & 6a-6b \\ -a+b & -3a+4b & -2a+2b \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}.$$

Bài 18 Gọi a, b là hai chữ số cuối cùng trong mã sinh viên, hãy chéo hóa ma trận sau

$$\begin{bmatrix} -1 & -1-b & -1-b \\ -a-1 & -2a+2b-1 & -3a+2b-1 \\ a+1 & 2a-b+1 & 3a-b+1 \end{bmatrix}.$$

Bài 19 Gọi a, b, c là ba chữ số cuối cùng trong mã sinh viên, hãy chéo hóa ma trận sau

$$\begin{bmatrix} c & b+c & b+c \\ -a+c & -2a-2b+c & -3a-2b+c \\ a-c & 2a+b-c & 3a+b-c \end{bmatrix}.$$