NGUYỄN ĐÌNH TRÍ (chủ biên)
TẠ VĂN ĐĨNH – NGUYỄN HỒ QUỲNH

TOÁN HỌC CAO CẤP

TẬP HAI

PHÉP TÍNH GIẢI TÍCH MỘT BIẾN SỐ

(Tái bản lần thứ mười)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

Chương 1

SỐ THỰC

Chương này sẽ nhắc lại các khái niệm về tập hợp, ánh xạ và giải thích chi tiết tập hợp các số thực.

1.1. Tập hợp

Tập hợp là một khái niệm cơ bản của toán học. Chúng ta đã biết tập hợp các số tự nhiên **N**, tập hợp các số nguyên **Z**, tập hợp các số hữu tỉ **Q**... Ta cũng có thể nói tập hợp các điểm của một đoạn thẳng, tập hợp các đường thẳng vuông góc với một đường thẳng cho trước...

Khi nói đến một tập hợp ta nghĩ đồng thời đến các *phần tử* của tập đó ; để chỉ a là phần tử của tập hợp A ta viết $a \in A$ và đọc là a *thuộc* A ; để chỉ b không là phần tử của tập hợp A ta viết $b \notin A$ và đọc là b *không thuộc* A.

Để chứng tỏ rằng tập hợp X (gọi tắt là tập X gồm các phần tử x, y, z, ..., ta viết

$$X := \{x, y, z, \ldots\}$$

và như thế, trong biểu thức trên, ở vế phải ta đã liệt kê danh sách các phần tử của X. Việc liệt kê đó có thể là triệt để (liệt kê hết tất cả phần tử của X) nếu số phần tử của X không quá lớn ; việc liệt kê cũng có thể không triệt để (không liệt kê ra hết mọi phần tử của X) nếu số phần tử của X quá lớn, hoặc X có vô số phần tử, khi đó ta phải dùng dấu "..." miễn là không gây hiểu nhầm.

Do đó những trường hợp không thể liệt kê ra hết tất cả các phần tử của một tập hợp, người ta dùng cách sau : Để chỉ tập hợp A gồm tất cả các *phần tử có thuộc tính* σ (tính chất để xác định một phần tử thuộc hay không thuộc tập A) người ta viết :

$$A := \{a \mid a \text{ có thuộc tính } \sigma\}.$$

Tập con

Cho hai tập hợp A và B ; nếu mỗi phần tử của A là phần tử của B thì ta nói rằng A là một *tập con* của B và viết là $A \subseteq B$; nếu A là tập con của B và tập B có ít nhất một phần tử không là phần tử của A thì ta nói rằng A là *tập con thực sự* của B và viết là $A \subset B$.

Cho A, B là hai tập, nói rằng tập A *bằng* tập B và viết là $A = B$ nếu $A \subseteq B$ và $B \subseteq A$.

Tập rỗng

Theo quan niệm thông thường, một tập cần có phần tử tạo nên tập đó ; tuy nhiên, trong toán học, để tiện cho việc lập luận người ta chấp nhận khái niệm *tập rỗng* viết là $\varnothing$, là tập không chứa phần tử nào. Người ta quy ước $\varnothing$ là tập con của bất kì tập A nào, $\varnothing \subseteq A$. Cần phân biệt $\varnothing \neq \{\varnothing\}$.

Các kí hiệu lôgic

Để diễn đạt thuận lợi các lập luận toán học người ta hay sử dung các kí hiệu lôgic, ở đây chúng ta cũng nêu một số kí hiệu thường dùng và đơn giản nhất.

Nếu ta không để ý đến nội dung của một mệnh đề nào đó mà chỉ chú ý đến mối liên quan của nó với các mệnh đề khác thì ta có thể kí hiệu mệnh đề đó bởi một chữ. Chẳng hạn, kí hiệu "$\alpha \Rightarrow \beta$" được hiểu là "từ mệnh đề α suy ra mệnh đề β", kí hiệu "$\alpha \Leftrightarrow \beta$" được hiểu là "từ mệnh đề α suy ra mệnh đề β và ngược lại, từ mệnh đề β suy ra mệnh đề α" hay nói khác đi "mệnh đề α và mệnh đề β tương đương với nhau".

Bây giờ, giả sử A là một tập và t là một tính chất nào đó của những phần tử của A. Gọi C(t) là tập tất cả những phần tử của A có tính chất t, nghĩa là

$$C(t) := \{x \in A \mid x \text{ có tính chất } t\}.$$

Khi đó, nếu

• $C(t) = A$ thì mọi phần tử của A đều có tính chất t, và ta nói rằng "*Với mọi* $x \in A$, x có tính chất t" và ta viết $\forall x \in A : t(x)$; kí hiệu $\forall$ gọi là kí hiệu phổ biến (đó là chữ A viết ngược, từ chữ All (tiếng Anh)).

• $C(t) \neq \varnothing$ thì có ít nhất một phần tử x của A có tính chất t ; ta nói rằng "*Tồn tại* một phần tử $x \in A$, x có tính chất t" và viết $\exists x \in A$: t(x), kí hiệu $\exists$ gọi là kí hiệu tồn tại (đó là chữ E viết ngược, từ chữ EXISTENCE (tiếng Anh)).

Giao của hai tập

Cho A, B là hai tập, gọi *giao* của A và B, viết là $A \cap B$ và đọc là "A giao B", là tập định nghĩa bởi :

$$A \cap B := \{x \mid x \in A \text{ và } x \in B\}.$$

Hợp của hai tập

Gọi *hợp* của tập A và tập B, viết là $A \cup B$ và đọc là "A hợp B" là tập định nghĩa bởi :

$$A \cup B := \{x \mid x \in A \text{ hoặc } x \in B\}.$$

Bổ sung

Gọi *bổ sung* của B trong A ($B \subseteq A$), viết là C_AB là tập định nghĩa bởi :

$$C_AB := \{x \mid x \in A \text{ và } x \notin B\}$$

Phép giao, hợp và bổ sung thoả các tính chất sau :

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

$$C_A(B_1 \cup B_2) = C_A B_1 \cap C_A B_2$$

$$C_A(B_1 \cap B_2) = C_A B_1 \cup C_A B_2.$$

Tích Đècác

Cho hai tập A, B không rỗng, với mỗi $a \in A$ và mỗi $b \in B$, ta lập cặp (a, b) gọi là một cặp sắp thứ tự (viết phần tử $a \in A$ trước và phần tử $b \in B$ sau) ; *tích Đècác* của A và B, kí hiệu là $A \times B$ và đọc là "A tích Đècác B", là tập được định nghĩa bởi $A \times B := \{(a, b) : a \in A \; ; \; b \in B\}$.

Tập nghiệm

Một mệnh đề thuộc loại "... là thủ đô nước Việt Nam" được gọi là một *mệnh đề mở*. Mệnh đề này không đúng mà cũng không sai. Trong mệnh đề trên, nếu ta điền vào chỗ trống các từ "Hà Nội" thì được một mệnh đề đúng ; còn nếu điền vào chỗ trống các từ "Hải Phòng" thì được một mệnh đề sai.

Nói chung, trong toán học, các mệnh đề mở có dạng các phương trình hay bất phương trình. Chẳng hạn, mệnh đề

$$x + 3 = 9$$

là một mệnh đề mở, được gọi là *phương trình*, và mệnh đề

$$x + 3 < 9$$

cũng là một mệnh đề mở, được gọi là một *bất phương trình*. Trong mỗi mệnh đề trên, chữ x là một kí hiệu chỉ một số chưa định rõ và nếu thay x bởi một số cụ thể nào đó có thể làm cho mệnh đề đúng hoặc sai. Kí hiệu x được gọi là *một biến* (ẩn). Tập mọi giá trị của biến sao cho khi thay các giá trị đó vào phương trình hoặc bất phương trình thì các phương trình đó, bất phương trình đó có nghĩa, được gọi là *miền* của biến. *Tập nghiệm* của một phương trình hay bất phương trình là tập mọi phần tử của miền của biến khi thay vào mệnh đề mở thì mệnh đề đó đúng. Chẳng hạn nếu miền của biến x là tập các số nguyên dương thì tập nghiệm của phương trình

$$x + 3 = 9$$

là tập $\{6\}$, còn tập nghiệm của phương trình

$$x + 3 = 2$$

là tập rỗng $\varnothing$.

Bây giờ, nếu lấy miền của biến là tập các số nguyên thì tập $\{6\}$ là tập nghiệm của phương trình $x + 3 = 9$, còn tập $\{-1\}$ là tập nghiệm của phương trình $x + 3 = 2$. Như thế tập nghiệm của một mệnh đề mở phụ thuộc vào tập miền biến và cùng một mệnh đề mở có thể có nhiều miền biến khác nhau.

Ánh xạ

Cho hai tập E và F ; ta gọi một *ánh xạ* f từ E sang F và viết là $f : E \to F$, là *một quy tắc* làm ứng *mỗi phần tử* của E với *một phần tử xác định* của F, E được gọi là *tập gốc* (hoặc tập nguồn) và F được gọi là *tập ảnh* (hoặc tập đích) ; phần tử $y \in F$ ứng với phần tử $x \in E$ được gọi là *ảnh* của x qua ánh xạ f và viết $y = f(x)$, cũng đọc là $y = f(x)$, và để chỉ rõ quy tắc làm ứng x với y ta viết $x \mapsto f(x)$.

Ánh xạ f được gọi là *đơn ánh* nếu phương trình $f(x) = y$ có *nhiều nhất* một nghiệm $x \in E$, với mọi $y \in F$.

Ánh xạ f được gọi là *toàn ánh* nếu phương trình $f(x) = y$ có *ít nhất* một nghiệm $x \in E$ với mọi $y \in F$.

Ánh xạ f được gọi là *song ánh* nếu phương trình $f(x) = y$ có *một nghiệm duy nhất* $x \in E$ với mọi $y \in F$. Một song ánh là một ánh xạ vừa là đơn ánh vừa là toàn ánh.

Hai tập A và B được gọi là *tương đương* với nhau, viết là "$A \backsim B$" nếu tồn tại một song ánh $f : A \to B$.

Cho tập I := {1, 2, ..., n}, bất kì một tập X nào tương đương với I cũng được gọi là một tập *hữu hạn* (có số phần tử là hữu hạn và bằng n), khi đó ta viết card (X) = n. Gọi **N** là tập các số tự nhiên, bất kì một tập X nào tương đương với **N** cũng gọi là một tập *đếm được*, ta viết card (**N**) = card (X) ; (có thể hiểu là số các phần tử của X bằng số các phần tử của **N**).

1.2. Tập các số thực

Chúng ta đã biết tập các số tự nhiên **N** :

$$\mathbf{N} := \{0, 1, 2, ..., n, ...\}$$

Để mở rộng lớp nghiệm phương trình $x + n = 0$, $n \in \mathbf{N}$, ta đưa thêm tập các số nguyên **Z** :

$$\mathbf{Z} := \{0, \pm 1, \pm 2, ..., \pm n, ...\}$$

Để mở rộng lớp nghiệm phương trình $mx + n = 0$; $m, n \in \mathbf{Z}$ được đưa thêm tập các số hữu tỉ **Q** :

$$\mathbf{Q} := \{x : x = \frac{m}{n} \text{ ; } n \neq 0 \text{ ; } m, n \in \mathbf{Z} \text{ ; } m, n \text{ chỉ có ước chung là } \pm 1\}$$

và dĩ nhiên ta có bao hàm thức kép

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$$

Tuy nhiên người ta có thể chứng minh được rằng $\mathbf{Z} \sim \mathbf{N}$; $\mathbf{Q} \sim \mathbf{N}$; nghĩa là cả **Z**, lẫn **Q** đều là những tập *đếm được*.

Bây giờ để chứng tỏ rằng tập các số hữu tỉ cũng còn quá hẹp, ta xét nghiệm dương của phương trình $x^2 = 2$, và ta có $x = \sqrt{2}$; số $\sqrt{2}$ không phải là có một số hữu tỉ. Ta chứng minh điều này bằng phản chứng. Thật vậy, giả sử $\sqrt{2}$ là một số hữu tỉ ; khi đó $\sqrt{2}$ có dạng :

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n} \text{ ; } m, n \in \mathbf{N} \text{ ;}$$

với m và n chỉ có ước số chung là 1 và –1.

Vì cả hai vế của phương trình trên đều dương nên suy ra phương trình tương đương $m^2 = 2n^2$. Do đó m^2 chia hết cho 2 ; vì thế m chia hết cho 2, và ta có thể viết $m = 2p$; do đó $4p^2 = 2n^2$, nghĩa là $n^2 = 2p^2$. Cũng lập luận như trên n cũng chia hết cho 2 và như thế m và n cùng có ước số chung là 2 và điều đó mâu thuẫn với giả thiết, vậy $\sqrt{2}$ không thể là một số hữu tỉ, ta nói rằng $\sqrt{2}$ là một số vô tỉ. Hơn nữa, có thể chứng minh được rằng nếu n là một số nguyên dương, không là số chính phương, nghĩa là n không là bình phương của một số nguyên k nào thì $\sqrt{n}$ cũng là một số vô tỉ. Chẳng hạn $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \ldots$ là những số vô tỉ. Tập các số hữu tỉ và các số vô tỉ được gọi là tập các số thực và kí hiệu là **R**.

Để dễ phân biệt số vô tỉ và số hữu tỉ chúng ta đưa thêm khái niệm về số thập phân.

1.2.1. *Số thập phân*

Xét các số hữu tỉ $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}$; ta có thể viết các số đó dưới dạng số thập phân

$$\frac{1}{3} = 0,333...$$

$$\frac{1}{4} = 0,25$$

và ta nói rằng số hữu tỉ $\frac{1}{4}$ được biểu diễn dưới dạng một số thập phân *hữu hạn* và số hữu tỉ $\frac{1}{3}$ được biểu diễn dưới dạng số thập phân *vô hạn tuần hoàn*. Nói rằng $\frac{1}{4}$ là số thập phân hữu hạn vì khi biểu diễn $\frac{1}{4} = 0,25$ ta có thể kết thúc ngay ở số 5 ; trong khi $\frac{1}{3}$ là một số thập phân vô hạn tuần hoàn vì khi biểu diễn $\frac{1}{3} = 0,333...$ ta có thể viết thêm bao nhiêu số 3 nữa vẫn chưa biểu diễn đúng hẳn được số $\frac{1}{3}$, nhưng nếu muốn kéo dài con số 3 đến bao nhiêu cũng viết được. Cũng như thế, có thể viết

$$\frac{1}{7} = 0,1428571...$$

Ở đây, sau con số 1 (số sau dấu phảy thứ 7) ta viết dấu "..." vì nếu muốn viết thêm bao nhiêu số sau dấu phẩy cũng được, chẳng hạn có thể viết :

$$\frac{1}{7} = 0,14285714285714...$$

và như thế trong biểu diễn dạng thập phân của $\frac{1}{7}$, các số 142857 được lập lại theo thứ tự đó bao nhiêu lần tuỳ ý... và nếu ta muốn dừng lại ở số mấy cũng được miễn là đã biểu diễn đầy đủ các số 142857 vì biết đầy đủ 6 con số này tức là biết *quy tắc tuần hoàn* của số thập phân vô hạn tuần hoàn $0,1428571... = \frac{1}{7}$.

Người ta có thể chứng minh rằng *bất kì một số hữu tỉ* nào cũng có thể biểu diễn dưới dạng số thập phân *hữu hạn* hay *vô hạn tuần hoàn*. Với số vô tỉ thì không như thế, người ta cũng chứng minh được rằng bất kì một số vô tỉ nào cũng biểu diễn dưới dạng số thập phân *vô hạn không tuần hoàn*. Chẳng hạn khi ta viết :

$$\sqrt{2} = 1,41...$$

thì ta *không thể* từ biểu diễn thập phân này mà có thể viết thêm các số sau dấu phẩy một cách tuỳ tiện vì không *có quy tắc tuần hoàn* ; nếu viết :

$$\sqrt{2} = 1,41421...$$

thì ta chỉ có thể biết được rằng đó là *biểu diễn xấp xỉ* $\sqrt{2}$ với 5 con số sau dấu phẩy và từ năm con số đó không thể suy diễn để viết tiếp những con số thập phân khác vì $\sqrt{2}$ là số vô tỉ, có biểu diễn thập phân vô hạn không tuần hoàn.

Ngoài ra như định nghĩa ở trên, tập các số thực **R** gồm các số hữu tỉ và số vô tỉ, do vậy ta có bao hàm thức

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}.$$

Ta cũng đã biết rằng các tập **Z**, **Q** tương đương với **N** và cả 3 tập đó : tập các số tự nhiên, tập các số nguyên và tập các số hữu tỉ là những tập vô hạn, đếm được ; tập số thực **R** không phải là tập đếm được, và ta nói rằng card (**R**) là continum.

1.2.2. *Trường số thực*

Bây giờ chúng ta định nghĩa tập các số thực **R** như một tập hợp các phần tử, trong đó xác định được một số phép toán và quan hệ có các tính chất được mô tả trong một số tiên đề mà chúng ta thừa nhận. Các tiên đề ấy, trừ tiên đề cận trên đúng, phản ánh những tính chất quen thuộc của số thực mà bạn đọc đã biết từ trường trung học.

Tiên đề về cấu trúc trường(*)

Trong **R** xây dựng được hai luật hợp thành trong là phép cộng (+) và phép nhân (.), thoả mãn các tính chất sau :

1) Phép cộng và phép nhân có tính giao hoán :

$$\begin{aligned} a + b &= b + a \\ a \cdot b &= b \cdot a \end{aligned} \qquad \forall (a, b) \in \mathbf{R}^2$$

2) Phép cộng và phép nhân có tính kết hợp :

$$\begin{aligned} (a + b) + c &= a + (b + c) \\ (a \cdot b) \cdot c &= a \cdot (b \cdot c) \end{aligned} \qquad \forall (a, b, c) \in \mathbf{R}^3$$

(*) Về cấu trúc trường và quan hệ thứ tự, bạn đọc có thể xem thêm ở chương 2 và chương 1 quyển Toán học cao cấp Tập một.

3) Phép nhân có tính phân bố đối với phép cộng :

$$\left.\begin{array}{l} a.(b+c) = a.b + a.c \\ (a+b).c = a.c + b.c \end{array}\right. \quad \forall (a, b, c) \in \mathbf{R}^3$$

4) Phép cộng có phần tử trung hoà, kí hiệu là 0 :

$$a + 0 = a \qquad \forall a \in \mathbf{R}$$

Phép nhân có phần tử trung hoà, kí hiệu là 1 :

$$a \,.\, 1 = a \qquad \forall a \in \mathbf{R}$$

5) Mọi phần tử $a \in \mathbf{R}$ đều có phần tử đối, kí hiệu là $-a$:

$$a + (-a) = 0 \qquad \forall a \in \mathbf{R}$$

Mọi phần tử $a \in \mathbf{R} - \{0\}$ đều có phần tử nghịch đảo, kí hiệu là a^{-1} : $a \,.\, a^{-1} = 1$

Tiên đề về quan hệ thứ tự toàn phần(*)

Trong $\mathbf{R}$ xây dựng được quan hệ thứ tự toàn phần $\leq$, tương thích với cấu trúc trường, nghĩa là

$$x \geq y \text{ tương đương với } x + a \geq y + a \qquad \forall a \in \mathbf{R}$$

$$x \geq y \text{ tương đương với } \begin{cases} ax \geq ay \text{ nếu } a > 0 \\ ax \leq ay \text{ nếu } a < 0 \end{cases}$$

Tiên đề cận trên đúng (về tính đầy của $\mathbf{R}$)

Tập hợp $\mathbf{Q}$ các số hữu tỉ cũng thoả mãn tiên đề về cấu trúc trường và tiên đề về quan hệ thứ tự toàn phần, tức là $\mathbf{Q}$ là một trường được sắp thứ tự. Ta cũng biết rằng giữa hai số hữu tỉ a, b, tồn tại một số hữu tỉ thứ ba, chẳng hạn $\frac{a+b}{2}$, do đó giữa hai số hữu tỉ bất kì tồn tại

(*) Về cấu trúc trường và quan hệ thứ tự, bạn đọc có thể xem thêm ở chương 2 và chương 1 quyển Toán học cao cấp Tập một.

vô số số hữu tỉ khác. Tuy nhiên **Q** là một trường sắp thứ tự không đầy, như ta sẽ thấy ở dưới. Do vậy tập **R** các số thực còn thoả mãn tiên đề về tính sắp thứ tự đầy của nó, đó là tiên đề cận trên đúng.

Trước hết ta đưa vào một số định nghĩa.

Định nghĩa 1. Số thực x được gọi là *cận trên* của tập hợp $A \subset \mathbf{R}$ nếu $\forall a \in A$, $a \le x$. Khi đó ta nói tập hợp A *bị chặn trên*. x được gọi là *cận dưới* của A nếu $\forall a \in A$, $a \ge x$. Khi đó ta nói tập hợp A *bị chặn dưới*. Tập hợp A được gọi là *bị chặn* nếu nó vừa bị chặn trên, vừa bị chặn dưới.

Định nghĩa 2. Cận trên bé nhất của tập hợp A, nếu có, được gọi là *cận trên đúng* của A, kí hiệu sup A. Cận dưới lớn nhất của A, nếu có, được gọi là *cận dưới đúng* của A. Kí hiệu inf A.

sup A và inf A có thể thuộc A, cũng có thể không thuộc A. Nếu sup $A \in A$, thì sup A là *phần tử lớn nhất* của A. Kí hiệu max A. Nếu inf $A \in A$ thì inf A là *phần tử bé nhất* của A. Kí hiệu min A.

Bây giờ ta xét tập hợp $A = \{x \in \mathbf{Q} : x^2 < 2\}$. Tập hợp ấy không rỗng, vì $1 \in A$, bị chặn trên vì $\forall x \in A$, $x < 2$. Nhưng tập hợp A không có cận trên đúng thuộc **Q**, dễ thấy rằng $\sup A = \sqrt{2}$, mà $\sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$. Với ý nghĩa ấy, ta nói rằng **Q** là một trường sắp thứ tự không đầy.

Tiên đề cận trên đúng : Mọi tập hợp $A \subset \mathbf{R}$ không rỗng, bị chặn trên đều có cận trên đúng thuộc **R**.

Từ tiên đề đó, dễ dàng suy ra rằng : Một tập hợp $A \subset \mathbf{R}$ không rỗng, bị chặn dưới đều có cận dưới đúng thuộc **R**.

1.2.3. *Trị số tuyệt đối của một số thực*

Người ta gọi trị số tuyệt đối của số thực x là số thực được kí hiệu $|x|$, xác định như sau :

$$(1.1) \qquad |x| = \begin{cases} x \text{ nếu } x \ge 0 \\ -x \text{ nếu } x < 0 \end{cases}$$

Từ đó dễ dàng suy ra các tính chất sau :

(1.2) $|a.b| = |a|.|b|$

(1.3) $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ với $b \neq 0$.

(1.4) $|a + b| \leq |a| + |b|$

(1.5) $|a - b| \geq ||a| - |b||$

Thật vậy, chẳng hạn ta chứng minh (1.4). Ta có

$$-|a| \leq a \leq |a|$$

$$-|b| \leq b \leq |b|$$

Cộng hai bất đẳng thức kép ấy từng vế một, ta được

$$-(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b|$$

Từ đó suy ra (1.4). Để chứng minh (1.5) ta viết

$$|a| = |a - b + b| \leq |a - b| + |b|$$

Do đó

$$|a| - |b| \leq |a - b|$$

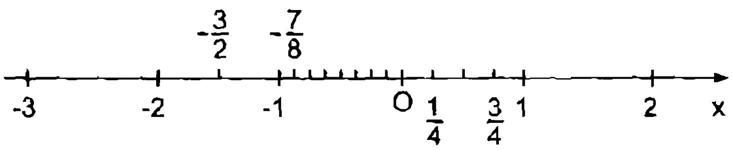
Tương tự

$$|b| - |a| \leq |b - a| = |a - b|. \blacksquare$$

1.2.4. *Trục số thực*

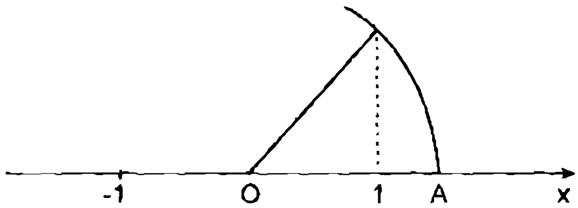
Để biểu diễn hình học tập hợp các số thực **R**, ta xét trục Ox, với O là điểm gốc. Mỗi điểm M trên trục Ox được ứng với số thực x sao cho $\overline{OM} = x$. Mỗi số thực x được ứng với điểm M trên trục Ox sao cho $\overline{OM} = x$. Đó là một song ánh giữa tập hợp **R** và trục Ox. Người ta gọi trục Ox là đường thẳng thực hay trục số thực.

Ảnh của các số $-3, -2, -\frac{3}{2}, -1, 0, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 1, 2, 3$ trên Ox được cho ở hình 1.1.



Hình 1.1

Hình 1.2 minh hoạ cách sử dụng định lí Pythagore để xác định ảnh của số vô tỉ $\sqrt{2}$ trên trục Ox.



Hình 1.2. Điểm A ứng với số $\sqrt{2}$

• Ta đưa vào các kí hiệu sau :

$\mathbf{R}_+ = \{x \in \mathbf{R} : x \geq 0\}$, $\mathbf{R}_- = \{x \in \mathbf{R} : x \leq 0\}$,

$\mathbf{R}^* = \mathbf{R} - \{0\}$, $\mathbf{R}_+^* = \mathbf{R}_+ - \{0\}$, $\mathbf{R}_-^* = \mathbf{R}_- - \{0\}$, $\mathbf{N}^* = \mathbf{N} - \{0\}$

Với $(a, b) \in \mathbf{R}^2$, $a < b$, ta có các khoảng sau :

$(a, b) = \{x \in \mathbf{R} : a < x < b\}$ $\quad$ $[a, b] = \{x \in \mathbf{R} : a \leq x \leq b\}$

$(a, b] = \{x \in \mathbf{R} : a < x \leq b\}$ $\quad$ $[a, b) = \{x \in \mathbf{R} : a \leq x < b\}$

$(-\infty, a) = \{x \in \mathbf{R} : x < a\}$ $\quad$ $(-\infty, a] = \{x \in \mathbf{R} : x \leq a\}$

$(a, +\infty) = \{x \in \mathbf{R} : x > a\}$ $\quad$ $[a, +\infty) = \{x \in \mathbf{R} : x \geq a\}$

$(-\infty, +\infty) = \mathbf{R}$

• Trên trục số thực lấy hai điểm x_1, x_2. Người ta gọi khoảng cách giữa hai điểm ấy là số, kí hiệu $d(x_1, x_2)$ được xác định bởi

$$d(x_1, x_2) = |x_1 - x_2| \tag{1.6}$$

Như vậy $|x|$ chính là khoảng cách giữa x và 0 :

$$|x| = d(x, 0)$$

Dùng các tính chất của trị số tuyệt đối của số thực, có thể suy ra các tính chất sau đây của khoảng cách :

$$(1.7)\quad \begin{cases} 1)\ d(x, x') \geq 0,\ \forall (x, x') \in \mathbf{R}^2 \\ \quad d(x, x') = 0 \Leftrightarrow x = x',\ \forall (x, x') \in \mathbf{R}^2 \\ 2)\ d(x, x') = d(x', x),\ \forall (x, x') \in \mathbf{R}^2 \\ 3)\ d(x, x') \leq d(x, x'') + d(x'', x'),\ \forall (x, x', x'') \in \mathbf{R}^3 \end{cases}$$

• Lấy điểm a trên trục số, r là một số dương. Người ta gọi r – lân cận của điểm a là khoảng kí hiệu v(a, r) được xác định bởi

(1.8) $\quad v(a, r) = \{x \in \mathbf{R} : |x - a| < r\}$

1.2.5. *Nguyên lí Archimède*

Định lí 1.1. (Archimède). Với mọi $\varepsilon > 0$ cho trước, với mọi $x > 0$ cho trước, luôn tồn tại một số nguyên dương k sao cho $k\varepsilon > x$.

Chứng minh. Ta sẽ dùng lập luận phản chứng. Giả sử điều khẳng định của định lí không đúng, nghĩa là $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $n\varepsilon \leq x$. Khi đó tập hợp $E = \{n\varepsilon : n \in \mathbf{N}^*\}$ là một tập hợp trong **R**, không rỗng và bị chặn trên. Theo tiên đề cận trên đúng, tồn tại $b = \sup E$. Vì $b - \varepsilon < b$, $b - \varepsilon$ không là cận trên của E, do đó tồn tại $n_0 \in \mathbf{N}^*$ sao cho $n_0\varepsilon > b - \varepsilon$ hay $(n_0 + 1)\varepsilon > b$, điều này mâu thuẫn với định nghĩa cận trên đúng của b. Định lí được chứng minh. ■

Hệ quả. Với mọi $x \in \mathbf{R}$, tồn tại $k \in \mathbf{Z}$ sao cho

$$k \leq x < k + 1$$

Bạn đọc hãy tự chứng minh hệ quả này.

Số k trong hệ quả ấy được gọi là *phần nguyên của x*, kí hiệu E(x).

Định lí 1.2. Giữa hai số thực bất kì luôn tồn tại một số hữu tỉ.

Chứng minh. Giả sử c, d là hai số thực với c < d. Vì d − c > 0 nên theo định lí 1.1, tồn tại $q \in \mathbf{N}^*$ sao cho $1 < (d - c)q$ hay

(1.9) $$cq + 1 < dq.$$

Mặt khác, theo hệ quả của định lí 1.1, tồn tại $p \in \mathbf{Z}$ sao cho

(1.10) $$p \le cq + 1 < p + 1$$

Từ (1.9), (1.10) suy ra

$$p - 1 \le cq < p \le cq + 1 < dq$$

Từ cq < p < dq, ta được

$$c < \frac{p}{q} < d,\ \frac{p}{q} \in \mathbf{Q}.\ \blacksquare$$

Hệ quả. Giữa hai số thực bất kì có vô số số hữu tỉ.

1.2.6. *Tập số thực mở rộng*

Ta thêm vào tập **R** hai phần tử, kí hiệu là $-\infty$, $+\infty$, đặt $\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ và mở rộng các luật hợp thành trong +, . và quan hệ thứ tự ≤ vào $\overline{\mathbf{R}}$ như sau :

$$(1.11)\quad \begin{cases} \forall x \in \mathbf{R},\ x + (+\infty) = (+\infty) + x = +\infty,\ x + (-\infty) = (-\infty) + x = \\ \qquad = -\infty,\ (+\infty) + (+\infty) = +\infty,\ (-\infty) + (-\infty) = -\infty \\ \forall x \in \mathbf{R}_+^*,\ x.(+\infty) = (+\infty).x = +\infty,\ x.(-\infty) = (-\infty).x = -\infty \\ \forall x \in \mathbf{R}_-^*,\ x.(+\infty) = (+\infty).x = -\infty,\ x.(-\infty) = (-\infty).x = +\infty \\ (+\infty).(+\infty) = (-\infty).(-\infty) = +\infty,\ (+\infty).(-\infty) = (-\infty).(+\infty) = -\infty \\ \forall x \in \mathbf{R},\ -\infty < x < +\infty \end{cases}$$

$\overline{\mathbf{R}}$ được gọi là *tập số thực mở rộng* hay *đường thẳng thực mở rộng.*

Định lí 1.3. Mọi tập hợp A không rỗng của $\overline{\mathbf{R}}$ *đều có cận trên đúng (sup A có thể bằng* $+\infty$*) và cận dưới đúng (inf A có thể bằng* $-\infty$*).*

1.3. Dãy số thực

1.3.1. *Các định nghĩa*

Định nghĩa 1. *Một dãy số thực* (nói ngắn gọn là dãy số) là một ánh xạ từ $\mathbf{N}^*$ vào $\mathbf{R}$:

$$\mathbf{N}^* \ni n \mapsto x_n \in \mathbf{R}$$

Người ta thường dùng kí hiệu $\{x_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, để chỉ một dãy số.

Thí dụ.

(a) $\{x_n\}$; $x_n = \dfrac{1}{n}$; $x_1 = 1$; $x_2 = \dfrac{1}{2}, \ldots, x_n = \dfrac{1}{n}, \ldots$

(b) $\{x_n\}$; $x_n = 1$; $x_1 = 1$; $x_2 = 1$; $\ldots, x_n = 1, \ldots$

(c) $\{x_n\}$; $x_n = (-1)^n$; $x_1 = -1$; $x_2 = 1, \ldots, x_n = (-1)^n, \ldots$

(d) $\{x_n\}$; $x_n = n^2$; $x_1 = 1$, $x_2 = 4, \ldots, x_n = n^2, \ldots$

(e) $\{x_n\}$; $x_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$; $x_1 = 2$; $x_2 = \dfrac{9}{4}, \ldots, x_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n, \ldots$

Ta hãy nêu một vài nhận xét mở đầu về các thí dụ trên.

• Trong thí dụ (a) giá trị của dãy $\{x_n\}$ luôn dương và giảm dần khi n tăng dần và có khuynh hướng giảm về số không (?)

• Trong thí dụ (b) giá trị của dãy $\{x_n\}$ luôn không đổi.

• Trong thí dụ (c) giá trị của $\{x_n\}$ chỉ lấy hai giá trị -1 hoặc $+1$ tuỳ theo n lẻ hay chẵn.

• Trong thí dụ (d) giá trị của $\{x_n\}$ luôn dương và tăng dần theo n.

• Trong thí dụ (e) giá trị của n tăng dần theo n : $x_{n+1} > x_n$. Thật vậy, dùng công thức khai triển nhị thức có :

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n =$$

$$= 1 + n.\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1.2}.\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}.\frac{1}{n^3} + \ldots +$$

$$+ \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1.2\ldots k}.\frac{1}{n^k} + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-n+1)}{1.2\ldots n}.\frac{1}{n^n}$$

tức là :

$$x_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \ldots +$$

$$+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) +$$

$$+\ldots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

trong đó : $n! := 1.2.3 \ldots (n-1)n$ và đọc là n giai thừa.

Từ hệ thức trên, thay n bởi $(n + 1)$ ta có :

$$x_{n+1} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} =$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right) + \ldots +$$

$$+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right) + \ldots +$$

$$+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right) + \frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\times$$

$$\times\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\ldots\left(1-\frac{n}{n+1}\right).$$

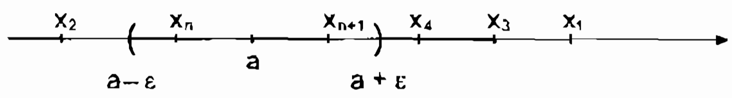
So sánh x_n và x_{n+1} trong hai khai triển trên ta thấy rằng khai triển của x_{n+1} nhiều hơn khai triển của x_n một số hạng, đồng thời từ số hạng thứ ba trở đi thì vì $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$ nên $1 - \frac{1}{n} < 1 - \frac{1}{n+1}$ nên các số hạng của x_n bé thua số hạng tương ứng của x_{n+1}, do vậy $x_{n+1} > x_n$, $\forall n$. ■

Qua những thí dụ trên ta nhận thấy một dãy số $\{x_n\}$ có thể có hai khả năng : hoặc là các giá trị có "khuynh hướng" tập trung gần một số α nào đó (thí dụ (a) thì $\alpha = 0$; thí dụ (b) : $\alpha = 1$...) hoặc là không có một số α nào để các giá trị $\{x_n\}$ tập trung quanh nó (thí dụ (c) và (d)).

Định nghĩa 2. Dãy số $\{x_n\}$ được gọi là *hội tụ* nếu tồn tại $a \in \mathbf{R}$ sao cho với mọi $\varepsilon > 0$, tìm được $n_0 \in \mathbf{N}^*$ sao cho với mọi $n \geq n_0$ ta có $|x_n - a| < \varepsilon$.

Ta cũng nói rằng dãy $\{x_n\}$ hội tụ đến a hay a là giới hạn của dãy $\{x_n\}$ và viết $x_n \to a$ khi $n \to \infty$, hay $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Vì $|x_n - a| < \varepsilon$ tương đương với $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$, nên ta còn có thể phát biểu như sau : Dãy $\{x_n\}$ hội tụ đến a nếu mọi ε – lân cận của a đều chứa mọi phần tử của dãy trừ một số hữu hạn phần tử đầu tiên (hình 1.3)



Hình 1.3

Nếu dãy $\{x_n\}$ không hội tụ, ta nói rằng nó *phân kì*.

Thí dụ.

Trở lại thí dụ (a) ở mục trên, ta thấy $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, vì chỉ cần chọn $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$, ta có $\forall n \geq n_0$

$$|x_n - 0| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon$$

Trong thí dụ (b), ta thấy hiển nhiên $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$

Trong thí dụ (c), dãy $\{x_n\}$ phân kì.

Trong thí dụ (d), dãy $\{x_n\}$ cũng phân kì, x_n lớn lên vô cùng khi n tăng vô hạn. Ta viết $x_n \to +\infty$ khi $n \to \infty$.

Trong thí dụ (e), dãy $\{x_n\}$ cũng tăng theo n, nhưng hiện nay chúng ta chưa đủ điều kiện để kết luận. Chúng ta sẽ nghiên cứu chi tiết dãy này sau.

1.3.2. *Các tính chất của dãy số hội tụ.*

Định lí 1.4. (1) Nếu dãy số $\{x_n\}$ hội tụ thì giới hạn của nó là duy nhất.

(2) Nếu dãy số $\{x_n\}$ hội tụ thì nó giới nội, tức là tồn tại một khoảng (b, c) chứa mọi phần tử x_n.

Chứng minh. (1) Giả sử $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim_{n\to\infty} x_n = b$, ε là một số dương bất kì. Khi đó tồn tại $n_1 \in \mathbf{N}^*$ và $n_2 \in \mathbf{N}^*$ sao cho

$$n \geq n_1 \Rightarrow |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$n \geq n_2 \Rightarrow |x_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Đặt $n_0 = \max(n_1, n_2)$. Với $n \geq n_0$, cả hai bất đẳng thức trên được thoả mãn. Do đó

$$|a-b| \leq |a-x_n| + |x_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Bất đẳng thức đó đúng với mọi $\varepsilon > 0$, do đó $|a-b| = 0$, tức là $a = b$.

(2) Giả sử $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Khi đó tồn tại $n_0 \in \mathbf{N}^*$ sao cho $n \geq n_0$ $\Rightarrow |x_n - a| < 1$, nghĩa là $a - 1 < x_n < a + 1$. Gọi b, c lần lượt là số bé nhất và lớn nhất của tập hữu hạn $\{a-1, x_1, \ldots, x_{n_0-1}, a+1\}$. Hiển nhiên ta có $b \leq x_n \leq c$, $\forall n$. Vậy dãy $\{x_n\}$ giới nội.

Định lí 1.5. Cho hai dãy số hội tụ $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$. *Khi đó*

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = x + y$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} (Cx_n) = Cx$, $\lim\limits_{n\to\infty} (C + x_n) = C + x$, *với C là hằng số*

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n y_n) = xy$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{y_n}\right) = \dfrac{1}{y}$ *với* $y_n \neq 0$, $y \neq 0$

(5) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{x_n}{y_n}\right) = \dfrac{x}{y}$ *với* $y_n \neq 0$, $y \neq 0$.

Chứng minh. (1) vì $x_n \to x$, $y_n \to y$, nên với $\varepsilon > 0$ cho trước tìm được $n_1 \in \mathbf{N}^*$, $n_2 \in \mathbf{N}^*$ sao cho $n \geq n_1 \Rightarrow |x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$, $n \geq n_2$ $\Rightarrow |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2}$. Đặt $n_0 = \max(n_1, n_2)$. Khi đó ta có $\forall n \geq n_0$

$$|(x_n + y_n) - (x + y)| \leq |x_n - x| + |y_n - y| < \varepsilon$$

Vậy $x_n + y_n \to x + y$

(2) Cách chứng minh thật đơn giản (đề nghị coi là bài tập).

(3) Các dãy $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ hội tụ nên chúng giới nội theo định lí 1.4 (2), nghĩa là tồn tại số $M > 0$ sao cho $|x_n| \le M$, $|y_n| \le M$, $\forall n$. Với $\varepsilon > 0$ cho trước, tìm được $n_0 \in \mathbf{N}^*$ sao cho với $n \ge n_0$ ta có

$$|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2M}, \quad |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Vậy với $n \ge n_0$,

$$|x_n y_n - xy| = |(x_n - x)y_n + x(y_n - y)| \le |x_n - x||y_n| + |x||y_n - y| \le$$

$$\le \frac{\varepsilon}{2M}.M + M.\frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon$$

Do đó $x_n y_n \to xy$

(4) Vì $y_n \to y \ne 0$, nên $|y_n| \to |y| > 0$. Vậy tìm được $n_1 \in \mathbf{N}^*$ sao cho $n \ge n_1 \Rightarrow |y_n| > \frac{1}{2}|y|$. Vậy với $n \ge n_1$

$$\left|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{y}\right| = \frac{|y_n - y|}{|y_n||y|} \le \frac{2|y_n - y|}{|y|^2}$$

Cũng vì $y_n \to y$ nên với $\varepsilon > 0$, tìm được $n_2 \in \mathbf{N}^*$ sao cho $n \ge n_2$ $\Rightarrow |y_n - y| < \frac{\varepsilon y^2}{2}$. Đặt $n_0 = \max(n_1, n_2)$, ta được với $n \ge n_0$

$$\left|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{y}\right| \le \frac{2}{y^2}.\frac{\varepsilon y^2}{2} = \varepsilon$$

Vậy $\dfrac{1}{y_n} \to \dfrac{1}{y}$

(5) là hệ quả của (3) và (4). ■

Định lí 1.6. (1) Cho hai dãy số $\{x_n\}$ *và* $\{y_n\}$. *Nếu* $x_n \geq y_n$, $\forall n$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ *thì* $a \geq b$.

(2) Cho ba dãy số $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ *và* $\{z_n\}$. *Nếu* $x_n \leq y_n \leq z_n$, $\forall n$,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = a, \text{ thì } \lim_{n\to\infty} y_n = a.$$

Chứng minh. (1) Ta chứng minh bằng phản chứng. Giả sử $a < b$. Khi đó tồn tại số r sao cho $a < r < b$. Vì $x_n \to a$, $a < r$ nên tồn tại $n_1 \in \mathbf{N}^*$ sao cho $n \geq n_1 \Rightarrow x_n < r$. Tương tự, tồn tại $n_2 \in \mathbf{N}^*$ sao cho $n \geq n_2 \Rightarrow y_n > r$. Đặt $n_0 = \max(n_1, n_2)$. Ta có với $n \geq n_0$

$$x_n < r < y_n,$$

điều này mâu thuẫn với giả thiết $x_n \geq y_n$.

(2) Vì $x_n \to a$ nên với $\varepsilon > 0$ cho trước, tìm được $n_1 \in \mathbf{N}^*$ sao cho $n \geq n_1 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$, nghĩa là $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$. Tương tự, vì $z_n \to a$, nên tìm được $n_2 \in \mathbf{N}^*$ sao cho $n \geq n_2 \Rightarrow a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon$. Đặt $n_0 = \max(n_1, n_2)$. Ta có với $n \geq n_0$

$$a - \varepsilon < x_n \leq y_n \leq z_n < a + \varepsilon$$

suy ra $|y_n - a| < \varepsilon$, nghĩa là $y_n \to a$. ■

1.3.3. *Dãy đơn điệu*

Định nghĩa. Dãy $\{x_n\}$ được gọi là *tăng* nếu $x_n \leq x_{n+1}$, $\forall n$, là *giảm* nếu $x_n \geq x_{n+1}$, $\forall n$. Dãy tăng hay dãy giảm được gọi là dãy *đơn điệu*. Dãy $\{x_n\}$ được gọi là *bị chặn trên* nếu tồn tại số thực c sao cho $x_n \leq c$, $\forall n$, *bị chặn dưới* nếu tồn tại số thực d sao cho $x_n \geq d$, $\forall n$.

Thí dụ.

(a) Dãy $\{x_n\}$ với $x_n = \frac{1}{n}$ là dãy giảm, bị chặn dưới bởi số 0, bị chặn trên bởi số 1.

(b) Dãy $\{x_n\}$ với $x_n = (-1)^n$ không đơn điệu, bị chặn dưới bởi -1, bị chặn trên bởi 1.

(c) Dãy $\{x_n\}$ với $x_n = n^2$ là dãy tăng, bị chặn dưới bởi 0, nhưng không bị chặn trên, nó không bị chặn.

(d) Dãy $\{x_n\}$ với $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ là dãy tăng như ta đã chứng minh ở trên. Nó bị chặn dưới bởi 2. Ta sẽ chứng minh rằng nó bị chặn trên. Thật vậy, ở trên ta đã tính được

$$x_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \ldots +$$
$$+ \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right).$$

Đặt

$$y_n = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!},$$

dễ thấy rằng $x_n < y_n$. Lại vì

$$\frac{1}{3!} = \frac{1}{2.3} < \frac{1}{2.2} = \frac{1}{2^2}, \ldots, \frac{1}{n!} < \frac{1}{2^{n-1}},$$

ta được

$$y_n < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}$ là một cấp số nhân có số hạng đầu là $\frac{1}{2}$, công bội $\frac{1}{2}$, tổng của nó bé hơn 1, do đó $y_n < 3$, vậy $x_n < 3$.

Định lí 1.7. (1) Nếu dãy số $\{x_n\}$ tăng và bị chặn trên thì nó hội tụ.

(2) Nếu dãy số $\{x_n\}$ giảm và bị chặn dưới thì nó hội tụ.

Chứng minh. (1) Vì dãy $\{x_n\}$ bị chặn trên, theo tiên đề cận trên đúng, tồn tại $l = \sup\{x_n, n \in \mathbf{N}^*\}$. Với mọi $\varepsilon > 0$ cho trước $l - \varepsilon$ không là cận trên đúng của tập ấy, do đó tồn tại $n_0 \in \mathbf{N}^*$ sao cho

$$x_{n_0} > l - \varepsilon$$

Với mọi $n \geq n_0$, ta có

$$l - \varepsilon < x_{n_0} \leq x_n \leq l$$

Do đó

$$|x_n - l| < \varepsilon, \ \forall n \geq n_0$$

Vậy $x_n \to l$.

(2) Suy từ (1) bằng cách xét dãy $\{-x_n\}$. ■

Thí dụ áp dụng định lí.

Dãy $\{x_n\}$ với $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ là một dãy tăng và bị chặn trên như ta đã thấy ở trên, do đó nó hội tụ. Gọi e là giới hạn của dãy ấy, ta được

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Sau đây là một số giá trị của dãy $\{x_n\}$:

$$x_1 = \left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 = 2, \ x_2 = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 2,25,$$

$$x_3 = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 = 2,3703..., ..., \ x_{100} = \left(1 + \frac{1}{100}\right)^{100} = 2,7048 \ ..., ..$$

trong khi giá trị của số e viết với 15 chữ số có nghĩa sau dấu phẩy là :
e = 2,71828 18284 59054...

Như thế dãy $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ hội tụ về số e rất chậm. Sau này chúng ta sẽ dùng biểu diễn khác của số e để tính giá trị xấp xỉ của số e nhanh hơn.

Ở chương 3, chúng ta sẽ chứng minh e là một số vô tỉ (định lí 3.3).

Định lí 1.8 (Cantor). *Cho hai dãy số* $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ *sao cho*

$$(1.12)\qquad \begin{cases} \forall n \in \mathbf{N},\ a_n \le b_n,\ [a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n] \\ \lim\limits_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0 \end{cases}$$

Khi đó tồn tại một số thực duy nhất $c \in [a_n, b_n]$ *với mọi n.*

Chứng minh. Chọn một số nguyên dương n cố định bất kì. Ta có

$$a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_k \le \ldots \le b_n .$$

Dãy $\{a_k\}$ tăng và bị chặn trên nên hội tụ theo định lí 1.7.

Giả sử $c = \lim\limits_{k\to\infty} a_k$. Vì $a_k \le b_n$, $\forall k$, nên $c \le b_n$. Vì $c = \sup\{a_k\}$ nên $a_n \le c$. Vậy $a_n \le c \le b_n$, $\forall n$, tức là $c \in [a_n, b_n]$, $\forall n$.

Điểm c là duy nhất, vì nếu d cũng là điểm chung của mọi đoạn $[a_n, b_n]$ thì ta có

$$|c-d| \le b_n - a_n,\ \forall n$$

Nhưng $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$, nên từ đó suy ra c = d. ■

Định nghĩa. Dãy các đoạn $\{[a_n, b_n]\}$ thoả mãn điều kiện (1.12) được gọi là *dãy các đoạn bao nhau.*

1.3.4. *Dãy số giới nội*

Xét dãy $\{x_n\}$ với $x_n = (-1)^n$. Đó là một dãy số giới nội, nó không hội tụ. Dãy $\{x_n\}$ với n = 2k là dãy {1, 1, ..., 1, ...} được gọi là một dãy con của dãy $\{x_n\}$, dãy con đó hội tụ và có giới hạn bằng 1. Cũng như vậy, dãy con $\{x_n\}$ với $n = 2k + 1$ là dãy $\{-1, -1, ..., -1, ...\}$, nó có giới hạn bằng -1.

Thí dụ đơn giản này dẫn ta đến một định lí quan trọng. Trước hết ta có định nghĩa sau.

Định nghĩa. Cho dãy số $\{x_n\}$. Từ đó trích ra dãy x_{n_k} :

$$x_{n_1}, x_{n_2}, ..., x_{n_k}, ...$$

với các chỉ số là những số nguyên dương thoả mãn điều kiện

$$n_1 < n_2 < ... < n_k < ...$$

(ở đây vai trò thứ tự trong dãy là k). Dãy $\{x_{n_k}\}$ được gọi là dãy con được trích ra từ dãy $\{x_n\}$.

Trong thí dụ mở đầu, ta đã trích ra hai dãy con $\{x_{n_k}\}$ với $n_k = 2k$ và $n_k = 2k + 1$.

Định lí 1.9 (Bolzano – Weierstrass). Từ mọi dãy số giới nội ta đều có thể trích ra một dãy con hội tụ.

Chứng minh. Ta dùng phương pháp chia đôi. Dãy $\{x_n\}$ giới nội nên tồn tại hai số a_0, b_0 sao cho $a_0 \le x_n \le b_0$, $\forall n$. Điểm $\frac{a_0 + b_0}{2}$ chia đoạn $[a_0, b_0]$ thành hai đoạn $\left[a_0, \frac{a_0 + b_0}{2}\right]$, $\left[\frac{a_0 + b_0}{2}, b_0\right]$, một trong hai đoạn đó phải chứa vô số phần tử của $\{x_n\}$, gọi đoạn đó là $[a_1, b_1]$. Ta có $[a_1, b_1] \subset [a_0, b_0]$ và $b_1 - a_1 = \frac{b_0 - a_0}{2}$. Lại chia đoạn $[a_1, b_1]$ làm hai bởi điểm $\frac{a_1 + b_1}{2}$, một trong hai đoạn $\left[a_1, \frac{a_1 + b_1}{2}\right]$, $\left[\frac{a_1 + b_1}{2}, b_1\right]$ phải chứa vô số điểm của dãy $\{x_n\}$. Gọi đoạn đó là $[a_2, b_2]$ và ta cứ tiếp tục như vậy. Ta sẽ được một dãy các đoạn thẳng bao nhau :

$$[a_o, b_o] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots \supset [a_k, b_k] \supset \ldots$$

$$\lim_{k\to\infty}(b_k - a_k) = \lim_{k\to\infty}\frac{b_o - a_o}{2^k} = 0.$$

Theo định lí Cantor, tồn tại một số thực duy nhất $c \in [a_k, b_k]$, $\forall k$. Vì mỗi đoạn $[a_k, b_k]$ đều chứa vô số phần tử của dãy $\{x_n\}$, ta có thể lấy trong mỗi đoạn $[a_k, b_k]$ một điểm x_{n_k} của dãy $\{x_n\}$ sao cho các phần tử $x_{n_k} \notin \{x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_{k-1}}\}$. Dãy $\{x_{n_k}\}$ là một dãy con của dãy $\{x_n\}$. Ta sẽ chứng minh rằng $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = c$.

Thật vậy, hai số x_{n_k} và c đều cùng thuộc đoạn $[a_k, b_k]$, do đó

$$|x_{n_k} - c| \le b_k - a_k = \frac{b_o - a_o}{2^k}$$

Vậy
$$\lim_{k\to\infty}|x_{n_k} - c| = 0. \blacksquare$$

1.3.5. *Tiêu chuẩn hội tụ Cauchy*

Định nghĩa. Dãy số $\{x_n\}$ được gọi là *dãy Cauchy* (hay *dãy cơ bản*) nếu với mọi $\varepsilon > 0$ cho trước, tìm được $n_o \in \mathbf{N}^*$ sao cho khi $m \ge n_o$ và $n \ge n_o$ ta có $|x_m - x_n| < \varepsilon$.

Bổ đề. Dãy Cauchy là một dãy giới nội.

Chứng minh. Giả sử $\{x_n\}$ là một dãy Cauchy. Khi đó tồn tại $n_o \in \mathbf{N}^*$ sao cho khi $m \ge n_o$, $n \ge n_o$ ta có $|x_m - x_n| < 1$.

Đặc biệt, ta có $|x_n - x_{n_o}| < 1$, $\forall n \ge n_o$

Nhưng $|x_n - x_{n_o}| > |x_n| - |x_{n_o}|$, do đó $|x_n| < |x_{n_o}| + 1$

Đặt $M = \max\left\{|x_1|, |x_2|, ..., |x_{n_0} - 1|, |x_{n_0}| + 1\right\}$. Ta có

$$|x_n| \le M,\ \forall n.\ \blacksquare$$

Định lí 1.10 (Tiêu chuẩn Cauchy).

Điều kiện cần và đủ để dãy số thực $\{x_n\}$ hội tụ là nó là một dãy Cauchy.

Chứng minh. Giả sử dãy $\{x_n\}$ hội tụ, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$. Khi đó với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $n_o \in \mathbf{N}^*$ sao cho $n \ge n_o \Rightarrow |x_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}$. Khi đó với $m \ge n_o$, $n \ge n_o$

$$|x_m - x_n| \le |x_m - l| + |l - x_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Vậy $\{x_n\}$ là dãy Cauchy.

Đảo lại, giả sử $\{x_n\}$ là dãy Cauchy. Theo bổ đề, nó là một dãy giới nội. Theo định lí 1.9, có thể trích ra một dãy con hội tụ $\{x_{n_k}\}$.

Giả sử $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = l$. Ta sẽ chứng minh rằng $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$. Thật vậy, ta có

$$|x_n - l| \le |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - l|$$

Vì $x_{n_k} \to l$ nên với mọi $\varepsilon > 0$, tìm được $\nu_1 \in \mathbf{N}^*$ sao cho $n_k \ge \nu_1 \Rightarrow |x_{n_k} - l| < \frac{\varepsilon}{2}$. Vì $\{x_n\}$ là dãy Cauchy nên tồn tại $\nu_2 \in \mathbf{N}^*$ sao cho $n \ge \nu_2$, $n_k \ge \nu_2 \Rightarrow |x_n - x_{n_k}| < \frac{\varepsilon}{2}$. Đặt $\nu_o = \max(\nu_1, \nu_2)$. Ta có với $n \ge \nu_o$

$$|x_n - l| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Vậy $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$. $\blacksquare$

Chú thích. Qua chứng minh trên ta thấy rằng mọi dãy hội tụ đều là dãy Cauchy. Nhưng đảo lại mọi dãy Cauchy trong trường hợp tổng quát chưa chắc đã là dãy hội tụ. Phần đảo của định lí 1.10 khẳng định rằng mọi dãy *số thực* là dãy Cauchy đều hội tụ trong **R**. Nó cũng biểu hiện tính đầy của tập hợp **R**.

Người ta cũng có thể định nghĩa tập hợp **R** là tập hợp thoả mãn tiên đề về cấu trúc trường, tiên đề về quan hệ thứ tự toàn phần và tiên đề về tính đầy của Cauchy. Mọi dãy số thực là dãy Cauchy đều hội tụ trên **R**.

1.3.6. *Vô cùng bé và vô cùng lớn*

Dãy $\{x_n\}$ được gọi là một vô cùng bé (viết tắt là VCB) nếu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, tức là nếu với mọi $\varepsilon > 0$, tìm được $n_o \in \mathbf{N}^*$ sao cho $n \geq n_o \Rightarrow |x_n| < \varepsilon$.

Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$ thì $\{x_n - l\}$ là một VCB.

Dãy $\{x_n\}$ được gọi là một vô cùng lớn (viết tắt là VCL) nếu với mọi số $A > 0$, tìm được $n_o \in \mathbf{N}^*$ sao cho $n \geq n_o \Rightarrow |x_n| > A$.

Nếu với mọi số $A > 0$, tìm được $n_o \in \mathbf{N}^*$ sao cho khi $n \geq n_o$ ta có $x_n > 0, |x_n| > A$, ta viết

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$$

Nếu với mọi số $A > 0$, tìm được $n_o \in \mathbf{N}^*$ sao cho khi $n \geq n_o$ ta có $x_n < 0, |x_n| > A$, ta viết

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$$

1.3.7. *Chú ý cuối cùng về dãy số thực*

Trong các ví dụ trước, dãy $\{x_n\}$ được xác định bởi công thức

$$x_n = f(n)$$

Đó là cách xác định hiện (hay tường minh) một dãy số. Theo cách xác định ấy, ta có thể tính ngay x_n khi biết n.

Bây giờ xét dãy số $\{x_n\}$ được xác định như sau :

$$\begin{cases} x_0 = 2 \\ x_n = x_{n-1} - \dfrac{x_{n-1}^2 - 2}{2x_{n-1}}, \forall n \in \mathbf{N} \end{cases}$$

trong trường hợp này ta không biết được x_n, nếu không biết x_{n-1}, ... Nếu muốn tính x_3, ta phải xuất phát từ x_0 tính x_1, từ x_1 tính x_2, rồi từ x_2 tính x_3. Người ta gọi đây là cách *xác định ẩn* hay *xác định theo quy nạp* một dãy số. Hãy xét chi tiết hơn đây đó. Vì

$$x_n = x_{n-1} - \frac{x_{n-1}^2 - 2}{2x_{n-1}} \text{ với } x_0 = 2$$

nên $$x_n - x_{n-1} = -\frac{x_{n-1}^2 - 2}{2x_{n-1}}$$

hoặc $$x_n = \frac{x_{n-1}^2 + 2}{2x_{n-1}}$$

Suy ra dãy $\{x_n\}$ giảm dần và $x_n > 0$, $\forall n$, do đó $\{x_n\}$ hội tụ và hội tụ đến nghiệm dương của phương trình bậc hai $x^2 - 2 = 0$, tức là hội tụ đến $\sqrt{2}$ (lưu ý rằng $\sqrt{2} = 1{,}414213562$ và $x_3 = 1{,}41421$).

Chúng ta không bàn chi tiết về ưu, nhược điểm của các cách xác định dãy, cũng không bàn về sự hội tụ của dãy ẩn ; chúng ta chỉ lưu ý rằng tuy về hình thức cách cho dãy dưới dạng quy nạp không tiện tính toán, nhưng nó rất thực tế ; vì những dãy ẩn nảy sinh từ việc tìm dãy hội tụ về một số nào đó (thường là không biết trước) ; chẳng hạn dãy ẩn nảy sinh từ thủ tục phân đôi (xem 3.7 chương 3) và thủ tục Newton (xem 5.2.7 chương 5).

TÓM TẮT CHƯƠNG 1

• *Tập hợp*

Tập hợp các số tự nhiên được kí hiệu là **N**, tập hợp các số nguyên là **Z**, tập hợp các số hữu tỉ là **Q**.

Có thể mô tả một tập hợp theo hai cách : hoặc liệt kê tất cả các phần tử của tập hợp đó, hoặc nêu tính chất đặc trưng của tập hợp đó.

Các kí hiệu thường dùng :

$\Rightarrow$ kéo theo hoặc suy ra
$\Leftrightarrow$ tương đương
$\forall$ với mọi
$\exists$ tồn tại
:, | sao cho
$\in$ thuộc
$\notin$ ($\overline{\in}$) không thuộc
$\varnothing$ tập rỗng

Tập con, bao hàm :

$$A \subseteq B \Leftrightarrow x \in A \Rightarrow x \in B$$

Bằng nhau : $A = B \Leftrightarrow A$ trùng với B ;

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \text{ và } B \subseteq A.$$

Hợp : $x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A$ hoặc $x \in B$.

Giao : $x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A$ và $x \in B$.

Bổ sung của B trong A : $C_A B$

$$x \in C_A B \Leftrightarrow x \in A \text{ và } x \notin B$$

Tích Đêcác

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

• *Ánh xạ*

Một ánh xạ f từ E sang F, viết là $f : E \to F$ là một quy tắc làm ứng mỗi phần tử $x \in E$ với một và chỉ một phần tử $y \in F$.

f là đơn ánh nếu phương trình $f(x) = y$ có nhiều nhất một nghiệm $x \in E$, $\forall y \in F$.

f là toàn ánh nếu phương trình $f(x) = y$ có ít nhất một nghiệm $x \in E$, $\forall y \in F$.

f là song ánh nếu phương trình $f(x) = y$ có một nghiệm duy nhất $x \in E$; $\forall y \in F$.

Hai tập A và B được gọi là tương đương với nhau nếu tồn tại một song ánh $f : A \to B$. Một tập X tương đương với tập các số tự nhiên **N** được gọi là một tập đếm được, viết là card (X) = card (**N**).

• *Tập các số thực*

Số hữu tỉ được biểu diễn dưới dạng một số thập phân hữu hạn hay vô hạn tuần hoàn.

Số vô tỉ được biểu diễn dưới dạng một số thập phân vô hạn không tuần hoàn. Tập số thực **R** là tập gồm các số hữu tỉ và số vô tỉ. Giữa tập các số tự nhiên **N**, các số nguyên **Z**, các số hữu tỉ **Q** và các số thực **R** có bao hàm thức :

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$$

Tập các số thực **R** là một trường sắp thứ tự đầy, nghĩa là thoả mãn các tiên đề sau :

Tiên đề về cấu trúc trường

Tiên đề về quan hệ thứ tự toàn phần

Tiên đề cận trên đúng (biểu hiện tính đầy của **R**).

Mọi tập hợp $A \subset \mathbf{R}$ không rỗng, bị chặn trên đều có cận trên đúng thuộc **R**.

Tập số thực mở rộng được kí hiệu $\overline{\mathbf{R}}$ là tập **R** và được bổ sung thêm hai kí hiệu $-\infty$ và $+\infty$.

• *Dãy số thực*

Dãy số thực là một ánh xạ, ánh xạ **N** sang **R** :

$$n \mapsto x_n \in \mathbf{R}.$$

Một dãy số thực $\{x_n\}$ được gọi là hội tụ đến a, hay $\{x_n\}$ có giới hạn là a và viết là $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ nếu với bất kì $\varepsilon > 0$ cho trước, tìm được $N > 0$ sao cho $\quad n > N \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon.$

Khi đó, ta cũng nói rằng dãy $\{x_n\}$ hội tụ. Nếu một dãy $\{x_n\}$ không hội tụ thì ta nói rằng dãy $\{x_n\}$ phân kì.

Các tính chất của dãy hội tụ :

$x_n \to a$, tức là $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, thì a là duy nhất.

$x_n \to a \Leftrightarrow$ mỗi lân cận của a chứa mọi x_n, trừ một số hữu hạn các x_n.

$\{x_n\}$ hội tụ thì có một khoảng hữu hạn (b, c) chứa mọi x_n và nói rằng x_n giới nội.

Nếu $x_n \to x$; $y_n \to y$ thì

$$\lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = x + y$$

$$\lim_{n\to\infty} (Cx_n) = Cx, \text{ C là hằng số}$$

$$\lim_{n\to\infty} (C + x_n) = C + x, \text{ C là hằng số}$$

$$\lim_{n\to\infty} (x_n y_n) = xy, \quad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{y_n}\right) = \frac{1}{y} \text{ với } y_n \neq 0, y \neq 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{x}{y} \text{ với } y_n \neq 0, y \neq 0.$$

Nếu $x_n \geq y_n$, $\forall n$ và $x_n \to a$, $y_n \to b$ thì $a \geq b$.

Nếu $x_n \le y_n \le z_n$, $\forall n$ và $x_n \to a$, $z_n \to a$ thì $y_n \to a$.

Các định lí cơ bản về dãy số :

Dãy số $\{x_n\}$ được gọi là tăng (giảm) nếu $x_n \le x_{n+1}$ ($x_n \ge x_{n+1}$), $\forall n$. Dãy số $\{x_n\}$ được gọi là bị chặn trên (dưới) nếu tồn tại số c (d) sao cho $x_n \le c \cdot (x_n \ge d)$, $\forall n$.

• Nếu dãy số $\{x_n\}$ tăng (giảm) và bị chặn trên (dưới) thì nó hội tụ.

• Cho hai dãy số $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ sao cho

$$\forall n \in \mathbf{N},\ a_n \le b_n,\ [a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n],\ \lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0.$$

Khi đó tồn tại duy nhất $c \in [a_n, b_n]$, $\forall n$.

• Từ mọi dãy số giới nội ta đều có thể trích ra một dãy con hội tụ.

• Điều kiện cần và đủ để dãy số thực $\{x_n\}$ hội tụ trong **R** là $\{x_n\}$ là một dãy Cauchy, tức là với mọi $\varepsilon > 0$, tìm được $n_0 \in \mathbf{N}^*$ sao cho $m \ge n_0, n \ge n_0 \Rightarrow |x_m - x_n| < \varepsilon$.

BÀI TẬP

1. Dùng kí hiệu tập hợp, biểu diễn các tập sau :

1. Các số nguyên dương bé thua 12

2. Các số nguyên dương là bội số của 4 và bé thua 4?

3. Các phân số có tử số là 3 và mẫu số là một số nguyên dương bé thua 9.

2. Cho F : = {1, 4, 7, 10} và G : = {1, 4, 7}. Hỏi các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng :

1. $G \subset F$;

2. Tập {1, 7} là tập con thực sự của F ;

3. Tập {1, 4, 7} là tập con thực sự của G.

3. Liệt kê mọi tập con của các tập :

1. $\{a, b, c\}$; 2. $\{1, 2, 3, 4\}$.

4. Cho $A := \{a, b, c\}$, $B := \{1, 2, 3\}$; $C := \{b, c, a\}$; $D := \{3, 2, 1\}$.

Hỏi :

1. $A = C$? 2. $A = B$? 3. A tương đương B ? 4. $B = D$?

5. Xét xem các tập cho dưới đây, tập nào vô hạn, tập nào hữu hạn :

1. Tập mọi số nguyên dương lớn hơn 100.

2. Tập mọi số nguyên dương bé thua 1 000 000 000.

3. Tập mọi điểm nằm trên đoạn thẳng nối liền hai điểm phân biệt A, B.

6. Cho $A := \{q, r, t, u\}$, $B := \{p, q, s, u\}$ và

$C := \{t, u, v, w\}$.

1. Tìm $A \cap (B \cup C)$ và $(A \cap B) \cup (A \cap C)$. Chúng có bằng nhau không ?

2. Tìm $A \cup (B \cap C)$ và $(A \cup B) \cap (A \cup C)$. Chúng có bằng nhau không ?

7. Cho A, B là hai tập hữu hạn, chứng minh rằng

$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$.

8. Cho $A := \{0, 1, 2\}$; $B = \{1, 3\}$.

1. Tìm $A \times B$ và $B \times A$

2. Tính $\text{card}(A \times B)$; $\text{card}(B \times A)$; $\text{card}(A \times A)$; $\text{card}(B \times B)$.

9. Xét ánh xạ $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} : x \mapsto \dfrac{2x}{1+x^2}$; f có là đơn ánh ? toàn ánh ? Tìm $f(\mathbf{R})$.

10. Dùng lập luận phản chứng, chứng minh rằng $\sqrt{3}$ là số vô tỉ.

11. Dùng phương pháp quy nạp toán học chứng minh :

1. $1 + 2 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

2. $1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

12. Xét xem đã dùng tiên đề nào trong các tiên đề về số thực để chứng minh các hệ thức dưới đây :

1. $5 + 3 = 3 + 5$;
2. $9 + 0 = 9$;
3. $-3 + 0 = -3$;
4. $[-3 + (4)] + 7 = -3 + (4 + 7)$;
5. $0 + 0 = 0$;
6. $(-1).(1) = -1$;
7. $(-3) + [-(-3)] = 0$;
8. $4.\left(\dfrac{1}{4}\right) = 1$.

13. Dùng định nghĩa "lớn hơn, bé thua" và các tiên đề thứ tự, chứng minh (giả thiết $a, b, c \in \mathbf{R}$) :

1. Nếu $a > b$ và $c > 0$ thì $ac > bc$
2. Nếu $a > b$ thì $a + c > b + c$
3. Nếu $a > 0$ thì $-a < 0$
4. Nếu $a \neq 0$ thì $a^2 > 0$
5. Nếu $a > b$ thì $a^2 > b^2$ (với $a > 0, b > 0$).

14. Giải các phương trình và bất phương trình :

1. $|x+3| = 7$;
2. $|2x-6| = 14$;
3. $|x-4| < 7$;
4. $|5x-1| \leq 4$;
5. $|4x-2| > 4$;
6. $|5+9x| \geq 4$.

15. Cho $A \subset \mathbf{R}$, $B \subset \mathbf{R}$; định nghĩa :

$A + B := \{x \in \mathbf{R} \mid \exists a \in A, \exists b \in B, x = a + b\}$

$AB := \{x \in \mathbf{R} \mid \exists a \in A, \exists b \in B, x = ab\}$

nghĩa là $A + B$ là tập các số thực có dạng $a + b$ với $a \in A$ và $b \in B$; AB là tập các số thực có dạng ab với $a \in A$ và $b \in B$.

1. Giả sử A, B bị chặn trên, chứng minh rằng

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B$$

2. Giả sử A, B bị chặn trên, $A \subset \mathbf{R}_+$, $B \subset \mathbf{R}_+$, chứng minh rằng :

$$\sup(AB) = (\sup A)(\sup B)$$

16. Xét sự hội tụ của dãy $x_n := (-1)^n \dfrac{n+1}{n}$.

17. Chứng tỏ rằng các dãy sau đây hội tụ và tìm giới hạn của chúng, $n \geq 1$:

1. $x_n := \dfrac{n+1}{n}$;

2. $x_n := \dfrac{n}{n+1}$;

3. $x_n := \dfrac{1}{n^2+1}$;

4. $x_n := \dfrac{n}{n^2+1}$.

18. Tìm giới hạn của các dãy sau (nếu hội tụ) :

1. $x_n := n - \sqrt{n^2 - n}$;

2. $x_n := \sqrt{n(n+a)} - n$;

3. $x_n := n + \sqrt[3]{1 - n^3}$;

4. $x_n := \dfrac{n}{2} \sin n \dfrac{\pi}{2}$;

5. $x_n := \dfrac{\sin^2 n - \cos^3 n}{n}$.

19. Xét dãy $x_n := x_{n-1} + \dfrac{1}{x_{n-1}}$ với $x_o = 1$.

1. Chứng minh rằng $\{x_n\}$ không có giới hạn hữu hạn.

2. Chứng minh rằng $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = +\infty$.

20. Xét dãy $x_n := \dfrac{a_n}{b_n}$ với $a_n := 2a_{n-1} + 3b_{n-1}$, $b_n := a_{n-1} + 2b_{n-1}$;

với $a_o > 0$, $b_o > 0$.

1. Chứng minh rằng $a_n > 0$, $b_n > 0$.

2. Tính x_{n+1} theo x_n.

3. Tính $x_{n+1} - x_n$ và chứng tỏ rằng dãy $\{x_n\}$ đơn điệu, suy ra $\{x_n\}$ có giới hạn độc lập với a_o, b_o.

21. Xét sự hội tụ và tìm giới hạn (nếu có) của dãy

$$x_n := \frac{2}{x_{n-1}} + 1 \text{ với } x_o = 1.$$

22. Cho hai số a và b thoả $0 < a < b$, xét 2 dãy

$$x_n := \sqrt{x_{n-1}y_{n-1}}, \quad y_n := \frac{1}{2}(x_{n-1} + y_{n-1})$$

với $x_o = a$ và $y_o = b$.

Chứng minh rằng hai dãy trên hội tụ và có chung giới hạn.

23. Xét sự hội tụ của dãy $x_n := \sqrt{1 + x_{n-1}}$, với $x_o = \sqrt{3}$.

24. Đặt $x_o = 1$, $x_n(3 + x_{n-1}) + 1 = 0$ với $n \geq 1$.

Chứng tỏ rằng $\{x_n\}$ hội tụ và tìm giới hạn của $\{x_n\}$.

ĐÁP SỐ VÀ GỢI Ý

12. 1. Giao hoán ; 2. Đồng nhất ; 3. Đồng nhất ; 4. Kết hợp ; 5. Đồng nhất ; 6. Đồng nhất ; 7. Nghịch đảo ; 8. Nghịch đảo.

15. 1. Chứng minh rằng sup A + sup B là một cận trên của A + B, rồi dùng định nghĩa cận trên đúng để kết luận rằng sup A + sup B là cận trên đúng của A + B.

2. Chứng tỏ rằng sup A . sup B là một cận trên của AB, rồi dùng định nghĩa cận trên đúng suy ra điều cần chứng minh.

16. Phân kì.

17. 1. $\{x_n\}$ giảm và bị số 1 chặn dưới, hội tụ ; 2. $\{x_n\}$ tăng và bị số 1 chặn trên, hội tụ ; 3. $\{x_n\}$ giảm, $0 < x_n < \frac{1}{2}$, $\forall n$, hội tụ ; 4. Hội tụ.

18. 1. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{1}{2}$; 2. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{a}{2}$;

3. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$; 4. Phân kì ; 5. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

19. 1. Nếu $l = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ thì l thoả phương trình $l = l + \dfrac{1}{l}$, nghĩa là $\dfrac{1}{l} = 0$, phương trình này vô nghiệm.

2. $x_0 \geq 1$, $x_1 \geq 1$; $\{x_n\}$ tăng và không bị chặn trên : $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$

20. 1. $a_0 > 0$, $b_0 > 0$, suy ra $a_n > 0$, $b_n > 0$;

2. $x_{n+1} = \dfrac{2x_n + 3}{x_n + 2}$;

3. $x_{n+1} - x_n = \dfrac{(\sqrt{3} - x_n)(\sqrt{3} + x_n)}{x_n + 2}$, dấu của $x_{n+1} - x_n$ là dấu của $\sqrt{3} - x_n$, cũng là dấu của $\sqrt{3} - x_{n-1}$, cũng là dấu của $\sqrt{3} - x_0$. Nếu $\sqrt{3} - x_0 > 0$, $\{x_n\}$ tăng và bị $\sqrt{3}$ chặn trên, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{3}$. Nếu $\sqrt{3} - x_0 < 0$, $\{x_n\}$ giảm và $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{3}$. Nếu $\sqrt{3} - x_0 = 0$, $x_n = \sqrt{3}$; $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{3}$.

21. Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$ thì $l = 2$ vì $x_n > 1$, $\forall n$;

$$x_{n+1} = \frac{2x_{n-1}}{x_{n-1} + 2} + 1 \ ; \ x_{n+1} - 2 = \frac{x_{n-1} - 2}{x_{n-1} + 2} \ ;$$

$$x_{n+1} - x_{n-1} = \frac{-x_{n-1}^2 + x_{n-1} + 2}{x_{n-1} + 2}.$$

Dấu của $x_{n+1} - x_{n-1}$ là dấu tam thức bậc hai $-x_{n-1}^2 + x_{n-1} + 2$. Suy ra nếu $x_{n-1} > 2$ thì $x_{n+1} < x_{n-1}$ và nếu $x_{n-1} < 2$ thì $x_{n+1} > x_{n-1}$.

22. $\{x_n\}$ tăng và $\{y_n\}$ giảm : $\frac{x_1}{a} = \frac{b}{x_1} = \sqrt{\frac{b}{a}} > 1$;

$y_1 - a = b - y_1 = \frac{b-a}{2} > 0$: $x_0 < x_1 < y_1 < y_0$; đi đến

$$a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < y_n < y_{n-1} < \ldots < y_1 < b.$$

$L := \lim\limits_{n\to\infty} x_n$; $l := \lim\limits_{n\to\infty} y_n$: $L = \sqrt{Ll}$ và $l = \frac{L+l}{2} \Rightarrow L = l$.

23. Dùng quy nạp chứng minh $\{x_n\}$ giảm và bị chặn dưới :

$x_1 = \sqrt{1+\sqrt{3}} < x_0$, $x_2 = \sqrt{1+x_1} < \sqrt{1+x_0}$; $x_2 < x_1$, ...,

$x_{n+1} < x_n$, $x_{n+1} = \sqrt{1+x_n} > \sqrt{2}$, $\forall n$, $x_n > 1$.

Suy ra $l := \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ thì l thoả $l = \sqrt{1+l}$ suy ra $l = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ vì $x_n > 1$.