Chương 2. Không gian véc tơ và ánh xạ tuyến tính

Phan Quang Sáng
sang.phanquang@phenikaa-uni.edu.vn

Bộ môn Toán- Khoa KHCB- PKA

Hà Nội, Ngày 1 tháng 12 năm 2021

Nội dung chính

1. Không gian véc tơ
2. Độc lập tuyến tính
3. Không gian con
4. Cơ cở và số chiều của KGVT
5. Tọa độ của một véc tơ
6. Ánh xạ tuyến tính
7. Giới thiệu không gian Ơclid và không gian Unita

Định nghĩa 1

Một tập hợp $E \neq \emptyset$ cùng với phép cộng, ký hiệu $(+)$, và nhân vô hướng, ký hiệu là $(.)$, trên E được gọi là một KGVT trên trường số K ($K = \mathbb{R}$ hoặc $K = \mathbb{C}$) nếu các tiên đề sau được thỏa mãn,

- Đối với phép cộng: với mọi $u, v, w \in E$
  1. $u + v \in E$;
  2. Tính giao hoán: $u + v = v + u$;
  3. Tính kết hợp: $(u + v) + w = u + (v + w)$;
  4. Có phần tử không: có một phần tử $\theta \in E$ sao cho $u + \theta = \theta + u = u$;
  5. Có đối xứng: có $u' \in E$ sao cho $u + u' = u' + u = \theta$, u' được ký hiệu là $-u$;

Định nghĩa 1

Một tập hợp $E \neq \emptyset$ cùng với phép cộng, ký hiệu $(+)$, và nhân vô hướng, ký hiệu là $(.)$, trên E được gọi là một KGVT trên trường số K ($K = \mathbb{R}$ hoặc $K = \mathbb{C}$) nếu các tiên đề sau được thỏa mãn,

- Đối với phép cộng: với mọi $u, v, w \in E$
  1. $u + v \in E$;
  2. Tính giao hoán: $u + v = v + u$;
  3. Tính kết hợp: $(u + v) + w = u + (v + w)$;
  4. Có phần tử không: có một phần tử $\theta \in E$ sao cho $u + \theta = \theta + u = u$;
  5. Có đối xứng: có $u' \in E$ sao cho $u + u' = u' + u = \theta$, u' được ký hiệu là $-u$;
- Đối với phép nhân vô hướng: mọi $\alpha, \beta \in K$
  - 1' $\alpha u \in E$;
  - 2' $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$;
  - 3' $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$;
  - 4' $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u = \beta(\alpha u)$;
  - 5' $1u = u$;

Một số ví dụ về KGVT

Không gian véc tơ thực $\mathbb{R}^n$

Không gian các ma trận cấp $m \times n$ trên $\mathbb{R}$, ký hiệu $Mat_{(m,n)}(\mathbb{R})$

Không gian véc tơ các đa thức bậc không quá n, ký hiệu $P_n[x]$.

Không gian tất cả các đa thức (bậc tùy ý) $P[x]$.

Một số tính chất

1. Véc tơ không và véc tơ đối là duy nhất
2. $0u = \theta$ với mọi u
3. $\alpha\theta = \theta$ với mọi α
4. $(-1)u = -u$
5. Nếu $\alpha u = \theta$ thì $\alpha = 0$ hoặc $u = \theta$. Từ đó,
   - nếu $\alpha u = \beta u$, $u \neq \theta$ thì $\alpha = \beta$;
   - nếu $\alpha u = \alpha v$, $\alpha \neq 0$ thì $u = v$.

Định nghĩa 2

Cho một hệ véc tơ $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ trong KGVT E. Ta gọi một tổ hợp tuyến tính của U là một véc tơ dạng

$$k_1 u_1 + k_2 u_2 + \ldots + k_n u_n := u, \text{ với các } k_i \in K.$$

Định nghĩa 3

Một hệ véc tơ $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ được gọi là độc lập tuyến tính nếu giả sử

$$k_1 u_1 + k_2 u_2 + \ldots + k_n u_n = \theta \Leftrightarrow k_1 = k_2 = \ldots = k_n = 0.$$

Nếu không hệ U được gọi là phụ thuộc tuyến tính.

Một số ví dụ

Đặc biệt hệ chỉ có véc tơ không là PTTT

Một số tính chất

1. Mọi hệ con của một hệ ĐLTT thì ĐLTT. Từ đó, mọi hệ chứa một hệ con PTTT cũng PTTT. Đặc biệt một hệ chứa véc tơ θ là PTTT.

2. Hệ ĐLTT thì giữa các véc tơ không có quan hệ tuyến tính.

3. Nếu hệ U PTTT khi và chỉ khi có một véc tơ trong U là tổ hợp tuyến tính của các véc tơ khác.

4. Một véc tơ biểu diễn tuyến tính theo một hệ ĐLTT thì cách biểu diễn là duy nhất. Cụ thể, nếu $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ ĐLTT và $u = k_1u_1 + k_2u_2 + \ldots + k_nu_n$ thì các k_i là duy nhất.

Hạng của một hệ véc tơ

Định lý 1

Cho $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$, $V = \{v_1, v_2, \dots, n_m\}$ là hai hệ ĐLTT của E. Nếu mọi véc tơ của U đều biểu thị tuyến tính theo các véc tơ của V thì $n \leq m$.

Định nghĩa 4

Hạng của hệ véc tơ $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ trong KGVT E là số véc tơ ĐLTT tối đại có trong U, ký hiệu là $r(U) := r$.

Chú ý:

1. Giả sử U_1 là một hệ con ĐLTT tối đại của U, khi đó mọi véc tơ trong U biểu diễn tuyến tính theo U_1.
2. Các hệ con ĐTTT tối đại của U đều có cùng số véc tơ $= r$.
3. Hệ U gồm n véc tơ ĐLTT khi và chỉ khi $r(U) = n$.

Ví dụ: tìm hạng của các hệ

$U = \{(0,1),(1,0),(-1,2)\}$

$V = \{(1,0,0),(0,1,1),(-1,1,2),(2,1,3)\}$

$W = \{(1,0,0),(0,1,1),(-1,2,2),(1,1,1)\}$

Ví dụ: tìm hạng của các hệ

$U = \{(0,1),(1,0),(-1,2)\}$

$V = \{(1,0,0),(0,1,1),(-1,1,2),(2,1,3)\}$

$W = \{(1,0,0),(0,1,1),(-1,2,2),(1,1,1)\}$

Đáp số: $r(U) = 2$, $r(V) = 3$, $r(W) = 2$.

Chứng minh: giả sử phản chứng $n > m$. Ta có thể bdtt
$u_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} v_i, \ j = \overline{1, n}$.
Giả sử $\sum_{j=1}^{n} k_j u_i = \theta$ thì phải có $\forall k_j = 0$.
Tuy nhiên đẳng thức trên tương đương với

$$\sum_{j=1}^{n} k_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} v_i = \theta \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{m} (\sum_{j=1}^{n} a_{ij} k_j) v_i = \theta.$$

Do hệ V ĐLTT nên phải có

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} k_j = 0, \ i = \overline{1, m}$$

Tồn tại $k_j \neq 0$ thỏa mãn hpt trên vì nó có nghiệm không tầm thường do có m pt mà có n ẩn số và $m < n$.
Như vậy dẫn đến mâu thuẫn. Vậy $n \leq m$.

Định nghĩa 5

Cho E là một không gian véc tơ. Một tập con $S \neq \emptyset$ được gọi là KGVT con của E nếu S cùng với hai phép toán cộng và nhân vô hướng của E cũng lập thành một KGVT.

Ví dụ : E, $\{\theta\}$ là các KGVT con (tầm thường) của E.

Chú ý: mọi KGVT con đều phải chứa véc tơ không.

Định lý 2

Tập con $S \neq \emptyset$ là KGVT con của E khi và chỉ khi:

1. $u + v \in S$ với mọi $u, v \in S$
2. $ku \in S$ với mọi $u \in S$ và mọi $k \in K$.

Một số ví dụ: tập hợp nào sau đây là KGVT con

1) $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0\}$.
(S là một mp đi qua gốc tọa độ)

2) $L = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | -3x_1 - x_2 + 5x_3 = 0, x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0\}$.
(L là một đường thẳng đi qua gốc tọa độ)

3) Tập hợp các nghiệm của HPTTT thuần nhất $Ax = 0$, với $A \in Mat_{m \times n}(\mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}^n$.

4) Tập $N = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | xy \geq 0\}$.

KG con sinh bởi một hệ véc tơ

Định nghĩa 6

Cho $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ là một hệ véc tơ trong E.
KGVT con sinh bởi U là KGVT con nhỏ nhất của E chứa mọi véc tơ của U, ký hiệu là $L(U)$ hoặc $Span(U)$.
Chúng ta có thể chứng minh

$$L(U) = \{k_1 u_1 + k_2 u_2 + \ldots + k_m u_m | k_i \in K\}.$$

($L(U)$ gọi là bao tuyến tính của U)

Nếu KGVT con $S = L(U)$ thì ta cũng nói rằng U là một hệ sinh của S.

Hơn nữa $S = L(U)$ được sinh bởi một hệ con ĐLTT tối đại của U (sau này gọi là 1 cơ sở của S).

Định nghĩa 7

Cho E là một KGVT. Một hệ $\mathcal{B}$ các véc tơ của E được gọi là một cơ sở của E nếu hệ $\mathcal{B}$ ĐLTT và mọi véc tơ của E đều BDTT qua $\mathcal{B}$.

Như vậy cơ sở $\mathcal{B}$ chính là một hệ sinh ĐLTT tối đại của E: $E = L(\mathcal{B})$.

Định nghĩa 8

Nếu KGVT E có một cơ sở gồm n véc tơ thì mọi cơ sở khác của E cũng có n véc tơ. Số n được gọi là số chiều của E, ký hiệu $dim(E) = n$, và ta nói E là KGVT (hữu hạn) n chiều.

Một số ví dụ: đưa ra một cơ sở và số chiều của các KG sau
1) $\mathbb{R}^n$ là KGVT n chiều, vd cơ sở chính tắc
2) $P_n[x]$ là KGVT $(n+1)$ chiều
3) $Mat_{m\times n}(\mathbb{R})$ là KGVT $m \times n$ chiều.

Mệnh đề 1

Giả sử E là một KGVT n chiều. Khi đó:

1. Mọi hệ có nhiều hơn $n+1$ véc tơ đều PTTT. (Nói cách khác có tối đa n véc tơ ĐLTT) (suy ra từ Định lý 1)
2. Mọi hệ n véc tơ ĐLTT là cơ sở của E (và ngược lại).

Ví dụ: chứng minh các hệ sau là cơ sở

a) $U = \{(-1,2),(2,3)\}$ là cơ sở của $\mathbb{R}^2$.

b) $V = \{(-1,2,1),(2,3,1),(1,0,1)\}$ là cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

Mệnh đề 2

Giả sử U có m véc tơ, $r(U) = r$ $(r \leq m)$, và $S = L(U)$. Khi đó

1. $dim(S) = r$ và một hệ con r véc tơ ĐLTT (tối đại) của U là một cơ sở của S.
2. Mọi hệ sinh của S phải có tối thiểu r véc tơ.

Hệ quả

1. Đặc biệt khi E là một KGVT n chiều và $r(U) = n$ thì $E = L(U)$.
2. Ta có thể bổ sung vào một hệ véc tơ ĐLTT để được một cơ sở. Như vậy KGVT hữu hạn chiều luôn có một cơ sở.

Ví dụ: trong $\mathbb{R}^3$, tìm cơ sở và số chiều của các KGVT con sau

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ 2x - y + 3z = 0\},$$

$$L = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ 2x - y + 3z = 0,\ -3x + 2y - z = 0\}.$$

* **Một số ví dụ và chú ý về KGVT vô hạn chiều**

Chú ý: mọi KGVT đều tồn tại một cơ sở (đại số)

Giả sử E là KGVT n chiều và $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ là một cơ sở.
Khi đó mọi $u \in E$ được biểu diễn tuyến tính duy nhất theo các véc tơ của $\mathcal{B}$,

$$u = \sum_{i=1}^{n} x_i u_i = x_1 u_1 + \ldots + x_n u_n.$$

Khi đó $u_{\mathcal{B}} = (x_1, \ldots, x_n)$ được gọi là tọa độ của véc tơ u trong cơ sở $\mathcal{B}$.
Ma trận cột, ký hiệu $[u]_{\mathcal{B}}$,

$$[u]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

là tọa độ cột của véc tơ u trong cơ sở $\mathcal{B}$.

Một số ví dụ: tìm tọa độ của các véc tơ

1. Tọa độ của véc tơ trong cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^n$.
2. $u = (-3, 4)$ trong cơ sở $U = \{(-1, 2), (2, 3)\}$.
3. $u = (3, 1, 2)$ trong cơ sở $V = \{(-1, 2, 1), (2, 3, 1), (1, 0, 1)\}$.

Lại nói về hạng của hệ véc tơ

Cho E là KGVT n chiều và $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ là một hệ véc tơ trong E.

Định lý 3

Giả sử $\mathcal{B}$ là một cơ sở tùy ý của E. Lập ma trận tạo bởi các tọa độ cột của các véc tơ của U trong cơ sở $\mathcal{B}$,

$$A = ([u_1]_{\mathcal{B}} \ \ [u_2]_{\mathcal{B}} \ \ \cdots \ \ [u_m]_{\mathcal{B}}).$$

Khi đó ta có kết quả

$$r(U) = r(A).$$

Ví dụ: tìm hạng của các hệ véc tơ

1) $U = \{(0,1),(1,0),(-1,2)\}$
2) $V = \{(1,0,0),(0,1,1),(-1,1,2),(2,1,3)\}$
3) $W = \{(1,0,0),(0,1,1),(-1,2,2),(1,1,1)\}$

Đổi cơ sở

Giả sử $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$, $\mathcal{B}' = \{u'_1, u'_2, \ldots, u'_n\}$ là hai cơ sở của KGVT n chiều E. Cho $u \in E$ bất kỳ và giả sử u tọa độ của nó trong hai cơ sở trên lần lượt là $[u]_{\mathcal{B}}$ và $[u]_{\mathcal{B}'}$.

Đổi cơ sở

Giả sử $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$, $\mathcal{B}' = \{u'_1, u'_2, \ldots, u'_n\}$ là hai cơ sở của KGVT n chiều E. Cho $u \in E$ bất kỳ và giả sử u tọa độ của nó trong hai cơ sở trên lần lượt là $[u]_{\mathcal{B}}$ và $[u]_{\mathcal{B}'}$.

Hãy tìm mối liên hệ giữa $[u]_{\mathcal{B}}$ và $[u]_{\mathcal{B}'}$.

Đổi cơ sở

Giả sử $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$, $\mathcal{B}' = \{u'_1, u'_2, \ldots, u'_n\}$ là hai cơ sở của KGVT n chiều E. Cho $u \in E$ bất kỳ và giả sử u tọa độ của nó trong hai cơ sở trên lần lượt là $[u]_{\mathcal{B}}$ và $[u]_{\mathcal{B}'}$.

Hãy tìm mối liên hệ giữa $[u]_{\mathcal{B}}$ và $[u]_{\mathcal{B}'}$.

Định nghĩa *ma trận chuyển cơ sở* từ $\mathcal{B}$ sang $\mathcal{B}'$ là

$$P = \left([u_1]_{\mathcal{B}'} \;\; [u_2]_{\mathcal{B}'} \;\; \cdots \;\; [u_n]_{\mathcal{B}'}\right).$$

Đổi cơ sở

Giả sử $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$, $\mathcal{B}' = \{u'_1, u'_2, \ldots, u'_n\}$ là hai cơ sở của KGVT n chiều E. Cho $u \in E$ bất kỳ và giả sử u tọa độ của nó trong hai cơ sở trên lần lượt là $[u]_{\mathcal{B}}$ và $[u]_{\mathcal{B}'}$.

Hãy tìm mối liên hệ giữa $[u]_{\mathcal{B}}$ và $[u]_{\mathcal{B}'}$.
Định nghĩa *ma trận chuyển cơ sở* từ $\mathcal{B}$ sang $\mathcal{B}'$ là

$$P = \left([u_1]_{\mathcal{B}'} \;\; [u_2]_{\mathcal{B}'} \;\; \cdots \;\; [u_n]_{\mathcal{B}'}\right).$$

Khi đó ta có liên hệ

$$[u]_{\mathcal{B}'} = P[u]_{\mathcal{B}},$$

và ngược lại

$$[u]_{\mathcal{B}} = P^{-1}[u]_{\mathcal{B}'}$$

với chú ý rằng ma trận chuyển cơ sở P là khả nghịch vì $r(P) = r(\mathcal{B}) = n$.

Một số ví dụ tìm tọa độ của véc tơ

1. $u = (-3, 4)$ trong cơ sở chính tắc và trong cơ sở $U = \{(-1, 2), (2, 3)\}$.

2. $u = (-3, 1, 2)$ trong cơ sở $U = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1)\}$ và trong cơ sở $V = \{(-1, 2, 1), (2, 3, 1), (1, -1, 1)\}$.

3. Chứng minh hệ các ma trận sau là cơ sở của $Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$, $M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $M_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $M_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,
Tìm tọa độ của $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ trong cơ sở trên.

Định nghĩa 9

Cho E và F là hai KGVT trên cùng một trường số K ($\mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$). Một ánh xạ $f : E \to F$ được gọi là ánh xạ tuyến tính nếu nó thỏa mãn:

1. $f(u+v) = f(u) + f(v)$ với mọi $u, v \in E$;
2. $f(ku) = kf(u)$ với mọi $u \in E$ và mọi $k \in K$.

Một số ví dụ: các ánh xạ sau có phải ánh xạ tuyến tính?

1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = (2x, -3x)$.

2) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $g(x, y) = (x + y, 2x - 3y)$.

3) $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $h(x, y) = (x + y, xy)$.

4) $s : \mathbb{R}^2 \to Mat_{(2,2)}(\mathbb{R})$, $s(x, y) = \begin{bmatrix} x - y & x + 2y \\ 3y & -2x + 4y \end{bmatrix}$.

Một số ví dụ: các ánh xạ sau có phải ánh xạ tuyến tính?

5) Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ cấp 3×2.

Khi đó ánh xạ, cũng ký hiệu bởi $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ cho bởi,

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \mapsto y = A(x) = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = Ax = A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

là một AXTT.

Ví dụ: $x = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} \mapsto y = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -7 \\ -6 \end{bmatrix}$

Một số ví dụ: các ánh xạ sau có phải ánh xạ tuyến tính?

5) Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ cấp 3×2.

Khi đó ánh xạ, cũng ký hiệu bởi $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ cho bởi,

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \mapsto y = A(x) = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = Ax = A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

là một AXTT.

Ví dụ: $x = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} \mapsto y = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -7 \\ -6 \end{bmatrix}$

Một cách tổng quát, cho A là một ma trận cấp $m \times n$, khi đó ánh xạ $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ cho bởi

$$x \mapsto y = A(x) = Ax$$

là một Axtt, được gọi là Axtt tương ứng với ma trận A.

Các tính chất

Giả sử $f : E \to F$ là một Axtt. Khi đó,

1. Axtt biến véc tơ không thành véc tơ không: $f(\theta_E) = \theta_F$.
2. $f(\sum_{i=1}^n x_i u_i) = \sum_{i=1}^n x_i f(u_i)$

Ví dụ: $f(2u - 3v + 5w) = f(2u - 3v) + f(5w) =$
$f(2u) + f(-3v) + 5f(w) = 2f(u) - 3f(v) + 5f(w)$.

Ví dụ: ánh xạ sau có phải ánh xạ tuyến tính?

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = (2x + y + 1, x - 3y).$$

Các tính chất

Giả sử $f : E \to F$ là một Axtt. Khi đó,

1) Axtt biến véc tơ không thành véc tơ không: $f(\theta_E) = \theta_F$.
2) $f(\sum_{i=1}^n x_i u_i) = \sum_{i=1}^n x_i f(u_i)$

Ví dụ: $f(2u - 3v + 5w) = f(2u - 3v) + f(5w) =$
$f(2u) + f(-3v) + 5f(w) = 2f(u) - 3f(v) + 5f(w)$.

Ví dụ: ánh xạ sau có phải ánh xạ tuyến tính?

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \; f(x, y) = (2x + y + 1, x - 3y).$$

Định lý 4

Ánh xạ tuyến tính $f : E \to F$ hoàn toàn được xác định bởi ảnh của một cơ sở của E.

Ma trận của ánh xạ tuyến tính

Cho $f : E \to F$ là một Axtt. Giả sử $Dim(E) = n$, $Dim(F) = m$, và giả sử $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ là một cơ sở của E, $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ là một cơ sở của F. Khi đó

Định nghĩa 10 và tính chất

Ma trận cấp $m \times n$,

$$A = [\ [f(u_1)]_{\mathcal{V}}\ [f(u_2)]_{\mathcal{V}} \cdots [f(u_n)]_{\mathcal{V}}\ ],$$

được gọi là ma trận của Axtt f trong các cơ sở $(\mathcal{B}, \mathcal{V})$.
Khi đó với mọi $u \in E$, giả sử $x = [u]_{\mathcal{B}}$ thì $f(u)$ có tọa độ cột y trong cơ sở $\mathcal{V}$ thỏa mãn:

$$y = [f(u)]_{\mathcal{V}} = Ax, \quad \text{hay } [f(u)]_{\mathcal{V}} = A[u]_{\mathcal{B}}.$$

Ma trận của ánh xạ tuyến tính

Cho $f : E \to F$ là một Axtt. Giả sử $Dim(E) = n$, $Dim(F) = m$, và giả sử $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ là một cơ sở của E, $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ là một cơ sở của F. Khi đó

Định nghĩa 10 và tính chất

Ma trận cấp $m \times n$,

$$A = [\ [f(u_1)]_{\mathcal{V}}\ [f(u_2)]_{\mathcal{V}} \cdots [f(u_n)]_{\mathcal{V}}\ ],$$

được gọi là ma trận của Axtt f trong các cơ sở $(\mathcal{B}, \mathcal{V})$.
Khi đó với mọi $u \in E$, giả sử $x = [u]_{\mathcal{B}}$ thì $f(u)$ có tọa độ cột y trong cơ sở $\mathcal{V}$ thỏa mãn:

$$y = [f(u)]_{\mathcal{V}} = Ax, \quad \text{hay } [f(u)]_{\mathcal{V}} = A[u]_{\mathcal{B}}.$$

Ma trận của ánh xạ tuyến tính

Cho $f : E \to F$ là một Axtt. Giả sử $Dim(E) = n$, $Dim(F) = m$, và giả sử $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ là một cơ sở của E, $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ là một cơ sở của F. Khi đó

Định nghĩa 10 và tính chất

Ma trận cấp $m \times n$,

$$A = [\ [f(u_1)]_{\mathcal{V}}\ [f(u_2)]_{\mathcal{V}} \cdots [f(u_n)]_{\mathcal{V}}\ ],$$

được gọi là ma trận của Axtt f trong các cơ sở $(\mathcal{B}, \mathcal{V})$.
Khi đó với mọi $u \in E$, giả sử $x = [u]_{\mathcal{B}}$ thì $f(u)$ có tọa độ cột y trong cơ sở $\mathcal{V}$ thỏa mãn:

$$y = [f(u)]_{\mathcal{V}} = Ax, \quad \text{hay } [f(u)]_{\mathcal{V}} = A[u]_{\mathcal{B}}.$$

Chú ý : Nếu $F \equiv E$ và $\mathcal{V} \equiv \mathcal{B}$ thì ta nói A là ma trận của Axtt f trong cơ sở $\mathcal{B}$.

Ví dụ: Xác định ma trận của các Axtt

1. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (2x + z, x - y, 2x + y + z)$ trong các cơ sở chính tắc.

2. $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $g(x, y, z) = (x - y, x + y - 3z)$ trong các cơ sở $\mathcal{B} = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$ và $\mathcal{V} = \{(1, 1), (1, 2)\}$.
Cho $u = (-1, 0, 3)$, xác định tọa độ của $f(u)$ trong cơ sở $\mathcal{V}$.

Ví dụ: Xác định ma trận của các Axtt

1. $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (2x + z, x - y, 2x + y + z)$ trong các cơ sở chính tắc.

2. $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $g(x, y, z) = (x - y, x + y - 3z)$ trong các cơ sở $\mathcal{B} = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$ và $\mathcal{V} = \{(1, 1), (1, 2)\}$.
Cho $u = (-1, 0, 3)$, xác định tọa độ của $f(u)$ trong cơ sở $\mathcal{V}$.
(Gợi ý $u = 2u_1 - 3u_2 + u_3$**)**

Ví dụ: Xác định ma trận của các Axtt

1. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (2x + z, x - y, 2x + y + z)$ trong các cơ sở chính tắc.

2. $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $g(x, y, z) = (x - y, x + y - 3z)$ trong các cơ sở $\mathcal{B} = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$ và $\mathcal{V} = \{(1, 1), (1, 2)\}$.
   Cho $u = (-1, 0, 3)$, xác định tọa độ của $f(u)$ trong cơ sở $\mathcal{V}$.
   (Gợi ý $u = 2u_1 - 3u_2 + u_3$**)**

3. $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $h(x, y, z) = (2x + z, x - y, 2x + y + z)$ trong cơ sở $\mathcal{B} = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$.

Ma trận của ánh xạ tuyến tính trong hai cơ sở

Cho $f : E \to E$ là một Axtt. Giả sử $\mathcal{B}$ và $\mathcal{B}'$ là hai cơ sở của E. Giả sử A là ma trận của Axtt f trong cơ sở $\mathcal{B}$ và A' là ma trận f trong cơ sở $\mathcal{B}'$.

Mối liên hệ giữa A và A'?

Gọi P là ma trận chuyển cơ sở từ $\mathcal{B}$ sang $\mathcal{B}'$. Khi đó ta có kết quả:

$$A' = PAP^{-1}.$$

Ma trận của ánh xạ tuyến tính trong hai cơ sở

Cho $f : E \to E$ là một Axtt. Giả sử $\mathcal{B}$ và $\mathcal{B}'$ là hai cơ sở của E. Giả sử A là ma trận của Axtt f trong cơ sở $\mathcal{B}$ và A' là ma trận f trong cơ sở $\mathcal{B}'$.

Mối liên hệ giữa A và A'?

Gọi P là ma trận chuyển cơ sở từ $\mathcal{B}$ sang $\mathcal{B}'$. Khi đó ta có kết quả:

$$A' = PAP^{-1}.$$

Hai ma trận A, A' thỏa mãn đẳng thức như trên được gọi là **đồng dạng**.

Cho u và v trong $\mathbb{R}^n$, tích trong hay tích vô hướng của u và v, ký hiệu bởi $u \bullet v$ hay (u, v), cho bởi

$$(u, v) = u \bullet v = uv^T = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i .$$

Định nghĩa 11

Một không gian véc tơ **thực** E được trang bị một tích vô hướng được gọi là một không gian Ơclid. Ở đây chúng ta định nghĩa một tích vô hướng giữa hai véc tơ bất kỳ u và v của E là một số thực duy nhất, ký hiệu bởi (u, v), thỏa mãn các tiên đề sau:

1. Tính đối xứng: với mọi $u, v \in E$,
$$(u, v) = (v, u);$$
2. Tính tuyến tính: với mọi $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ và mọi $u, w, v \in E$,
$$(k_1 u + k_2 w, v) = k_1(u, v) + k_2(w, v);$$
3. Tính xác định-dương: với mọi $u \in E$,
$$(u, u) \geq 0,$$
$$(u, u) = 0 \text{ khi và chỉ khi } u = 0.$$

Hai véc tơ u và v được gọi là vuông góc nếu $(u, v) = 0$.

Độ dài hay chuẩn của một véc tơ:

$$\| u \| = \sqrt{(u, u)}.$$

Định nghĩa góc giữa hai véc tơ...

* **Một số ví dụ**...

Remark: Nếu E là KGVT **phức** và tích vô hướng (u, v) được định nghĩa là một số phức thỏa mãn các tiên đề (2), (3) như trong định nghĩa trên với mọi véc tơ của E và với bất kỳ các số phức k_1, k_2; chỉ thay tiên đề (1) bởi tiên đề

$$(u, v) = \overline{(v, u)},$$

thì E được gọi là không gian Unita.
Ở đây $\overline{z}$ ký hiệu số phức liên hợp của z.