# Отчёт по лабораторной работе №4

Вариант 12

Нгуен Дык Ань

# Содержание

# I.Цель работы

Изучаем модель гармонических колебаний, решаем уравнения гармонического осциллятора и построим фазовый портрет с помощью Scilab

# II.Задание

Постройте фазовый портрет гармонического осциллятора и решение уравнения гармонического осциллятора для следующих случаев.

1. Колебания гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы $\ddot{x} + 4x = 0$

2. Колебания гармонического осциллятора с затуханием и без действий внешней силы $\ddot{x} + 4\dot{x} + 8x = 0$

3. Колебания гармонического осциллятора с затуханием и под действием внешней силы $\ddot{x} + 3\dot{x} + 4x = 5sin(2t)$

На интервале $t = [0; 55]$ (шаг 0.05) с начальными условиями $x_0 = 0, y_0 = -2$

# III. Выполнение задания

## 1. Колебания гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы $\ddot{x} + 4x = 0$

- Решать уравнеие $\ddot{x} + 4x = 0$

Характерическое уравнеие: $k^2 + 4 = 0$, решаем его, мы получим решения:

$$\begin{cases} k_1 = 2i \\ k_2 = -2i \end{cases}$$

Поэтому мы получим общее решение: $x = (C_1 cos(2t) + C_2 sin(2t))$ (1)

Дифференцируем (1), получим: $\dot{x} = -C_1 sin(2t) + C_2 cos(2t)$

С помощью начальных условии $x_0 = 0, y_0 = -2$, мы создаём систему уравнении, чтобы найти $C_1$ и $C_2$:

$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 * cos(0) + C_2 sin(0) = 0 \\ -C_1 sin(0) + C_2 cos(0) = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = -2 \end{cases}$$

Таким образом, мы получим общее решение: $x = -2sin(2t)$ (2)

- Построить фазовый портрет гармонического осциллятора с помощью Scilab

Введём следующий код:

```
//x'' + w^2* x = 0
w2 = 4; //w - частота (w2 - это w^2)
```

```
g = 0; //g - затухание

// Введём функцию для решения
function dx=y(t, x)
dx(1) = x(2);
dx(2) = -w2 * x(1);
endfunction

//Точка, в которой заданы начальные условия
t0 = 0;
//Вектор начальных условий
x0 = [0; -2];
//Интервал на котором будет решаться задача
t = [0: 0.05: 55];

//Решаем дифференциальные уравнения и записываем решение в матрицу x
x = ode(x0, t0, t, y);
//Количество столбцов в матрице
n = size(x, "c"); //Переписываем отдельно
//x в y1, x ' в y2
for i = 1: n
y1(i) = x(1, i);
y2(i) = x(2, i);
end
//Рисуем фазовый портрет: зависимость x(x ')
plot(y1, y2);
//plot(t,y1); -фазовый портрет: зависимость x(t)
xgrid()
```

И мы получим результат:

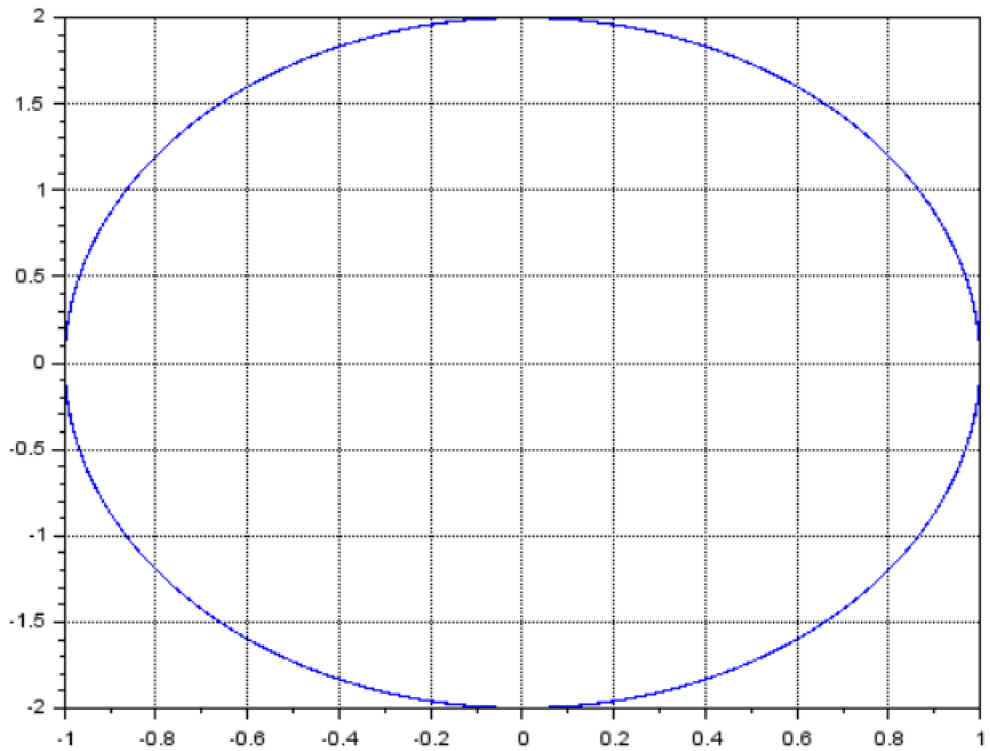


Рис. 1: Фазовый портрет гармонического осциллятора первого случая в зависимость x(x')

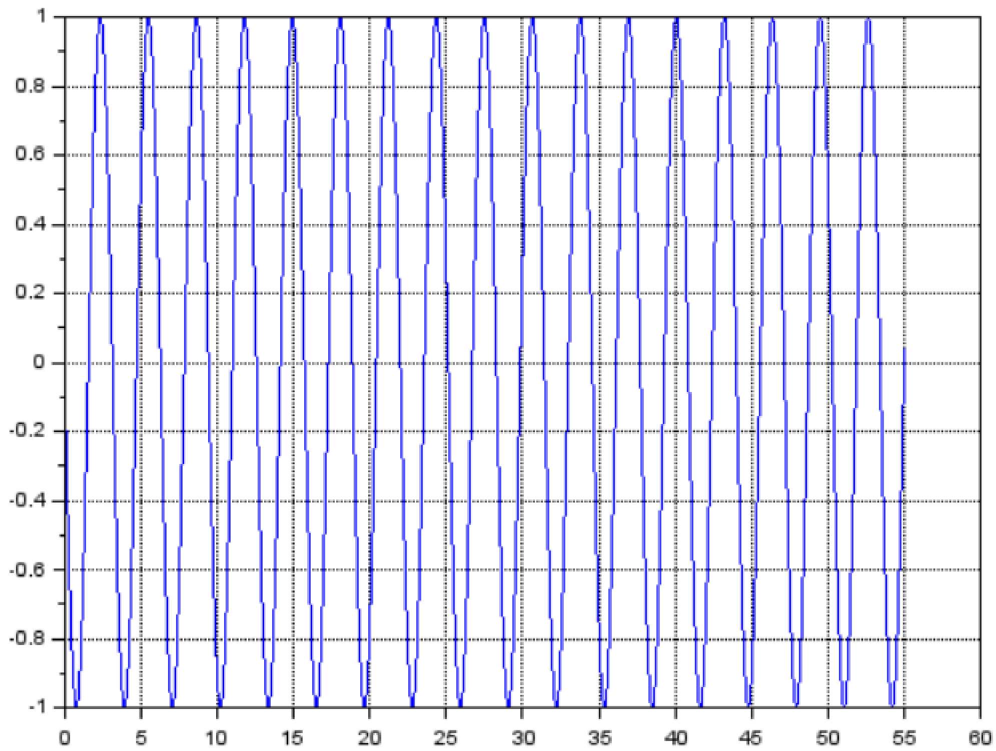


Рис. 2: Фазовый портрет гармонического осциллятора первого случая в зависимость x(t)

## 2. Колебания гармонического осциллятора с затуханием и без действий внешней силы $\ddot{x} + 4\dot{x} + 8x = 0$

- Решать уравнеие $\ddot{x} + 4\dot{x} + 8x = 0$

Характерическое уравнеие: $k^2 + 4k + 8 = 0$, решаем его, мы получим решения:

$$\begin{cases} k_1 = -2 + 2i \\ k_2 = -2 - 2i \end{cases}$$

Поэтому мы получим общее решение: $x = e^{-2t}(C_1cos(2t) + C_2sin(2t))$ (3)

Дифференцируем (3), получим:

$\dot{x} = (e^{-2t}C_1cos(2t))' + (e^{-2t}C_2sin(2t))'$

$\dot{x} = -2e^{-2t}C_1cos(2t) - 2e^{-2t}C_1sin(2t) - 2e^{-2t}C_2sin(2t) + 2e^{-2t}C_2cos(2t)$

$\dot{x} = -2e^{-2t}[(C_1 - C_2)cos(2t) + (C_1 + C_2)sin(2t)]$ (4)

С начальными условиями получим систему уравнении:

$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{-2*0}(C_1cos(2*0) + C_2sin(2*0)) = 0 \\ -2e^{-2*0}[(C_1 - C_2)cos(2*0) + (C_1 + C_2)sin(2*0)] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ -2(C_1 - C_2) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = -1 \end{cases}$$

И мы получим решение: $x = -e^{-2t}sin(2t)$

- Построить фазовый портрет гармонического осциллятора с помощью Scilab

Введём следующий код:

```
//x'' + g* x' + w^2* x = 0
w2 = 8;
g = 4;

// Введём функцию для решения
function dx=y(t, x)
dx(1) = x(2);
dx(2) = -w2 * x(1) - g * x(2);
endfunction

//Точка, в которой заданы начальные условия
t0 = 0;
//Вектор начальных условий
x0 = [0; -2];
//Интервал на котором будет решаться задача
t = [0: 0.05: 55];
```

```
//Решаем дифференциальные уравнения и записываем решение в матрицу x
x = ode(x0, t0, t, y);
//Количество столбцов в матрице
n = size(x, "c");//Переписываем отдельно
//x в y1, x ' в y2
for i = 1: n
y1(i) = x(1, i);
y2(i) = x(2, i);
end
//Рисуем фазовый портрет: зависимость x(x ')
plot(y1, y2);
//plot(t,y1); -фазовый портрет: зависимость x(t)
xgrid();
```

И мы получим результат:

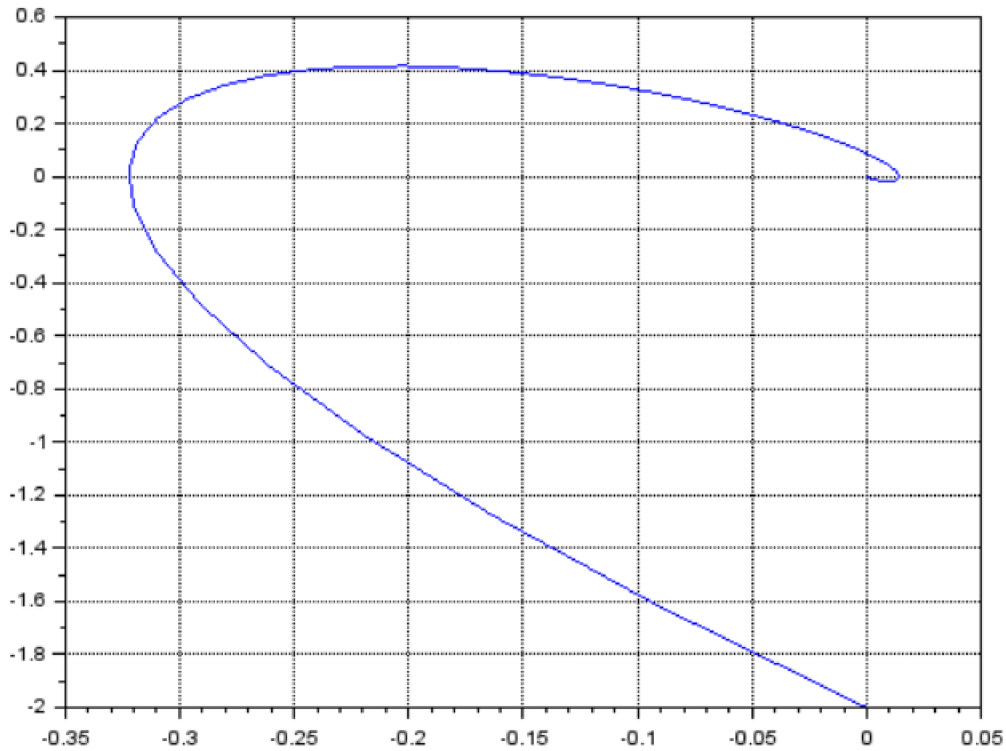


Рис. 3: Фазовый портрет гармонического осциллятора второго случая в зависимость x(x')

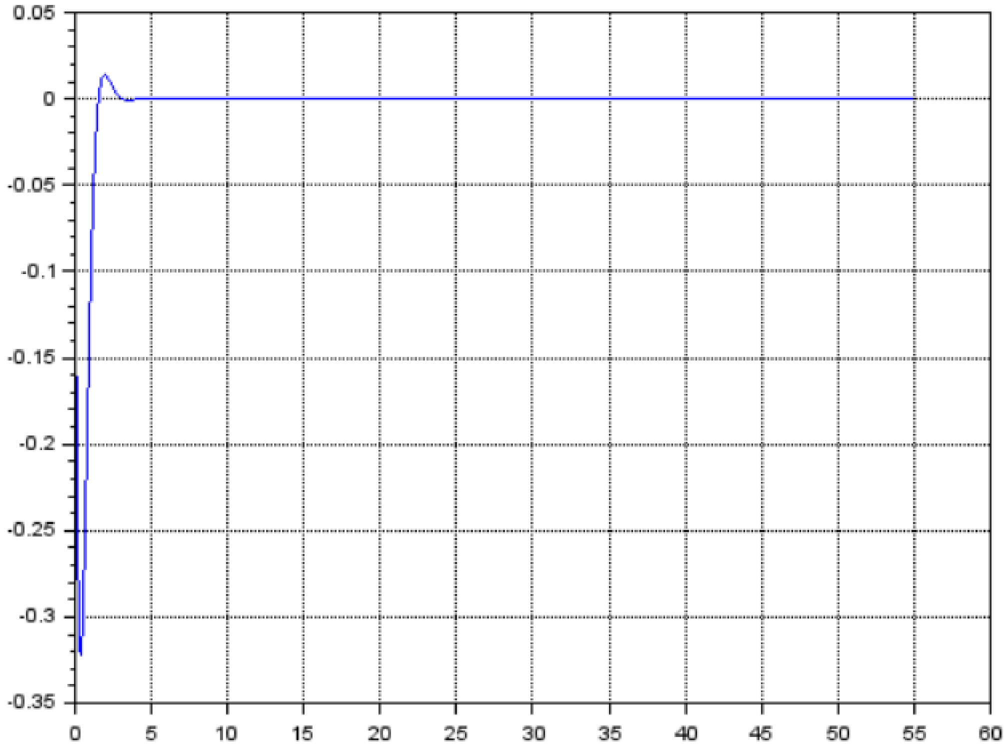


Рис. 4: Фазовый портрет гармонического осциллятора второго случая в зависимость x(t)

## 3. Колебания гармонического осциллятора с затуханием и под действием внешней силы $\ddot{x} + 3\dot{x} + 4x = 5sin(2t)$

- Решать уравнеие $\ddot{x} + 3\dot{x} + 4x = 5sin(2t)$

Сначала нам нужно решать однородные линейные дифференцирующие уравнения $\ddot{x} + 3\dot{x} + 4x = 0$, чтобы найти общее решение однородного уравнения:

Характерическое уравнеие: $k^2 + 3k + 4 = 0$, решаем его, мы получим решения:

$$\begin{cases} k_1 = \frac{-3+\sqrt{7}i}{2} \\ k_2 = \frac{-3-\sqrt{7}i}{2} \end{cases}$$

Мы получим общее решение однородного уравнения:

$x = e^{-\frac{3}{2}t}(C_1 cos(\frac{\sqrt{7}}{2}t) + C_2 sin(\frac{\sqrt{7}}{2}t))$ (5)

Затем мы наидём частное решение неоднородного уравнения.

Видно, что $m = 0, n = 2, m \neq \alpha, n \neq \beta \Rightarrow$ решение имеет вид:

$x = e^{mx}(Acos(nt) + Bsin(nt))$ (6)

Поставим $m = 0, n = 2$ в (6), получим $x = Acos(2t) + Bsin(2t)$. Дифференцируем этот уравнение, получим:

$\dot{x} = -2Asin(2t) + 2Bcos(2t)$

$\ddot{x} = -4Acos(2t) - 4Bsin(2t)$

Поставим $\dot{x}$ и $\ddot{x}$ в уравнеие $\ddot{x} + 3\dot{x} + 4x = 5sin(2t)$, получим:

$(-4Acos(2t) - 4Bsin(2t)) + 3(-2Asin(2t) + 2Bcos(2t)) + 4(Acos(2t) + Bsin(2t)) = 5sin(2t)$

$\Leftrightarrow 6Bcos(2t) - 6Asin(2t) = 5sin(2t) \Leftrightarrow \begin{cases} A = -\frac{5}{6} \\ B = 0 \end{cases}$

Так мы получим частное решение неоднородного уравнения: $x = -\frac{5}{6}cos(2t)$

Таким образом, общее решение неоднородного уравнения равно сумме общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения:

$x = e^{-\frac{3}{2}t}(C_1 cos(\frac{\sqrt{7}}{2}t) + C_2 sin(\frac{\sqrt{7}}{2}t)) - \frac{5}{6}cos(2t)$ (7)

Чтобы найти конкретное значение $C_1$ и $C_2$, мы дифференцируем (7) и с начальными условиями, получим:

$\dot{x} = -\frac{e^{-\frac{3t}{2}}((9C_2+3\sqrt{7}C_1)sin(\frac{\sqrt{7}t}{2})+(9C_1-3\sqrt{7}C_2)cos(\frac{\sqrt{7}t}{2})-10e^{\frac{3t}{2}}sin(2t))}{6}$ (8)

От (7), (8) мы создаём систему уравнении:

$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 - \frac{5}{6} = 0 \\ 9C_1 - 3\sqrt{7}C_2 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{5}{6} \\ C_2 = \frac{19\sqrt{7}}{42} \end{cases}$$

Общее решение неоднородного уравнения:

$x = e^{-\frac{3}{2}t}(\frac{5}{6}cos(\frac{\sqrt{7}}{2}t) + \frac{19\sqrt{7}}{42}sin(\frac{\sqrt{7}}{2}t)) - \frac{5}{6}cos(2t)$

- Построить фазовый портрет гармонического осциллятора с помощью Scilab

Введём следующий код:

```
//x'' + g* x' + w^2* x = f(t)
w2 = 4;
g = 3;
//Правая часть уравнения f(t)
function f=f(t)
f = 5*sin(2*t);
endfunction

// Введём функцию для решения
function dx=y(t, x)
dx(1) = x(2);
dx(2) = -w2 * x(1) - g * x(2) - f(t);
endfunction

//Точка, в которой заданы начальные условия
t0 = 0;
//Вектор начальных условий
x0 = [0; -2];
//Интервал на котором будет решаться задача
t = [0: 0.05: 55];

//Решаем дифференциальные уравнения и записываем решение в матрицу x
x = ode(x0, t0, t, y);
//Количество столбцов в матрице
n = size(x, "c");//Переписываем отдельно
//x в y1, x' в y2
for i = 1: n
y1(i) = x(1, i);
y2(i) = x(2, i);
```

```
end
//Рисуем фазовый портрет: зависимость x(x ')
plot(y1, y2);
//plot(t,y1); -фазовый портрет: зависимость x(t)
xgrid();
```

И мы получим результат:

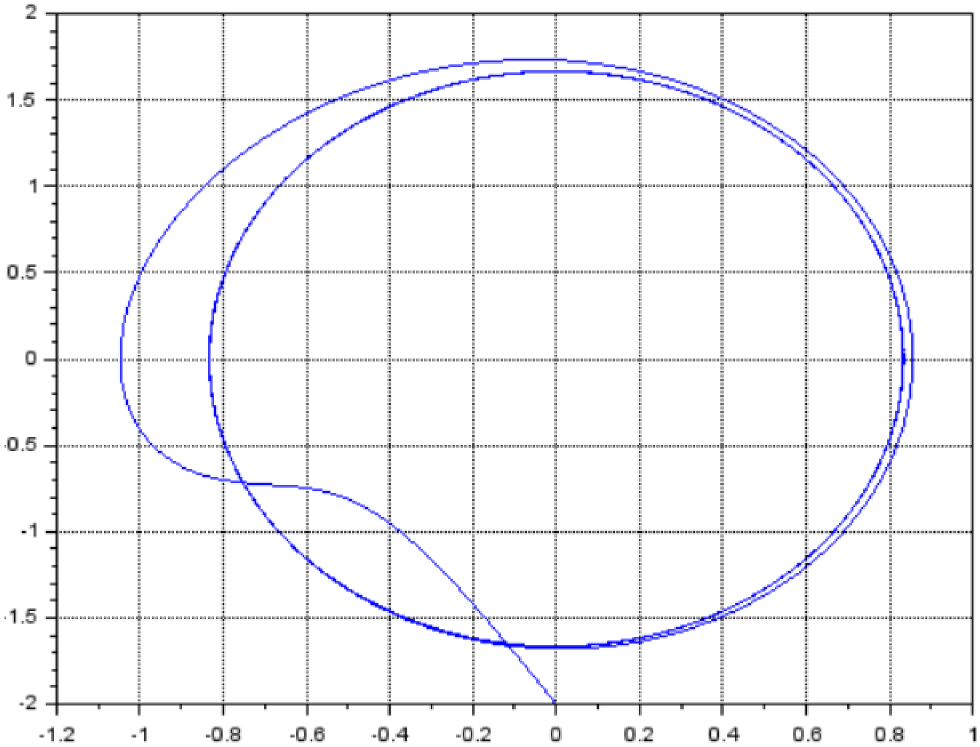


Рис. 5: Фазовый портрет гармонического осциллятора третьего случая в зависимость x(x')

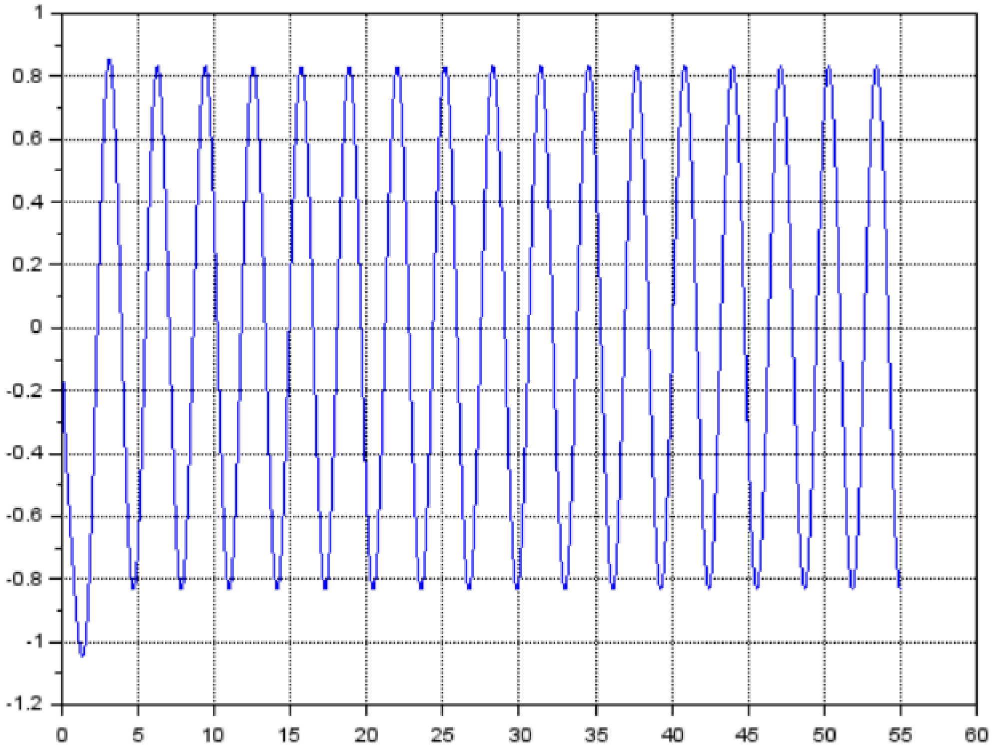


Рис. 6: Фазовый портрет гармонического осциллятора третьего случая в зависимость x(t)

# IV. Вывод

После лабораторной работы, я познакомился с моделей гармонических колебаний, получил навыки по решению уравнения гармонического осциллятора и приобрел построить фазовый портрет с помощью Scilab.