Презентация по лабораторной работе №4

Модель гармонических колебаний (Вар. 12)

Нгуен Дык Ань

1 марта 2024

Докладчик

- Нгуен Дык Ань
- Студенческий билет: 1032215251
- Группа: НКНбд-01-21
- Российский университет дружбы народов
- https://github.com/NguyenDucAnh0512

Цель работы

Изучаем модель гармонических колебаний, решаем уравнения гармонического осциллятора и построим фазовый портрет с помощью Scilab

Задание

Постройте фазовый портрет гармонического осциллятора и решение уравнения гармонического осциллятора для следующих случаев.

Задание

1. Колебания гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы $\ddot{x} + 4x = 0$
2. Колебания гармонического осциллятора с затуханием и без действий внешней силы $\ddot{x} + 4\dot{x} + 8x = 0$
3. Колебания гармонического осциллятора с затуханием и под действием внешней силы $\ddot{x} + 3\dot{x} + 4x = 5sin(2t)$

На интервале $t = [0; 55]$ (шаг 0.05) с начальными условиями $x_0 = 0, y_0 = -2$

Выполнение задания

1. Колебания гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы $\ddot{x} + 4x = 0$

- Решать уравнеие $\ddot{x} + 4x = 0$

Характерическое уравнеие: $k^2 + 4 = 0$, решаем его, мы получим решения:

$$\begin{cases} k_1 = 2i \\ k_2 = -2i \end{cases}$$

Поэтому мы получим общее решение: $x = \left(C_1 cos(2t) +\right.$

Выполнение задания

1. Колебания гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы $\ddot{x} + 4x = 0$

Дифференцируем (1), получим: $\dot{x} = -C_1 sin(2t) + C_2 cos(2t)$

С помощью начальных условии $x_0 = 0, y_0 = -2$, мы создаём систему уравнении, чтобы найти C_1 и C_2:

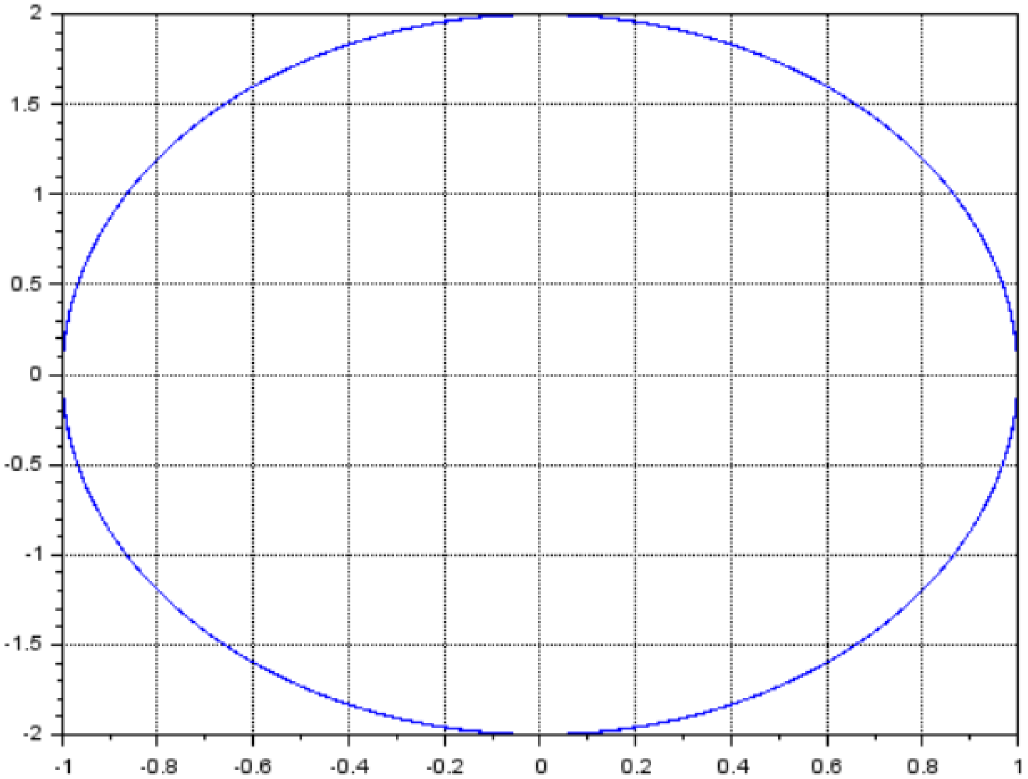
$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 * cos(0) + C_2 sin(0) = 0 \\ -C_1 sin(0) + C_2 cos(0) = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = -2 \end{cases}$$

Таким образом, мы получим общее решение: $x = -2sin(2t)$ (2)

Выполнение задания

1. Колебания гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы $\ddot{x} + 4x = 0$

Построить фазовый портрет гармонического осциллятора с помощью Scilab, получил:

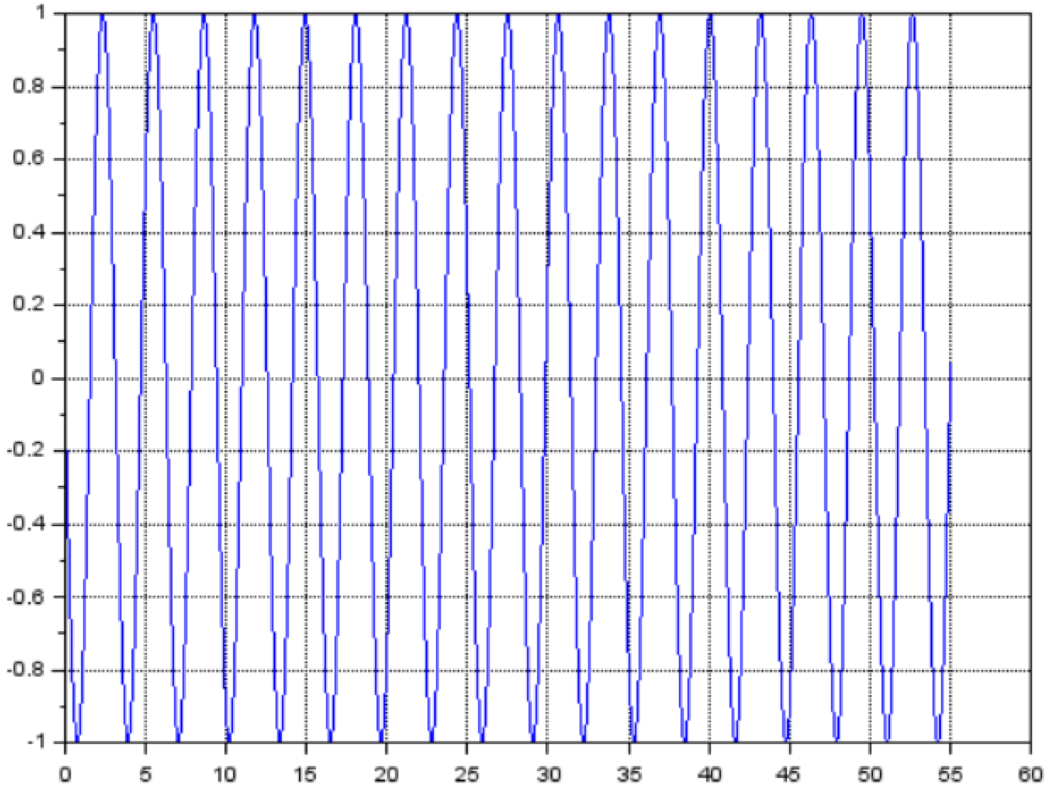


Фазовый портрет гармонического осциллятора первого случая в зависимость x(x’)

Выполнение задания

1. Колебания гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы $\ddot{x} + 4x = 0$

Построить фазовый портрет гармонического осциллятора с помощью Scilab, получил:



Фазовый портрет гармонического осциллятора первого случая в зависимость x(t)

Выполнение задания

2. Колебания гармонического осциллятора с затуханием и без действий внешней силы $\ddot{x} + 4\dot{x} + 8x = 0$

- Решать уравнеие $\ddot{x} + 4\dot{x} + 8x = 0$

Характерическое уравнеие: $k^2 + 4k + 8 = 0$, решаем его, мы получим решения:

$$\begin{cases} k_1 = -2 + 2i \\ k_2 = -2 - 2i \end{cases}$$

Поэтому мы получим общее решение: $x = e^{-2t}\Big(C_1 cos(2t) +$

Выполнение задания

2. Колебания гармонического осциллятора с затуханием и без действий внешней силы $\ddot{x} + 4\dot{x} + 8x = 0$

Дифференцируем (3), получим:

$$\dot{x} = \left(e^{-2t}C_1 cos(2t)\right)' + \left(e^{-2t}C_2 sin(2t)\right)'$$

$\dot{x} = -2e^{-2t}[(C_1 - C_2)cos(2t) + (C_1 + C_2)sin(2t)]$ (4)

С начальными условиями получим систему уравнении:

Выполнение задания

2. Колебания гармонического осциллятора с затуханием и без действий внешней силы $\ddot{x} + 4\dot{x} + 8x = 0$

$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e^{-2*0}\left(C_1 cos(2*0) + C_2 sin(2*0)\right) = 0 \\ -2e^{-2*0}[(C_1 - C_2)cos(2*0) + (C_1 + C_2)sin(2*0)] \end{cases}$$

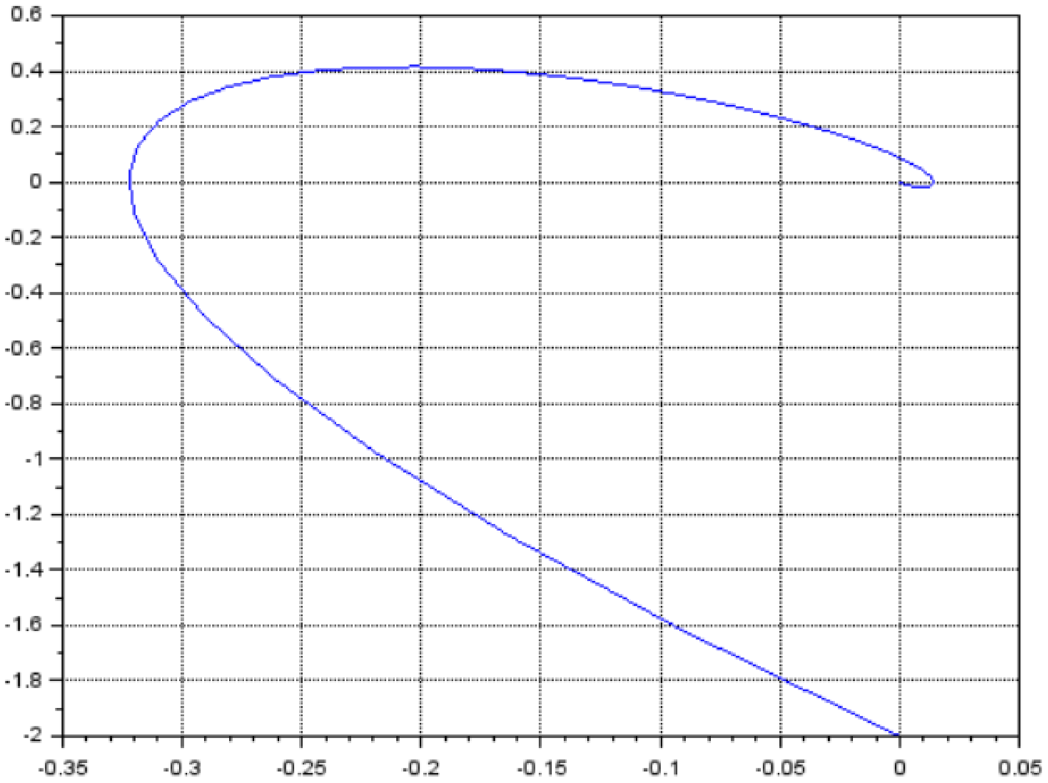
$$\Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ -2(C_1 - C_2) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = -1 \end{cases}$$

И мы получим решение: $x = -e^{-2t} sin(2t)$

Выполнение задания

2. Колебания гармонического осциллятора с затуханием и без действий внешней силы $\ddot{x} + 4\dot{x} + 8x = 0$

Построить фазовый портрет гармонического осциллятора с помощью Scilab, получил:

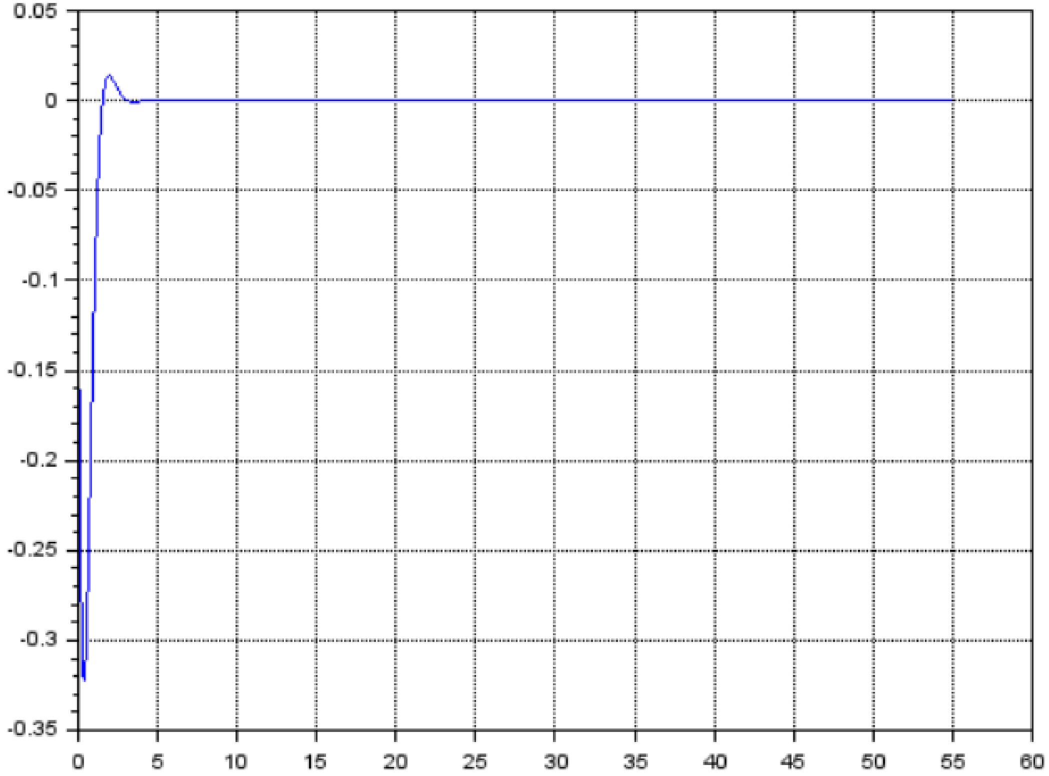


Фазовый портрет гармонического осциллятора второго случая в зависимость x(x’)

Выполнение задания

2. Колебания гармонического осциллятора с затуханием и без действий внешней силы $\ddot{x} + 4\dot{x} + 8x = 0$

Построить фазовый портрет гармонического осциллятора с помощью Scilab, получил:



Фазовый портрет гармонического осциллятора второго случая в зависимость x(t)

Выполнение задания

3. Колебания гармонического осциллятора с затуханием и под действием внешней силы $\ddot{x} + 3\dot{x} + 4x = 5sin(2t)$

- Решать уравнеие $\ddot{x} + 3\dot{x} + 4x = 5sin(2t)$

Сначала нам нужно решать однородные линейные дифференцирующие уравнения $\ddot{x} + 3\dot{x} + 4x = 0$, чтобы найти общее решение однородного уравнения:

Характерическое уравнеие: $k^2 + 3k + 4 = 0$, решаем его, мы получим решения:

Выполнение задания

3. Колебания гармонического осциллятора с затуханием и под действием внешней силы $\ddot{x} + 3\dot{x} + 4x = 5sin(2t)$

$$\begin{cases} k_1 = \dfrac{-3+\sqrt{7}i}{2} \\ k_2 = \dfrac{-3-\sqrt{7}i}{2} \end{cases}$$

Мы получим общее решение однородного уравнения:

$$x = e^{-\frac{3}{2}t}\left(C_1 cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right) + C_2 sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right)\right) \quad (5)$$

Выполнение задания

3. Колебания гармонического осциллятора с затуханием и под действием внешней силы $\ddot{x} + 3\dot{x} + 4x = 5sin(2t)$

Затем мы наидём частное решение неоднородного уравнения.

Видно, что $m = 0, n = 2, m \neq \alpha, n \neq \beta \Rightarrow$ решение имеет вид:

$x = e^{mx}\left(Acos(nt) + Bsin(nt)\right)$ (6)

Выполнение задания

3. Колебания гармонического осциллятора с затуханием и под действием внешней силы $\ddot{x} + 3\dot{x} + 4x = 5sin(2t)$

Поставим $m = 0, n = 2$ в (6), получим $x = Acos(2t) + Bsin(2t)$. Дифференцируем этот уравнение, получим:

$$\dot{x} = -2Asin(2t) + 2Bcos(2t)$$

$$\ddot{x} = -4Acos(2t) - 4Bsin(2t)$$

Выполнение задания

3. Колебания гармонического осциллятора с затуханием и под действием внешней силы $\ddot{x} + 3\dot{x} + 4x = 5sin(2t)$

Поставим $\dot{x}$ и $\ddot{x}$ в уравнеие $\ddot{x} + 3\dot{x} + 4x = 5sin(2t)$, получим:

$$\big(-4Acos(2t) - 4Bsin(2t)\big) + 3\big(-2Asin(2t) + 2Bcos(2t)\big) + 4\big(Acos(2t) + Bsin(2t)\big) = 5sin(2t)$$

$$\Leftrightarrow 6Bcos(2t) - 6Asin(2t) = 5sin(2t) \Leftrightarrow \begin{cases} A = -\dfrac{5}{6} \\ B = 0 \end{cases}$$

Выполнение задания

3. Колебания гармонического осциллятора с затуханием и под действием внешней силы $\ddot{x} + 3\dot{x} + 4x = 5sin(2t)$

Так мы получим частное решение неоднородного уравнения:

$x = -\frac{5}{6}cos(2t)$

Таким образом, общее решение неоднородного уравнения равно сумме общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения:

$$x = e^{-\frac{3}{2}t}\left(C_1 cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right) + C_2 sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right)\right) - \frac{5}{6}cos(2t) \quad (7)$$

Выполнение задания

3. Колебания гармонического осциллятора с затуханием и под действием внешней силы $\ddot{x} + 3\dot{x} + 4x = 5sin(2t)$

Чтобы найти конкретное значение C_1 и C_2, мы дифференцируем (7) и с начальными условиями, получим:

$$\dot{x} = -\frac{e^{-\frac{3t}{2}}\left(\left(9C_2+3\sqrt{7}C_1\right)sin\left(\frac{\sqrt{7}t}{2}\right)+\left(9C_1-3\sqrt{7}C_2\right)cos\left(\frac{\sqrt{7}t}{2}\right)-10e^{\frac{3t}{2}}sin(2t)\right)}{6}$$

(8)

От (7), (8) мы создаём систему уравнении:

Выполнение задания

3. Колебания гармонического осциллятора с затуханием и под действием внешней силы $\ddot{x} + 3\dot{x} + 4x = 5sin(2t)$

$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 - \frac{5}{6} = 0 \\ 9C_1 - 3\sqrt{7}C_2 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{5}{6} \\ C_2 = \frac{19\sqrt{7}}{42} \end{cases}$$

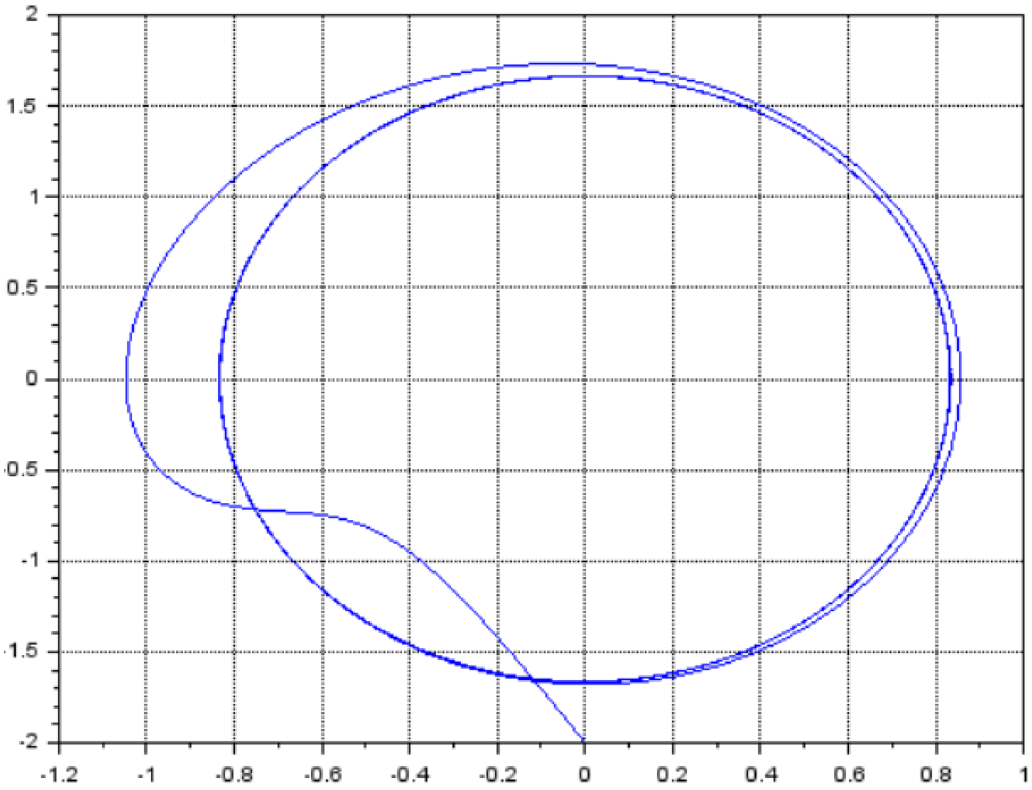
Общее решение неоднородного уравнения:

$$x = e^{-\frac{3}{2}t}\left(\frac{5}{6}cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right) + \frac{19\sqrt{7}}{42}sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right)\right) - \frac{5}{6}cos(2t)$$

Выполнение задания

3. Колебания гармонического осциллятора с затуханием и под действием внешней силы $\ddot{x} + 3\dot{x} + 4x = 5sin(2t)$

Построить фазовый портрет гармонического осциллятора с помощью Scilab, получил:

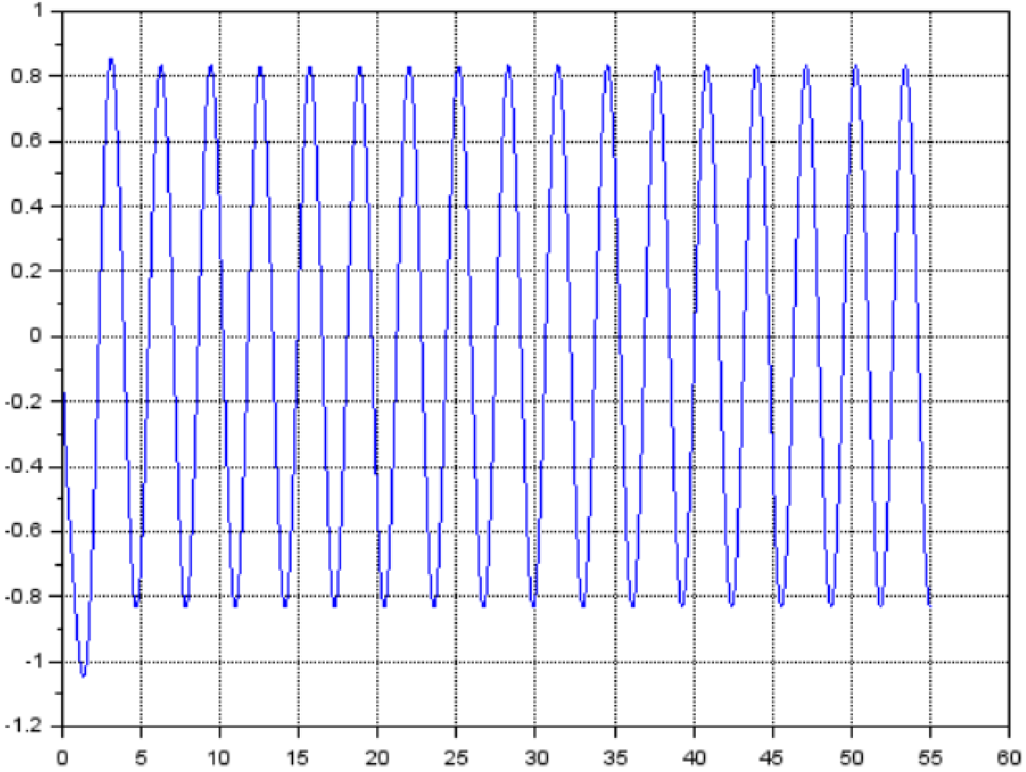


Фазовый портрет гармонического осциллятора третьего случая в зависимость x(x’)

Выполнение задания

3. Колебания гармонического осциллятора с затуханием и под действием внешней силы $\ddot{x} + 3\dot{x} + 4x = 5sin(2t)$

Построить фазовый портрет гармонического осциллятора с помощью Scilab, получил:



Фазовый портрет гармонического осциллятора третьего случая в зависимость x(t)

Вывод

После лабораторной работы, я познакомился с моделей гармонических колебаний, получил навыки по решению уравнения гармонического осциллятора и приобрел построить фазовый портрет с помощью Scilab.