I. Giải hệ thức truy hồi tuyến tính cấp hai

● Một dãy số viết dạng $\{u_n\}_{n=1}^{+\infty} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots\}$ hoặc dạng $\{u_n\}_{n=0}^{+\infty} = \{u_0, u_1, \ldots, u_n, \ldots\}$; trong đó u_n được gọi số hạng tổng quát (hay số hạng thứ n), với n là số tự nhiên.

Dấu "·" ký hiệu cho dấu nhân (hay tích).

1. Hệ truy hồi tuyến tính cấp 2 thuần nhất với hệ số hằng.

Tìm tất cả các dãy số $\{u_n\}$ thỏa mãn hệ thức truy hồi sau

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n, \forall n \geq 0,$$

trong đó a, b là các hằng số và $b \neq 0$.

Phương pháp giải:

Bước 1: **Phương trình đặc trưng: $\lambda^2 = a\lambda + b$.**

Giải phương trình đặc trưng ta nhận được các nghiệm $\boldsymbol{\lambda = \lambda_1}$ và $\boldsymbol{\lambda = \lambda_2}$.

Ghi nhớ (cách xác định phương trình đặc trưng): Trong hệ thức truy hồi, thay u_{n+2} bằng λ^2, thay u_{n+1} bằng λ, và thay u_n bằng 1.

Bước 2: **Nghiệm tổng quát $\{u_n\}$ của hệ thức truy hồi thuần nhất.** (kết luận tùy theo các trường hợp sau)

Trường hợp 1. Phương trình đặc trưng có hai nghiệm thực phân biệt.

$$u_n = C_1(\lambda_1)^n + C_2(\lambda_2)^n, \forall n \geq 0,$$

với C_1, C_2 là các hằng số bất kỳ.

Trường hợp 2. Phương trình đặc trưng có nghiệm kép, tức $\lambda_1 = \lambda_2$.

$$u_n = C_1(\lambda_1)^n + nC_2(\lambda_1)^n, \forall n \geq 0,$$

với C_1, C_2 là các hằng số bất kỳ.

Trường hợp 3. Phương trình đặc trưng có nghiệm phức , tức $\lambda_1 = x_1 + y_1 i$, $\lambda_2 = x_1 - y_1 i$ (với $y_1 > 0$).

$$u_n = r^n(C_1 \cos n\theta + C_2 \sin n\theta), \forall n \geq 0,$$

với C_1, C_2 là các hằng số bất kỳ, trong đó $r = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$ là modun của λ_1 và $\theta \in (-\pi, \pi]$ là argument chính của λ_1. Cụ thể:

+) Nếu $x_1 > 0$ thì $\theta = \arctan\left(\dfrac{y_1}{x_1}\right)$.

+) Nếu $x_1 < 0$ thì $\theta = \pi - \arctan\left(\dfrac{y_1}{|x_1|}\right)$.

+) Nếu $x_1 = 0$ thì $\theta = \dfrac{\pi}{2}$.

Chú ý: Nếu hệ thức truy hồi thuần nhất cho dưới dạng:

$$au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0, \ \forall n \geq 0.$$

Phương trình đặc trưng có dạng $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$.

VD 1. Xét hệ truy hồi tuyến tính cấp 2 sau

$$u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n, \forall n \geq 0.$$

Tìm nghiệm tổng quát của hệ thức truy hồi đã cho

Giải:

- Phương trình đặc trưng:

$$\lambda^2 = 2\lambda + 3.$$

Phương trình có hai nghiệm $\lambda_1 = -1$ và $\lambda_2 = 3$.

- Nghiệm tổng quát của hệ thức truy hồi có dạng:

$$u_n = C_1(\lambda_1)^n + C_2(\lambda_2)^n = C_1 \cdot (-1)^n + C_2 \cdot 3^n,\ \forall n \geq 0,$$

với C_1, C_2 là các hằng số thực bất kỳ.

VD 2. Tìm nghiệm tổng quát của hệ thức truy hồi tuyến tính cấp 2 sau

$$u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n, \forall n \geq 0.$$

Sau đó, tìm một nghiệm $\{u_n\}$ của hệ truy hồi thỏa mãn $u_0 = 1$ và $u_1 = -2.$

Giải:

- Phương trình đặc trưng có dạng

$$\lambda^2 = 5\lambda - 6.$$

Phương trình có hai nghiệm thực $\lambda_1 = 2$ và $\lambda_2 = 3.$

- Nghiệm tổng quát có dạng

$$u_n = C_1(\lambda_1)^n + C_2(\lambda_2)^n = C_1 2^n + C_2 3^n, \forall n \geq 0,$$

với C_1, C_2 là các hằng số tùy ý.

- Ta có $\boldsymbol{u_n = C_1 2^n + C_2 3^n}$ với mọi $\boldsymbol{n}$. Tìm $\boldsymbol{C_1, C_2}$ sao cho $\boldsymbol{u_0 = 1, u_1 = -2.}$

$\boldsymbol{u_0 = C_1 2^0 + C_2 3^0 = C_1 + C_2.}$ Suy ra $\boldsymbol{C_1 + C_2 = 1.}$

$\boldsymbol{u_1 = C_1 2^1 + C_2 3^1 = 2C_1 + 3C_2.}$ Suy ra $\boldsymbol{2C_1 + 3C_2 = -2.}$

Ta nhận hệ phương trình $\begin{cases} \boldsymbol{C_1 + C_2 = 1} \\ \boldsymbol{2C_1 + 3C_2 = -2} \end{cases}$

Giải hệ, ta nhận được $\boldsymbol{C_1 = 5, C_2 = -4.}$

Do đó $\boldsymbol{u_n = 5 \cdot 2^n + (-4) \cdot 3^n}$ với mọi $\boldsymbol{n}$

Nghiệm cần tìm là $\boldsymbol{\{u_n\} = \{5 \cdot 2^n + (-4) \cdot 3^n\}.}$

VD 3. Tìm nghiệm tổng quát của hệ thức truy hồi tuyến tính cấp 2 sau

$$4u_{n+2} - 4u_{n+1} + u_n = 0, \forall n \geq 0.$$

Giải:

- Phương trình đặc trưng có dạng

$$4\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0.$$

Phương trình có nghiệm kép $\lambda_1 = \lambda_2 = \dfrac{1}{2}$.

- Nghiệm tổng quát có dạng

$$u_n = C_1(\lambda_1)^n + nC_2(\lambda_1)^n = C_1\left(\frac{1}{2}\right)^n + nC_2\left(\frac{1}{2}\right)^n, \forall n \geq 0,$$

với C_1, C_2 là các hằng số tùy ý.

VD 4. Tìm nghiệm tổng quát của hệ thức truy hồi tuyến tính cấp 2 sau

$$u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n, \forall n \geq 0.$$

Giải:

- Phương trình đặc trưng có dạng

$$\lambda^2 = 2\lambda - 2.$$

Phương trình có hai nghiệm phức $\lambda_1 = 1 + i$ và $\lambda_2 = 1 - i.$

Ta có modun của λ_1 là $r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$

Phần thực của λ_1 là $x_1 = 1$. Phần ảo của λ_1 là $y_1 = 1.$ Do $x_1 > 0$ nên Arcgument chính $\theta = \arctan\left(\frac{y_1}{x_1}\right) = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}.$

- Nghiệm tổng quát có dạng

$$\boldsymbol{u_n = r^n(C_1 \cos n\theta + C_2 \sin n\theta) = (\sqrt{2})^n \left(C_1 \cos \frac{n\pi}{4} + C_2 \sin \frac{n\pi}{4}\right), \forall n \geq 0,}$$

với $\boldsymbol{C_1, C_2}$ là các hằng số tùy ý.

2. Giải hệ truy hồi tuyến tính cấp 2 tổng quát dạng

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n + c_n, \ \forall n \geq 0, \qquad (1.2)$$

trong đó, $\{u_n\}$ là dãy số chưa biết, a, b là các hằng số, $b \neq 0$ và dãy số $\{c_n\}$ đã biết.

• **Ghi nhớ: Hệ thức truy hồi thuần nhất của (1.2) có dạng:**

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n, \ \forall n \geq 0.$$

Phương pháp giải:

Bước 1: **Nghiệm tổng quát của hệ thức truy hồi thuần nhất của (1.2).**

+) Hệ thức truy hồi thuần nhất có dạng: $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n, \ \forall n \geq 0$.

+) Phương trình đặc trưng: $\lambda^2 = a\lambda + b$. Giải phương trình đặc trưng.

+) Kết luận nghiệm tổng quát của hệ thức truy hồi thuần nhất. Giả sử nghiệm này ký hiệu bởi $\{q_n\}$.

$\boxed{\textit{Bước 2:}}$ **Tìm một nghiệm riêng $\{p_n\}$ của (1.2): $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n + c_n, \ \forall n \geq 0$.**

Ý tưởng tìm: Từ dạng của c_n và các nghiệm của phương trình đặc trưng của hệ thức truy hồi thuần nhất, ta sẽ đoán biểu thức của p_n. Sau đó thay p_n, p_{n+1}, p_{n+2} vào (1.2) để tìm được p_n.

Chú ý (cách thay như sau): Trong hệ thức (1.2), thay u_{n+2} bằng p_{n+2},thay u_{n+1} bằng p_{n+1} và thay u_n bằng p_n.

$\boxed{\textit{Bước 3:}}$ **Nghiệm tổng quát của hệ thức truy hồi (1.2) có dạng**

$$u_n = q_n + p_n, \ \forall n \geq 0.$$

Chú ý: Cho hệ thức truy hồi dạng $au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = c_n,\ \forall n \geq 0$, trong đó $\{u_n\}$ là dãy số chưa biết, a, b, c là các hằng số và $\{c_n\}$ là dãy số đã biết.

Phương pháp giải của hệ truy hồi này là tương tự như hệ tuy hồi dạng (1.2).

Bước 1: **Tìm nghiệm tổng quát $\{q_n\}$ của hệ truy hồi thuần nhất thương ứng (tức là bỏ đi d_n trong hệ thức đã cho).**

Bước 2: **Tìm một nghiệm riêng $\{p_n\}$ của hệ truy hồi đã cho (tương tự như tìm nghiệm riêng của (1.2)).**

Bước 3: **Kết luận nghiệm tổng quát là $u_n = q_n + p_n, \forall n \geq 0$.**

Một số trường hợp đặc biệt để suy luận dạng của nghiệm riêng $\{p_n\}$

+) Trường hợp $c_n = C, \forall n$ (tức là dãy số $\{c_n\}$ có c_n là hằng số với mọi n):

- Nếu số 1 không là nghiệm phương trình đặc trưng thì $p_n = A$, với mọi n; trong đó A là hằng số cần phải tìm.

- Nếu số 1 là một nghiệm trong hai nghiệm phân biệt của phương trình đặc trưng thì $p_n = An$, với mọi n; trong đó A là hằng số cần phải tìm.

- Nếu số 1 là nghiệm kép của phương trình đặc trưng thì $p_n = A \cdot n^2$, với mọi n; trong đó A là hằng số cần phải tìm.

+) Trường hợp $c_n = Cn + D, \forall n$ (tức là dãy số $\{c_n\}$ có c_n là biểu thức bậc nhất của n):

- Nếu số 1 không là nghiệm phương trình đặc trưng thì $p_n = An + B$, với mọi n; trong đó A, B là các hằng số cần phải tìm.

- Nếu số 1 là một nghiệm trong hai nghiệm phân biệt của phương trình đặc trưng thì $p_n = (An + B)n$, với mọi n; trong đó A, B là các hằng số cần phải tìm.

- Nếu số 1 là nghiệm kép của phương trình đặc trưng thì $p_n = (An+B)\cdot n^2$, với mọi n; trong đó A, B là các hằng số cần phải tìm.

+) Trường hợp $c_n = C \cdot \alpha^n, \forall n$ với $\alpha \neq 1$, (tức là dãy số $\{c_n\}$ với c_n dạng hàm mũ cơ số α có ẩn là n):

- Nếu số α không là nghiệm phương trình đặc trưng thì $p_n = A \cdot \alpha^n$, với mọi n; trong đó A là hằng số cần phải tìm.

- Nếu số α là một nghiệm trong hai nghiệm phân biệt của phương trình đặc trưng thì $p_n = A \cdot n \cdot \alpha^n$, với mọi n; trong đó A là hằng số cần phải tìm.

- Nếu số α là nghiệm kép của phương trình đặc trưng thì $p_n = A \cdot n^2 \cdot \alpha^n$, với mọi n; trong đó A là hằng số cần phải tìm.

Một vài minh họa tìm nghiệm tổng quát của hệ truy hồi tuyến tính cấp 2.

Dự đoán nghiệm riêng của hệ truy hồi trong một vài trường hợp

Dạng 1: $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n + c$ **có 1 không phải là nghiệm của phương trình đặc trưng của hệ truy hồi thuần nhất tương ứng.**

Ta tìm nghiệm riêng $\{p_n\}$ thỏa mãn $p_n = A$ với mọi n và A là hằng số cần tìm.

Cụ thể, ta thay $p_n = A, p_{n+1} = A, p_{n+2} = A$ vào hệ truy hồi đã cho để tìm A; ở đây p_n thay cho u_n, p_{n+1} thay cho u_{n+1} và p_{n+2} thay cho u_{n+2}.

VD 5. Tìm nghiệm tổng quát của hệ truy hồi tuyến tính cấp hai sau

$$u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n + 4, \forall n \geq 0.$$

Giải:

- Hệ truy hồi thuần nhất tương ứng có dạng

$$u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n, \forall n \geq 0.$$

Phương trình đặc trưng có dạng

$$\lambda^2 = 2\lambda + 3.$$

Phương trình có hai nghiệm là $\lambda_1 = -1$ và $\lambda_2 = 3.$

Nghiệm tổng quát của hệ truy hồi thuần nhất có dạng $q_n = C_1(-1)^n + C_2 3^n$ với mọi

$\boldsymbol{n,}$ và $\boldsymbol{C_1, C_2}$ là các hằng số bất kỳ.

- Ta thấy $\boldsymbol{c_n = 4}$ và số $\mathbf{1}$ không phải nghiệm của phương trình đặc trưng nên tìm nghiệm riêng $\boldsymbol{\{p_n\}}$ thỏa mãn $\boldsymbol{p_n = A}$ với mọi $\boldsymbol{n}$.

Thay $\boldsymbol{p_n = A, p_{n+1} = A, p_{n+2} = A}$ vào hệ truy hồi ban đầu, ta được

$$\boldsymbol{A = 2A + 3A + 4 \Rightarrow A = -1.}$$

Vậy $\boldsymbol{\{p_n\}}$ với $\boldsymbol{p_n = -1}$ là một nghiệm riêng của hệ truy hồi ban đầu.

- Nghiệm tổng quát của hệ quy hồi trong bài toán có dạng $\boldsymbol{u_n = q_n + p_n = C_1(-1)^n + C_2 3^n + (-1),}$ với mọi $\boldsymbol{n}$ và $\boldsymbol{C_1, C_2}$ là các hằng số bất kỳ.

Dự đoán nghiệm riêng của hệ truy hồi trong một vài trường hợp

Dạng 2: $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n + cn + d$ **có 1 không phải là nghiệm của phương trình đặc trưng của hệ truy hồi thuần nhất tương ứng.**

Ta tìm nghiệm riêng $\{p_n\}$ thỏa mãn $p_n = An + B$ với mọi n và A, B là các hằng số cần tìm.

Cụ thể, ta thay $p_n = An+B, p_{n+1} = A(n+1)+B, p_{n+2} = A(n+2)+B$ vào hệ truy hồi đã cho để tìm A, B; ở đây p_n thay cho u_n, p_{n+1} thay cho u_{n+1} và p_{n+2} thay cho u_{n+2}.

VD 6. Tìm một nghiệm của hệ truy hồi tuyến tính cấp hai sau

$$u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n + 4n, \forall n \geq 0,$$

biết rằng $u_0 = 1, u_1 = 2.$

Giải:

- Ta tìm nghiệm tổng quát của hệ truy hồi trong bài toán:

+ Hệ truy hồi thuần nhất tương ứng có dạng

$$u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n, \forall n \geq 0.$$

Phương trình đặc trưng $\lambda^2 = 2\lambda + 3$ có hai nghiệm là $\lambda_1 = -1$ và $\lambda_2 = 3.$

Nghiệm tổng quát của hệ truy hồi thuần nhất có dạng $q_n = C_1(-1)^n + C_2 3^n$ với mọi $n,$ và C_1, C_2 là các hằng số bất kỳ.

+ Ta thấy $\boldsymbol{c_n = 4n}$ và số $\mathbf{1}$ không là nghiệm của phương trình đăc trưng nên tìm nghiệm riêng $\boldsymbol{\{p_n\}}$ thỏa mãn $\boldsymbol{p_n = An + B}$ với mọi $\boldsymbol{n}$.

Thay $\boldsymbol{p_n = An + B, p_{n+1} = A(n+1) + B, p_{n+2} = A(n+2) + B}$ vào hệ truy hồi ban đầu, ta được

$$\boldsymbol{A(n+2) + B = 2(A(n+1) + B) + 3(An + B) + 4n, \forall n \geq 0.}$$

Suy ra $\boldsymbol{(4A+4)n + 4B = 0,}$ với mọi $\boldsymbol{n \geq 0.}$

Cho $\boldsymbol{n = 0}$, ta nhận được $\boldsymbol{B = 0}$. Cho $\boldsymbol{n = 1,}$ ta nhận được $\boldsymbol{A = -1.}$

Vậy $\boldsymbol{\{p_n\}}$ với $\boldsymbol{p_n = -n}$ là một nghiệm riêng của hệ truy hồi ban đầu.

+ Nghiệm tổng quát của hệ quy hồi trong bài toán có dạng $\boldsymbol{u_n = q_n + p_n = C_1(-1)^n + C_2 3^n - n,}$ với mọi $\boldsymbol{n,}$ trong đó $\boldsymbol{C_1, C_2}$ là các hằng số bất kỳ.

- Tìm nghiệm theo yêu cầu bài toán, tức là biết $\boldsymbol{u_0 = 1}$ và $\boldsymbol{u_1 = 2.}$

Ta có nghiệm tổng quát có dạng $\boldsymbol{u_n = C_1(-1)^n + C_2 3^n - n}$, với mọi $\boldsymbol{n}$.

Tìm $\boldsymbol{C_1, C_2}$ sao cho $\boldsymbol{u_0 = 1, u_1 = 3}$.

Ta có $\boldsymbol{u_0 = C_1 + C_2}$. Suy ra $\boldsymbol{C_1 + C_2 = 1}$.

$\boldsymbol{u_1 = -C_1 + 3C_2 - 1}$. Suy ra $\boldsymbol{-C_1 + 3C_2 = 3}$.

Ta thu được hệ $\begin{cases} \boldsymbol{C_1 + C_2 = 1} \\ \boldsymbol{-C_1 + 3C_2 = 3} \end{cases}$

Hệ có nghiệm $\boldsymbol{C_1 = 0, C_2 = 1}$.

Do đó, $\boldsymbol{u_n = 0(-1)^n + 1 \cdot 3^n - n = 3^n - n}$ với mọi $\boldsymbol{n}$.

Nghiệm yêu cầu là $\boldsymbol{\{u_n\} = \{3^n - n\}}$.

Dự đoán nghiệm riêng của hệ truy hồi trong một vài trường hợp

Dạng 3: $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n + c \cdot \alpha^n$ **có** α **không phải là nghiệm của phương trình đặc trưng của hệ truy hồi thuần nhất tương ứng.**

Ta tìm nghiệm riêng $\{p_n\}$ **thỏa mãn** $p_n = A\alpha^n$ **với mọi** n **và** A **là hằng số cần tìm.**

Cụ thể, ta thay $p_n = A\alpha^n, p_{n+1} = A\alpha^{n+1}, p_{n+2} = A\alpha^{n+2}$ **vào hệ truy hồi đã cho để tìm** A**; ở đây** p_n **thay cho** u_n**,** p_{n+1} **thay cho** u_{n+1} **và** p_{n+2} **thay cho** u_{n+2}**.**

VD 7. Tìm nghiệm tổng quát của hệ truy hồi tuyến tính cấp hai sau

$$u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n + 2^n, \forall n \geq 0.$$

Giải:

- Hệ truy hồi thuần nhất tương ứng có dạng

$$u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n, \forall n \geq 0.$$

Phương trình đặc trưng $\lambda^2 = 2\lambda + 3$ có hai nghiệm là $\lambda_1 = -1$ và $\lambda_2 = 3.$

Nghiệm tổng quát của hệ truy hồi thuần nhất có dạng $q_n = C_1(-1)^n + C_2 3^n$ với mọi $n,$ và C_1, C_2 là các hằng số bất kỳ.

- Ta thấy $c_n = 2^n$ và số $\alpha = 2$ không phải là nghiệm của phương trình đặc trưng nên tìm nghiệm riêng $\{p_n\}$ thỏa mãn $p_n = A \cdot 2^n$ với mọi n.

Thay $p_n = A \cdot 2^n, p_{n+1} = A \cdot 2^{n+1}, p_{n+2} = A \cdot 2^{n+2}$ vào hệ truy hồi ban đầu, ta được

$$A \cdot 2^{n+2} = 2A \cdot 2^{n+1} + 3A \cdot 2^n + 2^n, \forall n \geq 0.$$

Suy ra $A = -\dfrac{1}{3}$.

Vậy $\{p_n\}$ với $p_n = \left(-\dfrac{1}{3}\right) \cdot 2^n$ là một nghiệm riêng của hệ truy hồi ban đầu.

- Nghiệm tổng quát của hệ quy hồi trong bài toán có dạng $u_n = q_n + p_n = C_1(-1)^n + C_2 3^n + \left(-\dfrac{1}{3}\right) \cdot 2^n$, với mọi n và C_1, C_2 là các hằng số bất kỳ.