Hướng dẫn bài tập đề cương giải tích

BT 1.

Bài 1. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x\to 0}\frac{tanx-x}{x-sinx}$;

b) $\lim_{x\to 1}\frac{1+cos\pi x}{x^2-2x+1}$;

c) $\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{5+x}-3}$;

d) $\lim_{x\to a}\frac{a^x-x^a}{x-a}$.

Hướng dẫn: Áp dụng Qui tắc Lô pi tan.

Sinh viên tự làm.

Ghi nhớ: *Tính* $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ *(thuộc dạng vô định* $\frac{0}{0}$ *hoặc* $\frac{\infty}{\infty}$*).*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} \overset{\text{(Lô pi tan) hoặc tắt là (L)}}{=} \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \ldots$$

- Ghi nhớ các quy tắc tính đạo hàm và đạo hàm các hàm số cơ bản.

- *Các dạng vô định khác thì phải đưa về* $\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$ *hoặc* $\frac{\infty}{\infty}$, *sau đó áp dụng qui tắc Lô pi tan.*

- *Trong bài 1 trên, công thức đạo hàm cần nhớ:*

$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$, *đặc biệt* $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

$(\sin u)' = u'.\cos u$, *đặc biệt* $(\sin x)' = \cos x$

$(\cos u)' = -u'.\sin u$, *đặc biệt* $(\cos x)' = -\sin x$

$(c)' = 0$ *(với* c *là hằng số),* $(x)' = 1$.

$(u^\alpha)' = \alpha.u^{\alpha-1}$, *đặc biệt* $(x^\alpha)' = \alpha.x^{\alpha-1}$.

$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$, *đặc biệt* $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$(a^u)' = u'.a^u.\ln a$, *đặc biệt* $(a^x)' = a^x.\ln a$

$(u \pm v)' = u' \pm v'$, $(ku)' = k.u'$ *(với* k *là hằng số).*

• **Giải ý a):**

Ta có

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x - \sin x} \overset{(L)}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}{1 - \cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x \cdot (1 - \cos x)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{\cos^2 x \cdot (1 - \cos x)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1 + \cos x}{\cos^2 x} = \frac{1 + \cos 0}{\cos^2 0} = 2$$

BT 2.

Bài 2. Tính các tích phân suy rộng theo định nghĩa:

a) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{2x+3}}dx$;   b) $\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\,dx$;

c) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2x+1}}e^{\sqrt{2x+1}}dx$;   d) $\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos 2x\,dx$.

Hướng dẫn:

Ý a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{2x+3}} = \lim_{A\to+\infty}\int_0^{A} \frac{dx}{\sqrt[3]{2x+3}}$.

Ta có $\boldsymbol{I(A)} = \displaystyle\int_a^A \frac{dx}{\sqrt[3]{2x+3}}$. Đổi biến $\boldsymbol{t} = \sqrt[3]{2x+3} \to \boldsymbol{x} = \dfrac{t^3-3}{2}$. Suy ra $\boldsymbol{dx} = \dfrac{3t^2}{2}\boldsymbol{dt}$. Đổi cận: $\boldsymbol{x} = 0 \to \boldsymbol{t} = \sqrt[3]{3}$; $\boldsymbol{x} = A \to \boldsymbol{t} = \sqrt[3]{2A+3}$.

Do đó, $\boldsymbol{I(A) = \int\limits_{\sqrt[3]{3}}^{\sqrt[3]{2A+3}} \frac{1}{t}.\frac{3t^2\ dt}{2} = \frac{3}{2}\int\limits_{\sqrt[3]{3}}^{\sqrt[3]{2A+3}} t\ dt = \frac{3}{2}\left(\frac{t^2}{2}\Big|_{\sqrt[3]{3}}^{\sqrt[3]{2A+3}}\right)}$

$$\boldsymbol{= \frac{3}{4}\left(\sqrt[3]{2A+3}\right)^2 - \frac{3}{4}\left(\sqrt[3]{3}\right)^2.}$$

Vậy, $\boldsymbol{\lim\limits_{A\to+\infty} I(A) = \lim\limits_{A\to+\infty}\left[\frac{3}{4}\left(\sqrt[3]{2A+3}\right)^2 - \frac{3}{4}\left(\sqrt[3]{3}\right)^2\right] = +\infty}$

hay $\boldsymbol{\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{2x+3}} = +\infty}$. Tích phân suy rộng phân kỳ.

$\boxed{\textbf{Ý b)}}$ $\boldsymbol{I = \int\limits_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty}\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\ dx = \lim\limits_{A\to+\infty}\int\limits_{\frac{2}{\pi}}^{A}\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\ dx.}$

Tích phân $\boldsymbol{I(A) = \int\limits_{\frac{2}{\pi}}^{A}\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}dx}$ được tính bằng cách đổi biến $\boldsymbol{t = \frac{1}{x}}$, suy ra

$$\boldsymbol{dt = -\frac{1}{x^2}\ dx}$$

Đáp số: $\boldsymbol{I(A) = \cos\frac{1}{A}}$ và $\boldsymbol{I = \cos 0 = 1}$ vì $\boldsymbol{\lim\limits_{A\to+\infty}\frac{1}{A} = 0.}$

$\boxed{\text{Ý c)}}$ $\boldsymbol{I = \int\limits_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2x+1}}e^{\sqrt{2x+1}}\,dx = \lim\limits_{A\to+\infty}\int\limits_0^{A}\frac{1}{\sqrt{2x+1}}e^{\sqrt{2x+1}}\,dx.}$

Tích phân $\boldsymbol{I(A) = \int\limits_0^{A}\frac{1}{\sqrt{2x+1}}e^{\sqrt{2x+1}}\,dx}$ được tính bằng cách đổi biến $\boldsymbol{t = \sqrt{2x+1}}$, suy ra $\boldsymbol{x = \frac{t^2-1}{2}}$ và $\boldsymbol{dx = tdt.}$

Đáp số: $\boldsymbol{I(A) = e^{\sqrt{2A+1}} - e}$ và $\boldsymbol{I = +\infty}$ vì $\boldsymbol{\lim\limits_{A\to+\infty} e^{\sqrt{2A+1}} = +\infty.}$ Tích phân suy rộng phân kỳ.

$\boxed{\text{Ý d)}}$ $\boldsymbol{I = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x}\cos 2x\,dx = \lim\limits_{A\to+\infty}\int\limits_0^{A} e^{-x}\cos 2x\,dx.}$

Tính tích phân $\boldsymbol{I(A) = \int\limits_0^{A} e^{-x}\cos 2x\,dx.}$

Đặt $\begin{cases} \boldsymbol{u = e^{-x} \to du = -e^{-x}\ dx} \\ \boldsymbol{v = \int \cos 2x\ dx = \dfrac{\sin 2x}{2}} \end{cases}$

Áp dụng công thức tích phân từng phần, ta có

$$\boldsymbol{I(A) = e^{-x}\frac{\sin 2x}{2}\bigg|_0^A - \int\limits_0^A \frac{\sin 2x}{2}.(-e^{-x}\ dx)}$$

$$\boldsymbol{= e^{-A}\frac{\sin 2A}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_0^A e^{-x}\sin 2x\ dx.}$$

Đặt $\begin{cases} \boldsymbol{u = e^{-x} \to du = -e^{-x}\ dx} \\ \boldsymbol{v = \int \sin 2x\ dx = -\dfrac{\cos 2x}{2}} \end{cases}$

Áp dụng công thức tích phân từng phần, ta có

$$\int_0^A e^{-x}\sin 2x\ dx = e^{-x}.\frac{-\cos 2x}{2}\Big|_0^A - \int_0^A \frac{-\cos 2x}{2}.(-e^{-x}\ dx)$$

$$= e^{-A}.\frac{-\cos 2A}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\int_0^A e^{-x}\cos 2x\ dx.$$

$$= e^{-A}.\frac{-\cos 2A}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}I(A).$$

Suy ra

$$I(A) = e^{-A}\frac{\sin 2A}{2} + \frac{1}{2}\left(e^{-A}.\frac{-\cos 2A}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}I(A)\right)$$

Kéo theo

$$\frac{5}{4}I(A) = e^{-A}\frac{\sin 2A}{2} + \frac{1}{2}\left(e^{-A}.\frac{-\cos 2A}{2} + \frac{1}{2}\right)$$

Do đó

$$I(A) = \frac{2\sin 2A}{5e^A} + \frac{-\cos 2A}{5e^A} + \frac{1}{5}$$

Ta có $\left|\dfrac{2\sin 2A}{5e^A}\right| \le \dfrac{2}{5e^A}$ và $\left|\dfrac{-\cos 2A}{5e^A}\right| \le \dfrac{1}{5e^A}$. Vì $\lim\limits_{A\to+\infty}\dfrac{1}{e^A} = 0$ nên $\lim\limits_{A\to+\infty}\dfrac{2\sin 2A}{5e^A} = \lim\limits_{A\to+\infty}\dfrac{-\cos 2A}{5e^A} = 0$

Vậy $I = \lim\limits_{A\to+\infty} I(A) = \dfrac{1}{5}$.

BT 3.

Bài 4. Tìm nghiệm tổng quát của các hệ thức truy hồi sau:

a) $u_{n+2} - 5u_{n+1} + 6u_n = 4^n$; b) $u_{n+2} - 4u_{n+1} + 4u_n = 2.3^n$;

c) $Y_{n+2} - 7Y_{n+1} + 10Y_n = 6$; d) $Y_{n+2} - 7Y_{n+1} + 10Y_n = 4n$.

Hướng dẫn: *Đây là các hệ thức truy hồi tuyến tính cấp hai với hệ số hằng tổng quát:*

$$\boldsymbol{a u_{n+2} + b u_{n+1} + c u_n = c_n, \forall n \geq 0}$$

hoặc

$$\boldsymbol{u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n + c_n, \forall n \geq .}$$

Quy trình giải:

- *Xác định hệ thức truy hồi thuần nhất và tìm nghiệm tổng quát của nó.*

- Xác định hệ thức truy hồi (từ hệ thức đã cho, bỏ đi $\boldsymbol{c_n}$)

- Xác định phương trình đặc trưng và giải phương trình

- Đưa ra kết luận nghiệm tổng quát của hệ thức truy hồi thuần nhất, ký hiệu là $\boldsymbol{\{q_n\}}$ (nếu không sợ nhầm thì ký hiệu là $\boldsymbol{\{u_n\}}$ cũng được).

- *Xác định nghiệm riêng, ký hiệu là $\boldsymbol{\{u_n\}}$.*

- Từ hệ thức truy hồi (dựa vào $\boldsymbol{c_n}$, phương trình đặc trưng), đoán dạng biểu thức của số hạng $\boldsymbol{u_n}$.

Ví dụ:

$\boxed{\text{Trường hợp 1: } c_n = m \text{ (hằng số)}}$ và số 1 không là nghiệm của phương trình đặc trưng. Ta đoán $u_n = A$, cần tìm A.

$\boxed{\text{Trường hợp 2: } c_n = m.n + p \text{ (biểu thức bậc nhất của biến } n)}$ và số 1 không

là nghiệm của phương trình đặc trưng. Ta đoán $u_n = A.n + B$, cần tìm A, B.

$\boxed{\textbf{Trường hợp 3: } c_n = m.\alpha^n \textbf{ (bội của } \alpha^n\textbf{)}}$ **và số α không là nghiệm của phương trình đặc trưng. Ta đoán $u_n = A.\alpha^n$, cần tìm A.**

- *Thay u_n, u_{n+1}, u_{n+1} vào hệ thức truy hồi để tìm ra các hằng số chưa biết.*

- *Đưa kết luận về nghiệm riêng.*

● *Kết luận nghiệm tổng quát của hệ thức truy hồi theo yêu câu:*

Nghiệm tổng quát $\{u_n\}$ có

$u_n =$ *số hạng thứ n của nghiệm tổng quát của hệ thức truy hồi thuần nhất* $+$ *số hạng thứ n của nghiệm riêng*

Giải ý a)

+) Hệ thức truy hồi thuần nhất: $\boldsymbol{u_{n+2} - 5u_{n+1} + 6u_n = 0.}$

Phương trình đặc trưng: $\boldsymbol{\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 2; \lambda_2 = 3.}$

Nghiệm tổng quát của hệ thức truy hồi thuần nhất: $\boldsymbol{u_n = C_1.2^n + C_2.3^n, \forall n \geq 0}$,

trong đó, $\boldsymbol{C_1, C_2}$ là các hằng số thực bất kỳ.

+) Nghiệm riêng.

Do $\boldsymbol{c_n = 4^n}$ và số $\mathbf{4}$ không phải nghiệm của phương trình đặc trưng nên ta tìm nghiệm riêng $\boldsymbol{\{u_n\}}$ với $\boldsymbol{u_n = A.4^n.}$

Thay $\boldsymbol{u_n = A.4^n, u_{n+1} = A.4^{n+1}, u_{n+2} = A.4^{n+2}}$ vào hệ thức truy hồi, ta được

$$\boldsymbol{A.4^{n+2} - 5.A.4^{n+1} + 6.A.4^n = 4^n,}$$

với mọi $\boldsymbol{n \geq 0.}$ Suy ra $\boldsymbol{A.4^2 - 5.A.4 + 6A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2}.}$

Nghiệm riêng: $\boldsymbol{u_n = \frac{1}{2}.4^n, \forall n \geq 0.}$

+) Nghiệm tổng quát của hệ thức truy hồi đã cho:

$$\boldsymbol{u_n = C_1.2^n + C_2.3^n + \frac{1}{2}.4^n, \forall n \geq 0,}$$

trong đó, $\boldsymbol{C_1, C_2}$ là các hằng số thực bất kỳ.

Giải ý b)

+) Hệ thức truy hồi thuần nhất: $\boldsymbol{u_{n+2} - 4u_{n+1} + 4u_n = 0.}$

Phương trình đặc trưng: $\boldsymbol{\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0......}$

Nghiệm tổng quát của hệ thức truy hồi thuần nhất: $\boldsymbol{u_n = C_1.2^n + C_2.n.2^n, \forall n \geq 0,}$

trong đó, $\boldsymbol{C_1, C_2}$ là các hằng số thực bất kỳ.

+) Nghiệm riêng $\boldsymbol{\{u_n\}}$ có $\boldsymbol{u_n = A.3^n}$ (giải thích: dạng biểu thức $\boldsymbol{u_n = A.3^n}$ là do $\boldsymbol{c_n = 2.3^n}$ (biểu thức bội của $\boldsymbol{3^n}$) và số $\boldsymbol{3}$ không phải nghiệm của phương trình đặc trưng)

Ta tìm được $\boldsymbol{A = 2.}$

+) Nghiệm tổng quát: $\boldsymbol{u_n = C_1.2^n + C_2.n.2^n + 2.3^n, \forall n \geq 0}$

$\boxed{\textbf{Giải ý c)}}$

+) Hệ thức truy hồi thuần nhất: $\boldsymbol{y_{n+2} - 7y_{n+1} + 10y_n = 0.}$

Phương trình đặc trưng: $\boldsymbol{\lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0......}$

Nghiệm tổng quát của hệ thức truy hồi thuần nhất: $\boldsymbol{y_n = C_1.2^n + C_2.5^n, \forall n \geq 0,}$

trong đó, $\boldsymbol{C_1, C_2}$ là các hằng số thực bất kỳ.

+) Nghiệm riêng $\boldsymbol{\{y_n\}}$ có $\boldsymbol{y_n = A}$ (giải thích: dạng biểu thức $\boldsymbol{y_n = A}$ là do $\boldsymbol{c_n = 6}$

(hằng số) và số **1** không phải nghiệm của phương trình đặc trưng)

Ta tìm được $\boldsymbol{A = \frac{3}{2}.}$

+) Nghiệm tổng quát: $\boldsymbol{y_n = C_1.2^n + C_2.5^n + \frac{3}{2}, \forall n \geq 0}$

$\boxed{\textbf{Giải ý d)}}$

+) Hệ thức truy hồi thuần nhất: $\boldsymbol{y_{n+2} - 7y_{n+1} + 10y_n = 0.}$

Phương trình đặc trưng: $\boldsymbol{\lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0......}$

Nghiệm tổng quát của hệ thức truy hồi thuần nhất: $\boldsymbol{y_n = C_1.2^n + C_2.5^n, \forall n \geq 0,}$

trong đó, $\boldsymbol{C_1, C_2}$ là các hằng số thực bất kỳ.

+) Nghiệm riêng $\boldsymbol{\{y_n\}}$ có $\boldsymbol{y_n = A.n + B}$ (giải thích: dạng biểu thức $\boldsymbol{y_n = A.n + B}$ là do $\boldsymbol{c_n = 4n}$ (biểu thức bậc nhất của biến $\boldsymbol{n}$) và số $\boldsymbol{1}$ không phải nghiệm của phương trình đặc trưng)

Thay $\boldsymbol{y_n = A.n + B, y_{n+1} = A.(n+1) + B, y_{n+2} = A.(n+2) + B}$ vào hệ thức truy hồi, ta nhận được

$$\boldsymbol{[A.(n+2)+B]-7.[A.(n+1)+B]+10.[A.n+B]=4n, \forall n \geq 0.}$$

Suy ra $\boldsymbol{4A.n-5A+4B=4n, \forall n \geq 0.}$ Từ đẳng thức này, lần lượt cho $\boldsymbol{n=0}$ và $\boldsymbol{n=1}$, ta được $\begin{cases} \boldsymbol{-5A+4B=0} \\ \boldsymbol{-A+4B=4} \end{cases}$

Giải hệ, ta tìm được $\boldsymbol{A=1; B=\dfrac{5}{4}.}$

+) Nghiệm tổng quát: $\boldsymbol{y_n = C_1.2^n + C_2.5^n + n + \dfrac{5}{4}, \forall n \geq 0}$

BT 4.

Bài 5.1) Tính thể tích của vật thể tròn xoay tạo bởi:

a) Elip: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ khi elip quay quanh trục Ox.

b) Miền phẳng giới hạn bởi các đường $y = arcsinx, x = 1, y = 0$ quay quanh trục Oy.

2) Tìm độ dài đường cong của hàm:

a) $y = \sqrt{\left(\frac{2}{3}x - 1\right)^3}$, trên $[2,5]$; b) $y = x^{3/2} + 2$, trên đoạn $[1,3]$.

3) Tìm diện tích mặt cong vật thể tròn xoay khi quay đồ thị hàm số sau quanh Ox.

$y = \sqrt{2x + 1}$, trên đoạn $[1; 2]$.

Hướng dẫn: **Gợi ý mục 5.1 (thể tích vật thể tròn xoay)**

Để thuận tiện cho ghi nhớ, miền phẳng $\boldsymbol{D}$ giới hạn bởi đồ thị hàm số $\boldsymbol{y = f(x)}$, các đường thẳng $\boldsymbol{x = a, x = b}$ và trục hoành $\boldsymbol{y = 0}$, được viết tắt thành

$$D: \begin{cases} y = f(x) \\ a \le x \le b \\ y = 0 \end{cases}$$

Miền phẳng D giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = f(x), y = g(x),$ các đường thẳng $x = a, x = b$ (với $0 \le f(x) \le g(x)$), được viết tắt thành

$$D: \begin{cases} 0 \le f(x) \le y \le g(x) \\ a \le x \le b \end{cases}$$

Ghi nhớ công thức:

• Trường hợp thể tích của vật thể tròn xoay khi quay miền D quanh trục Ox, ký hiệu bởi V_{D-Ox}

+) Khi $\boldsymbol{D}$: $\begin{cases} y = f(x) \\ a \le x \le b \\ y = 0 \ \ (\text{trục hoành } Ox) \end{cases}$ $\rightarrow V_{D-Ox} = \pi \displaystyle\int_a^b [f(x)]^2 \, dx.$

+) Khi $\boldsymbol{D}$: $\begin{cases} 0 \le f(x) \le y \le g(x) \\ a \le x \le b \end{cases}$

$$\rightarrow V_{D-Ox} = \pi \int_a^b [g(x)]^2 \, dx - \pi \int_a^b [f(x)]^2 \, dx.$$

Chú ý quan trọng: **Nếu miền phẳng D nhận trục hoành Ox làm trục đối xứng thì vật thể tròn xoay tạo bởi khi D quay quanh Ox là được xem xét tạo bởi khi cho phần miền D nằm trên trục hoành quay quanh trục Ox.**

• **Trường hợp thể tích của vật thể tròn xoay khi quay miền D quanh trục Oy, ký hiệu bởi V_{D-Oy}**

+) Khi $D : \begin{cases} x = f(y) \\ c \le y \le d \\ x = 0 \ \text{(trục tung } Oy) \end{cases} \to V_{D-Oy} = \pi \int\limits_c^d [f(y)]^2 \, dy.$

+) Khi $D : \begin{cases} 0 \le f(y) \le x \le g(y) \\ c \le y \le d \end{cases}$

$$\to V_{D-Oy} = \pi \int\limits_c^d [g(y)]^2 \, dy - \pi \int\limits_c^d [f(y)]^2 \, dy.$$

Chú ý quan trọng: **Nếu miền phẳng D nhận trục tung Oy làm trục đối xứng thì vật thể tròn xoay tạo bởi khi D quay quanh Oy là được xem xét**

tạo bởi khi cho phần miền D nằm bên phải trục tung quay quanh trục Oy.

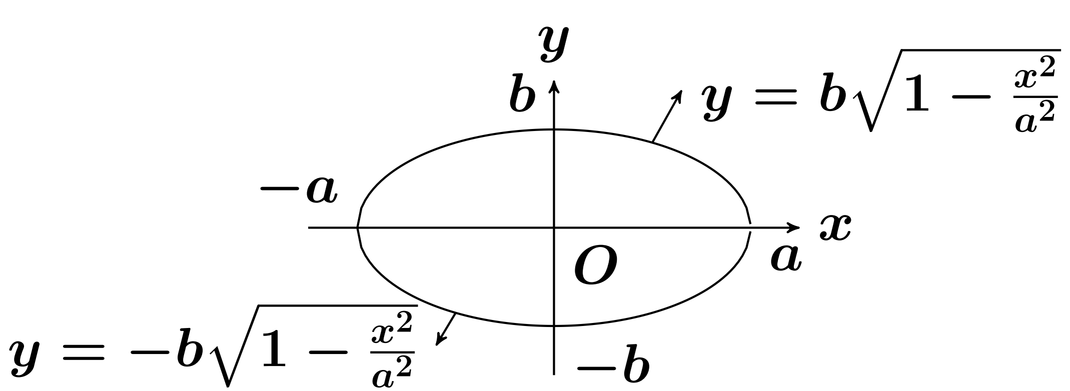
Ghi nhớ: +) $y = \sin x \to x = \arcsin y$. +) $y = \arcsin x \to x = \sin y$.

+) $y = \tan x \to x = \arctan y$. +) $y = \arctan x \to x = \tan y$.

+) $y = a^x \to x = \log_a y$. +) $y = \log_a x \to x = a^y$.

Giải 5.1.a)

Miền phẳng $D : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leq 1$ (với $a, b > 0$). Tính V_{D-Ox}.



Từ $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leq 1 \Rightarrow -b\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2}} \leq y \leq b\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2}}$ (với $-a \leq x \leq a$).

Vì D nhận trục Ox làm trục đối xứng nên vật thể tròn xoay tạo bởi khi quay miền

$$D_1 : \begin{cases} y = b\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2}} \\ -a \leq x \leq a \\ y = 0 \end{cases}$$ quanh trục Ox.

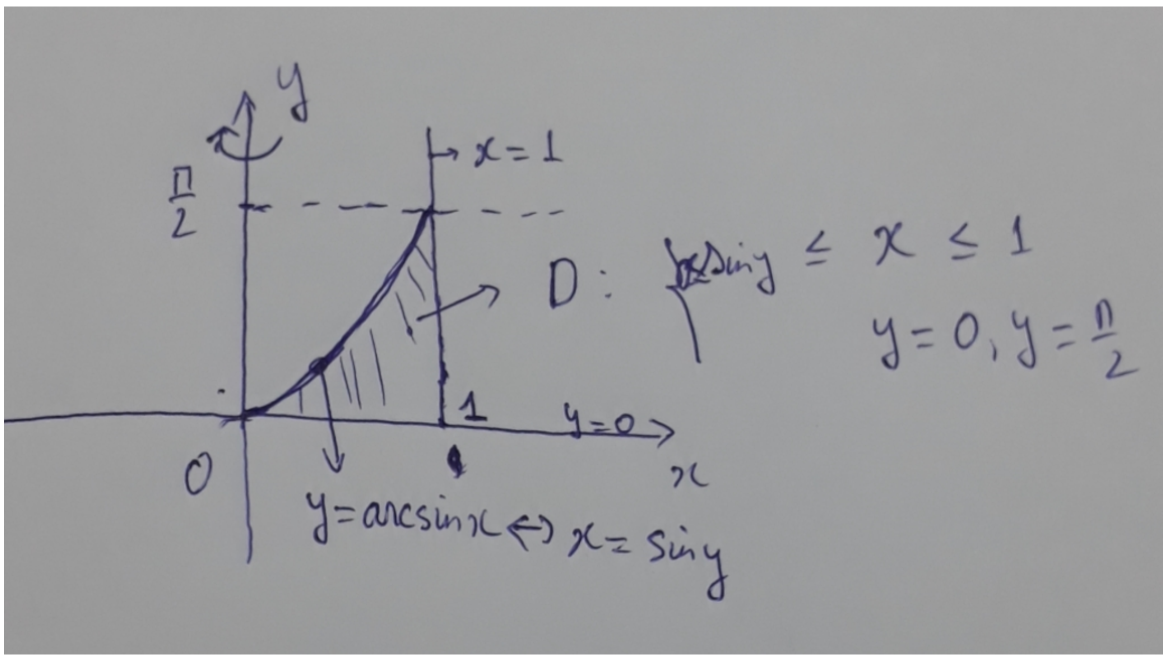
Vậy

$$V_{D-Ox} = \pi \int_{-a}^{a} \left(b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \right)^2 dx = \pi \int_{-a}^{a} b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) dx = \frac{4\pi . b^2 a}{3}$$

Chú ý: Làm tương tự khi cho D quay quanh trục Oy.

Giải 5.1.b)

Miền phẳng D : $\begin{cases} y = \arcsin x \\ x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$. Tính V_{D-Oy}.



Ta có $y = \arcsin x \rightarrow x = \sin y$. Khi $x = 1 \rightarrow y = \arcsin 1 = \dfrac{\pi}{2}$. Khi đó, miền

$\boldsymbol{D}$ có dạng $\begin{cases} 0 \le \sin y \le x \le 1 \\ 0 \le y \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

Vậy

$$V_{D-Oy} = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1^2\,dy - \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin y)^2\,dy = \frac{\pi^2}{2} - \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2y}{2}\,dy$$

$$= \frac{\pi^2}{2} - \pi \left[\left(\frac{y}{2} - \frac{\sin 2y}{4} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right] = \frac{\pi^2}{4}$$

Gợi ý mục 5.2 (độ dài cung cong)

Chú ý: Đôi khi, cần quan tâm đến tính đối xứng của cung. Để thuận tiện cho ghi nhớ, cung $\boldsymbol{L}$ là đồ thi hàm số $\boldsymbol{y = f(x)}$ trên $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ được viết tắt thành $\boldsymbol{L} : \begin{cases} \boldsymbol{y = f(x)} \\ \boldsymbol{a \leq x \leq b} \end{cases}$

Ghi nhớ công thức:

+) Khi cung $\boldsymbol{L} : \begin{cases} \boldsymbol{y = f(x)} \\ \boldsymbol{a \leq x \leq b} \end{cases} \quad \rightarrow \boldsymbol{s_L = \int\limits_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx}.$

+) Khi cung $\boldsymbol{L} : \begin{cases} \boldsymbol{x = f(y)} \\ \boldsymbol{c \leq y \leq d} \end{cases} \quad \rightarrow \boldsymbol{s_L = \int\limits_c^d \sqrt{1 + (f'(y))^2}\, dy}.$

Giải 5.2.a)

Cung $\boldsymbol{L}$: $\begin{cases} \boldsymbol{y = \sqrt{\left(\frac{2}{3}x - 1\right)^3}} \\ \boldsymbol{2 \le x \le 5} \end{cases}$

Ta có $\boldsymbol{y' = \dfrac{3.\frac{2}{3}.\left(\frac{2}{3}x - 1\right)^2}{2\sqrt{\left(\frac{2}{3}x - 1\right)^3}} = \sqrt{\frac{2}{3}x - 1} \to y'^2 = \frac{2}{3}x - 1}$

Độ dài bằng

$$\boldsymbol{s = \int\limits_2^5 \sqrt{1 + y'^2}\, dx = \int\limits_2^5 \sqrt{\frac{2}{3}}.\sqrt{x}\, dx = \sqrt{\frac{2}{3}}.\left(\frac{2}{3}(\sqrt{x})^3\Big|_2^5\right) = ...}$$

Giải 5.2.b)

Cung $\boldsymbol{L}$: $\begin{cases} \boldsymbol{y = x^{\frac{3}{2}} + 2} \\ \boldsymbol{1 \le x \le 3} \end{cases}$

Ta có $\boldsymbol{y' = \dfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} \to y'^2 = \frac{9}{4}x}$

Độ dài bằng

$$s = \int_1^3 \sqrt{1 + y'^2}\, dx = \int_1^3 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\, dx = \left(\frac{8}{27} \left[\sqrt{1 + \frac{9}{4}x} \ \right]^3 \right) \Big|_1^3 = \ldots$$

Ghi nhớ: $\int \sqrt{ax + b}\, dx = \frac{2}{3a} \left(\sqrt{ax + b} \right)^3$ (với $a \neq 0$)

Gợi ý mục 5.3 (diện tích mặt tròn xoay)

Ghi nhớ công thức:

- **Trường hợp diện tích của mặt tròn xoay khi quay cung L quanh trục Ox, ký hiệu bởi S_{L-Ox}**

Khi cung L : $\begin{cases} y = f(x) \\ a \le x \le b \end{cases} \rightarrow S_{L-Ox} = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$

Đặc biệt nếu $f(x) \ge 0$ thì $S_{L-Ox} = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$

Chú ý quan trọng: **Nếu cung L nhận trục hoành Ox làm trục đối xứng thì mặt tròn xoay tạo bởi khi L quay quanh Ox là được xem xét tạo bởi khi cho phần cung L nằm trên trục hoành quay quanh trục Ox.**

• Trường hợp diện tích của mặt tròn xoay khi quay cung L quanh trục Oy, ký hiệu bởi S_{L-Oy}

Khi cung $\boldsymbol{L}$: $\begin{cases} x = f(y) \\ c \le y \le d \end{cases} \rightarrow S_{L-Oy} = 2\pi \int\limits_c^d |f(y)|\sqrt{1 + (f'(y))^2}\, dy.$

Đặc biệt nếu $f(y) \ge 0$ thì $S_{L-Oy} = 2\pi \int\limits_c^d f(y)\sqrt{1 + (f'(y))^2}\, dy.$

Chú ý quan trọng: **Nếu cung L nhận trục tung Oy làm trục đối xứng thì mặt tròn xoay tạo bởi khi L quay quanh Oy là được xem xét tạo bởi khi cho phần cung L nằm bên phải trục tung quay quanh trục Oy.**

Giải 5.3.a)

Cung $\boldsymbol{L}$: $\begin{cases} \boldsymbol{y = \sqrt{2x+1}} \\ \boldsymbol{1 \le x \le 2} \end{cases}$. Cho cung $\boldsymbol{L}$ quay quanh $\boldsymbol{Ox}$.

Ta có $\boldsymbol{y' = \dfrac{1}{\sqrt{2x+1}} \to y'^2 = \dfrac{1}{2x+1}}$. Dễ thấy $\boldsymbol{y = \sqrt{2x+1} \ge 0}$.

Diện tích của mặt tròn xoay là

$$\boldsymbol{S_{L-Ox} = 2\pi \int\limits_1^2 y\sqrt{1+y'^2}\, dx = 2\pi \int\limits_1^2 \sqrt{2x+1}.\sqrt{1+\frac{1}{2x+1}}\, dx}$$

$$\boldsymbol{= 2\pi \int\limits_1^2 \sqrt{2x+2}\, dx = 2\pi.\left(\left[\frac{1}{3}\left(\sqrt{2x+2}\quad\right)^3\right]\Big|_1^2\right) = ...}$$