BÀI GIẢNG TOÁN CAO CẤP

BÀI : PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP 2

I. CÁC KHÁI NIỆM

Định nghĩa

PTVP cấp hai là phương trình có dạng

$$F(x, y, y', y'') = 0 \quad \text{hay} \quad y'' = f(x, y, y') \qquad (*)$$

• Nghiệm tổng quát có dạng $y = \varphi(x, C_1, C_2)$ hoặc $\varphi(x, y, C_1, C_2) = 0$, trong đó C_1, C_2 là các hằng số.

Nghiệm riêng là nghiệm suy từ nghiệm tổng quát bằng cách cho C_1, C_2 bằng các số cụ thể.

Bài toán Cauchy

Là bài toán tìm nghiệm của phương trình **(*)** thỏa mãn điều kiện

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \end{cases} \quad \text{(gọi là \textbf{điều kiện ban đầu})}$$

trong đó x_0, y_0, y_1 cho trước.

II. PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

Định nghĩa

Là phương trình có dạng $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$, trong đó p, q, f là các hàm số liên tục trên khoảng $I \subset \mathbb{R}$.

★ Nếu $f(x) \equiv 0$ thì phương trình được gọi là **thuần nhất**.

★ Nếu $f(x) \not\equiv 0$ thì phương trình được gọi là **không thuần nhất**.

Định lí 1

Nếu $y = y_1(x)$ và $y = y_2(x)$ là hai nghiệm của PTVP tuyến tính thuần nhất thì $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ (trong đó C_1, C_2 là các hằng số) cũng là nghiệm của nó.

Định nghĩa

Hai hàm $y_1(x)$, $y_2(x)$ gọi là phụ thuộc tuyến tính nếu tỉ số $\dfrac{y_1(x)}{y_2(x)} = k$ là hằng số với mọi $x \in I$, gọi là độc lập tuyến tính trong trường hợp còn lại.

Ví dụ: Hai hàm số $-2x^3$ và $5x^3$ là phụ thuộc tuyến tính, hai hàm số $\sin x$ và $\cos x$ là độc lập tuyến tính.

Định lí 2

Nếu $y_1(x), y_2(x)$ là các nghiệm độc lập tuyến tính của phương trình thuần nhất thì

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),$$

với C_1, C_2 là các hằng số tùy ý, là nghiệm tổng quát của phương trình đó.

Ví dụ: Phương trình $y'' - 4y = 0$ có nghiệm tổng quát $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x}$, vì dễ dàng kiểm tra được e^{2x} và e^{-2x} là các nghiệm độc lập tuyến tính của phương trình.

Định lí 3 Xét phương trình tuyến tính (1) và phương trình thuần nhất tương ứng (2):

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \quad (1)$$

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (2)$$

Khi đó $NTQ(1) = NTQ(2) + NR(1)$.

$\boxed{\text{Định lí 4}}$ (Nguyên lí chồng nghiệm)

$$\textit{Nếu}\ \begin{cases} \boldsymbol{y_1} \textit{ là một NR của phương trình } \boldsymbol{y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x)} \\ \boldsymbol{y_2} \textit{ là một NR của phương trình } \boldsymbol{y'' + p(x)y' + q(x)y = f_2(x)} \end{cases}$$

thì $\boldsymbol{y = y_1 + y_2}$ *là một nghiệm riêng của phương trình*

$$\boldsymbol{y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x) + f_2(x).}$$

IV. PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH HỆ SỐ HẰNG

$\boxed{\text{Định nghĩa}}$

Là phương trình có dạng $y'' + py' + qy = f(x) \quad (1)$

trong đó $p, q \in \mathbb{R}$ cho trước.

$\boxed{\text{Phương trình thuần nhất tương ứng}}$

Là phương trình $y'' + py' + qy = 0 \quad (2)$

$\boxed{\textbf{Nhắc lại: } NTQ(1) = NTQ(2) + NR(1)}$

Giải phương trình $y'' + py' + qy = 0 \quad (2)$

Xét phương trình đặc trưng: $k^2 + pk + q = 0 \quad (3)$

Xảy ra 3 trường hợp sau:

i) $\Delta = p^2 - 4q > 0 \Rightarrow$ (3) có hai nghiệm phân biệt k_1, k_2.

Khi đó $y_1 = e^{k_1 x}$ và $y_2 = e^{k_2 x}$ là hai nghiệm riêng ĐLTT của (2).

Vậy NTQ của (2) là $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$.

ii) $\Delta = p^2 - 4q = 0 \Rightarrow$ (3) có nghiệm kép $k = k_0$.

Khi đó $y_1 = e^{k_0 x}$ và $y_2 = xe^{k_0 x}$ là hai nghiệm riêng ĐLTT của (2).

Vậy NTQ của (2) là $y = (C_1 + C_2 x)e^{k_0 x}$.

iii) $\Delta = p^2 - 4q < 0 \Rightarrow$ (3) có hai nghiệm phức $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$.

Khi đó $\begin{cases} y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x \\ y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x \end{cases}$ là hai nghiệm riêng ĐLTT của (2).

Vậy nghiệm tổng quát của (2) là

$$y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x).$$

VD 1. Giải các phương trình:

a) $\boxed{y'' + 3y' - 4y = 0}$ b) $\boxed{y'' + 4y' + 4y = 0}$ c) $\boxed{y'' + 6y' + 13y = 0}$

a) $\boxed{y'' + 3y' - 4y = 0}$ b) $\boxed{y'' + 4y' + 4y = 0}$ c) $\boxed{y'' + 6y' + 13y = 0}$

Giải. a) PTĐT: $k^2 + 3k - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = 1 \\ k = -4. \end{array}\right.$

Vậy NTQ của phương trình đã cho là $y = C_1e^x + C_2e^{-4x}$.

b) PTĐT: $k^2 + 4k + 4 = 0 \Leftrightarrow k = -2$ (kép).

Vậy NTQ của phương trình đã cho là $y = (C_1 + C_2x)e^{-2x}$.

c) PTĐT: $k^2 + 6k + 13 = 0 \Leftrightarrow k = -3 \pm 2i$.

Vậy NTQ của phương trình đã cho là $y = e^{-3x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x)$.

★ Sinh viên tự giải các phương trình sau:

1. $y'' - 6y' + 8y = 0.$

2. $y'' + 5y' - 6y = 0.$

3. $y'' - 6y' + 9y = 0.$

4. $y'' + 7y' = 0.$

5. $y'' - 25y = 0.$

6. $y'' - 10y' + 25y = 0.$

7. $y'' + 9y = 0.$

8. $2y'' - 5y' + 2y = 0.$

GIẢI PHƯƠNG TRÌNH KHÔNG THUẦN NHẤT

$$y'' + py' + qy = f(x) \qquad \mathbf{(1)}$$

$$y'' + py' + qy = 0 \qquad \mathbf{(2)}$$

$$\text{PTĐT}: \; k^2 + pk + q = 0 \qquad \mathbf{(3)}$$

$$\boxed{\textbf{Nhắc lại: } NTQ(1) = NTQ(2) + NR(1)}$$

★ Tìm một NR của (1)

NR **(1)** phụ thuộc vào hàm $f(x)$ ở Vế phải. Xảy ra hai trường hợp:

$\boxed{\textbf{TH1: } f(x) = e^{\alpha x} P_n(x)}$ trong đó $\alpha \in \mathbb{R}$, $P_n(x)$ là đa thức bậc n.

$\boxed{\textbf{TH2: } f(x) = e^{\alpha x}\left[P_n(x)\sin\beta x + Q_m(x)\cos\beta x\right]}$ trong đó $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$P_n(x)$ là đa thức bậc n, $Q_m(x)$ là đa thức bậc m.

$\boxed{\textbf{TH1: } f(x) = e^{\alpha x}P_n(x)}$ trong đó $\alpha \in \mathbb{R}$, $P_n(x)$ là đa thức bậc n.

Khi đó NR **(1)** là y_r có một trong ba dạng:

a) $y_r = e^{\alpha x}Q_n(x)$ nếu α không là nghiệm của PTĐT (3).

b) $y_r = e^{\alpha x}xQ_n(x)$ nếu α là nghiệm đơn của PTĐT (3).

c) $y_r = e^{\alpha x}x^2Q_n(x)$ nếu α là nghiệm kép của PTĐT (3).

VD 2. Giải phương trình

$$\boxed{y'' + y' - 2y = 1 - x}$$

$$\boxed{y'' + y' - 2y = 1 - x} \qquad (1)$$

Giải. Xét phương trình $y'' + y' - 2y = 0$ **(2)** có PTĐT $k^2 + k - 2 = 0$ **(3)**

Có **(3)** $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = 1 \\ k = -2 \end{array}\right.$ suy ra NTQ của (2) là $y = C_1e^x + C_2e^{-2x}$.

Do $f(x) = 1 - x = e^{0x}.P_1(x) \Rightarrow \alpha = 0$ không là nghiệm của **(3)** nên

$$y_r = e^{0x}Q_1(x) = Ax + B.$$

Ta có $y_r' = A, y_r'' = 0$, thay vào phương trình **(1)** ta có $A - 2(Ax + B) = -x + 1$.

Đồng nhất hệ số 2 vế ta được $A = \frac{1}{2}, B = -\frac{1}{4}$. Do đó nghiệm riêng là $y_r = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$. Vậy nghiệm tổng quát cần tìm là

$$y = C_1e^x + C_2e^{-2x} + \frac{x}{2} - \frac{1}{4}.$$

VD 3. Giải phương trình

$$\boxed{y'' - 4y' + 3y = e^x(x+2)} \qquad (1)$$

Giải. Xét pt $y'' - 4y' + 3y = 0$ **(2)** với PTĐT $k^2 - 4k + 3 = 0$ **(3)** có hai nghiệm $k = 1$, $k = 3$.

Suy ra NTQ của **(2)** là $y = C_1e^x + C_2e^{3x}$.

Có $f(x) = e^xP_1(x)$, tức là $\alpha = 1$ và $P_1(x) = x + 2$.

Do $\alpha = 1$ là một nghiệm đơn của PTĐT **(3)** nên ta tìm nghiệm riêng của **(1)** ở dạng

$$y_r = e^x x Q_1(x) = e^x(Ax^2 + Bx).$$

Ta có

$$y_r' = e^x[Ax^2 + (2A + B)x + B], \quad y_r'' = e^x[Ax^2 + (4A + B)x + 2A + 2B],$$

thay vào phương trình ban đầu ta có

$$e^x[-4Ax + 2A - 2B] = e^x(x + 2).$$

Đồng nhất hệ số 2 vế ta được $\begin{cases} -4A = 1 \\ 2A - 2B = 2 \end{cases} \Leftrightarrow A = -\frac{1}{4}, B = -\frac{5}{4}.$

Do đó nghiệm riêng của **(1)** là $y_r = -e^x x\frac{x + 5}{4}$ và nghiệm tổng quát cần tìm là

$$y = C_1e^x + C_2e^{3x} - \frac{x^2 + 5x}{4}e^x.$$

VD 4. Giải phương trình

$$\boxed{y'' - 2y' + y = xe^x} \qquad \mathbf{(1)}$$

Giải. Xét pt $y'' - 2y' + y = 0$ **(2)** với PTĐT $k^2 - 2k + 1 = 0$ **(3)** có nghiệm kép $k = 1$.

Suy ra NTQ của **(2)** là $y = (C_1 + C_2x)e^x$.

Ta có $f(x) = xe^x = e^xP_1(x)$, tức là $\alpha = 1$ và $P_1(x) = x$.

Do $\alpha = 1$ là nghiệm kép của PTĐT **(3)** nên

$$y_r = e^x x^2 Q_1(x) = e^x(Ax^3 + Bx^2).$$

Ta có $y'_r = e^x[Ax^3 + (3A + B)x^2 + 2Bx]$ và

$$y''_r = e^x[Ax^3 + (6A + B)x^2 + 2(3A + 2B)x + 2B].$$

Thay vào phương trình **(1)** ta có

$$e^x(6Ax + 2B) = e^x x.$$

Đồng nhất hệ số 2 vế ta được $A = \frac{1}{6}$, $B = 0$.

Do đó nghiệm riêng là $y_r = \frac{1}{6}e^x x^3$.

Vậy nghiệm tổng quát cần tìm là

$$y = (C_1 + C_2 x)e^x + \frac{1}{6}e^x x^3.$$

★ Sinh viên tự giải các phương trình sau:

1. $y'' - 6y' + 8y = xe^x$.

2. $y'' + y' = 3x - 7$.

3. $y'' - 6y' + 9y = e^{2x}$.

4. $y'' + 7y' = x^2 + x$.

5. $y'' - 25y = e^{5x}$.

6. $y'' - 10y' + 25y = (x + 1)e^{5x}$.

★ Kết quả:

1. $y = C_1e^{2x} + C_2e^{4x} + e^x\left(\frac{1}{3}x + \frac{4}{9}\right)$.

2. $y = C_1 + C_2e^{-x} + \frac{3}{2}x^2 - 10x$.

3. $y = (C_1 + C_2x)e^{3x} + e^{2x}$.

4. $y = C_1 + C_2e^{-7x} + \frac{1}{21}x^3 + \frac{5}{98}x^2 - \frac{5}{343}x$.

5. $y = C_1e^{5x} + C_2e^{-5x} + \frac{1}{10}xe^{5x}$.

6. $y =$.

$\boxed{\textbf{TH2: } f(x) = e^{\alpha x}\left[P_n(x)\sin\beta x + Q_m(x)\cos\beta x\right]}$

trong đó $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $P_n(x)$ là đa thức bậc n, $Q_m(x)$ là đa thức bậc m.

Khi đó y_r có một trong hai dạng:

★ Nếu $\alpha \pm i\beta$ không là nghiệm của PTĐT **(3)** thì

$$y_r = e^{\alpha x}\left[R_k(x)\cos\beta x + S_k(x)\sin\beta x\right],$$

trong đó R_k, S_k là các đa thức bậc $k = \max(m, n)$.

★★ Nếu $\alpha \pm i\beta$ là nghiệm của PTĐT **(3)** thì

$$y_r = xe^{\alpha x}\left[\left[R_k(x)\cos\beta x + S_k(x)\sin\beta x\right]\right],$$

trong đó R_k, S_k là các đa thức bậc $k = \max(m, n)$.

VD 5. Giải phương trình $\boxed{y'' - 3y' + 2y = 2\sin x}$ **(1)**

$$\boxed{y'' - 3y' + 2y = 2\sin x} \qquad (1)$$

Giải. Xét pt $y'' - 3y' + 2y = 0$ **(2)** với PTĐT: $k^2 - 3k + 2 = 0$ **(3)** có 2 nghiệm $k = 1,\ k = 2$. Suy ra NTQ của **(2)** là $y = C_1e^x + C_2e^{2x}$.

Ta có $f(x) = 2\sin x = P_0(x)\sin\beta x$, với $P_0(x) = 2$, $\beta = 1$. Vì $\pm i\beta = \pm i$ không là nghiệm của PTĐT, ta tìm 1 nghiệm riêng dạng $y_r = A\cos x + B\sin x$.

Có $\begin{cases} y_r' = -A\sin x + B\cos x \\ y_r'' = -A\cos x - B\sin x. \end{cases}$ Thế vào pt ban đầu được

$$(A - 3B)\cos x + (3A + B)\sin x = 2\sin x.$$

Đồng nhất hệ số được $A = \dfrac{3}{5}$, $B = \dfrac{1}{5}$. Vậy NTQ của **(1)** là

$$y = C_1e^x + C_2e^{2x} + \frac{3}{5}\cos x + \frac{1}{5}\sin x.$$

VD 6. Giải phương trình $\boxed{y'' + y = x\cos x}$ **(1)**

Giải. Xét pt $y'' + y = 0$ **(2)** với PTĐT $k^2 + 1 = 0$ **(3)** $\Leftrightarrow k = \pm i$.

Suy ra NTQ của **(2)** là $y = C_1\cos x + C_2\sin x$.

Vế phải $f(x) = x\cos x = P_1(x)\cos\beta x$, với $P_1(x) = x$, $\beta = 1$. Vì $\pm i\beta = \pm i$ là nghiệm của PTĐT, ta tìm 1 nghiệm riêng dạng

$$y_r = x\,[(Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x] = (Ax^2 + Bx)\cos x + (Cx^2 + Dx)\sin x.$$

Có $y_r' = [Cx^2 + (2A + D)x + B]\cos x + [-Ax^2 + (2C - B)x + D]\sin x$,

$$y_r'' = [-Ax^2 + (4C - B)x + 2D + 2A]\cos x + [-Cx^2 - (D + 4A)x + 2C - 2B]\sin x.$$

Thế vào pt ban đầu được

$$(4Cx + 2D + 2A)\cos x + (-4Ax + 2C - 2B)\sin x = x\cos x.$$

Đồng nhất hệ số được hệ $\begin{cases} 4Cx + 2D + 2A = x \\ -4Ax + 2C - 2B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = D = 0 \\ B = C = \frac{1}{4}. \end{cases}$

Vậy NTQ của **(1)** là

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x + \frac{x}{4}(x\sin x + \cos x).$$

VD 7. Giải bài toán giá trị ban đầu

$$\boxed{y'' + 4y = 2\sin^2 x, \qquad y(0) = \frac{1}{4},\ y'(0) = \frac{9}{4}}.$$

Hướng dẫn. PTĐT $\Leftrightarrow k = \pm 2i$, suy ra NTQ của pt thuần nhất tương ứng là

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x.$$

Tách $2\sin^2 x = 1 - \cos 2x = f_1(x) + f_2(x)$. Tìm 2 nghiệm riêng của 2 pt

$$y'' + y = 1, \qquad y'' + y = -\cos 2x,$$

được $y_r = \frac{1}{4}$, $\overline{y}_r = \frac{x}{4}\cos 2x$. Do đó NTQ của pt ban đầu là

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{1}{4} + \frac{x}{4}\cos 2x.$$

Giải hệ ĐK ban đầu được nghiệm riêng cần tìm

$$y = \sin 2x + \frac{1}{4} + \frac{x}{4}\cos 2x.$$

★ Sinh viên tự giải các phương trình sau:

1. $y'' - y' - 2y = \cos 2x.$

2. $y'' + y = 3\sin x - 2\cos x.$

3. $y'' - 6y' + 9y = (x-1)\sin x.$

4. $y'' - 2y' = \sin 2x.$

5. $y'' + 4y = x\cos 2x.$

★ Kết quả:

1. $y = C_1e^{-x} + C_2e^{2x} - \frac{3}{20}\cos 2x - \frac{1}{20}\sin 2x.$

2. $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x + x\left(-\sin x - \frac{3}{2}\cos x\right).$

3. $y = .$

4. $y = .$

5. $y = .$