

# BÀI GIẢNG TOÁN CAO CẤP

TÍCH PHÂN (BẤT ĐỊNH, XÁC ĐỊNH)

## I. TÍCH PHÂN BẤT ĐỊNH

- Hàm số  $F(x)$  được gọi là một **nguyên hàm** của hàm số  $f(x)$  trên  $D$  nếu  $F'(x) = f(x), \forall x \in D$ .
- **Định lý:** Nếu  $F(x), H(x)$  là các nguyên hàm của  $f(x)$  trên  $D$  thì  $H(x) = F(x) + C, \forall x \in D$ , trong đó  $C$  là hằng số nào đó.
- Họ tất cả các nguyên hàm của  $f(x)$  trên  $D$  được gọi là **tích phân bất định** của  $f$  đối với biến  $x$  trên  $D$  và được ký hiệu bởi

$$\int f(x) dx,$$

trong đó, dấu  $\int$  là ký hiệu tích phân; hàm số  $f$  là hàm dưới dấu tích phân và  $x$  là biến của tích phân.

$$\int f(x) \, dx = F(x) + C$$

Trong đó:  $F(x)$  là một nguyên hàm của  $f(x)$ , và  $C$  là hằng số thực bất kỳ.

**VD 1.** Do  $(x^3)' = 3x^2$  nên  $\int x^2 \, dx = \frac{x^3}{3} + C$ .

Do  $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$  nên  $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$ .

Do  $(\ln |x|)' = \frac{1}{x}$  nên  $\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C$ .

Do  $(e^x)' = e^x$  nên  $\int e^x \, dx = e^x + C$ .

## Tính chất của tích phân bất định

$$1. \int k f(x) dx = k \int f(x) dx, \text{ } k \text{ là hằng số khác không.}$$

$$2. \int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx.$$

$$3. \text{ Nếu } \int f(x) dx = F(x) + C \text{ thì } \int f(u) du = F(u) + C.$$

$$\text{VD 2. Ta có } \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C \text{ nên}$$

$$\int \sin^2 x \cos x dx = \int (\sin x)^2 d(\sin x) = \frac{\sin^3 x}{3} + C;$$

$$\int \frac{\ln^2 x}{x} dx = \int (\ln x)^2 d(\ln x) = \frac{\ln^3 x}{3} + C;$$

$$\int \frac{\arctan^2 x}{1+x^2} dx = \int (\arctan x)^2 d(\arctan x) = \frac{\arctan^3 x}{3} + C.$$

## CÔNG THỨC TÍCH PHÂN BẤT ĐỊNH

$$1. \int a \, dx = ax + C$$

$$2. \int x^\alpha \, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \text{ với mọi } \alpha \neq -1$$

$$3. \int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C$$

$$4. \int \frac{1}{x^2} \, dx = -\frac{1}{x} + C$$

$$5. \int \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx = 2\sqrt{x} + C$$

$$6. \int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0, a \neq 1)$$

$$\text{đặc biệt } \int e^x \, dx = e^x + C$$

$$7. \int \cos x \, dx = \sin x + C$$

$$8. \int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

$$9. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$$

$$10. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$$

$$11. \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$$

đặc biệt  $\int \frac{dx}{1 + x^2} = \arctan x + C$

$$12. \int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a + x}{a - x} \right| + C$$

đặc biệt  $\int \frac{dx}{1 - x^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + x}{1 - x} \right| + C$

$$13. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$\text{đặc biệt } \int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + C$$

$$14. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + b}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + b} \right| + C$$

$$15. \int \tan x \, dx = -\ln |\cos x| + C$$

$$16. \int \cot x \, dx = \ln |\sin x| + C.$$

**VD 3.** Tính các tích phân:

$$I = \int \frac{dx}{16 + x^2}$$

$$J = \int \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}}$$

$$K = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2}}$$

$$H = \int \frac{dx}{9 - x^2}$$

# CÁC PHƯƠNG PHÁP TÍNH TÍCH PHÂN BẤT ĐỊNH

## 1. Phương pháp đổi biến

**Dạng 1** Đặt  $x = g(t) \Rightarrow dx = g'(t) dt$

**Dạng 2** Đặt  $t = h(x) \Rightarrow dt = h'(x) dx$

**Chú ý** Nếu  $g(t) = h(x)$  thì  $g'(t) dt = h'(x) dx$ .

VD 4. Tính  $I = \int \frac{\sin \sqrt[3]{x} dx}{\sqrt[3]{x^2}}$ .

$$I = \int \frac{\sin \sqrt[3]{x} \, dx}{\sqrt[3]{x^2}}$$

*Giải.*

Đặt  $x = t^3 \Rightarrow dx = 3t^2 dt$ , ta có

$$I = \int \frac{3t^2 \sin t \, dt}{t^2} = 3 \int \sin t \, dt = -3 \cos t + C.$$

Trở về biến cũ, ta được

$$\int \frac{\sin \sqrt[3]{x} \, dx}{\sqrt[3]{x^2}} = -3 \cos \sqrt[3]{x} + C.$$

**VD 5.** Tính  $I = \int x^2 \sqrt{1-x} \, dx.$

$$I = \int x^2 \sqrt{1-x} \, dx$$

*Giải.*

Đặt  $t = \sqrt{1-x} \Rightarrow t^2 = 1-x \Leftrightarrow x = 1-t^2 \Rightarrow dx = -2t \, dt$ , ta có

$$\begin{aligned} I &= \int (1-t^2)^2 t(-2t) \, dt \\ &= \int (-2t^2 + 4t^4 - 2t^6) \, dt \\ &= -\frac{2}{3}t^3 + \frac{4}{5}t^5 - \frac{2}{7}t^7 + C \\ &= -2\sqrt{(1-x)^3} \left[ \frac{1}{3} - \frac{2}{5}(1-x) + \frac{1}{7}(1-x^2) \right] + C \\ &= -\frac{2}{105}\sqrt{(1-x)^3} (8 + 12x + 15x^2) + C. \end{aligned}$$

**VD 6.** Tính  $I = \int \sin x \cos x \sqrt{1 + \sin^2 x} \, dx$ .

$$I = \int \sin x \cos x \sqrt{1 + \sin^2 x} \, dx$$

*Giải.*

Đặt  $t = 1 + \sin^2 x \Rightarrow dt = 2 \sin x \cos x \, dx$ , ta có

$$I = \int \sqrt{t} \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{3} (1 + \sin^2 x)^{\frac{3}{2}} + C.$$

Cách 2. Đặt  $t = \sqrt{1 + \sin^2 x} \Rightarrow t^2 = 1 + \sin^2 x \Rightarrow 2t \, dt = 2 \sin x \cos x \, dx$

hay  $t \, dt = \sin x \cos x \, dx$ . Khi đó

$$I = \int t \cdot t \, dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{1}{3} (1 + \sin^2 x)^{\frac{3}{2}} + C.$$

VD 7. Tính  $I = \int \frac{dx}{x(2 + \ln^2 x)}$ .

$$I = \int \frac{dx}{x(2 + \ln^2 x)}$$

*Giải.*

Đặt  $t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{dx}{x}$ , ta có

$$I = \int \frac{dt}{2 + t^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{t}{\sqrt{2}} + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{\ln x}{\sqrt{2}} + C.$$

▷ Sinh viên tự giải:

VD 8. Tính  $I = \int \frac{x^2 dx}{1 - x^6}$ .

VD 9. Tính  $I = \int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 5}}$ .

VD 10. Tính  $I = \int \frac{e^x(x+1)}{xe^x(xe^x+1)} dx$ .

VD 11. Tính  $I = \int \frac{dx}{x\sqrt{2x-9}}$ .

VD 12. Tính  $I = \int \frac{x dx}{x^4 - x^2 + 1}$ .

VD 13. Tính  $I = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2}, \quad a > 0$ .

## 2. Phương pháp tích phân từng phần

Công thức

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du.$$

Sử dụng phương pháp này khi

1. có TÍCH hai loại hàm khác nhau
2. CHỈ CÓ  $\log_a x$  hoặc các hàm LG ngược

Hướng ưu tiên đặt  $u$

1.  $\log_a x$ ,  $\arcsin x$ ,  $\arccos x$ ,  $\arctan x$ ,  $\operatorname{arccot} x$ .
2. đa thức

VD 14. Tính  $I = \int (x^2 + 2x) \ln x \, dx$ .

$$I = \int (x^2 + 2x) \ln x \, dx$$

Giải. Đặt 
$$\begin{cases} u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x} \\ dv = (x^2 + 2x) dx \Rightarrow v = \frac{x^3}{3} + x^2. \end{cases}$$

Khi đó

$$\begin{aligned} I &= \left( \frac{x^3}{3} + x^2 \right) \ln x - \int \left( \frac{x^2}{3} + x \right) dx \\ &= \left( \frac{x^3}{3} + x^2 \right) \ln x - \frac{x^3}{9} - \frac{x^2}{2} + C. \end{aligned}$$

**VD 15.** Tính  $I = \int x \arctan x \, dx$ .

$$I = \int x \arctan x \, dx$$

Giải. Đặt 
$$\begin{cases} u = \arctan x \Rightarrow du = \frac{dx}{1+x^2} \\ dv = x \, dx \Rightarrow v = \frac{x^2}{2}. \end{cases}$$

Khi đó

$$\begin{aligned} I &= \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2 \, dx}{x^2 + 1} \\ &= \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2 + 1 - 1}{x^2 + 1} \, dx \\ &= \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2 + 1} \\ &= \frac{x^2}{2} \arctan x + \frac{1}{2} \arctan x - \frac{x}{2} + C. \end{aligned}$$

VD 16. Tính  $I = \int \arcsin x \, dx$ .

$$I = \int \arcsin x \, dx$$

Giải. Đặt 
$$\begin{cases} u = \arcsin x \Rightarrow du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ dv = dx \Rightarrow v = x. \end{cases}$$

Khi đó

$$\begin{aligned} I &= x \arcsin x - \int \frac{x \, dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= x \arcsin x + \int \frac{-2x \, dx}{2\sqrt{1-x^2}} \\ &= x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C. \end{aligned}$$

VD 17. Tính  $I = \int (3x - 2)e^{2x} \, dx$ .

$$I = \int (3x - 2)e^{2x} dx$$

Giải. Đặt  $\begin{cases} u = 3x - 2 \\ dv = e^{2x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 3 \\ v = \frac{e^{2x}}{2}. \end{cases}$  Suy ra

$$I = \frac{(3x - 2)e^{2x}}{2} - \frac{3}{2} \int e^{2x} dx = \frac{(3x - 2)e^{2x}}{2} - \frac{3}{4}e^{2x} + C.$$

VD 18. Tính  $I = \int (2x^2 + 6x) \cos^2 x dx$ .

$$I = \int (2x^2 + 6x) \cos^2 x \, dx$$

*Giải.* Do  $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$  nên

$$\begin{aligned} I &= \int (x^2 + 3x)(1 + \cos 2x) \, dx \\ &= \int (x^2 + 3x) \, dx + \int (x^2 + 3x) \cos 2x \, dx = I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Ta có  $I_1 = \int (x^2 + 3x) \, dx = \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}$ . Đối với  $I_2$  ta đặt

$$\begin{cases} u = x^2 + 3x \\ dv = \cos 2x \, dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = (2x + 3) \, dx \\ v = \frac{\sin 2x}{2}, \end{cases}$$

suy ra

$$I_2 = \frac{(x^2 + 3x) \sin 2x}{2} - \frac{1}{2} \sin 2x \, dx = \frac{(x^2 + 3x) \sin 2x}{2} - I_3.$$

Đối với  $I_3$ , đặt

$$\begin{cases} u_1 = 2x + 3 \\ dv = \sin 2x \, dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2 \, dx \\ v = -\frac{\cos 2x}{2}, \end{cases}$$

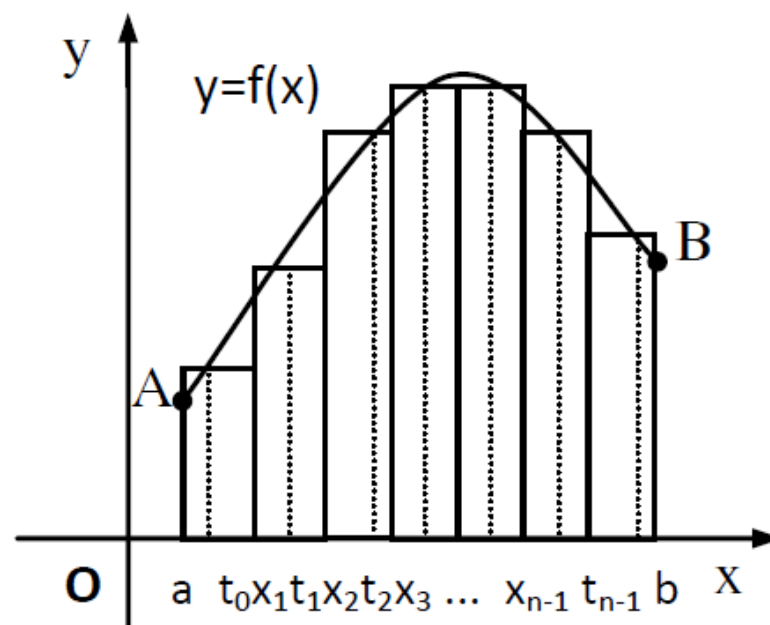
ta có

$$\begin{aligned} I_3 &= \frac{1}{2} \left[ -\frac{(2x - 3) \cos 2x}{2} + \int \cos 2x \, dx \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ -\frac{(2x - 3) \cos 2x}{2} + \frac{\sin 2x}{2} \right] + C. \end{aligned}$$

Vậy

$$I = \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + \frac{(x^2 + 3x) \sin 2x}{2} + \frac{(2x - 3) \cos 2x - \sin 2x}{4}.$$

## II. TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH



- **Định nghĩa:** Cho hàm số  $f(x)$  xác định trên  $[a, b]$ . Chia đoạn  $[a, b]$  bởi  $n + 1$  điểm:  $x_0 = a < x_1 < \dots < x_i < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ .

Đặt  $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i, \forall i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ . Với mỗi  $0 \leq i \leq n-1$ , lấy  $t_i \in [x_i, x_{i+1}]$  bất kỳ. **Lập tổng:**  $I_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i) \Delta x_i$ .

Khi  $n \rightarrow \infty$  với điều kiện  $\max_{0 \leq i \leq n-1} \Delta x_i \rightarrow 0$  mà  $I_n \rightarrow I$ , trong đó  $I$  là một số hữu hạn không phụ thuộc vào cách chia đoạn  $[a, b]$  và cách lấy các điểm  $t_i$ , thì  $I$  được gọi là **tích phân xác định của  $f$  từ  $a$  đến  $b$  và được ký hiệu bởi**

$$I = \int_a^b f(x) dx := \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max_{0 \leq i \leq n-1} \Delta x_i \rightarrow 0}} \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i) \Delta x_i,$$

trong đó, dấu  $\int$  là ký hiệu tích phân;  $a, b$  lần lượt là cận dưới và cận trên của tích phân;  $f(x)$  là hàm lấy tích phân;  $x$  là biến của tích phân). Khi đó, ta nói  **$f(x)$  là khả tích trên  $[a, b]$** .

## Tính chất của tích phân xác định

- Nếu  $f(x)$  khả tích trên  $[a, b]$  thì  $f(x)$  bị chặn trên  $[a, b]$ .
- Nếu  $f(x)$  liên tục trên  $[a, b]$  thì  $f(x)$  khả tích trên  $[a, b]$ .
- $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(u) du$  (tích phân xác định chỉ phụ thuộc vào hàm lấy tích phân và các cận, không phụ thuộc vào biến).
- $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$  và  $\int_a^a f(x) dx = 0$ .
- $\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$ ,  $k$  là hằng số.

- $\int_a^b [f(x) \pm g(x)] \, dx = \int_a^b f(x) \, dx \pm \int_a^b g(x) \, dx.$
- $\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx$ , với mọi  $c$  nằm giữa  $a$  và  $b$ .
- Nếu  $f(x)$  khả tích trên  $[a, b]$  thì hàm số

$$F(x) = \int_a^x f(t) \, dt$$

xác định và liên tục tại mọi  $x \in [a, b]$ . Hơn nữa, nếu  $f(x)$  liên tục tại  $x_0 \in [a, b]$  thì  $F'(x_0) = f(x_0)$ .

## Công thức Newton - Leibnitz

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

trong đó,  $F(x)$  là một nguyên hàm của  $f(x)$ .

## Hai phương pháp tính Tích phân xác định

★ Đổi biến: 
$$\begin{cases} x = g(t) \Rightarrow dx = g'(t) dt \\ t = h(x) \Rightarrow dt = h'(x) dx \end{cases} \quad (\text{nhớ đổi cận})$$

★ Từng phần: 
$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$$

VD 19. Tính tích phân

$$I = \int_0^1 x^{15} \cdot \sqrt{1 + 3x^8} dx.$$

$$I = \int_0^1 x^{15} \cdot \sqrt{1 + 3x^8} \, dx$$

*Giải.* Đặt  $t = \sqrt{1 + 3x^8} \Rightarrow t^2 = 1 + 3x^8 \Rightarrow \begin{cases} t \, dt = 12x^7 \, dx \\ x^8 = \frac{t^2 - 1}{3}. \end{cases}$

Đổi cận: 

$x$	0	1
$t$	1	2

 Thay vào  $I = \int_0^1 x^8 \sqrt{1 + 3x^8} \cdot x^7 \, dx$  ta được:

$$I = \frac{1}{36} \int_1^2 (t^4 - t^2) \, dt = \frac{1}{36} \left( \frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_1^2 = \frac{29}{270}.$$

**VD 20.** Tính tích phân

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x \, dx}{6 - 5 \sin x + \sin^2 x}.$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x \, dx}{6 - 5 \sin x + \sin^2 x}$$

*Giải.* Đặt  $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x \, dx$  và cận mới  $t \in [0, 1]$ .

Do đó

$$I = \int_0^1 \frac{dt}{6 - 5t + t^2} = \int_0^1 \frac{dt}{(t - 2)(t - 3)} = \ln \left| \frac{t - 3}{t - 2} \right| \Big|_0^1 = \ln \frac{4}{3}.$$

**VD 21.** Tính tích phân

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{4 \sin^2 x - 5 \sin x \cos x + \cos^2 x}.$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{4 \sin^2 x - 5 \sin x \cos x + \cos^2 x}$$

*Giải.* Đặt  $t = \tan x \Rightarrow dt = \frac{dx}{\cos^2 x}$ , ta có cận mới  $t \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$ .

Do đó

$$I = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{dt}{(t-1)(4t-1)} = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{t-1}{4t-1} \right| \Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{1}{3} \ln \frac{\sqrt{3}-1}{4-\sqrt{3}}.$$

**VD 22.** Tính tích phân

$$I = \int_1^e x \ln x \, dx.$$

$$I = \int_1^e x \ln x \, dx$$

*Giải.* Sử dụng tích phân từng phần ta có

$$I = \frac{1}{2} \int_1^e \ln x \, d(x^2) = \frac{1}{2} \left[ x^2 \ln x \Big|_1^e - \int_1^e x^2 \, d(\ln x) \right] = \frac{e^2 + 1}{4}.$$

★ Bài tập tự làm: Tính các tích phân sau

$$1. \quad I = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^{2x} dx}{e^x - 1 + \sqrt{e^x - 2}}$$

$$\boxed{2 \ln 3 - 1}$$

$$2. \quad I = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 \frac{\arctan x}{x^2} dx$$

$$\boxed{\frac{1}{2} \ln \frac{5}{2}}$$

$$3. \quad I = \int_0^{\frac{1}{8}} \arccos(4x) dx$$

$$\boxed{\frac{\pi}{24} + \frac{1}{4} \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$$

$$4. \quad I = \int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{x+1}} dx$$

$$\boxed{\pi\sqrt{2} - 4}$$

$$5. \quad I = \int_0^{\sqrt{3}} x \arctan x dx$$

$$\boxed{\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}}$$