## 1. Tính diện tích hình phẳng

• Diện tích của hình phẳng $\boldsymbol{H}:\begin{cases}\boldsymbol{y=f(x)}\\ \boldsymbol{x=a,\ x=b}\\ \boldsymbol{y=0}\ \text{(trục hoành } \boldsymbol{Ox})\end{cases}$ là

$$\boldsymbol{S_H=\int_a^b|f(x)|\,dx.}$$

• Cho hình $\boldsymbol{H}:\begin{cases}\boldsymbol{x=a;\ x=b}\\ \boldsymbol{y=f(x);\ y=g(x)}\end{cases}$. **Diện tích của hình *H* là**

$$\boldsymbol{S_H=\int_a^b|f(x)-g(x)|\,dx.}$$

• Hình $\boldsymbol{H}$ : $\begin{cases} y = c;\ y = d \\ x = f(y);\ x = g(y) \end{cases}$ có

$$S_H = \int_c^d |f(y) - g(y)|\, dy.$$

**Đặc biệt:** Khi $g(y) \equiv 0$ thì $S = \displaystyle\int_c^d |f(y)|\, dy$.

• Hình phẳng giới hạn bởi các đường $x = a$, $x = b$, trục $Ox$ và đường cong $L$ : $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ có **diện tích là** $S = \displaystyle\int_\alpha^\beta |y(t)x'(t)|\, dt$**, trong đó giả thiết rằng phương trình** $x(t) = a, x(t) = b$ **có nghiệm duy nhất là** $\alpha, \beta$ **và** $x(t), y(t), x'(t)$ **liên tục trên** $[\alpha, \beta]$**.**

**Chú ý: 1. Có thể chia nhỏ hình phẳng thành nhiều phần (nếu cần thiết).**

**2. Nên để ý đến tính đối xứng (nếu có) của hình phẳng.**

**VD 1.** Tính diện tích miền giới hạn bởi đường Parabol $y = x^2 - 2x$, trục $Ox$ và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 3$.

*Giải.* Ta có

$$S = -\int_0^2 (x^2 - 2x)dx + \int_2^3 (x^2 - 2x)dx = \frac{8}{3}.$$

**VD 2.** Tính diện tích miền giới hạn bởi Parabol $y = x^2 + 1$ và đường thẳng $x + y = 3$.

*Giải.* Ta có $x + y = 3 \Leftrightarrow y = 3 - x.$ Phương trình hoành độ giao điểm $x^2 + 1 = 3 - x \Leftrightarrow x = 2$ hoặc $x = 1.$ Do đó

$$S = \int_{-2}^1 (2 - x - x^2)dx = \frac{9}{2}.$$

**VD 3.** Tính diện tích miền giới hạn bởi các Parabol $y^2 = 2px$, $x^2 = 2py$ với $p > 0$.

*Giải.* Với $\boldsymbol{f(x) = \sqrt{2px}}$, $\boldsymbol{g(x) = \dfrac{x^2}{2p}}$.

- Hoành độ giao điểm $\boldsymbol{f(x) = g(x) \Leftrightarrow x = 0, x = 2p}$.

- Do đó

$$\boldsymbol{S = \int_0^{2p} \left(\sqrt{2px} - \frac{x^2}{2p}\right) dx = \left(\frac{2}{3}\sqrt{2p}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{6p}\right)\Big|_0^{2p} = \frac{4p^2}{3}.}$$

**VD 4.** Tính diện tích hình elip $\boldsymbol{(E)}$ **:**

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1.}$$

*Giải.* Phương trình tham số của đường elip $\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$ có dạng: $\boldsymbol{\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}}$, với $\boldsymbol{0 \leq t \leq 2\pi}$.

Vì hình elip $\boldsymbol{(E)}$ có hai trục đối xứng là trục tung $\boldsymbol{Oy}$ và trục hoành $\boldsymbol{Ox}$ nên diện tích của nó bằng $\boldsymbol{4}$ lần diện tích của phần hình elip $\boldsymbol{(E)}$ nằm trong góc phần tư thứ nhất.

Miền elip $(\boldsymbol{E})$ nằm trong góc phần tư thứ nhất giới hạn bởi các đường $\boldsymbol{x = 0, x = a}$, trục hoành $\boldsymbol{Ox}$ và cung elip $\begin{cases} \boldsymbol{x = a\cos t} \\ \boldsymbol{y = b\sin t} \end{cases}$ với $\boldsymbol{t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].}$

Do đó

$$\boldsymbol{S = 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt = 4.\frac{ab}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1 - \cos 2t)dt = \pi ab.}$$

## 2.Tính độ dài đường cong phẳng

• Độ dài của cung $\boldsymbol{AB}$ : $\begin{cases} \boldsymbol{y = f(x)} \\ \boldsymbol{(a \le x \le b)} \end{cases}$ là $\boldsymbol{s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.}$

• Độ dài của cung $\boldsymbol{AB}$ : $\begin{cases} \boldsymbol{x = g(y)} \\ \boldsymbol{(c \le y \le d)} \end{cases}$ là $\boldsymbol{s = \int_c^d \sqrt{1 + [g'(y)]^2}\, dy.}$

• **Tổng quát:** Giả sử cung cong $\boldsymbol{AB}$ : $\begin{cases} \boldsymbol{x = x(t)} \\ \boldsymbol{y = y(t)} \end{cases}$ $\boldsymbol{(\alpha \le t \le \beta)}$. **Độ dài cung** $\boldsymbol{AB}$ **được cho bởi công thức**

$$\boldsymbol{s = \int_\alpha^\beta \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt.}$$

**Chú ý 1: Tính độ dài của cung $L$.**

**+) Kiểm tra xem $L$ có áp dụng trực tiếp công thức độ dài không, nếu có thì áp dụng công thức.**

**+) Trong trường hợp $L$ chưa thể áp dụng được ngay công thức độ dài thì ta chuyển $L$ về cung có thể áp dụng trực tiếp công thức độ dài.**

**+) Có thể chia nhỏ cung thành nhiều cung khác nhau (nếu cần thiết).**

**Chú ý 2:** Nên để ý đến tính đối xứng (nếu có) của cung.

+) Nếu cung $L$ nhận trục $Ox$ làm trục đối xứng thì độ dài cung $L = 2$ lần độ dài của phần cung $L$ nằm trên trục hoành. (Cách kiểm tra đối xứng qua $Ox$: nếu $(x, y) \in L$ thì $(x, -y) \in L$ và ngược lại)

+) Nếu cung $L$ nhận trục $Oy$ làm trục đối xứng thì độ dài cung $L = 2$ lần độ dài của phần cung $L$ nằm phải trục tung. (Cách kiểm tra đối xứng qua $Oy$: nếu $(x, y) \in L$ thì $(-x, y) \in L$ và ngược lại)

+) Nếu cung $L$ nhận trục $Ox$ và trục $Oy$ làm các trục đối xứng thì độ dài cung $L = 4$ lần độ dài của phần cung $L$ nằm trong góc phần tư thứ nhất (ứng với $x, y \geq 0$).

**VD 5.** Tính độ dài cung cong $\boldsymbol{y = \ln x}$, $\boldsymbol{\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{15}}$.

*Giải.* (chú ý: cung cho trong bài là cung áp dụng trực tiếp công thức độ dài)

Ta có

$$s = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{15}} \sqrt{1 + y'^2(x)}\,\mathrm{dx} = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{15}} \sqrt{1 + \frac{1}{\mathrm{x}^2}}\,\mathrm{dx} = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{15}} \sqrt{1 + \mathrm{x}^2}\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{x}}.$$

Đặt $\boldsymbol{t = \sqrt{1 + x^2} \Rightarrow t^2 = 1 + x^2 \Rightarrow x\,\mathrm{dx} = \mathrm{t}\,\mathrm{dt}}$ và $\boldsymbol{\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{15} \Leftrightarrow 2 \leq t \leq 4}$ nên

$$\begin{aligned} s &= \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{15}} \sqrt{1 + x^2}.\frac{\mathrm{dx}}{x} = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{15}} \sqrt{1 + x^2}.\frac{x\,\mathrm{dx}}{x^2} = \int_2^4 t.\frac{t\,\mathrm{dt}}{t^2 - 1} \\ &= \int_2^4 \mathrm{dt} + \int_2^4 \frac{\mathrm{dt}}{\mathrm{t}^2 - 1} = \left(\mathrm{t} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\mathrm{t} - 1}{\mathrm{t} + 1}\right|\right)\Big|_2^4 \\ &= 2 + \ln 3 - \ln\sqrt{5}. \end{aligned}$$

**VD 6.** Tính độ dài cung cong $\boldsymbol{y = \ln(1 - x^2)}$ với $\boldsymbol{0 \le x \le \frac{1}{2}}$.

*Giải.* (chú ý: cung cho trong bài là cung áp dụng trực tiếp công thức độ dài)

Ta có

$$\boldsymbol{s = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 + y'^2(x)}\,\mathrm{dx} = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1 + \mathrm{x}^2}{1 - \mathrm{x}^2}\,\mathrm{dx} = \left(\ln\frac{1 + \mathrm{x}}{1 - \mathrm{x}} - \mathrm{x}\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{2}} = \ln 3 - \frac{1}{2}.}$$

**VD 7.** Tính độ dài đường Axtroit $\boldsymbol{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2}}$, $\boldsymbol{a > 0}$.

*Giải.* (chú ý: cung cho trong bài là cung chưa thể áp dụng trực tiếp công thức độ dài)

Đường Astroit được mô tả dưới dạng tham số

$$\boldsymbol{\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t, \end{cases} \qquad (0 \le t \le 2\pi).}$$

Dễ thấy đường Axtroit nhận trục $\boldsymbol{Ox}$ và $\boldsymbol{Oy}$ làm trục đối xứng. Nên độ dài của đường Axtroit = $\mathbf{4}$ lần độ dài phần đường Axtroit nằm trong góc phần tư thứ nhất. Phần đường

Axtroit nằm trong góc phần tư thứ nhất có phương trình tham số

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t, \end{cases} \qquad (0 \le t \le \frac{\pi}{2}).$$

Do đó độ dài của đường Axtroit là

$$\begin{aligned} s &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,\mathrm{dt} \\ &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(-3a\cos^2 t\sin t)^2 + \left(3a\sin^2 t\cos t\right)^2}\,\mathrm{dt} \\ &= 12a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 t\sin^2 t\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right)}\,\mathrm{dt} = 12\mathrm{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{\sin t\cos t\,dt} \\ &= 6a\sin^2 t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 6a. \end{aligned}$$

## 3.Tính thể tích vật thể

- Khi vật thể tròn xoay tạo bởi miền phẳng $\boldsymbol{D}$ : $\begin{cases} 0 \leq y \leq f(x) \\ a \leq x \leq b \end{cases}$ quay quanh trục $\boldsymbol{Ox}$ có thể tích là

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx.$$

- Khi vật thể tròn xoay tạo bởi miền phẳng $\boldsymbol{D}$ : $\begin{cases} 0 \leq f(x) \leq y \leq g(x) \\ a \leq x \leq b \end{cases}$ quay quanh trục $\boldsymbol{Ox}$ có thể tích là

$$V = \pi \int_a^b \left(g^2(x) - f^2(x)\right)\, dx.$$

• Khi vật thể tròn xoay tạo bởi miền phẳng $\boldsymbol{D}:\begin{cases}\boldsymbol{0 \le x \le f(y)} \\ \boldsymbol{c \le y \le d}\end{cases}$ quay quanh trục $\boldsymbol{Oy}$ có thể tích là

$$\boldsymbol{V = \pi \int_c^d f^2(y) dy.}$$

• Khi vật thể tròn xoay tạo bởi miền phẳng $\boldsymbol{D}:\begin{cases}\boldsymbol{0 \le f(y) \le x \le g(y)} \\ \boldsymbol{c \le y \le d}\end{cases}$ quay quanh trục $\boldsymbol{Oy}$ có thể tích là

$$\boldsymbol{V = \pi \int_c^d \left(g^2(y) - f^2(y)\right)\, dy.}$$

**Chú ý 1: Tính thể tích của vật thể tròn xoay khi quay miền phẳng $D$ quanh trục $Ox$ hoặc $Oy$.**

**+) Kiểm tra xem $D$ có áp dụng trực tiếp công thức thể tích vật thể tròn xoay hay không, nếu có thì áp dụng công thức.**

**+) Trong trường hợp $D$ chưa thể áp dụng được ngay công thức thể tích vật thể tròn xoay thì ta chuyển $D$ về miền khi quay thì có thể áp dụng trực tiếp công thức thể tích vật thể tròn xoay.**

**Chú ý 2:** +) **Trong trường hợp $D$ nhận trục $Ox$ làm trục đối xứng và gọi $D_1$ là phần miền $D$ nằm bên trên trục $Ox$,** vật thể tròn xoay khi cho $D_1$ quay quanh trục $Ox$ chính là vật thể tròn xoay khi cho $D$ quay quanh trục $Ox$.

**Do đó, vật thể tròn xoay được tạo thành khi cho $D_1$ quay quanh trục $Ox$, và tính thể tích.** (Cách kiểm tra đối xứng qua $Ox$: nếu $(x, y) \in D$ thì $(x, -y) \in D$ và ngược lại)

+) **Trong trường hợp $D$ nhận trục $Oy$ làm trục đối xứng và gọi $D_1$ là phần miền $D$ nằm bên phải trục $Oy$,** vật thể tròn xoay khi cho $D_1$ quay quanh trục $Oy$ chính là vật thể tròn xoay khi cho $D$ quay quanh trục $Oy$.

**Do đó, vật thể tròn xoay được tạo thành khi cho $D_1$ quay quanh trục $Oy$, và tính thể tích.** (Cách kiểm tra đối xứng qua $Oy$: nếu $(x, y) \in D$ thì $(-x, y) \in D$ và ngược lại)

**VD 8.** Tính thể tích vật thể sinh bởi hình phẳng giới hạn bởi $\boldsymbol{y = x^3}$ và các đường $\boldsymbol{x = 0}$, $\boldsymbol{x = 1}$, $\boldsymbol{y = 0}$ khi

a) quay quanh trục $\boldsymbol{Ox}$;     b) quay quanh trục $\boldsymbol{Oy}$.

*Giải.*

a) Miền phẳng trong giả thiết là miền $\boldsymbol{D} :\begin{cases} 0 \le y \le x^3 \\ 0 \le x \le 1 \end{cases}$. Ta có

$$V = \pi \int_0^1 (x^3)^2 \, dx = \pi \int_0^1 x^6 \, dx = \pi . \frac{x^7}{7}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{7}.$$

b) Từ $\boldsymbol{y = x^3}$ suy ra $\boldsymbol{x = \sqrt[3]{y}}$. Do đó, miền phẳng trong giả thiết là miền $\boldsymbol{H} :$ $\begin{cases} 0 \le \sqrt[3]{y} \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1 \end{cases}$. Vậy

$$V = \pi \int_0^1 1^2 \, dy - \pi \int_0^1 \left(\sqrt[3]{y}\right)^2 \, dy = \pi - \pi . \frac{3x^{\frac{5}{3}}}{5}\Big|_0^1 = \frac{2\pi}{5}.$$

**VD 9.** Tính thể tích vật thể sinh bởi hình ellip $(\boldsymbol{E}): \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2} \le 1$ quay quanh trục $\boldsymbol{Ox}$; trong đó $a, b > 0$. Tương tự tính thể tích vật thể khi $(\boldsymbol{E})$ quay quanh trục $\boldsymbol{Oy}$.

*Giải.* a) Tính thể tích vật thể sinh bởi hình ellip $(\boldsymbol{E})$ quay quanh trục $\boldsymbol{Ox}$. Ta có $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2} \le 1 \Leftrightarrow -b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \le y \le b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$ (với $-a \le x \le a$)

Do hình ellip $(\boldsymbol{E}): \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2} \le 1$ nhận trục hoành $\boldsymbol{Ox}$ là trục đối xứng nên vật thể được tạo bởi khi cho phần hình $(\boldsymbol{E})$ nằm trên trục hoành quay quanh trục $\boldsymbol{Ox}$.

Phần hình $(\boldsymbol{E})$ nằm trên trục hoành là miền $\boldsymbol{D}: \begin{cases} 0 \le y \le b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \\ -a \le x \le a \end{cases}$.

Vậy thể tích của vật thể là $V = \pi \displaystyle\int_{-a}^{a} \left(b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)^2 dx = \frac{4\pi a b^2}{3}$

b) Tính thể tích vật thể sinh bởi hình ellip $(\boldsymbol{E})$ quay quanh trục $\boldsymbol{Oy}$. Ta có $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leq 1 \Leftrightarrow -a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}\leq x\leq a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}$ (với $-b\leq y\leq b$)

Do hình ellip $(E):\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leq 1$ nhận trục hoành $Oy$ là trục đối xứng nên vật thể được tạo bởi khi cho phần hình $(E)$ nằm bên phải trục tung quay quanh trục $Oy$.

Phần hình $(E)$ nằm bên phải trục tung là miền $H:\begin{cases} 0\leq x\leq a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}} \\ -b\leq y\leq b \end{cases}$.

Vậy thể tích của vật thể là $V=\pi\displaystyle\int_{-b}^{b}\left(a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}\right)^2 dy=\frac{4\pi ab^2}{3}$

## 4.Tính diện tích mặt tròn xoay

• Mặt tròn xoay tạo bởi khi cung $AB$ : $\begin{cases} y = f(x) \\ a \le x \le b \end{cases}$ quay quanh trục $Ox$ có diện tích là

$$S = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$

Nếu $f(x) \ge 0$ thì $S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$

• Mặt tròn xoay tạo bởi khi cung $AB$ : $\begin{cases} x = f(y) \\ c \le y \le d \end{cases}$ quay quanh trục $Oy$ có diện tích là

$$S = 2\pi \int_c^d |f(y)| \sqrt{1 + [f'(y)]^2}\, dy.$$

Nếu $f(y) \ge 0$ thì $S = 2\pi \int_c^d f(y) \sqrt{1 + [f'(y)]^2}\, dy.$

**Chú ý 1: Tính diện tích mặt tròn xoay khi cho cung $L$ quay quanh trục $Ox$ hoặc $Oy$.**

**+) Kiểm tra xem $L$ có áp dụng trực tiếp công thức diện tích mặt tròn xoay không, nếu có thì áp dụng công thức.**

**+) Trong trường hợp $L$ chưa thể áp dụng được ngay công thức diện tích mặt tròn xoay thì ta chuyển $L$ về cung có thể áp dụng trực tiếp công thức diện tích mặt tròn xoay.**

**+) Có thể chia nhỏ cung thành nhiều cung khác nhau (nếu cần thiết).**

## Chú ý 2:

**+) Trong trường hợp $L$ nhận trục $Ox$ làm trục đối xứng và $L_1$ là phần cung $L$ nằm trên trục hoành, diện tích mặt tròn xoay khi $L$ quay quanh $Ox$ được tính ứng với cung $L_1$.**

**+) Trong trường hợp $L$ nhận trục $Ox$ làm trục đối xứng và $L_1$ là phần cung $L$ nằm bên phải trục tung, diện tích mặt tròn xoay khi $L$ quay quanh $Oy$ được tính ứng với cung $L_1$.**

**VD 10.** Tính diện tích mặt tròn xoay tạo bởi cung $y = \sin x$, $0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}$ quay quanh trục $Ox$.

*Giải.* Do $y = \sin x \ge 0$ với $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ nên ta có

$$S = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} y(x)\sqrt{1 + (y'(x))^2}\, \mathrm{dx}$$

$$= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\sqrt{1+\cos^2 x}\, \mathrm{dx} = -2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\cos^2 \mathrm{x}}\, \mathrm{d}(\cos \mathrm{x}).$$

Đặt $t = \cos x$ ta có $x = 0 \Rightarrow t = 1$, $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 0$ nên

$$S = 2\pi \int_0^1 \sqrt{1+t^2}\, \mathrm{dt} = 2\pi \left[\frac{\mathrm{t}}{2}\sqrt{1+\mathrm{t}^2} + \frac{1}{2}\ln\left(\mathrm{t} + \sqrt{1+\mathrm{t}^2}\right)\right]\Bigg|_0^1$$

$$= \pi\left[\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})\right].$$

Ghi nhớ: $\int \sqrt{a^2x^2+b}\, dx = \dfrac{x}{2}\sqrt{a^2x^2+b} + \dfrac{b}{2a}\ln\left|ax + \sqrt{a^2x^2+b}\right|$ $(a, b \ne 0)$

**VD 11.** Tính diện tích mặt tròn xoay khi quay cung $x = y + 1$ với $0 \le y \le 1$ quanh trục $Oy$.

*Giải.* Do $\boldsymbol{x = y + 1 \geq 0}$ (với $\boldsymbol{0 \leq y \leq 1}$) nên ta có

$$\boldsymbol{S = 2\pi \int_0^1 x(y)\sqrt{1 + (x'(y))^2}\,\mathrm{dy} = 2\pi \int_0^1 (\mathrm{y} + 1)\sqrt{1 + 1^2}\,\mathrm{dy} = 3\pi\sqrt{2}.}$$

**Bài tập.**

**4. Tìm diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường và điều kiện sau:**

**1)** $\boldsymbol{y = \frac{x^2}{2},\ y = 2 - \frac{3x}{2}}$ **2)** $\boldsymbol{y^2 + x = 4,\ y^2 - 3x = 12}$

**3)** $\boldsymbol{y = x^3,\ y = x,\ y = 2x}$ **4)** $\boldsymbol{x^2 + y^2 = 4x,\ y^2 = 2x}$

**5)** $\boldsymbol{y = \frac{1}{x},\ y = x,\ y = \frac{10}{3} - x,\ x \geq 1}$ **6)** $\boldsymbol{\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1,\ y \leq \frac{9}{32}x^2}$

**5. Tìm thể tích vật tròn xoay tạo bởi miền phẳng giới hạn bởi các đường sau đây quanh các trục tương ứng:**

**1) Tam giác** $\boldsymbol{OAB}$**, với** $\boldsymbol{O(0,0),\ A(h,0),\ B(h,r)}$ **quay quanh trục** $\boldsymbol{Ox}$**.**

**2)** $\boldsymbol{xy = 4,\ y = 0,\ x = 1}$ **và** $\boldsymbol{x = 4}$ **quay quanh trục** $\boldsymbol{Ox}$**.**

**3)** $\boldsymbol{y^2 + x - 4 = 0}$ **quay quanh trục** $\boldsymbol{Oy}$**.**

4) $y = \arcsin x$, $x = 1$, $y = 0$ quay quanh trục $Oy$.

**6. Tính diện tích mặt tròn xoay khi quay các đường cong sau đây:**

1) $x^2 + y^2 = R^2$ quay quanh trục $Oy$.

2) $y = x^2$, $0 \leq x \leq 1$ quay quanh trục $Ox$.

3) $y = \tan x$, $0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{4}$ quay quanh trục $Ox$.

4) $y^2 = 4 + x$, $-4 \leq x \leq 2$ quay quanh trục $Ox$.

5) $y^2 = 2(x-1)$, $0 \leq y \leq 1$ quay quanh trục $Oy$.

**7. Tính độ dài các cung sau:**

1) $y = \ln(1 - x^2)$ với $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$.

2) $y = \ln x$ với $2\sqrt{2} \leq x \leq 2\sqrt{6}$.

3) $y = \dfrac{x}{6}\sqrt{x + 12}$ với $11 \leq x \leq 39$.

4) $2y = x^2 - 2$ gồm giữa các giao điểm của nó với trục $Ox$.