Hướng dẫn bài tập đề cương giải tích phần 2

BT 1.

Bài 3. Tìm cực trị có ràng buộc:

a) $z(x,y) = x^2 - 2y^2 + 2xy + 4x$ với ràng buộc $x = 2y$;

b) $z(x,y) = 3x^2 + 5xy$ với ràng buộc $x + y = 16$;

c) $z(x,y) = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}$ $(a > 0, b > 0)$ với ràng buộc $x^2 + y^2 = 1$;

d) $z(x,y) = 2x + 9y + 1$ với ràng buộc $x^2 + 3y^2 = 31$.

Hướng dẫn:

Giải ý a) và b)

- **Đưa về tìm cực trị hàm số một biến:**

Ý tưởng: **Tìm cực trị của hàm $z = f(x,y)$ với điều kiện $g(x,y) = 0$ như sau:**

B1) Từ điều kiện $g(x,y) = 0$, ta rút y theo x. Ta được $y = h(x)$. Tìm

tập xác định của hàm $h(x)$, ký hiệu là D_1.

Chú ý: Trong trường hợp rút x theo y được $x = h(y)$), ta làm tương tự như $y = h(x)$)

B2) Thay $y = h(x)$ vào $z = f(x, y)$, ta nhận được $g(x) = f(x, h(x))$.

Tìm tập xác định của hàm $g(x)$, ký hiệu là D_2.

B3) Tìm cực trị của $g(x)$ trên $D = D_1 \cap D_2$.

B4) Kết luận:

- Trong trường hợp $g(x)$ đạt cực đại tại $x_0 \in D$, ta kết luận: hàm z đạt cực đại có điều kiện tại $(x_0, h(x_0))$ và giá trị cực đại là $z_{\max} = z(x_0, h(x_0))$.

- Trong trường hợp $g(x)$ đạt cực tiểu tại $x_0 \in D$, ta kết luận: hàm z đạt cực tiểu có điều kiện tại $(x_0, h(x_0))$ và giá trị cực tiểu là $z_{\min} = z(x_0, h(x_0))$.

- Trong trường hợp $g(x)$ không có cực trị, ta kết luận không tồn tại cực trị điều kiện của z với điều kiện $g(x, y) = 0$.

Quy trình tìm cực trị hàm $\boldsymbol{g(x)}$ trên $\boldsymbol{D}$ như sau:

-Bước 1: Tính $\boldsymbol{g'(x)}$. Tìm các điểm $\boldsymbol{x_0 \in D}$ sao cho $\boldsymbol{g'(x_0) = 0}$ hoặc $\boldsymbol{g(x)}$ không có đạo hàm tại $\boldsymbol{x_0}$.

-Bước 2: Lập bảng biến thiên của $\boldsymbol{g(x)}$ trên $\boldsymbol{D}$. Chú ý sự thay đổi dấu của đạo hàm tại các điểm $\boldsymbol{x_0}$ ở Bước 1 và kết luận sau:

a) Trường hợp bảng biến thiên của $\boldsymbol{g(x)}$ trong lân cận $\boldsymbol{(a, b) \subset D}$ của $\boldsymbol{x_0}$ như hình dưới:

x	a		x_0		b
$g'(x)$		$+$	$???$	$-$	
$g(x)$		$\nearrow$	$g(x_0)$	$\searrow$	

Ta có kết luận $\boldsymbol{x_0}$ là điểm cực đại của $\boldsymbol{g(x)}$ (hay $\boldsymbol{g(x)}$ đạt cực đại tại $\boldsymbol{x_0}$)

Ký hiệu $\boldsymbol{???}$ *thay cho* $\boldsymbol{0}$ *nếu* $\boldsymbol{g'(x_0) = 0}$ *hoặc thay cho* $||$ *nếu* $\boldsymbol{g(x)}$ *không có đạo hàm tại* $\boldsymbol{x_0}$.

b) Trường hợp bảng biến thiên của $\boldsymbol{g(x)}$ trong lân cận $\boldsymbol{(a, b) \subset D}$ của $\boldsymbol{x_0}$ như hình dưới:

x	a		x_0		b
$g'(x)$		$+$	$???$	$-$	
$g(x)$		$\searrow$	$g(x_0)$	$\nearrow$	

Ta có kết luận $\boldsymbol{x_0}$ là điểm cực tiểu của $\boldsymbol{g(x)}$ (hay $\boldsymbol{g(x)}$ đạt cực tiểu tại $\boldsymbol{x_0}$)

$\boxed{\textbf{Giải 3.a)}}$

Ta có $\boldsymbol{x = 2y}$, với mọi $\boldsymbol{y \in \mathbb{R}}$.

Thay $\boldsymbol{x = 2y}$ vào $\boldsymbol{z(x, y)}$, ta được

$$\boldsymbol{g = (2y)^2 - 2y^2 + 2.(2y).y + 4.(2y) = 2y^2 + 12y.}$$

Ta có $\boldsymbol{g}$ xác định tại mọi $\boldsymbol{x \in \mathbb{R}}$.

Tìm cực trị của $\boldsymbol{g}$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có $\boldsymbol{g' = 4y + 12 = 0 \Leftrightarrow y = -3.}$

Bảng biến thiên

y	$-\infty$		-3		$+\infty$
$g'(y)$		$-$	0	$+$	
$g(y)$	$-\infty$	$\searrow$	$g(-3)$	$\nearrow$	$-\infty$

Do đó, $\boldsymbol{g}$ đạt cực tiểu tại $\boldsymbol{y = -3.}$ Với $\boldsymbol{y = -3,}$ ta tính được $\boldsymbol{x = 2.(-3) = -6.}$ Suy ra $\boldsymbol{z}$ đạt cực tiểu có điều kiện tại điểm $\boldsymbol{(-6, -3)}$ và giá trị cực tiểu là $\boldsymbol{z(-6, -3) = g(-3) = -18.}$

Giải 3.b)

Điều kiện $\boldsymbol{x + y = 16 \Leftrightarrow y = 16 - x,}$ với mọi $\boldsymbol{x \in \mathbb{R}.}$

Thay $\boldsymbol{y = 16 - x}$ vào $\boldsymbol{z(x, y)}$, ta được

$$\boldsymbol{g = 3x^2 + 5x(16 - x) = -2x^2 + 80x.}$$

Hàm $\boldsymbol{g}$ xác định tại mọi $\boldsymbol{x \in \mathbb{R}.}$

Tìm cực trị của g trên $\mathbb{R}$.

$g' = -4x + 80 = 0 \Leftrightarrow x = 20.$

Lập bảng biến thiên của g, ta nhận được g đạt cực đại tại $x = 20$. Với $x = 20$, ta tính được $y = 16 - 20 = -4$. Hàm z đạt cực đại có điều kiện tại điểm $(20, -4)$ và giá trị cực tiểu là $z(20, -4) = g(20) = \ldots$

Giải ý 3. c) và 3. d)

- **Phương pháp sử dụng hàm nhân tử Lagrange:**

Ý tưởng: Tìm cực trị của hàm $z = f(x, y)$ với điều kiện $g(x, y) = 0$ như sau:

B1) Viết lại điều kiện dưới dạng (nếu cần): $g(x, y) = 0$. Đặt $g = g(x, y)$.

B2) Lập hàm nhân tử Lagrange: $L = f(x, y) + \lambda . g(x, y)$.

B3) Tính L'_x, L'_y, L'_λ. Giải và tìm các nghiệm của hệ $\begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \\ L'_\lambda = 0 \end{cases}$

Nghiệm của hệ viết dưới dạng $(x, y, \lambda) = (x_0, y_0, \lambda_0)$

Chú ý: - Để giải hệ trên, ta rút x theo λ và y theo λ. Sau đó thế vào phương trình cuối, tìm được λ. Thay vào λ để tìm được x, y. Ta nhận được các nghiệm.

- Ghi nhớ $L'_\lambda = g(x, y)$. $L'_x = f'_x + \lambda.g'_x$. $L'_y = f'_y + \lambda.g'_y$.

B4) Tính g'_x, g'_y và $L''_{x^2}, L''_{xy}, L''_{y^2}$

B5) Kết luận:

Tại mỗi điểm $(x, y, \lambda) = (x_0, y_0, \lambda_0)$ (nghiệm của hệ).

- Tính g'_x, g'_y và $L''_{x^2}, L''_{xy}, L''_{y^2}$.

- Tính $d^2L = L''_{x^2}(dx)^2 + 2L''_{xy}dxdy + L''_{y^2}(dy)^2$,

với $(dx)^2 + (dy)^2 > 0$ và $g'_x.dx + g'_y.dy = 0$

- Từ $g'_x.dx + g'_y.dy = 0$, rút dy theo dx, được dạng $dy = m.dx$ (với $dx \neq 0$).

Thay $dy = m.dx$ vào d^2L, ta được d^2L chỉ phục thuộc dx. Xét dấu d^2L.

- Kết luận như sau:

+) Trong trường hợp $d^2L > 0$, với mọi $dx \neq 0$, ta kết luận: z đạt cực tiểu có điều kiện tại điểm (x_0, y_0), và tính giá trị cực tiểu $z(x_0, y_0)$.

+) Trong trường hợp $d^2L < 0$, với mọi $dx \neq 0$, ta kết luận: z đạt cực đại có điều kiện tại điểm (x_0, y_0), và tính giá trị cực đại $z(x_0, y_0)$.

Giải 3.c)

$z = \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b}$ (với $a, b > 0$) với điều kiện $x^2 + y^2 = 1$.

+) Viết lại điều kiện $x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 1 = 0$. Đặt $g = x^2 + y^2 - 1$.

+) Hàm nhân tử Lagrange $L = \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$.

+) $L'_x = \frac{1}{a} + 2\lambda x, \;\; L'_y = \frac{1}{b} + 2\lambda y, \;\; L'_\lambda = x^2 + y^2 - 1$.

Hệ $\begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \\ L'_\lambda = 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{a} + 2\lambda x = 0 \\ \frac{1}{b} + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2a\lambda} \\ y = -\frac{1}{2b\lambda} \\ \frac{1}{4a^2\lambda^2} + \frac{1}{4b^2\lambda^2} - 1 = 0 \end{cases}$

Ta có $\frac{1}{4a^2\lambda^2} + \frac{1}{4b^2\lambda^2} - 1 = 0 \leftrightarrow \lambda^2 = \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{4b^2} \leftrightarrow \lambda = \sqrt{\frac{1}{4a^2} + \frac{1}{4b^2}}$ hoặc $\lambda = -\sqrt{\frac{1}{4a^2} + \frac{1}{4b^2}}$

- Với $\lambda=\sqrt{\frac{1}{4a^2}+\frac{1}{4b^2}}$, ta tính được $x=-\frac{1}{2a.\sqrt{\frac{1}{4a^2}+\frac{1}{4b^2}}}, y=-\frac{1}{2b.\sqrt{\frac{1}{4a^2}+\frac{1}{4b^2}}}$. Ta được nghiệm là $(x,y,\lambda)=\left(-\frac{1}{2a.\sqrt{\frac{1}{4a^2}+\frac{1}{4b^2}}}, -\frac{1}{2b.\sqrt{\frac{1}{4a^2}+\frac{1}{4b^2}}}, \sqrt{\frac{1}{4a^2}+\frac{1}{4b^2}}\right)$.

- Với $\lambda=-\sqrt{\frac{1}{4a^2}+\frac{1}{4b^2}}$, ta tính được $x=\frac{1}{2a.\sqrt{\frac{1}{4a^2}+\frac{1}{4b^2}}}, y=\frac{1}{2b.\sqrt{\frac{1}{4a^2}+\frac{1}{4b^2}}}$. Ta được nghiệm là $(x,y,\lambda)=\left(\frac{1}{2a.\sqrt{\frac{1}{4a^2}+\frac{1}{4b^2}}}, \frac{1}{2b.\sqrt{\frac{1}{4a^2}+\frac{1}{4b^2}}}, -\sqrt{\frac{1}{4a^2}+\frac{1}{4b^2}}\right)$.

+) $g'_x=2x,\ g'_y=2y$. $L''_{x^2}=2\lambda,\ L''_{y^2}=2\lambda$ và $L''_{xy}=0$.

+) Tại $(x,y,\lambda)=\left(-\frac{1}{2a.\sqrt{\frac{1}{4a^2}+\frac{1}{4b^2}}}, -\frac{1}{2b.\sqrt{\frac{1}{4a^2}+\frac{1}{4b^2}}}, \sqrt{\frac{1}{4a^2}+\frac{1}{4b^2}}\right)$. Ta có $g'_x=-\frac{2}{2a.\sqrt{\frac{1}{4a^2}+\frac{1}{4b^2}}}, g'_y=-\frac{2}{2b.\sqrt{\frac{1}{4a^2}+\frac{1}{4b^2}}}$; $L''_{x^2}=2\sqrt{\frac{1}{4a^2}+\frac{1}{4b^2}}, L''_{y^2}=2\sqrt{\frac{1}{4a^2}+\frac{1}{4b^2}}$ và $L''_{xy}=0$.

Suy ra $d^2L=L''_{x^2}(dx)^2+2L''_{xy}dxdy+L''_{y^2}(dy)^2$

$$=2\sqrt{\frac{1}{4a^2}+\frac{1}{4b^2}}.(dx)^2+2\sqrt{\frac{1}{4a^2}+\frac{1}{4b^2}}.(dy)^2>0,$$

với mọi dx, dy thỏa mãn $(dx)^2+(dy)^2>0$ và $g'_x.dx+g'_y.dy=0$ hay $-\frac{2}{2b.\sqrt{\frac{1}{4a^2}+\frac{1}{4b^2}}}.dx-\frac{2}{2b.\sqrt{\frac{1}{4a^2}+\frac{1}{4b^2}}}.dy=0$

Do đó z đạt cực tiểu có điều kiện tại $\left(-\frac{1}{2a.\sqrt{\frac{1}{4a^2}+\frac{1}{4b^2}}},-\frac{1}{2b.\sqrt{\frac{1}{4a^2}+\frac{1}{4b^2}}}\right)$ và tính giá trị cực tiểu của z.

+) Tại $(x,y,\lambda)=\left(\frac{1}{2a.\sqrt{\frac{1}{4a^2}+\frac{1}{4b^2}}},\frac{1}{2b.\sqrt{\frac{1}{4a^2}+\frac{1}{4b^2}}},-\sqrt{\frac{1}{4a^2}+\frac{1}{4b^2}}\right)$.

Ta có $g'_x=\frac{2}{2a.\sqrt{\frac{1}{4a^2}+\frac{1}{4b^2}}}$, $g'_y=\frac{2}{2b.\sqrt{\frac{1}{4a^2}+\frac{1}{4b^2}}}$; $L''_{x^2}=-2\sqrt{\frac{1}{4a^2}+\frac{1}{4b^2}}$, $L''_{y^2}=-2\sqrt{\frac{1}{4a^2}+\frac{1}{4b^2}}$ và $L''_{xy}=0$.

Suy ra $d^2L=L''_{x^2}(dx)^2+2L''_{xy}dxdy+L''_{y^2}(dy)^2$

$$=-2\sqrt{\frac{1}{4a^2}+\frac{1}{4b^2}}.(dx)^2-2\sqrt{\frac{1}{4a^2}+\frac{1}{4b^2}}.(dy)^2<0,$$

với mọi dx, dy thỏa mãn $(dx)^2+(dy)^2>0$ và $g'_x.dx+g'_y.dy=0$ hay

$\frac{2}{2b.\sqrt{\frac{1}{4a^2}+\frac{1}{4b^2}}}.dx + \frac{2}{2b.\sqrt{\frac{1}{4a^2}+\frac{1}{4b^2}}}.dy = 0$

Do đó z đạt cực đại có điều kiện tại $\left(\frac{1}{2a.\sqrt{\frac{1}{4a^2}+\frac{1}{4b^2}}}, \frac{1}{2b.\sqrt{\frac{1}{4a^2}+\frac{1}{4b^2}}}\right)$ và tính giá trị cực đại của z.

Giải 3.d)

$z = 2x + 9y + 1$ với điều kiện $x^2 + 3y^2 = 31$.

+) Viết lại điều kiện $x^2 + 3y^2 = 31 \Leftrightarrow x^2 + 3y^2 - 31 = 0$. Đặt $g = x^2 + 3y^2 - 31$.

+) Hàm nhân tử Lagrange $L = 2x + 9y + 1 + \lambda(x^2 + 3y^2 - 31)$.

+) $L'_x = 2 + 2\lambda x,\ \ L'_y = 9 + 6\lambda y,\ \ L'_\lambda = x^2 + 3y^2 - 31$.

Hệ $\begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \\ L'_\lambda = 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} 2 + 2\lambda x = 0 \\ 9 + 6\lambda y = 0 \\ x^2 + 3y^2 - 31 = 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{\lambda} \\ y = -\frac{3}{2\lambda} \\ \frac{1}{\lambda^2} + \frac{27}{4\lambda^2} - 31 = 0 \end{cases}$

Ta có $\frac{1}{\lambda^2} + \frac{27}{4\lambda^2} - 31 = 0 \leftrightarrow \lambda^2 = \frac{1}{4} \leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2}$ hoặc $\lambda = -\frac{1}{2}$

- Với $\lambda = \frac{1}{2}$, ta tính được $x = -2, y = -3$. Ta được nghiệm là $(x, y, \lambda) = \left(-2, -3, \frac{1}{2}\right)$.

- Với $\lambda = -\frac{1}{2}$, ta tính được $x = 2, y = 3$. Ta được nghiệm là $(x, y, \lambda) = \left(2, 3, -\frac{1}{2}\right)$.

+) $g'_x = 2x,\ g'_y = 6y$. $L''_{x^2} = 2\lambda,\ \ L''_{y^2} = 6\lambda$ và $L''_{xy} = 0$.

+) Tại $(x, y, \lambda) = \left(-2, -3, \frac{1}{2}\right)$. Ta có $g'_x = -4, g'_y = -18$; $L''_{x^2} = 1, L''_{y^2} = 3$ và $L''_{xy} = 0$.

Suy ra $d^2L = L''_{x^2}(dx)^2 + 2L''_{xy}dxdy + L''_{y^2}(dy)^2$

$$= (dx)^2 + 3.(dy)^2 > 0,$$

với mọi dx, dy thỏa mãn $(dx)^2 + (dy)^2 > 0$ và $g'_x.dx + g'_y.dy = 0$ hay $-4.dx - 18.dy = 0$

Do đó z đạt cực tiểu có điều kiện tại $(-2, -3)$ và tính giá trị cực tiểu của z.

+) Tại $(x, y, \lambda) = \left(2, 3, -\frac{1}{2}\right)$. Ta có $g'_x = 4, g'_y = 18$; $L''_{x^2} = -1, L''_{y^2} = -3$ và $L''_{xy} = 0$.

Suy ra $d^2L = L''_{x^2}(dx)^2 + 2L''_{xy}dxdy + L''_{y^2}(dy)^2$

$$= -(dx)^2 - 3.(dy)^2 < 0,$$

với mọi dx, dy thỏa mãn $(dx)^2 + (dy)^2 > 0$ và $g'_x.dx + g'_y.dy = 0$ hay

$\mathbf{4.}\boldsymbol{dx} + \mathbf{18.}\boldsymbol{dy} = \mathbf{0}$

Do đó z đạt cực đại có điều kiện tại $(2, 3)$ và tính giá trị cực đại của z.

BT 2.

Bài 6. Giải các phương trình vi phân cấp 1 sau:

a) $y' + xy = x$;

b) $(1 + x^2)y' + xy = 1$ với $y|_{x=0} = 0$;

c) $y' - \frac{y}{xlnx} = xlnx$ với $y|_{x=e} = \frac{e^2}{2}$;

d) $y' + 2xy = xe^{-x^2}$;

Hướng dẫn:

Ghi nhớ kết quả: Phương trình vi phân tuyến tính cấp 1:

$$y' + p.y = q,$$

với $p = p(x), q = q(x)$.

Cách giải:

+) Xác định p và q.

+) **Tính $A = \int p \, dx$** (chỉ xác định hàm gốc. Trong trường hợp tích phân ra $\ln|A|$, để tiện thì ta có thể bỏ dấu trị tuyệt đối và viết $\ln A$)

+) **Tính $B = \int q.e^A \, dx$** (chỉ xác định hàm gốc. Trong trường hợp tích phân ra $\ln|A|$, thì vẫn để nguyên)

+) **Nghiệm tổng quát là**

$$y = e^{-A}(B + C),$$

với C là số thực bất kỳ.

Ghi nhớ công thức: $e^{\ln A} = A, e^{-\ln A} = \frac{1}{A}$, $m \ln A = \ln(A^m)$, $e^{m.\ln A} = A^m$, $e^{-m.\ln A} = \frac{1}{A^m}$

Chú ý 1: **Phương trình vi phân dạng**

$$\boldsymbol{a.y' + b.y + c = 0,}$$

với $\boldsymbol{a = a(x), b = b(x), c = c(x).}$

Cách giải: **Chuyển phương trình về dạng**

$$\boldsymbol{y' + \frac{b}{a}.y = -\frac{c}{a}.}$$

Ta có $\boldsymbol{p = \frac{b}{a}, q = -\frac{c}{a}}$**. Áp dụng quy trình giải cho phương trình vi phân** $\boldsymbol{y' + p.y = q}$ **ở trên.**

Chú ý 2: **Tìm nghiệm của hương trình vi phân dạng**

$$\boldsymbol{a.y' + b.y + c = 0,}$$

biết rằng $\boldsymbol{y(x_0) = y_0.}$

Cách giải:

+) Tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân, dạng là $y = f(x, C)$ với C là hằng số.

+) Tính $y(x_0) = f(x_0, C) = y_0$. Tìm được $C = C_0$.

Nghiệm là $y = f(x, C_0)$.

$\boxed{\text{Giải 6.a)}}$

Phương trình vi phân: $y' + xy = x$.

Ta có $p = x, q = x$.

$A = \int p\ dx = \int x\ dx = \dfrac{x^2}{2}$.

$B = \int q.e^A\ dx = \int xe^{\frac{x^2}{2}}\ dx = \int e^{\frac{x^2}{2}}\ d\left(\dfrac{x^2}{2}\right) = e^{\frac{x^2}{2}}$ (Chú ý: tích phân có thể được tính bằng cách đổi biến $t = \frac{x^2}{2}$)

Nghiệm tổng quát là

$$y = e^{-\frac{x^2}{2}}\left(C + e^{\frac{x^2}{2}}\right) = Ce^{-\frac{x^2}{2}} + 1,$$

với mọi $C \in \mathbb{R}$.

Giải 6.b)

Phương trình vi phân: $(1+x^2)y' + xy = 1$ với $y|_{x=0} = 0$ (hoặc viết là $y(0) = 0$).

+) Tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân.

$(1+x^2)y' + xy = 1 \Leftrightarrow y' + \frac{x}{1+x^2}y = \frac{1}{x^2+1}$

Ta có $p = \frac{x}{1+x^2}, q = \frac{1}{1+x^2}$.

$A = \displaystyle\int p\, dx = \int \frac{x}{1+x^2}\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x^2}\, d(x^2+1) = \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$. (Chú ý: Tích phân có thể tính bằng cách đổi biến $t = x^2+1$).

$$B=\int q.e^{A}\ dx=\int \frac{1}{1+x^2}.e^{\frac{1}{2}\ln(1+x^2)}\ dx=\int \frac{1}{1+x^2}.\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}}\ dx$$
$$=\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\ dx=\ln|x+\sqrt{1+x^2}|.$$

Ghi nhớ công thức: $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+b}}=\ln|x+\sqrt{x^2+b}|$

Nghiệm tổng quát là

$$y=e^{-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)}\left(C+\ln|x+\sqrt{1+x^2}|\right)=\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}.\left(C+\ln|x+\sqrt{1+x^2}|\right)$$
$$=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.\left(C+\ln|x+\sqrt{1+x^2}|\right),$$

với mọi $C\in\mathbb{R}$.

+) Nghiệm của phương trình thỏa mãn $y(0)=0$.

Ta có $y=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.\left(C+\ln|x+\sqrt{1+x^2}|\right)$, suy ra $y(0)=C$. Do đó $C=0$.

Vậy nghiệm là $y=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.\ln|x+\sqrt{1+x^2}|$.

$\boxed{\textbf{Giải 6.c)}}$

Phương trình vi phân: $y' - \frac{y}{x \ln x} = x \ln x$ **với** $y|_{x=e} = \frac{e^2}{2}$ **(hoặc viết là** $y(e) = \frac{e^2}{2}$**).**

(Chú ý: Viết phương trình như sau: $y' + \left(-\frac{1}{x \ln x}\right).y = x \ln x$**)**

+) Tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân. Từ phương trình, ta có điều kiện của x **là** $x > 0$**.**

Ta có $p = -\frac{1}{x \ln x}, q = x \ln x$**.**

$$A = \int p\, dx = \int \left(-\frac{1}{x \ln x}\right)\, dx = -\int \left(\frac{1}{\ln x}\right)\, d(\ln x) = -\ln(\ln x).$$

(Chú ý: Tích phân có thể tính bằng cách đổi biến $t = \ln x$**).**

$$B = \int q.e^{A}\, dx = \int x \ln x.e^{-\ln(\ln x)}\, dx = \int x \ln x.\frac{1}{\ln x}\, dx = \int x\, dx = \frac{x^2}{2}$$

Nghiệm tổng quát là

$$y = e^{\ln(\ln x)}\left(C + \frac{x^2}{2}\right) = \ln x.\left(C + \frac{x^2}{2}\right),$$

với mọi $C \in \mathbb{R}$.

+) Nghiệm của phương trình thỏa mãn $y(e) = \frac{e^2}{2}$.

Ta có $y = \ln x.\left(C + \frac{x^2}{2}\right)$,

suy ra $y(e) = \ln e.\left(C + \frac{e^2}{2}\right) = C + \frac{e^2}{2} = \frac{e^2}{2}$. Do đó $C = 0$.

Vậy nghiệm là $y = \frac{e^2}{2}.\ln x$.

Giải 6.d)

Phương trình vi phân: $y' + 2xy = xe^{-x^2}$.

Ta có $p = 2x, q = xe^{-x^2}$.

$\boldsymbol{A = \int p \, dx = \int 2x \, dx = x^2.}$

$\boldsymbol{B = \int q.e^A \, dx = \int xe^{-x^2}.e^{x^2} \, dx = \int x \, dx = \frac{x^2}{2}}$

Nghiệm tổng quát là

$$\boldsymbol{y = e^{-x^2}\left(C + \frac{x^2}{2}\right),}$$

với mọi $\boldsymbol{C \in \mathbb{R}}$.

BT 3.

Bài 7. Giải các phương trình vi phân cấp 2 sau:

a) $y'' - 6y' + 9y = x^2$.

b) $y'' - 9y' + 20y = x^2e^{4x}$;

c) $y'' + y' = 4x + 3$ với $y|_{x=0} = 0, y'|_{x=0} = \frac{-2}{3}$;

d) $y'' - 2y' + 3y = e^{-x}cosx$;

Hướng dẫn:

Ghi nhớ một số kết quả sau:

• Phương trình vi phân tuyến tính cấp hai với hệ số hằng có dạng:

$$\boldsymbol{a.y'' + b.y' + c.y = f(x),}$$

trong đó a, b, c là các số thực và $a \neq 0$.

+) **Phương trình vi phân thuần nhất (tương ứng) có dạng:**

$$a.y'' + b.y' + c.y = 0.$$

+) **Nghiệm tổng quát có dạng $y = h(x, C_1, C_2)$ với C_1, C_2 là các số thực bất kỳ.**

+) **Quy trình tìm nghiệm có điều kiện đầu: Tìm nghiệm $y = y(x)$ thỏa mãn**

$$a.y'' + b.y' + c.y = f(x),$$

biết rằng $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1$.

Chú ý: Các điều kiện đầu có thể dưới dạng: $y|_{x=x_0} = y_0$; $y'|_{x=x_0} = y_1$.

Quy trình tìm:

- **Bước 1: Tìm nghiệm tổng quát, dạng là $y = h(x, C_1, C_2)$, với C_1, C_2 là**

các số thực bất kỳ.

- Bước 2: Tính $y(x_0) = h(x_0, C_1, C_2) = y_0$.

Tính $y' = h'(x, C_1, C_2)$. Sau đó tính $y'(x_0) = h'(x_0, C_1, C_2) = y_1$.

Ta nhận được hệ $\begin{cases} h(x_0, C_1, C_2) = y_0 \\ h'(x_0, C_1, C_2) = y_1 \end{cases}$

Giải hệ, tìm được $C_1 = A, C_2 = B$, ta thay chúng vào nghiệm tổng quát để nhận được nghiệm.

Nghiệm là $y = h(x, A, B)$.

• Cách giải phương trình vi phân (tuyến tính cấp hai) thuần nhất: $a.y'' + b.y' + c.y = 0$.

- Phương trình đặc trưng: $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$. Giải phương trình, tìm được

nghiệm $\boldsymbol{\lambda = \lambda_1, \lambda = \lambda_2}$

Chú ý: Để lập phương trình đặc trưng, cần ghi nhớ: thay $\boldsymbol{y''}$ bởi $\boldsymbol{\lambda^2}$, thay $\boldsymbol{y'}$ bởi $\boldsymbol{\lambda}$, thay $\boldsymbol{y}$ bởi 1.

- Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân thuần nhất

Trường hợp 1 (phương trình đặc trưng có hai nghiệm thực phân biệt, tức $\boldsymbol{\lambda_1 \neq \lambda_2}$ -là các số thực khác nhau)

$$\boldsymbol{y = C_1.e^{\lambda_1 x} + C_2.e^{\lambda_2 x},}$$

với $\boldsymbol{C_1, C_2}$ là các số thực bất kỳ.

Trường hợp 2 (phương trình đặc trưng có nghiệm kép, tức $\boldsymbol{\lambda_1 = \lambda_2}$)

$$\boldsymbol{y = C_1.e^{\lambda_1 x} + C_2.x.e^{\lambda_1 x} = e^{\lambda_1 x}.(C_1 + C_2 x),}$$

với $\boldsymbol{C_1, C_2}$ là các số thực bất kỳ.

Trường hợp 3 (phương trình đặc trưng có hai nghiệm phức): Ta viết $\boldsymbol{\lambda_1 = A + B.i, \lambda_2 = A - B.i}$ *(với* $\boldsymbol{B > 0}$*)*

$$\boldsymbol{y = e^{Ax}\left(C_1.\sin Bx + C_2.\cos Bx\right) = C_1.e^{Ax}.\sin Bx + C_2.e^{Ax}.\cos Bx,}$$

với $\boldsymbol{C_1, C_2}$ là các số thực bất kỳ.

• Tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân tuyến tính cấp hai: $\boldsymbol{a.y'' + b.y' + c.y = f(x)}$.

Ghi nhớ: **$\boldsymbol{y = y_1 + y_r}$, trong đó $\boldsymbol{y_1}$ là nghiệm tổng quát của phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất (tương ứng); $\boldsymbol{y_r}$ là một nghiệm riêng của phương trình đã cho.**

Quy trình cụ thể:

- Xác định phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất: $\boldsymbol{a.y'' + b.y' + c.y =}$

0.

- Xác định phương trình đặc trưng: $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$. Giải phương trình.

- Đưa ra nghiệm tổng quát của phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất, ký hiệu y_1.

- Tìm nghiệm riêng y_r. (Cách tìm xem bên dưới)

- Kết luận nghiệm tổng quát là $y = y_1 + y_r$.

Ý tưởng tìm nghiệm riêng $\boldsymbol{y_r}$

Ý tưởng chung: Từ dạng của $f(x)$, kết hợp với các nghiệm của phương trình đặc trưng, ta dự đoán dạng của y_r. Khi có dạng của y_r, ta tính y_r', y_r''. Thay y_r, y_r', y_r'' vào phương trình ban đầu, ta được

$$a.y_r'' + b.y_r' + c.y_r = f(x).$$

Từ đẳng thức trên, ta tìm các hệ số chưa biết của $\boldsymbol{y_r}$ *và ta nhận được nghiệm riêng* $\boldsymbol{y_r}$.

Chú ý về dạng các đa thức một ẩn x:

Đa thức bậc 0 : $p = A$, với A là hằng số.

Đa thức bậc 1 : $p = A.x + B$, với A, B là các hằng số.

Đa thức bậc 2 : $p = A.x^2 + B.x + C$, với A, B, C là các hằng số.

Đa thức bậc n: $p = a_0 + a_1.x + \ldots + a_n.x^n$

Ghi nhớ dự đoán dạng của y_r trong hai trường sau:

Trường hợp 1: $f(x) = e^{\alpha x}.P(x)$, với $P(x)$ là đa thức đã biết.

Xét số α (hệ số của x trong mũ của hàm $e^{\alpha x}$. Nếu không có $e^{\alpha x}$ thì $\alpha = 0$).

+) Số α không là nghiệm phương trình đặc trưng:

$$y_r = e^{\alpha x}.Q(x),$$

trong đó $Q(x)$ là đa thức ẩn x có bậc n, với $n =$ bậc của $P(x)$.

+) Số α là một nghiệm trong hai nghiệm thực phân biệt của phương trình đặc trưng (hay α là một nghiệm đơn):

$$y_r = x.e^{\alpha x}.Q(x),$$

trong đó $Q(x)$ là đa thức ẩn x có bậc n, với $n =$ bậc của $P(x)$.

+) Số α là nghiệm kép của phương trình đặc trưng:

$$y_r = x^2.e^{\alpha x}.Q(x),$$

trong đó $Q(x)$ là đa thức ẩn x có bậc n, với $n =$ bậc của $P(x)$.

Trường hợp 2: $f(x) = e^{\alpha x}\left[P(x).\sin\beta x + Q(x).\cos\beta x\right]$, với $P(x), Q(x)$ là các đa thức đã biết.

Xét số phức $\alpha \pm \beta.i$ (α là hệ số của x trong mũ của hàm $e^{\alpha x}$, β là hệ số của x trong biểu thức của $\sin\beta x$ hoặc $\cos\beta x$. Nếu không có $e^{\alpha x}$ thì $\alpha = 0$).

+) $\alpha \pm \beta.i$ không là nghiệm phương trình đặc trưng:

$$y_r = e^{\alpha x}.\left[H(x).\sin\beta x + G(x).\cos\beta x\right],$$

trong đó $H(x), G(x)$ là hai đa thức ẩn x có bậc n,

với $n = \max(\text{bậc của } P(x),\ \text{bậc của } Q(x))$.

+) $\alpha \pm \beta.i$ là nghiệm phương trình đặc trưng:

$$y_r = x.e^{\alpha x}.\left[H(x).\sin\beta x + G(x).\cos\beta x\right],$$

trong đó $H(x), G(x)$ là hai đa thức ẩn x có bậc n,

với $n = \max(\text{bậc của } P(x),\ \text{bậc của } Q(x))$.

$\boxed{\text{Giải ý 7.a}}$

$y'' - 6y' + 9y = x^2$.

- Phương trình vi phân thuần nhất $y'' - 6y' + 9y = 0$.

Phương trình đặc trưng: $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 3$.

Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân thuần nhất $y_1 = e^{3x}(C_1 + C_2.x)$, với C_1, C_2 là các số thực bất kỳ.

- Nghiệm riêng y_r.

Ta thấy $f(x) = x^2 = e^{0.x}.x^2 = e^{\alpha.x}.P(x)$. Suy ra $\alpha = 0$ và $P(x) = x^2$ có bậc 2. Số $\alpha = 0$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng. Ta dự đoán dạng là

$$y_r = e^{\alpha.x}(a.x^2 + b.x + c) = a.x^2 + b.x + c,$$

với a, b, c là các số cần tìm.

Ta có $y_r' = 2a.x + b, y_r'' = 2a$. Thay y_r, y_r', y_r'' vào phương trình, ta được

$y_r'' - 6y_r' + 9y_r = x^2 \Rightarrow 2a - 6(2a.x + b) + 9(a.x^2 + b.x + c) = x^2$, với mọi x.

$\Rightarrow (9a - 1).x^2 + (9b - 12a)x + 2a - 6b + 9c = 0$, với mọi x.

$$\Rightarrow \begin{cases} 9a - 1 = 0 \\ 9b - 12a = 0 \\ 2a - 6b + 9c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{9} \\ b = \frac{4}{27} \\ c = \frac{2}{27} \end{cases}$$

Do đó nghiệm riêng là

$$y_r = \frac{1}{9}x^2 + \frac{4}{27}x + \frac{2}{27}.$$

- Nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = y_1 + y_r = e^{3x}(C_1 + C_2.x) + \frac{1}{9}x^2 + \frac{4}{27}x + \frac{2}{27},$$

với C_1, C_2 là các số thực bất kỳ.

Giải ý 7.b

$y'' - 9y' + 20y = x^2 e^{4x}.$

- Phương trình vi phân thuần nhất $y'' - 9y' + 20y = 0.$

Phương trình đặc trưng: $\lambda^2 - 9\lambda + 20 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 4$ hoặc $\lambda = 5$

Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân thuần nhất $y_1 = C_1.e^{4x} + C_2.e^{5x}$, với C_1, C_2 là các số thực bất kỳ.

- Nghiệm riêng y_r.

Ta thấy $f(x) = e^{4.x}.x^2 = e^{\alpha.x}.P(x)$. Suy ra $\alpha = 4$ và $P(x) = x^2$ có bậc 2.

Số $\alpha = 4$ là nghiệm đơn của phương trình đặc trưng. Ta dự đoán dạng là

$$y_r = x.e^{\alpha.x}(a.x^2 + b.x + c) = e^{4x}(a.x^3 + b.x^2 + cx),$$

với a, b, c là các số cần tìm.

Ta có $y_r' = 4e^{4x}(a.x^3 + b.x^2 + cx) + e^{4x}(3a.x^2 + 2b.x + c)$,

$y_r'' = 16e^{4x}(a.x^3 + b.x^2 + cx) + 8e^{4x}(3a.x^2 + 2b.x + c) + e^{4x}(6a.x + 2b)$.

Thay y_r, y_r', y_r'' vào phương trình, ta được

$$y_r'' - 9y_r' + 20y_r = x^2e^{4x}$$

$\Rightarrow e^{4x}\left[-3a.x^2 + (6a - 2b).x + 2b - c\right] = x^2e^{4x}$, với mọi x.

$\Rightarrow (-3a - 1).x^2 + (6a - 2b).x + 2b - c = 0$, với mọi x.

$$\Rightarrow \begin{cases} -3a - 1 = 0 \\ 6a - 2b = 0 \\ 2b - c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{3} \\ b = -1 \\ c = -2 \end{cases}$$

Do đó nghiệm riêng là

$$y_r = e^{4x}\left(-\frac{1}{3}.x^3 - x^2 - 2x\right).$$

- Nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$y = y_1 + y_r = C_1.e^{4x} + C_2.e^{5x} + e^{4x}\left(-\frac{1}{3}.x^3 - x^2 - 2x\right)$, **với** C_1, C_2 **là các số thực bất kỳ.**

Giải ý 7.c

$y'' + y' = 4x + 3$ **với** $y|_{x=0} = 0$, $y'|_{x=0} = -\frac{2}{3}$ **(hay viết** $y(0) = 0, y'(0) = -\frac{2}{3}$**)**

- Phương trình vi phân thuần nhất $y'' + y' = 0$.

Phương trình đặc trưng: $\lambda^2 + \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$ hoặc $\lambda = -1$

Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân thuần nhất $y_1 = C_1.e^{0.x} + C_2.e^{(-1).x} = C_1 + C_2.e^{-x}$, với C_1, C_2 là các số thực bất kỳ.

- Nghiệm riêng y_r.

Ta thấy $f(x) = 4x + 3 = e^{0.x}.(4x + 3) = e^{\alpha.x}.P(x)$. Suy ra $\alpha = 0$ và $P(x) = 4x + 3$ có bậc 1. Số $\alpha = 0$ là nghiệm đơn của phương trình đặc trưng. Ta dự đoán dạng là

$$y_r = x.e^{\alpha.x}(a.x + b) = a.x^2 + b.x,$$

với a, b là các số cần tìm.

Ta có $y_r' = 2a.x + b, y_r'' = 2a$. Thay y_r, y_r', y_r'' vào phương trình, ta được

$$y_r'' + y_r' = 4x + 3 \Rightarrow 2a + (2a.x + b) = 4x + 3, \text{ với mọi } x.$$

$\Rightarrow (2a - 4).x + 2a + b - 3 = 0$, với mọi x.

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a - 4 = 0 \\ 2a + b - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \end{cases}$$

Do đó nghiệm riêng là

$$y_r = 2x^2 - x.$$

- Nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = y_1 + y_r = C_1 + C_2.e^{-x} + 2x^2 - x,$$

với C_1, C_2 là các số thực bất kỳ.

- Nghiệm thỏa mãn $y(0) = 0, y'(0) = -\frac{2}{3}$.

Ta có $y = C_1 + C_2.e^{-x} + 2x^2 - x$.

$y(0) = C_1 + C_2 = 0$.

$y' = -C_2.e^{-x} + 4x - 1$. Suy ra $y'(0) = -C_2 - 1 = -\frac{2}{3}$.

Ta có hệ $\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ -C_2 - 1 = -\frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{1}{3} \\ C_2 = -\frac{1}{3} \end{cases}$

Nghiệm là $y = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}.e^{-x} + 2x^2 - x$.

Giải ý 7.d

$y'' - 2y' + 3y = e^{-x}.\cos x$.

- Phương trình vi phân thuần nhất $y'' - 2y' + 3y = 0$.

Phương trình đặc trưng: $\lambda^2 - 2\lambda + 3 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1 + i.\sqrt{2}$ hoặc $\lambda = 1 - i.\sqrt{2}$.

Chọn $A = \sqrt{2}, B = \sqrt{2}$.

Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân thuần nhất

$y_1 = e^{\sqrt{2}.x}(C_1 \sin(\sqrt{2}.x) + C_2 . \cos(\sqrt{2}.x)$, **với** C_1, C_2 **là các số thực bất kỳ.**

- Nghiệm riêng y_r.

Ta thấy $f(x) = e^{-x} . \cos x = e^{\alpha.x} [P(x) . \sin \beta x + Q(x) . \cos \beta x]$. **Suy ra** $\alpha = -1, \beta = 1$ **và** $P(x) = 0$ **có bậc 0,** $Q(x) = 1$ **có bậc 0. Các số phức** $\alpha \pm \beta.i = -1 \pm i$ **không là nghiệm của phương trình đặc trưng. Ta dự đoán dạng là**

$$y_r = e^{\alpha.x}(a . \sin \beta x + b . \cos \beta x) = e^{-x}(a . \sin x + b . \cos x),$$

với a, b **là các số cần tìm.**

Ta có $y_r' = -e^{-x}(a . \sin x + b . \cos x) + e^{-x}(a . \cos x - b . \sin x)$,

$y_r'' = -2e^{-x}(a.\cos x - b.\sin x)$. Thay y_r, y_r', y_r'' vào phương trình, ta được

$$y_r'' - 2y_r' + 3y_r = e^{-x}.\cos x$$

$\Rightarrow e^{-x}\left[(5a+4b)\sin x + (5b-4a)\cos x\right] = e^{-x}.\cos x$, với mọi x.

$\Rightarrow (5a+4b)\sin x + (5b-4a)\cos x = \cos x$, với mọi x.

$\Rightarrow \begin{cases} 5a+4b=0 \\ 5b-4a=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{4}{41} \\ b = \frac{5}{41} \end{cases}$

Do đó nghiệm riêng là

$$y_r = e^{-x}\left(-\frac{4}{41}.\sin x + \frac{5}{41}.\cos x\right).$$

- Nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$y = y_1 + y_r = e^{\sqrt{2}.x}(C_1\sin(\sqrt{2}.x) + C_2.\cos(\sqrt{2}.x) + e^{-x}\left(-\frac{4}{41}.\sin x + \frac{5}{41}.\cos x\right),$

với C_1, C_2 là các số thực bất kỳ.