BÀI GIẢNG TOÁN GIẢI TÍCH

HÀM SỐ VÀ DÃY SỐ

I. HÀM SỐ

1. Các khái niệm cơ bản.

• **Khái niệm hàm số:** Cho D và E là hai tập con của $\mathbb{R}$.

Một hàm số f từ D đến E là một quy tắc cho tương ứng mỗi số thực $x \in D$ thành một số thực duy nhất y thuộc E. Khi đó, ta viết $y = f(x)$ và y được gọi là giá trị của f tại x; tập D được gọi là tập xác định của f; x được gọi là biến độc lập và $y = f(x)$ phụ thuộc vào biến x.

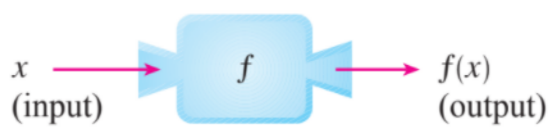
Để thuận tiện, chúng ta luôn ký tập xác định của hàm f bởi D_f.

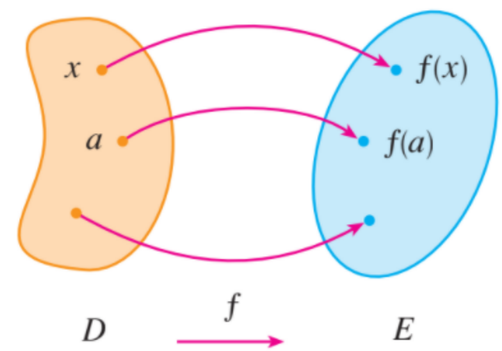
Sơ đồ tắt của hàm số f từ D đến E:

$$f : D \to E$$

$$x \mapsto f(x)$$

Biểu đồ máy và biểu đồ mũi tên cho f.





Ví dụ: Các hàm số quen thuộc như: $y = x^n, y = a^x, y = \log_a x, y = \sin x, \ldots$

• **Khái niệm ánh xạ (khái niệm mở rộng của hàm số):** Cho X và Y là hai tập hợp khác rỗng bất kỳ.

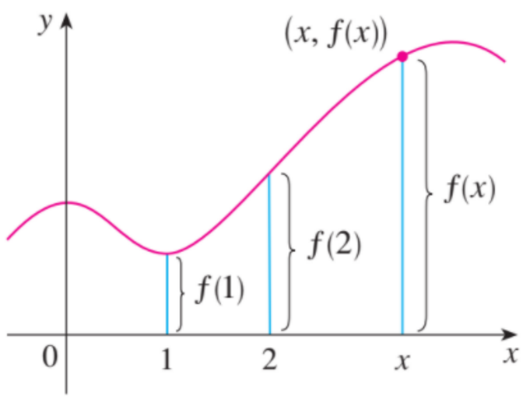
Một ánh xạ f từ X đến Y là một quy tắc cho tương ứng mỗi phần tử x của X thành một phần tử duy nhất y của Y. Khi đó, ta viết $y = f(x)$ và y được gọi là **ảnh của x qua ánh xạ f.**

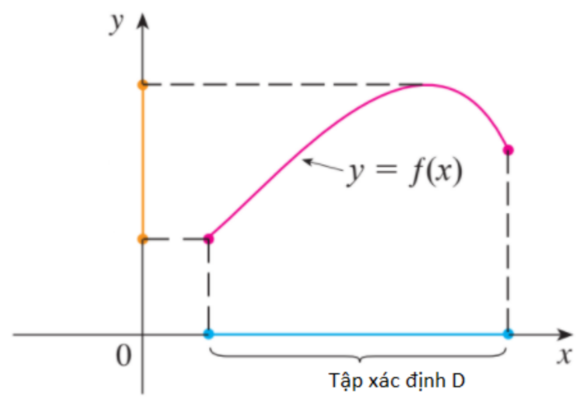
Người ta cũng thường kí hiệu ánh xạ f từ X đến Y như sau:

$$\begin{aligned} f : X &\to Y \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

Ta gọi X là **tập xác định hay tập nguồn** của ánh xạ f, Y gọi là **tập đích** của ánh xạ f, kí hiệu " $\mapsto$" chỉ quy tắc thực hiện ánh xạ.

• **Đồ thị của hàm f với tập xác định D là tập hợp các điểm $(x, f(x))$, với mọi $x \in D$, trong mặt phẳng tọa độ (Oxy).**

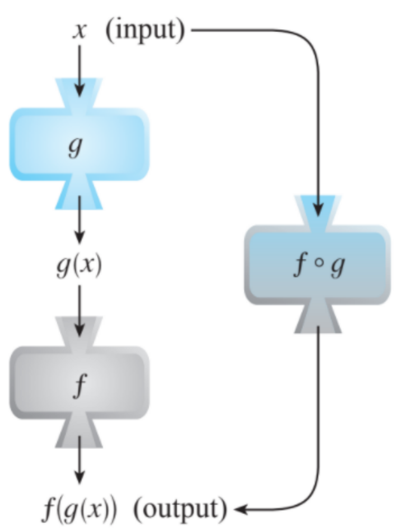




• **Hàm số hợp.** Cho hai hàm số f và g, **hàm số hợp của f với g**, ký hiệu bởi $f \circ g$, được xác định như sau $(f \circ g)(x) = f[g(x)]$.

Lưu ý: Tập xác định của $f \circ g$ là $\{x \in \mathbb{R} | x \in D_g \text{ và } g(x) \in D_f\}$.

Biểu đồ máy cho hàm hợp $f \circ g$ như hình sau:

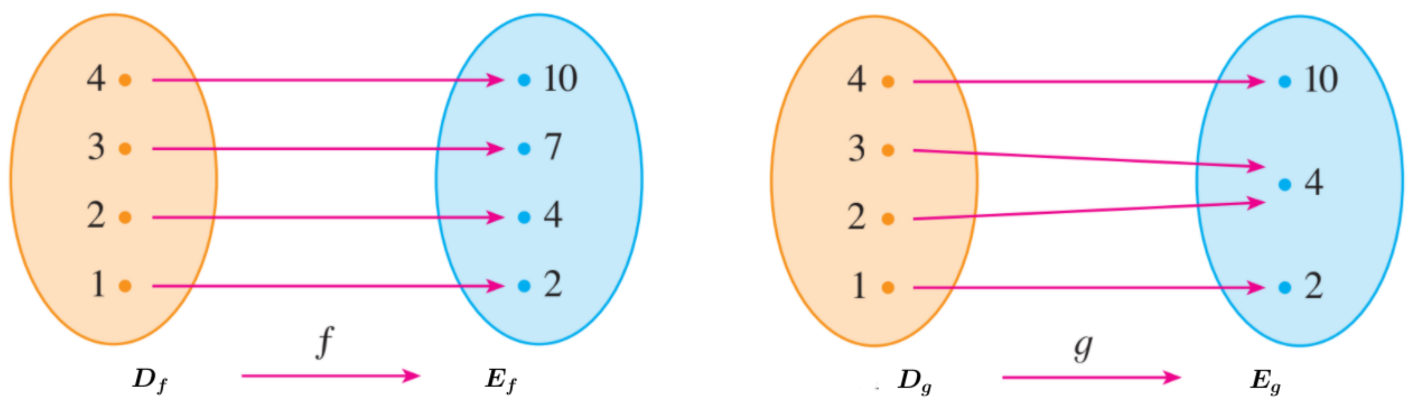


Ví dụ: Cho hàm $f(x) = x^2$ và $g(x) = x^2 - 1$. Hàm hợp của f với g được cho bởi công thức $(f \circ g)(x) = (x^2 - 1)^2$. Tập xác định của hàm này là $\mathbb{R}$.

- **Hàm số ngược.**

▷ Hàm số $f : D_f \to E$ được gọi là **đơn ánh** nếu với mọi $x_1, x_2 \in D_f$ sao cho $x_1 \neq x_2$, ta có $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Ví dụ: Cho hai hàm số f, g có biểu đồ mũi tên dưới đây (tập xác định và tập giá trị của các hàm này được cho trong biểu đồ).



Ta có f là một đơn ánh, còn g không phải là đơn ánh.

Ví dụ: Hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, được cho bởi $f(x) = 2x$, là một đơn ánh vì với mọi $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mà $x_1 \neq x_2$, ta luôn có $f(x_1) = 2x_1 \neq 2x_2 = f(x_2)$.

▷ **Cho hàm số $f : D_f \to E$ là một đơn ánh và E là tập giá trị của f trên D_f, nghĩa là $E = \{f(x) | x \in D_f\}$.**

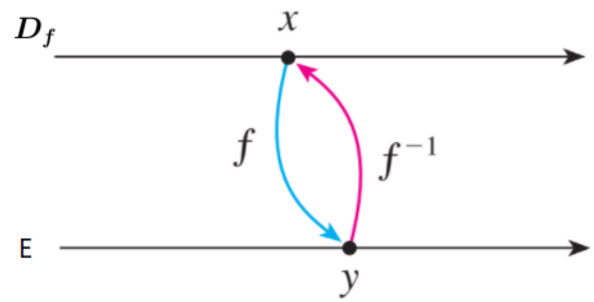
Khi đó, mỗi $y \in E$, tồn tại duy nhất $x \in D_f$ sao cho $y = f(x)$. Nói cách khác, phương trình ẩn x dạng $f(x) = y$ có duy nhất một nghiệm $x \in D_f$.

Vậy ta nhận được hàm số

$$\begin{aligned} f^{-1} : E &\to D_f \\ y &\mapsto x = f^{-1}(y) \end{aligned}$$

là hàm số ngược của f.

Quy ước: x chỉ biến độc lập, y chỉ biến phụ thuộc. Nên ta viết $y = f^{-1}(x)$ chỉ hàm số ngược của $y = f(x)$.



Chú ý: 1) Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ và đồ thị của hàm số ngược $y = f^{-1}(x)$ của nó đối xứng nhau qua đường thẳng $y = x$.

2) Ký hiệu hàm ngược của f là f^{-1}, và f^{-1} không phải là hàm $\dfrac{1}{f}$.

3) Cho hàm số f có hàm ngược là f^{-1} thì

a) Tập xác định của f là tập giá trị của f^{-1} và tập giá trị của f là tập xác định của f^{-1}.

b) $f(f^{-1}(y)) = y$ và $f^{-1}(f(x) = x$.

Ví dụ: Xét hàm số mũ $y = a^x$ với $0 < a \neq 1$. Hàm số logarit $y = \log_a x$, là hàm số ngược của hàm mũ này.

Quy trình tìm hàm số ngược của hàm số $f : D \to E$

+) Bước 1: Cố định $y \in E$ và xét phương trình $f(x) = y$ với ẩn số là x.

+) Bước 2: Giải phương trình $f(x) = y$ và lấy nghiệm $x \in D$. Ta có hai trường hợp:

Trường hợp 1: **Phương trình không có ngiệm $x \in D$ hoặc có ít nhất hai nghiệm $x \in D$. Ta kết luận f không có hàm ngược.**

Trường hợp 2: **Phương trình có duy nhất ngiệm $x \in D$ và giải được $x = g(y)$. Khi đó, hàm số f có hàm ngược và hàm ngược được cho như sau: $y = f^{-1}(x) = g(x)$.**

Ví dụ: **Cho hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ được cho công thức $f(x) = x^3$, với mọi x. Liệu hàm f có hàm số ngược hay không? Nếu có hãy xác định nó.**

Lấy $y \in \mathbb{R}$. Xét phương trình $f(x) = y$.

Ta có $f(x) = y \leftrightarrow x^3 = y \leftrightarrow x = \sqrt[3]{y}$.

Phương trình $f(x) = y$ có duy nhất nghiệm là $x = \sqrt[3]{y}$.

Do đó f có hàm số ngược và $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$, với mọi $x \in \mathbb{R}$.

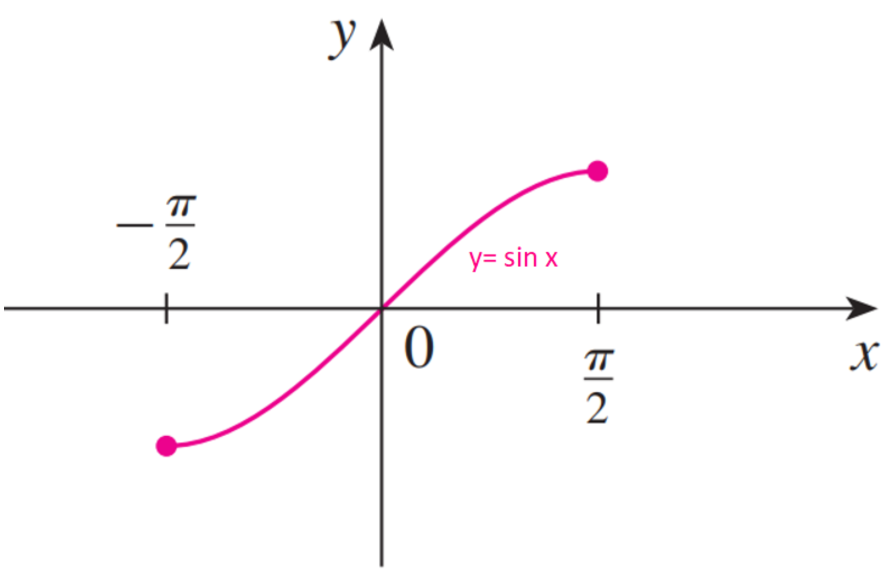
Ví dụ: **Hàm số $f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$, $x \mapsto \sin x$ không có hàm ngược vì phương trình $\sin x = a$ (với $-1 \leq a \leq 1$) có vô số nghiệm $x \in \mathbb{R}$.**

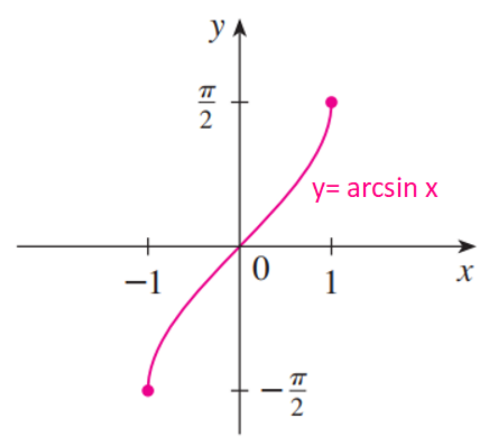
• Các hàm số lượng giác ngược.

★ **Hàm lượng giác sin :** $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$, $x \mapsto y = \sin x$

xác định một hàm ngược $\mathbf{arcsin} : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $x \mapsto y = \arcsin x$,

thỏa mãn: $\sin(\arcsin x) = x$ **với mọi** $x \in [-1, 1]$ **và** $\arcsin(\sin y) = y$, **với mọi** $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

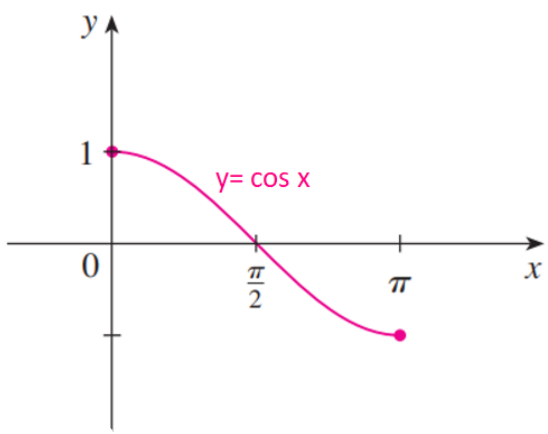


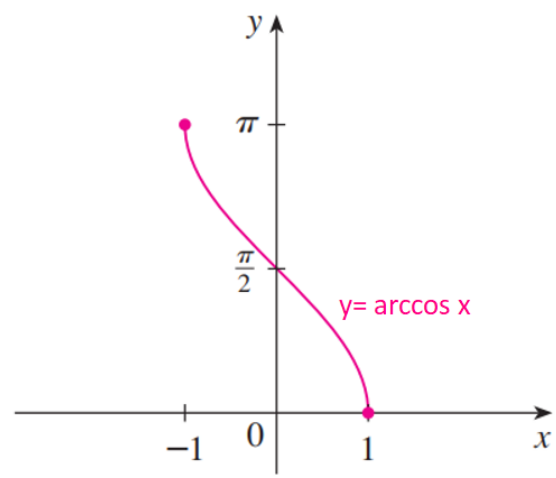


★ **Hàm lượng giác** $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$

$$x \mapsto y = \cos x$$

xác định một hàm ngược $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$, $x \mapsto y = \arccos x$, **thỏa mãn:** $\cos(\arccos x) = x$ **với mọi** $x \in [-1, 1]$ **và** $\arccos(\cos y) = y$, **với mọi** $y \in [0, \pi]$.

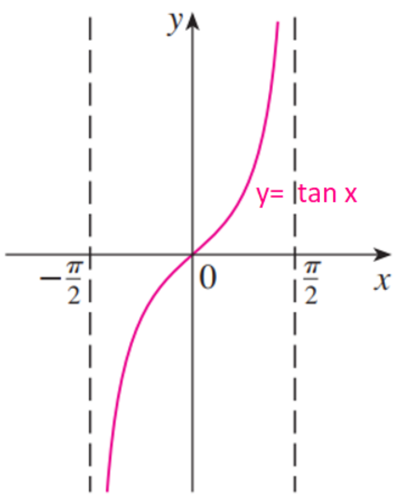


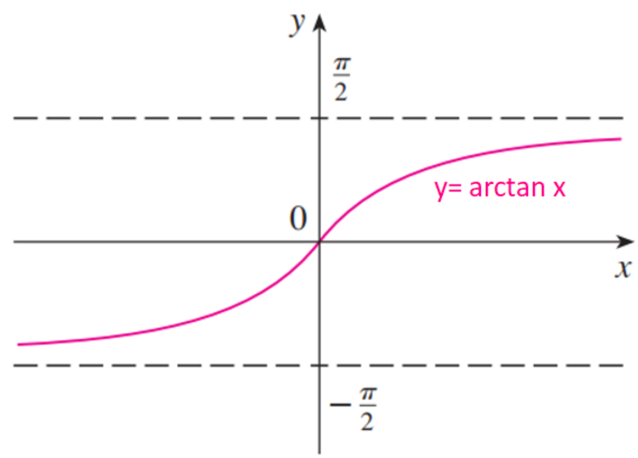


★ **Hàm lượng giác tan :** $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto y = \tan x$$

xác định một hàm ngược arctan : $\mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $x \mapsto y = \arctan x$, **thỏa mãn:** $\tan(\arctan x) = x$ **với mọi** $x \in \mathbb{R}$ **và** $\arctan(\tan y) = y$, **với mọi** $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.



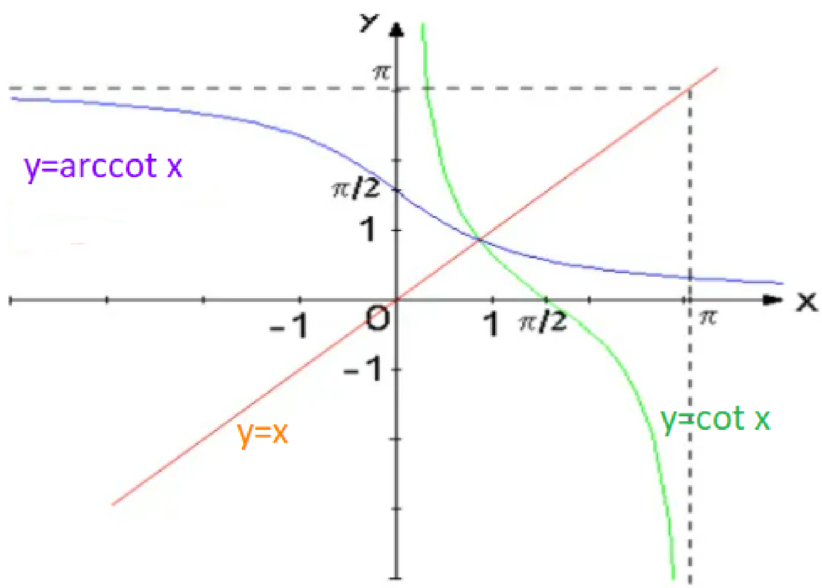


★ **Hàm lượng giác cot : $(0, \pi) \to \mathbb{R}$**

$$x \mapsto y = \cot x$$

xác định một hàm ngược arccot : $\mathbb{R} \to (0, \pi)$, $x \mapsto y =$ arccot x,

thỏa mãn: $\cot(\operatorname{arccot} x) = x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $\operatorname{arccot}(\cot y) = y$, với mọi $y \in (0, \pi)$.



Đồ thị hàm cot và hàm arccot

Chú ý:

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \text{ và } \arctan x + \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2}.$$

- **Hàm số sơ cấp cơ bản.**

▷ **Hàm lũy thừa $y = x^\alpha$, với $\alpha \in \mathbb{R}$.**

Tập xác định phụ thuộc vào α.

▷ **Hàm số mũ $y = a^x$, với $0 < a$ và $a \neq 1$.**

Tập xác định $\mathbb{R}$.

▷ **Hàm số logarit $y = \log_a x$, với $a > 0$ và $a \neq 1$.**

Tập xác định $(0, +\infty)$

▷ **Các hàm số lượng giác: $y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x, y = \cot x$.**

▷ **Các hàm số lượng giác ngược: $y = \arcsin x, y = \arccos x, y = \arctan x, y = \operatorname{arccot} x$.**

- **Hàm số sơ cấp:** Lấy tổng, hiệu, tích, thương và hàm số hợp đối với các hàm số sơ cấp cơ bản và các hằng số, ta thu được tất cả **các hàm số sơ cấp.**

- **Một số dạng hàm sơ cấp đặc biệt**

▷ Các đa thức: Một hàm số p là một đa thức nếu

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n,$$

với n là số nguyên không âm và các số $a_0, a_1, \ldots, a_n$ là các hằng số thực.

▷ Hàm phân thức hữu tỷ là hàm được cho bởi dạng $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$, với p, q là hai đa thức.

▷ **Các hàm hyperbolic:**

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{ (cosin hyperbolic)},$$

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \text{ (sin hyperbolic)},$$

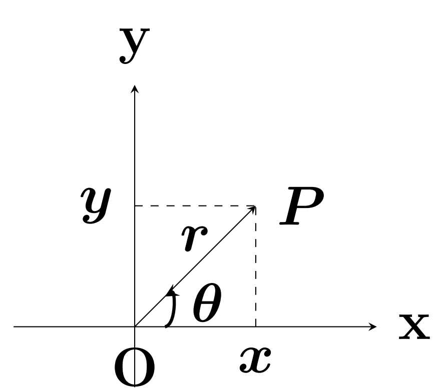
$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \text{ (tang hyperbolic)},$$

$$\coth(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} \text{ (cotang hyperbolic)}.$$

2. Công thức Euler.

- Mỗi số phức z có dạng $z = x + yi$, được gọi là *dạng đại số* **của nó, ở đây $x, y \in \mathbb{R}$ và i thỏa mãn $i^2 = -1$. i được gọi là đơn vị ảo, $x = Rez$ được gọi là phần thực của z và $y = Imz$ được gọi là phần ảo của z.**

- Gọi P là điểm biểu diễn của $z = x + yi$. Đặt $r = OP = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$ (đây là modun của z). Gọi $\theta \in (-\pi, \pi]$ là góc lượng giác có tia đầu là Ox và tia cuối là OP. θ được gọi argument chính của z. Khi đó ta có $x = r\cos\theta$ và $y = r\sin\theta$.



Do đó $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, đây là *dạng lượng giác* **của z.**

Chú ý: Để tìm dạng lượng giác của số phức $z = x + yi$, ta tiến hành như sau:

+) Tính modun: $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

+) Tìm argument chính $\theta \in (-\pi, \pi]$ thỏa mãn $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{x}{r} \\ \sin\theta = \dfrac{y}{r} \end{cases}$

+) Dạng lượng giác $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$.

Ví dụ 1: **Tìm dạng lượng giác của số phức $z = 1 + i$.**

- Ta có phần thực là $x = 1$, phần ảo $y = 1$. Modun của z là $r = \sqrt{1^2 + 1^2} = 2$.

- Tìm argument chính $\theta \in (-\pi, \pi]$: Ta tìm $\theta \in (-\pi, \pi]$ thỏa mãn $\tan\theta = \dfrac{y}{x} = 1$ và θ và y là cùng dấu. Ta chọn được $\theta = \dfrac{\pi}{4}$.

- Dạng lượng giác là $z = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$.

- Công thức Euler: $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.

Khi đó $z = re^{i\theta}$, đây là *dạng mũ* **của z.**

Ví dụ: Ở Ví dụ 1 trên, dạng lượng giác của $z = 1 + i$ là

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

Do đó, dạng mũ của nó là $z = \sqrt{2}\cdot e^{i\frac{\pi}{4}}$.