Chương 4. Dạng toàn phương

§1. Định nghĩa

Định nghĩa. Cho V là một kgvt, ánh xạ f: $\overset{(u,\, v)}{V \times V} \longrightarrow \mathbb{R}$ gọi là một ***dạng song tuyến tính*** trên V nếu thoả mãn các tính chất sau:

i) $f(u_1 + u_2, v) = f(u_1, v) + f(u_2, v)$,

ii) $f(u, v_1 + v_2) = f(u, v_1) + f(u, v_2)$,

iii) $f(au, v) = f(u, av) = af(u, v)$,

với $\forall u_1, u_2, v_1, v_2, u, v \in V$, $\forall a \in \mathbb{R}$.

Ví dụ. Ánh xạ f: $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ được xác định bởi

$$f(u,v) = x_1x_2 + y_1y_2, \text{ với } u = (x_1; y_1),\ v = (x_2; y_2)$$

là một dạng song tuyến tính.

Ví dụ. Ánh xạ f: $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ được xác định bởi

$$f(u,v) = x_1x_2 + y_1y_2, \text{ với } u = (x_1; y_1),\ v = (x_2; y_2)$$

là một dạng song tuyến tính.

Định nghĩa. Một dạng song tuyến tính f được gọi là ***đối xứng*** nếu

$$f(u,v) = f(v,u), \text{ với mọi } u, v \in V.$$

<u>VD</u> $f(u,v) = x_1 x_2 + y_1 y_2$, $u = (x_1, y_1)$, $v(x_2, y_2)$

$=$

$f(v,u) = x_2 x_1 + y_2 y_1$

$\Rightarrow$ f là song tuyến tính đối xứng.

Ví dụ. Ánh xạ f: $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ được xác định bởi

$$f(u,v) = x_1x_2 + y_1y_2, \text{ với } u = (x_1; y_1),\ v = (x_2; y_2)$$

là một dạng song tuyến tính.

Định nghĩa. Một dạng song tuyến tính f được gọi là ***đối xứng*** nếu

$$f(u,v) = f(v,u), \text{ với mọi } u, v \in V.$$

Định nghĩa. Nếu f(u,v) là một dạng song tuyến tính đối xứng trên V thì f(u,u) được gọi là một ***dạng toàn phương*** trên V.

VD: $f(u,v) = x_1x_2 + y_1y_2$, $u = (x_1, y_1)$, $v = (x_2, y_2)$

$\Rightarrow$ Dạng toàn phương: $f(u,u) = x_1^2 + y_1^2$.

$\dim V = n\ (V = \mathbb{R}^n)$, $u = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ theo cơ sở $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$

$$\Rightarrow u = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \quad , \quad x_i \in \mathbb{R} \quad \forall i = \overline{1,n}$$

Dạng toàn phương trên V:

$$f(u,u) = f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} x_j e_j\right)$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j \underbrace{f(e_i, e_j)}_{a_{ij}}$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \quad , \quad a_{ij} = a_{ji}.$$

$\dim V = n\ (V = \mathbb{R}^n), \mathrm{u} = (\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \dots, \mathrm{x}_\mathrm{n})$

Dạng toàn phương cho bởi:

$$\mathrm{f(u,u)} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j, \text{ với } a_{ij} = a_{ji}\ \forall i, j$$

$$= a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + \cdots + a_{nn}x_n^2.$$

VD a) $V = \mathbb{R}^2$, $u = (x_1, x_2)$

$F = f(u,u) = f(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2$

$= a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$

b) $V = \mathbb{R}^3$

$F = f(x_1, x_2, x_3) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2$

Ma trận $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ được gọi là ma trận của dạng toàn phương.

VD. a) $F(x_1, x_2) = 3x_1^2 - 2x_1x_2 + 5x_2^2$

$\Rightarrow$ Ma trận của F là $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$

b) $F(x, y, z) = 2x^2 + 3y^2 - 3z^2 - 6xy - 2xz + 5yz$

$\Rightarrow$ Ma trận $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -1 \\ -3 & 3 & 5/2 \\ -1 & 5/2 & -3 \end{bmatrix}$

Dạng chính tắc của dạng toàn phương là:

$$f(u,u) = b_1 x_1^2 + b_2 x_2^2 + \cdots + b_n x_n^2$$

§2. Đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc

Phương pháp Lagrange:

TH1: Tồn tại $a_{ii} \neq 0$. Giả sử $a_{11} \neq 0$, nhóm tất cả các số hạng chứa x_1 và thêm bớt những số hạng để tạo thành 1 bình phương, các số hạng còn lại chỉ phụ thuộc vào $x_2, x_3, \dots, x_n$.

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $\qquad$ $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

VD $F = x^2 - 3yx + y^2 = (x^2 - 3xy) + y^2 = \left[\left(x^2 - 2x\cdot\frac{3}{2}y + \left(\frac{3}{2}y\right)^2\right) - \left(\frac{3}{2}y\right)^2\right] + y^2$

$= \left[\left(x - \frac{3}{2}y\right)^2 - \frac{9}{4}y^2\right] + y^2 = \left(x - \frac{3}{2}y\right)^2 - \frac{5}{4}y^2$. Đặt $\begin{cases} x - \frac{3}{2}y = X \\ y = Y \end{cases} \Rightarrow \boxed{F = X^2 - \frac{5}{4}Y^2}$

VD: $F = x_1^2 - 6x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 - 3x_2x_3$.

Đưa F về dạng chính tắc.

Giải: $F = (x_1^2 - 6x_1x_2 + 2x_1x_3) + 2x_2^2 - 3x_2x_3$

$= [x_1^2 - 2\underbrace{x_1}_{a}\underbrace{(3x_2 - x_3)}_{b}] + 2x_2^2 - 3x_2x_3$

$= [(x_1 - (3x_2 - x_3))^2 - (3x_2 - x_3)^2] + 2x_2^2 - 3x_2x_3$

$F = \underbrace{(x_1 - 3x_2 + x_3)^2} \underbrace{- (3x_2 - x_3)^2 + 2x_2^2 - 3x_2x_3}_{A}$

$A = -(3x_2 - x_3)^2 + 2x_2^2 - 3x_2x_3 = -(9x_2^2 - 6x_2x_3 + x_3^2) + 2x_2^2 - 3x_2x_3$

$= -7x_2^2 + 3x_2x_3 - x_3^2 = (-x_3^2 + 3x_2x_3) - 7x_2^2$

$= -(x_3^2 - 3x_2x_3) - 7x_2^2 = -[x_3^2 - 2x_3 \cdot \frac{3}{2}x_2] - 7x_2^2 = -[(x_3 - \frac{3}{2}x_2)^2 - (\frac{3}{2}x_2)^2] - 7x_2^2$

$$F = \underbrace{(x_1 - 3x_2 + x_3)^2}\; \underbrace{-(3x_2 - x_3)^2 + 2x_2^2 - 3x_2x_3}_{A}$$

$$A = -(3x_2 - x_3)^2 + 2x_2^2 - 3x_2x_3 = -(9x_2^2 - 6x_2x_3 + x_3^2) + 2x_2^2 - 3x_2x_3$$

$$= -7x_2^2 + 3x_2x_3 - x_3^2 = (-x_3^2 + 3x_2x_3) - 7x_2^2$$

$$= -(x_3^2 - 3x_2x_3) - 7x_2^2 = -\left[x_3^2 - 2x_3 \cdot \tfrac{3}{2}x_2\right] - 7x_2^2 = -\left[\left(x_3 - \tfrac{3}{2}x_2\right)^2 - \left(\tfrac{3}{2}x_2\right)^2\right] - 7x_2^2$$

$$= -\left(x_3 - \tfrac{3}{2}x_2\right)^2 + \tfrac{9}{4}x_2^2 - 7x_2^2 = -\left(x_3 - \tfrac{3}{2}x_2\right)^2 - \tfrac{19}{4}x_2^2$$

$$\Rightarrow F = (x_1 - 3x_2 + x_3)^2 - \left(x_3 - \tfrac{3}{2}x_2\right)^2 - \tfrac{19}{4}x_2^2$$

Đặt $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = X \\ x_3 - \frac{3}{2}x_2 = Y \\ x_2 = Z \end{cases} \Rightarrow \boxed{F = X^2 - Y^2 - \frac{19}{4}Z^2}$

TH2: Tất cả các $a_{ii} = 0, i = 1, \dots, n$. Nếu $a_{ij} \neq 0$ thì đặt

$$\begin{cases} x_i = y_i + y_j \\ x_j = y_i - y_j \end{cases}$$

$\Longrightarrow a_{ij}x_ix_j = a_{ij}y_i^2 - a_{ij}y_j^2.$

$\Longrightarrow$ Theo TH1.

VD: $F = \underbrace{xy} + yz \rightarrow$ đưa về dạng chính tắc.

Đặt $\begin{cases} x = x_1 + x_2 \\ y = x_1 - x_2 \\ z = x_3 \end{cases} \Rightarrow F = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) + (x_1 - x_2)x_3$

$$= x_1^2 - x_2^2 + x_1x_3 - x_2x_3 \quad (\rightarrow \text{TH1})$$

$$= (x_1^2 + x_1x_3) - x_2^2 - x_2x_3$$

$$= \left(x_1^2 + 2x_1 \cdot \frac{x_3}{2}\right) - x_2^2 - x_2x_3 = \left[\left(x_1 + \frac{x_3}{2}\right)^2 - \left(\frac{x_3}{2}\right)^2\right] - x_2^2 - x_2x_3$$

$$= \left(x_1 + \frac{x_3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}x_3^2 - x_2^2 - x_2x_3 = \left(x_1 + \frac{x_3}{2}\right)^2 - \left(x_2^2 + x_2x_3 + \frac{1}{4}x_3^2\right) = \left(x_1 + \frac{x_3}{2}\right)^2 - \left(x_2 + \frac{1}{2}x_3\right)^2$$

Phương pháp Jacobi:

Cho $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ là ma trận của dạng toàn phương f.

Đặt: $D_1 = a_{11}, D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \ldots,$

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Định lí. Nếu $D_1, D_2, \ldots, D_n \neq 0$ thì f có dạng chính tắc:

$$\frac{1}{D_1}X_1^2 + \frac{D_1}{D_2}X_2^2 + \frac{D_2}{D_3}X_3^2 + \cdots + \frac{D_{n-1}}{D_n}X_n^2$$

VD $F = x^2 + 2y^2 - z^2 - 4xy + 6xz - 5yz$

Ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 2 & -5/2 \\ 3 & -5/2 & -1 \end{bmatrix}$

$D_1 = 1 \neq 0$, $D_2 = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 4 = -2 \neq 0$

$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 2 & -5/2 \\ 3 & -5/2 & -1 \end{vmatrix} = -2 + 15 + 15 - 18 + 4 - \frac{25}{4}$

$= \frac{31}{4} \neq 0$

Dạng chính tắc của F là

$\frac{1}{D_1} X^2 + \frac{D_1}{D_2} Y^2 + \frac{D_2}{D_3} Z^2 = X^2 - \frac{1}{2} Y^2 - \frac{8}{31} Z^2.$

<u>Lưu ý</u>: + p^2 Lagrange áp dụng cho mọi trường hợp.

+ p^2 Jacobi chỉ áp dụng khi $D_1, D_2, \dots, D_n \neq 0$.

Bài tập

Tìm dạng chính tắc của mỗi dạng toàn phương sau:

a) $x^2 + y^2 + 3z^2 + 4xy + 2xz + 2yz$.

b) $x^2 - 2y^2 + z^2 + 2xy + 4xz + 2yz$.

c) $x^2 - 3z^2 - 2xy + 2xz - 6yz$.

d) $xy + yz + zx$

e) $2xy + z^2 - yz$.

Ôn tập chương 4: Đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc.

Ví dụ.

Tìm dạng chính tắc của dạng toàn phương sau:

a) $f = xy + yz + zx$

Giải: Đặt $x = X + Y$, $y = X - Y$. Khi đó

$$f = xy + (x + y)z = (X + Y)(X - Y) + 2Xz$$

$$= X^2 - Y^2 + 2Xz = (X^2 + 2Xz + z^2) - Y^2 - z^2$$

$$= (X + z)^2 - Y^2 - z^2.$$

Đặt $T = X + z$, $Z = z$, ta nhận được $f = T^2 - Y^2 - Z^2$, là dạng chính tắc của dạng toàn phương.

Chú ý: Nếu yêu cầu nêu rõ công thức đổi biến, ta phải biểu diễn biến mới theo biến cũ.

Chẳng hạn ở ví dụ trên $T = X + z = \frac{1}{2}(x + y) + z$, $Y = \frac{1}{2}(x - y)$, $Z = z$.

b) $f = x^2 + y^2 + 3z^2 + 4xy + 2xz + 2yz$

Giải.

Ta có $f = (x^2 + 4xy + 2xz) + y^2 + 3z^2 + 2yz$

$= [x^2 + 2x(2y + z) + (2y + z)^2] - (2y + z)^2 + y^2 + 3z^2 + 2yz$

$= (x + 2y + z)^2 - 3y^2 - 2yz + 2z^2$

$= (x + 2y + z)^2 - 3(y^2 + \frac{2}{3}yz + \frac{1}{9}z^2) + \frac{1}{3}z^2 + 2z^2$

$= (x + 2y + z)^2 - 3(y + \frac{1}{3}z)^2 + \frac{7}{3}z^2.$

Đặt $X = x + 2y + z$, $Y = y + \frac{1}{3}z$, $Z = z$, ta được $f = X^2 - 3Y^2 + \frac{7}{3}Z^2$ là dạng chính tắc của dạng toàn phương.