BÀI GIẢNG TOÁN CAO CẤP

BÀI : PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP 1

I. TỔNG QUAN VỀ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

★ **Phương trình vi phân** là phương trình có dạng

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0,$$

trong đó $\begin{cases} x \text{ là biến số độc lập} \\ y = y(x) \text{ là hàm số cần tìm} \\ y', y'', \ldots, y^{(n)} \text{ là các đạo hàm các cấp của } y. \end{cases}$

Chú ý: Trong phương trình vi phân, người ta **có thể thay các ký hiệu $y', y'', ..., y^{(n)}$ lần lượt bởi các ký hiệu $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, ..., \frac{d^ny}{dx^n}$.** Bên cạnh đó, người ta cũng có thể **thay đổi biến số và hàm số cần tìm trong phương trinh vi phân bằng biến số t và hàm $x = x(t)$.**

★ **Cấp của phương trình** là cấp cao nhất của đạo hàm của y.

Ví dụ: Phương trình $y' + \sin 2x = 0$ là PTVP cấp một.

Phương trình $y'' + 4y = 0$ là PTVP cấp hai...

★ **Nghiệm của phương trình vi phân** là mọi hàm số thỏa mãn phương trình ấy. Nghiệm có thể ở một trong ba dạng:

• $y = f(x)$ (hàm hiện) • $\phi(x, y) = 0$ (hàm ẩn)

• $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ (tham số).

Mỗi nghiệm là một đường cong trong Oxy, còn gọi là đường cong tích phân.

Ví dụ

Phương trình $y' + \sin 2x = 0$ có nghiệm là các hàm số

$$y = \frac{1}{2}\cos 2x + C,$$

trong đó C là hằng số tùy ý.

Phương trình $y'' + 4y = 0$ có nghiệm là các hàm số có dạng

$$y = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x,$$

trong đó C_1, C_2 là các hằng số tùy ý.

$\boxed{\textbf{Nghiệm tổng quát}}$ là nghiệm có dạng $y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$ hoặc dạng $\varphi(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0$, trong đó $C_1, C_2, \ldots, C_n$ là các hằng số.

$\boxed{\textbf{Nghiệm riêng}}$ là nghiệm nhận từ nghiệm tổng quát khi cho các hằng số $C_1, C_2, \ldots, C_n$ các giá trị cụ thể.

$\boxed{\textbf{Nghiệm kì dị}}$ là những nghiệm không nhận được từ nghiệm tổng quát.

Ví dụ

Xét phương trình $y' = \sqrt{1 - y^2}$ có nghiệm tổng quát là

$$y = \sin(x + C).$$

Ta có các nghiệm riêng như $y = \sin x$, $y = \sin(x + \pi)$, $y = \sin(x - 5)$, . . .

Nhận thấy $y = 1$ cũng là một nghiệm của phương trình, nhưng không nhận được từ nghiệm tổng quát. Vậy $y = 1$ là một nghiệm kì dị.

★ **Bài toán Cauchy:** Tìm nghiệm $y = y(x)$ của phương trình vi phân cấp n ($n \geq 1$)

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0,$$

thỏa mãn các điều kiện $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$.

Các điều kiện $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$ được gọi là các điều kiện ban đầu.

II. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP 1

• Phương trình vi phân cấp 1 có dạng $F(x, y, y') = 0$, trong đó x là biến và $y = y(x)$ là hàm số cần tìm.

• Phương trình vi phân cấp 1 có thể viết dưới dạng $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$. Trong trường này ta có thể xem $y = y(x)$ hoặc $x = x(y)$.

• Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân cấp 1 có dạng $y = \varphi(x, C)$ hoặc $\varphi(x, y, C) = 0$,trong đó C là hằng số.

• Bài toán Cauchy cho phương trình vi phân cấp 1 là tìm nghiệm $y = y(x)$ thỏa mãn một điều kiện ban đầu $y(x_0) = y_0$.

1. Phương trình vi phân phân ly biến số

- **Định nghĩa:** Là phương trình có dạng

$$f(x)dx + g(y)dy = 0.$$

- **Cách giải:** Lấy tích phân hai vế của phương trình, ta được nghiệm tổng quát là $\int f(x)dx + \int g(y)dy = C$, với C là hằng số bất kỳ.

- **Chú ý 1:** $dy = y' \cdot dx$ và $y' = \dfrac{dy}{dx}$.

  b) Phương trình vi phân cấp 1 dạng: $f(x) + g(y) \cdot y' = 0$.

  Cách giải: Thay $y' = \dfrac{dy}{dx}$, phương trình trở thành $f(x)dx + g(y)dy = 0$.

VD 1. Giải phương trình vi phân $2xdx + e^{2y}dy = 0$.

Giải. Lấy tích phân hai vế, ta nhận được

$$\int xdx + \int e^{2y}dy = C$$

hay $\frac{x^2}{2} + \frac{e^{2y}}{2} = C$, trong đó C là hằng số bất kỳ.

Vậy nghiệm tổng quát là $\frac{x^2}{2} + \frac{e^{2y}}{2} = C$, với C là hằng số bất kỳ.

Chú ý 2:

1) *Dạng* $f_1(x)\cdot g_1(y)dx+f_2(x)\cdot g_2(y)dy=0 \longrightarrow$ *chia hai vế cho* $g_1(y)\cdot f_2(x)\neq 0$ *được*

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx+\frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy=0.$$

★ *Nếu* $g_1(m)=0$ *thì* $y=m$ *là nghiệm kì dị của phương trình.*

★ *Nếu* $f_2(a)=0$ *thì* $x=a$ *là nghiệm kì dị của phương trình.*

2) *Dạng* $f_1(x)\cdot g_1(y)+f_2(x)\cdot g_2(y)\cdot y'=0$. *Thay* $y'=\dfrac{dy}{dx}$ *vào phương trình, ta nhận được*

$$f_1(x)\cdot g_1(y)dx+f_2(x)\cdot g_2(y)dy=0.$$

Đây là phương trình dạng 1). Giải phương trình này để tìm nghiệm.

VD 2. Giải phương trình $\boxed{x\sqrt{1+y^2}dx + y\sqrt{1+x^2}dy = 0}$ thỏa mãn điều kiện $y(0) = 1$.

Giải. Chia cả hai vế của phương trình cho $\sqrt{1+x^2}\cdot\sqrt{1+y^2}\neq 0$ ta được

$$\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{ydy}{\sqrt{1+y^2}}=0.$$

Lấy tích phân hai vế ta được

$$\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}=C.$$

Do $y(0)=1$ nên $\sqrt{1+0^2}+\sqrt{1+1^2}=C \Leftrightarrow C=1+\sqrt{2}$.

Vậy nghiệm của bài toán là

$$\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}=1+\sqrt{2}.$$

VD 3. Giải phương trình $\boxed{(y^2-1)dx-(x^2+1)ydy=0}$.

Giải. Nhận thấy $y = 1$ và $y = -1$ là hai nghiệm kì dị.

Với $y \neq \pm 1$, chia cả hai vế của phương trình cho $(y^2 - 1) \cdot (x^2 + 1) \neq 0$ ta được

$$\frac{dx}{x^2 + 1} = \frac{ydy}{y^2 - 1}.$$

Lấy tích phân hai vế ta được nghiệm của bài toán là

$$\arctan x = \frac{1}{2} \ln |y^2 - 1| + C.$$

hoặc

$$x = \tan\left(\frac{1}{2} \ln |y^2 - 1| + C\right).$$

VD 4. Giải phương trình $\boxed{y' = (1 + y^2) \cdot e^x}$.

Giải. Thay $y' = \dfrac{dy}{dx}$, ta nhận được phương trình $\dfrac{dy}{1+y^2} = e^x dx$. Lấy tích phân hai vế ta được

$$\int \frac{dy}{1+y^2} = \int e^x dx \quad \Leftrightarrow \quad \arctan y = e^x + C.$$

Vậy NTQ của phương trình là $y = \tan(e^x + C)$.

VD 5. Giải phương trình $\boxed{y' = e^{x-y}}$ thỏa mãn điều kiện $y(1) = 1$.

Giải. Thay $y' = \dfrac{dy}{dx}$, ta nhận được phương trình $\boxed{dy = e^{x-y}dx} \Leftrightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{e^x}{e^y}$ hay $e^x dx = e^y dy$.

Lấy tích phân hai vế ta được

$$e^y = e^x + C,$$

trong đó C là hằng số tùy ý.

Do $y(1) = 1$ nên $e^1 = e^1 + C$, do đó $C = 0$, tức là $e^y = e^x$.

Vậy nghiệm của bài toán là $y = x$.

★ Sinh viên tự giải

Giải các phương trình vi phân sau:

1. $(x^3 + 1)y' = x^2y + x^2$.

2. $y' = \dfrac{2x + 1}{2(y - 1)}$ với $y \neq 1$ và $y(0) = -1$.

3. $y' + \sin(x + y) = \sin(x - y)$.

4. $y' = \cos(x + y) + \cos(x - y)$ với $y(0) = 0$.

5. $y' = \cos(x - y)$.

   HD: Đặt $z = x - y$, khi đó $z' = 1 - y'$, từ đó thu được phương trình biến số phân ly.

2. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN TUYẾN TÍNH

Dạng $y' + p(x)y = q(x)$,

trong đó $p(x), q(x)$ liên tục trên khoảng $I \subset \mathbb{R}$.

★ Nếu $q(x) \equiv 0$ thì phương trình tuyến tính trên gọi là **thuần nhất**.

★ Nếu $q(x) \not\equiv 0$ thì phương trình tuyến tính trên gọi là **không thuần nhất**.

Cách giải

★ Giải PTTT thuần nhất $y' + p(x)y = 0$ được NTQ $y = Ce^{-\int p(x)dx}$.

★★ Sử dụng pp biến thiên hằng số tìm được NTQ của pt ban đầu là

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left(C + \int q(x).e^{\int p(x)dx}dx\right).$$

Chú ý: Dạng phương trình vi phân tuyến tính $\boxed{a(x)y' + b(x)y + c(x) = 0.}$

→ Chuyển vế $c(x)$ sang phải và chia cả hai vế cho $a(x)$, ta nhận được

$$y' + \frac{b(x)}{a(x)}y = -\frac{c(x)}{a(x)}.$$

Áp dụng công thức nghiệm tổng quát cho phương trình trên với $p = \dfrac{b(x)}{a(x)}$ và $q = -\dfrac{c(x)}{a(x)}$.

VD 6. Giải phương trình vi phân tuyến tính

$$\boxed{y' + \frac{y}{x} = \frac{\sin x}{x}, \quad (x > 0)}.$$

Giải. PT đã cho là PTTT cấp một với $p(x) = \frac{1}{x}$ và $q(x) = \frac{\sin x}{x}$. Ta có:

$$\int p(x)dx = \int \frac{1}{x}dx = lnx$$

$$e^{\int p(x)dx} = e^{lnx} = x$$

$$\int q(x).e^{\int p(x)dx}dx = \int \frac{sinx}{x}.xdx = \int sinxdx = -cosx$$

Vậy NTQ của pt này là

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left(C + \int q(x).e^{\int p(x)dx}dx\right)$$

$$= e^{-\ln x}(C - cosx)$$

$$= \frac{1}{x}(C - cosx) = \frac{C - \cos x}{x}.$$

VD 7. Giải bài toán giá trị ban đầu

$$\boxed{y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3, \quad y(0) = \frac{1}{2}, \quad (x \neq 1)}.$$

$$\boxed{y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3, \quad y(0) = \frac{1}{2}, \quad (x \neq 1)}.$$

Giải. PT trên là tuyến tính cấp một với $p(x) = -\dfrac{2}{x+1}$ và $q(x) = (x+1)^3$.

Ta có: $\int p(x)dx = \int -\frac{2}{x+1}dx = -2ln(x+1)$

$$\int q(x).e^{\int p(x)dx}dx = \int (x+1)^3.e^{-2ln(x+1)}dx = \int (x+1)dx$$

NTQ của PT là

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int p(x)dx}\left(C + \int q(x).e^{\int p(x)dx}dx\right) \\ &= e^{\int \frac{2}{x+1}dx}\left(C + \int (x+1)dx\right) = e^{2\ln(x+1)}\left(C + \int (x+1)dx\right) \\ &= (x+1)^2\left(C + \int (x+1)dx\right) = (x+1)^2\left(C + \frac{x^2}{2} + x\right). \end{aligned}$$

Do $y(0) = \frac{1}{2}$ nên $C = \frac{1}{2}$. Vậy nghiệm riêng cần tìm là

$$y = \left(\frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2}\right)(x+1)^2 = \frac{(x+1)^4}{2}.$$

VD 8. Giải phương trình $\boxed{(x + y^2)dy = ydx}$.

$$\boxed{(x + y^2)dy = ydx}$$

Giải. Nếu ta xem y là hàm số cần tìm, x là biến số độc lập thì phương trình đã cho không là PTTT.

Ta coi x là hàm số cần tìm, y là biến số độc lập, khi đó phương trình có thể viết thành

$$y\frac{dx}{dy} = x + y^2 \quad \text{hay} \quad yx' - x = y^2 \quad \text{hay} \quad x' - \frac{x}{y} = y.$$

Đây là PTTT theo biến y. Giải tương tự ta có NTQ cần tìm là

$$x = Cy + y^2.$$

Sinh viên tự giải

Giải các phương trình sau:

1. $y' - y\cot x = 2x\sin x.$

   ĐS: $y = x^2\sin x + C\sin x.$

2. $xy' - 3y = x^2$, thỏa mãn $y(1) = 1.$

   ĐS: $y = Cx^3 - x^2,\ y(1) = 1 \Rightarrow C = 2 \to y = 2x^3 - x^2.$

3. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x\cos y + \sin 2y}.$

   HD: Coi x *là hàm số cần tìm,* y *là biến số. ĐS:* $x = Ce^{\sin y} - 2\sin y - 2.$

3. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN THUẦN NHẤT

Dạng $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$.

Cách giải: Đặt $u = \frac{y}{x}$. Ta coi $u = u(x)$. Suy ra $y = ux$ và $y' = u + xu'$. Do đó, ta nhận được

$$u + xu' = f(u) \Leftrightarrow xu' = f(u) - u.$$

Thay $u' = \frac{du}{dx}$, ta nhận được

$$xdu = (f(u) - u)dx.$$

Do đó $\frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x}$ (với $f(u) - u \neq 0$). Lấy tích phân hai vế, ta nhận được

$$\ln|x| = G(u) + \ln|C|$$

với $G(u)$ là một nguyên hàm của $\dfrac{1}{f(u)-u}$. Vậy ta thu được nghiệm là

$$x = C.e^{G(u)} = C.e^{G\left(\frac{y}{x}\right)},$$

với C là hằng số.

• Nếu $f(m) - m = 0$ thì $y = mx$ là nghiệm của phương trình.

Chú ý: Dạng phương trình $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$, trong đó $P(tx,ty) = t^kP(x,y)$ và $Q(tx,ty) = t^kQ(x,y)$ với $k > 0$.

Cách giải: Đặt $y = ux$. Suy ra $dy = udx + xdu$. Phương trình viết lại dưới dạng

$$P(x,ux)dx+Q(x,ux)(udx+xdu) = 0 \Leftrightarrow [P(1,u)+Q(1,u)u]dx+xQ(1,u)du = 0.$$

Đây là dạng phương trình đưa về phương trình với biến số phân ly. Giải phương trình và sau đó kết luận nghiệm của phương trình ban đầu.

- Kiểm tra $\boldsymbol{x = 0}$ có là nghiệm không. Chú ý $\boldsymbol{dx = x'(y)dy}$.

4. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN TOÀN PHẦN

Dạng $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$,

trong đó $P'_y = Q'_x$ và $P(x, y), Q(x, y)$ xác định trên $\mathbb{R}^2$.

Cách giải: Cố định x_0, y_0. Nghiệm của phương trình có dạng

$$\int_{x_0}^{x} P(x, y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x, y)dy = C,$$

với C là hằng số.

Chú ý: Nghiệm có thể xác định dưới dạng

$$\int_{x_0}^{x} P(x, y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)dy = C.$$

5. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN Bernoulli

Dạng $y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha}$,

trong đó $p(x), q(x)$ liên tục và $\alpha \in \mathbb{R}$.

Cách giải: Nếu $\alpha = 0$ hoặc $\alpha = 1$ thì phương trình là phương trình vi phân tuyến tính.

Trong trường hợp $\alpha \notin \{0, 1\}$, chia cả hai vế cho y^{α}, ta nhận được

$$\frac{y'}{y^{\alpha}} + p(x)y^{1-\alpha} = q(x).$$

Đặt $z = y^{1-\alpha}$.Ta coi $z = z(x)$. Suy ra $z' = (1-\alpha)\frac{y'}{y^{\alpha}}$. Do đó, ta nhận được

$$\frac{z'}{1-\alpha} + p(x)z = q(x) \Leftrightarrow z' + (1-\alpha)p(x)z = (1-\alpha)q(x).$$

Đây là phương trình vi phân tuyến tính với hàm cần tìm $z = z(x)$. Giải phương trình được nghiệm $z = f(x, C)$. Nghiệm của phương trình ban đầu là $y^{1-\alpha} = f(x, C)$.

• Kiểm tra $y = 0$ có là nghiệm không.