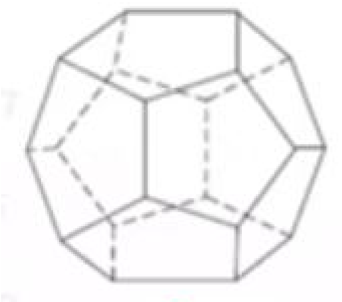
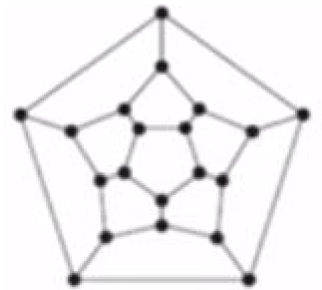
Đồ thị Hamilton

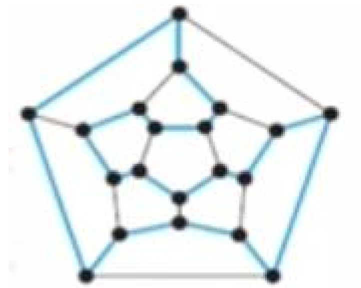
Đồ thị Hamilton



a



b



c

- Thuật ngữ “Chu trình Hamilton” xuất phát từ một trò chơi gọi là Icosian puzzle, được phát minh năm 1857 bởi nhà toán học Ailen Sir William Rowan Hamilton.
- Có một khối đa diện có 12 ngũ giác đều, đều là các mặt của khối đa diện, cùng với 1 đinh gim tại mỗi đỉnh của đa diện và các dây nối các đinh ghim. 20 đỉnh của đa diện được đặt tên là các thành phố khác nhau trên thế giới.
- Mục đích của trò chơi là bắt đầu từ 1 thành phố và đi dọc các cạnh của đa diện, đến thăm 19 thành phố còn lại đúng 1 lần, và quay trở lại thành phố đầu tiên. Chu trình được đánh dấu bằng dây và đinh ghim

Đường đi, chu trình Hamilton

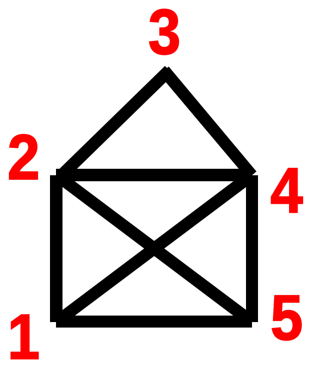
- **Định nghĩa đường đi Hamilton**: *Một đường đi trên đồ thị được gọi là đường đi Hamilton nếu nó đi qua tất cả các đỉnh, mỗi đỉnh một lần.*
- **Định nghĩa đường đi Hamilton**: *Một chu trình trên đồ thị được gọi là chu trình Hamilton nếu nó đi qua tất cả các đỉnh, mỗi đỉnh một lần.*

VD: Đồ thị sau có các đường đi và chu trình Euler là:

d1: 1 2 3 4 5

C1: 1 2 3 4 5 1

C2: 2 5 1 4 3 2



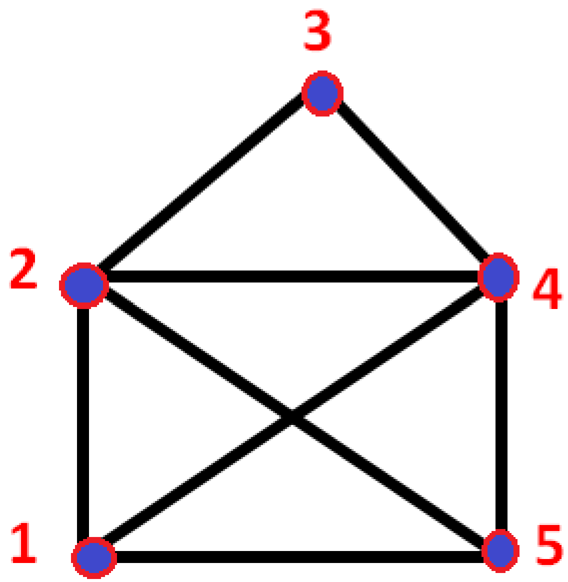
Đường đi, chu trình Hamilton

Ví dụ 1: Đồ thị sau có các đường đi và chu trình Euler là:

D1: 1 2 3 4 5

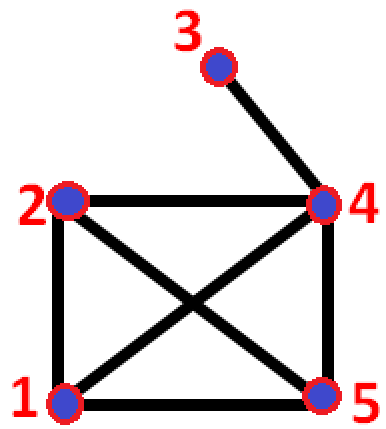
C1: 1 2 3 4 5 1

C2: 2 5 1 4 3 2

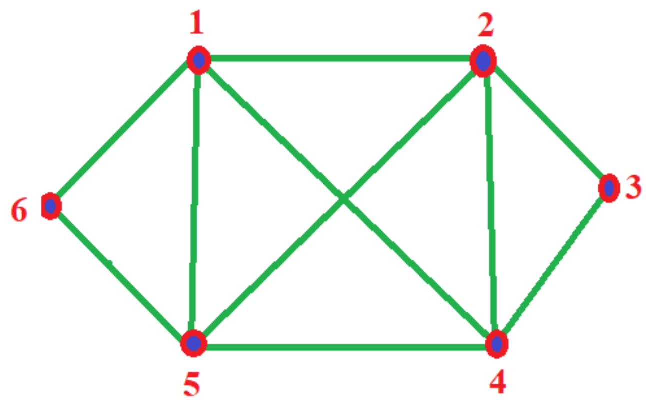


Đồ thị Hamilton

- **Định nghĩa đồ thị Hamilton:** *Đồ thị G được gọi là đồ thị Hamilton nếu và chỉ nếu tồn tại một chu trình Hamilton trong G.*
- **Định nghĩa nửa Hamilton:** *Đồ thị G được gọi là đồ thị nửa Hamilton nếu và chỉ nếu tồn tại một đường đi Hamilton trong G.*



Đồ thị nửa Hamilton



Đồ thị Hamilton (hiển nhiên cũng là đồ thị nửa Hamilton).

Một số kết quả trên đồ thị Hamilton

- Định lý (Dirak, 1952). Xét G là đơn đồ thị vô hướng với n đỉnh (n>2). Nếu mỗi đỉnh của G đều có bậc không nhỏ hơn n/2 thì G là đồ thị Hamilton
- Định lý (Dirak, 1952). Xét G là đơn đồ thị có hướng, liên thông mạnh với n đỉnh. Nếu mọi đỉnh của G đều có bán bậc ra và bán bậc vào không nhỏ hơn n/2 thì G là đồ thị Hamilton

$deg^{+}(v) \geq n/2$, $deg^{-}(v) \geq n/2$, $\forall v$ thì G là Hamilton.

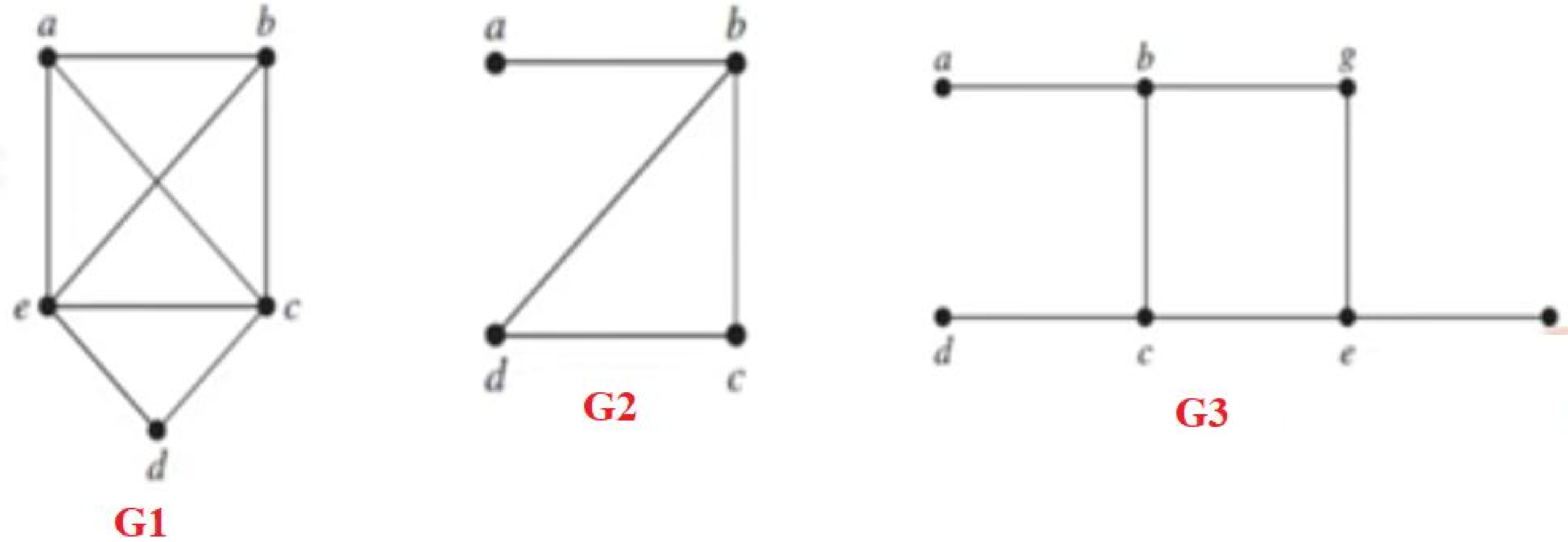
Kiểm tra đồ thị Hamilton???

- ***Các quy tắc để xác định chu trình Hamilton (H) của đồ thị:***
  - **Quy tắc 1:** Nếu có 1 đỉnh bậc 2 thì hai cạnh của đỉnh này bắt buộc phải nằm trong chu trình Hamilton (H)
  - **Quy tắc 2:** Chu trình Hamilton không chứa bất kỳ chu trình con thực sự nào (Không được có chu trình con độ dài nhỏ hơn n trong H).
  - **Quy tắc 3:** Trong quá trình xây dựng chu trình Hamilton, ứng với một đỉnh nào đó, nếu đã chọn đủ 2 cạnh đặt vào chu trình Hamilton (H) thì phải xoá bỏ tất cả các cạnh còn lại tại đỉnh đó (vì không thể chọn thêm)

  Lưu ý: Không có đỉnh cô lập hoặc đỉnh treo nào khi áp dụng quy tắc 3.

Ví dụ 1:

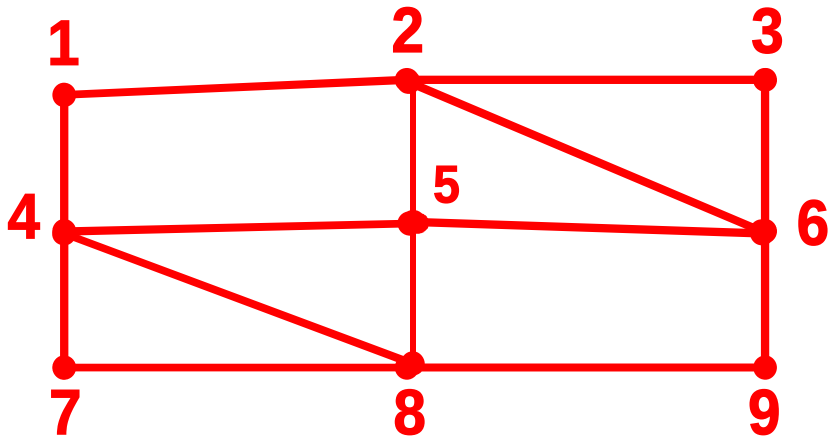
- Đồ thị sau đây có Hamilton không?



G1: có một chu trình Hamilton: a,b,c,d,e,a
G2: Không có chu trình Hamilton
G2: Có một đường đi Hamilton: a,b,c,d
G3: Không có đường đi Hamilton
G3: Không có chu trình Hamilton

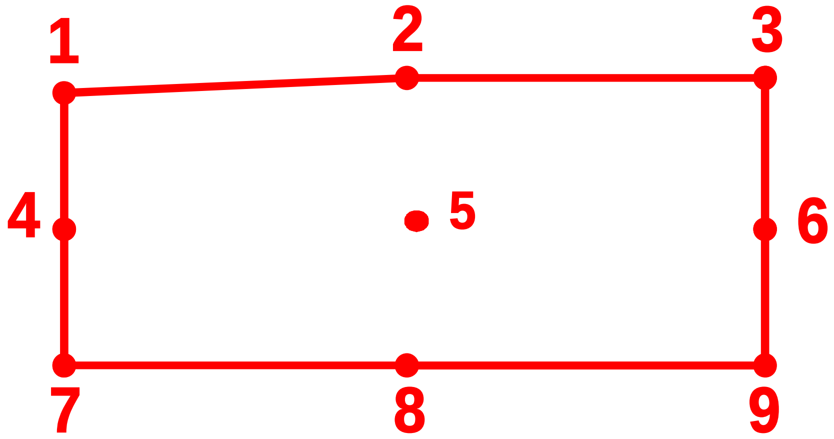
Ví dụ 2:

- Đồ thị sau đây có Hamilton không?



Ví dụ 2:

- Đồ thị sau đây có Hamilton không?

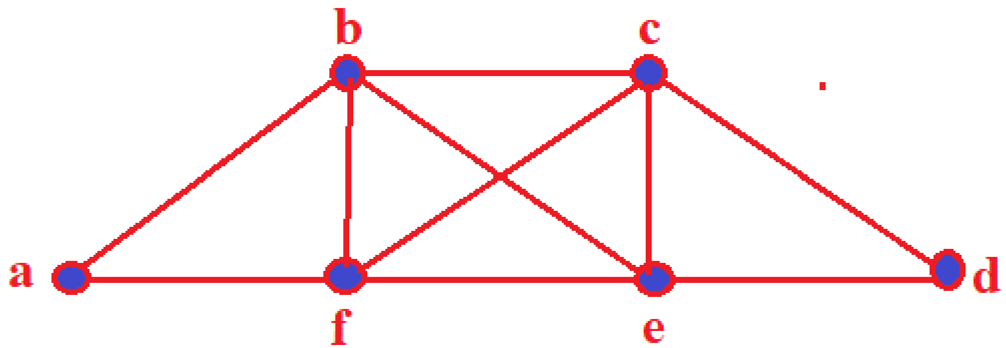


Thực hiện Quy tắc 3: Trong quá trình xây dựng chu trình Hamilton, ứng với lần lượt các đỉnh 1,2,3,6,9,8,7,4,1 chọn đủ 2 cạnh đặt vào chu trình Hamilton (H) thì xoá bỏ tất cả các cạnh còn lại tại đỉnh đó (vì không thể chọn thêm);

Kết luận: như vậy đồ thị còn đỉnh 5 là đỉnh cô lập (chưa đi tới) $\Rightarrow$ đồ thị trên không phải là đồ thị Hamilton

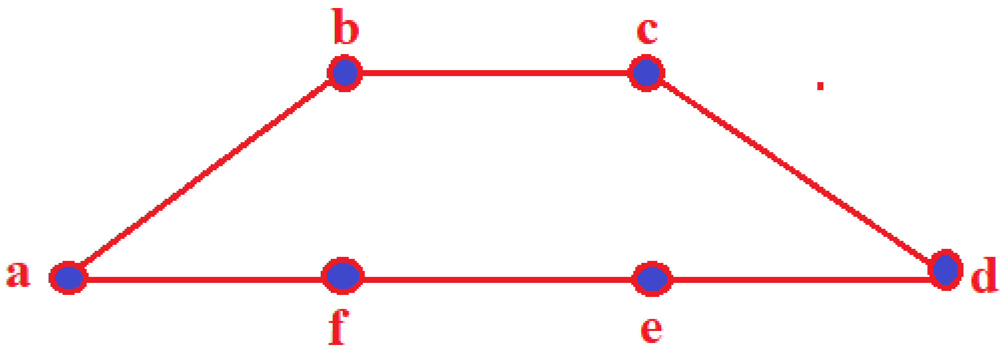
Ví dụ 2:

- Đồ thị sau đây có Hamilton không?



Ví dụ 2:

- Đồ thị sau đây có Hamilton không?



Thực hiện Quy tắc 3: Trong quá trình xây dựng chu trình Hamilton, ứng với lần lượt các đỉnh a,b,c,d,e,f,a chọn đủ 2 cạnh đặt vào chu trình Hamilton (H) thì xoá bỏ tất cả các cạnh còn lại tại đỉnh đó (vì không thể chọn thêm);

Kết luận: như vậy đồ thị đi qua tất cả các đỉnh ⇒ đồ thị trên là đồ thị Hamilton