BÀI GIẢNG TOÁN CAO CẤP

HÀM NHIỀU BIẾN

I. CÁC KHÁI NIỆM

1. Không gian $\mathbb{R}^n$ (với $n \geq 1$)

Đặt

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1; x_2; \ldots; x_n) \mid x_1, x_2, \ldots, x_n \text{ là các số thực bất kỳ}\}.$$

Mỗi phần tử $u \in \mathbb{R}^n$ là một bộ n số thực $(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ và thường viết $u = (x_1; x_2; \ldots; x_n)$ hay $u(x_1; x_2; \ldots; x_n)$. Phần tử $u(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ cũng được gọi là một vectơ n thành phần $x_1, x_2, \ldots, x_n$; trong đó x_i (với $1 \leq i \leq n$) gọi là thành phần thứ i của u.

Trên $\mathbb{R}^n$, xem xét các phép toán sau:

▷ **Sự bằng nhau giữa hai vectơ $u(x_1; x_2; \ldots; x_n), v(y_1; y_2; \ldots; y_n) \in \mathbb{R}^n$:**

$u = v$ hay $(x_1; x_2; \ldots; x_n) = (y_1; y_2; \ldots; y_n)$ khi và chi khi $x_i = y_i$, với mọi $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

▷ **Phép cộng giữa hai vectơ bất kỳ $u(x_1; x_2; \ldots; x_n), v(y_1; y_2; \ldots; y_n) \in \mathbb{R}^n$:**

$u+v = (x_1; x_2; \ldots; x_n)+(y_1; y_2; \ldots; y_n) := (x_1+y_1; x_2+y_2; \ldots; x_n+y_n) \in \mathbb{R}^n$.

▷ **Tích giữa vectơ $u(x_1; x_2; \ldots; x_n) \in \mathbb{R}^n$ và một số thực k:**

$ku = k \cdot (x_1; x_2; \ldots; x_n) := (kx_1; kx_2; \ldots; kx_n) \in \mathbb{R}^n$.

Khi đó, $\mathbb{R}^n$ cùng với các phép toán nêu ở trên tạo thành một không gian vectơ thực n chiều.

• **Đặc biệt,** **mỗi phần tử $u(x;y) \in \mathbb{R}^2 = \{(x;y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ được biểu diễn hình học bằng điểm $M(x;y)$ trong mặt phẳng tọa độ Oxy. Khi đó mặt phẳng tọa độ Oxy có thể được coi là biểu diễn hình học của $\mathbb{R}^2$.**

Tương tự, **mỗi phần tử $u(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 = \{(x;y;z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$ được biểu diễn hình học bằng điểm $M(x;y;z)$ trong không gian $Oxyz$. Khi đó không gian $Oxyz$ có thể được coi là biểu diễn hình học của $\mathbb{R}^3$.**

2. Hàm số hai biến

Cho D là một tập con của $\mathbb{R}^2 = \{(x;y) |\ x, y \in \mathbb{R}\}$. Hàm hai biến x, y trên D là một quy tắc f từ D đến $\mathbb{R}$ cho tương ứng mỗi cặp $(x;y) \in D$ thành một và chỉ một số thực z. Khi đó, ta viết $z = f(x, y)$ được gọi là giá trị của f tại $(x;y) \in D$, D được gọi là miền xác định của f, và x, y là hai biến độc lập của hàm f, còn $z = f(x, y)$ phụ thuộc vào x, y.

- **Ta thường viết sơ đồ tắt cho f như sau:**

$$f : D \to \mathbb{R}$$

$$(x; y) \mapsto z = f(x, y)$$

- **Chú ý:** **Cho hàm hai biến $z = f(x, y)$. Miền xác định của z là**

$$D = \{(x; y) | f(x, y) \text{ có nghĩa}\}.$$

• Nếu ta coi $(x; y)$ là tọa độ của điểm M trong mặt phẳng tọa độ Oxy, thì ta có thể viết $z = f(M) = f(x, y)$. Khi đó D là một miền trong mặt phẳng tọa độ Oxy.

• Đồ thị của hàm hai biến $z = f(x, y)$ là tập hợp các điểm trong không gian $Oxyz$, và được xác định như sau:

$$S = \{(x; y; z) | (x; y) \in D,\ z = f(x, y)\}.$$

VD 1. Cho hàm hai biến $z = 2x + 8y$. Xác định miền xác định của z. Tính giá trị của z tại $(-1; 2)$.

Giải:

Biểu thức $z = 2x + 8y$ xác định đồng thời tại mọi $x, y \in \mathbb{R}$.

Miền xác định của z là $D = \{(x; y) |$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2$.

Tính giá trị của z tại $(-1; 2)$, thay $x = -1$ và $y = 2$ vào biểu thức của z, ta được, $z(-1, 2) = 2.(-1) + 8.2 = 14$.

VD 2. **Cho hàm số $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Tìm miền xác định của z. Tính giá trị của z tại $(0; a)$ với a là số thực cho trước.**

Giải:

+) Biểu thức $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ xác định khi $1 - x^2 - y^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 1$.

Miền xác định là $D = \{(x; y) | x^2 + y^2 \leq 1, \text{ với } x, y \in \mathbb{R}\}$.

+) Ta có $(0; a) \in D$ khi và chỉ khi $a^2 \leq 1 \Leftrightarrow |a| \leq 1$.

Khi $|a| \leq 1$, ta có $z(0, a) = \sqrt{1 - a^2}$.

Khi $|a| > 1$, hàm hai biến z không xác định tại $(0; a)$.

BT 1. Tìm miền xác định của các hàm số hai biến sau:

a) $\boldsymbol{z = x^3 + y^3 - 3xy + 2020.}$

b) $\boldsymbol{z = xy + \ln x.}$

c) $\boldsymbol{z = \arctan \frac{x}{y} + \sin(2xy).}$

Đáp số:

a) $\boldsymbol{D = \mathbb{R}^2.}$

b) $\boldsymbol{D = \{(x; y) | x > 0,\ \text{mọi } y \in \mathbb{R}\}.}$

c) $\boldsymbol{D = \{(x; y) | y \neq 0,\ \text{mọi } x \in \mathbb{R}\}.}$

2. Hàm số ba biến và nhiều biến

• Cho $V \subset \mathbb{R}^3$. **Hàm ba biến x, y, z trên V** là **một quy tắc $f : V \to \mathbb{R}$ cho tương ứng mỗi phần tử $(x; y; z) \in V$ thành một và chỉ một số thực $u = f(x, y, z)$.** Khi đó V gọi là **miền xác định**, x, y, z là **ba biến độc lập** và $u = f(x, y, z)$ là biến phụ thuộc vào x, y, z.

▷ Tại $(x_0; y_0; z_0) \in V$; giá trị $u_0 := u(x_0, y_0, z_0) = f(x_0, y_0, z_0)$ được gọi là **giá trị của hàm số ba biến f tại $(x_0; y_0; z_0)$.**

▷ Coi $(x; y; z)$ là tọa độ của điểm M trong không gian $Oxyz$, ta có thể viết $u = f(M) = f(x, y, z)$. Khi đó V là một miền trong không gian $Oxyz$.

Chú ý: Cho hàm ba biến $u = f(x, y, z)$. Miền xác định của u là

$$V = \{(x; y; z) | f(x, y, z) \text{ có nghĩa}\}.$$

• Tương tự, hàm n biến $x_1, x_2, \cdots, x_n$ trên $V \subset \mathbb{R}^n$ là một quy tắc

$$\begin{aligned} f : V &\to \mathbb{R} \\ (x_1; x_2, \cdots, x_n) &\mapsto u = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \end{aligned}$$

trong đó, $u = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ là giá trị của hàm số f tại $(x_1; x_2, \cdots, x_n)$ thuộc V, tập V là miền xác định của f và $x_1, x_2, \cdots, x_n$ là n biến của hàm số f.

VD 3. **Cho hàm số ba biến $u = 2x + 3y^2 - 4z^5$. Tìm miền xác định của u. Tính giá trị của u tại điểm $(0; 0; 0)$.**

Giải:

Biểu thức $u = 2x+3y^2-4z^5$ xác định đồng thời tại mọi số thực $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Miền xác định là $V = \{(x; y; z) |$ mọi $x, y, z \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^3$.

Tính giá trị của u tại $(0; 0; 0)$; thay $x = 0, y = 0$ và $z = 0$ vào biểu thức của u, ta được $u(0, 0, 0) = 0$.

BT 2. Tìm miền xác định của các hàm ba biến sau:

a) $\boldsymbol{u = x.y.z + y + z + x.}$

b) $\boldsymbol{u = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}.}$

c) $\boldsymbol{u = \sin\frac{x}{y} + \ln z + \cos(xyz).}$

Đáp số:

a) $\boldsymbol{V = \mathbb{R}^3.}$

b) $\boldsymbol{V = \{(x;y;z)|x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ \text{mọi } x, y, z \in \mathbb{R}\}.}$

c) $\boldsymbol{V = \{(x;y;z)|y \neq 0, z > 0,\ \text{mọi } x \in \mathbb{R}\}.}$

II. GIỚI HẠN VÀ TÍNH LIÊN TỤC

Ta xem xét với hàm hai biến $z = f(x, y)$ xác định trong miền D, còn với các hàm có nhiều hơn 2 biến, chúng ta làm tương tự. Cho $M_0(a; b)$ (có thể không cần thuộc D).

Ta cần diễn tả sau: Cho $M(x; y)$ và $M_0(a; b)$. Điểm M được gọi là dần tới M_0 (viết là $M \to M_0$) khi và chỉ khi $\begin{cases} x \to a \,(\text{hay } x \text{ dần tới } a) \\ y \to b \,(\text{hay } y \text{ dần tới } b). \end{cases}$

Lấy $M(x; y) \in D$. Ta có $z = f(M) = f(x, y)$.

Nếu khi $M \to M_0$ mà $z = f(M)$ dần tới L (hữu hạn) hay được viết là $z = f(M) \to L$, thì ta nói L là giới hạn của $f(x, y)$ khi $M \to M_0$ và viết là $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = L$ hay $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L$ hay $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ y\to b}} f(x, y) = L$.

Ví dụ: Cho hàm $z = x + y$. Khi $(x, y) \to (1, 1)$ thì $z = x + y \to 1 + 1 = 2$.

Do đó, $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ y \to 1}} (x + y) = 2$.

- Ta viết $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x, y) = \pm\infty$ nếu khi $(x, y) \to (a, b)$ mà $f(x, y) \to \pm\infty$.
- Nếu $M_0 \in D$ và $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = f(M_0)$ thì ta nói f liên tục tại M_0.

Hàm số $z = f(x, y)$ được gọi là liên tục trên D nếu nó liên tục tại mọi điểm $M_0 \in D$.

III. ĐẠO HÀM RIÊNG

Cho hàm hai biến $z = f(x, y)$ có miền xác định D. Trong trường hợp hàm số nhiều hơn hai biến số, ta định nghĩa tương tự.

- **Tại $M_0(x_0; y_0) \in D$, nếu hàm số một biến $h(x) = z(x, y_0) = f(x, y_0)$ có đạo hàm tại x_0, thì đạo hàm đó được gọi là đạo hàm riêng của z đối với x tại M_0 và được ký hiệu là: $z'_x(x_0, y_0)$ hoặc $\dfrac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)$.**
- **Tương tự, người ta định nghĩa đạo hàm riêng của z theo biến y tại M_0, ký hiệu là: $z'_y(x_0, y_0)$ hoặc $\dfrac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0)$.**

• **Hàm số hai biến z được gọi là có đạo hàm riêng theo x hoặc y trên D nếu z có đạo hàm riêng theo x hoặc y tại mọi điểm thuộc D.**

Chú ý: **Khi tính đạo hàm riêng của hàm hai biến $z = f(x, y)$, ta chú ý:**

+) Để tính z'_x, ta xem như z là hàm số phụ thuộc vào biến số x, và coi y là tham số.

+) Để tính z'_y, ta xem như z là hàm số phụ thuộc vào biến số y, và coi x là tham số.

VD 4. **Cho hàm số $z = x^3y^2 + 2xy - 3x + 5y - 7$. Tính $z'_x =?$, $z'_y =?$.**

Giải:

Ta có $z'_x = (x^3.y^2)'_x + (2xy)'_x - (3x)'_x + (5y)'_x - (7)'_x = 3x^2.y^2 + 2y - 3.$

Ta cũng có $z'_y = (x^3.y^2)'_y + (2xy)'_y - (3x)'_y + (5y)'_y - (7)'_y = 2y.x^3 + 2x + 5.$

VD 5. **Cho hàm số** $z = 2x^3 + 3y^4 - 5xy^2 + 6$. **Tính các đạo hàm riêng của** z **và tính giá trị của các đạo hàm riêng tại điểm** $(0;1)$.

Giải:

Ta có $z'_x = 6x^2 - 5y^2$.

Ta cũng có $z'_y = 12y^3 - 10xy$.

Ta lại có $z'_x(0,1) = -5$ **và** $z'_y(0,1) = 12$.

VD 6. **Cho hàm số** $z = \cos\dfrac{x}{y}$. **Tính các đạo hàm riêng của** z.

Giải:

Ta có $z'_x = -\sin\frac{x}{y}.\left(\frac{x}{y}\right)'_x = -\frac{1}{y}.\sin\frac{x}{y}.$

Ta cũng có $z'_y = -\sin\frac{x}{y}.\left(\frac{x}{y}\right)'_y = \frac{x}{y^2}.\sin\frac{x}{y}.$

BT 3. Tính đạo hàm riêng của các hàm số sau:

a) $\boldsymbol{z = x^3 + y^3 - 3xy.}$

b) $\boldsymbol{z = x^4 - 5x^3y^2 + 2y^4.}$

c) $\boldsymbol{z = x^4 + y^4 - 4x - 4y + 2020.}$

d) $\boldsymbol{z = \ln(x^2 + y^2).}$

e) $\boldsymbol{z = \arctan \frac{x}{y}.}$

f) $\boldsymbol{z = x^{y^3}.}$

Đáp số:

a) $z'_x = 3x^2 - 3y, z'_y = 3y^2 - 3x.$ b) $z'_x = 4x^3 - 15x^2y^2, z'_y = -10x^3y + 8y^3.$

c) $z'_x = 4x^3 - 4, z'_y = 4y^3 - 4.$

d) $z'_x = \frac{2x}{x^2+y^2}, z'_y = \frac{2y}{x^2+y^2}$, tại $(x; y)$ thỏa mãn $x \neq 0$ hoặc $y \neq 0$.

e) $z'_x = \frac{y}{x^2+y^2}, z'_y = -\frac{x}{x^2+y^2}$, tại $(x; y)$ thỏa mãn $y \neq 0$.

f) Hàm số xác định tại $(x; y)$ thỏa mãn $x > 0$. $z'_x = y^3.x^{y^3-1}, z'_y = 3y^2.x^{y^3}.\ln x$ tại các điểm thuộc miền xác định của hàm số.

ĐẠO HÀM RIÊNG CẤP CAO: Xét hàm hai biến $z = f(x, y)$ có miền xác định D. Các đạo hàm riêng z'_x, z'_y là những đạo hàm riêng cấp một.

• Vì các đạo hàm riêng cấp một z'_x và z'_y là các hàm hai biến x, y nên chúng có thể có các đạo hàm riêng theo x và theo y. Các đạo hàm riêng của các đạo hàm riêng cấp một nếu tồn tại được gọi là những đạo hàm riêng cấp hai. Ta có bốn đạo hàm riêng cấp hai của z, được kí hiệu như sau:

$$z''_{xx} = z''_{x^2} \left(\text{hoặc } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) := \left(z'_x\right)'_x, \qquad z''_{xy} \left(\text{hoặc } \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\right) := \left(z'_x\right)'_y,$$

$$z''_{yx} \left(\text{hoặc } \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right) := \left(z'_y\right)'_x, \qquad z''_{yy} = z''_{y^2} \left(\text{hoặc } \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) := \left(z'_y\right)'_y.$$

• Tương tự, ta có các đạo hàm riêng cấp ba, cấp bốn...

Định lý Schwarz: Nếu hàm số $z = f(x, y)$ có các đạo hàm riêng z''_{xy}, z''_{yx} tồn tại trong một lân cận U của M_0 và liên tục tại $M_0(x_0; y_0)$ thì ta có

$$z''_{xy}(x_0, y_0) = z''_{yx}(x_0, y_0).$$

Chú ý: Tập U được gọi là một lân cận của M_0 nếu U chứa một hình tròn tâm M_0 nào đó.

VD 7. Tính các đạo hàm riêng cấp hai của $z = x^3 + y^3 - 3xy$. Sau đó, tính giá trị của các đạo hàm riêng cấp 2 vừa tính tại điểm $(1; 1)$.

Giải:

Ta có $\begin{cases} z'_x = 3x^2 - 3y \\ z'_y = 3y^2 - 3x. \end{cases}$

Do đó $\begin{cases} z''_{x^2} = (z'_x)'_x = 6x, \quad z''_{xy} = (z'_x)'_y = -3 \\ z''_{yx} = (z'_y)'_x = -3, \quad z''_{y^2} = (z'_y)'_y = 6y. \end{cases}$

Ta có $z''_{x^2}(1,1) = 6,\ z''_{xy}(1,1) = -3,\ z''_{yx}(1,1) = -3,\ z''_{y^2}(1,1) = 6.$

VD 8. Tính các đạo hàm riêng cấp 2 của hàm số $z = x^2e^y + x^3y^2 - y^5.$

Giải:

Ta có, $z'_x = 2xe^y + 3x^2y^2, \; z'_y = x^2e^y + 2x^3y - 5y^4,$

Do đó, $z''_{x^2} = 2e^y + 6xy^2, \quad z''_{y^2} = x^2e^y + 2x^3 - 20y^3,$

$$z''_{xy} = 2xe^y + 6x^2y, \qquad z''_{yx} = 2xe^y + 6x^2y.$$

BT 4. 1) Tính các đạo hàm riêng cấp hai của các hàm sau:

a) $z = x^2 + y^2 - 2xy.$

b) $z = x^3 + xy^2 + 2x.$

c) $z = x^4 + y^4 - 4x - 4y.$

d) $z = x + y + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$

e) $z = e^{x^2 - y^2}.$

2) Chứng minh rằng hàm số $z = \sin(xy) + \ln \dfrac{x}{y}$ thoả mãn:

$$x^2.z''_{x^2} - y^2.z''_{y^2} + x.z'_x - y.z'_y = 0.$$

Đáp số:

1)

a) $z''_{x^2} = 2$, $z''_{y^2} = 2$, $z''_{xy} = z''_{yx} = -2$.

b) $z''_{x^2} = 6x$, $z''_{y^2} = 2x$, $z''_{xy} = z''_{yx} = 2y$.

c) $z''_{x^2} = 12x^2$, $z''_{y^2} = 12y^2$, $z''_{xy} = z''_{yx} = 0$.

d) Tại $(x; y)$ thỏa mãn $x \neq 0$ và $y \neq 0$, ta có $z''_{x^2} = \frac{2}{x^3}$, $z''_{y^2} = \frac{2}{y^3}$, $z''_{xy} = z''_{yx} = 0$.

e) $z''_{x^2} = (2 + 4x^2)e^{x^2-y^2}$, $z''_{y^2} = (4y^2 - 2)e^{x^2-y^2}$, $z''_{xy} = z''_{yx} = -4xye^{x^2-y^2}$.

2) Tính được $z'_x = y\cos(xy) + \frac{1}{x}$, $z'_y = x\cos(xy) - \frac{1}{y}$, và $z''_{x^2} = -y^2\sin(xy) - \frac{1}{x^2}$, $z''_{y^2} = -x^2\sin(xy) + \frac{1}{y^2}$. Thay các đạo hàm vào vế trái và thu được kết quả mong đợi.

III. ĐẠO HÀM THEO HƯỚNG VÀ QUY TẮC DÂY XÍCH

Sinh viên tìm hiểu trong giáo trình

IV. VI PHÂN TOÀN PHẦN CỦA HÀM NHIỀU BIẾN

Cho hàm số $z = f(x, y)$ xác định trên miền D. Lấy các điểm $M_0(x_0; y_0) \in D$, $M(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) \in D$.

Biểu thức $\Delta z = z(M) - z(M_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ được gọi là số gia toàn phần của z tại M_0.

• Nếu $\Delta z = A.\Delta x + B.\Delta y + \alpha.\Delta x + \beta.\Delta y$, trong đó A, B là những số chỉ phụ thuộc vào x_0, y_0, còn $\alpha, \beta \to 0$ khi $M \to M_0$ (tức là, $\Delta x \to 0$ và $\Delta y \to 0$), thì ta nói rằng hàm số z khả vi tại M_0, còn biểu thức $A\Delta x + B\Delta y$ được gọi là vi phân toàn phần của z tại M_0 và được ký hiệu là dz. Khi đó $dz(x_0, y_0) = df(x_0, y_0) = A(x_0, y_0)\Delta x + B(x_0, y_0)\Delta y$.

• **Hàm số $z = f(x, y)$ được gọi là khả vi trên D nếu nó khả vi tại mọi điểm thuộc miền này.**

MỘT VÀI KẾT QUẢ VỀ TÍNH KHẢ VI VÀ VI PHÂN TOÀN PHẦN

• **Nếu $z = f(x, y)$ khả vi tại $M_0(x_0, y_0)$ thì z liên tục tại M_0.**

• **Nếu $z = f(x, y)$ khả vi tại $M_0(x_0, y_0)$ và $dz(x_0, y_0) = A(x_0, y_0).\Delta x + B(x_0, y_0).\Delta y$ thì**

$$A(x_0, y_0) = z'_x(x_0, y_0), \quad B(x_0, y_0) = z'_y(x_0, y_0).$$

• **Giả sử $z = f(x, y)$ có các đạo hàm riêng z'_x, z'_y trong một lân cận U của $M_0(x_0, y_0)$, với U nằm trong D.**

Khi đó, nếu z'_x, z'_y liên tục tại M_0 thì z khả vi tại M_0. Hơn nữa,

$$dz(x_0, y_0) = z'_x(x_0, y_0)\Delta x + z'_y(x_0, y_0)\Delta y.$$

Chú ý 1: **Vi phân toàn phần được viết như sau:**

$$\begin{aligned} dz(x, y) &= z'_x(x, y)\Delta x + z'_y(x, y)\Delta y \\ &= z'_x(x, y)dx + z'_y(x, y)dy. \end{aligned}$$

Chú ý 2: **Cho hàm hai biến $z = f(x, y)$ xác định trên miền D. Vi phân toàn phần $dz(x, y)$ được xác định như sau:**

Bước 1: **Tính z'_x, z'_y.**

Bước 2: **Tính vi phân toàn phần $dz = z'_x.dx + z'_y.dy$.**

VD 9. **Cho hàm $z = x^3 + y^2 - 2xy$. Tính vi phân toàn phần $dz(x, y)$ và $dz(1, 1)$.**

Giải:

Hàm z xác định trên $\mathbb{R}^2$.

Ta có $z'_x = 3x^2 - 2y, z'_y = 2y - 2x$.

Suy ra $dz(x,y) = z'_x.dx + z'_y.dy = (3x^2 - 2y)dx + (2y - 2x)dy$.

Và $dz(1,1) = (3-2)dx + (2-2)dy = dx$.

VD 10. **Cho hàm $z = \ln(x^2 + y^2)$. Tính vi phân toàn phần $dz(x,y)$ và $dz(0,1)$.**

Giải:

Hàm z xác định trên $D = \{(x; y)|x \neq 0$ hoặc $y \neq 0\}$.

Ta có $z'_x = \frac{2x}{x^2+y^2}, z'_y = \frac{2y}{x^2+y^2}$.

Suy ra $dz(x, y) = \frac{2x}{x^2+y^2}.dx + \frac{2y}{x^2+y^2}.dy$.

Và $dz(0, 1) = \frac{2.0}{0+1}.dx + \frac{2.1}{0+1}.dy = 2dy$.

ỨNG DỤNG CỦA VI PHÂN TOÀN PHẦN TÍNH GẦN ĐÚNG:

Cho hàm hai biến $z = f(x, y)$ có các đạo hàm riêng z'_x, z'_y liên tục trong một lân cận U của $M_0(x_0; y_0)$.

Xét $M(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) \in U$ sao cho $|\Delta x|$ và $|\Delta y|$ khá bé. Khi đó

$$z(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx z(x_0, y_0) + z'_x(x_0, y_0).\Delta x + z'_y(x_0, y_0).\Delta y.$$

VD 11. Cho hàm $z = \arctan\frac{y}{x}$. Cho điểm $M(0,95; 1,02)$. Hãy xấp xỉ $z(M)$ theo $z(1, 1)$.

Giải:

Hàm số z xác định trên $D = \{(x; y) | x \neq 0,\ \text{mọi } y \in \mathbb{R}\}$.

Ta cần xấp xỉ $z(M)$ theo $z(1, 1)$.

Ta thấy $M(0,95; 1,02) = (1 + \Delta x; 1 + \Delta y)$. Suy ra $\Delta x = -0,05$ và $\Delta y = 0,02$. Do đó $|\Delta x|$ và $|\Delta y|$ khá nhỏ.

Mặt khác, ta có $z'_x = -\frac{y}{x^2+y^2}, z'_y = \frac{x}{x^2+y^2}$. Và ta cũng có z'_x, z'_y liên tục trong một lân cận U của $(1; 1)$, thỏa mãn $M \in U$.

Suy ra $z'_x(1, 1) = -0, 5, z'_y(1, 1) = 0, 5$.

Vậy $z(M) = z(1 + \Delta x; 1 + \Delta y) \approx z(1, 1) + z'_x(1, 1).\Delta x + z'_y(1, 1).\Delta y = \frac{\pi}{4} + 0, 035 \approx 0, 82$.

VD 12. **Sử dụng vi phân toàn phần, tính xấp xỉ** $\sqrt[3]{(1,02)^2 + (0,05)^{20}}$.

Giải:

Xét hàm số $z = \sqrt[3]{x^2 + y^{20}}$**, xác định trên** $\mathbb{R}^2$**.**

Ta có $z'_x = \frac{2x}{3.\sqrt[3]{(x^2+y^{20})^2}}$, $z'_y = \frac{20y^{19}}{3.\sqrt[3]{(x^2+y^{20})^2}}$.

Gọi M **có tọa độ** $(1,02; 0,05)$**. Ta cần xấp xỉ** $z(M)$**. Chọn** $M_0(1;0)$**. Ta thấy** $z(1;0) = 1, z'_x(1,0) = \frac{2}{3}$ **và** $z'_y(1,0) = 0$**.**

Mà $M(1,02; 0,05) = (1 + \Delta x; \Delta y)$**. Suy ra** $\Delta x = 0,02$ **và** $\Delta y = 0,05$**. Do đó** $|\Delta x|$ **và** $|\Delta y|$ **khá nhỏ.**

Mặt khác, ta có z'_x, z'_y **liên tục trong một lân cận** U **của** M_0 **thỏa mãn** $M \in U$**.**

Vậy $z(M) = z(1+\Delta x; \Delta y) \approx z(1,0) + z'_x(1,0).\Delta x + z'_y(1,0).\Delta y = 1 + \frac{2}{3} \approx 1,66667$**.**

VI PHÂN TOÀN PHẦN CẤP CAO: Cho hàm $z = f(x, y)$ có vi phân toàn phần $dz(x, y) = z'_x(x, y)dx + z'_y(x, y)dy$ trên miền D. Ta gọi $dz(x, y)$ là vi phân toàn phần cấp một của z và $dz(x, y)$ cũng là một hàm hai biến x, y trên D.

Nếu dz có vi phân toàn phần trên D thì ta nói z có vi phân toàn phần cấp hai trên D (tương ứng ta cũng nói z khả vi cấp hai), ký hiệu vi phân toàn phần cấp hai bởi $d^2z(x, y)$ hay $d^2f(x, y)$. Khi đó $d^2z(x, y) = d(dz(x, y))$.

Kết quả 1: Nếu $z = f(x, y)$ có các đạo hàm riêng đến cấp hai liên tục thì $d^2z(x, y) = z''_{x^2}(x, y)dx^2 + 2z''_{xy}(x, y)dxdy + z''_{y^2}(x, y)dy^2$ $\big($hoặc viết $d^2z(x, y) = z''_{x^2}(x, y)(\Delta x)^2 + 2z''_{xy}(x, y)\Delta x\Delta y + z''_{y^2}(x, y)(\Delta y)^2\big)$; trong đó $dx^2 = (dx)^2$ và $dy^2 = (dy)^2$.

Cứ tiếp tục như vậy, ta có vi phân toàn phần cấp n của $z = f(x, y)$ và nó được ký hiệu bởi $d^n z(x, y)$. Khi đó $d^n z(x, y) = d(d^{n-1} z(x, y))$, với $n \geq 2$.

Kết quả 2: **Nếu $z = f(x, y)$ có các đạo hàm riêng đến cấp n liên tục thì z có vi phân toàn phần đến cấp n.**

Quy trình tính vi phân toàn phần cấp hai: Cho $z = f(x, y)$.

Bước 1: **Tính** z'_x, z'_y.

Bước 2: **Tính** $z''_{x^2}, z''_{xy}, z''_{y^2}$.

Bước 3: $d^2z(x, y) = z''_{x^2}dx^2 + 2z''_{xy}dxdy + z''_{y^2}dy^2$.

VD 13. Cho $z = x^3 + 2xy - y^3$. Tìm $d^2z(x, y)$.

Giải:

Ta có $\boldsymbol{z'_x = 3x^2 + 2y}$ và $\boldsymbol{z'_y = 2x - 3y^2.}$ Suy ra, $\boldsymbol{z''_{x^2} = 6x, z''_{xy} = 2, z''_{y^2} = -6y.}$

Vậy $\boldsymbol{d^2z(x,y) = z''_{x^2}dx^2 + 2z''_{xy}dxdy + z''_{y^2}dy^2 = 6xdx^2 + 4dxdy - 6ydy^2.}$

V. CÔNG THỨC TAYLOR CỦA HÀM HAI BIẾN

Công thức Taylor: Cho $z = f(x, y)$ có các đạo hàm riêng liên tục đến cấp n (với $n \geq 1$) trong hình tròn V tâm $M(x_0; y_0)$, bán kính $r > 0$. Khi đó, với mỗi điểm (u, v) mà $u^2 + v^2 < r^2$, luôn tồn tại số $\theta \in (0, 1)$ sao cho

$$f(x_0 + u, y_0 + v) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{1!}\Big(f'_x(x_0, y_0) \cdot u + f'_y(x_0, y_0) \cdot v\Big) +$$
$$+ \frac{1}{2!}\Big(f''_{x^2}(x_0, y_0) \cdot u^2 + 2f"_{xy}(x_0, y_0) \cdot uv + f''_{y^2}(x_0, y_0) \cdot v^2\Big) +$$
$$+ \ldots + \frac{1}{(n-1)!}\left(u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n-1} f(x_0, y_0) +$$
$$+ \frac{1}{n!}\left(u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y}v\right)^{n} f(x_0 + \theta u, y_0 + \theta v);$$

trong đó $0! = 1$, $n! = 1 \cdot 2 \cdots (n-1) \cdot n$ và

ta ký hiệu $\left(u\dfrac{\partial}{\partial x}+v\dfrac{\partial}{\partial y}v\right)^k f(x_0,y_0)$ **thay cho biểu thức**

$$C_k^0u^k\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x_0,y_0)+C_k^1u^{k-1}v\frac{\partial^k f}{\partial x^{k-1}\partial y}(x_0,y_0)+$$
$$+C_k^2u^{k-2}v^2\frac{\partial^k f}{\partial x^{k-2}\partial y^2}(x_0,y_0)+\ldots+$$
$$+C_k^{k-1}uv^{k-1}\frac{\partial^k f}{\partial x\partial y^{k-1}}(x_0,y_0)+C_k^kv^k\frac{\partial^k f}{\partial y^k}(x_0,y_0),$$

trong đó $C_k^i=\dfrac{k!}{i!(k-i)!}$.

VI. CỰC TRỊ TỰ DO HÀM 2 BIẾN

Định nghĩa: Xét $z = f(x, y)$ có TXĐ $D \ni M_0(x_0; y_0)$.

Ta nói $f(x, y)$ đạt cực trị tại M_0 nếu tồn tại một lân cận $U(M_0)$ của M_0 thỏa mãn $U(M_0)$ nằm trong D và $\forall M$ thuộc $U(M_0)$ và $M \neq M_0$, ta có hiệu $f(M) - f(M_0)$ có dấu không đổi.

i) Nếu $f(M) - f(M_0) > 0$ thì M_0 là điểm cực tiểu và $f(M_0)$ được gọi là giá trị cực tiểu của f tại M_0.

ii) Nếu $f(M) - f(M_0) < 0$ thì M_0 là điểm cực đại và $f(M_0)$ được gọi là giá trị cực đại của f tại M_0.

Điểm cực đại và điểm cực tiểu được gọi chung là điểm cực trị.

Định lý (Điều kiện cần để có cực trị tự do):

Nếu hàm số $z = f(x, y)$ đạt cực trị tại M_0 mà tại đó các đạo hàm riêng f'_x, f'_y tồn tại thì $f'_x(M_0) = f'_y(M_0) = 0$.

NHẬN XÉT

1. **Định lí trên cho phép ta thu hẹp việc tìm cực trị tại những điểm tại đó các đạo hàm riêng cấp một đều triệt tiêu hoặc không tồn tại. Những điểm đó được gọi là điểm tới hạn.**

   Các điểm mà tại đó các đạo hàm riêng cấp một triệt tiêu được gọi là các điểm dừng.

2. **Điều kiện trên chỉ là điều kiện cần, điều ngược lại KHÔNG đúng.**

   Chẳng hạn xét với hàm $z = x^2 - y^2$ có điểm dừng $M_0(0;0)$, tuy nhiên M_0 không là điểm cực trị, vì

   – với $M(x;0) \in U(M_0)$ $(x \neq 0)$ thì $z(M) - z(M_0) = x^2 > 0$

   – với $M(0;y) \in U(M_0)$ $(y \neq 0)$ thì $z(M) - z(M_0) = -y^2 < 0$.

Định lý (Điều kiện đủ)

Giả sử hàm số $z = z(x, y)$ có điểm tới hạn $M_0(x_0; y_0)$ và có các đạo hàm riêng đến cấp hai liên tục trong $U(M_0)$. Đặt

$$A = z''_{x^2}(M_0), \quad B = z''_{xy}(M_0), \quad C = z''_{y^2}(M_0).$$

Khi đó:

$B^2 - AC$	A	Kết luận về điểm M_0
$-$	$-$	Hàm đạt cực đại (hay M_0 là điểm cực đại)
$-$	$+$	Hàm đạt cực tiểu (hay M_0 là điểm cực tiểu)
$+$		Hàm không đạt cực trị (hay M_0 không phải điểm cực trị)
0		Chưa KL được (cần xét thêm)

CÁC BƯỚC TÌM CỰC TRỊ TỰ DO)

Cho hàm số $z = z(x, y)$. Tìm các điểm cực trị của z.

Bước 1: **Tính z'_x, z'_y. Tìm tọa độ các điểm tới hạn: Giải hệ** $\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases}$.

Bước 2: **Tính $A = z''_{xx}$, $B = z''_{xy}$, $C = z''_{yy}$. Tính $B^2 - AC$.**

Lấy $M_0(x_0; y_0)$ là điểm tới hạn ở Bước 1 đã tìm. Tính $B^2 - AC$, A tại M_0 và kết luận.

Ta có bảng ghi nhớ sau:

$B^2 - AC$	A	Kết luận về điểm M_0
$-$	$-$	Hàm đạt cực đại (hay M_0 là điểm cực đại)
$-$	$+$	Hàm đạt cực tiểu (hay M_0 là điểm cực tiểu)
$+$		Hàm không đạt cực trị (hay M_0 không phải điểm cực trị)
0		Chưa KL được (cần xét thêm)

VD 14. **Tìm điểm cực trị của hàm số $z = x^3 + y^3 - 3xy$.**

Giải: $\boxed{z = x^3 + y^3 - 3xy}$

Ta có $z'_x = 3x^2 - 3y;\quad z'_y = 3y^2 - 3x.$

Tọa độ của điểm tới hạn là nghiệm của hệ $\begin{cases} x^2 - y = 0, \\ y^2 - x = 0. \end{cases}$

Giải hệ, tìm được hai điểm tới hạn $M_0(0;0)$, $M_1(1;1)$.

Lại có $\begin{cases} A = z''_{x^2} = 6x \\ B = z''_{xy} = -3 \\ C = z''_{y^2} = 6y \end{cases} \Rightarrow \boxed{B^2 - AC = 9 - 36xy}$

– tại $M_0(0;0)$ có $B^2 - AC = 9 > 0$ nên M_0 không là điểm cực trị.

– tại $M_1(1;1)$ có $B^2 - AC = 9 - 36 = -27 < 0$, $A = 6 > 0$ nên M_1 là điểm cực tiểu và $z_{\min} = 1 + 1 - 3 = -1$.

VD 15. **Tìm cực trị của hàm số $z = 10 - x^4 - y^4$.**

Giải: $\boxed{\text{Tìm cực trị của hàm số } z = 10 - x^4 - y^4}$

Ta có $z'_x = -4x^3, z'_y = -4y^3$.

Điểm tới hạn là $M(0;0)$.

Ta có $A = z''_{x^2} = -12x^2, B = z''_{xy} = 0, C = z''_{y^2} = -12y^2$.

Suy ra $B^2 - AC = -144x^2y^2$.

Tại $M(0;0)$, **ta có** $B^2 - AC = 0$; **chưa kết luận được.**

Ta có $z(M) = 10$ **và**

$$z(x,y) - z(M) = 10 - (x^4 + y^4) - 10 = -(x^4 + y^4) \leq 0, \forall (x,y),$$

vậy M **là điểm cực đại,** $z_{\max} = 10$.

VD 16. **Tìm cực trị của hàm số $z = x^3 + y^3$.**

Giải: $\boxed{\text{Tìm cực trị của hàm số } z = x^3 + y^3}$

Ta có $z'_x = 3x^2$; $z'_y = 3y^2$.

Vậy hàm số chỉ có một điểm tới hạn $M(0,0)$.

Ta có $A = z''_{x^2} = 6x, B = z''_{xy} = 0, C = z''_{y^2} = 6y$.

Suy ra $B^2 - AC = -36xy$.

Tại $M(0;0)$, ta có $B^2 - AC = 0$; do đó chưa kết luận ngay được.

Lấy $(x;y)$ thuộc một hình tròn tâm $M(0;0)$ nào đó.

Ta thấy $z(M) = 0$ và $z(x,y) - z(M) = x^3 + y^3$.

Hiệu này dương nếu $(x;y)$ nằm trong góc phần tư thứ nhất và âm nếu $(x;y)$ nằm trong góc phần tư thứ ba. Do đó M không là điểm cực trị.

BT 5. Tìm cực trị của các hàm số sau:

a) $\boldsymbol{z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5.}$

b) $\boldsymbol{z = 8x^3 + 2xy - 3x^2 + y^2.}$

c) $\boldsymbol{z = x + 2ey - e^x - e^{2y}.}$

d) $\boldsymbol{z = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2.}$

ĐÁP SỐ:

a) $M_1(0;0)$ **không là điểm cực trị;** $M_2\left(1;\dfrac{1}{2}\right)$ **là điểm cực tiểu,** $z_{\min} = 4$.

b) $M_1(0;0)$ **không là điểm cực trị;** $M_2\left(\dfrac{1}{3};-\dfrac{1}{3}\right)$ **là điểm cực tiểu,** $z_{\min} = -\dfrac{4}{27}$.

c) $M\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$ **là điểm cực đại,** $z_{\max} = -1$.

d) Tại $M_1(1;1)$, $M_2(-1;-1)$ **có** $z_{\min} = z(M_1) = z(M_2) = -2$.

Điểm dừng $M_3(0;0)$ **không là điểm cực trị vì**

– **nếu** $M \in U(M_3)$, $M(x;-x)$ $(x > 0)$ **thì** $z(M) - z(M_3) = 2x^4 > 0$;

– **nếu** $M \in U(M_3)$, $M(x;0)$ $(0 < x < 1)$ **thì** $z(M) - z(M_3) = x^2(x^2 - 1) < 0$.

VII. CỰC TRỊ CÓ ĐIỀU KIỆN CỦA HÀM 2 BIẾN

Định nghĩa: **Cực trị của hàm số $z = f(x, y)$ trong đó các biến số x và y bị ràng buộc bởi biểu thức $g(x, y) = 0$ được gọi là cực trị có điều kiện.**

1. Phương pháp chuyển về tìm cực trị hàm một biến số

Quy trình thực hiện:

1) Biến đổi điều kiện $g(x, y) = 0$ về dạng $y = h(x)$ hoặc $x = h(y)$. Chẳng hạn $g(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = h(x)$. Sau đó, thay $y = h(x)$ vào $z = f(x, y)$, ta nhận được hàm $g(x) = f(x, h(x))$ (đây là hàm số một biến).

2) Tìm điều kiện của x để đồng thời $h(x)$ và $g(x)$ xẩy ra, tức là $D = \{x \in \mathbb{R} \mid h(x) \text{ có nghĩa}\} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) \text{ có nghĩa}\}$. Tìm cực trị của hàm $g(x)$ trên D.

3) Kết luận: Nếu $x_0 \in D$ là cực trị của $g(x)$ thì điểm $(x_0, h(x_0))$ là điểm cực trị có điều kiện của z và giá trị $z_0 = f(x_0, h(x_0)) = g(x_0)$ là giá trị cực trị của z tại điểm $(x_0, h(x_0))$.

VD 17. **Tìm cực trị của hàm $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ với điều kiện $x + y - 1 = 0$.**

Giải: Ta có $\boldsymbol{x + y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = 1 - x,}$ (với $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$). Suy ra

$$\boldsymbol{h(x) = z(x, 1-x) = \sqrt{1 - x^2 - (1-x)^2} = \sqrt{2}.\sqrt{x - x^2},}$$

(với $\boldsymbol{0 \leq x \leq 1}$).

Ta thấy $\boldsymbol{h'(x) = \dfrac{(1-2x)\sqrt{2}}{2\sqrt{x - x^2}}}$. Suy ra $\boldsymbol{h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}}$. Bảng biến thiên của $\boldsymbol{h(x)}$ trên $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]$ như sau

$\boldsymbol{x}$	0		$\frac{1}{2}$		1
$\boldsymbol{h'(x)}$	$\Vert$	$+$	$\mathbf{0}$	$-$	$\Vert$
$\boldsymbol{h(x)}$	0	$\nearrow$	$\boldsymbol{h(\frac{1}{2})}$	$\searrow$	0

Do đó, $\boldsymbol{h(x)}$ đạt cực đại tại $\boldsymbol{x = \dfrac{1}{2}}$. Với $\boldsymbol{x = \dfrac{1}{2}}$, ta tính được $\boldsymbol{y = 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}}$. Vậy $\boldsymbol{z}$ đạt cực đại điều kiện tại điểm $\boldsymbol{M(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}$ và giá trị cực đại là $\boldsymbol{z_{\max} = \frac{1}{\sqrt{2}} = z\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)}$.

2. Phương pháp nhân tử Lagrange cho hàm hai biến

Bài toán: Tìm các điểm cực trị của hàm số $z = f(x, y)$ thỏa mãn $g(x, y) = 0$.

Quy trình thực hiện:

Bước 1: Lập hàm nhân tử Lagrange: $L = L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$.

Bước 2: Tính các đạo hàm riêng cấp một và cấp hai: $L'_x, L'_y, L'_\lambda, L''_{x^2}, L''_{xy}, L''_{y^2}$.

Cụ thể, $L'_x = f'_x + \lambda.g'_x$, $L'_y = f'_y + \lambda.g'_y$, $L'_\lambda = g(x, y)$,

$$L''_{x^2} = f''_{x^2} + \lambda.g''_{x^2},\quad L''_{xy} = f''_{xy} + \lambda.g''_{xy},\quad L''_{y^2} = f''_{y^2} + \lambda.g''_{y^2}.$$

Bước 3: Giải hệ $\begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \\ L'_\lambda = 0 \end{cases}$ $\rightarrow$ **các nghiệm viết dưới dạng:** $(x, y, \lambda) = (x_0, y_0, \lambda_0)$ **hoặc** $\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \\ \lambda = \lambda_0 \end{cases}$

Bước 4: Tính vi phân toàn phần cấp hai

$$d^2L = L''_{x^2}(dx)^2 + 2L''_{xy}dxdy + L''_{y^2}(dy)^2,$$

trong đó dx, dy **thỏa mãn** $(dx)^2 + (dy)^2 > 0$ **và** $g'_x.dx + g'_y.dy = 0$.

Bước 5: Kết luận.

Tại $(x, y, \lambda) = (x_0, y_0, \lambda_0)$, tức là $x = x_0, y = y_0, \lambda = \lambda_0$.

+) Thay $x = x_0, y = y_0$ vào $g'_x.dx + g'_y.dy = 0$; sau đó rút dy theo dx (hoặc có thể rút dx theo dy).

+) Tiếp tục thay $x = x_0, y = y_0, \lambda = \lambda_0$ và dy (vừa rút từ trên) vào d^2L. Sau đó xét dấu của d^2L theo dx.

- Nếu $d^2L > 0$ với mọi dx (thường $dx \neq 0$) thì hàm số $f(x, y)$ đạt cực tiểu có điều kiện tại điểm (x_0, y_0) và giá trị cực tiểu là $f_{\min} = f(x_0, y_0)$.

- Nếu $d^2L < 0$ với mọi dx (thường $dx \neq 0$) thì hàm số $f(x, y)$ đạt cực đại có điều kiện tại điểm (x_0, y_0) và giá trị cực đại là $f_{\max} = f(x_0, y_0)$.

VD 18. **Tìm cực trị của hàm $f(x, y) = 2x + 2y$ với điều kiện $x^2 + y^2 = 2$.**

Giải: **Viết lại điều kiện dưới dạng** $g(x,y) = x^2 + y^2 - 2 = 0$.

Hàm Lagrange $L = f(x,y) + \lambda g(x,y) = 2x + 2y + \lambda(x^2 + y^2 - 2)$.

Ta có $L'_x = 2 + 2\lambda x, L'_y = 2 + 2\lambda y$ **và** $L'_\lambda = x^2 + y^2 - 2$.

Hệ $\begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \\ L'_\lambda = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \lambda x = 0 \\ 1 + \lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 - 2 = 0 \end{cases}$

Giải hệ, ta nhận được $(x, y, \lambda) = (1, 1, -1)$ **hoặc** $(-1, -1, 1)$.

Tính các đạo hàm riêng:

$$g'_x = 2x,\ g'_y = 2y,\ L''_{xx} = 2\lambda,\ L''_{xy} = 0,\ L''_{yy} = 2\lambda.$$

$$d^2L = L''_{x^2}(dx)^2 + 2L''_{xy}dxdy + L''_{y^2}(dy)^2 = 2\lambda(dx)^2 + 2\lambda(dy)^2,$$

trong đó dx, dy thỏa mãn $(dx)^2 + (dy)^2 > 0$ và $g'_x dx + g'_y dy = 0$ hay $2xdx + 2ydy = 0$.

Tại $(x, y, \lambda) = (1, 1, -1)$, tức $x = 1, y = 1, \lambda = -1$. Ta có

$$d^2L = 2.(-1)(dx)^2 + 2.(-1)(dy)^2 < 0,$$

với mọi dx, dy thỏa mãn $(dx)^2 + (dy)^2 > 0$ và $2dx + 2dy = 0$.

Do đó hàm đạt cực đại có điều kiện tại điểm $(1, 1)$ và $f_{\max} = f(1, 1) = 4$.

Tại $(x, y, \lambda) = (-1, -1, 1)$, tức $x = -1, y = -1, \lambda = 1$. Ta có

$$d^2L = 2.1(dx)^2 + 2.1(dy)^2 > 0,$$

với mọi dx, dy thỏa mãn $(dx)^2 + (dy)^2 > 0$ và $-2dx - 2dy = 0$.

Do đó hàm đạt cực tiểu có điều kiện tại điểm $(-1, -1)$ và $f_{\max} = f(-1, -1) = -4$.

VD 19. Tìm cực trị của hàm $\boldsymbol{f(x, y) = xy + 2x}$ với điều kiện

$$\boldsymbol{g(x, y) = 8x + 4y - 120 = 0.}$$

Giải: Lập hàm Lagrange

$$\boldsymbol{L(x, y, \lambda) = xy + 2x + \lambda(8x + 4y - 120).}$$

Giải hệ $\begin{cases} \boldsymbol{L'_x = 0} \\ \boldsymbol{L'_y = 0} \\ \boldsymbol{L'_\lambda = 0} \end{cases}$ được một nghiệm $\boldsymbol{x = 8}$, $\boldsymbol{y = 14}$, $\boldsymbol{\lambda = -2}$.

Tại $\boldsymbol{x = 8}$, $\boldsymbol{y = 14}$ và $\boldsymbol{\lambda = -2}$, tính được $\boldsymbol{g'_x = 8,\ g'_y = 4,\ L''_{x^2} = 0,\ L''_{xy} = 1,\ L''_{y^2} = 0.}$ Do đó

$$\boldsymbol{d^2L = L''_{x^2}(dx)^2 + 2L''_{xy}dxdy + L''_{y^2}(dy)^2 = 2dxdy,}$$

trong đó $\boldsymbol{dx, dy}$ thỏa mãn $\boldsymbol{(dx)^2+(dy)^2 > 0}$ và $\boldsymbol{g'_x dx+g'_y dy = 0}$ hay $\boldsymbol{8dx+4dy = 0.}$

Từ $\boldsymbol{(dx)^2 + (dy)^2 > 0}$ và $\boldsymbol{8dx + 4dy = 0,}$ ta nhận được $\boldsymbol{dy = -2dx}$ (với $\boldsymbol{dx \neq 0}$) và thay vào $\boldsymbol{d^2L}$ nên ta có

$$\boldsymbol{d^2L = 2dx(-2dx) = -4(dx)^2 < 0}$$

với mọi $\boldsymbol{dx \neq 0.}$ Vậy hàm đạt cực đại có điều kiện tại điểm $\boldsymbol{(8, 14)}$ và $\boldsymbol{f_{\max} = f(8, 14) = 128}$.

VD 20. Tìm cực trị của hàm $f(x,y) = 8x + 15y + 28$ với điều kiện

$$g(x,y) = 2x^2 + 3y^2 - 107 = 0.$$

Giải: Lập hàm Lagrange $L = L(x,y,\lambda) = 8x + 15y + 28 + \lambda(2x^2 + 3y^2 - 107)$.

Giải hệ $L'_x = L'_y = L'_\lambda = 0$ được $(x,y,\lambda) = \left(4, 5, -\frac{1}{2}\right)$ hoặc $\left(-4, -5, \frac{1}{2}\right)$.

Tính các đạo hàm riêng:

$$g'_x = 4x,\ g'_y = 6y,\ L''_{xx} = 4\lambda,\ L''_{xy} = 0,\ L''_{yy} = 6\lambda.$$

$$d^2L = L''_{x^2}(dx)^2 + 2L''_{xy}dxdy + L''_{y^2}(dy)^2 = 4\lambda(dx)^2 + 6\lambda(dy)^2,$$

trong đó dx, dy thỏa mãn $(dx)^2 + (dy)^2 > 0$ và $g'_x dx + g'_y dy = 0$ hay $4xdx + 6ydy = 0$.

Tại $(x, y, \lambda) = \left(4, 5, -\frac{1}{2}\right)$, tức $x = 4, y = 5, \lambda = -\frac{1}{2}$. Ta có

$$d^2L = 4.\left(-\frac{1}{2}\right)(dx)^2 + 6.\left(-\frac{1}{2}\right)(dy)^2 < 0,$$

với mọi dx, dy thỏa mãn $(dx)^2 + (dy)^2 > 0$ và $4.4dx + 6.5dy = 0.$

Do đó hàm đạt cực đại có điều kiện tại điểm $(4, 5)$ và $f_{\max} = f(4, 5) = 135.$

Tại $(x, y, \lambda) = \left(-4, -5, \frac{1}{2}\right)$, tức $x = -4, y = -5, \lambda = \frac{1}{2}$. Ta có

$$d^2L = 4.\left(\frac{1}{2}\right)(dx)^2 + 6.\left(\frac{1}{2}\right)(dy)^2 > 0,$$

với mọi dx, dy thỏa mãn $(dx)^2 + (dy)^2 > 0$ và $4.(-4)dx + 6.(-5)dy = 0.$

Do đó hàm đạt cực tiểu có điều kiện tại điểm $(-4, -5)$ và $f_{\min} = f(-4, -5) = -79$.

BT 6.

a) Tìm cực trị của hàm $\boldsymbol{f(x,y) = 3x + 4y}$ với điều kiện

$$g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

b) Tìm cực trị của hàm $\boldsymbol{z = xy}$ với điều kiện

$$(x-1)^2 + y^2 = 1.$$

Đáp Số:

a) **Kết luận:** $f_{\max} = f\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) = 5,\qquad f_{\min} = f\left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right) = -5.$

b) **Kết luận** $z_{\max} = z\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4},\qquad z_{\min} = z\left(\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{4}.$