

Bài 1. Tính các giới hạn của các hàm số sau:

- a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \cos x}{x^2 + 2}$ c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(2 + x^2) \arcsin x^2}{\sqrt{1 + x^2}}$ e) $\lim_{x \rightarrow 0} (\arctan 2x + \ln(1 - x^2))$
b) $\lim_{x \rightarrow 2} e^{x^2-1} \sin \pi x$ d) $\lim_{x \rightarrow 0} x \arctan(x^2 + 1)$ f) $\lim_{x \rightarrow 1} (\arcsin(1 - x^2) + \arctan 2x)$

Bài 2. Sử dụng kỹ thuật tách và rút gọn để khử các giới hạn có dạng vô định $\frac{0}{0}$ sau:

Ý tưởng: Gặp $\lim_{x \rightarrow a} \frac{T}{M}$ với $T(a) = M(a) = 0$, ta phân tích $T = (x - a)^p \cdot A(x)$ và $M = (x - a)^q \cdot B(x)$ trong đó $A(a) \neq 0$ và $B(a) \neq 0$. Sau đó rút gọn nhân tử chung và đưa ra kết quả.

- a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^2}{x^3 - 1}$ c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^3 - 2x}{2x^2 + 3x}$ e) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^3 - 8}$ g) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 + 3x + 2}$
b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^2}{x^2 + 3x - 4}$ d) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4}$ f) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + 1}{2x^2 + x - 1}$ h) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x + 4}{x^4 - 16}$

Bài 3. Sử dụng kỹ thuật nhân liên hợp, tách và rút gọn để khử các giới hạn có dạng vô định $\frac{0}{0}$ sau:

Ý tưởng: Gặp $\lim_{x \rightarrow a} \frac{T}{M}$ trong đó $T(a) = M(a) = 0$ và T hoặc M chứa căn thức, ta trục căn thức, tách và sau đó rút gọn.

Chú ý: $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$ và $A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$ và $A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$

Gặp $\sqrt{A} - B$, sử dụng $\sqrt{A} + B$ để trục căn thức. Gặp $\sqrt{A} + B$, sử dụng $\sqrt{A} - B$ để trục căn thức. Với $\sqrt[3]{C} - D$ và $\sqrt[3]{C} + D$, dựa vào $A^3 \pm B^3$ để xác định biểu thức sử dụng cho trục căn.

- a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x^2 - 4x^4}$ c) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{2x^2 - 1} + x}{2x + 2}$ e) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x + 7} - 3}{2x^2 - 3x + 1}$ g) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{2x - 1} - 1}{2x - 2}$
b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + 3} - 2x}{1 - x^2}$ d) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x + 2} - x}$ f) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x^2 + 3} + 2x}{1 - x^4}$ h) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{\sqrt[3]{3x + 2} - x}$

Bài 4. Sử dụng kỹ thuật thêm bớt và giới hạn đặc biệt để khử các dạng $\frac{0}{0}$ sau:

Ý tưởng: Gặp $\lim_{x \rightarrow a} \frac{T}{M}$ trong đó $T(a) = M(a) = 0$ và T hoặc M là hàm đặc biệt như sau: $\sin u, \tan u, e^u - 1, \ln(1 + u), (1 + u)^p - 1$ với $u \rightarrow 0$ khi $x \rightarrow a$, ta thêm bớt thừa số để sử dụng được các giới hạn đặc biệt.

-Ta sử dụng các nhân tử thêm bớt đặc biệt sau:

$$\sin u = \frac{\sin u}{u} \cdot u; \quad \frac{1}{\sin u} = \frac{u}{\sin u} \cdot \frac{1}{u}; \quad \tan u = \frac{\tan u}{u} \cdot u; \quad \frac{1}{\tan u} = \frac{u}{\tan u} \cdot \frac{1}{u};$$

$$\ln(1 + u) = \frac{\ln(1 + u)}{u} \cdot u; \quad \frac{1}{\ln(1 + u)} = \frac{u}{\ln(1 + u)} \cdot \frac{1}{u}; \quad e^u - 1 = \frac{e^u - 1}{u} \cdot u; \quad \frac{1}{e^u - 1} = \frac{u}{e^u - 1} \cdot \frac{1}{u};$$

$$(1 + u)^p - 1 = \frac{(1 + u)^p - 1}{u} \cdot u.$$

Ví dụ: $\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{\sin A}{A} \cdot \frac{B}{\sin B} \cdot \frac{A}{B}$

- Các giới hạn đặc biệt cần ghi nhớ:

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{\sin u} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\tan u}{u} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{\sin u} = 1;$$

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{e^u - 1}{u} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{e^u - 1} = 1;$$

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\ln(1+u)}{u} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{\ln(1+u)} = 1;$$

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{(1+u)^p - 1}{u} = p.$$

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\tan 2x}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{\sin 5x}$$

$$g) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x \cdot \tan 5x}{\sin 6x^2}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 4x}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x^2)}{\tan 4x^2}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x^2}{\sin 6x^2}$$

$$h) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-4x^2)}{(e^{5x} - 1) \sin 2x}$$

Bài 5. Tính $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{T}{M}$ trong trường hợp thuộc dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}$ và T và M là các đa thức hoặc chứa căn đa thức.

Ý tưởng: Phân tích $T = x^n \cdot A\left(\frac{1}{x}\right)$ và $M = x^m \cdot B\left(\frac{1}{x}\right)$ và sử dụng giới hạn $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$ để tính giới hạn yêu cầu.

Chú ý: Khi đưa thừa số ra khỏi căn thức, ta cần chú ý đó là căn bậc chẵn hay bậc lẻ và chú ý quá trình $x \rightarrow +\infty$ (xem xét $x > 0$) hay $x \rightarrow -\infty$ (xem xét $x < 0$).

Ví dụ:

$$\frac{x^3 - 2x + 1}{2x^3 + 4x + 1} = \frac{x^3 \left(1 - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)}{x^3 \left(2 + \frac{4}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)} = \frac{1 - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}}{2 + \frac{4}{x^2} + \frac{1}{x^3}} \text{ (đẳng thức cuối xảy ra do ta triệt tiêu } x^3 \text{ ở cả tử và mẫu; ghi}$$

nhớ: nếu biểu thức } A \text{ là đa thức thì ta phân tích } A = x^n \cdot M(x) \text{ trong đó } x^n \text{ là lũy thừa có bậc cao nhất trong } A.)

$$\text{Xem xét } x > 0, \frac{\sqrt{x^2+1}+3x}{4x+1} = \frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}+3x}{x\left(4+\frac{1}{x}\right)} = \frac{x\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}+3x}{x\left(4+\frac{1}{x}\right)} = \frac{x\left(\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}+3\right)}{x\left(4+\frac{1}{x}\right)} = \frac{\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}+3}{\left(4+\frac{1}{x}\right)}$$

$$\text{Xem xét } x < 0, \frac{\sqrt{x^2+1}+3}{4x+1} = \frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}+3}{x\left(4+\frac{1}{x}\right)} = \frac{(-x)\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}+3}{x\left(4+\frac{1}{x}\right)} = \frac{x\left(-\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}+\frac{3}{x}\right)}{x\left(4+\frac{1}{x}\right)} = \frac{-\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}+\frac{3}{x}}{\left(4+\frac{1}{x}\right)}$$

Ghi nhớ: Nếu biểu thức A có căn thức thì ta đưa lũy thừa bậc cao nhất trong các căn thức ra ngoài căn và sau đó phân tích $A = x^n \cdot M(x)$. Chú ý về loại căn thức khi đưa lũy thừa ra ngoài căn: $\sqrt{A^2} = |A|$, $\sqrt[3]{A^3} = A, \dots$

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x-1}{2x+3}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x-1}{2x-1}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}+3x}{4x+1}$$

$$g) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3-2x}+x}{-4x+1}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2-1}{-2x^2+3x}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3+x-1}{1+2x^2+2x-x^3}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}+3}{4x+1}$$

$$h) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2x^2+1}+3}{\sqrt{3x^2-1}+1}$$

Bài 6. Tính các giới hạn bằng các dùng kỹ thuật trục căn thức và vận dụng kỹ thuật khử dạng $\frac{\infty}{\infty}$ để

khử dạng vô định $\infty - \infty$.

Ý tưởng: Gặp giới hạn $\lim_{x \rightarrow \infty} T$ thuộc dạng $\infty - \infty$ và T chứa căn thức, ta trục căn thức để đưa về dạng $\frac{\infty}{\infty}$, sau đó sử dụng kỹ thuật khử cho $\frac{\infty}{\infty}$ để tìm giới hạn.

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x)$ b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 1} + x)$ c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + x} - 2x)$ d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{1 - x^3 + x} + x)$

Bài 7. Tính các giới hạn thuộc dạng vô định 1^∞ sau:

Ý tưởng: Gặp $\lim_{x \rightarrow a} u^v$ dạng 1^∞ (tức $u \rightarrow 1$ và $v \rightarrow \infty$ khi $x \rightarrow a$), ta phân tích theo trình tự như sau:

$$\lim_{x \rightarrow a} u^v = \lim_{x \rightarrow a} \left([1 + (u - 1)]^{\frac{1}{u-1}} \right)^{v(u-1)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} v(u-1)},$$

Tính $\lim_{x \rightarrow a} v(u - 1)$ và thu được kết quả.

Ý tưởng này chỉ sử dụng cho dạng 1^∞ và không dùng cho các dạng vô định khác.

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x+2} \right)^{3x}$ c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x+1}{2x+3} \right)^{1-3x}$ e) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin 3x)^{\frac{1}{2x}}$
b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{2}{x+2} \right)^{3x}$ d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1-x}{3-x} \right)^{2+x}$ f) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \tan x^2)^{\frac{-3}{2x^2}}$

Bài 8. Tìm đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = x^2 - \sin 2x$ d) $y = \arcsin^3(x^2 - 1)$ g) $y = (x^2 + 1)^{x-2}$
b) $f(x) = x \arcsin 2x$ e) $f(x) = \frac{x}{\arctan x - x}$ h) $y = (x+1)(x+2) \cdots (x+2022)$
c) $y = \ln(1+x^2) + \arctan 4x$ f) $y = \frac{\sin x - x}{\ln(1+x)}$

Bài 9. Tìm đạo hàm cấp hai, cấp 3, cấp 4, cấp $n \geq 1$ của các hàm số sau:

a) $y = \cos 2x$ b) $y = e^{-2x}$ c) $y = \frac{1}{x+2}$ d) $y = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+2}$