Ôn tập

Câu 2. Giải các hệ phương trình tuyến tính sau:

$$a)\begin{cases} x+y+z+t=3 \\ 2x-y+3z-4t=1 \\ x+2y-z+4t=5 \\ 3x-2y+z-t=4 \end{cases} \qquad b)\begin{cases} x-y+2z+3t=1 \\ 2x+y-2z+2t=2 \\ x+z-t=-3 \end{cases}$$

Giải:

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 & 5 \\ 3 & -2 & 1 & -1 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{d_3 - d_1 \to d_3 \\ d_4 - 3d_1 \to d_4}]{d_2 - 2d_1 \to d_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & -6 & -5 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & -5 & -2 & -4 & -5 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[3d_4 - 5d_2 \to d_4]{3d_3 + d_2 \to d_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & -6 & -5 \\ 0 & 0 & -5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -11 & 18 & 10 \end{array}\right] \xrightarrow{5d_4 - 11d_3 \to d_4} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & -6 & -5 \\ 0 & 0 & -5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 57 & 39 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \text{Hệ} \begin{cases} x+y+z+t=3 \\ -3y+z-6t=-5 \\ -5z+3t=1 \\ 57t=39 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3-y-z-t = \dfrac{33}{19} \\ y = \dfrac{-5-z+6t}{-3} = \dfrac{-5-\frac{4}{19}+6\cdot\frac{13}{19}}{-3} = \dfrac{7}{19} \\ z = \dfrac{1-3t}{-5} = \dfrac{1-3\cdot\frac{13}{19}}{-5} = \dfrac{4}{19} \\ t = \dfrac{39}{57} = \dfrac{13}{19} \end{cases}$$

Vậy $(x,y,z,t) = \left(\dfrac{33}{19}, \dfrac{7}{19}, \dfrac{4}{19}, \dfrac{13}{19}\right)$.

$$b)\begin{cases} x-y+2z+3t=1 \\ 2x+y-2z+2t=2 \\ x+z-t=-3 \end{cases}$$

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow[d_3 - d_1 \to d_3]{d_2 - 2d_1 \to d_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -6 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -4 & -4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{3d_3 - d_2 \to d_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -6 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -8 & -12 \end{array}\right]$$

$\Rightarrow$ Hệ $\begin{cases} x - y + 2z + 3t = 1 \\ 3y - 6z - 4t = 0 \\ 3z - 8t = -12 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + y - 2z - 3t = 1 + \dfrac{20t - 24}{3} - 2 \cdot \dfrac{-12 + 8t}{3} - 3t = 1 - \dfrac{5}{3}t \\ y = \dfrac{4t + 6z}{3} = \dfrac{4t + 6 \cdot \dfrac{-12 + 8t}{3}}{3} = \dfrac{20t - 24}{3} \\ z = \dfrac{-12 + 8t}{3} \end{cases}$$

Vậy $\begin{cases} x = 1 - \dfrac{5}{3}t \\ y = \dfrac{20t - 24}{3} \\ z = \dfrac{-12 + 8t}{3} \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$

Câu 4.

Cho $T : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ xác định bởi công thức $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, x_2 - x_1, x_1 - x_3)$

a) chứng tỏ T là ánh xạ tuyến tính

b) Tìm ma trận của T đối với cơ sở chính tắc

Giải $\quad \forall u, v \in \mathbb{R}^3, \forall k \in \mathbb{R}: \quad u = (x_1, x_2, x_3)$

$v = (y_1, y_2, y_3)$

$T(u + v) = T(u) + T(v)$?

$u + v = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$

$T(u+v) = (x_1 + y_1 - x_2 - y_2, x_2 + y_2 - x_1 - y_1, x_1 + y_1 - x_3 - y_3)$

$T(u) + T(v) = T(x_1, x_2, x_3) + T(y_1, y_2, y_3)$

$= (x_1 - x_2, x_2 - x_1, x_1 - x_3) + (y_1 - y_2, y_2 - y_1, y_1 - y_3)$

$= (x_1 + y_1 - x_2 - y_2, x_2 + y_2 - x_1 - y_1, x_1 + y_1 - x_3 - y_3) = T(u + v)$

$T(ku) = kT(u)$?

$T(ku) = T(kx_1, kx_2, kx_3)$
$= (kx_1 - kx_2,\ kx_2 - kx_1,\ kx_1 - kx_3) = k(x_1 - x_2, x_2 - x_1, x_1 - x_3)$
$= kT(u)$

$\Rightarrow T$ là một ánh xạ tuyến tính

b) Cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ là $(e_1 = (1,0,0),\ e_2 = (0,1,0),\ e_3 = (0,0,1))$

$T(e_1) = T(1,0,0) = (1-0, 0-1, 1-0) = (1,-1,1)$
$T(e_2) = T(0,1,0) = (0-1, 1-0, 0-0) = (-1,1,0)$
$T(e_3) = T(0,0,1) = (0-0, 0-0, 0-1) = (0,0,-1)$

$\Rightarrow$ Ma trận của T theo cơ sở chính tắc là:

$$\begin{array}{ccc} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\ T(e_1) \quad T(e_2) \quad T(e_3) \end{array}$$

Câu 6. Đưa các dạng toàn phương sau về chính tắc:

$a)\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Giải: $A = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$

$= (x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3) + x_2^2 + x_3^2 + 2x_2x_3$

$= [x_1^2 + 2\underbrace{x_1}_{a}\underbrace{(2x_2 + x_3)}_{b}] + x_2^2 + x_3^2 + 2x_2x_3$

$= [(x_1 + (2x_2 + x_3))^2 - (2x_2 + x_3)^2] + x_2^2 + x_3^2 + 2x_2x_3$

$= (x_1 + 2x_2 + x_3)^2 \underbrace{- (2x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_2x_3}_{B}$

$B = -(2x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_2x_3$

$= -(4x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2) + x_2^2 + x_3^2 + 2x_2x_3$

$$= -3x_2^2 - 2x_2x_3$$

$$= -3\left(x_2^2 + \frac{2}{3}x_2x_3\right) = -3\left[x_2^2 + 2x_2 \cdot \frac{1}{3}x_3\right]$$

$$= -3\left[\left(x_2 + \frac{1}{3}x_3\right)^2 - \left(\frac{1}{3}x_3\right)^2\right]$$

$$= -3\left(x_2 + \frac{1}{3}x_3\right)^2 + 3 \cdot \frac{1}{9}x_3^2 = -3\left(x_2 + \frac{1}{3}x_3\right)^2 + \frac{1}{3}x_3^2$$

Vậy $A = (x_1 + 2x_2 + x_3)^2 - 3\left(x_2 + \frac{1}{3}x_3\right)^2 + \frac{1}{3}x_3^2$.

Đặt $\begin{cases} X = x_1 + 2x_2 + x_3 \\ Y = x_2 + \frac{1}{3}x_3 \\ Z = x_3 \end{cases} \Rightarrow A = X^2 - 3Y^2 + \frac{1}{3}Z^2$

C_2: Ma trận của A là:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Câu 6. Đưa các dạng toàn phương sau về chính t

a) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$

$D_1 = 1 \neq 0$, $D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$, $D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2 + 2 - 1 - 4 - 1 = -1 \neq 0$

$\Rightarrow$ Dạng chính tắc của A là:

$$\frac{1}{D_1}X^2 + \frac{D_1}{D_2}Y^2 + \frac{D_2}{D_3}Z^2 = X^2 - \frac{1}{3}Y^2 + 3Z^2$$