Bài toán (1.4.4) – (1.4.6) được gọi là bài toán "M", còn bài toán (1.4.1) – (1.4.3) được gọi là bài toán chính, các biến mới thêm vào: $x_{n+i}\ \forall\ i=\overline{1,m}$ được gọi là các biến giả.

Cho $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0 \Rightarrow x_{n+1} = b_1, x_{n+2} = b_2, \ldots, x_{n+m} = b_m$. Vì $b_i \geq 0\ \forall\ i=\overline{1,m}$ nên $\overline{X}_0 = (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{\text{n số 0}}, b_1, b_2, ..., b_m)$ là phương án của bài toán "M".

Vì hệ véc tơ cột $\{A_{n+1}, A_{n+2}, \ldots, A_{n+m}\}$ là hệ véc tơ độc lập tuyến tính nên $\overline{X}_0$ là phương án cực biên của bài toán "M" với cơ sở $\{A_{n+1}, A_{n+2}, \ldots, A_{n+m}\}$. Vì hệ véc tơ cơ sở là hệ véc tơ đơn vị nên ma trận ràng buộc $\overline{A}$ của bài toán "M" chính là ma trận các hệ số biểu diễn Z.

Dùng phương pháp đã biết, ta tìm được câu trả lời của bài toán "M", từ đó suy ra câu trả lời của bài toán chính theo các dấu hiệu sau:

* Định lý 1.4.1: Nếu $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ là phương án của bài toán chính thì $\overline{X} = (x_1, x_2, ..., x_n, \underbrace{0, 0, ..., 0}_{\text{m số 0}})$ là phương án của bài toán "M" và ngược lại, đồng thời $f(X) = F(\overline{X})$.

* Định lý 1.4.2: Nếu bài toán "M" có phương án tối ưu với ít nhất một biến giả nhận giá trị dương thì bài toán chính không có phương án nào.

* Định lý 1.4.3: Nếu bài toán "M" có phương án tối ưu dạng $\overline{X}^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*, \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{\text{m số 0}})$ thì bài toán chính cũng có phương án tối ưu và $X^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ là một phương án tối ưu của bài toán chính, đồng thời $f_{min} = f(X^*) = F(\overline{X}^*) = F_{min}$.

* Định lý 1.4.4: Nếu bài toán "M" không có phương án tối ưu thì bài toán chính cũng không có phương án tối ưu nhưng vẫn có thể có phương án.

* Chú ý 1.4.1: Nếu ma trận ràng buộc của bài toán chính đã có p vectơ cột đơn vị độc lập tuyến tính (p < m) thì ta chỉ cần thêm m - p biến giả để lập bài toán "M" với ma trận ràng buộc có đủ m vectơ cột đơn vị độc lập tuyến tính.

* Chú ý 1.4.2: Vì ma trận dòng $\overline{C}$ của bài toán "M" có một số thành phần là M, nên $F(\overline{X})$ và $\overline{\Delta}_k$ là những hàm bậc nhất đối với M, tức là $\overline{\Delta}_k = \alpha_k + \beta_k M$ còn $F(\overline{X}) = \alpha_0 + \beta_0 M$. Vì vậy để thuận tiện cho việc khảo sát phương án , ta chia dòng $\overline{\Delta}$ làm hai dòng nhỏ: dòng trên ghi các số tự do $\alpha_k\ (k=\overline{0, n+m})$; dòng dưới ghi các hệ số $\beta_k\ (k=\overline{0, n+m})$. Vì M là só dương đủ lớn nên việc đánh giá các số $\overline{\Delta}_k$ được thực hiện như sau:

$$\overline{\Delta}_k = \alpha_k + \beta_k M > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \beta_k > 0 \\ \beta_k = 0 \text{ và } \alpha_k > 0 \end{array}\right. ;\ \overline{\Delta}_k < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \beta_k < 0 \\ \beta_k = 0 \text{ và } \alpha_k < 0 \end{array}\right.$$

$$\overline{\Delta}_h = \alpha_h + \beta_h M > \overline{\Delta}_k \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \beta_h > \beta_k \\ \beta_h = \beta_k \text{ và } \alpha_h > \alpha_k \end{array}\right. .$$

* Chú ý 1.4.3: Nếu gặp bài toán có yêu cầu cực đại hóa hàm mục tiêu thì hàm mục tiêu của bài toán "M" là: $F(\overline{X}) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n - Mx_{n+1} - Mx_{n+2} - \cdots - Mx_{n+m} \to \max$, trong đó M vẫn là số dương đủ lớn.

Việc lập bài toán "M" từ một bài toán không hoàn thiện được gọi là hoàn thiện hóa bài toán.

* Ví dụ 1.4.1: Cho bài toán quy hoạch tuyến tính:

$$\begin{aligned}
f(X) = 4x_1 + \ x_2 - 2x_3 + 4x_4 &\to \min \\
3x_1 + 2x_2 - \ x_3 + \ x_4 &\le \ 9 \\
-x_1 + \ x_2 + 2x_3 - \ x_4 &= \ 10 \\
2x_1 - \ x_2 + \ x_3 - \ x_4 &\ge \ 15 \\
x_j \ge 0 \quad \forall\, j = \overline{1,4}
\end{aligned}$$

a/ Tìm câu trả lời của bài toán trên.

b/ Tìm một phương án không tối ưu của bài toán

* Giải: - Chính tắc hóa bài toán:

Đặt $x_5 = 9 - 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 \ge 0$; $x_6 = 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 - 15 \ge 0$. Khi đó ta được bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc sau đây:

$$\begin{aligned}
f(X) = 4x_1 + \ x_2 - 2x_3 + 4x_4 \qquad\qquad &\to \min \\
3x_1 + 2x_2 - \ x_3 + \ x_4 + x_5 \qquad &= \ 9 \\
-x_1 + \ x_2 + 2x_3 - \ x_4 \qquad\qquad &= \ 10 \\
2x_1 - \ x_2 + \ x_3 - \ x_4 \qquad - x_6 &= \ 15 \\
x_j \ge 0 \quad \forall\, j = \overline{1,6}
\end{aligned}$$

* Hoàn thiện hóa bài toán: Trước hết ta nhận thấy các số tự do ở vế phải của bài toán chính tắc đều là những số dương và ma trận ràng buộc của bài toán đã có một vectơ cột đơn vị là $A_5 = E_1$, Ta cần phải thêm hai biến giả x_7 và x_8 để lập bài toán "M" với ma trận ràng buộc có $A_7 = E_2$; $A_8 = E_3$:

$$\begin{aligned}
F(\overline{X}) = 4x_1 + \ x_2 - 2x_3 + 4x_4 \qquad\qquad + Mx_7 + Mx_8 &\to \min \\
3x_1 + 2x_2 - \ x_3 + \ x_4 + x_5 \qquad\qquad\qquad\qquad &= \ 9 \\
-x_1 + \ x_2 + 2x_3 - \ x_4 \qquad\qquad + \ x_7 \qquad\quad &= \ 10 \\
2x_1 - \ x_2 + \ x_3 - \ x_4 \qquad - x_6 \qquad\quad + \ x_8 &= \ 15 \\
x_j \ge 0 \quad \forall\, j = \overline{1,8}
\end{aligned}$$

trong đó M là số dương đủ lớn.

Cho $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_6 = 0 \Rightarrow x_5 = 9$; $x_7 = 10$; $x_8 = 15$. Ta được:

$\overline{X}_0 = (0, 0, 0, 0, 9, 0, 10, 15)$ là phương án cực biên của bài toán M với cơ sở A_5 , A_7 , A_8.

* Nhập các số liệu đặc trưng vào bảng đơn hình:

A_J	C_J	X_J	4	1	-2	4	0	0	M	M	
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	
A_5	0	9	3	2	-1	1	1	0	0	0	
A_7	M	10	-1	1	(2)	-1	0	0	1	0	$5=\theta_0$
A_8	M	15	2	-1	1	-1	0	-1	0	1	15
		0	-4	-1	2	-4	0	0	0	0	
		25	1	0	3	-2	0	-1	0	0	
A_5	0	14	5/2	5/2	0	1/2	1	0	1/2	0	28/5
A_3	-2	5	-1/2	1/2	1	-1/2	0	0	1/2	0	
A_8	M	10	(5/2)	-3/2	0	-1/2	0	-1	-1/2	1	$4=\theta_0$
		-10	-3	-2	0	-3	0	0	-1	0	
		10	|5/2|	-3/2	0	-1/2	0	-1	-3/2	0	
A_5	0	4	0	4	0	1	1	1	1	-1	
A_3	-2	7	0	1/5	1	-3/5	0	-1/5	2/5	1/5	
A_1	4	4	1	-3/5	0	-1/5	0	-2/5	-1/5	2/5	
		2	0	-19/5	0	-18/5	0	-6/5	-8/5	6/5	
		0	0	0	0	0	0	0	-1	-1	

$\Delta_k \le 0\ \ \forall k \Rightarrow$ phương án cực biên thứ ba là phương án tối ưu của bài toán "M":

$\overline{X}^* = (4,0,7,0,4,0,0,0)$ với các biến giả $x_7 = x_8 = 0$, theo định lý 1.4.3 thì bài toán chính tắc có phương án tối ưu là: $X_C^* = (4,0,7,0,4,0) \Rightarrow$ bài toán gốc có phương án tối ưu là $X^* = (4, 0, 7, 0)$ với $f_{min} = 2$.

* **Ví dụ** 1.4.2: Cho bài toán quy hoạch tuyến tính:

$f(X) = x_1 - 4x_2 + 10x_3 - 2x_4 \rightarrow \min$

$-3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 5 \qquad (1)$

$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -2 \qquad (2)$

$x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 1$

$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}$

a- Tìm câu trả lời của bài toán.

b- Nếu thay dấu "=" ở ràng buộc (1) bởi dấu "$\le$" thì câu trả lời của bài toán mới sẽ như thế nào?

* <u>Giải</u>: a/ - Hoàn thiện hóa bài toán: Sau khi đổi dấu 2 vế của phương trình (2), ma trận ràng buộc của bài toán vẫn không có vectơ cột đơn vị nào vì vậy ta phải thêm 3 biến giả là x_5, x_6, x_7 để lập bài toán "M" với ma trận ràng buộc có $A_5 = E_1$; $A_6 = E_2$; $A_7 = E_3$:

$$F(\overline{X}) = x_1 - 4x_2 + 10x_3 - 2x_4 + Mx_5 + Mx_6 + Mx_7 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 = 5 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + x_6 = 2 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 + x_7 = 1 \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,7} \end{cases}$$

trong đó M là số dương đủ lớn.

Cho $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0 \Rightarrow x_5 = 5$; $x_6 = 2$; $x_7 = 1$, ta được $\overline{X}_0 = (0, 0, 0, 0, 5, 2, 1)$ là phương án cực biên của bài toán "M" với cơ sở $\{A_5, A_6, A_7\}$.

- Nhập các số liệu đặc trưng vào bảng đơn hình.

A_J	C_J	X_J	1	-4	10	-2	M	M	M	
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	
A_5	M	5	-3	2	-2	1	1	0	0	5/2
A_6	M	2	-1	(1)	-1	1	0	1	0	$2=\theta_0$
A_7	M	1	1	-1	4	-2	0	0	1	
		0	-1	$\lvert 4 \rvert$	-10	2	0	0	0	
		8	-3	$\lvert 2 \rvert$	1	0	0	0	0	
A_5	M	1	-1	0	0	-1	1	-2	0	
A_2	-4	2	-1	1	-1	1	0	1	0	
A_7	M	3	0	0	(3)	-1	0	1	1	$1=\theta_0$
		–8	3	0	$\lvert -6 \rvert$	-2	0	-4	0	
		4	-1	0	$\lvert 3 \rvert$	-2	0	-2	0	
A_5	M	1	-1	0	0	-1	1	-2	0	
A_2	-4	3	-1	1	0	2/3	0	4/3	1/3	
A_3	10	1	0	0	1	-1/3	0	1/3	1/3	
		-2	3	0	0	-4	0	-2	2	
		1	-1	0	0	-1	0	-3	-1	

Ở bảng đơn hình số 3 có $\Delta_k \le 0\ \ \forall k \Rightarrow$ phương án cực biên thứ 3 là phương án tối ưu của bài toán "M": $\overline{X}^* = (0, 3, 1, 0, 1, 0, 0)$ với biến giả $x_5 > 0$, theo định lý 1.4.2 thì bài toán đã cho không có phương án nào.

b/ Khi thay dấu "=" ở ràng buộc (1) bởi dấu " $\le$ " thì trước khi hoàn thiện hoá bài toán ta phải chính tắc hóa bài toán bằng cách thêm biến bù x_5 vào vế trái của ràng buộc (1) $\Rightarrow$ ma trận ràng buộc của bài toán chính tắc có $A_5 = E_1$. Vì vậy khi hoàn thiện hóa bài toán ta chỉ thêm 2 biến giả là x_6 & x_7 với ma trận ràng buộc có $A_6 = E_2$; $A_7 = E_3$. Như vậy khi thay dấu "=" ở ràng buộc (1) bởi dấu "$\le$" thì biến giả x_5 trở thành biến bù: $c_5 = 0$, khi đó bảng đơn hình số 3 trở thành:

A_J	C_J	X_J	1	-4	10	-2	0	M	M
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
A_5	0	1	-1	0	0	-1	1	-2	0
A_2	-4	3	-1	1	0	2/3	0	4/3	1/3
A_3	10	1	0	0	1	-1/3	0	1/3	1/3
		-2	3	0	0	-4	0	-2	2
		0	0	0	0	0	0	-1	-1

Ở bảng 3 mới có $\Delta_1 > 0$ và $z_{j1} \le 0 \ \forall j \in J \Rightarrow$ bài toán "M" không có phương án tối ưu, theo định lý 1.4.4 thì bài toán gốc cũng không có phương án tối ưu, nhưng vẫn có phương án, chẳng hạn $X_0 = (0, 3, 1, 0)$ như ở bảng trên.

* Ví dụ 1.4.3: Cho bài toán quy hoạch tuyến tính:

$f(X) = -2x_1 - x_2 + 6x_3 + 4x_4 \to \max$

$x_1 + 2x_2 - 4x_3 - x_4 \ge 2$

$-x_1 + x_2 + 2x_3 + 6x_4 \le 13$

$-x_1 + x_2 + x_3 + 5x_4 \le 12$ (3)

$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}$

a- Tìm câu trả lời của bài toán.

b- Chứng minh bài toán có vô số phương án tối ưu

c- Tìm phương án tối ưu của bài toán làm cho vế trái của ràng buộc (3) đúng bằng 4, phương án đó có phải phương án cực biên hay không?

Giải : a/ -Chính tắc hóa bài toán.

Đặt $x_5 = x_1 + 2x_2 - 4x_3 - x_4 - 2 \ge 0$; $x_6 = 13 + x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \ge 0$

$x_7 = 12 + x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \ge 0$, khi đó ta được bài toán chính tắc sau đây:

$f(X) = -2x_1 - x_2 + 6x_3 + 4x_4 \to \max$

$$\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 - 4x_3 - x_4 - x_5 \qquad\qquad &= 2\\
-x_1 + x_2 + 2x_3 + 6x_4 \qquad + x_6 \qquad &= 13\\
-x_1 + x_2 + x_3 + 5x_4 \qquad\qquad + x_7 &= 12\\
x_j \ge 0,\ j = \overline{1,7}
\end{aligned}$$

- Hoàn thiện hóa bài toán: Trước hết ta nhận thấy các số tự do ở vế phải của bài toán chính tắc đều là những số dương và ma trận ràng buộc của bài toán đã có hai vectơ cột đơn vị độc lập tuyến tính là $A_6 = E_2$; $A_7 = E_3$, ta phải thêm biến giả x_8 để lập bài toán "M" với ma trận ràng buộc có $A_8 = E_1$:

$$\begin{aligned}
F(\overline{X}) = -2x_1 - x_2 + 6x_3 + 4x_4 \qquad\qquad - Mx_8 &\to \max\\
x_1 + 2x_2 - 4x_3 - x_4 - x_5 \qquad + x_8 &= 2\\
-x_1 + x_2 + 2x_3 + 6x_4 \qquad + x_6 \qquad &= 13\\
-x_1 + x_2 + x_3 + 5x_4 \qquad + x_7 \qquad &= 12\\
x_j \ge 0 \ ; \ j = \overline{1,8}
\end{aligned}$$

, trong đó M là số dương đủ lớn.

Cho $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0 \Rightarrow x_6 = 13$; $x_7 = 12$; $x_8 = 2$, ta được $\overline{X}_0 = (0,0,0,0,0,13,12,2)$ là phương án cực biên của bài toán "M" với cơ sở $\{A_6, A_7, A_8\}$.

- Nhập các số liệu đặc trưng vào bảng đơn hình.

A_J	C_J	X_J	-2	-1	6	4	0	0	0	-M	
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	
A_8	-M	2	1	(2)	-4	-1	-1	0	0	1	$1=\theta_0$
A_6	0	13	-1	1	2	6	0	1	0	0	13
A_7	0	12	-1	1	1	5	0	0	1	0	12
		0	2	1	-6	-4	0	0	0	0	
		-2	-1	-2	4	1	1	0	0	0	
A_2	-1	1	1/2	1	-2	-1/2	-1/2	0	0	1/2	
A_6	0	12	-3/2	0	(4)	13/2	1/2	1	0	-1/2	$3=\theta_0$
A_7	0	11	-3/2	0	3	11/2	1/2	0	1	-1/2	11/3
		-1	3/2	0	-4	-7/2	1/2	0	0	-1/2	
		0	0	0	0	0	0	0	0	1	
A_2	-1	7	-1/4	1	0	11/4	-1/4	1/2	0	1/4	
A_3	6	3	-3/8	0	1	13/8	1/8	1/4	0	-1/8	
A_7	0	2	-3/8	0	0	5/8	1/8	-3/4	1	-1/8	
		11	0	0	0	3	1	1	0	-1	
		0	0	0	0	0	0	0	0	1	

Ở bảng đơn hình thứ 3 có $\Delta_k \geq 0 \ \ \forall k \Rightarrow$ phương án cực biên thứ ba là phương án tối ưu của bài toán "M": $\overline{X}_1^* = (0, 7, 3, 0, 0, 0, 2, 0)$ với biến giả $x_8 = 0$, theo định lý 1.4.3 thì bài toán gốc có phương án tối ưu là $X_1^* = (0, 7, 3, 0)$ với $f_{max} = 11$.

b/ Ở bảng đơn hình tối ưu trong số các Δ_k ngoài cơ sở có $\Delta_1 = 0$, trên cột một lại có $z_{j1} \leq 0 \ \forall j \in J$, theo hệ quả 1.3.2 thì bài toán chính tắc có vô số phương án tối ưu dạng:

$\overline{X}(\alpha) = \left(\alpha\ , 7 + \dfrac{\alpha}{4}\ , 3 + \dfrac{3\alpha}{8}\ , 0, 0, 0, 2 + \dfrac{3\alpha}{8}\right) \ \forall \alpha \geq 0 \Rightarrow$ bài toán gốc có vô số phương án tối ưu dạng $X(\alpha) = \left(\alpha\ , 7 + \dfrac{\alpha}{4}\ , 3 + \dfrac{3\alpha}{8}\ , 0\right) \ \forall \alpha \geq 0$.

c/ Vì $-x_1 + x_2 + x_3 + 5x_4 = 4$ nên biến bù $x_7 = 12 - 4 = 8$. Cho $x_7 = 2 + \dfrac{3\alpha}{8} = 8 \Rightarrow \alpha = 16 > 0$ suy ra phương án tối ưu cần tìm theo điều kiện c/ là: $X_c^* = (16, 11, 9, 0)$, phương án này không phải phương án cực biên của bài toán.

Ví dụ 1.4.4; Trở lại bài toán lập kế hoạch sản xuất. Hãy tìm phương án sản xuất tối ưu.

* Quy đổi lại đơn vị tính sản phẩm và chính tắc hoá bài toán: 1 đơn vị mới = 1000 đơn vị cũ.

Đặt $x_5 = 44 - 4x_1 - 3x_2 - 5x_3 - 3x_4 \geq 0$; $x_6 = 50 - 3x_1 - 4x_2 - 6x_3 - 5x_4 \geq 0$; $x_7 = 41 - 5x_1 - 2x_2 - 4x_3 - 3x_4 \geq 0$. Khi đó ta được bài toán chính tắc sau đây:

$$f(X) = 11x_1 + 6{,}5x_2 + 10x_3 + 7x_4 \to \max$$

$$\begin{aligned} 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 3x_4 + x_5 \qquad\qquad &= 44 \\ 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 5x_4 \qquad + x_6 \qquad &= 50 \\ 5x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 \qquad\qquad + x_7 &= 41 \\ x_j \geq 0 \ \ \forall j = \overline{1,7} & \end{aligned}$$

Cho $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0 \Rightarrow x_5 = 44; x_6 = 50; x_7 = 41$.

Ta được $\overline{X}_0 = (0, 0, 0, 0, 44, 50, 41)$ là phương án cực biên của bài toán chính tắc với cơ sở $\{A_5, A_6, A_7\}$.

* Nhập các số liệu đặc trưng vào bảng đơn hình:

A_J	C_J	X_J	11	6,5	10	7	0	0	0	
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	
A_5	0	44	4	3	5	3	1	0	0	11
A_6	0	50	3	4	6	5	0	1	0	50/3
A_7	0	41	(5)	2	4	3	0	0	1	$41/5 = \theta_0$
		0	-11	-6,5	-10	-7	0	0	0	
A_5	0	56/5	0	(7/5)	9/5	3/5	1	0	-4/5	$8 = \theta_0$
A_6	0	127/5	0	14/5	18/5	16/5	0	1	-3/5	127/14
A_1	11	41/5	1	2/5	4/5	3/5	0	0	1/5	41/2
		451/5	0	|-21/10|	-6/5	-2/5	0	0	11/5	
A_2	6,5	8	0	1	9/7	3/7	5/7	0	-4/7	
A_6	0	3	0	0	0	2	-2	1	1	
A_1	11	5	1	0	2/7	3/7	-2/7	0	3/7	
		107	0	0	1,5	0,5	1,5	0	1	

Ở bảng đơn hình số 3 có $\Delta_k \geq 0 \;\; \forall k \Rightarrow$ Phương án cực biên thứ 3 là phương án tối ưu của bài toán chính tắc: $\overline{X}^* = (5, 8, 0, 0, 0, 3, 0) \Rightarrow$ phương án tối ưu của bài toán gốc là: $X^* = (5, 8, 0, 0)$ với f_{max} =107.000.000đ.

Như vậy phải sản xuất 5000 sản phẩm 1 ; 8000 sản phẩm 2 khi đó sẽ phù hợp với điều kiện về hạn chế nguyên vật liệu đồng thời tổng doanh thu là cao nhất f_{max} = 107 triệu đồng.

CHƯƠNG II : LÝ THUYẾT ĐỐI NGẪU

§ 2.1 Khái niệm cặp bài toán quy hoạch tuyến tính đối ngẫu

2.1.1. Cặp bài toán quy hoạch tuyến tính đối ngẫu không đối xứng

Cho bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc:

$$\left.\begin{array}{l} f(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \rightarrow \min \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\ x_j \geq 0 \quad j = \overline{1,n} \end{array}\right\} \qquad (\mathrm{I})$$

*Định nghĩa 2.1.1: Bài toán quy hoạch tuyến tính sau

$$\left.\begin{array}{l} g(Y) = b_1y_1 + b_2y_2 + \cdots + b_my_m \rightarrow \max \\ a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \cdots + a_{m1}y_m \leq c_1 \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{m2}y_m \leq c_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \cdots + a_{mn}y_m \leq c_n \end{array}\right\} \qquad (\tilde{\mathrm{I}})$$

được gọi là bài toán quy hoạch tuyến tính đối ngẫu của bài toán gốc (I). Cặp hai bài toán đối ngẫu nhau: Bài toán (I) và bài toán $(\tilde{\mathrm{I}})$ được gọi là cặp bài toán quy hoạch tuyến tính đối ngẫu không đối xứng.

* Định nghĩa 2.1.2: Các cặp bất phương trình sau:

$x_1 \geq 0$ và $\sum_{i=1}^{m} a_{i1} y_i \leq c_1$

$x_2 \geq 0$ và $\sum_{i=1}^{m} a_{i2} y_i \leq c_2$

……………………

$x_n \geq 0$ và $\sum_{i=1}^{m} a_{in} y_i \leq c_n$

được gọi là các cặp điều kiện đối ngẫu.

Nếu ký hiệu các ma trận như ở định nghĩa 1.1.10 và ký hiệu thêm Y = $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ là ma trận cấp $1\times m$, khi đó cặp bài toán quy hoạch tuyến tính đối ngẫu không đối xứng trên viết được dưới dạng ma trận sau:

$$\begin{array}{c} f(X) = CX \to \min \\ AX = B \\ X \geq O \end{array} \quad \bigg\rangle\!\!\bigg\langle \quad \begin{array}{c} g(Y) = YB \to \max \\ YA \leq C \end{array},$$

trong đó O là *ma trận không* cấp $n\times 1$.

* Ví dụ 2.1.1: Cho bài toán quy hoạch tuyến tính:

$$\begin{aligned} f(X) = 13x_1 - 3x_2 - 4x_3 + 19x_4 &\to \min \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 &= 44 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 &= 23 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 6x_4 &= 96 \\ x_j \geq 0,\ j = \overline{1,4} \end{aligned}$$

Viết bài toán đối ngẫu cho bài toán này và chỉ ra các cặp điều kiện đối ngẫu.

* <u>Giải</u>:

- Bài toán đối ngẫu:

$$\begin{aligned} g(Y) = 44y_1 + 23y_2 + 96y_3 &\to \max \\ 2y_1 - y_2 + 3y_3 &\leq 13 \quad (1) \\ y_1 + 2y_2 - y_3 &\leq -3 \quad (2) \\ -y_1 + 3y_2 + y_3 &\leq -4 \quad (3) \\ 3y_1 + y_2 + 6y_3 &\leq 19 \quad (4) \end{aligned}$$

- Các cặp điều kiện đối ngẫu:

$x_1 \geq 0$ và $2y_1 - y_2 + 3y_3 \leq 13$

$x_2 \geq 0$ và $y_1 + 2y_2 - y_3 \leq -3$

$x_3 \geq 0$ và $-y_1 + 3y_2 + y_3 \leq -4$

$x_4 \geq 0$ và $3y_1 + y_2 + 6y_3 \leq 19$

* <u>Chú ý 2.1.1</u>: Nếu bài toán gốc cho dưới dạng $\begin{cases} f(X) = CX \to \max \\ AX = B \\ X \geq O \end{cases}$ thì bài toán đối ngẫu của bài toán này là: $\begin{cases} g(Y) = YB \to \min \\ YA \geq C \end{cases}$

* <u>Chú ý 2.1.2</u>: Nếu gặp bài toán quy hoạch tuyến tính không chính tắc thì ta viết bài toán đối ngẫu cho nó theo các bảng tóm tắt sau đây:

- Bảng tóm tắt số 1:

Bài toán gốc: $f(X)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min$	Bài toán đối ngẫu: $g(Y)=\sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \max$
* Nếu $x_j \ge 0$	thì $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \le c_j$
* Nếu $x_j \le 0$	thì $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j$
* Nếu x_j không ràng buộc gì về dấu	thì $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = c_j$
* Nếu $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$	thì y_i không ràng buộc gì về dấu
* Nếu $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i$	thì $y_i \le 0$
* Nếu $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i$	thì $y_i \ge 0$

Ở bảng này các phép ứng thứ nhất & thứ hai lập thành các cặp điều kiện đối ngẫu loại 1, chúng là những cặp bất phương trình ngược chiều nhau.

Các phép ứng thứ năm & thứ sáu lập thành các cặp điều kiện đối ngẫu loại 2, chúng là những cặp bất phương trình cùng chiều nhau.

Các phép ứng thứ ba & thứ tư không lập thành các cặp điều kiện đối ngẫu .

- Bảng tóm tắt số 2:

B.toán gốc: $f(X)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max$	B.toán đối ngẫu: $g(Y)=\sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \min$
* Nếu $x_j \ge 0$	thì $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j$
* Nếu $x_j \le 0$	thì $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \le c_j$
* Nếu x_j không ràng buộc về dấu	thì $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = c_j$
* Nếu $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$	thì y_i không ràng buộc gì về dấu
* Nếu $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i$	thì $y_i \ge 0$
* Nếu $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i$	thì $y_i \le 0$

Ở bảng tóm tắt số hai, các cặp điều kiện đối ngẫu loại 1 là những cặp bất phương trình cùng chiều nhau. Các cặp điều kiện đối ngẫu loại 2 là những cặp bất phương trình ngược chiều nhau.

2.1.2. Cặp bài toán đối ngẫu đối xứng:

Cho bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn tắc:

$$\left.\begin{array}{l} f(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \to \min \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \ge b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \ge b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \ge b_m \\ x_j \ge 0 \quad j = \overline{1,n} \end{array}\right\} \qquad (\text{II})$$

Khi đó bài toán đối ngẫu của bài toán này là:

$$\left.\begin{array}{l} g(Y) = b_1y_1 + b_2y_2 + \cdots + b_my_m \to \max \\ a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \cdots + a_{m1}y_m \le c_1 \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{m2}y_m \le c_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \cdots + a_{mn}y_m \le c_n \\ y_i \ge 0 \quad i = \overline{1,m} \end{array}\right\} \qquad (\tilde{\text{II}})$$

Định nghĩa 2.1.3: Cặp hai bài toán đối ngẫu nhau: Bài toán (II) và bài toán ($\tilde{\text{II}}$) được gọi là cặp bài toán đối ngẫu đối xứng.

Vẫn với các ký hiệu như trước và ký hiệu thêm $O_{n\times 1}$ và $O_{1\times m}$ lần lượt là các *ma trận không* cấp $n\times 1$ và cấp $1\times m$, khi đó cặp bài toán quy hoạch tuyến tính đối ngẫu đối xứng trên viết được dưới dạng ma trận sau:

$$\begin{array}{l} f(X) = CX \to \min \\ AX \ge B \\ X \ge O_{n\times 1} \end{array} \quad \Big\rangle\Big\langle \quad \begin{array}{l} g(Y) = YB \to \max \\ YA \le C \\ Y \ge O_{1\times m} \end{array}$$

Cặp bài toán quy hoạch tuyến tính đối ngẫu đối xứng trên có $m + n$ cặp điều kiện đối ngẫu, trong đó có n cặp điều kiện đối ngẫu loại 1 và m cặp điều kiện đối ngẫu loại 2.

* Ví dụ 2.1.2: Cho bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn tắc

$$\begin{array}{l} f(X) = -x_1 + 10x_2 + 14x_3 + 8x_4 \to \min \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 \ge 11 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 \ge 20 \\ -x_1 + 2x_2 + 5x_3 + x_4 \ge 17 \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4} \end{array}$$

Viết bài toán đối ngẫu cho bài toán này và chỉ ra các cặp điều kiện đối ngẫu .

* <u>Giải</u>:

- Bài toán đối ngẫu:

$$\begin{array}{l} g(Y) = 11y_1 + 20y_2 + 17y_3 \to \max \\ 2y_1 + 3y_2 - y_3 \le -1 \\ 3y_1 - y_2 + 2y_3 \le 10 \\ -y_1 + y_2 + 5y_3 \le 14 \\ y_1 - 2y_2 + y_3 \le 8 \\ y_i \ge 0,\ i = \overline{1,3} \end{array}$$

- Các cặp điều kiện đối ngẫu :

$x_1 \ge 0$ và $2y_1 + 3y_2 - y_3 \le -1$

$x_2 \ge 0$ và $3y_1 - y_2 + 2y_3 \le 10$

$x_3 \ge 0$ và $-y_1 + y_2 + 5y_3 \le 14$

$x_4 \ge 0$ và $y_1 - 2y_2 + y_3 \le 8$

$y_1 \ge 0$ và $2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 \ge 11$

$y_2 \ge 0$ và $3x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 \ge 20$

$y_3 \ge 0$ và $-x_1 + 2x_2 + 5x_3 + x_4 \ge 17$

§ 2.2. Tính chất của cặp bài toán quy hoạch tuyến tính đối ngẫu

2.2.1. Định lý đối ngẫu thứ nhất

Cho cặp bài toán quy hoạch tuyến tính đối ngẫu không đối xứng:

$$\begin{array}{lll|lll} f(X) = CX \to \min & (2.2.1) & & g(Y) = YB \to \max & (2.2.4) \\ AX = B & (2.2.2) & & YA \le C & (2.2.5) \\ X \ge O & (2.2.3) & & & \end{array}$$

* **Định lý 2.2.1**: Giả sử X là phương án tùy ý của bài gốc, Y là phương án tùy ý của bài toán đối ngẫu, khi đó ta luôn có $f(X) \ge g(Y)$ **(2.2.6)**

✍ **Chứng minh**: Nhân vào bên phải cả hai vế của (2.2.5) với X, ta được $YAX \le CX$ (**2.2.7**), thay (2.2.2) vào vế trái của (2.2.7), ta được $YB \le CX$, hay là $g(Y) \le f(X)$.

* Định lý 2.2.2: Nếu cả hai bài toán đối ngẫu nhau đều có phương án thì chúng đều có phương án tối ưu.

✍ Chứng minh: Giả sử X_0 là một phương án nào đó của bài toán gốc, Y_0 là một phương án nào đó của bài toán đối ngẫu. Theo định lý 2.2.1, ta có $f(X) \ge g(Y_0)$ với mọi phương án X tuỳ ý của bài toán gốc, tức là hàm mục tiêu f(X) bị chặn dưới trong tập hợp các phương án của bài toán gốc, theo định lý 1.1.2 thì bài toán gốc phải có phương án tối ưu.

Vẫn theo định lý 2.2.1, ta có $g(Y) \le f(X_0)$ với mọi phương án Y tuỳ ý của bài toán đối ngẫu, tức là hàm mục tiêu g(Y) bị chặn trên trong tập hợp các phương án của bài toán đối ngẫu, theo định lý 1.1.2 thì bài toán đối ngẫu phải có phương án tối ưu.

* Hệ quả 2.2.1: Nếu một trong hai bài toán đối ngẫu nhau có phương án nhưng không có phương án tối ưu thì bài toán kia không có phương án nào.

* Định lý 2.2.3: Nếu một trong hai bài toán đối ngẫu nhau có phương án tối ưu thì bài toán kia cũng có phương án tối ưu và cực trị của các hàm mục tiêu bằng nhau.

* Hệ quả 2.2.2: Nếu một trong hai bài toán đối ngẫu nhau không có phương án nào thì bài toán kia không có phương án tối ưu (nhưng có thể có phương án).

* Hệ quả 2.2.3: Nếu phương án X_0 của bài toán gốc và phương án Y_0 của bài toán đối ngẫu làm thỏa mãn $f(X_0) = g(Y_0)$ thì X_0 và Y_0 lần lượt là phương án tối ưu của bài toán gốc và bài toán đối ngẫu.

* Chứng minh: Áp dụng định lý 2.2.1 cho phương án X tùy ý của bài toán gốc và phương án Y_0 của bài toán đối ngẫu ta được $f(X) \ge g(Y_0)$, mà theo giả thiết thì $g(Y_0) = f(X_0)$, do đó $f(X) \ge f(X_0)$ với mọi phương án X tùy ý của bài toán gốc, theo định nghĩa thì phương án X_0 là phương án tối ưu của bài toán gốc.

Tương tự, ta chứng minh được phương án Y_0 là phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu.

2.2.2. Các công thức suy nghiệm

Giả sử bài toán chính tắc 2.2.1 - 2.2.3 có cơ sở tối ưu là J thì $Y^* = C_J A_J^{-1}$ (2.2.8) là phương án tối ưu cực biên của bài toán đối ngẫu 2.2.4 – 2.2.5, trong đó C_J là ma trận cấp $1\times m$ mà các phần tử của nó là $c_j \ \forall\ j \in J$, A_J là ma trận vuông mà các cột của nó là $A_j \ \forall j \in J$ và được sắp xếp phù hợp với C_J. Ta gọi Y^* như vậy là phương án cực biên tối ưu của bài toán đối ngẫu ứng với cơ sở tối ưu J của bài toán gốc.

Công thức (2.2.8) được gọi là công thức suy nghiệm cho bài toán đối ngẫu.

Ví dụ 2.2.1: Trở lại ví dụ 1.4.1:

a- Viết bài toán đối ngẫu cho bài toán.

b- Tìm phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu.

✍ Giải:

a/ - Viết bài toán đối ngẫu:

$g(Y) = 9y_1 + 10y_2 + 15y_3 \to \max$

$$\begin{array}{lr}
3y_1 - y_2 + 2y_3 \le 4 & (1) \\
2y_1 + y_2 - y_3 \le 1 & (2) \\
-y_1 + 2y_2 + y_3 \le -2 & (3) \\
y_1 - y_2 - y_3 \le 4 & (4) \\
y_1 \le 0 & (5) \\
y_3 \ge 0 & (6)
\end{array}$$

- Các cặp điều kiện đối ngẫu.

$x_1 \ge 0$ và $3y_1 - y_2 + 2y_3 \le 4$

$x_2 \ge 0$ và $2y_1 + y_2 - y_3 \le 1$

$x_3 \ge 0$ và $-y_1 + 2y_2 + y_3 \le -2$

$x_4 \ge 0$ và $y_1 - y_2 - y_3 \le 4$

$y_1 \le 0$ và $3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \le 9$

$y_3 \ge 0$ và $2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \ge 15$

b/ Theo kết quả của ví dụ 1.4.1 thì phương án cực biên tối ưu của bài toán chính tắc có cơ sở tối ưu là $\{A_5, A_3, A_1\} \Rightarrow C_J = (0, -2, 4)$ và $A_J = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A_J^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2/5 & 1/5 \\ 0 & -1/5 & 2/5 \end{pmatrix} \Rightarrow$ phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu là: $Y^* = C_J A_J^{-1} = (0, -2, 4).\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2/5 & 1/5 \\ 0 & -1/5 & 2/5 \end{pmatrix} =$ $(0, -8/5, 6/5)$ với $g_{\max} = 2 = f_{\min}$.

Thực ra, ma trận nghịch đảo A_J^{-1} đã có sẵn ở bảng đơn hình tối ưu: Nếu ở bài toán "M" có $A_k = E_i$ và nếu khi hoàn thiện hoá bài toán, ta không phải đổi dấu hai vế của phương trình thứ i thì cột k ở bảng tối ưu chính là cột thứ i của ma trận nghịch đảo A_J^{-1}. Còn nếu khi hoàn thiện hoá bài toán, ta phải đổi dấu hai vế của phương trình thứ i thì cột thứ i của ma trận nghịch đảo A_J^{-1} tìm theo quy tắc trên phải được đổi dấu trở lại.

Cách khác: từ công thức suy (2.2.8) suy ra

$$\boxed{Y^* A_J = C_J} \qquad (2.2.9)$$

Thay $Y^* = (y_1\ y_2\ y_3)$ và các số liệu của các ma trận A_J và C_J vào (2.2.9), ta được hệ phương trình: $\begin{cases} 3y_1 - y_2 + 2y_3 = 4 \\ -y_1 + 2y_2 + y_3 = -2 \\ y_1 = 0 \end{cases}$ Giải hệ phương trình này ta cũng được nghiệm : $y_1 = 0$, $y_2 = -8/5$, $y_3 = 6/5$

* Chú ý: Nếu gặp bài toán quy hoạch tuyến tính dạng:

$$f(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min \text{ có: } c_j \ge 0\ \forall j = \overline{1,n} \text{ và } x_j \ge 0\ \forall j = \overline{1,n}$$

thì ta có thể giải bài toán đối ngẫu và giả sử bài toán đối ngẫu có phương án tối ưu thì phương án tối ưu của bài toán gốc có được theo công thức:

$$\boxed{x_j = \Delta_{m+j}\ \ \forall j = \overline{1,n}} \qquad (2.2.10)$$

trong đó Δ_{m+j} là số kiểm tra của biến bù thứ j của bài toán đối ngẫu ở bảng đơn hình tối ưu.

- Ví dụ 2.2.2: Cho bài toán quy hoạch tuyến tính:

$$f(X) = x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 \to \max$$
$$-x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 \le 7$$
$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \le -13$$
$$3x_1 + x_2 + 2x_4 = 14$$
$$x_1 \ge 0;\ x_3 \le 0;\ x_4 \ge 0$$

a/ Viết bài toán đối ngẫu và chỉ ra các cặp điều kiện đối ngẫu.

b/ Tìm câu trả lời của cặp bài toán đối ngẫu trên.

c/ Phương án tối ưu tìm được đầu tiên trên bảng đơn hình của bài toán gốc có phải phương án cực biên hay không?

✍ Giải : a/ - Bài toán đối ngẫu:

$$g(Y) = 7y_1 - 13y_2 + 14y_3 \to \min$$
$$-y_1 + y_2 + 3y_3 \ge 1 \quad (1)$$
$$3y_1 - y_2 + y_3 = -3 \quad (2)$$
$$-2y_1 + y_2 \le 4 \quad (3)$$
$$-y_1 - y_2 + 2y_3 \ge -2 \quad (4)$$
$$y_1 \ge 0 \quad (5)$$
$$y_2 \ge 0 \quad (6)$$

- Các cặp điều kiện đối ngẫu:

$x_1 \ge 0$ và $-y_1 + y_2 + 3y_3 \ge 1$

$x_3 \le 0$ và $-2y_1 + y_2 \le 4$

$x_4 \ge 0$ và $-y_1 - y_2 + 2y_3 \ge -2$

$y_1 \ge 0$ và $-x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 \le 7$

$y_2 \ge 0$ và $x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \le -13$

b/ - Chính tắc hóa bài toán: Đặt $x_2 = x'_2 - x''_2$ với $\begin{cases} x'_2 \ge 0 \\ x''_2 \ge 0 \end{cases}$; $x'_3 = -x_3 \ge 0$

$x_5 = 7 + x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 \ge 0$; $x_6 = -13 - x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \ge 0$. Khi đó ta được bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc sau đây:

$$\begin{aligned}
&f'(X') = x_1 - 3x'_2 + 3x''_2 - 4x'_3 - 2x_4 \to \max \\
&-x_1 + 3x'_2 - 3x''_2 + 2x'_3 - x_4 + x_5 = 7 \\
&x_1 - x'_2 + x''_2 - x'_3 - x_4 + x_6 = -13 \qquad (2') \\
&3x_1 + x'_2 - x''_2 + 2x_4 = 14 \\
&x_j \ge 0\ (j = 1, 4, 5, 6);\ x'_2 \ge 0;\ x''_2 \ge 0;\ x'_3 \ge 0
\end{aligned}$$

- Hoàn thiện hóa bài toán:

Trước hết ta thấy trong các số tự do ở vế phải của bài toán chính tắc có $b_2 < 0$, vì vậy ta phải đổi dấu hai vế của phương trình $(2')$. Sau khi đổi dấu 2 vế của phương trình $(2')$ thì ma trận ràng buộc đã có một véctơ cột đơn vị là $A_5 = E_1$, ta phải thêm 2 biến giả là x_7 và x_8 để lập bài toán "M" với ma trận ràng buộc có $A_7 = E_2$; $A_8 = E_3$:

$$\begin{aligned}
&F(\overline{X}) = x_1 - 3x'_2 + 3x''_2 - 4x'_3 - 2x_4 - Mx_7 - Mx_8 \to \max \\
&-x_1 + 3x'_2 - 3x''_2 + 2x'_3 - x_4 + x_5 = 7 \\
&-x_1 + x'_2 - x''_2 + x'_3 + x_4 - x_6 + x_7 = 13 \\
&3x_1 + x'_2 - x''_2 + 2x_4 + x_8 = 14 \\
&x_j \ge 0\ (j = 1, 4, 5, 6, 7, 8);\ x'_2 \ge 0;\ x''_2 \ge 0;\ x'_3 \ge 0
\end{aligned}$$

trong đó M là số dương đủ lớn.

Cho $x_1 = x'_2 = x''_2 = x'_3 = x_4 = x_6 = 0 \Rightarrow x_5 = 7;\ x_7 = 13;\ x_8 = 14$, ta được $\overline{X}_0 = (0,0,0,0,0,7,0,13,14)$ là phương án cực biên của bài toán M với cơ sở $\{A_5, A_7, A_8\}$.

- Nhập các số liệu đặc trưng vào bảng đơn hình:

A_J	C_J	X_J	1	-3	3	-4	-2	0	0	-M	-M	
			A_1	A'_2	A''_2	A'_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	
A_5	0	7	-1	3	-3	2	-1	1	0	0	0	
A_7	-M	13	-1	1	-1	1	1	0	-1	1	0	13
A_8	-M	14	3	1	-1	0	(2)	0	0	0	1	$7=\theta_0$
		0	-1	3	-3	4	2	0	0	0	0	
		-27	-2	2	2	-1	-3	0	1	0	0	
A_5	0	14	1/2	7/2	-7/2	2	0	1	0	0	1/2	7
A_7	-M	6	-5/2	1/2	-1/2	(1)	0	0	-1	1	-1/2	$6=\theta_0$
A_4	-2	7	3/2	1/2	-1/2	0	1	0	0	0	1/2	
		-14	-4	2	-2	4	0	0	0	0	-1	
		-6	5/2	-1/2	1/2	-1	0	0	0	0	3/2	
A_5	0	2	11/2	5/2	-5/2	0	0	1	2	-2	3/2	
A'_3	-4	6	-5/2	1/2	-1/2	1	0	0	-1	1	-1/2	
A_4	-2	7	3/2	1/2	-1/2	0	-1	0	0	0	1/2	
		-38	6	0	0	0	0	0	4	-4	1	
		0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	

$\Delta_k \geq 0\ \forall k$ suy ra phương án cực biên thứ 3 là phương án tối ưu của bài toán "M": $\overline{X}^* = (0,0,0,6,7,2,0,0,0)$ với các biến giả $x_7 = x_8 = 0 \Rightarrow$ bài toán chính tắc có phương án tối ưu là $X_C^* = (0,0,0,6,7,2,0) \Rightarrow$ các biến gốc $x_2 = x'_2 - x''_2 = 0 - 0 = 0$; $x_3 = -x'_3 = -6$, vì vậy bài toán gốc có phương án tối ưu là: $X^* = (0,0,-6,7)$ với $f_{max} = -38$.

- Cơ sở tối ưu của bài toán chính tắc là $J^* = \{3,4,5\} \Rightarrow$ phương án cực biên tối ưu của bài toán đối ngẫu là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} -2y_1 + y_2 = 4 \\ -y_1 - y_2 + 2y_3 = -2 \\ y_1 = 0 \end{cases}$

giải hệ phương trình này, ta được nghiệm duy nhất: $Y^* = (0,4,1)$ là phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu với $g_{min} = -38$.

c/ Thay phương án tối ưu X^* vào hệ ràng buộc của bài toán gốc ta được:

$-x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 = 5 < VP = 7$ (7)

$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -13 = VP$ (8)

$3x_1 + x_2 + 2x_4 = 14 = VP$ (9)

$x_1 = 0$ (10)

$x_3 = -6 < 0$ (11)

$x_4 = 7 > 0$ (12)

Như vậy phương án tối ưu X^* tìm được đầu tiên trên bảng đơn hình của bài toán gốc làm thỏa mãn 3 ràng buộc chặt là (8), (9), (10), số ràng buộc chặt ít hơn số biến của bài toán và do đó phương án X^* không phải là phương án cực biên của bài toán .

Câu hỏi phát sinh: Tìm phương án tối ưu cực biên của bài toán.

Sở dĩ phương án tối ưu X^* tìm được ở trên không phải phương án cực biên là do cơ sở tối ưu tương ứng không có mặt A'_2 hoặc A''_2 (các véc tơ tách ra từ A_2, là véc tơ ứng với biến x_2 không ràng buộc về dấu). Để có được phương án cực biên tối ưu của bài toán gốc, ta phải tạo ra được một cơ sở tối ưu có mặt A'_2 hoặc A''_2. Nhưng, như ta thấy ở bảng tối ưu trên, véc tơ A''_2 không thể đưa được vào cơ sở tối ưu (vì $z''_{j2} \le 0 \ \forall j \in J^*$). Chỉ có một cách đưa A'_2 vào, thay A_5 ra. Vì vậy bài toán chỉ có một phương án cực biên tối ưu là: $X' = (0, 4/5, -28/5, 33/5)$, phương án này có được từ phương án $X'_C = (0, 4/5, 0, 28/5, 33/5, 0, 0)$.

* Ví dụ 2.2.3: Trở lại bài toán phân công lao động đã cho ở §1.1. Hãy tìm phương án sản xuất tối ưu.

* <u>Giải</u>: Mô hình toán học đã lập được là bài toán quy hoạch tuyến tính có dạng:

$f(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min$ có: $c_j \ge 0 \ \forall j = \overline{1,n}$ và $x_j \ge 0 \ \forall j = \overline{1,n}$, vì vậy ta đưa về giải bài toán đối ngẫu rồi suy nghiệm cho bài toán gốc.

Quy đổi lại đơn vị tính thời gian là 100 giờ khi đó ta có bài toán đối ngẫu sau:

$$g(Y) = 16y_1 + 22y_2 + 20y_3 \to \max$$
$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 + 3y_3 \le 10 \\ 3y_1 + 2y_2 + y_3 \le 5 \\ y_1 + 3y_2 + 4y_3 \le 13 \\ y_1 + 4y_2 + 5y_3 \le 16 \\ y_i \ge 0 \quad i = \overline{1,3} \end{cases}$$

* Chính tắc hóa bài toán đối ngẫu

$$g(Y) = 16y_1 + 22y_2 + 20y_3 \to \max$$
$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 + 3y_3 + y_4 = 10 \\ 3y_1 + 2y_2 + y_3 + y_5 = 5 \\ y_1 + 3y_2 + 4y_3 + y_6 = 13 \\ y_1 + 4y_2 + 5y_3 + y_7 = 16 \\ y_i \ge 0 \quad \forall i = \overline{1,7} \end{cases}$$

Cho $y_1 = y_2 = y_3 = 0 \Rightarrow y_4 = 10$; $y_5 = 5$; $y_6 = 13$; $y_7 = 16 \Rightarrow \overline{Y}_0 = (0, 0, 0, 10, 5, 13, 16)$ là phương án cực biên của bài toán chính tắc với cơ sở $\{A'_4, A'_5, A'_6, A'_7\}$. Ta có bảng đơn hình:

A'_I	B_I	Y_I	16	22	20	0	0	0	0	
			A'_1	A'_2	A'_3	A'_4	A'_5	A'_6	A'_7	
A'_4	0	10	2	1	3	1	0	0	0	10
A'_5	0	5	3	(2)	1	0	1	0	0	$5/2=\theta_0$
A'_6	0	13	1	3	4	0	0	1	0	13/3
A'_7	0	16	1	4	5	0	0	0	1	4
		0	-16	|-22|	-20	0	0	0	0	
A'_4	0	15/2	1/2	0	5/2	1	-1/2	0	0	3
A'_2	22	5/2	3/2	1	1/2	0	1/2	0	0	5
A'_6	0	11/2	-7/2	0	5/2	0	-3/2	1	0	11/5
A'_7	0	6	-5	0	(3)	0	-2	0	1	$2=\theta_0$
		55	17	0	|-9|	0	11	0	0	
A'_4	0	5/2	14/3	0	0	1	7/6	0	-5/6	
A'_2	22	3/2	7/3	1	0	0	5/6	0	-1/6	
A'_6	0	1/2	2/3	0	0	0	1/6	1	-5/6	
A'_3	20	2	-5/3	0	1	0	-2/3	0	1/3	
		73	2	0	0	0	5	0	3	

$\Delta_k \geq 0 \ \forall k$ suy ra phương án cực biên thứ 3 là phương án tối ưu của bài toán chính tắc của bài toán đối ngẫu: $\overline{Y}^* = (0,3/2,2,5/2,0,1/2,0) \Rightarrow$ Phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu là $Y^* = (0, 3/2, 2)$.

* Suy nghiệm cho bài toán gốc: ta có

$$x_1^* = \Delta_{m+1} = \Delta_4 = 0$$
$$x_2^* = \Delta_{m+2} = \Delta_5 = 5$$
$$x_3^* = \Delta_{m+1} = \Delta_6 = 0$$
$$x_4^* = \Delta_{m+1} = \Delta_7 = 3$$

Như vậy phải bố trí cho dây chuyền 2 làm việc trong 500 giờ, dây chuyền 4 làm việc trong 300 giờ, còn các dây chuyền 1 và 3 không làm việc, khi đó sẽ thỏa mãn nhu cầu tối thiểu về các sản phẩm, đồng thời tổng chi phí sản xuất là thấp nhất: $f_{min} =$ 7 triệu 300 ngàn đồng.

Lưu ý: Ở bảng đơn hình tối ưu của bài toán đối ngẫu, Δ_k chính là số sản phẩm thứ k $(k = \overline{1,m})$ vượt qúa so với nhu cầu tối thiểu.

* Ví dụ 2.2.4: Cho bài toán quy hoạch tuyến tính.

$$f(X) = 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 \to \max$$
$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 &\geq 10 \quad (1)\\ x_1 - 4x_2 + x_3 - 3x_4 &= 11\\ 3x_1 \qquad - x_3 + 2x_4 &\leq 5\\ x_j \geq 0,\ j = \overline{1,4} \end{aligned}$$

a- Viết bài toán đối ngẫu và chỉ ra các cặp điều kiện đối ngẫu.

b- Tìm câu trả lời của cặp bài toán đối ngẫu trên.

c- Nếu thay dấu "≥" ở ràng buộc (1) bởi dấu "=" thì câu trả lời của cặp bài toán đối ngẫu mới sẽ như thế nào?

Giải: a- Viết bài toán đối ngẫu.

$$g(Y) = 10y_1 + 11y_2 + 5y_3 \to \min$$
$$\begin{aligned} -y_1 + y_2 + 3y_3 &\geq 3\\ y_1 - 4y_2 \qquad &\geq -2\\ 2y_1 + y_2 - y_3 &\geq 1\\ -3y_1 - 3y_2 + 2y_3 &\geq -3\\ y_1 \leq 0;\ y_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

- Các cặp điều kiện đối ngẫu:

$x_1 \geq 0$ và $-y_1 + y_2 + 3y_3 \geq 3$

$x_2 \geq 0$ và $y_1 - 4y_2 \geq -2$

$x_3 \geq 0$ và $2y_1 + y_2 - y_3 \geq 1$

$x_4 \geq 0$ và $-3y_1 - 3y_2 + 2y_3 \geq -3$

$y_1 \leq 0$ và $-x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 \geq 10$

$y_3 \geq 0$ và $3x_1 - x_3 + 2x_4 \leq 5$

b/ * Chính tắc hóa bài toán.

Đặt $x_5 = -x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 - 10 \geq 0$

$x_6 = 5 - 3x_1 + x_3 - 2x_4 \geq 0$

Khi đó ta có bài toán chính tắc:

$$f(X) = 3x_1 - 2x_2 - x_3 - 3x_4 \to \max$$
$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 - x_5 \qquad &= 10\\ x_1 - 4x_2 + x_3 - 3x_4 \qquad &= 11\\ 3x_1 \qquad - x_3 + 2x_4 \qquad + x_6 &= 5\\ x_j \geq 0 \ \forall j = \overline{1,6} \end{aligned}$$

Ma trận ràng buộc của bài toán chính tắc đã có một véctơ cột đơn vị là $A_6 = E_3$, ta phải thêm 2 biến giả x_7 và x_8 để lập bài toán "M" với ma trận hệ ràng buộc có $A_7 = E_1$; $A_8 = E_2$:

$$F(\overline{X}) = 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 \qquad - Mx_7 - Mx_8 \to \max$$
$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 - x_5 \qquad + x_7 \qquad &= 10\\ x_1 - 4x_2 + x_3 - 3x_4 \qquad + x_8 &= 11\\ 3x_1 \qquad - x_3 + 2x_4 \qquad + x_6 \qquad &= 5\\ x_j \geq 0,\ j = \overline{1,8} \end{aligned}$$

trong đó M là số dương đủ lớn.

Cho $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0 \Rightarrow x_6 = 5$; $x_7 = 10$; $x_8 = 11$, ta được: $\overline{X}_0 = (0,0,0,0,0,5,10,11)$ là phương án cực biên của bài toán "M" với cơ sở $\{A_6, A_7, A_8\}$

* Nhập các số liệu đặc trưng vào bảng đơn hình:

A_J	C_J	X_J	3	-2	1	-3	0	0	-M	-M	
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	
A_7	-M	10	-1	1	(2)	-3	-1	0	1	0	$5=\theta_0$
A_8	-M	11	1	-4	1	-3	0	0	0	1	11
A_6	0	5	3	0	-1	2	0	1	0	0	
		0	-3	2	-1	3	0	0	0	0	
		-21	0	3	|-3|	6	1	0	0	0	
A_3	1	5	-1/2	1/2	1	-3/2	-1/2	0	1/2	0	
A_8	-M	6	(3/2)	-9/2	0	-3/2	1/2	0	-1/2	1	$4=\theta_0$
A_6	0	10	5/2	1/2	0	1/2	-1/2	1	1/2	0	4
		5	-7/2	5/2	0	3/2	-1/2	0	1/2	0	
		-6	-3/2	9/2	0	3/2	-1/2	0	3/2	0	
A_3	1	7	0	-1	1	-2	-1/3	0	1/3	1/3	
A_1	3	4	1	-3	0	-1	1/3	0	-1/3	2/3	
A_6	0	0	0	(8)	0	3	-4/3	1	4/3	-5/3	$0=\theta_0$
		19	0	-8	0	-2	2/3	0	-2/3	7/3	
		0	0	0	0	0	0	0	1	1	
A_3	1	7	0	0	1	-13/8	-1/2	1/8	1/2	1/8	
A_1	3	4	1	0	0	1/8	-1/6	3/8	1/6	1/24	
A_2	-2	0	0	1	0	3/8	-1/6	1/8	1/6	-5/24	
		19	0	0	0	1	-2/3	1	2/3	2/3	
		0	0	0	0	0	0	0	1	1	

ở bảng đơn hình số 4 có $\Delta_5 < 0$ và $z_{j5} \le 0 \ \forall j \in J$ Vì vậy bài toán "M" không có phương án tối ưu $\Rightarrow$ bài toán chính tắc không có phương án tối ưu $\Rightarrow$ bài toán gốc cũng không có phương án tối ưu nhưng vẫn có phương án , chẳng hạn $X_0 = (4, 0, 7, 0)$. Theo hệ quả 2.2.1 thì bài toán đối ngẫu không có phương án nào.

c- Khi thay dấu "$\ge$" ở ràng buộc (1) bởi dấu "=" thì khi chính tắc hóa bài toán ta không cần biến bù x_5. Vì vậy ở những bảng đơn hình không có A_5 trong cơ sở, cột 5 được bỏ đi. Khi đó ở bảng đơn hình số 4 có $\Delta_k \ge 0 \ \forall k \Rightarrow$ phương án cực biên ở bảng 4 là phương án tối ưu của bài toán "M" mới: $\overline{X}^* = (4,0,7,0,0,0,0)$ với các biến giả $x_7 = x_8 = 0 \Rightarrow$ bài toán chính tắc mới có phương án tối ưu là $X_C^* = (4,0,7,0,0) \Rightarrow$ bài toán gốc mới có phương án tối ưu là: $X^* = (4,0,7,0)$ với $f_{max} = 19$.

Cơ sở tối ưu của bài toán chính tắc mới là $\{A_3, A_1, A_2\}$, vì vậy phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu mới là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 - y_3 = 1 \\ -y_1 + y_2 + 3y_3 = 3 \\ y_1 - 4y_2 = -2 \end{cases},$$

giải hệ phương trình này ta được nghiệm duy nhất: $Y^* = (2/3, 2/3, 1)$. Đó là phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu mới.

Ví dụ 2.2.5: Cho bài toán quy hoạch tuyến tính:

$$\begin{aligned} f(X) = \quad & x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \to \min \\ & x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 2 \\ - & x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 \le 5 \\ - & 2x_1 + x_3 - x_4 = 6 \\ & x_j \ge 0 \ \forall j = \overline{1,4} \end{aligned}$$

a/ Viết bài toán đối ngẫu và chỉ ra các cặp điều kiện đối ngẫu.

b/ Tìm câu trả lời cho cặp bài bài toán đối ngẫu trên.

c/ Kiểm chứng kết quả thu được một cách trực tiếp trên hệ ràng buộc của bài toán gốc.

✍ Giải : a/ - Bài toán đối ngẫu:

$$g(Y) = 2y_1 + 5y_2 + 6y_3 \to \max$$
$$\begin{aligned} y_1 - y_2 - 2y_3 &\le 1 \\ 2y_1 + 2y_2 \quad &\le 1 \\ -3y_1 + 2y_2 + y_3 &\le 1 \\ y_1 - y_2 - y_3 &\le -1 \\ y_2 &\le 0 \end{aligned}$$

- Các cặp điều kiện đối ngẫu:

$x_1 \ge 0$ và $y_1 - 2y_2 - y_3 \le 1$

$x_2 \ge 0$ và $y_1 \quad + 2y_3 \le 1$

$x_3 \ge 0$ và $y_1 + y_2 + 2y_3 \le 1$

$x_4 \ge 0$ và $y_1 - y_2 - y_3 \le -1$

$y_2 \le 0$ và $-x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 \le 5$

b/ * Chính tắc hóa bài toán: Đặt $x_5 = 5 + x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_4 \ge 0$

Khi đó ta được bài toán chính tắc sau đây:

$$f(X) = x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \to \min$$
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 \quad &= 2 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 &= 5 \\ -2x_1 \quad + x_3 - x_4 \quad &= 6 \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5} & \end{aligned}$$

* Hoàn thiện hóa bài toán: Ta nhận thấy các số tự do ở vế phải của bài toán chính tắc đều là những số dương và ma trận ràng buộc của bài toán đã có một vectơ cột đơn vị là $A_5 = E_2$, ta phải thêm 2 biến giả là x_6 và x_7 để lập bài toán "M" có $A_6 = E_1$; $A_7 = E_3$:

$$f(X) = x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \quad + Mx_6 + Mx_7 \to \min$$
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 \quad + x_6 \quad &= 2 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 \quad &= 5 \\ -2x_1 \quad + x_3 - x_4 \quad + x_7 &= 6 \\ x_j \ge 0\ \forall\ j = \overline{1,7} & \end{aligned}$$

trong đó M là số dương đủ lớn.

Cho $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_6 = 0 \Rightarrow x_5 = 5$; $x_6 = 2$; $x_7 = 6$, ta được $\overline{X}_0 = (0, 0, 0, 0, 5, 2, 6)$ là phương án cực biên bài toán "M" với cơ sở $\{A_5, A_7, A_8\}$.

Nhập các số liệu đặc trưng vào bảng đơn hình

A_J	C_J	X_J	1	1	1	-1	0	M	M	
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	
A_6	M	2	1	(2)	-3	1	0	1	0	$1=\theta_0$
A_5	0	5	-1	2	2	-1	1	0	0	5/2
A_7	M	6	-2	0	1	-1	0	0	1	
		0	-1	-1	-1	1	0	0	0	
		8	-1	2	-2	0	0	0	0	
A_2	1	1	1/2	1	-3/2	1/2	0	1/2	0	
A_5	0	1	-2	0	(5)	-2	1	-1	0	$1/5=\theta_0$
A_7	M	6	-2	0	1	-1	0	0	1	6
		1	-1/2	0	-5/2	3/2	0	1/2	0	
		6	-2	0	1	-1	0	-1	0	
A_2	1	19/10	-1/10	1	0	-1/10	3/10	1/5	0	
A_3	1	3/5	-2/5	0	1	-2/5	1/5	-1/5	0	
A_7	M	27/5	-8/5	0	0	-3/5	-1/5	1/5	1	
		5/2	-3/2	0	0	1/2	1/2	0	0	
		27/5	-8/5	0	0	-3/5	-1/5	-4/5	0	

$\Delta_k \le 0 \quad \forall k \Rightarrow$ phương án cực biên thứ 3 là phương án tối ưu của bài toán "M":

$\overline{X}^* = (0, 19/10, 3/5, 0, 0, 0, 27/5)$ với biến giả $x_7 > 0$, theo định lý 1.4.2 thì bài toán chính tắc không có phương án nào. Theo hệ quả 2.2.2 thì bài toán đối ngẫu không có phương án tối ưu, nhưng ta thấy bài toán đối ngẫu vẫn có phương án, chẳng hạn $Y_0 = (0, 0, 1)$.

* Ví dụ 2.2.6: Trở lại ví dụ 2.1.1, không dùng phương pháp đơn hình . Hãy tìm phương án tối ưu của bài toán gốc và bài toán đối ngẫu.

✍ **Giải**:

Trước hết ta giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 44 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 23 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 6x_4 = 96 \end{cases}$ (♣)

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 3 & 44 \\ -1 & 2 & 3 & 1 & 23 \\ 3 & -1 & 1 & 6 & 96 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 3 & 44 \\ 5 & 0 & -5 & 5 & 65 \\ 5 & 0 & 0 & 9 & 140 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 & 18 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 13 \\ 0 & 0 & 5 & 4 & 75 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 1/5 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 9/5 & 28 \\ 0 & 0 & 1 & 4/5 & 15 \end{array}\right) = \tilde{Z}$$

$\Rightarrow$ hệ phương trình (♣) có vô số nghiệm dạng $X(\alpha) = \left(28 - \frac{9\alpha}{5}, 3 - \frac{\alpha}{5}, 15 - \frac{4\alpha}{5}, \alpha\right) \forall \alpha$.

Thay họ nghiệm $X(\alpha)$ vào các ràng buộc còn lại của bài toán, ta được:

$$\begin{cases} x_1(\alpha) = 28 - \frac{9\alpha}{5} \ge 0 \Leftrightarrow \alpha \le \frac{140}{9} \\ x_2(\alpha) = 3 - \frac{\alpha}{5} \ge 0 \Leftrightarrow \alpha \le 15 \\ x_3(\alpha) = 15 - \frac{4\alpha}{5} \ge 0 \Leftrightarrow \alpha \le \frac{75}{4} \\ x_4(\alpha) = \alpha \ge 0 \end{cases}$$

Kết hợp lại, ta được $0 \le \alpha \le 15$.

Như vậy, mọi phương án của bài toán gốc đều có dạng $X(\alpha)$ $\forall \alpha \in [0,15]$ và ngược lại, mọi véc tơ có dạng $X(\alpha)$ $\forall \alpha \in [0,15]$ đều là phương án của bài toán.

Thay họ phương án $X(\alpha)$ vào hàm mục tiêu f(X), ta được $f(X(\alpha) = 295 - \frac{3\alpha}{5}$, hàm số này nghịch biến với đối số α, vì vậy $f(X(\alpha))$ đạt cực tiểu khi α đạt cực đại trong $[0,15]$ là $\alpha_{max} = 15 \Rightarrow$ phương án tối ưu của bài toán gốc là $X^* = (1, 0, 3, 15)$ với $f_{min} = 286$. Vì bài toán gốc là bài toán chính tắc nên hiển nhiên phương án này là phương án cực biên với cơ sở $J = \{1,3,4\}$, nên nghiệm của hệ phương trình tuyến tính Cramer $\begin{cases} 2y_1 - y_2 + 3y_3 = 13 \\ -y_1 + 3y_2 + y_3 = -4 \\ 3y_1 + y_2 + 6y_3 = 19 \end{cases}$ là phương án tối ưu cực biên của bài toán đối ngẫu. Giải hệ phương trình đó, ta được $Y^* = (1, -2, 3)$.

* Ví dụ 2.2.7: Cho bài toán quy hoạch tuyến tính như ở ví dụ 1.1.2 (tr.8).

Dùng lý thuyết đối ngẫu để chứng minh bài toán có lời giải.

✍ Giải

Cách 1: Sử dụng định lý 2.2.2:

- Bài toán đối ngẫu:

$$g(Y) = y_1 + 16y_2 - 3y_3 + 6y_4 \to \max$$
$$\begin{array}{l} y_1 + y_2 - 3y_4 \le -3 \\ -2y_1 - 2y_3 - y_4 \le -3 \\ y_1 + 5y_2 + 9y_3 + 3y_4 \le 1 \\ y_1 \ge 0;\ y_2 \le 0;\ y_3 \ge 0;\ y_4 \ge 0 \end{array} \quad (3)$$

- Chứng tỏ bài toán gốc có phương án: Như ví dụ 1.1.2.

- Chứng tỏ bài toán đối ngẫu có phương án:

Xét véctơ $Y_0 = (1, -1, 0, 1)$, thay Y_0 vào hệ ràng buộc của bài toán đối ngẫu, ta được:

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 \quad\quad - 3y_4 &= -3 = vp \\ -2y_1 \quad\quad - 2y_3 - y_4 &= -3 = vp \\ y_1 + 5y_2 + 9y_3 + 3y_4 &= -1 < vp = 1 \\ y_1 > 0;\ y_2 < 0;\ y_3 = 0;\ y_4 > 0 & \end{aligned}$$

Như vậy Y_0 là phương án của bài toán đối ngẫu, tức là bài toán đối ngẫu có phương án.

Theo định lý 2.2.2 thì cả hai bài toán đều có phương án tối ưu.

Cách 2: Sử dụng định lý 2.2.3 và định lý 1.1.2.

- Bài toán đối ngẫu: như cách 1.
- Chứng tỏ bài toán đối ngẫu có phương án: như cách 1.
- Chứng tỏ hàm mục tiêu g(Y) bị chặn trên: Nhân cả hai vế của ràng buộc (3) với 3, ta được: $3y_1 + 15y_2 + 27y_3 + 9y_4 \le 3$ với mọi phương án Y tuỳ ý của bài toán đối ngẫu.

Vì $y_1 \ge 0$ nên $y_1 \le 3y_1$; $y_2 \le 0 \Rightarrow 16y_2 \le 15y_2$; $y_3 \ge 0 \Rightarrow$ $-3y_3 \le 27y_3$; $y_4 \ge 0 \Rightarrow 6y_4 \le 9y_4$, do đó $g(Y) = y_1 + 16y_2 - 3y_3 + 6y_4 \le 3y_1 + 15y_2 + 27y_3 + 9y_4$ với mọi phương án Y tuỳ ý của bài toán đối ngẫu. Theo tính chất bắc cầu thì $g(Y) \le 3$ với mọi phương án Y tuỳ ý của bài toán đối ngẫu, tức là hàm mục tiêu g(Y) bị chặn trên trong tập phương án của bài toán đối ngẫu. Theo định lý 1.1.2 thì bài toán đối ngẫu có phương án tối ưu, theo định lý 2.2.3 thì bài toán gốc có phương án tối ưu.

* Ví dụ 2.2.8: Cho bài toán quy hoạch tuyến tính như ở ví dụ 1.1.3 (tr.8).

Dùng lý thuyết đối ngẫu, chứng minh rằng bài toán có phương án nhưng không có phương án tối ưu.

* <u>Giải</u>: - Bài toán đối ngẫu:

$$\begin{aligned} g(Y) = 5y_1 + 8y_2 + 7y_3 &\to \max \\ 2y_1 + 3y_2 + y_3 &\le 5 \\ -2y_1 + y_2 - 2y_3 &\le 2 \qquad (2) \\ y_1 + 3y_2 + y_3 &\le 2 \\ -y_1 - 4y_2 + 3y_3 &\le -5 \qquad (4) \\ y_i \le 0 \ \left(i = \overline{1,3}\right) & \qquad (5) \end{aligned}$$

- Chứng tỏ bài toán gốc có phương án: Xét véc tơ $X_0 = (0, 0, 0, 0)$, thay X_0 vào hệ ràng buộc của bài toán gốc, ta được:

$$\begin{aligned} 2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 &= 0 < vp = 5 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 - 4x_4 &= 0 < vp = 8 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 &= 0 < vp = 7 \\ x_j = 0 \ \forall j = \overline{1,4} & \end{aligned}$$

Như vậy X_0 là phương án của bài toán gốc, tức là bài toán gốc có phương án.

- Chứng tỏ bài toán đối ngẫu không có phương án: Nhân cả hai vế của ràng buộc (2) với 2, ta được: $-4y_1 + 2y_2 - 4y_3 \le 4 \qquad (2')$

Cộng $(2')$ và (4) với nhau, ta được: $-5y_1 - 2y_2 - y_3 \le -1 \qquad (6)$

Theo (5) thì vế trái của (6) là $-5y_1 - 2y_2 - y_3 \ge 0$, mâu thuẫn với (6). Mâu thuẫn đó chứng tỏ bài toán đối ngẫu không có phương án. Theo hệ quả 2.2.2 thì bài toán gốc không có phương án tối ưu.

* Ví dụ 2.2.9: Cho bài toán quy hoạch tuyến tính:

$$\begin{aligned} f(X) = 2x_1 + 9x_2 - 18x_3 - x_4 + 10x_5 &\to \max \\ -x_1 + 3x_2 \quad\quad - x_4 + 4x_5 &\le 8 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 - 3x_5 &\ge 9 \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 \quad\quad &= 12 \\ x_j \ge 0 \ \forall j = \overline{1,5} & \end{aligned}$$

a/ Viết bài toán đối ngẫu.

b/ Không dùng thuật toán đơn hình, hãy chứng tỏ véc tơ $X_0 = (0, 0, 0, 12, 5)$ và véc tơ $Y_0 = \left(\frac{8}{5}, -\frac{6}{5}, 3\right)$ lần lượt là phương án tối ưu của bài toán gốc và bài toán đối ngẫu.

* Giải: - Bài toán đối ngẫu:

$$g(Y) = 8y_1 + 9y_2 + 12y_3 \to \min$$

$$\begin{aligned}
-y_1 + y_2 + 2y_3 &\ge 2\\
3y_1 - y_2 + y_3 &\ge 9\\
y_2 - 4y_3 &\ge -18\\
-y_1 + 2y_2 + y_3 &\ge -1\\
4y_1 - 3y_2 &\ge 10\\
y_1 \ge 0;\ y_2 &\le 0
\end{aligned}$$

Thay X_0 vào hệ ràng buộc của bài toán gốc, ta được:

$$\begin{aligned}
-x_1 + 3x_2 - x_4 + 4x_5 &= 8 = vp\\
x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 - 3x_5 &= 9 = vp\\
2x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 &= 12 = vp\\
x_j \ge 0,\ j &= \overline{1,5}
\end{aligned}$$

Như vậy X_0 là phương án của bài toán của bài toán gốc, phương án này có $f(X_0) = 38$. Thay Y_0 vào hệ ràng buộc của bài toán đối ngẫu, ta được:

$$\begin{aligned}
-y_1 + y_2 + 2y_3 &= \frac{16}{5} > vp = 2\\
3y_1 - y_2 + y_3 &= 9 = vp\\
y_2 - 4y_3 &= -\frac{66}{5} > vp = -18\\
-y_1 + 2y_2 + y_3 &= -1 = vp\\
4y_1 - 3y_2 &= 10 = vp\\
y_1 &= 8/5 > 0\\
y_2 &= -6/5 < 0
\end{aligned}$$

Như vậy Y_0 là phương án của bài toán của bài toán đối ngẫu, phương án này có $g(Y_0) = 38$ và do đó $f(X_0) = g(Y_0)$. Theo hệ quả 2.2.3 thì X_0 là phương án tối ưu của bài toán gốc, Y_0 là phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu.

§ 2.3 Định lý đối ngẫu thứ hai

Cho cặp bài toán quy hoạch tuyến tính đối ngẫu, trong đó bài toán gốc có n biến, bài toán đối ngẫu có m biến.

* Định lý 2.3.1 (Định lý đối ngẫu thứ hai) Giả sử cả hai bài toán đều có phương án

Phương án $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ của bài toán gốc và phương án $Y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ của bài toán đối ngẫu lần lượt là phương án tối ưu của bài toán gốc và bài toán đối ngẫu khi và chỉ khi chúng làm cho trong tất cả các cặp điều kiện đối ngẫu, mỗi cặp đều có ít nhất một điều kiện xảy ra với dấu đẳng thức.

Nghĩa là: (diễn giải cho cặp bài toán đối ngẫu đối xứng)

Nếu $x_j > 0$ thì $\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i = c_j$ & nếu $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j > b_i$ thì $y_i = 0$.

Hoặc: nếu $y_i > 0$ thì $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$ & nếu $\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i < c_j$ thì $x_j = 0$.

Từ định lý đối ngẫu thứ hai trực tiếp suy ra được các hệ quả sau:

* Hệ quả 2.3.1: Nếu cả hai bài toán đối ngẫu nhau đều có phương án thì từ một phương án tối ưu của bài toán này ta suy ra được tập hợp tất cả các phương án tối ưu của bài toán kia.

* Hệ quả 2.3.2: Nếu một phương án của một trong hai bài toán đối ngẫu nhau làm thoả mãn chặt tất cả các ràng buộc của bài toán thì phương án này là tối ưu khi và chỉ khi bài toán kia có phương án. Đồng thời mọi phương án của bài toán thứ hai đều là phương án tối ưu.

* Ví dụ 2.3.1: Cho bài toán quy hoạch tuyến tính như ở ví dụ 2.2.4 phần c/:

$$\begin{aligned} f(X) = 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 &\to \max \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 &= 10 \\ x_1 - 4x_2 + x_3 - 3x_4 &= 11 \\ 3x_1 \qquad - x_3 + 2x_4 &\le 5 \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4} & \end{aligned}$$

a/ Chứng minh bài toán đối ngẫu có vô số phương án tối ưu.

b/ Tìm một phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu làm cho vế trái của ràng buộc thứ tư đúng bằng 1. Phương án đó có phải phương án cực biên hay không?

* Giải:

a. - Bài toán đối ngẫu:

$$\begin{aligned} g(Y) = 10y_1 + 11y_2 + 5y_3 &\to \min \\ -y_1 + y_2 + 3y_3 &\ge 3 \quad (1) \\ y_1 - 4y_2 \qquad &\ge -2 \quad (2) \\ 2y_1 + y_2 - y_3 &\ge 1 \quad (3) \\ -3y_1 - 3y_2 + 2y_3 &\ge -3 \quad (4) \\ y_3 &\ge 0 \quad (5) \end{aligned}$$

- Các cặp điều kiện đối ngẫu:

$x_1 \ge 0$ và $-y_1 + y_2 + 3y_3 \ge 3$

$x_2 \ge 0$ và $y_1 - 4y_2 \ge -2$

$x_3 \ge 0$ và $2y_1 + y_2 - y_3 \ge 1$

$x_4 \ge 0$ và $-3y_1 - 3y_2 + 2y_3 \ge -3$

$y_3 \ge 0$ và $3x_1 - x_3 + 2x_4 \le 5$

- Thay phương án tối ưu $X^* = (4,0,7,0)$ vào hệ ràng buộc của bài toán gốc ta được:

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 &= 10 = vp \\ x_1 - 4x_2 + x_3 - 3x_4 &= 11 = vp \\ 3x_1 \qquad - x_3 + 2x_4 &= 5 = vp \\ x_j \ge 0 \quad \forall j = \overline{1,4} & \end{aligned}$$

Như vậy phương án tối ưu X^* của bài toán gốc làm thỏa mãn hai ràng buộc lỏng là $x_1 > 0$ và $x_3 > 0$. Theo định lý đối ngẫu thứ hai thì mọi phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu phải là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} -y_1 + y_2 + 3y_3 = 3 \\ 2y_1 + y_2 - y_3 = 1 \end{cases}$ (I)

Ngược lại, nghiệm nào của hệ phương trình (I) là phương án của bài toán đối ngẫu thì nghiệm ấy là phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu.

- Giải hệ (I): Trừ hai phương trình của hệ (I) cho nhau, ta được: $3y_1 - 4y_3 = -2$; đặt $y_3 = \alpha$, ta được $y_1 = \frac{4\alpha - 2}{3} \Rightarrow y_2 = \frac{7 - 5\alpha}{3}$. Như vậy hệ phương trình (I) có vô số nghiệm phụ thuộc một tham số là $Y(\alpha) = \left(\frac{4\alpha-2}{3}, \frac{7-5\alpha}{3}, \alpha\right)$ $\forall \alpha$ tuỳ ý.

- Thay họ nghiệm $Y(\alpha)$ của hệ phương trình (I) vào các ràng buộc còn lại của bài toán đối ngẫu, ta được: $y_1 - 4y_2 = \frac{4\alpha-2}{3} - \frac{28-20\alpha}{3} = 8\alpha - 10 \ge -2 \Rightarrow \alpha \ge 1$

$$-3y_1 - 3y_2 + 2y_3 = -4\alpha + 2 - 7 + 5\alpha + 2\alpha = 3\alpha - 5 \ge -3 \Rightarrow \alpha \ge \frac{2}{3}$$

$y_3 \ge 0 \Rightarrow \alpha \ge 0$. Kết hợp lại ta được $\alpha \ge 1$.

Như vậy $\forall \alpha \ge 1$ thì họ nghiệm $Y(\alpha)$ của hệ phương trình (I) là phương án của bài toán đối ngẫu. Do đó $Y(\alpha)$ là phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu với mọi $\alpha \ge 1$, tức là bài toán đối ngẫu có vô số phương án tối ưu và có một phương án cực biên tối ưu là $Y(1) = (2/3,\ 2/3,\ 1)$.

Ứng với $Y(\alpha)$ thì vế trái của ràng buộc thứ tư của bài toán đối ngẫu là $3\alpha - 5$. Cho $3\alpha - 5 = 1 \Rightarrow \alpha = 2 > 1 \Rightarrow$ phương án tối ưu với điều kiện trên là tồn tại và phương án đó là $Y(2) = (2, -1, 2)$, phương án này không phải là phương án cực biên của bài toán đối ngẫu.

* Ví dụ 2.3.2: Trở lại ví dụ 2.2.2:

$$\begin{aligned}
&f(X) = x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 \to \max\\
&-x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 \le 7 \quad (1)\\
&x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \le -13\\
&3x_1 + x_2 + 2x_4 = 14\\
&x_1 \ge 0;\ x_3 \le 0;\ x_4 \ge 0
\end{aligned}$$

Chứng tỏ bài toán gốc có vô số phương án tối ưu. Tìm phương án tối ưu của bài toán làm cho vế trái của ràng buộc (1) đúng bằng 0. Phương án đó có phải phương án cực biên hay không?

* <u>Giải</u>: Thay phương án tối ưu $Y^* = (0, 4, 1)$ của bài toán đối ngẫu vào hệ ràng buộc, ta được:

$$\begin{aligned}
&-y_1 + y_2 + 3y_3 = 7 > vp = 1 && (1')\\
&3y_1 - y_2 + y_3 = -3 = vp && (2')\\
&-2y_1 + y_2 = 4 = vp && (3')\\
&-y_1 - y_2 + 2y_3 = -2 = vp && (4')\\
&y_1 = 0 && (5')\\
&y_2 = 4 > 0 && (6')
\end{aligned}$$

Như vậy, phương án tối ưu Y^* của bài toán đối ngẫu làm thoả mãn 2 ràng buộc lỏng là $(1')$ và $(6')$. Theo định lý đối ngẫu thứ hai thì mọi phương án tối ưu của bài toán gốc phải là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -13 \end{cases}$ (I)

Ngược lại, nghiệm nào của hệ phương trình (I) là phương án của bài toán gốc thì nghiệm ấy là phương án tối ưu của bài toán gốc.

Kết hợp với ràng buộc thứ ba của bài toán gốc, ta được hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ -x_2 + x_3 - x_4 = -13 \\ x_2 \quad + 2x_4 = 14 \end{cases} \qquad \text{(II)}$$

Đặt $x_4 = \alpha \Rightarrow x_2 = 14 - 2\alpha \Rightarrow x_3 = 14 - 2\alpha + \alpha - 13 = 1 - \alpha$. Như vạy hệ phương trình (II) có vô số nghiệm phụ thuộc một tham số: $X(\alpha) = (0, 14 - 2\alpha, 1 - \alpha, \alpha)\ \forall \alpha$.

- Thay họ nghiệm $X(\alpha)$ của hệ phương trình (II) vào các ràng buộc còn lại của bài toán gốc, ta được: $-x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 = 42 - 6\alpha - 2 + 2\alpha - \alpha = 40 - 5\alpha \le 7 \Rightarrow \alpha \ge \frac{33}{5}$;

$x_3 \le 0 \Leftrightarrow 1 - \alpha \le 0 \Leftrightarrow \alpha \ge 1$; $x_4 \ge 0 \Leftrightarrow \alpha \ge 0$. Kết hợp lại, ta được $\alpha \ge \frac{33}{5}$.

Như vậy, với mọi $\alpha \ge \frac{33}{5}$ thì họ nghiệm $X(\alpha)$ của hệ phương trình (II) là phương án của bài toán gốc. Do đó $X(\alpha)$ là phương án tối ưu của bài toán gốc với mọi $\alpha \ge \frac{33}{5}$=6.6, tức là bài toán gốc có vô số phương án tối ưu và có một phương án cực biên tối ưu là:

$$X\left(\frac{33}{5}\right) = \left(0, \frac{4}{5}, -\frac{28}{5}, \frac{33}{5}\right).$$

Ứng với họ phương án $X(\alpha)$ thì vế trái của ràng buộc thứ nhất của bài toán gốc là $40-5\alpha$. Cho $40-5\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 8 > 6.6 \Rightarrow$ phương án tối ưu làm cho vế trái của ràng buộc (1) là tồn tại và phương án đó là X(8) = (0, -2, -7, 8), phương án này không phải phương án cực biên.

* Ví dụ 2.3.3: Cho bài toán quy hoạch tuyến tính:

$$\begin{aligned} & f(X) = 5x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 + 6x_5 - 2x_6 \to \min \\ & 2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_6 = -8 \\ & -x_1 + 2x_2 + x_4 - 4x_5 - x_6 = 10 \\ & -3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - 2x_5 \le 3 \\ & x_j \ge 0,\ j = \overline{1,6} \end{aligned}$$

a/ Viết bài toán đối ngẫu và chỉ ra các cặp điều kiện đối ngẫu.

b/ Chứng tỏ $X_0 = (0, 5, 2, 0, 0, 0)$ là phương án cực biên tối ưu của bài toán.

c[*]/ Lập bảng đơn hình tối ưu ứng với X_0.

* <u>Giải</u>: a/ - Bài toán đối ngẫu:

$$\begin{aligned} & g(Y) = -8y_1 + 10y_2 + 3y_3 \to \max \\ & 2y_1 - y_2 - 3y_3 \le 5 \quad (1) \\ & -2y_1 + 2y_2 + y_3 \le 3 \quad (2) \\ & y_1 - y_3 \le -1 \quad (3) \\ & -y_1 + y_2 + 2y_3 \le 4 \quad (4) \\ & -4y_2 - 2y_3 \le 6 \quad (5) \\ & y_1 - y_2 \le -2 \quad (6) \\ & y_3 \le 0 \quad (7) \end{aligned}$$

- Các cặp điều kiện đối ngẫu:

$$\begin{aligned} & x_1 \ge 0 \text{ và } 2y_1 - y_2 - 3y_3 \le 5 && (1') \\ & x_2 \ge 0 \text{ và } -2y_1 + 2y_2 + y_3 \le 3 && (2') \\ & x_3 \ge 0 \text{ và } y_1 - y_3 \le -1 && (3') \\ & x_4 \ge 0 \text{ và } -y_1 + y_2 + 2y_3 \le 4 && (4') \\ & x_5 \ge 0 \text{ và } -4y_2 - 2y_3 \le 6 && (5') \\ & x_6 \ge 0 \text{ và } y_1 - y_2 \le -2 && (6') \\ & y_3 \le 0 \text{ và } -3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - 2x_5 \le 3 && (7') \end{aligned}$$

b/ - Thay X_0 vào hệ ràng buộc của bài toán gốc, ta được:

$$\begin{aligned} & 2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_6 = -8 = vp \quad (1'') \\ & -x_1 + 2x_2 + x_4 - 4x_5 - x_6 = 10 = vp \quad (2'') \\ & -3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 3 = vp \quad (3'') \\ & x_1 = 0 \quad (4'') \\ & x_2 = 5 > 0 \quad (5'') \\ & x_3 = 2 > 0 \quad (6'') \\ & x_4 = 0 \quad (7'') \\ & x_5 = 0 \quad (8'') \\ & x_6 = 0 \quad (9'') \end{aligned}$$

Như vậy X_0 là phương án của bài toán.

Phương án X_0 làm thoả mãn 7 ràng buộc chặt là $(1''), (2''), (3''), (4''), (7''), (8''), (9'')$, số ràng buộc chặt nhiều hơn số biến của bài toán. Xét 6 ràng buộc chặt nào đó trong số 7 ràng buộc chặt trên, chẳng hạn $(2''), (3''), (4''), (7'')$ $(8''), (9'')$, định thức của ma trận các hệ số ở vế trái ứng với hệ 6 ràng buộc chặt này là:

$$D = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 & -4 & -1 \\ -3 & 1 & -1 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 & -4 \\ -3 & 1 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \ne 0 \Rightarrow$$

hệ 6 ràng buộc chặt trên là hệ ràng buộc chặt độc lập tuyến tính, do đó phương án X_0 là phương án cực biên của bài toán, hơn nữa nó là phương án cực biên suy biến.

Phương án X_0 làm thoả mãn 2 ràng buộc lỏng là $(5')$ và $(6')$, các ràng buộc lỏng này nằm trong các cặp điều kiện đối ngẫu (2) và (3). Theo định lý đối ngẫu thứ hai thì phương án X_0 là phương án tối ưu của bài toán gốc khi và chỉ khi hệ phương trình tuyến tính

(I) $\begin{cases} -2y_1 + 2y_2 + y_3 = 3 \\ y_1 - y_3 = -1 \end{cases}$ có nghiệm là phương án của bài toán đối ngẫu.

Giải hệ (I): Đặt $y_3 = \alpha \Rightarrow y_1 = \alpha - 1 \Rightarrow y_2 = \frac{3}{2} + \alpha - 1 - \frac{\alpha}{2} = \frac{1+\alpha}{2}$. Như vậy hệ phương trình (I) có vô số nghiệm phụ thuộc một tham số là $Y(\alpha) = \left(\alpha - 1, \frac{1+\alpha}{2}, \alpha\right) \ \forall \ \alpha$.

Thay họ nghiệm $Y(\alpha)$ của hệ phương trình (I) vào các ràng buộc còn lại của bài toán đối ngẫu, ta được:

$2y_1 - y_2 - 3y_3 = 2\alpha - 2 - \frac{1+\alpha}{2} - 3\alpha = \frac{-3\alpha - 5}{2} \le 5 \Rightarrow \alpha \ge -5$

$-y_1 + y_2 + 2y_3 = 1 - \alpha + \frac{1+\alpha}{2} + 2\alpha = \frac{3\alpha + 3}{2} \le 4 \Rightarrow \alpha \le \frac{5}{3}$

$-4y_2 - 2y_3 = -2 - 2\alpha - 2\alpha = -2 - 4\alpha \le 6 \Rightarrow \alpha \ge -2$

$y_1 - y_2 = \alpha - 1 - \frac{1+\alpha}{2} = \frac{\alpha - 3}{2} \le -2 \Rightarrow \alpha \le -1$

$y_3 \le 0 \Rightarrow \alpha \le 0$

Kết hợp lại ta được $-2 \le \alpha \le -1$

Như vậy, với mọi $\alpha \in [-2, -1]$ thì họ nghiệm $Y(\alpha)$ của hệ phương trình (I) là phương án của bài toán đối ngẫu. Vì vậy X_0 là phương án tối ưu của bài toán gốc.

c/ Với $\alpha = -1$ chẳng hạn, ta được $Y(\alpha) = (-2, 0, -1)$ là một phương án tối ưu cực biên của bài toán đối ngẫu, phương án này làm thoả mãn các ràng buộc chặt (2), (3) và (6).

* Chính tắc hoá bài toán gốc: Đặt $x_7 = 3 + 3x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 \ge 0$, khi đó ta được bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc sau đây:

$$\begin{aligned}
f(X) = 5x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 + 6x_5 - 2x_6 &\to \min \\
2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 \qquad + x_6 &= -8 \\
-x_1 + 2x_2 \qquad + x_4 - 4x_5 - x_6 &= 10 \\
-3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - 2x_5 \qquad + x_7 &= 3 \\
x_j \ge 0, \ j = \overline{1,7}
\end{aligned}$$

Ứng với phương án X_0 của bài toán gốc thì biến bù $x_7 = 0 \Rightarrow$ phương án $\overline{X}_0$ của bài toán chính tắc là $\overline{X}_0 = (0, 5, 2, 0, 0, 0, 0)$, phương án này cũng là phương án tối ưu cực biên của bài toán chính tắc với cơ sở tối ưu là $\{A_2, A_3, A_6\}$. Ta có:

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & (1) & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & -4 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & -1 & 2 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & -4 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & -2 & (1) & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -2 & 2 & 0 & -1 \\ -2 & (1) & 0 & 2 & -6 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 2 & -6 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 0 & 3 & -8 & 1 & 2 \end{pmatrix} = Z$$ từ đây, ta có bảng đơn hình tối ưu:

A_j	C_J	X_J	5	3	−1	4	6	−2	0
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
A_3	−1	2	1	0	1	0	−4	0	0
A_2	3	5	−2	1	0	2	−6	0	1
A_6	−2	0	−3	0	0	3	−8	1	2
		13	-6	0	0	−4	−4	0	−1

* Ví dụ 2.3.4: Cho bài toán quy hoạch tuyến tính:

$$f(X) = 6x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 \rightarrow \min$$
$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 &\geq 7 \\ x_1 + x_2 \quad\quad - x_4 &= 2 \\ -x_1 + 3x_2 \quad\quad + x_4 &\leq 8 \\ x_j \geq 0,\ j = \overline{1,4} \end{aligned}$$

a- Viết bài toán đối ngẫu cho bài toán này và chỉ ra các cặp điều kiện đối ngẫu.

b- Xét xem $X_0 = (2, 0, 1, 0)$ có phải phương án? phương án cực biên? phương án tối ưu? của bài toán đó cho hay không.

* **<u>Giải</u>**: a/ * Bài toán đối ngẫu:

$$g(Y) = 7y_1 + 2y_2 + 8y_3 \rightarrow \max$$
$$\begin{aligned} 3y_1 + y_2 - y_3 &\leq 6 \quad (1) \\ 2y_1 + y_2 + 3y_3 &\leq 2 \quad (2) \\ y_1 &\leq 3 \quad (3) \\ -2y_1 - y_2 + y_3 &\leq -2 \quad (4) \\ y_1 &\geq 0 \quad (5) \\ y_3 &\leq 0 \quad (6) \end{aligned}$$

* Các cặp điều kiện đối ngẫu.

$x_1 \geq 0$ và $3y_1 + y_2 - y_3 \leq 6$ (1′)

$x_2 \geq 0$ và $2y_1 + y_2 + 3y_3 \leq 2$ (2′)

$x_3 \geq 0$ và $y_1 \leq 3$ (3′)

$x_4 \geq 0$ và $-2y_1 - y_2 + y_3 \leq -2$ (4′)

$y_1 \geq 0$ và $3x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 \geq 7$ (5′)

$y_3 \leq 0$ và $-x_1 + 3x_2 + x_4 \leq 8$ (6′)

b/ * Thay $X_0 = (2, 0, 1, 0)$ vào hệ ràng buộc của bài toán gốc ta được

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 &= 7 = vp \quad (1'') \\ x_1 + x_2 - x_4 &= 2 = vp \quad (2'') \\ -x_1 + 3x_2 + x_4 &= -2 < vp = 8 \quad (3'') \\ x_1 &= 2 > 0 \quad (4'') \\ x_2 &= 0 \quad (5'') \\ x_3 &= 1 > 0 \quad (6'') \\ x_4 &= 0 \quad (7'') \end{aligned}$$

Như vậy X_0 là phương án của bài toán gốc. Phương án X_0 làm thỏa mãn 4 ràng buộc chặt là $(1''), (2''), (5''), (7'')$. Số ràng buộc chặt bằng số biến của bài toán và định thức của ma trận các hệ số vế trái ứng với hệ 4 ràng buộc chặt trên là:

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$ do đó hệ 4 ràng buộc chặt $(1''), (2''), (5''), (7'')$ là hệ ràng buộc chặt độc lập tuyến tính, vì vậy phương án X_0 là phương án cực biên của bài toán, hơn nữa nó là phương án cực biên không suy biến.

Phương án X_0 làm thỏa mãn các ràng buộc lỏng $(3''), (4''), (6'')$, các ràng buộc lỏng này nằm trong các cặp điều kiện đối ngẫu $(1')$, $(3')$, $(6')$. Theo định lý đối ngẫu thứ 2 thì: phương án X_0 là phương án tối ưu của bài toán gốc khi và chỉ khi hệ phương trình

$$\left\{ \begin{aligned} 3y_1 + y_2 - y_3 &= 6 \\ y_1 &= 3 \\ y_3 &= 0 \end{aligned} \right. \quad \text{(I)}$$ có nghiệm là phương án của bài toán đối ngẫu.

Dễ thấy hệ phương trình (I) có duy nhất nghiệm là $Y_0 = (3, -3, 0)$. Thay nghiệm duy nhất Y_0 của hệ phương trình (I) vào các ràng buộc còn lại của bài toán đối ngẫu ta được:

$2y_1 + y_2 + 3y_3 = 3 > vp = 2$, như vậy Y_0 không thoả mãn ràng buộc (2).

Do đó nghiệm duy nhất Y_0 của hệ phương trình (I) không phải phương án của bài toán đối ngẫu. Vì vậy phương án X_0 của bài toán gốc không phải phương án tối ưu.