§2. Cơ sở của không gian vectơ

2.1. Hệ độc lập tuyến tính và hệ phụ thuộc tuyến tính

Định nghĩa. Cho V là một kgvt. Tập $S \subset V$ được gọi là một ***hệ độc lập tuyến tính (đltt)*** nếu với $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}, x_1, x_2, \dots, x_n \in S$,

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0$$

thì $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$.

Ngược lại, S được gọi là ***phụ thuộc tuyến tính (pttt)***.

VD: $S = \{(1,2), (3,5)\} \subset \mathbb{R}^2$. CMR S đltt.

Giải: Xét

$$a(1,2) + b(3,5) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a, 2a) + (3b, 5b) = (0,0)$$

$$\Leftrightarrow (a+3b,\ 2a+5b) = (0,0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+3b = 0 \\ 2a+5b = 0 \end{cases} \overset{\text{Bấm máy}}{\Longleftrightarrow} a = b = 0$$

VD: $S = \{(1,2), (2,4)\}$. S đltt hay pttt?

Giải: Xét $a(1,2) + b(2,4) = 0 \Leftrightarrow (a, 2a) + (2b, 4b) = (0,0)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+2b = 0 \\ 2a+4b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2b \\ -4b+4b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = -2b$$

$\Rightarrow$ S pttt

VD S đltt hay pttt?

a) $S = \{(1,2,3), (0,2,1)\}$

b) $S = \{(1,2,3), (1,1,1), (0,1,1)\}$

Giải: a) Xét $a(1,2,3) + b(0,2,1) = 0$

$\Leftrightarrow (a, 2a, 3a) + (0, 2b, b) = (0,0,0)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a + 0 = 0 \\ 2a + 2b = 0 \\ 3a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow S$ đltt

b) Xét $a(1,2,3) + b(1,1,1) + c(0,1,1) = 0$

$\Leftrightarrow (a, 2a, 3a) + (b,b,b) + (0,c,c) = (0,0,0)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b + 0 = 0 \\ 2a + b + c = 0 \\ 3a + b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0. \end{cases} \Rightarrow S$ đltt.

2.2. Cơ sở của một không gian vectơ

Định nghĩa. Cho kgvt $V \neq \{0\}$ thì tập con S của V được gọi là một ***cơ sở*** của V nếu S là hệ sinh và là hệ đltt.

VD: $\mathbb{R}^2$, $S = \{e_1 = (1,0),\ e_2 = (0,1)\}$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^2$.

* S là hệ sinh vì

$\forall u \in \mathbb{R}^2$, $u = (x,y) = x(1,0) + y(0,1)$

* S đltt vì

$a(1,0) + b(0,1) = 0 \Leftrightarrow (a,0) + (0,b) = (0,0)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$

VD $\mathbb{R}^n$, $S = \{e_1 = (1, 0, \ldots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, \ldots, 0, 1)\}$

$\Rightarrow$ S là một cơ sở của $\mathbb{R}^n$

(đgl cơ sở chính tắc / tự nhiên của $\mathbb{R}^n$)

* Cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^2$: $\{(1,0), (0,1)\}$
* Cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$: $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$

NX: Kgvt $V \neq \{0\}$, có vô số cơ sở.

Định lý. Nếu kgvt V có một cơ sở gồm n phần tử (với n > 0) thì:

i) Mọi tập đltt của V đều có số phần tử $\leq$ n.

ii) Mọi cơ sở của V đều có n phần tử.

Lưu ý: ① $\mathbb{R}^n$, Mọi hệ đltt có số phần tử $\leq n$

Mọi cơ sở của $\mathbb{R}^n$ đều có n phần tử.

VD: $\mathbb{R}^2$, $\{(1,2),(3,5),(0,4)\}$ pttt vì số ptử của hệ $= 3 > 2$

② $S \subset \mathbb{R}^n$ là một cơ sở $\Leftrightarrow \begin{cases} |S| = n \text{ (số phần tử của S)} \\ S \text{ đltt} \end{cases}$

VD: $S = \{(1,2),(3,5)\}$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^2$

* $|S| = 2$
* S đltt vì $a(1,2) + b(3,5) = (0,0) \Leftrightarrow a = b = 0$.

Định nghĩa. Cho kgvt *V*. Nếu *V* có một cơ sở gồm n phần tử thì *V* được gọi là một kgvt ***n chiều***. Kí hiệu dim $V = n$.

VD dim $\mathbb{R}^2 = 2$ vì $\mathbb{R}^2$ có cơ sở chính tắc $\{(1,0),(0,1)\}$

dim $\mathbb{R}^n = n$.

2.3. Toạ độ của một vectơ theo cơ sở

Định nghĩa. Cho V là một kgvt và $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ là một bộ các vectơ của *V* được sắp xếp theo thứ tự. *B* được gọi là một cơ sở của V nếu $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ là một cơ sở của V.

2. 3. Toạ độ của một vectơ theo cơ sở

Định nghĩa. Cho V là một kgvt và $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ là một bộ các vectơ của *V* được sắp xếp theo thứ tự. *B* được gọi là một cơ sở của V nếu $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ là một cơ sở của V.

Khi đó, với mỗi $x \in V$ thì

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n .$$

Bộ $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ được gọi là toạ độ của x theo cơ sở $(e_1, e_2, \dots, e_n)$.

2. 3. Toạ độ của một vectơ theo cơ sở

Định nghĩa. Cho V là một kgvt và $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ là một bộ các vectơ của V được sắp xếp theo thứ tự. B được gọi là một cơ sở của V nếu $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ là một cơ sở của V.

Khi đó, với mỗi $x \in V$ thì

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n .$$

Bộ $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ được gọi là toạ độ của x theo cơ sở $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$.

Ta viết: $x_B = x_{(e_1, \dots, e_n)} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

VD $B = (e_1, e_2)$. Tìm x_B, biết

a) $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$ và $x = (1,3)$.

b) $e_1 = (1,1)$, $e_2 = (1,2)$ và $x = (2,3)$.

Giải a) $x = (1,3) = (1,0) + (0,3) = 1.e_1 + 3e_2$

$\Rightarrow x_B = (1,3)$

b) $x = (2,3) = a e_1 + b e_2 \Leftrightarrow (2,3) = a(1,1) + b(1,2)$

$= (a,a) + (b,2b)$

$= (a+b, a+2b)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b = 2 \\ a+2b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow x_B = (a,b) = (1,1)$

VD Cho $B = (e_1 = (1,2), e_2 = (3,5))$ và $x_B = (2,3)$.

Tìm x.

Giải:

$$x_B = (2,3)$$

$$\Leftrightarrow x = 2e_1 + 3.e_2$$

$$= 2(1,2) + 3(3,5)$$

$$= (2,4) + (9,15)$$

$$= (11,19)$$

Định nghĩa. Cho $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ là một cơ sở của kgvt V và $\{v_1, v_2, \dots, v_m\} \subset V$.
Ma trận của hệ vectơ $(v_1, v_2, \dots, v_m)$ theo cơ sở $\underbrace{(u_1, u_2, \dots, u_n)}_{B}$ là một ma trận A cỡ n x m và được xác định bởi:

Cột thứ i của A = Cột tọa độ của v_i theo cơ sở $(u_1, u_2, \dots, u_n)$.

$$A = \left[v_{1_B}, v_{2_B}, \dots, v_{m_B} \right]$$

VD Ma trận của hệ vectơ (v_1, v_2, v_3) theo cơ sở B của $\mathbb{R}^2$,

a) B là cơ sở chính tắc

b) $B = (u_1 = (1,2), u_2 = (3,0))$

với $v_1 = (1,1)$, $v_2 = (2,4)$, $v_3 = (5,6)$.

Giải: $v_1 = (1,1)$, $v_2 = (2,4)$, $v_3 = (5,6)$ là tọa độ theo cơ sở chính tắc

a) Ma trận là $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$

b) $v_1 = (1,2)$, $v_2 = (2,4)$, $v_3 = (5,6)$

$B = (u_1 = (1,2), u_2 = (3,0))$. Tìm ma trận của (v_1, v_2, v_3) theo B.

Giải: B1 $\quad v_{1B}, v_{2B}, v_{3B}$

$* \; v_1 = a_1 u_1 + a_2 u_2 \Leftrightarrow (1,2) = a_1(1,2) + a_2(3,0)$

$\Leftrightarrow (1,2) = (a_1 + 3a_2, 2a_1) \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + 3a_2 = 1 \\ 2a_1 = 2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{v_{1B} = (1,0)}$

$* \; v_2 = b_1 u_1 + b_2 u_2 \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 + 3b_2 = 2 \\ 2b_1 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = 2 \\ b_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{v_{2B} = (2,0)}$

$* \; v_3 = c_1 u_1 + c_2 u_2 \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 3 \\ c_2 = \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \boxed{v_{3B} = (3, \frac{2}{3})}$

$\Rightarrow$ Ma trận cần tìm $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$

2.4. Hạng của một hệ vectơ

Định nghĩa. Cho kgvt V và $S \subset V$. Nếu S gồm hữu hạn vectơ thì hạng của S, kí hiệu rank(S), là số cực đại các vectơ trong S lập thành 1 hệ đltt.

2. 4. Hạng của một hệ vectơ

Định nghĩa. Cho kgvt V và $S \subset V$. Nếu S gồm hữu hạn vectơ thì hạng của S, kí hiệu rank(S), là số cực đại các vectơ trong S lập thành 1 hệ đltt.

Định lý. Hạng của một hệ vectơ bằng hạng của ma trận của các vectơ đó theo một cơ sở bất kì.

Lưu ý: (1) $S \subset \mathbb{R}^n$ và A là ma trận của S theo cơ sở chính tắc

$\Rightarrow \text{rank}(S) = r(A)$.

(2) $\begin{cases} S \subset \mathbb{R}^n \\ |S| = n \end{cases}$, S là một cơ sở của $\mathbb{R}^n$ $\Leftrightarrow$ S đltt $\Leftrightarrow$ $\det A \neq 0$.

VD: $S = \{\underbrace{(1,2)}_{u}, \underbrace{(3,5)}_{v}\}$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^2$.

Giải: * Ma trận của S theo cơ sở chính tắc:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$
$$\quad\quad\; u \quad\; v$$

* $\begin{cases} A \text{ là ma trận vuông} \\ \det A = 5 - 6 = -1 \neq 0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ S là một cơ sở của $\mathbb{R}^2$. dltt.

VD: $S = \{(1,2,3), (0,1,1), (0,0,1)\}$

Giải: Ma trận của S theo cơ sở chính tắc $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to$ Ma trận vuông

$\det(A) = 1 \neq 0 \Rightarrow$ S dltt

Bài tập

Bài 1. Họ nào dưới đây là cơ sở trong R^2:

a) $u_1 = (4;1), u_2 = (-7;-8)$; $\begin{bmatrix} 4 & -7 \\ 1 & -8 \end{bmatrix} = A \to \det A = -25 \neq 0$ b) $u_1 = (-2;3)$, $u_2 = (6,-9)$.

Bài 2. Họ nào dưới đây là cơ sở trong R^3:

a) $u_1 = (1;0;0), u_2 = (2;2;0), u_3 = (3;3;3)$; b) $u_1 = (3;1;-4), u_2 = (2;5;6), u_3 = (1;4;8)$.

c) $u_1 = (2;-1;3), u_2 = (4;1;2), u_3 = (8;-1;8)$.

Bài ~~2~~ 3. Các tập S dưới đây độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính:

a) $u_1 = (5;2)$, $u_2 = (-1,3)$ trong R^2; $\to A = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = 17 \neq 0 \Rightarrow$ đltt

b) $u_1 = (3;-6), u_2 = (-2;4)$ trong R^2;

c) $u_1 = (1;2;3), u_2 = (3;6;7)$ trong R^3; $\to A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} \to$ 0 vuông $\to a u_1 + b u_2 = 0$.

d) $u_1 = (2;1;1), u_2 = (1;3;1), u_3 = (-2;1;3)$ trong R^3;

e) $u_1 = (2;-3;1), u_2 = (3;-1;5), u_3 = (1;-4;3)$ trong R^3;