

Lý thuyết tổ hợp

Hoán vị, Chỉnh hợp, Tổ hợp

Nguyên lý đếm

Nguyên lý Dirichlet

Đệ quy, Hệ truy hồi

Dãy số Fibonacci

1.Hoán vị, Chỉnh hợp, Tỗ hợp

1.1. Hoán vị không lặp:

► **Định nghĩa.** *Ta gọi mỗi hoán vị của n phần tử là một cách xếp thứ tự các phân tử đó.*

$$P_n = n!.$$

1.Hoán vị, Chỉnh hợp, Tổ hợp

1.2. Chỉnh hợp không lặp:

► **Định nghĩa.** Một chỉnh hợp không lặp chập k của n phần tử gồm k phần tử lấy trong n phần tử đã cho và sắp xếp theo thứ tự nhất định. Các phần tử không được lặp lại.

$$A_n^k = A(n,k) = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

1.Hoán vị, Chỉnh hợp, Tổ hợp

1.3.Tổ hợp không lặp:

Định nghĩa. Một tổ hợp chập k của n phần tử là gồm k phần tử khác nhau lấy trong n phần tử đã cho. Các phần tử không được lặp lại.

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

1.Hoán vị, Chỉnh hợp, Tổ hợp

1.3.Tổ hợp không lặp:

5

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$C_n^0 = C_n^n = 1$$

$$C_n^1 = C_n^{n-1} = n$$

$$C_n^k = C_n^{n-k}$$

$$C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n$$

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k, n > k > 0$$

$$C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1}, n > k > 0$$

1.Hoán vị, Chỉnh hợp, Tổ hợp

1.3.Tổ hợp không lặp:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k, n > k > 0$$

$$C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1}, n > k > 0$$

$n = 1$	C_1^0	C_1^1					1	1						
$n = 2$	C_2^0	C_2^1	C_2^2				1	2	1					
$n = 3$	C_3^0	C_3^1	C_3^2	C_3^3			1	3	3	1				
$n = 4$	C_4^0	C_4^1	C_4^2	C_4^3	C_4^4		1	4	6	4	1			
$n = 5$	C_5^0	C_5^1	C_5^2	C_5^3	C_5^4	C_5^5	1	5	10	10	5	1		
$n = 6$	C_6^0	C_6^1	C_6^2	C_6^3	C_6^4	C_6^5	C_6^6	1	6	15	20	15	6	1

1.Hoán vị, Chỉnh hợp, Tổ hợp

1.3.Tổ hợp không lặp:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k, n > k > 0$$

$$C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1}, n > k > 0$$

		C_0^0		
	C_1^0	C_1^1		
...	
...
C_n^0	C_n^1	...	C_n^{n-1}	C_n^n
...

1				
	1	1	1	
		1	2	1
		1	3	3
			1	1
			1	4
				6
				4
				1
			1	5
				10
				10
				5
				1
		1	6	15
			20	15
				6
				1
1	7	21	35	35
	8	28	56	70
			56	56
				28
				8
				1

1.Hoán vị, Chỉnh hợp, Tổ hợp

1.4. Hoán vị lặp:

$$P_n(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n_1 + n_2 + \dots + nk}{n_1! n_2! \dots nk!} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots nk!}$$

Ví dụ: Hoán vị các chữ cái tên của 1 dòng sông MISSISIPI

Chữ MISSISIPI có 9 chữ cái M,P,S,I

Chữ cái M,P không lặp

Chữ cái S lặp 3 lần, chữ cái I lặp 4 lần

$$\rightarrow \text{số hoán vị là } P(M, P, S, I) = \frac{(1+1+3+4)!}{1!1!3!4!} = \frac{9!}{3!4!} = 2520$$

1.Hoán vị, Chính hợp, Tổ hợp

1.5. Chính hợp lặp:

Định nghĩa: Một chính hợp lặp chập k của n phần tử là một nhóm gồm k phần tử lấy trong n phần tử đã cho và sắp xếp theo thứ tự nhất định. Các phần tử có thể lấy lặp lại.

$$L_n^k = n^k$$

Ví dụ 1: Từ các chữ số thuộc $X = \{0,1,2,3,4,5\}$, có thể lập được bao nhiêu chữ số hàng trăm.

Mỗi chữ số hàng trăm chính là chính hợp lặp chập 3 của 6 chữ số đã cho, trừ các chính hợp có số 0 đứng trước.

→ Số các chữ số hàng trăm là $S = L_6^3 - L_6^2 = 6^3 - 6^2 = 180$

1.Hoán vị, Chỉnh hợp, Tổ hợp

1.5. Tổ hợp lặp:

Định nghĩa: Một tổ hợp lặp chập k của n phần tử là một nhóm gồm k phần tử lấy trong n phần tử đã cho ($k \leq n$). Các phần tử có thể lấy lặp lại.

$$R_n^k = C_{n+k-1}^k$$

Ví dụ 1: Có bao nhiêu cách chia 10 kẹo cho 5 em bé

Lời giải:

Mỗi cách chia là một tổ hợp chập 10 của 5 phần tử

→ Số cách chia là $R_5^{10} = C_{5+10-1}^{10} = C_{14}^{10} = C_{14}^4 = 1001$

1.Hoán vị, Chỉnh hợp, Tổ hợp

1.5. Tổ hợp lặp:

Ví dụ 2: Hỏi có bao nhiêu chuỗi bit khác nhau có độ dài 10 (tức là gồm 10 bits)?

Lời giải:

Mỗi dãy nhị phân độ dài 10 bit là một bộ gồm 10 thành phần, trong đó mỗi thành phần chỉ nhận một trong hai giá trị (1 hoặc 0). Từ đó suy ra số các dãy nhị phân độ dài 10 là $2^{10} = 1024$.

2. Nguyên lý đếm

2.1. Nguyên lý cộng:

- ✓ Cho A và B là 2 tập hợp hữu hạn rời nhau, nghĩa là $A \cap B = \emptyset$. Khi ấy ta có:

$$|A \cup B| = |A| + |B|$$

- ✓ Một cách tổng quát: Nếu A_1, A_2, \dots, A_n là các tập hợp hữu hạn rời nhau, nghĩa là phần giao của hai tập hợp bất kỳ trong n tập hợp là rỗng, thì số phần tử của phần hối của các tập hợp trên bằng tổng của các số lượng phần tử trong mỗi tập hợp:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_n|$$

- ✓ Giả sử phải thực hiện 1 công việc. Để thực hiện công việc này ta có thể chọn một trong hai biện pháp khác nhau (cách thực hiện biện pháp thứ nhất luôn khác cách thực hiện biện pháp thứ hai). Biện pháp thứ nhất có n_1 cách thực hiện, biện pháp thứ hai ta có n_2 cách thực hiện. Vậy ta có số cách thực hiện công việc là: $\mathbf{n_1 + n_2}$

2. Nguyên lý đếm

2.1. Nguyên lý cộng:

- ✓ **Ví dụ 1:** Cần chọn một sinh viên toán năm thứ 1 hay năm thứ 2 đi dự một hội nghị. Hỏi có bao nhiêu cách chọn lựa một sinh viên như thế biết rằng có 100 sinh viên toán học năm thứ 1 và 85 sinh viên toán học năm thứ 2 ?

Lời giải: Có thể thực hiện một trong 2 việc chọn lựa khác nhau:
chọn một sinh viên toán năm 1, hoặc chọn một sinh viên toán năm 2.
Để thực hiện công việc thứ nhất ta có 100 cách,
Để thực hiện công việc thứ 2 ta có 85 cách.
Vậy để chọn một sinh viên toán theo yêu cầu ta có $100+85 = 185$ cách.

2. Nguyên lý đếm

► 2.1. Nguyên lý cộng:

- ✓ **Ví dụ 2:** Một đoàn thí sinh đi thi 2 môn toán và văn. Trong đoàn có 10 bạn nam. Số thí sinh thi toán (kể cả nam và nữ) là 14 người. Số thí sinh nữ thi văn bằng số thí sinh nam thi toán. Hỏi có bao nhiêu thí sinh dự thi.

Lời giải: Chia đoàn thành 2 tập: nam và nữ.

Tập nữ lại được chia 2: thi toán và thi văn.

Giả sử tất cả nam thi toán thì số nữ thi toán là: $14 - 10 = 4$ (bạn nữ)

Theo đề bài bạn nữ thi văn = bạn nam thi toán do vậy \rightarrow số bạn nữ còn lại thi văn là 10 bạn \rightarrow số bạn nữ thi cả toán và văn là: $10 + 4 = 14$ (bạn nữ)

Theo nguyên lý cộng, tổng số thí sinh cả nam và nữ là: $10 + 14 = 24$ người.

2. Nguyên lý đếm

2.2. Nguyên lý nhân:

- ✓ Cho A và B là 2 tập hợp hữu hạn rời nhau, nghĩa là $A \cup B \neq \emptyset$. Khi ấy ta có:

$$|A \times B| = |A| \times |B|$$

- ✓ Một cách tổng quát: Nếu A_1, A_2, \dots, A_n là các tập hợp hữu hạn thì số phần tử của tích Descartes của các tập hợp trên bằng tích của các số lượng phần tử của các tập hợp trên:

$$|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \dots \cdot |A_n|$$

- ✓ Giả sử ta phải thực hiện một thủ tục bao gồm hai công việc kế tiếp nhau. Để thực hiện công việc thứ nhất ta có n_1 cách. Ứng với mỗi cách chọn thực hiện công việc thứ nhất ta có n_2 cách thực hiện công việc thứ hai.

Vậy ta có số cách thực hiện thủ tục là : $n_1 \times n_2$.

2.Nguyên lý đếm

► 2.2. Nguyên lý nhân:

Ví dụ 1: Từ Hà nội đến Huế có 3 cách đi: máy bay, ô tô, tàu hỏa. Từ Huế đến Sài gòn có 4 cách đi: máy bay, ô tô, tàu hỏa, tàu thuỷ. Hỏi từ Hà nội đến Sài gòn (qua Huế) có bao nhiêu cách đi?

Lời giải: Mỗi cách đi từ Hà nội đến Sài gòn (qua Huế) được xem gồm 2 chặng: Hà nội -Huế và Huế - Sài gòn. Từ đó, theo nguyên lý nhân. số cách đi từ Hà nội đến Sài gòn là $3 \times 4 = 12$ cách

2.Nguyên lý đếm

► 2.2. Nguyên lý nhân:

✓ **Ví dụ 2:** Các ghế ngồi trong một hội trường sẽ được đánh số gồm một ký tự trong bảng chữ cái và một số nguyên dương không lớn hơn 100. Hỏi số ghế tối đa có thể được đánh số khác nhau là bao nhiêu?

Lời giải: Thủ tục đánh số cho một ghế gồm 2 việc : ghi một trong 26 ký tự trong bảng chữ cái và kế tiếp là ghi một trong 100 số nguyên dương.

Áp dụng Qui tắc nhân: có $26 \times 100 = 2600$ cách khác nhau để đánh số cho một ghế ngồi.

2.Nguyên lý đếm

► 2.3. Nguyên công kết hợp nguyên lý nhân:

- ✓ Ví dụ 3: Cho tập $X = \{0,1,2,3,4,5\}$, Hỏi có bao nhiêu số tự nhiên có 3 chữ số khác nhau mà chia hết cho 2:

Lời giải: Gọi số có 3 chữ số là \overline{abc}

Trường hợp 1(TH1): $c=0 \rightarrow c$ có 1 cách chọn; a có 5 cách chọn; b có 4 cách chọn.

\rightarrow TH1 có số chữ số tự nhiên thỏa mãn điều kiện là: $1 \times 4 \times 5 = 20$ (số)

Trường hợp 2(TH2): $c \neq 0 \rightarrow c$ có 2 cách chọn $\{2,4\}$; a có 4 cách chọn ($a \in X \setminus \{c,0\}$); b có 4 cách chọn ($b \in X \setminus \{a,c\}$).

\rightarrow TH2 có số chữ số tự nhiên thỏa mãn điều kiện là: $2 \times 4 \times 4 = 32$ (số)

\rightarrow $TH1+TH2 = 20 + 32 = 52$ (số)

2.Nguyên lý đếm

► 2.4. Nguyên lý loại trừ:

- ✓ Cho A và B là 2 tập hợp hữu hạn, nghĩa là $A \subset B$. Khi ấy ta có:

$$|A| = |B| - |B \setminus A|$$

Ví dụ 1: Trong lớp có 10 bạn sinh viên nam và 8 bạn sinh viên nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra 6 bạn luôn luôn có cả nam và nữ.

Lời giải: Tổng số bạn sinh viên trong lớp là: $10 + 8 = 18$ (sinh viên)

Số cách chọn 6 bạn sinh viên là (Có thể tất cả là nam hoặc tất cả là nữ): C_{18}^6

Số cách chọn tất cả các bạn sinh viên là nam là: C_{10}^6

Số cách chọn tất cả các bạn sinh viên là nữ là: C_8^6

Số cách chọn thỏa mãn điều bài là: $C_{18}^6 - (C_{10}^6 + C_8^6) = ??? = 18326$

$$C_{18}^6 - (C_{10}^6 + C_8^6) = ??? = 18326$$

2.Nguyên lý đếm

2.4. Nguyên lý loại trừ:

- Ví dụ 2:** 1 hộp có 6 bi màu xanh, 7 bi màu đỏ và 8 bi màu vàng. Có bao nhiêu cách chọn ra 5 viên bi có đủ cả 3 màu.

Lời giải:

Tổng số bi các màu là: $6 + 7 + 8 = 21$ (viên bi)

→ có thể tạo ra C_{21}^5 các nhóm gồm 5 viên bi

Nếu loại bỏ các nhóm chỉ có bi màu xanh, hoặc chỉ có bi màu đỏ hoặc chỉ có bi màu vàng thì sẽ được số các nhóm có đủ bi các màu (xanh, đỏ, vàng).

→ Số nhóm chỉ có bi màu xanh là: C_6^5

→ Số nhóm chỉ có bi màu đỏ là: C_7^5

→ Số nhóm chỉ có bi màu vàng là: C_8^5

→ Số nhóm cần tìm là: $C_{21}^5 - C_6^5 - C_7^5 - C_8^5 = 20349 - 6 - 21 - 56 = 20266$

2.Nguyên lý đếm

► 2.5. Nguyên lý bù trừ:

- ✓ Cho A và B là 2 tập hợp hữu hạn giao nhau, nghĩa là $A \cap B = \neq \emptyset$. Khi ấy ta có:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

- ✓ Khi hai tập giao nhau (công việc có thể làm đồng thời). Để tính đúng số cách thực hiện ta sử dụng nguyên lý cộng tính tổng số cách thực hiện như hai tập rời nhau rồi trừ đi số cách làm đồng thời cả hai việc (giao nhau cả hai việc).

2.Nguyên lý đếm

→ 2.5. Nguyên lý bù trừ:

- ✓ Nếu có ba tập là A, B và C là các tập hợp hữu hạn giao nhau.

Khi ấy ta có:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

$$N = (A \cup B \cup C)$$

$$|N| = |A \cup B \cup C| = N_1 - N_2 + N_3$$

$$N_1 = |A| + |B| + |C|$$

$$N_2 = |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C|$$

$$N_3 = |A \cap B \cap C|$$

- ✓ Nếu có n tập: $|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k| = N_1 - N_2 + N_3 - \dots + (-1)^{k-1} N_k$

2.Nguyên lý đếm

► 2.5. Nguyên lý bù trừ:

Ví dụ 1: Trong một lớp học, mỗi sinh viên đều biết ít nhất 1 ngoại ngữ; có 30 sinh viên biết tiếng anh, 31 sinh viên biết tiếng pháp, 32 sinh viên biết tiếng nga; 15 sinh viên biết tiếng anh và pháp; 16 sinh viên biết tiếng Pháp và Nga; 17 sinh viên biết tiếng Nga và Anh; 5 sinh viên biết cả 3 ngoại ngữ. Hỏi cả lớp có bao nhiêu sinh viên.

Lời giải:

Theo nguyên lý bù trừ ta có $N=N_1 - N_2 + N_3$

$$N=(30+31+32)-(15+16+17)+5=50 \text{ sinh viên}$$

2.Nguyên lý đếm

► 2.5. Nguyên lý bù trừ:

Ví dụ 2: Có bao nhiêu xâu nhị phân độ 10 hoặc là bắt đầu bởi 00 hoặc là kết thúc bởi 11?

Lời giải:

Số xâu nhị phân độ dài 10 bắt đầu bởi 00 là $2^8 = 256$

Số xâu nhị phân độ dài 10 kết thúc bởi 11 là $2^8 = 256$.

Số xâu nhị phân độ dài 10 bắt đầu bởi 00 và kết thúc bởi 10 là $2^6 = 64$.

Theo nguyên lý bù trừ suy ra số xâu nhị phân hoặc bắt đầu bởi 00 hoặc kết thúc bởi 11 là:

$$256 + 256 - 64 = 448.$$

2.Nguyên lý đếm

→ 2.5. Nguyên lý bù trừ:

Ví dụ 2: Có bao nhiêu số nguyên dương ≤ 1000 chia hết cho 2 hoặc 3 hoặc 5

Lời giải:

Gọi $A_i = \{x \in X : x \text{ chia hết cho } i\} | . i = 2, 3, 5.$

Gọi A_2, A_3, A_5 là tập các số tương ứng chia hết cho 2,3,5 và $A = A_2 \cup A_3 \cup A_5$

Theo nguyên lý bù trừ: $N = N_1 - N_2 + N_3; |A| = N_1 - N_2 + N_3$

$$N_1 = |A_2| + |A_3| + |A_5| = [1000/2] + [1000/3] + [1000/5] = 500 + 333 + 200 = 1033$$

$$\begin{aligned} N_2 &= |A_2 \cap A_3| + |A_2 \cap A_5| + |A_3 \cap A_5| = [1000/(2 \times 3)] + [1000/(2 \times 5)] + \\ &[1000/(3 \times 5)] \end{aligned}$$

$$= 166 + 100 + 66 = 332$$

$$N_3 = |A_2 \cap A_3 \cap A_5| = [1000/(2 \times 3 \times 5)] = 33$$

Từ đó số lượng các số cần đếm là $1033 - 332 + 33 = 734$

3.Nguyên lý Dirichlet (Nguyên lý chuồng chim bồ câu)

- ▶ Giả sử có một đàn chim bồ câu bay vào chuồng (*n con chim bồ câu*). Nếu số chim nhiều hơn số ngăn chuồng (*k ngăn chuồng*) thì ít nhất trong một ngăn có nhiều hơn một con chim (*[n/k] con chim bồ câu trở lên*). Nguyên lý này dĩ nhiên là có thể áp dụng cho các đối tượng không phải là chim bồ câu và chuồng chim.
- ▶ **Mệnh đề (Nguyên lý):** Nếu có $k+1$ (hoặc nhiều hơn) đồ vật được đặt vào k hộp thì tồn tại một hộp có ít nhất hai đồ vật.

3. Nguyên lý Dirichlet (Nguyên lý chuồng chim bồ câu)

- ▶ **Ví dụ 1:** Trong một nhóm 367; hỏi có ít nhất mấy người có ngày sinh giống nhau.

Lời giải:

1 năm có 365 ngày ($k=365$ chuồng chim)

có 367 người ($n=367$ con chim bồ câu)

Áp dụng nguyên lý Dirichlet có $\lceil n/k \rceil = \lceil 367/365 \rceil = 2$

Vậy → có ít nhất hai người có ngày sinh nhật giống nhau

3. Nguyên lý Dirichlet (Nguyên lý chuồng chim bồ câu)

- ▶ **Ví dụ 2:** Trong kỳ thi học sinh giỏi, điểm bài thi được đánh giá bởi một số nguyên trong khoảng từ 0 đến 10. Hỏi rằng ít nhất có bao nhiêu học sinh dự thi để cho chắc chắn tìm được hai học sinh có kết quả thi như nhau?

Lời giải:

Điểm bài thi từ 0-10 có 11 số ($k=11$ chuồng chim)

Số học sinh dự thi = ? ($n=?$ con chim bồ câu)

Áp dụng nguyên lý Dirichlet có

$$[n/k] = [n/11] = 2 \rightarrow n = 11(2-1) + 1 = 12$$

Vậy → phải có ít nhất 12 học sinh dự thi để có ít nhất 2 học sinh có kết quả giống nhau

3. Nguyên lý Dirichlet (Nguyên lý chuồng chim bồ câu)

- ▶ **Ví dụ 3 :** Có năm loại học bổng khác nhau. Hỏi rằng phải có ít nhất bao nhiêu sinh viên để chắc chắn rằng có ít ra là sáu người cùng nhận học bổng như nhau?

Lời giải:

Có 5 loại học bổng khác nhau ($n=5$ chuồng chim)

Số sinh viên nhận học bổng = ? ($n=?$ con chim bồ câu)

Áp dụng nguyên lý Dirichlet có

$$\lceil n/k \rceil = \lceil n/5 \rceil = 6 \rightarrow n = 5(6-1) + 1 = 26$$

Vậy → phải có ít nhất 26 sinh viên nhận học bổng để có ít nhất 6 sinh viên nhận học bổng giống nhau.

3.Nguyên lý Dirichlet (Nguyên lý chuồng chim bồ câu)

- ▶ **Ví dụ 4 :** Trong số những người có mặt trên trái đất, luôn tìm được số người có hàm răng giống nhau là ? biết mỗi người có 32 cái răng

Lời giải:

Nếu xem mỗi hàm răng gồm 32 cái như là một xâu nhị phân có chiều dài 32 bit, trong đó răng còn ứng với bit 1 và răng mất ứng với bit 0, thì có tất cả $2^{32} = 4.294.967.296$ hàm răng khác nhau ($k= 4.294.967.296$)

Số người trên trái đất hơn 5 tỉ ($5 \text{ tỷ} < k < 7 \text{ tỷ}$)

Theo nguyên lý Dirichlet $[n/k] = \left[\frac{7 \text{ tỷ}}{4,2 \text{ tỷ}} \right] = 2$

- ▶ Vậy → có ít nhất 2 người có hàm răng giống nhau.

3. Nguyên lý Dirichlet (Nguyên lý chuồng chim bồ câu)

- ▶ **Ví dụ 5:** Giả sử biển số xe máy gồm 7 ký tự: NN–NNN-XX. Trong đó hai ký tự đầu là mã số định danh; ba ký tự tiếp theo là số hiệu xe, mỗi ký tự là một số từ 0 đến 9; hai ký tự cuối là mã đăng ký gồm hai chữ cái lấy trong bảng chữ cái la tinh gồm 26 chữ cái. Hỏi để có 3 triệu biển số xe máy khác nhau thì cần phải có ít nhất bao nhiêu mã định danh khác nhau?

Lời giải:

1 mã định danh có số biển số khác nhau là:

$$26 \times 26 \times 10 \times 10 \times 10 = 676000 \quad (\text{k} = 676000)$$

Số biển số xe cần có là 3000000 ($n=3000000$)

Áp dụng nguyên lý Dirichlet có

$$[n/k] = [3000000/676000] = 5$$

Vậy → cần phải có ít nhất 5 mã định danh để có 3 triệu biển số xe máy khác nhau

3. Nguyên lý Dirichlet (Nguyên lý chuồng chim bồ câu)

- **Ví dụ 6**: Giả sử trong một nhóm 6 người mỗi cặp hai hoặc là bạn hoặc là thù. Chứng tỏ rằng trong nhóm có ba người là bạn lẫn nhau hoặc có ba người là kẻ thù lẫn nhau

Lời giải:

- ✓ **Gọi A là một trong 6 người.** Áp dụng nguyên lý Dirichlet có $[5/2] = 3 \rightarrow$ Trong số 5 người của nhóm hoặc là có ít nhất ba người là bạn của A hoặc có ít nhất ba người là kẻ thù của A
- ✓ **Trường hợp đầu 3 người đều là bạn của A.** Nếu trong ba người này có hai người là bạn thì họ cùng với A lập thành một bộ ba người bạn lẫn nhau, ngược lại nếu trong ba người này không có ai là bạn ai cả thì chứng tỏ họ là bộ ba người thù lẫn nhau.
- ✓ **Trường hợp hai 3 người đều là kẻ thù của A.** Nếu trong ba người này có hai người là kẻ thù của nhau thì họ cùng với A lập thành một bộ ba người là kẻ thù lẫn nhau, ngược lại nếu trong ba người B, C, D có hai người là bạn của nhau thì cũng là bạn của người thứ 3 vì cả ba đều là kẻ thù của A.

4. Đệ quy, truy hồi

4.1. Đệ quy.

- Đệ quy cho một phương pháp ngắn gọn và sáng suốt để mô tả các đối tượng cũng như một số quá trình.
- Đệ quy là một phương pháp xác định tập hợp các đối tượng thỏa mãn một yêu cầu nào đó. Nó bao gồm các quy tắc, trong đó một số quy tắc dung để xác định các đối tượng ban đầu, còn các quy tắc khác dung để xác định các đối tượng tiếp theo nhờ các đối tượng ban đầu đã được xác định.
- Kỹ thuật xác định một đối tượng thông qua chính nó gọi là định nghĩa bằng đệ quy

4.Thuật toán và Đệ quy, truy hồi

34

4.2. Hệ truy hồi

Định nghĩa 1:

- ✓ Hệ thức truy hồi (hay còn gọi là công thức truy hồi, biểu thức truy hồi) đối với dãy số $\{a_n\}$ là công thức biểu diễn a_n qua một hay nhiều số hạng đi trước của dãy, cụ thể là biểu diễn qua các số hạng a_1, a_2, \dots, a_{n-1} với mọi n nguyên, $n \geq n_0$ trong đó n_0 là nguyên không âm
- ✓ Dãy số được gọi là lời giải hay nghiệm của hệ thức truy hồi nếu các số hạng của nó thoả mãn hệ thức truy hồi này

4.Thuật toán và Đệ quy, truy hồi

35

4.2. Hệ truy hồi.

□ Định nghĩa 2:

- ✓ Cho dãy số $\{a_i | i \in \mathbb{N}\}$. Một *hệ thức truy hồi tuyến tính thuận nhất bậc k với hệ số hằng* là một hệ thức truy hồi có dạng $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k}$ (*) trong đó c_1, c_2, \dots, c_k là các số thực và $c_k \neq 0$.
- ✓ Phương trình $r^k = c_1 r^{k-1} + c_2 r^{k-2} + \dots + c_k$ được gọi là phương trình đặc trưng (PTĐT) của công thức (*). Số r thỏa mãn PTĐT được gọi là một nghiệm đặc trưng của nó.
 - Là tuyến tính vì vé phải của nó là tổng các tích của các số hạng trước nhân với một hệ số
 - Là thuận nhất vì các số hạng đều là a_i và hệ số đều là hằng số
 - Có bậc là k vì an được biểu diễn qua k số hạng đứng trước nó

4.Thuật toán và Đệ quy, truy hồi

36

4.2. Hệ truy hồi.

Định nghĩa 2:

Ví dụ 1: Trong định nghĩa đệ quy của dãy Fibonacci hệ thức $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ là hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất bậc 2. PTĐT của hệ thức này $r^2 = r + 1$. Các điều kiện $f_0 = 0; f_1 = 1$ gọi là các điều kiện ban đầu của dãy Fibonacci.

Ví dụ 2: Hệ thức $a_n = 2a_{n-3}$ là hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất bậc 3. PTĐT của hệ thức này là $r^3 = 2$.

Ví dụ 3: Hệ thức $a_n = 3a_{n-2} + (a_{n-3})^2$ là không phải là hệ thức truy hồi tuyến tính. Hệ thức $b_n = 2b_{n-1} + 3$ là không thuần nhất. Hệ thức $c_n = n.c_{n-2}$ không có hệ số là hằng số

4.Thuật toán và Đệ quy, truy hồi

37

4.2. Hệ truy hồi.

Mô hình hóa bằng hệ thức truy hồi

Ví dụ 1: Bài toán lãi kép.

Một người gửi tiết kiệm 100 triệu đồng tại một ngân hàng A với lãi suất 6,8% mỗi năm. Hết một năm, nếu không rút tiền ra người đó được cộng số lãi vào gốc và được tính lãi cho năm tiếp theo (lãi kép).

Hỏi sau 10 năm gửi mà trước đó không rút ra một lần nào thì số tiền người đó rút được cả gốc lẫn lãi là bao nhiêu?

4.Thuật toán và Đệ quy, truy hồi

38

4.2. Hệ truy hồi.

Mô hình hóa bằng hệ thức truy hồi

Ví dụ 1: Bài toán lãi kép.

Lời giải:

Gọi P_n là tổng số tiền cả gốc và lãi của người đó sau n năm. Số tiền P_n bằng số tiền P_{n-1} của người đó có được sau $n-1$ năm cộng với lãi suất của năm thứ n .

Ta có $P_0 = 100$ (triệu); $P_1 = P_0 + 0,068P_0 = 1,068P_0$;

... ; $P_n = P_{n-1} + 0,068P_{n-1} = 1,068P_{n-1}$

Dùng phương pháp lặp ta tìm công thức tính P_n như sau. Để thấy rằng:

$$P_2 = 1,068P_1 = 1,068^2P_0$$

$$P_3 = 1,068P_2 = 1,068^3P_0$$

$$\dots P_n = 1,068 \cdot P_{n-1} = 1,068^n \cdot P_0$$

Vậy sau 10 năm người đó rút được số tiền là $P_{10} = 1,068^{10} \cdot 100 = 193$ (triệu)

4.Thuật toán và Đệ quy, truy hồi

39

4.2. Hệ truy hồi.

- *Giải hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất bậc 2 hệ số hằng:*

Định lý 1: Cho công thức truy hồi tuyến tính thuần nhất bậc hai với $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} \quad (*)$$

Nếu PTĐT: $r^2 = c_1 r + c_2 \Leftrightarrow r^2 - c_1 r - c_2 = 0$

có hai nghiệm thực phân biệt r_1, r_2 thì công thức tính trực tiếp a_n hay nghiệm của công thức (*) là

$$a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$$

Trong đó α_1 và α_2 là các hằng số được xác định nhờ các điều kiện ban đầu của công thức truy hồi.

4.Thuật toán và Đệ quy, truy hồi

40

4.2. Hệ truy hồi.

- *Giải hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất bậc 2 hệ số hằng:*

Định lý 2: Cho công thức truy hồi tuyến tính thuần nhất bậc hai với $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} \quad (*)$$

Nếu PTĐT: $r^2 = c_1 r + c_2 \Leftrightarrow r^2 - c_1 r - c_2 = 0$

có nghiệm kép $r_1 = r_2 = r_0$ thì công thức tính trực tiếp của a_n là

$$a_n = \alpha_1 r_0^n + \alpha_2 n r_0^n = r_0^n (\alpha_1 + \alpha_2 n).$$

Trong đó là các hằng số được xác định nhờ các điều kiện ban đầu của công thức truy hồi.

4.Thuật toán và Đệ quy, truy hồi

41

4.2. Hệ truy hồi.

□ **Giải hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất bậc k hệ số hằng:**

Định lý 3: Cho với $c_1, c_2, \dots, c_k \in \mathbb{R}$ (là các số thực)

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k} \quad (*)$$

Nếu PTĐT: $r^k = c_1 r^{k-1} + c_2 r^{k-2} + \dots + c_{k-1} + c_k \Leftrightarrow$
 $r^k - c_1 r^{k-1} - c_2 r^{k-2} - \dots - c_{k-1} - c_k = 0$

có k nghiệm thực phân biệt r_1, r_2, \dots, r_k thì công thức tính trực tiếp a_n hay nghiệm của công thức (*) là

$$a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n + \dots + \alpha_k r_k^n$$

với $n=1, 2, 3, \dots$. Trong đó $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ là các hằng số được xác định nhờ các điều kiện ban đầu của công thức truy hồi.

4.Thuật toán và Đệ quy, truy hồi

42

4.2. Hệ truy hồi.

Giải hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất, bậc 2, hệ số hằng

Ví dụ 1: Tìm nghiệm của các hệ thức truy hồi sau:

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} \text{ với , điều kiện ban đầu } a_0 = 2; a_1 = 7$$

Lời giải:

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} \Leftrightarrow a_n - a_{n-1} - 2a_{n-2} (*)$$

Phương trình đặc trưng của (*) là $r^2 - r - 2$

$$\Delta = (1^2 + 8) = 9 \rightarrow \sqrt[2]{9} = 3 \rightarrow r_1 = 2; r_2 = -1$$

Áp dụng định lý 1 ta có nghiệm tổng quát của (*) là:

$$a_n = \alpha_1 2^n + \alpha_2 (-1)^n$$

$$\text{Từ giả thiết ban đầu: } a_0 = 2 \rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 = 2$$

$$\text{Từ giả thiết ban đầu: } a_1 = 7 \rightarrow \alpha_1 2^1 + \alpha_2 (-1)^1 = 7$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có hệ phương trình: } & \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 2 \\ \alpha_1 2^1 + \alpha_2 (-1)^1 = 7 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Giải hệ PT} \rightarrow \alpha_1 = 3; \alpha_2 = -1 \rightarrow a_n = 3 \cdot 2^n - (-1)^n; \forall n \geq 0$$

4.Thuật toán và Đệ quy, truy hồi

43

4.2. Hệ truy hồi.

□ **Giải hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất, bậc 2, hệ số hằng**

Ví dụ 2: Tìm nghiệm của các hệ thức truy hồi sau:

$$a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} \text{ với , điều kiện ban đầu } a_0 = 1; a_1 = 0$$

Lời giải:

$$a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} \Leftrightarrow a_n - 2a_{n-1} + a_{n-2} (*)$$

Phương trình đặc trưng của (*) là $r^2 - 2r + 1$

$$\Delta = (2^2 - 4) = 0 \rightarrow r_1 = r_2 = 1$$

Áp dụng định lý 2 ta có nghiệm tổng quát của (*) là:

$$a_n = \alpha_1 1^n + \alpha_2 n 1^n = 1^n (\alpha_1 + \alpha_2 n).$$

Từ giả thiết ban đầu: $a_0 = 1 \rightarrow \alpha_1 = 1$

Từ giả thiết ban đầu: $a_1 = 0 \rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 = 0$

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \end{cases}$

Giải hệ PT ta $\rightarrow \alpha_1 = 1; \alpha_2 = -1 \rightarrow a_n = 1 - n; \forall n \geq 0$

4.Thuật toán và Đệ quy, truy hồi

44

4.2. Hệ truy hồi.

□ **Giải hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất, bậc 2, hệ số hằng**

Ví dụ 3: Tìm nghiệm của các hệ thức truy hồi sau:

$$a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} \text{ với , điều kiện ban đầu } a_0 = 1; a_1 = 6$$

Lời giải:

$$a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} \Leftrightarrow a_n - 6a_{n-1} + 9a_{n-2} (*)$$

Phương trình đặc trưng của (*) là $r^2 - 6r + 9$

$$\Delta = (6^2 - 36) = 0 \rightarrow r_1 = r_2 = 3$$

Áp dụng định lý 2 ta có nghiệm tổng quát của (*) là:

$$a_n = \alpha_1 3^n + \alpha_2 \cdot n \cdot 3^n = 3^n (\alpha_1 + \alpha_2 n).$$

Từ giả thiết ban đầu: $a_0 = 1 \rightarrow \alpha_1 = 1$

Từ giả thiết ban đầu: $a_1 = 6 \rightarrow 3\alpha_1 + 3\alpha_2 = 6$

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ 3\alpha_1 + 3\alpha_2 = 6 \end{cases}$

Giải hệ PT ta $\rightarrow \alpha_1 = 1; \alpha_2 = 1 \rightarrow a_n = 1^n + n3^n; \forall n \geq 0$

4.Thuật toán và Đệ quy, Truy hồi

45

4.2. Hệ truy hồi.

Giải hệ thức truy hồi tuyến tính bậc 2 hệ số hằng

Ví dụ 4: Thỏ và dãy số Fibonacci

Một đôi thỏ non (gồm một thỏ đực và một thỏ cái) được thả lên một hòn đảo. Cặp thỏ không sinh cho đến khi chúng đủ 2 tháng tuổi. Sau khi đủ 2 tháng tuổi, mỗi đôi thỏ sinh một đôi thỏ con (gồm một thỏ đực và một thỏ cái) mỗi tháng. Hỏi sau n tháng có bao nhiêu đôi thỏ, giả sử rằng không có con thỏ nào bị chết.

Lời giải:

Kí hiệu T_n là số cặp thỏ sau n tháng ($n \geq 1$).

Với $n = 1$ (cuối tháng đầu tiên) thì số cặp thỏ trên đảo là $T_1 = 1$

Với $n = 2$ (cuối tháng thứ 2, cặp thỏ này chưa sinh) $T_2 = 1$

Số cặp thỏ sau n tháng = số cặp thỏ trên đảo của tháng trước T_{n-1} + số cặp thỏ mới sinh

Số cặp thỏ mới sinh = T_{n-2} bởi mỗi cặp mới sinh từ 1 cặp có ít nhất 2 tháng tuổi

Do vậy dãy $\{T_n\}$ thoả mãn hệ thức truy hồi

→ với $\forall n \geq 3$ và với điều kiện ban đầu thì $T_n = T_{n-1} + T_{n-2}$; $T_1 = 1$ và $T_2 = 1$

4.Thuật toán và Đệ quy, Truy hồi

- ▶ 4.2. Hệ truy hồi.
- ▶ Thủ và dãy số Fibonacci

Lời giải:

công thức truy hồi:

$$T_n = T_{n-1} + T_{n-2} \quad (*);$$

với $\forall n \geq 3$; $T_1 = 1$ và $T_2 = 1$

PTĐT (*) là $r^2 - r - 1$

$$\rightarrow r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}; r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2};$$

\rightarrow Nghiệm tổng quát của (*) là:

$$\rightarrow a_n = \alpha_1 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + \alpha_2 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

Từ giả thiết $T_1 = 1$; $T_2 = 1 \rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \\ \alpha_1 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) + \alpha_2 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) = 1 \end{cases}$

Ta $\rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \right) \\ \alpha_2 = -\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \right) \end{cases} \rightarrow T_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right]$

4.Thuật toán và Đệ quy, Truy hồi

47

4.3. Hệ truy hồi.

Giải hệ thức truy hồi tuyến tính bậc 2 hệ số hằng

Ví dụ 5: Tìm công thức truy hồi tính số xâu nhị phân có độ dài n mà không có 2 bít 0 liên tiếp

Lời giải:

Kí hiệu T_n là một xâu nhị phân có độ dài n. Gọi a_n là số xâu nhị phân có độ dài n mà không có 2 bít 0 liên tiếp ($n \geq 1$).

Với $n = 1$ thì có 2 xâu là 1; 0 $\Rightarrow a_1 = 2$.

Với $n = 2$ thì có các xâu là 11 ; 10 ; 01 $\Rightarrow a_2 = 3$.

Với $\forall n \geq 3$ thì xảy ra hai trường hợp :

TH1: Nếu bít đầu tiên bên trái của xâu là 1 thì phải có dạng $T_n = 1T_{n-1}$. Số xâu nhị phân độ dài n mà không có 2 bít 0 liên tiếp trong trường hợp 1 là a_{n-1} .

TH2: Nếu bít đầu tiên bên trái của xâu là 0 thì phải có dạng $T_n = 01T_{n-2}$. Số xâu nhị phân độ dài n mà không có 2 bít 0 liên tiếp trong trường hợp 2 là a_{n-2} .

\rightarrow với $\forall n \geq 3$ thì $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$; $a_1 = 2$ và $a_2 = 3$

4.Thuật toán và Đệ quy, Truy hồi

48

4.3. Hệ truy hồi.

□ **Giải hệ thức truy hồi tuyến tính bậc 2 hệ số hằng**

Ví dụ 6: Tìm số xâu nhị phân có độ dài 10 mà không có 2 bit 0 liên tiếp.

Lời giải:

Theo ví dụ 4, gọi an là số xâu nhị phân có độ dài n mà không có 2 bit 0 liên tiếp, ta có công thức truy hồi: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ (*); với $\forall n \geq 3$; $a_1 = 2$ và $a_2 = 3$

PTĐT (*) là $r^2 - r - 1$

$$\rightarrow r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}; r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2};$$

\rightarrow Nghiệm tổng quát của (*) là:

$$\rightarrow a_n = \alpha_1 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + \alpha_2 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

4.Thuật toán và Đệ quy, Truy hồi

49

4.3. Hệ truy hồi.

□ Giải hệ thức truy hồi tuyến tính bậc 2 hệ số hằng

Ví dụ 6: Tìm số xâu nhị phân có độ dài 10 mà không có 2 bit 0 liên tiếp.

Lời giải:

Từ giả thiết $a_1 = 2; a_2 = 3 \rightarrow \begin{cases} \alpha_1 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + \alpha_2 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 2 \\ \alpha_1 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \alpha_2 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha_1 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1\right) = 3 - 2 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \\ \alpha_2 \cdot \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} + 1\right) = 3 - 2 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \end{cases}$

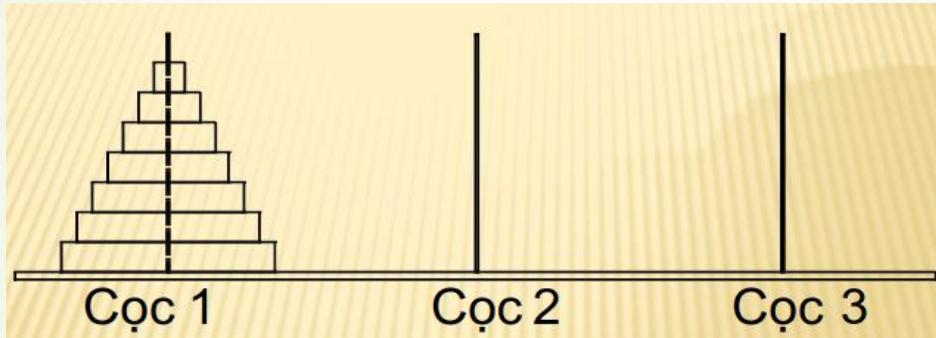
Ta $\rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \left(\frac{5+3\sqrt{5}}{10}\right) \\ \alpha_2 = \left(\frac{5-3\sqrt{5}}{10}\right) \end{cases} \rightarrow a_n = \left(\frac{5+3\sqrt{5}}{10}\right) \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{5-3\sqrt{5}}{10}\right) \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n; \forall n \geq 1$

4.Thuật toán và Đệ quy

4.3. Hệ truy hồi.

Giải hệ truy hồi không tuyến tính

Bài toán tháp hà nội



Mục tiêu: Chuyển các đĩa từ cột 1 sang cột 3

Luật chơi: Mỗi lần chuyển 1 đĩa, đĩa nằm trên phải nhỏ hơn đĩa nằm dưới

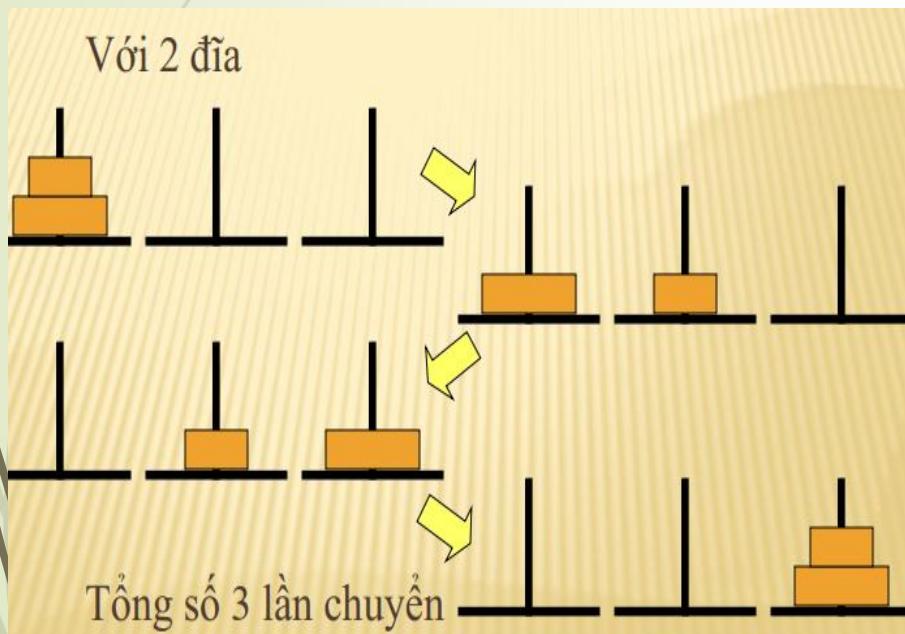
Hỏi: với n đĩa thì phải bao nhiêu lần chuyển (theo luật chơi) thì di chuyển xong n đĩa từ cọc 1 sang cọc 3.

4.Thuật toán và Đệ quy

4.3. Hệ truy hồi.

Giải hệ truy hồi không tuyến tính

Bài toán tháp Hà Nội



Với n=2

Lần 1: Chuyển đĩa nhỏ từ cột 1 sang cột 2 (1 lần chuyển)

Lần 2: Chuyển đĩa lớn sang cột 3 (1 lần chuyển)

Lần 3: Chuyển đĩa nhỏ từ cột 2 sang cột 3 (1 lần chuyển).

→ Tổng số lần chuyển =3

$$\rightarrow H_n = 2H_{n-1} + 1$$

(n là đĩa to nhất, n-1 là đĩa nhỏ)

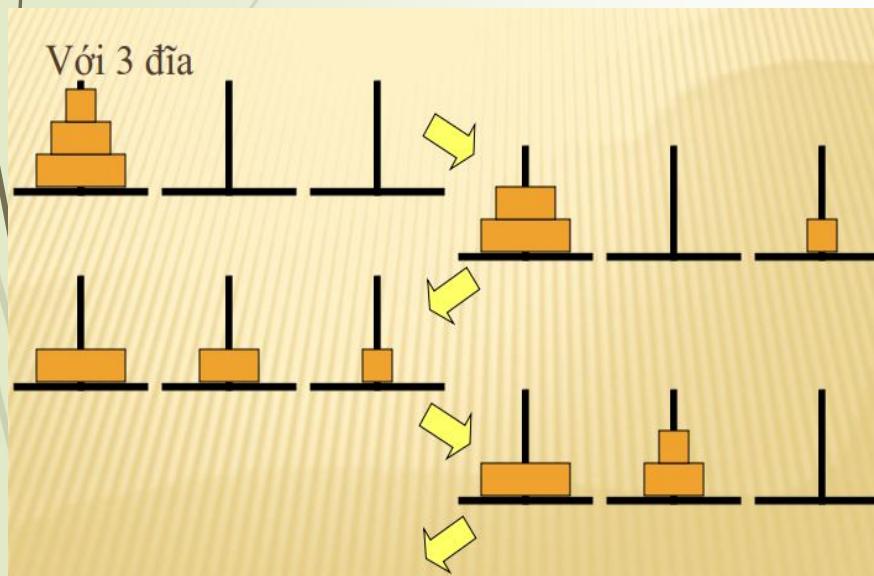
4.Thuật toán và Đệ quy

52

4.3. Hệ truy hồi.

□ *Giải hệ truy hồi không tuyến tính*

Bài toán tháp hà nội



Coi 2 đĩa trên là 1 “đĩa nhỏ”

Lần 1: Chuyển “đĩa nhỏ” từ cột 1 sang cột 2 (3 lần chuyển)

Lần 2: Chuyển đĩa lớn sang cột 3 (1 lần chuyển)

Lần 3: Chuyển “đĩa nhỏ” từ cột 2 sang cột 3 (3 lần chuyển)

→ Tổng số lần chuyển = 7

→ $H_n = 2H_{n-1} + 1$

(n là đĩa to nhất, n-1 là “đĩa nhỏ”)

4.Thuật toán và Đệ quy

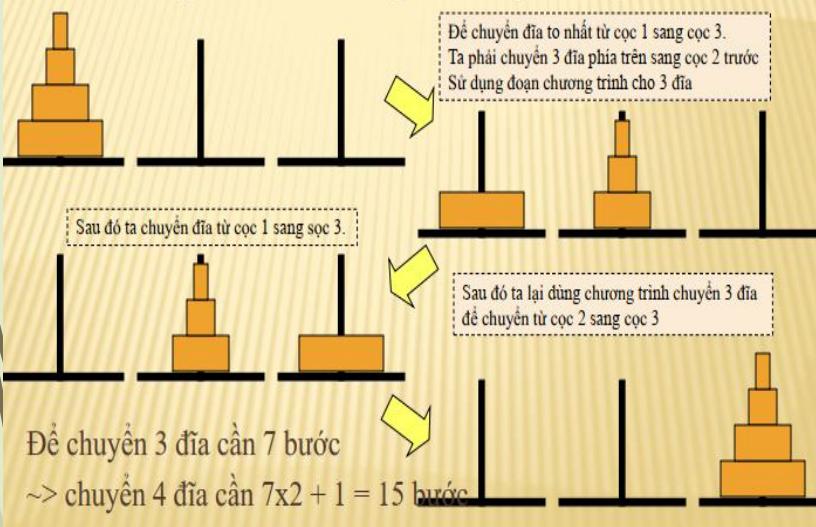
53

► 4.3. Hệ truy hồi.

Giải hệ truy hồi không tuyến tính

Bài toán tháp hà nội

- ❖ Với 4 đĩa (giả sử đã có chương trình chuyển 3 đĩa)



Coi 3 đĩa trên là 1 “đĩa nhỏ”

Lần 1: Chuyển “đĩa nhỏ” từ cột 1 sang cột 2 (7 lần chuyển)

Lần 2: Chuyển đĩa lớn nhất sang cột 3 (lần chuyển)

Lần 3: Chuyển “đĩa nhỏ” từ cột 2 sang cột 3 (7 lần chuyển)

→ Tổng số lần chuyển = 15

$$\rightarrow H_n = 2H_{n-1} + 1$$

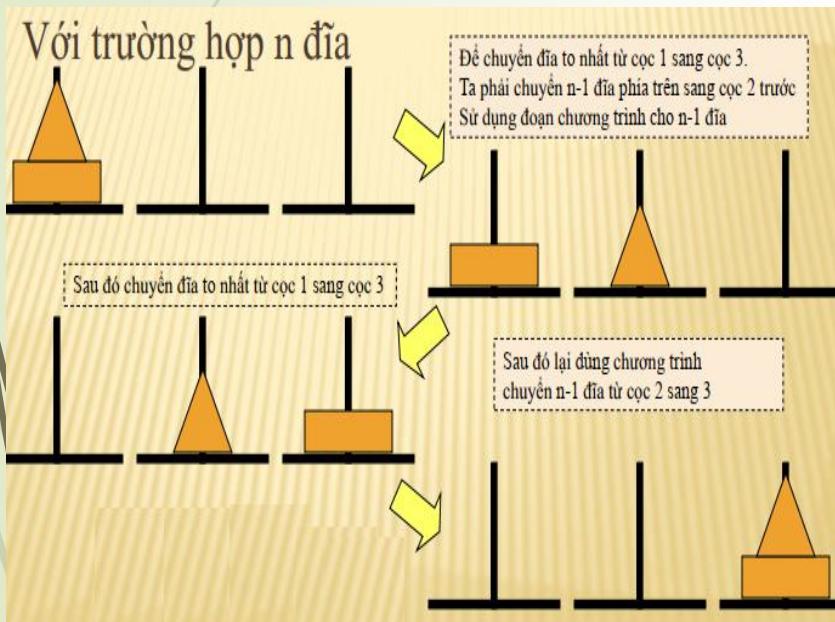
(n là đĩa to nhất, n-1 là “đĩa nhỏ”)

4.Thuật toán và Đệ quy

4.3. Hệ truy hồi.

Giải hệ truy hồi không tuyến tính

Bài toán tháp hà nội



Coi n-1 đĩa trên là 1 “đĩa nhỏ”

Lần 1: Chuyển “đĩa nhỏ” từ cột 1 sang cột 2 ($H_{n-1} = 2H_{n-2} + 1$ lần chuyển)

Lần 2: Chuyển đĩa lớn nhất sang cột 3 (1 lần chuyển)

Lần 3: Chuyển “đĩa nhỏ” từ cột 2 sang cột 3 ($H_{n-1} = 2H_{n-2} + 1$ lần chuyển)

$$\rightarrow H_n = 2H_{n-1} + 1$$

(n là đĩa to, n-1 là “đĩa nhỏ”)

Vậy hệ truy hồi của bài toán là: $H_n = 2H_{n-1} + 1$
(Hệ truy hồi không thuần nhất)

4.Thuật toán và Đệ quy

4.3. Hệ truy hồi.

Giải hệ truy hồi không tuyến tính

Bài toán tháp hà nội

Tìm nghiệm riêng của hệ truy hồi

$$\begin{aligned}
 H_n &= 2H_{n-1} + 1 \\
 &= 2(2H_{n-2} + 1) + 1 = 2^2H_{n-2} + 2 + 1 \\
 &= 2^2(2H_{n-3} + 1) + 2 + 1 = 2^3H_{n-3} + 2^2 + 2 + 1 \\
 &\dots \\
 &= 2^{n-1}H_1 + 2^{n-2} + 2^{n-3} + \dots + 2 + 1 \\
 &= 2^{n-1} + 2^{n-2} + 2^{n-3} + \dots + 2 + 1 \\
 &= 2^n - 1
 \end{aligned}$$

$$n = 2 \rightarrow 2^n - 1 = 2^2 - 1 = 3$$

$$n = 3 \rightarrow 2^n - 1 = 2^3 - 1 = 7$$

$$n = 4 \rightarrow 2^n - 1 = 2^4 - 1 = 15$$

...

$$\begin{aligned}
 n = 32 &\rightarrow 2^n - 1 = (2^{30} \times 2^2) - 1 = \\
 &(4 \times 1024 \times 1024 \times 1024) - 1 = \\
 &4.294.967..296
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 n = 64 &\rightarrow 2^n - 1 = (2^{32})^2 - 1 = \\
 &(4.294.967.296)^2 - 1
 \end{aligned}$$