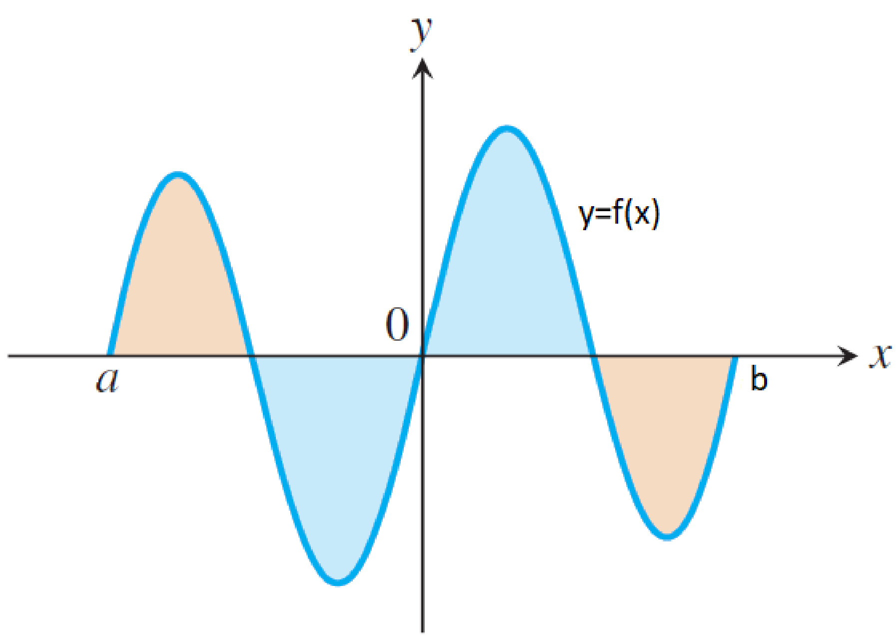
ỨNG DỤNG HÌNH HỌC CỦA TÍCH PHÂN

1. Tính diện tích hình phẳng

• Xét hình phẳng $\boldsymbol{H}$ trong mặt phẳng tọa độ $\boldsymbol{Oxy}$ giới hạn bởi đường $\boldsymbol{x = a, x = b}$, trục $\boldsymbol{Ox}$ và đồ thị của hàm số $\boldsymbol{y = f(x)}$ ($\boldsymbol{f(x)}$ liên tục trên $[\boldsymbol{a, b}]$).

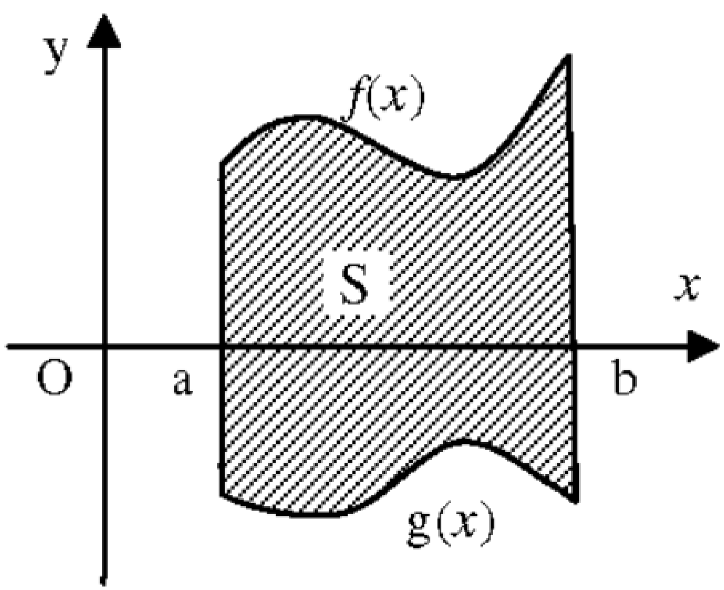


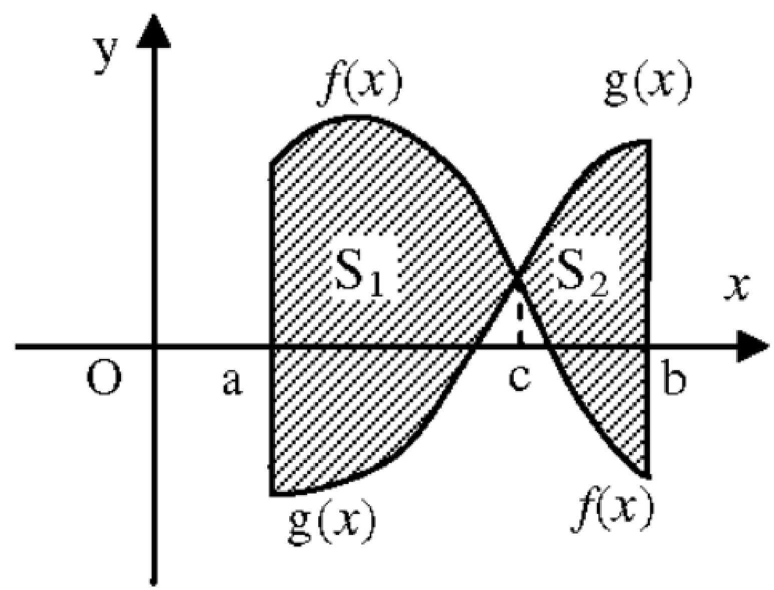
Diện tích của hình H là

$$S_H = \int_a^b |f(x)|\, dx.$$

• Cho hình $(\boldsymbol{H})$: $\begin{cases} \boldsymbol{x = a;\ x = b} \\ \boldsymbol{y = f(x);\ y = g(x)} \end{cases}$. **Diện tích của hình $\boldsymbol{H}$ là**

$$\boldsymbol{S_H = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx.}$$





• Tương tự, hình $(H):\begin{cases} y=c;\ y=d \\ x=\varphi(y);\ x=\psi(y) \end{cases}$ có

$$S_H=\int_c^d |\varphi(y)-\psi(y)|\,dy.$$

Đặc biệt: Khi $\psi(y)\equiv 0$ thì $S=\int_c^d |\varphi(y)|\,dy$.

• Hình phẳng giới hạn bởi các đường $x=a$, $x=b$, trục Ox và đường cong $L:\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$ có **diện tích là** $S=\int_\alpha^\beta |y(t)x'(t)|\,dt$**, trong đó giả thiết rằng phương trình** $x(t)=a, x(t)=b$ **có nghiệm duy nhất là** α,β **và** $x(t), y(t), x'(t)$ **liên tục trên** $[\alpha,\beta]$**.**

Chú ý: 1. Có thể chia nhỏ hình phẳng thành nhiều phần (nếu cần thiết).

2. Nên để ý đến tính đối xứng (nếu có) của hình phẳng.

VD 1. Tính diện tích miền giới hạn bởi đường Parabol $\boldsymbol{y = x^2 - 2x}$, trục $\boldsymbol{Ox}$ và hai đường thẳng $\boldsymbol{x = 0}$, $\boldsymbol{x = 3}$.

Giải. Ta có
$$\boldsymbol{S = -\int_0^2 (x^2 - 2x)dx + \int_2^3 (x^2 - 2x)dx = \frac{8}{3}.}$$

VD 2. Tính diện tích miền giới hạn bởi Parabol $\boldsymbol{y = x^2 + 1}$ và đường thẳng $\boldsymbol{x + y = 3}$.

Giải. Ta có

$$\boldsymbol{S = \int_{-2}^{1}(2 - x - x^2)dx = \frac{9}{2}.}$$

VD 3. Tính diện tích miền giới hạn bởi các Parabol $\boldsymbol{y^2 = 2px}$, $\boldsymbol{x^2 = 2py}$ với $\boldsymbol{p > 0}$.

Giải. Với $f(x) = \sqrt{2px}$, $g(x) = \dfrac{x^2}{2p}$.

- Hoành độ giao điểm $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x = 0, x = 2p$.

- Do đó

$$S = \int_0^{2p} \left(\sqrt{2px} - \frac{x^2}{2p} \right) dx = \left(\frac{2}{3}\sqrt{2p}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{6p} \right) \Big|_0^{2p} = \frac{4p^2}{3}.$$

VD 4. Tính diện tích hình elip (E) :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1.$$

Giải. Phương trình tham số của đường elip $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ có dạng: $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$, với $0 \leq t \leq 2\pi$.

Vì hình elip (E) có hai trục đối xứng là trục tung Oy và trục hoành Ox nên diện tích của nó bằng 4 lần diện tích của phần hình elip (E) nằm trong góc phần tư thứ nhất.

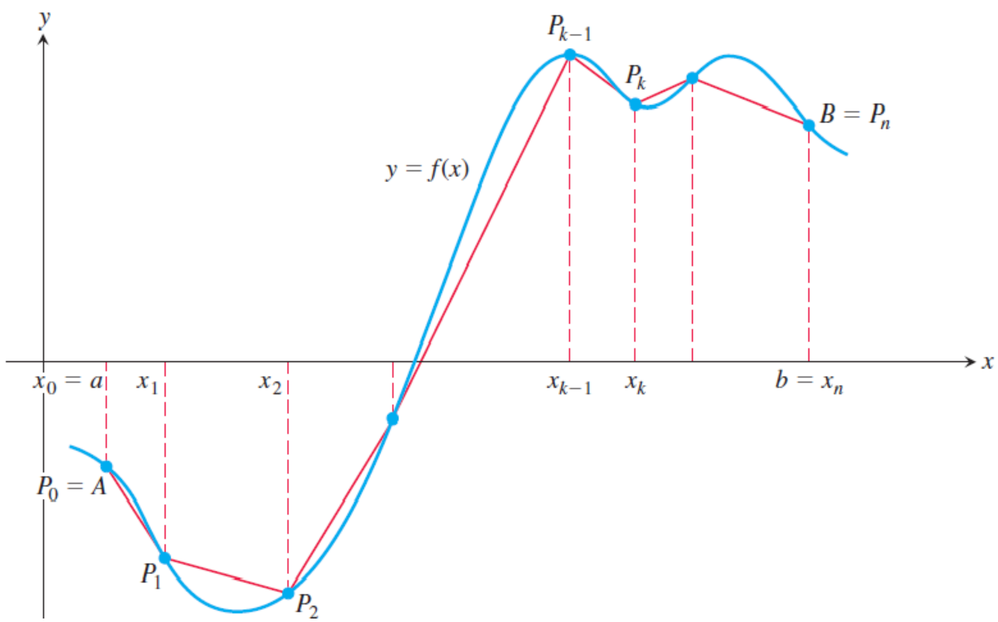
Miền elip (E) nằm trong góc phần tư thứ nhất giới hạn bởi các đường $x = 0, x = a$, trục hoành Ox và cung elip $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$ với $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

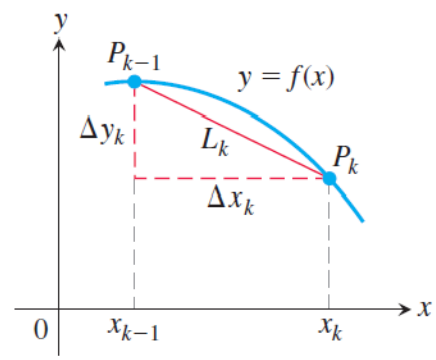
Do đó

$$S = 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt = 4.\frac{ab}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2t)dt = \pi ab.$$

2.Tính độ dài đường cong phẳng

• Cho cung $\boldsymbol{AB}$: $\begin{cases} \boldsymbol{y = f(x)} \\ (\boldsymbol{a \le x \le b}) \end{cases}$ trong đó $\boldsymbol{f(x)}$ có đạo hàm liên tục trên $[\boldsymbol{a, b}]$.





Khi đó, **độ dài cung AB là**

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$

• Tương tự, khi cung $\boldsymbol{AB}$: $\begin{cases} x = g(y) \\ (c \le y \le d) \end{cases}$ thì **độ dài cung AB là**

$$s = \int_c^d \sqrt{1 + [g'(y)]^2}\, dy.$$

• **Tổng quát:** Giả sử cung cong $\boldsymbol{AB}$: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ $(\alpha \le t \le \beta)$, trong đó $x(t)$, $y(t)$ có đạo hàm liên tục trên $[\alpha, \beta]$. Khi đó **độ dài cung AB được cho bởi công thức**

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt.$$

VD 5. Tính độ dài cung cong $\boldsymbol{y = \ln x}$, $\boldsymbol{\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{15}}$.

Giải. Ta có

$$\boldsymbol{s = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{15}} \sqrt{1 + y'^2(x)}\,\mathrm{dx} = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{15}} \sqrt{1 + \frac{1}{\mathrm{x}^2}}\,\mathrm{dx} = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{15}} \sqrt{1 + \mathrm{x}^2}\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{x}}.}$$

Đặt $\boldsymbol{t = \sqrt{1 + x^2} \Rightarrow t^2 = 1 + x^2 \Rightarrow x\,\mathrm{dx} = \mathrm{t\,dt}}$ và $\boldsymbol{\sqrt{3} \le x \le \sqrt{15} \Leftrightarrow 2 \le t \le 4}$ nên

$$\boldsymbol{\begin{aligned} s &= \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{15}} \sqrt{1 + x^2}.\frac{\mathrm{dx}}{x} = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{15}} \sqrt{1 + x^2}.\frac{x\,\mathrm{dx}}{x^2} = \int_2^4 t.\frac{t\,\mathrm{dt}}{t^2 - 1} \\ &= \int_2^4 \mathrm{dt} + \int_2^4 \frac{\mathrm{dt}}{\mathrm{t}^2 - 1} = \left(\mathrm{t} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\mathrm{t} - 1}{\mathrm{t} + 1}\right|\right)\Bigg|_2^4 \\ &= 2 + \ln 3 - \ln\sqrt{5}. \end{aligned}}$$

VD 6. Tính độ dài cung cong $\boldsymbol{y = \ln(1 - x^2)}$ với $\boldsymbol{0 \le x \le \frac{1}{2}}$.

Giải. Ta có

$$\boldsymbol{s = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1+x^2}{1-x^2}\,dx = \left(\ln\frac{1+x}{1-x} - x\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{2}} = \ln 3 - \frac{1}{2}.}$$

VD 7. Tính độ dài đường Axtroit $\boldsymbol{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2}}$, $\boldsymbol{a > 0}$.

Giải. Đường Astroit được mô tả dưới dạng tham số

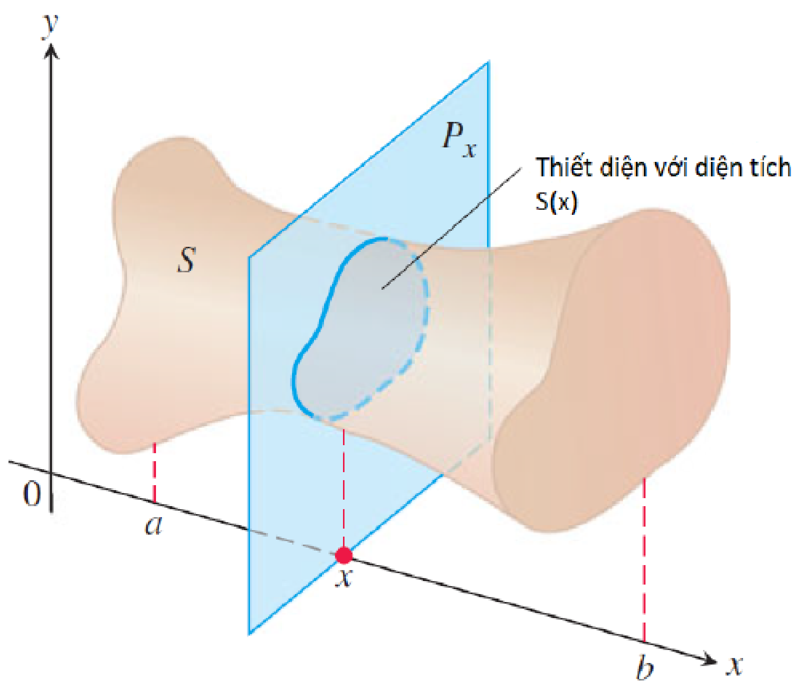
$$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t, \end{cases} \qquad (0 \le t \le 2\pi)$$

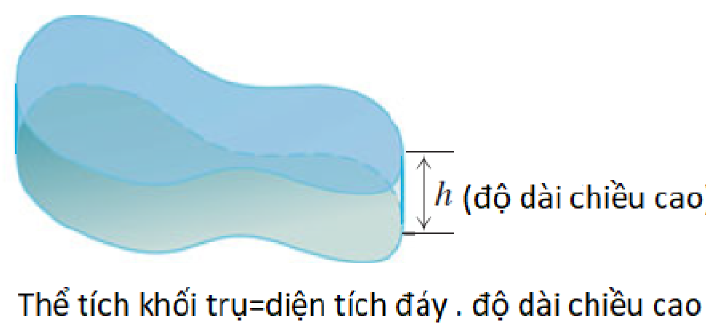
và do tính đối xứng nên

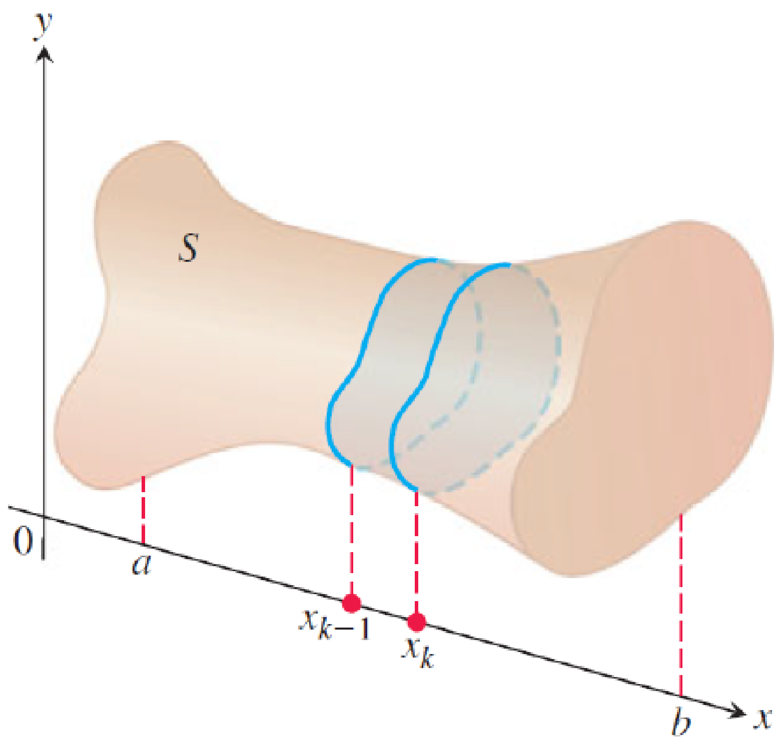
$$\begin{aligned}
s &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,\mathrm{dt} \\
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(-3a\cos^2 t\sin t)^2 + \left(3a\sin^2 t\cos t\right)^2}\,\mathrm{dt} \\
&= 12a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 t\sin^2 t\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right)}\,\mathrm{dt} = 12\mathrm{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{\sin t\cos t\,dt} \\
&= 6a\sin^2 t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 6a.
\end{aligned}$$

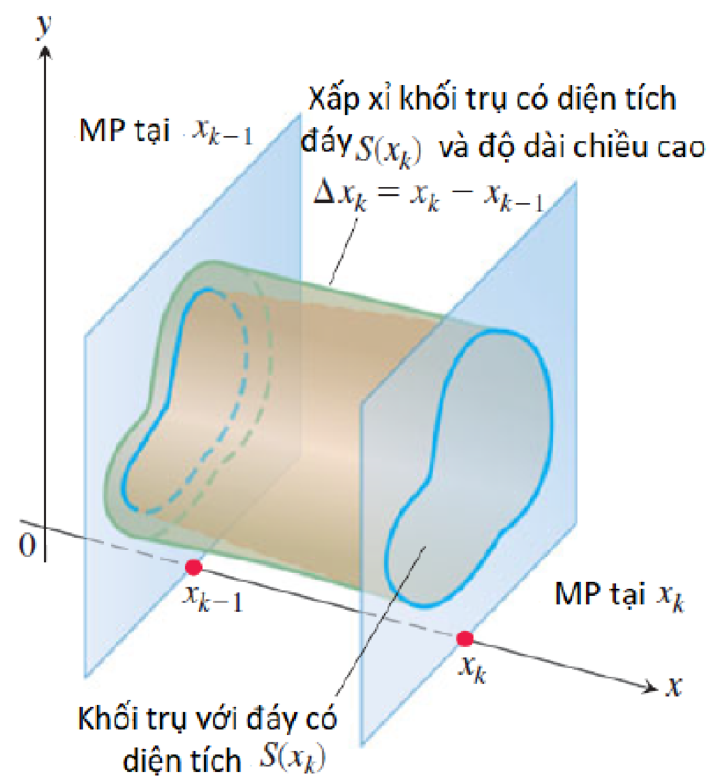
3.Tính thể tích vật thể

● Giả sử một vật thể giới hạn bởi 2 mặt phẳng $\boldsymbol{x = a}$, $\boldsymbol{x = b}$, diện tích thiết diện tạo bởi vật thể và mặt phẳng vuông góc với trục $\boldsymbol{Ox}$ tại điểm $\boldsymbol{(x, 0, 0)}$ là $\boldsymbol{S(x)}$.






y
S
0
a
x_{k-1}
x_k
b
x

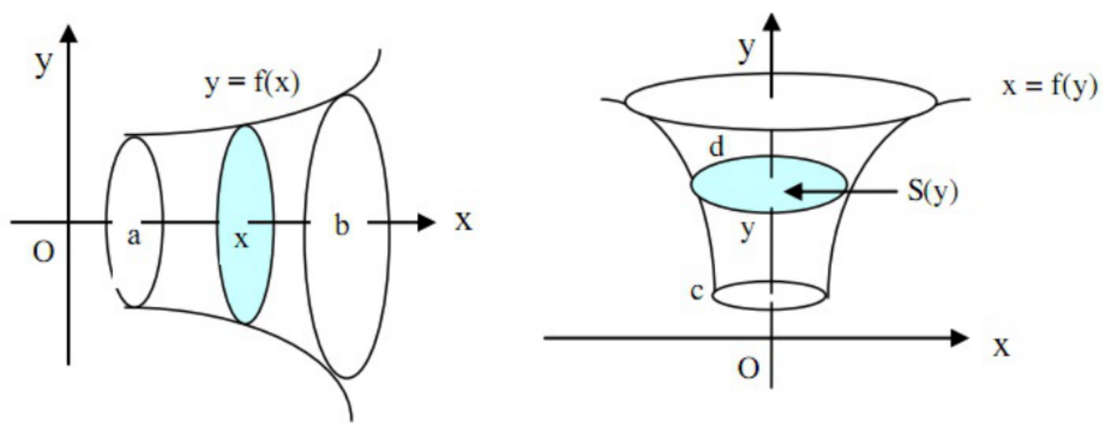

y
MP tại x_{k-1}
Xấp xỉ khối trụ có diện tích đáy $S(x_k)$ và độ dài chiều cao $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$
0
x_{k-1}
MP tại x_k
x_k
x
Khối trụ với đáy có diện tích $S(x_k)$

Khi đó thể tích của vật thể là

$$V = \int_a^b S(x)dx.$$

• **Đặc biệt:** Khi vật thể tròn xoay tạo bởi miền phẳng $\boldsymbol{0 \leq y \leq f(x), a \leq x \leq b}$ quay quanh trục $\boldsymbol{Ox}$ thì thiết diện $\boldsymbol{S(x)}$ là hình tròn và $\boldsymbol{S(x) = \pi f^2(x)}$, do đó

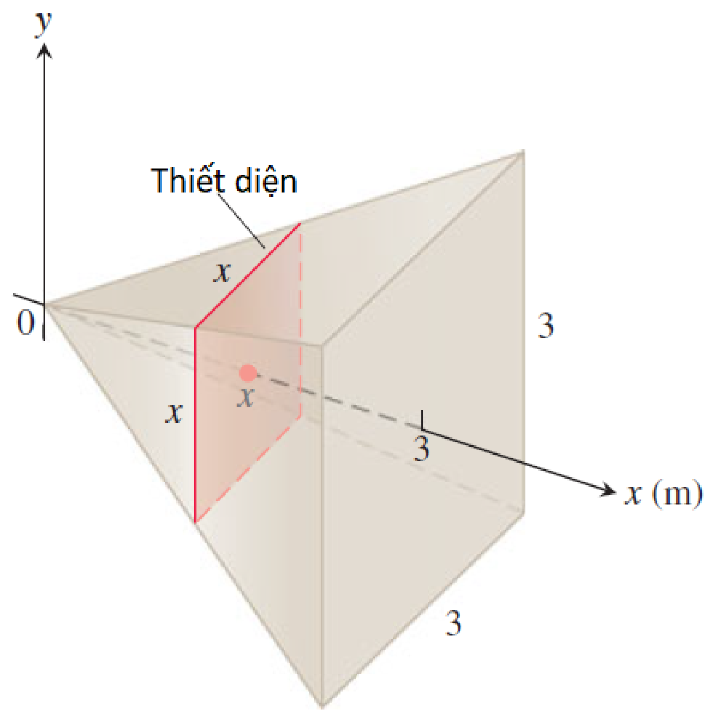
$$\boldsymbol{V = \pi \int_a^b f^2(x)dx.}$$



Khi vật thể tròn xoay tạo bởi miền phẳng $\boldsymbol{0 \leq x \leq f(y), c \leq y \leq d}$ quay quanh trục $\boldsymbol{Oy}$ thì thiết diện $\boldsymbol{S(y)}$ là hình tròn và $\boldsymbol{S(y) = \pi f^2(y)}$, do đó

$$\boldsymbol{V = \pi \int_c^d f^2(y)dy.}$$

VD 8. Một kim tự tháp cao 3 m và có đáy là một hình vuông với độ dài cạnh 3 m. Biết rằng thiết diện của khối kim tháp và mặt phẳng vuông góc với đường cao của kim tự tháp và cắt đường cao tại điểm cách đỉnh $\boldsymbol{x}$ (m), là một hình vuông với độ dài cạnh $\boldsymbol{x}$. Tính thể tích của khối kim tự tháp.



Giải. Coi trục $\boldsymbol{0x}$ là đường thẳng chứa đường cao của khối kim tự tháp, trong đó, $\boldsymbol{0}$ là gốc và tia $\boldsymbol{0x}$ hướng từ đỉnh xuống đáy (xem hình vẽ trên).

Khối kim tự tháp nằm giữa hai mặt phẳng $\boldsymbol{x = 0}$ và mặt phẳng $\boldsymbol{x = 3}$ (vì kim tự tháp cao 3m).

Cắt khối kim tự tháp bởi mặt phẳng vuông góc với $\boldsymbol{Ox}$ tại điểm $\boldsymbol{(x, 0, 0)}$ với $\boldsymbol{0 \leq x \leq 3}$ sẽ được thiết diện là hình vuông với độ dài cạnh $\boldsymbol{x}$. Do đó, diện tích thiết diện là

$$\boldsymbol{S(x) = x^2.}$$

Vậy thể tích khối kim tự tháp là

$$\boldsymbol{V = \int_0^3 S(x)dx = \int_0^3 x^2\, dx = \left(\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^3 = 9\ m^3.}$$

VD 9. Tính thể tích vật thể sinh bởi hình phẳng giới hạn bởi $\boldsymbol{y = x^3}$ và các đường $\boldsymbol{x = 0}$, $\boldsymbol{x = 1}$, $\boldsymbol{y = 0}$ khi

a) quay quanh trục $\boldsymbol{Ox}$; b) quay quanh trục $\boldsymbol{Oy}$.

Giải. a) Ta có

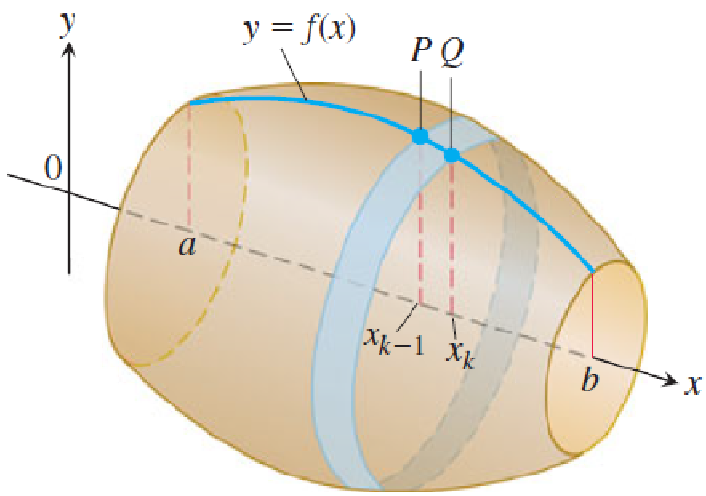
$$\boldsymbol{V = \pi \int_0^1 (x^3)^2 \, \mathrm{dx} = \pi \int_0^1 \mathrm{x}^6 \, \mathrm{dx} = \pi . \frac{\mathrm{x}^7}{7}\bigg|_0^1 = \frac{\pi}{7}.}$$

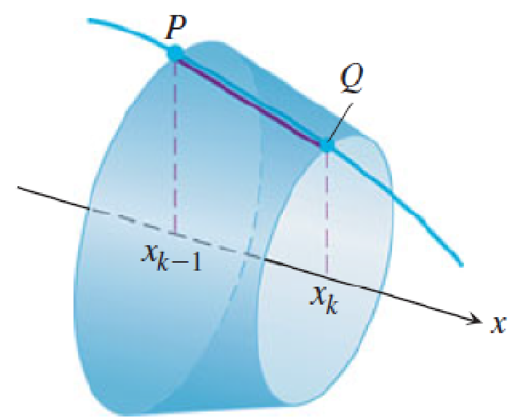
b) Từ $\boldsymbol{y = x^3}$ suy ra $\boldsymbol{x = \sqrt[3]{y}}$, vậy

$$\boldsymbol{V = \pi \int_0^1 1^2 \, \mathrm{dy} - \pi \int_0^1 \left(\sqrt[3]{y}\right)^2 \, \mathrm{dy} = \pi - \pi . \frac{3\mathrm{x}^{\frac{5}{3}}}{5}\bigg|_0^1 = \frac{2\pi}{5}.}$$

4.Tính diện tích mặt tròn xoay

• Xét đường cong $\boldsymbol{AB}$ là đồ thị của hàm số $\boldsymbol{y = f(x), \forall x \in [a, b]}$ nằm bên trên trục hoành $\boldsymbol{Ox}$, trong đó hàm số $\boldsymbol{f(x)}$ có đạo hàm liên tục trên $[\boldsymbol{a, b}]$. Cho đường cong $\boldsymbol{AB}$ quay quanh trục $\boldsymbol{Ox}$, ta nhận được mặt tròn xoay trong không gian (xem hình bên dưới).





Khi đó, **diện tích của mặt tròn xoay trên là**

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$

• Xét đường cong $\boldsymbol{AB}$ là đồ thị của hàm số $\boldsymbol{x = f(y), \forall y \in [c, d]}$ nằm bên phải trục tung $\boldsymbol{Oy}$, trong đó hàm số $\boldsymbol{f(y)}$ có đạo hàm liên tục trên $[\boldsymbol{c, d}]$. **Diện tích mặt tròn xoay được tạo bởi khi cho đường cong $\boldsymbol{AB}$ quay quanh trục $\boldsymbol{Oy}$ là**

$$\boldsymbol{S = 2\pi \int_c^d f(y)\sqrt{1 + [f'(y)]^2}\, dy.}$$

Chú ý:

• **Diện tích mặt tròn xoay khi quay đường cong $y = f(x)$ (với $a \leq x \leq b$, $f(x)$ nhận giá trị bất kỳ) quanh trục Ox là**

$$S = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$

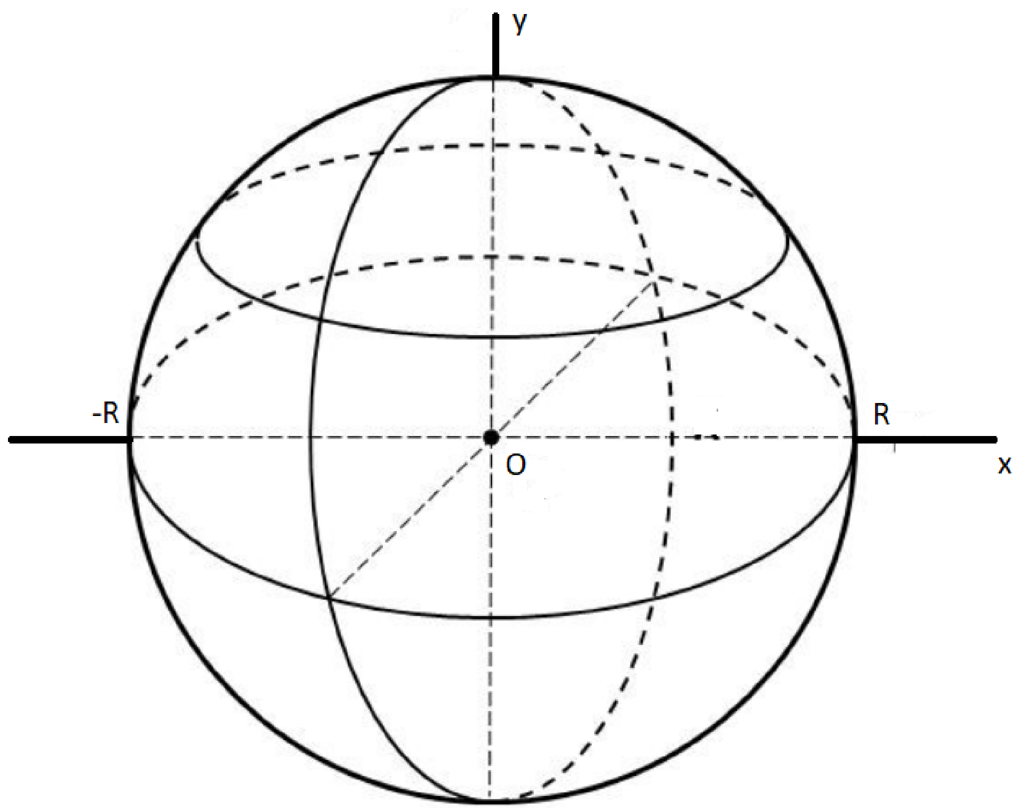
• **Diện tích mặt tròn xoay khi quay đường cong $x = f(y)$ (với $c \leq y \leq d$, $f(y)$ nhận giá trị bất kỳ) quanh trục Oy là**

$$S = 2\pi \int_c^d |f(y)| \sqrt{1 + [f'(y)]^2}\, dy.$$

• **Diện tích mặt tròn xoay khi quay đường cong cho dưới dạng tham số $x = x(t)$, $y = y(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$ quanh trục Ox thì**

$$S = 2\pi \int_\alpha^\beta |y(t)| \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, \mathrm{d}t.$$

VD 10. Tính diện tích mặt cầu $(\boldsymbol{S})$ có phương trình $\boldsymbol{x^2 + y^2 + z^2 = R^2}$.



Giải. Ta xem mặt cầu được tạo bởi cung có phương trình $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ với $-R \le x \le R$ quay quanh trục Ox, do đó

$$S = 2\pi \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}.\sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}}\, dx = 4\pi \int_0^R R dx = 4\pi R^2.$$

VD 11. Tính diện tích mặt tròn xoay tạo bởi cung $y = \sin x$, $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ quay quanh trục Ox.

Giải. Ta có

$$S = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sqrt{1+\cos^2 x}\, \mathrm{dx} = -2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\cos^2 \mathrm{x}}\, \mathrm{d}(\cos \mathrm{x}).$$

Đặt $t = \cos x$ ta có $x = 0 \Rightarrow t = 1$, $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 0$ nên

$$S = 2\pi \int_0^1 \sqrt{1+t^2}\, \mathrm{dt} = 2\pi \left[\frac{\mathrm{t}}{2}\sqrt{1+\mathrm{t}^2} + \frac{1}{2}\ln\left(\mathrm{t} + \sqrt{1+\mathrm{t}^2}\right)\right]\Bigg|_0^1$$

$$= \pi\left[\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})\right].$$

VD 12. Tính diện tích mặt tròn xoay khi quay đường Astroid $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ quanh trục Ox.

Giải. Phương trình tham số của đường Astroid là $\boldsymbol{x = a\cos^3 t}$, $\boldsymbol{y = a\sin^3 t}$, do tính đối xứng qua trục $\boldsymbol{Ox}$ của đường Astroid nên diện tích mặt tròn xoay tạo được là

$$\boldsymbol{S = 2\pi.3a^2 \int_0^{\pi} \sin^4 t|\cos t|dt = \frac{12}{5}\pi a^2.}$$

ỨNG DỤNG KHÁC CỦA TÍCH PHÂN

Trọng tâm của bản phẳng

Cho bản phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số liên tục $\boldsymbol{y = f(x)}$ và $\boldsymbol{y = g(x)}$ trên đoạn $[\boldsymbol{a, b}]$, với $\boldsymbol{g(x) \leq f(x), \forall x \in [a, b].}$

Diện tích của bản phẳng là $\boldsymbol{A = \int_a^b (f(x) - g(x))\ \mathrm{dx}.}$

Trọng tâm của bản phẳng có tọa độ là

$$\boldsymbol{(\overline{x},\ \overline{y}) = \left(\frac{1}{A}\int_a^b x\,[f(x) - g(x)]\ \mathrm{dx},\ \frac{1}{2\mathrm{A}}\int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} \left[[\mathrm{f(x)}]^2 - [\mathrm{g(x)}]^2\right]\ \mathrm{dx}\right).}$$

Bài tập.

4. Tìm diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường và điều kiện sau:

1) $\boldsymbol{y = \frac{x^2}{2}}$, $\boldsymbol{y = 2 - \frac{3x}{2}}$

2) $\boldsymbol{y^2 + x = 4}$, $\boldsymbol{y^2 - 3x = 12}$

3) $\boldsymbol{y = x^3}$, $\boldsymbol{y = x}$, $\boldsymbol{y = 2x}$

4) $\boldsymbol{x^2 + y^2 = 4x}$, $\boldsymbol{y^2 = 2x}$

5) $\boldsymbol{y = \frac{1}{x}}$, $\boldsymbol{y = x}$, $\boldsymbol{y = \frac{10}{3} - x}$, $\boldsymbol{x \geq 1}$

6) $\boldsymbol{\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1}$, $\boldsymbol{y \leq \frac{9}{32}x^2}$

5. Tìm thể tích vật tròn xoay tạo bởi miền phẳng giới hạn bởi các đường sau đây quanh các trục tương ứng:

1) Tam giác $\boldsymbol{OAB}$, với $\boldsymbol{O(0,0)}$, $\boldsymbol{A(h,0)}$, $\boldsymbol{B(h,r)}$ quay quanh trục $\boldsymbol{Ox}$.

2) $\boldsymbol{xy = 4}$, $\boldsymbol{y = 0}$, $\boldsymbol{x = 1}$ và $\boldsymbol{x = 4}$ quay quanh trục $\boldsymbol{Ox}$.

3) $\boldsymbol{y^2 + x - 4 = 0}$ quay quanh trục $\boldsymbol{Oy}$.

4) $\boldsymbol{y = \arcsin x}$, $\boldsymbol{x = 1}$, $\boldsymbol{y = 0}$ quay quanh trục $\boldsymbol{Oy}$.

6. Tính diện tích mặt tròn xoay khi quay các đường cong sau đây:

1) $\boldsymbol{x^2 + y^2 = R^2}$ quay quanh trục $\boldsymbol{Oy}$.

2) $y = x^2$, $0 \le x \le 1$ quay quanh trục Ox.

3) $y = \tan x$, $0 \le x \le \dfrac{\pi}{4}$ quay quanh trục Ox.

4) $y^2 = 4 + x$, $-4 \le x \le 2$ quay quanh trục Ox.

5) $y^2 = 2(x-1)$, $0 \le y \le 1$ quay quanh trục Oy.

6) đường astroid $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ quay quanh trục Oy.

7) đường astroid $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ quay quanh trục Ox.

7. Tính độ dài các cung sau:

1) $y = \ln(1 - x^2)$ với $0 \le x \le \frac{1}{2}$.

2) $y = \ln x$ với $2\sqrt{2} \le x \le 2\sqrt{6}$.

3) $y = \dfrac{x}{6}\sqrt{x + 12}$ với $11 \le x \le 39$.

4) $2y = x^2 - 2$ gồm giữa các giao điểm của nó với trục Ox.

5) $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $a > 0$, $0 \le t \le 2\pi$.

6) $\left(\dfrac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\dfrac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$, $a > 0$, $b > 0$.