Chương 3. Ánh xạ tuyến tính

§1. Ánh xạ tuyến tính

§2. Ma trận của ánh xạ tuyến tính

§3. Giá trị riêng và vectơ riêng

§1. Ánh xạ tuyến tính

Định nghĩa. Cho hai không gian vectơ V và W. Một ánh xạ f: $V \to W$

được gọi là một ánh xạ tuyến tính nếu f thoả mãn:

$i)\ f(u+v) = f(u) + f(v),$

$ii)\ f(au) = af(u),$

với $\forall\ a \in \mathbb{R}, \forall u, v\ \in V.$

§1. Ánh xạ tuyến tính

Định nghĩa. Cho hai không gian vectơ V và W. Một ánh xạ f: $V \to W$ được gọi là một ánh xạ tuyến tính nếu f thoả mãn:

$i)\ f(u+v) = f(u) + f(v),$

$ii)\ f(au) = af(u),$

với $\forall\, a \in \mathbb{R}, \forall u, v \in V$.

Nếu $V \equiv W$ thì f được gọi là một toán tử tuyến tính của V.

Ví dụ 1. Ánh xạ *f* nào dưới đây là ánh xạ tuyến tính?

a) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ xác định bởi $f(x;\ y) = (x;\ x + 2y; 2x)$.

Giải:

Ví dụ 1. Ánh xạ *f* nào dưới đây là ánh xạ tuyến tính?

a) $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ xác định bởi $f(x;\ y) = (x;\ x + 2y; 2x)$.

Giải: $*$ Với $u, v \in \mathbb{R}^2$ thì $u = (x_1; x_2)$ và $v = (y_1; y_2)$.

$$\Longrightarrow u + v = (x_1 + y_1; x_2 + y_2)$$

$$\Longrightarrow f(u + v) = (x_1 + y_1; x_1 + y_1 + 2x_2 + 2y_2; 2x_1 + 2y_1).$$

$$\begin{aligned} f(u) + f(v) &= (x_1; x_1 + 2x_2; 2x_1) + (y_1; y_1 + 2y_2;\ 2y_1) \\ &= (x_1 + y_1; x_1 + 2x_2 + y_1 + 2y_2; 2x_1 + 2y_1) \\ &= f(u + v). \end{aligned}$$

$*$ Với $a \in \mathbb{R}$, $au = (ax_1; ax_2)$

$$\Longrightarrow f(au) = (ax_1; ax_1 + 2ax_2; 2ax_1) = a(x_1; x_1 + 2x_2; 2x_1) = af(u).$$

Vậy *f* là một ánh xạ tuyến tính.

b) $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ xác định bởi $f(x;\ y;\ z) = (x + y + z;\ 2x + y)$.

c) $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ xác định bởi $f(x;\ y;\ z) = (x + y; 1 + z;\ 2x + y)$.

Ví dụ 2. Chứng minh rằng ánh xạ $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ xác định bởi

$$f(x;\ y) = (x + y;\ x - 2y)$$

là một toán tử tuyến tính.

Nhận xét.

1. $(i) + (ii) \Leftrightarrow f(au + bv) = af(u) + bf(v), \forall\, u, v \in V, \forall\, a, b \in \mathbb{R}$.

Nhận xét.

1. $(i) + (ii) \Leftrightarrow f(au + bv) = af(u) + bf(v), \forall\, u, v \in V, \forall\, a, b \in \mathbb{R}$.

2. Nếu $f: V \to W$ là một ánh xạ tuyến tính thì $f(0) = 0$.

Nhận xét.

1. $(i) + (ii) \Leftrightarrow f(au + bv) = af(u) + bf(v), \forall\, u, v \in V, \forall\, a, b \in \mathbb{R}$.

2. Nếu $f\colon V \to W$ là một ánh xạ tuyến tính thì $f(0) = 0$.

Ví dụ. Cho $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ xác định bởi

$$f(x;\ y;\ z) = (x + y; 1 + z;\ 2x + y).$$

Ta có: $f(0; 0; 0) = (0 + 0 + 0; 0 + 1) = (0; 1) \neq (0; 0)$.

$\Longrightarrow f$ không phải là một ánh xạ tuyến tính.

§2. Ma trận của ánh xạ tuyến tính

Định nghĩa. Cho ánh xạ tuyến tính $f: V \to W$. Giả sử $\mathrm{E} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ và $\mathrm{F} = (f_1, f_2, \dots, f_m)$ lần lượt là các cơ sở của V và W. Ma trận của hệ vectơ $\big(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)\big)$ theo cơ sở F được gọi là ma trận của f theo cơ sở E và F.

§2. Ma trận của ánh xạ tuyến tính

Định nghĩa. Cho ánh xạ tuyến tính $f: V \rightarrow W$. Giả sử $\mathrm{E} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ và $\mathrm{F} = (f_1, f_2, \dots, f_m)$ lần lượt là các cơ sở của V và W. Ma trận của hệ vectơ $\big(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)\big)$ theo cơ sở F được gọi là ma trận của f theo cơ sở E và F.

Trường hợp riêng: Ánh xạ tuyến tính f: $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Ma trận A của f theo các cơ sở chính tắc $(e_1, e_2, \dots, e_n), (f_1, f_2, \dots, f_m)$ được gọi là ***ma trận chính tắc*** của f.

Ví dụ 2. Tìm ma trận chính tắc của ánh xạ tuyến tính $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi $f(x;y) = (x+y;\ x-y;\ 2x+y)$.

Giải: Cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^2$ là $\{e_1 = (1;0), e_2 = (0;1)\}$.

Bước 1: Tìm $f(e_1), f(e_2)$.

$$f(e_1) = f(1;0) = (1+0; 1-0; 2.1+0) = (1;1;2).$$

$$f(e_2) = f(0;1) = (0+1; 0-1; 2.0+1) = (1;-1;1).$$

Bước 2: Ma trận của f theo cơ sở chính tắc là $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

Ví dụ 3. Tìm ma trận chính tắc của ánh xạ tuyến tính $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi $f(x; y; z) = (x + y + z;\ x - 2y)$.

§3. Giá trị riêng và vectơ riêng

Định nghĩa. Cho A là ma trận vuông cấp n. Số thực λ được gọi là một *giá trị riêng* của A nếu phương trình $Ax = \lambda x$, với $x \in \mathbb{R}^n$ (được viết dưới dạng cột) có nghiệm $x \neq 0$.

Vectơ x được gọi là *vectơ* riêng ứng với giá trị riêng λ.

§3. Giá trị riêng và vectơ riêng

Định nghĩa. Cho A là ma trận vuông cấp n. Số λ được gọi là một *giá trị riêng* của A nếu phương trình $Ax = \lambda x$, với $x \in \mathbb{R}^n$ (được viết dưới dạng cột) có nghiệm $x \neq 0$.

Vectơ x được gọi là *vectơ* riêng ứng với giá trị riêng λ.

Ví dụ 1. Cho $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$.

§3. Giá trị riêng và vectơ riêng

Định nghĩa. Cho A là ma trận vuông cấp n. Số λ được gọi là một *giá trị riêng* của A nếu phương trình $Ax = \lambda x$, với $x \in \mathbb{R}^n$ (được viết dưới dạng cột) có nghiệm $x \neq 0$.

Vectơ x được gọi là *vectơ* riêng ứng với giá trị riêng λ.

Ví dụ 1. Cho $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$.

Ta có: $A \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

§3. Giá trị riêng và vectơ riêng

Định nghĩa. Cho A là ma trận vuông cấp n. Số λ được gọi là một *giá trị riêng* của A nếu phương trình $Ax = \lambda x$, với $x \in \mathbb{R}^n$ (được viết dưới dạng cột) có nghiệm $x \neq 0$.

Vectơ x được gọi là *vectơ* riêng ứng với giá trị riêng λ.

Ví dụ 1. Cho $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$.

Ta có: $A \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Đặt $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Longrightarrow Ax = 3x$.

$\Longrightarrow x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ là một vectơ riêng của A ứng với giá trị riêng $\lambda = 3$.

Cách tìm giá trị riêng và vectơ riêng của một ma trận:

Bước 1: Viết *phương trình đặc trưng* $\det(A - \lambda I) = 0$.

Bước 2: Giải phương trình đặc trưng (tìm λ): $\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$.

$\Longrightarrow \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ là các giá trị riêng của A.

Bước 3: Ứng $\lambda = \lambda_i$, giải hệ phương trình:

$$(A - \lambda_i I)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = 0$$

$\Longrightarrow \mathrm{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \neq 0$ là vectơ riêng ứng với giá trị riêng λ_i.

Ví dụ 2. Tìm giá trị riêng và vectơ riêng của ma trận $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$.

Giải. Ta có: $(A - \lambda I) = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-\lambda & 0 \\ 8 & -1-\lambda \end{bmatrix}$

Ví dụ 2. Tìm giá trị riêng và vectơ riêng của ma trận $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$.

Giải. Ta có: $(A - \lambda I) = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-\lambda & 0 \\ 8 & -1-\lambda \end{bmatrix}$

$\Longrightarrow \det(A - \lambda I) = (3-\lambda)(-1-\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 3;\ \lambda = -1.$

Ví dụ 2. Tìm giá trị riêng và vectơ riêng của ma trận $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$.

Giải. Ta có: $(A - \lambda I) = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-\lambda & 0 \\ 8 & -1-\lambda \end{bmatrix}$

$\Longrightarrow \det(A - \lambda I) = (3-\lambda)(-1-\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 3;\ \lambda = -1.$

Với $\lambda = 3$, thay vào phương trình $(A - \lambda I)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$, ta được

$$(A - 3I)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3-3 & 0 \\ 8 & -1-3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 8 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ví dụ 2. Tìm giá trị riêng và vectơ riêng của ma trận $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$.

Giải. Ta có: $(A - \lambda I) = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-\lambda & 0 \\ 8 & -1-\lambda \end{bmatrix}$

$\Longrightarrow \det(A - \lambda I) = (3-\lambda)(-1-\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 3;\ \lambda = -1.$

Với $\lambda = 3$, thay vào phương trình $(A - \lambda I)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$, ta được

$(A - 3I)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3-3 & 0 \\ 8 & -1-3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 8 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\Leftrightarrow 8x_1 - 4x_2 = 0 \Leftrightarrow x_2 = 2x_1$. Suy ra $(x_1, x_2) = x_1(2,1)$, với $x_1 \neq 0$.

Với $\lambda = -1$, thay vào phương trình $(A - \lambda I)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$, ta được

$$(A + I)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3+1 & 0 \\ 8 & -1+1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\Leftrightarrow 4x_1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$. Suy ra $(x_1, x_2) = (0, x_2) = x_2(0,1)$, với $x_2 \neq 0$.

Định nghĩa. Giả sử một toán tử tuyến tính f có ma trận A theo một cơ sở nào đó. Khi đó giá trị riêng và vectơ riêng của A cũng được gọi là giá trị riêng và vectơ riêng của f.

Ví dụ 3. Tìm giá trị riêng và vectơ riêng của của toán tử tuyến tính $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi $f(x; y) = (x + 4y; 2x + 3y)$.

Bài tập.

1. Ánh xạ f nào dưới đây là ánh xạ tuyến tính?

a) $f(x, y) = (x, x + 2y)$.

b) $f(x, y, z) = (x^2, x - y, z)$.

c) $f(x, y) = (x + 1, 2y)$.

d) $f(x, y, z) = (x + 2y + 3z, z^3 + 1)$.

2. Tìm ma trận chính tắc của mỗi ánh xạ tuyến tính sau:

a) $T(x, y) = (y, -x, x + 3y, x - y)$.

b) $T(x, y, z, t) = (7x - 2y - z + t, y + z, -x)$.

c) $T(x, y, z) = (0, 0, 0, 0, 0)$.

d) $T(x, y, z, t) = (t, x, z, y, y - z)$.

3. Tìm các giá trị riêng và vector riêng tương ứng của các ma trận sau:

a) $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 10 & -9 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$