CỰC TRỊ CỦA HÀM NHIỀU BIẾN

Công cụ bổ trợ:

1) Quy tắc đạo hàm và đạo hàm hàm số cơ bản (xem lại)

2) Tìm cực trị của hàm số một biến (xem lại)

3) Tính đạo hàm riêng cấp một và cấp hai

CÁC BƯỚC TÌM CỰC TRỊ TỰ DO

Cho hàm số $z = z(x, y)$. Tìm các điểm cực trị của z.

Bước 1: **Tính z'_x, z'_y. Tìm tọa độ các điểm tới hạn: Giải hệ** $\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases}$.

Bước 2: **Tính $A = z''_{xx}$, $B = z''_{xy}$, $C = z''_{yy}$. Tính $B^2 - AC$.**

Lấy $M_0(x_0; y_0)$ là điểm tới hạn ở Bước 1 đã tìm. Tính $B^2 - AC$, A tại M_0 và kết luận.

Ta có bảng ghi nhớ sau:

$B^2 - AC$	A	Kết luận về điểm M_0
$-$	$-$	Hàm đạt cực đại (hay M_0 là điểm cực đại)
$-$	$+$	Hàm đạt cực tiểu (hay M_0 là điểm cực tiểu)
$+$		Hàm không đạt cực trị (hay M_0 không phải điểm cực trị)
0		Chưa KL được (cần xét thêm)

VD 1. Tìm điểm cực trị của hàm số $z = x^3 + y^3 - 3xy$.

Giải: $\boxed{z = x^3 + y^3 - 3xy}$

Ta có $z'_x = 3x^2 - 3y;\quad z'_y = 3y^2 - 3x.$

Tọa độ của điểm tới hạn là nghiệm của hệ $\begin{cases} x^2 - y = 0, \\ y^2 - x = 0. \end{cases}$

Giải hệ, tìm được hai điểm tới hạn $M_0(0;0)$, $M_1(1;1)$.

Lại có $\begin{cases} A = z''_{x^2} = 6x \\ B = z''_{xy} = -3 \\ C = z''_{y^2} = 6y \end{cases} \Rightarrow \boxed{B^2 - AC = 9 - 36xy}$

– tại $M_0(0;0)$ có $B^2 - AC = 9 > 0$ nên M_0 không là điểm cực trị.

– tại $M_1(1;1)$ có $B^2 - AC = 9 - 36 = -27 < 0$, $A = 6 > 0$ nên M_1 là điểm cực tiểu và $z_{\min} = 1 + 1 - 3 = -1$.

VD 2. **Tìm cực trị của hàm số $z = 10 - x^4 - y^4$.**

Giải: $\boxed{\text{Tìm cực trị của hàm số } z = 10 - x^4 - y^4}$

Ta có $z'_x = -4x^3$, $z'_y = -4y^3$.

Điểm tới hạn là $M(0;0)$.

Ta có $A = z''_{x^2} = -12x^2, B = z''_{xy} = 0, C = z''_{y^2} = -12y^2$.

Suy ra $B^2 - AC = -144x^2y^2$.

Tại $M(0;0)$, ta có $B^2 - AC = 0$; chưa kết luận được.

Ta có $z(M) = 10$ và

$$z(x,y) - z(M) = 10 - (x^4 + y^4) - 10 = -(x^4 + y^4) \leq 0, \forall (x,y),$$

vậy M là điểm cực đại, $z_{\max} = 10$.

VD 3. Tìm cực trị của hàm số $z = x^3 + y^3$.

Giải: $\boxed{\text{Tìm cực trị của hàm số } z = x^3 + y^3}$

Ta có $z'_x = 3x^2; \quad z'_y = 3y^2.$

Vậy hàm số chỉ có một điểm tới hạn $M(0,0)$.

Ta có $A = z''_{x^2} = 6x, B = z''_{xy} = 0, C = z''_{y^2} = 6y.$

Suy ra $B^2 - AC = -36xy.$

Tại $M(0;0)$**, ta có** $B^2 - AC = 0$**; do đó chưa kết luận ngay được.**

Lấy $(x;y)$ **thuộc một hình tròn tâm** $M(0;0)$ **nào đó.**

Ta thấy $z(M) = 0$ **và** $z(x,y) - z(M) = x^3 + y^3.$

Hiệu này dương nếu $(x;y)$ **nằm trong góc phần tư thứ nhất và âm nếu** $(x;y)$ **nằm trong góc phần tư thứ ba. Do đó** M **không là điểm cực trị.**

CỰC TRỊ CÓ ĐIỀU KIỆN CỦA HÀM 2 BIẾN

Tìm cực trị của hàm số $z = f(x, y)$ với điều kiện $g(x, y) = 0$.

1. Phương pháp chuyển về tìm cực trị hàm một biến số

Quy trình thực hiện:

1) Biến đổi điều kiện $g(x, y) = 0$ về dạng $y = h(x)$.

Chú ý: Nếu biến đổi về dạng $x = h(y)$ thì làm tương tự.

Sau đó, thay $y = h(x)$ vào $z = f(x, y)$, ta nhận được hàm một biến

$$g(x) = f(x, h(x))$$

2) Tìm cực trị của hàm $g(x)$ trên $D = \{x \in \mathbb{R} \mid h(x)$ có nghĩa$\} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid g(x)$ có nghĩa$\}$. (D là giao của tập xác định hàm $h(x)$ và $g(x)$)

Để tìm cực trị, ta có thể lập bảng biến thiên của $g(x)$ trên D: Tính $g'(x)$;

tìm x sao cho $g'(x) = 0$ hoặc $g(x)$ không có đạo hàm; lập bảng biến thiên (ghi nhớ: $g' > 0$ trên (a, b), hàm đồng biến; còn $g' < 0$ trên (a, b), hàm nghịch biến)

3) Kết luận: Nếu $x_0 \in D$ là cực đại của $g(x)$ thì $f(x, y)$ đạt cực đại có điều kiện tại điểm $(x_0, h(x_0))$ và tính giá trị cực đại $z_0 = f(x_0, h(x_0) = g(x_0)$.

Nếu $x_0 \in D$ là cực tiểu của $g(x)$ thì $f(x, y)$ đạt cực tiểu có điều kiện tại điểm $(x_0, h(x_0))$ và tính giá trị cực tiểu $z_0 = f(x_0, h(x_0) = g(x_0)$.

VD 4. **Tìm cực trị của hàm $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ với điều kiện $x + y - 1 = 0$.**

Giải: Ta có $x + y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = 1 - x,$ (với $\forall x \in \mathbb{R}$). Suy ra

$$h(x) = z(x, 1-x) = \sqrt{1 - x^2 - (1-x)^2} = \sqrt{2}.\sqrt{x - x^2},$$

(với $0 \leq x \leq 1$).

Ta thấy $h'(x) = \dfrac{(1-2x)\sqrt{2}}{2\sqrt{x - x^2}}.$ Suy ra $h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}.$ Bảng biến thiên của $h(x)$ trên $[0, 1]$ như sau

x	0		$\frac{1}{2}$		1
$h'(x)$	$\parallel$	$+$	0	$-$	$\parallel$
$h(x)$	0	$\nearrow$	$h(\frac{1}{2})$	$\searrow$	0

Do đó, $h(x)$ đạt cực đại tại $x = \dfrac{1}{2}.$ Với $x = \dfrac{1}{2}$, ta tính được $y = 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}.$ Vậy z đạt cực đại điều kiện tại điểm $M(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ và giá trị cực đại là $z_{\max} = \frac{1}{\sqrt{2}} = z\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$

2. Phương pháp nhân tử Lagrange cho hàm hai biến

Bài toán: Tìm các điểm cực trị của hàm số $z = f(x, y)$ thỏa mãn $g(x, y) = 0$.

Quy trình thực hiện: (nhớ viết lại điều kiện dạng $g = 0$ với $g = g(x, y)$)

Bước 1: Lập hàm nhân tử Lagrange: $L = L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$.

Bước 2: Tính các đạo hàm riêng cấp một: L'_x, L'_y, L'_λ. Cụ thể, $L'_x = f'_x + \lambda.g'_x$, $L'_y = f'_y + \lambda.g'_y$, $L'_\lambda = g(x, y)$.

Bước 3: Giải hệ $\begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \\ L'_\lambda = 0 \end{cases}$ $\to$ các nghiệm viết dưới dạng: $(x, y, \lambda) = (x_0, y_0, \lambda_0)$.

Bước 4: **Tính $g'_x, g'_y, L''_{x^2}, L''_{xy}, L''_{y^2}$.**

Bước 5: Kết luận: **Xét tại các nghiệm của hệ ở Bước 3. Cách làm như sau:**

- **Tại $(x, y, \lambda) = (x_0, y_0, \lambda_0)$.**

- Tính giá trị của $g'_x, g'_y, L''_{x^2}, L''_{xy}, L''_{y^2}$. (Cách tính: thay x, y, λ vào các biểu thức này)

- Tính vi phân toàn phần cấp hai

$$d^2L = L''_{x^2}(dx)^2 + 2L''_{xy}dxdy + L''_{y^2}(dy)^2,$$

trong đó dx, dy thỏa mãn đồng thời hai điều kiện

a) $(dx)^2 + (dy)^2 > 0$

b) $g'_x.dx + g'_y.dy = 0$.

- Từ $g'_x.dx + g'_y.dy = 0$, rút $dy = m.dx$ (cũng có thể rút $dx = m.dy$, khi đó cách làm tương tự).

- Thay dy vào d^2L, sau đó xét dấu của d^2L theo dx.

- Kết luận:

+) Nếu $d^2L > 0$ với mọi dx (thường $dx \neq 0$) thì hàm số $f(x, y)$ đạt cực tiểu có điều kiện tại điểm (x_0, y_0) và giá trị cực tiểu là $f_{\min} = f(x_0, y_0)$.

+) Nếu $d^2L < 0$ với mọi dx (thường $dx \neq 0$) thì hàm số $f(x, y)$ đạt cực đại có điều kiện tại điểm (x_0, y_0) và giá trị cực đại là $f_{\max} = f(x_0, y_0)$.

VD 5. **Tìm cực trị của hàm $f(x, y) = 2x + 2y$ với điều kiện $x^2 + y^2 = 2$.**

Giải: **Viết lại điều kiện dưới dạng** $g(x, y) = x^2 + y^2 - 2 = 0$.

Hàm Lagrange $L = f(x, y) + \lambda g(x, y) = 2x + 2y + \lambda(x^2 + y^2 - 2)$.

Ta có $L'_x = 2 + 2\lambda x, L'_y = 2 + 2\lambda y$ **và** $L'_\lambda = x^2 + y^2 - 2$.

Hệ $\begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \\ L'_\lambda = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \lambda x = 0 \\ 1 + \lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{\lambda} \\ y = -\frac{1}{\lambda} \\ \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} - 2 = 0 \end{cases}$

Giải hệ, ta nhận được $(x, y, \lambda) = (1, 1, -1)$ **hoặc** $(-1, -1, 1)$.

Tính các đạo hàm riêng:

$$g'_x = 2x,\ g'_y = 2y,\ L''_{x^2} = 2\lambda,\ L''_{xy} = 0,\ L''_{y^2} = 2\lambda.$$

+) Tại $(x, y, \lambda) = (1, 1, -1)$, tức $x = 1, y = 1, \lambda = -1$. Ta có $g'_x = 2, g'_y = 2, L''_{x^2} = -2, L''_{xy} = 0, L''_{y^2} = -2$. Do đó,

$d^2L = L''_{x^2}(dx)^2 + 2L''_{xy}dxdy + L''_{y^2}(dy)^2 = 2.(-1)(dx)^2 + 2.(-1)(dy)^2 < 0,$

với mọi dx, dy thỏa mãn $(dx)^2 + (dy)^2 > 0$ và $g'_x.dx + g'_y.dy \Leftrightarrow 2dx + 2dy = 0$.

Hàm đạt cực đại có điều kiện tại điểm $(1, 1)$ và giá trị cực đại là $f_{\max} = f(1, 1) = 4$.

+) Tại $(x, y, \lambda) = (-1, -1, 1)$, tức $x = -1, y = -1, \lambda = 1$. Ta có $g'_x = -2, g'_y = -2, L''_{x^2} = 2, L''_{xy} = 0, L''_{y^2} = 2$. Do đó,

$$d^2L = L''_{x^2}(dx)^2 + 2L''_{xy}dxdy + L''_{y^2}(dy)^2 = 2.1(dx)^2 + 2.1(dy)^2 > 0,$$

với mọi dx, dy thỏa mãn $(dx)^2 + (dy)^2 > 0$ và $g'_x.dx + g'_y.dy \Leftrightarrow -2dx -$

$2dy = 0.$

Hàm đạt cực tiểu có điều kiện tại điểm $(-1,-1)$ và giá trị cực tiểu là $f_{\min} = f(-1,-1) = -4.$

VD 6. Tìm cực trị của hàm $f(x, y) = xy + 2x$ với điều kiện

$$g(x, y) = 8x + 4y - 120 = 0.$$

Giải: Lập hàm Lagrange

$$L(x, y, \lambda) = xy + 2x + \lambda(8x + 4y - 120).$$

Giải hệ $\begin{cases} \boldsymbol{L'_x = 0} \\ \boldsymbol{L'_y = 0} \\ \boldsymbol{L'_\lambda = 0} \end{cases}$ được một nghiệm $\boldsymbol{x = 8}$, $\boldsymbol{y = 14}$, $\boldsymbol{\lambda = -2}$.

Tại $\boldsymbol{x = 8}$, $\boldsymbol{y = 14}$ và $\boldsymbol{\lambda = -2}$, tính được $\boldsymbol{g'_x = 8, \ g'_y = 4, \ L''_{x^2} = 0, \ L''_{xy} = 1, \ L''_{y^2} = 0.}$ Do đó

$$\boldsymbol{d^2L = L''_{x^2}(dx)^2 + 2L''_{xy}dxdy + L''_{y^2}(dy)^2 = 2dxdy,}$$

trong đó $\boldsymbol{dx, dy}$ thỏa mãn $\boldsymbol{(dx)^2 + (dy)^2 > 0}$ và $\boldsymbol{g'_x dx + g'_y dy = 0}$ hay $\boldsymbol{8dx + 4dy = 0.}$

Từ $\boldsymbol{(dx)^2 + (dy)^2 > 0}$ và $\boldsymbol{8dx + 4dy = 0,}$ ta nhận được $\boldsymbol{dy = -2dx}$ (với $\boldsymbol{dx \neq 0}$) và thay vào $\boldsymbol{d^2L}$ nên ta có

$$\boldsymbol{d^2L = 2dx(-2dx) = -4(dx)^2 < 0}$$

với mọi $dx \neq 0$. Vậy hàm đạt cực đại có điều kiện tại điểm $(8, 14)$ và $f_{\max} = f(8, 14) = 128$.

VD 7. Tìm cực trị của hàm $f(x, y) = 8x + 15y + 28$ với điều kiện

$$g(x, y) = 2x^2 + 3y^2 - 107 = 0.$$

Giải: Lập hàm Lagrange $L = L(x, y, \lambda) = 8x + 15y + 28 + \lambda(2x^2 + 3y^2 - 107)$.

Giải hệ gồm ba phương trình $L'_x = L'_y = L'_\lambda = 0$ được $(x, y, \lambda) = \left(4, 5, -\frac{1}{2}\right)$ hoặc $\left(-4, -5, \frac{1}{2}\right)$.

Tính các đạo hàm riêng:

$$g'_x = 4x,\ g'_y = 6y,\ L''_{xx} = 4\lambda,\ L''_{xy} = 0,\ L''_{yy} = 6\lambda.$$

$$d^2L = L''_{x^2}(dx)^2 + 2L''_{xy}dxdy + L''_{y^2}(dy)^2 = 4\lambda(dx)^2 + 6\lambda(dy)^2,$$

trong đó $\boldsymbol{dx, dy}$ thỏa mãn $\boldsymbol{(dx)^2 + (dy)^2 > 0}$ và $\boldsymbol{g'_x dx + g'_y dy = 0}$ hay $\boldsymbol{4xdx + 6ydy = 0.}$

Tại $(x, y, \lambda) = \left(4, 5, -\dfrac{1}{2}\right)$, tức $x = 4, y = 5, \lambda = -\dfrac{1}{2}$. Ta có

$$d^2L = 4.\left(-\frac{1}{2}\right)(dx)^2 + 6.\left(-\frac{1}{2}\right)(dy)^2 < 0,$$

với mọi dx, dy thỏa mãn $(dx)^2 + (dy)^2 > 0$ và $4.4dx + 6.5dy = 0.$

Do đó hàm đạt cực đại có điều kiện tại điểm $(4, 5)$ và $f_{\max} = f(4, 5) = 135.$

Tại $(x, y, \lambda) = \left(-4, -5, \dfrac{1}{2}\right)$, tức $x = -4, y = -5, \lambda = \dfrac{1}{2}$. Ta có

$$d^2L = 4.\left(\frac{1}{2}\right)(dx)^2 + 6.\left(\frac{1}{2}\right)(dy)^2 > 0,$$

với mọi dx, dy thỏa mãn $(dx)^2 + (dy)^2 > 0$ và $4.(-4)dx + 6.(-5)dy = 0.$

Do đó hàm đạt cực tiểu có điều kiện tại điểm $(-4, -5)$ và $f_{\min} = f(-4, -5) = -79$.

BT 1.

a) Tìm cực trị của hàm $\boldsymbol{f(x,y) = 3x + 4y}$ với điều kiện

$$\boldsymbol{g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0.}$$

b) Tìm cực trị của hàm $\boldsymbol{z = xy}$ với điều kiện

$$\boldsymbol{(x-1)^2 + y^2 = 1.}$$

Đáp Số:

a) Kết luận: $\boldsymbol{f_{\max} = f\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) = 5,}$ $\boldsymbol{f_{\min} = f\left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right) = -5.}$

b) Kết luận $\boldsymbol{z_{\max} = z\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4},}$ $\boldsymbol{z_{\min} = z\left(\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{4}.}$