

§2. Định thức

2.1. Định nghĩa.

Giả sử A là ma trận vuông cấp n:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Định thức của A, kí hiệu là $\det(A)$ hoặc $|A|$:

+ Nếu A là ma trận cấp 1, $A = [a_{11}]$ thì $\det(A) = a_{11}$

VD: $A = [-3] \Rightarrow \det A = |-3| = -3$

+ Nếu A là ma trận cấp 2 thì: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$.

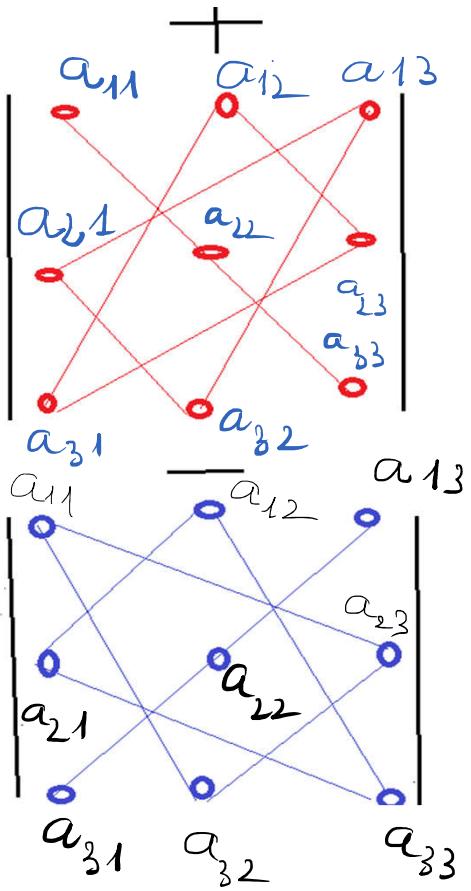
VD $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 3 \cdot 5 = -13$

+ Nếu A là ma trận cấp 3 thì:

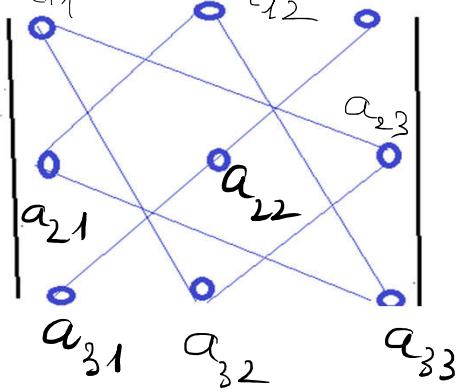
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{32}a_{21} - a_{13}a_{31}a_{22} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

$$A^+ + A^-$$

$$A^+ - A^-$$



$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{32}a_{21} = A^+$$



$$= -a_{13}a_{31}a_{22} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{12}a_{21}a_{33}. = A^-$$

$\checkmark D$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 3 + 0 \cdot 1 \cdot 3 - 3 \cdot 1 \cdot 3 - 0 \cdot 2 \cdot 1 - 1 \cdot 2 \cdot 1$$

$$= 1 + 12 - 9 - 2 = 2.$$

D

a)
$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 2 + (-2) \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \cdot 1$$
$$- 1 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 2 \cdot 2 - 0 \cdot 1 \cdot 1$$
$$= 3$$

b)
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \cdot 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot (-2)$$
$$- 1 \cdot 2 \cdot (-2) - 1 \cdot 1 \cdot 0 - 1 \cdot 1 \cdot (-1)$$
$$= 0 + 1 - 2 + 4 - 0 + 1$$
$$= 4$$

Ví dụ.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} = 8 - (-5) = 13$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 4 + 1 - 2 + 2 + 1 = 7$$

+ Nếu A là ma trận cấp $n \geq 2$:

$$\det(A) = a_{11} \det(M_{11}) - a_{12} \det(M_{12}) + \cdots + (-1)^{1+n} a_{1n} \det(M_{1n}),$$

ở đó M_{1j} = ma trận A sau khi bỏ đi dòng 1 và cột j.

Ta gọi đó là khai triển định thức theo dòng 1.

$$\begin{aligned}
 \text{VD: } & \left| \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right| = 1 \cdot \left| \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right| - 2 \cdot \left| \begin{array}{ccc} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right| + 3 \cdot \left| \begin{array}{cc} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{array} \right| \\
 & = 1 \left| \begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{array} \right| - 2 \left| \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{array} \right| + 3 \left| \begin{array}{cc} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{array} \right| \\
 & = (2 \cdot 1 - 1 \cdot 1) - 2(0 \cdot 1 - 1 \cdot 1) + 3(0 \cdot 1 - 1 \cdot 2) \\
 & = 1 - 2 \cdot (-1) + 3 \cdot (-2) = -3.
 \end{aligned}$$

VD:

$$\left| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right|$$

$$= 1 \left| \begin{array}{ccc} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right| - 1 \left| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right| + 0 \left| \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right| - (-1) \left| \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right|$$

$$= (2 - 1 - 2) - (1 + 1 - 0 - 1) + (-2 - 1)$$

$$= -1 - 1 - 3 = -5.$$

Chú ý: Đặt $M_{ij} = \text{ma trận A sau khi bỏ đi dòng thứ } i \text{ và cột } j$. Ta có thể khai triển định thức của ma trận A theo một **dòng i bất kì**.

$$\det(A) = (-1)^{i+1} a_{i1} \det(M_{i1}) + (-1)^{i+2} a_{i2} \det(M_{i2}) + \cdots + (-1)^{i+n} a_{in} \det(M_{in}).$$

$$\begin{aligned}
 & \text{VD} \quad \left| \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right| = (-1)^{\downarrow+1} \cdot 1 \cdot \left| \begin{array}{ccc} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \right| + 0 \left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \right| \\
 & \quad - 2 \left| \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \right| + (-1) \left| \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right| \\
 & \equiv - (1 + 3 - 1 - 2) - 2(2 + 1 - 3 - 1) - (3 + 2 + 1 - 3 - 2 - 1) \\
 & \equiv -1 - 2 \cdot (-1) - 0 = 1.
 \end{aligned}$$

Ví dụ. Tính định thức:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

Khai triển D theo các phần tử của dòng thứ nhất ta có:

$$D = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + (-1)(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} + 2(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 13$$

2.2. Tính chất

1) $\det(A^c) = \det(A)$.

Nhận xét: - Có thể khai triển định thức theo dòng hoặc cột

$$\det(A) = (-1)^{1+j} a_{1j} \det(M_{1j}) + (-1)^{2+j} a_{2j} \det(M_{2j}) + \cdots + (-1)^{n+j} a_{nj} \det(M_{nj}).$$

VD :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= (3 + 1 - 6) = -2.$$

- Nếu A là ma trận tam giác trên hoặc tam giác dưới thì $\det(A)$ bằng tích các phần tử trên đường chéo chính.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn} \Rightarrow \det I = 1$$

2) Giả sử D là một định thức cấp n

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

a) Nếu đổi với một dòng thứ i nào đó; $1 \leq i \leq n$, ta có:

$$a_{ij} = a'_{ij} + a''_{ij} (j = 1, 2, \dots, n)$$

thì $D = D' + D''$ trong đó:

$$D' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \dots & a'_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, D'' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a''_{i1} & a''_{i2} & \dots & a''_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

- b) Nếu đổi với một dòng thứ i nào đó ($1 \leq i \leq n$), ta có $a_{ij} = \lambda a'_{ij}$, $j = 1, 2, \dots, n$ với λ nào đó thuộc \mathbb{K} , thì $D = \lambda D'$, trong đó D' có dạng ở trên.
- c) Nếu có hai dòng i và k trùng nhau, tức $a_{ij} = a_{kj}$ ($1 \leq j \leq n$) thì $D = 0$.

3) Nếu ta đổi chỗ hai dòng (cột) của định thức cho nhau thì định thức đổi dấu.

4) Một định thức bằng 0 nếu thỏa mãn một trong các điều kiện sau:

- Một dòng (cột) bằng không.
- Hai dòng (cột) tỉ lệ với nhau, nghĩa là có hai dòng i và k sao cho: $a_{ij} = \lambda a_{kj}, j = 1, 2, \dots, n$ với λ nào đó.
- Một dòng (cột) là tổ hợp tuyến tính của các dòng (cột) còn lại.

6) Nếu ta cộng vào một dòng của một định thức một tổ hợp tuyến tính
của các dòng khác thì định thức không thay đổi

7) Nếu nhân vào một dòng (cột) của định thức với số thực k thì định thức gấp lên k lần.

8) $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$ với mọi ma trận vuông A, B cấp n .

VD $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B = (1-6) \cdot (1-0) = -5$$

Hết quả: $\det A^n = (\det A)^n$

VD $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Tính $\det(A^{2023}) = ?$

Giai $\det A = 1-2 = -1$

$$\Rightarrow \det A^{2023} = (\det A)^{2023} = (-1)^{2023} = -1$$

Ví dụ. a) Tính định thức của ma trận vuông cấp 3 sau.

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} ((-3) \times D1 + D2, 2 \times D1 + D3) \\ &= - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} (\text{đổi chỗ hai dòng 2 và dòng 3}) \\ &= - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -13 \end{vmatrix} ((-4) \times D2 + D3) \\ &= 13. \end{aligned}$$

b) Tính định thức cấp 4 sau

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 3 \\ 8 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 8 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad (\text{đổi chỗ dòng 2 và dòng 4}) \\ &= - \begin{vmatrix} -7 & -5 & -2 & 0 \\ 8 & 2 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad ((-4) \times D4 + D1, (-3) \times D4 + D3) \\ &= - \begin{vmatrix} -15 & -7 & 0 & 0 \\ 12 & 3 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad (2 \times D3 + D1, (-1) \times D3 + D2) \\ &= - \begin{vmatrix} 13 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & 3 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \left(\frac{7}{3} \times D2 + D1\right) \\ &= -39. \end{aligned}$$

VD: Tinh

a)
$$\left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & \\ 3 & 2 & 1 & \\ 1 & 4 & 1 & \end{array} \right|$$

b)
$$\left| \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & \\ 2 & 1 & 2 & 0 & \\ 1 & 1 & 2 & 1 & \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \end{array} \right|$$

c)
$$\left| \begin{array}{ccccc|c} 0 & 2 & 1 & -1 & \\ 1 & 1 & 0 & 1 & \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \\ 1 & 2 & 1 & 1 & \end{array} \right|$$

Bài tập

1. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Tính AB .

b) Tính $\det(A)$.

2. Tính định thức sau

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 6 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$