

QUI TẮC L'HOSPITAL

Công cụ hỗ trợ: Xem lại quy tắc tính đạo hàm, đạo hàm của các hàm cơ bản.

QUI TẮC L'HOSPITAL (Lô-pi-tan)

Giả sử $f(x), g(x)$ là hai hàm số khả vi trong lân cận V của a (có thể trừ ra điểm $a \in (c, d)$) sao cho $g'(x) \neq 0$, với mọi $x \in V \setminus \{a\}$ và $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ (hoặc $\pm\infty$).

Nếu $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$, với L hữu hạn hoặc $L = \pm\infty$, thì

$$I = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L.$$

Chú ý 1:

★ Quy tắc L'Hospital vẫn đúng khi thay $x \rightarrow a$ bởi $x \rightarrow a^+$, $x \rightarrow a^-$ và $x \rightarrow \pm\infty$.

★ Quy tắc Lô-pi-tan có thể được áp dụng để khử dạng $\frac{0}{0}$ hoặc dạng $\frac{\infty}{\infty}$.

★ Chúng ta có thể áp dụng liên tiếp Lô-pi-tan (nếu vẫn đúng dạng), tức là

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \stackrel{(L)}{=} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \stackrel{(L)}{=} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \dots$$

VD 1. $I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{3x}$ (dạng $\frac{0}{0}$)

$$I \stackrel{(L)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos 2x}{3} = \frac{2}{3}.$$

$$\text{VD 2. } I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin 9x - \sin 11x} \quad (\text{dạng } \frac{0}{0})$$

$$\begin{aligned} I &\stackrel{(L)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \cos 5x - 3 \cos 3x}{9 \cos 9x - 11 \cos 11x} \\ &= \frac{5 - 3}{9 - 11} = -1. \end{aligned}$$

$$\text{VD 3. } I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - 2x}{x^3} \quad (\text{dạng } \frac{0}{0})$$

$$I \stackrel{(L)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos 2x - 2}{3x^2} \quad (\text{dạng } \frac{0}{0})$$

$$\stackrel{(L)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-4 \sin 2x}{6x} \stackrel{(L)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-8 \cos 2x}{6} = -\frac{4}{3}.$$

VD 4. $I = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x + 2^x)}{x}$ (dạng $\frac{\infty}{\infty}$)

$$I \stackrel{(L)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1+2^x \ln 2}{x+2^x}}{1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + 2^x \ln 2}{x + 2^x} \quad (\text{dạng } \frac{\infty}{\infty}) \stackrel{(L)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x (\ln 2)^2}{1 + 2^x \ln 2} \quad (\text{dạng } \frac{\infty}{\infty})$$

$$\stackrel{(L)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x (\ln 2)^3}{2^x (\ln 2)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln 2 = \ln 2.$$

Chú ý 3:

Khi gặp các dạng vô định $\left\{ \begin{array}{l} 0 \cdot \infty \\ \infty - \infty \\ \infty^0 \\ 1^\infty \\ 0^0 \end{array} \right. \rightarrow \text{đưa về dạng } \frac{0}{0} \text{ hoặc } \frac{\infty}{\infty}.$

VD 5. Tính giới hạn $I = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 \ln x$ (dạng $0 \cdot \infty$)

Chú ý rằng: $0 \cdot \infty = \frac{\infty}{\frac{1}{0}}$ (dạng $\frac{\infty}{\infty}$) hoặc $0 \cdot \infty = \frac{0}{\frac{1}{\infty}}$ (dạng $\frac{0}{0}$)

Giải. Ta có

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^3}} \quad (\text{dạng } \frac{\infty}{\infty}) \\ &\stackrel{(L)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-3}{x^4}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3}{-3} = 0 \end{aligned}$$

VD 6. Tính giới hạn

$$I = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right) \quad (\text{dạng } \infty - \infty)$$

Giải. Ta có

$$\begin{aligned}
 I &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x \sin x} \quad (\text{dạng } \frac{0}{0}) \\
 &\stackrel{(L)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x + x \cos x} \quad (\text{dạng } \frac{0}{0}) \\
 &\stackrel{(L)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{2 \cos x - x \sin x} = 0.
 \end{aligned}$$

VD 7. Tính giới hạn

$$I = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\tan x)^{2x} \quad (\text{dạng } 0^0)$$

Chú ý: $\lim_{x \rightarrow x_0} u^v = \lim_{x \rightarrow x_0} e^{\ln u^v} = e^{\lim_{x \rightarrow x_0} v \ln u} = \dots$

Giải. $I = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\tan x)^{2x}$ (dạng 0^0)

Ta có:

$$I = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\ln(\tan x)^{2x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} 2x \ln \tan x} = e^{2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \tan x}{\frac{1}{x}}} \quad (\text{dạng } \frac{\infty}{\infty})$$

$$\stackrel{(L)}{=} e^{2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x} \tan x}{\frac{-1}{x^2}}} = e^{2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x^2}{\sin 2x}} \quad (\text{dạng } \frac{0}{0})$$

$$\stackrel{(L)}{=} e^{2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-4x}{2 \cos 2x}} = e^{2 \cdot 0} = 1.$$

VD 8. Tính giới hạn

$$I = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{\pi} \arctan x \right)^x \quad (\text{dạng } 1^\infty)$$

Giải. **Tính giới hạn**

$$I = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{\pi} \arctan x \right)^x \quad (\text{dạng } 1^\infty)$$

Ta có:

$$I = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(\frac{2}{\pi} \arctan x \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left(\frac{2}{\pi} \arctan x \right)}{\frac{1}{x}}} \quad (\text{dạng } \frac{0}{0})$$

$$\stackrel{(L)}{=} e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{(1+x^2) \cdot \arctan x}}{\frac{-1}{x^2}}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2}{(1+x^2) \cdot \arctan x}} \quad (\text{dạng } \frac{\infty}{\infty})$$

$$\stackrel{(L)}{=} e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x}{2x \arctan x + 1}} \quad (\text{dạng } \frac{\infty}{\infty})$$

$$\stackrel{(L)}{=} e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{2 \arctan x + \frac{2x}{1+x^2}}} = e^{\frac{-2}{2 \cdot \frac{\pi}{2} + 0}} = e^{-\frac{2}{\pi}}.$$

Ghi nhớ: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = 0$, trong đó $P_n(x)$ là đa thức bậc n , $Q_m(x)$ là đa thức bậc m và $n < m$. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$

VD 9. Tính giới hạn

$$I = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\cot x)^{\frac{1}{\ln x}} \quad (\text{dạng } \infty^0)$$

Giải. Tính giới hạn

$$I = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\cot x)^{\frac{1}{\ln x}} \quad (\text{dạng } \infty^0)$$

Ta có:

$$I = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\ln x} \cdot \ln \cot x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \cot x}{\ln x}} \quad (\text{dạng } \frac{\infty}{\infty})$$

$$\stackrel{(L)}{=} e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{-1}{\sin^2 x \cot x}}{\frac{1}{x}}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-2x}{\sin 2x}} \quad (\text{dạng } \frac{0}{0})$$

$$\stackrel{(L)}{=} e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-2}{2 \cos 2x}} = e^{-1}$$