

QUAN HỆ

QUAN HỆ

1. Giới thiệu:

Các quan hệ giữa các phần tử trong các tập xảy ra theo nhiều ngữ cảnh.

Hàng ngày phải giải quyết các mối quan hệ như:

- Giữa 1 người và số điện thoại di động của người đó
- Một người làm công và tiền lương của người đó

Trong toán học các mối quan hệ như

- Giữa 1 số nguyên dương và 1 số nguyên dương khác mà nó chia hết
- Một số nguyên và một số nguyên khác mà nó đồng dư
- một số thực và một số khác lớn hơn nó
- Một số thực x và giá trị $f(x)$ trong đó f là một hàm...

Trong khoa học máy tính:

- Một chương trình và một biến mà nó sử dụng làm tham số
- Một ngôn ngữ lập trình với một câu lệnh hợp lệ trong chương trình ...

QUAN HỆ

1. Giới thiệu:

- Các quan hệ giữa các phần tử trong các tập được biểu diễn dưới dạng cấu trúc được gọi là một quan hệ, nó là một tập con của tích Đề các của các tập.
- Các quan hệ có thể được sử dụng để giải quyết các bài toán như:
 - Xác định những cặp thành phố được nối với nhau bởi các tuyến bay hàng không
 - Việc tìm một thứ tự khả thi cho các pha khác nhau của một dự án phức tạp
 - Tạo ra một phương thức hữu ích để lưu trữ thông tin trong cơ sở dữ liệu
- Các cách trực tiếp nhất để diễn tả một quan hệ giữa các phần tử thuộc 2 tập là sử dụng các cặp thứ tự được tạo bởi hai phần tử liên quan.
- Vì lý do này, các tập gồm các cặp thứ tự này được gọi là các quan hệ hai ngôi.

QUAN HỆ

2. Định nghĩa 1

- Gọi A và B là các tập, mỗi quan hệ hai ngôi R từ A vào B là một tập con của $A \times B$.
- Nói cách khác, một quan hệ hai ngôi từ A vào B là một tập R gồm các cặp thứ tự trong đó phần tử thứ nhất của mỗi cặp lấy từ tập A và phần tử thứ hai lấy từ tập B .
- Ký hiệu ab để chỉ $(a,b) \in R$ và \overline{aRb} là $(a,b) \notin R$
- Khi $(a,b) \in R$ thì ta nói “ a có quan hệ với b theo R ”

QUAN HỆ

2. Định nghĩa 1

Ví dụ 1:

- ✓ Gọi A là tập các sinh viên trong trường học, và B là tập các môn học. R là quan hệ gồm các cặp (a,b) , trong đó a là một sinh viên đăng ký học môn b.
- ✓ Lấy ví dụ $(An, \text{Toán rời rạc})$ có nghĩa là sinh viên “An” đăng ký học môn “Toán rời rạc”.
- Nhận xét: Nếu một sinh viên không đăng ký bất kỳ môn học nào thì sẽ không có cặp nào có tên sinh viên đó là phần tử thứ nhất
- Nếu môn học đó không được bất kỳ sinh viên nào đăng ký thì môn học đó sẽ không là phần tử thứ hai của bất kỳ cặp thứ tự nào

QUAN HỆ

2. Định nghĩa 1 (quan hệ trên 2 tập)

Ví dụ 2: Gọi A là tập thành phố của Việt Nam và B là tập gồm tất cả các tỉnh của Việt Nam

Quan hệ R được định nghĩa bởi cặp (a, b) nếu a là một thành phố thuộc tỉnh b.

Lấy ví dụ (Vinh, Nghệ An) , (Hạ Long, Quảng ninh) đều là các phần tử thuộc R

QUAN HỆ

3. Biểu diễn quan hệ

3.1. Quan hệ giữa tập A vào tập B

Một quan hệ giữa hữu hạn các tập có thể biểu diễn bằng một ma trận 0-1 (Ma trận M_R); giả sử R là một quan hệ từ tập $A=\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ đến tập $B=\{b_1, b_2, \dots, b_m\}$

❖ Ma trận M_R trong đó số hàng $=n$ và số cột là $=m$

$$r_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{khi } a_i R b_j \text{ hay } (a_i, b_j) \in R \\ 0 & \text{khi } a_i \overline{R} b_j \text{ hay } (a_i, b_j) \notin R \end{cases}$$

QUAN HỆ

3. Biểu diễn quan hệ

3.1. Quan hệ giữa tập A vào tập B

❖ Một quan hệ giữa hữu hạn các tập có thể biểu diễn bằng một đồ thị
Biểu diễn quan hệ bằng đồ thị

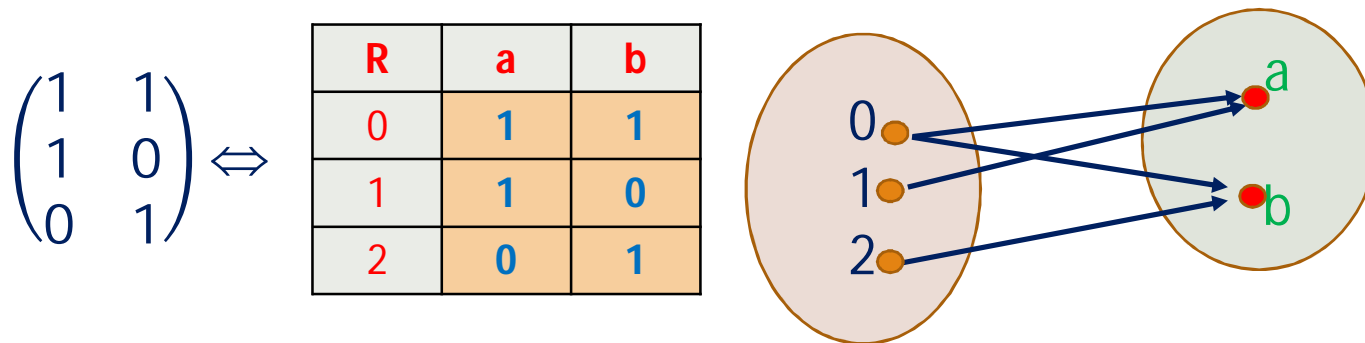
- Mỗi phần tử là 1 dấu chấm hoặc hình tròn với tên của phần tử viết bên cạnh. Dùng 1 cạnh có hướng (vecto) để nối từ a_i sang b_j nếu như a_i có quan hệ 1 chiều với b_j
- Dùng 1 cạnh vô hướng để nối từ a_i sang b_j nếu như a_i có quan hệ 2 chiều với b_j ; hoặc 2 cạnh có hướng, 1 cạnh chiều từ a_i tới b_j và 1 cạnh chiều từ b_j tới a_i .

QUAN HỆ

3. Biểu diễn quan hệ

Ví dụ 1: Đặt $A = \{0, 1, 2\}$ và $B = \{a, b\}$

Quan hệ $R = \{(0, a), (0, b), (1, a), (2, b)\}$ là một quan hệ từ A vào B



QUAN HỆ

3. Biểu diễn quan hệ

3.1. Quan hệ giữa tập A vào tập B

Ví dụ 2: Đặt $A=\{1,2,3\}$ và $B = \{1,2\}$. Gọi quan hệ R từ A vào B chứa (a,b) $a \in A$, $b \in B$ và $a > b$

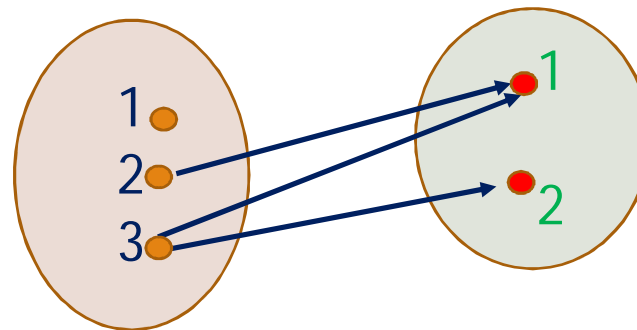
Vẽ đồ thị, tìm ma trận biểu diễn R trên

Lời giải:

Quan hệ $R = \{(2,1),(3,1),(3,2)\}$ từ A vào B

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

R	a	b
0	1	1
1	1	0
2	0	1



QUAN HỆ

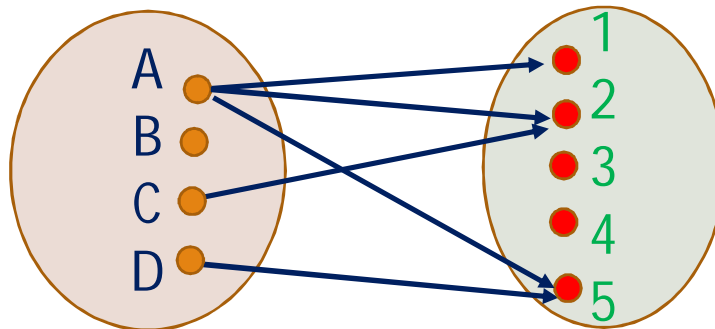
3. Biểu diễn quan hệ

3.1. Quan hệ giữa tập A vào tập B

Ví dụ 3: Ta cần biểu diễn quan hệ giữa tập $X=\{A, B, C, D\}$ và tập $Y=\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Trong đó, phần tử A có quan hệ với ba phần tử 1, 2, 5 của Y, C có quan hệ với phần tử 2 của Y, D có quan hệ với phần tử 5 của Y, còn phần tử B không quan hệ với phần tử nào của Y.

Ta có thể biểu diễn quan hệ R từ tập X đến tập Y bằng một đồ thị có hướng, ma trận, liệt kê quan hệ như sau:

$$R=\{(a,1),(a,2),(a,5),(c,2),(d,5)\}$$



R	1	2	3	4	5
A	1	1	0	0	1
B	0	0	0	0	0
C	0	1	0	0	0
D	0	0	0	0	1

QUAN HỆ

3. Biểu diễn quan hệ

3.1. Quan hệ giữa tập A vào tập B

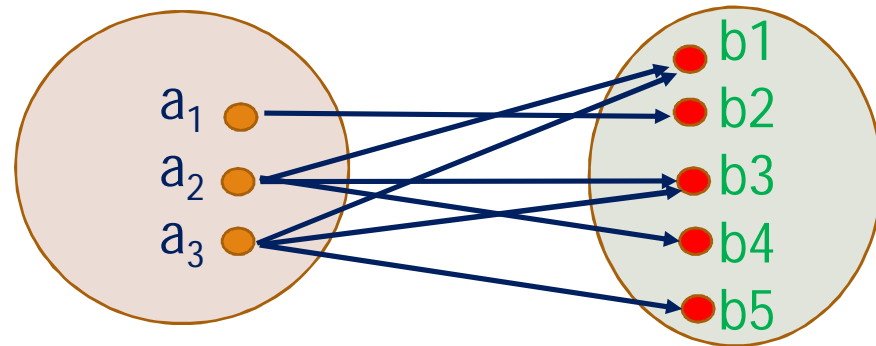
Ví dụ 4: Gọi tập $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ và $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$. Những cặp nào có trong quan hệ R được biểu diễn bằng ma trận:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Lời giải

R chứa những cặp (a_i, b_j) có $r_{ij}=1$ nên ta có

$R = \{(a_1, b_2), (a_2, b_1), (a_2, b_3), (a_2, b_4), (a_3, b_1), (a_3, b_3), (a_3, b_5)\}$



QUAN HỆ

3. Biểu diễn quan hệ

3.2. Biểu quan hệ bằng đồ thị có hướng và vô hướng

Ví dụ 1: Giả sử quan hệ R_R và R_S trên một tập A được biểu diễn bởi ma trận

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ và } M_S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tìm ma trận biểu diễn S^0R :

Lời giải

$$\Rightarrow M_{S^0R} = M_R \otimes M_S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ví dụ: vị trí (1,1) trong ma trận M_{S^0R} , $t_{11} = (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0) \vee (1 \wedge 1) = 1$

QUAN HỆ

3. Biểu diễn quan hệ

3.2. Biểu quan hệ bằng đồ thị có hướng và vô hướng

- ✓ Một đồ thị có hướng bao gồm một tập V gồm các đỉnh (hoặc nút) cùng với một tập E gồm các cặp thứ tự của các phần tử của V được gọi là cạnh (với đồ thị vô hướng) và cung (với đồ thị có hướng).
- ✓ Đỉnh a được gọi là đỉnh bắt đầu của cạnh (a,b) và đỉnh b được gọi là đỉnh kết thúc của cạnh này.
- ✓ Một cạnh có dạng (a,a) được biểu diễn bằng một cung từ đỉnh a trở lại chính nó. Một cạnh như vậy được gọi là 1 khuyên

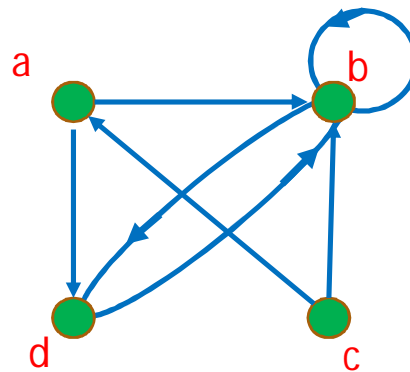
QUAN HỆ

3. Biểu diễn quan hệ

3.2. Biểu quan hệ bằng đồ thị có hướng và vô hướng

Ví dụ 1: Cho quan hệ $R = \{(a,b), (a,d), (b,b), (b,d), (c,a), (c,b), (d,b)\}$
Hãy biểu diễn quan hệ trên bằng đồ thị.

Lời giải:



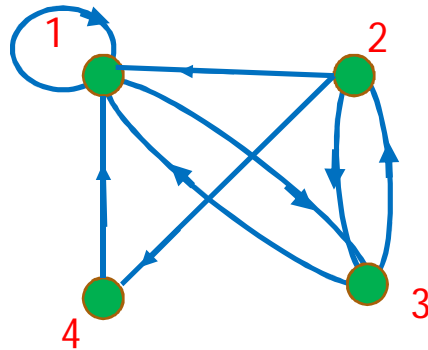
QUAN HỆ

3. Biểu diễn quan hệ

3.2. Biểu quan hệ bằng đồ thị có hướng và vô hướng

Ví dụ 1: Cho quan hệ $R = \{(1,1), (1,3), (2,1), (2,3), (2,4), (3,1), (3,2), (4,1)\}$ trên tập $A = \{1,2,3,4\}$. Hãy biểu diễn quan hệ trên bằng đồ thị.

Lời giải:

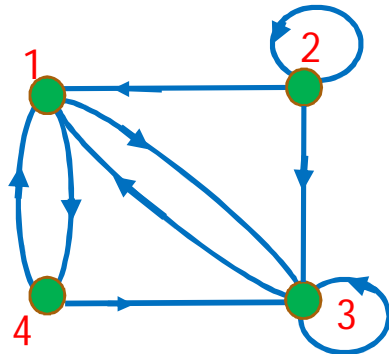


QUAN HỆ

3. Biểu diễn quan hệ

3.2. Biểu quan hệ bằng đồ thị có hướng và vô hướng

Ví dụ 1: Cho đồ thị có hướng sau. Hãy cho biết đồ thị này ứng với quan hệ nào?



Lời giải:

Cho quan hệ $R = \{(1,3), (1,4), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,3), (4,1), (4,3)\}$

Mỗi cặp tương ứng với một cạnh của đồ thị có hướng, với $(2,2), (3,3)$ tương ứng với các khuyên. Quan hệ R xác định trên tập $A = \{1, 2, 3, 4\}$.

QUAN HỆ

3. Biểu diễn quan hệ

3.2. Biểu quan hệ bằng đồ thị có hướng và vô hướng

Nhận xét: Quan hệ R trên tập A được biểu diễn bằng đồ thị có hướng nó có các phần tử của A là các đỉnh của đồ thị. Các cặp thứ tự (a,b) , trong đó $(a,b) \in R$ là các cạnh của đồ thị.

Phép gán này thiết lập một song ánh giữa quan hệ trên một tập A và đồ thị có hướng với A là tập đỉnh của đồ thị

Do vậy mọi phát biểu về quan hệ tương ứng với một phát biểu về đồ thị và ngược lại.

QUAN HỆ

3. Biểu diễn quan hệ

3.2. Biểu quan hệ bằng đồ thị có hướng và vô hướng

Nhận xét: Đồ thị có hướng biểu diễn một quan hệ có thể được sử dụng để xác định khi nào quan hệ có tính chất khác nhau

Lấy ví dụ:

- ✓ Một quan hệ phản xạ khi và chỉ khi có một khuyên tại mỗi đỉnh của đồ thị có hướng, sao cho mọi cặp thứ tự có dạng (x,x) đều thuộc quan hệ.
- ✓ Một quan hệ là đối xứng khi và chỉ khi với mọi cạnh giữa hai đỉnh phân biệt trong đồ thị có một cạnh theo hướng ngược lại, sao cho (y,x) thuộc quan hệ bất cứ khi nào (x,y) thuộc đồ thị.

Lưu ý: Một quan hệ đối xứng có thể được biểu diễn bằng một đồ thị vô hướng, đó là một đồ thị mà cạnh không có hướng.

QUAN HỆ

3. Biểu diễn quan hệ

3.2. Biểu quan hệ bằng đồ thị có hướng và vô hướng

Nhận xét: Đồ thị có hướng biểu diễn một quan hệ có thể được sử dụng để xác định khi nào quan hệ có tính chất khác nhau

Lấy ví dụ:

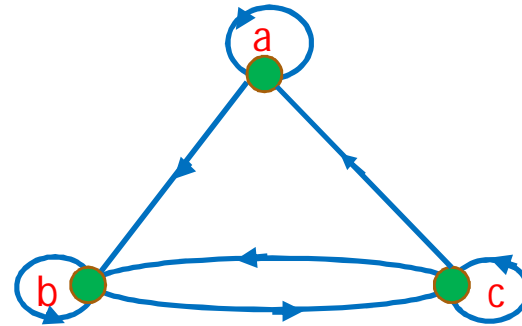
- ✓ Một quan hệ là phản đối xứng khi và chỉ khi không bao giờ có hai cạnh theo hướng ngược nhau giữa hai đỉnh phân biệt
- ✓ Một quan hệ gọi là bắc cầu khi và chỉ khi nếu bất cứ khi nào có một cạnh từ đỉnh x đến đỉnh y và một cạnh từ đỉnh y đến đỉnh z , sẽ có một cạnh từ đỉnh x đến đỉnh z .

QUAN HỆ

3. Biểu diễn quan hệ

3.2. Biểu quan hệ bằng đồ thị có hướng và vô hướng

Ví dụ 1: Cho đồ thị có hướng sau. Hãy cho biết đồ thị này ứng với quan hệ nào?



Lời giải:

Các đỉnh đều có khuyên $\Rightarrow R$ có tính phản xạ

R không đối xứng vì có cạnh từ a đến b nhưng không có cạnh từ b đến a

R không phải phản đối xứng bởi có cạnh b đến c và từ c đến b

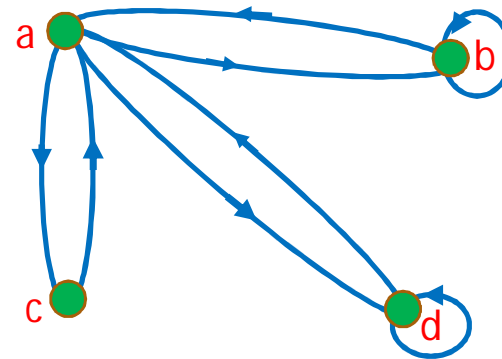
R không bắc cầu vì có 1 cạnh từ a đến b , từ b đến c , nhưng không có cạnh từ a đến c

QUAN HỆ

3. Biểu diễn quan hệ

3.2. Biểu quan hệ bằng đồ thị có hướng và vô hướng

Ví dụ 1: Cho đồ thị có hướng sau. Hãy cho biết đồ thị này ứng với quan hệ nào?



Lời giải:

Các khuyên không xuất hiện ở tất cả các đỉnh $\Rightarrow R$ không có tính phản xạ

R đối xứng và không phản đối xứng vì tất cả các cạnh giữa các đỉnh phân biệt đều có một cạnh theo hướng ngược lại

R không bắc cầu vì (c,a) và (a,b) thuộc S , nhưng không có (c,b)

QUAN HỆ

3. Biểu diễn quan hệ

3.3. Biểu diễn hợp và giao của 2 quan hệ

Giả sử R_1 và R_2 là các quan hệ trên một tập A được biểu diễn bởi ma trận M_{R_1} và M_{R_2} tương ứng.

Ma trận $M_{R_1} \cup M_{R_2}$ có bit 1 tại những vị trí mà M_{R_1} hoặc $M_{R_2} = 1$

Ma trận $M_{R_1} \cap M_{R_2}$ có bit 1 tại những vị trí mà M_{R_1} và $M_{R_2} = 1$

$$\Rightarrow M_{R_1} \cup M_{R_2} = M_{R_1} \vee M_{R_2}$$

$$M_{R_1} \cap M_{R_2} = M_{R_1} \wedge M_{R_2}$$

QUAN HỆ

3. Biểu diễn quan hệ

3.3. Biểu diễn hợp và giao của 2 quan hệ

Ví dụ 1: Giả sử quan hệ R_1 và R_2 trên một tập A được biểu diễn bởi ma trận

$$M_{R_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ và } M_{R_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tìm ma trận biểu diễn: $M_{R_1} \cup M_{R_2}; M_{R_1} \cap M_{R_2}$

Lời giải

$$\Rightarrow M_{R_1} \cup M_{R_2} = M_{R_1} \vee M_{R_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_{R_1} \cap M_{R_2} = M_{R_1} \wedge M_{R_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

QUAN HỆ

3. Biểu diễn quan hệ

3.3. Biểu diễn hợp và giao của 2 quan hệ

Ví dụ 2: Gọi $A=\{1,2,3\}$ và $B=\{1,2,3,4\}$. Quan hệ $R_1 = \{(1,1), (2,2), (3,3)\}$ và $R_2 = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4)\}$. Hãy cho biết kết quả $R_1 \cup R_2$; $R_1 \cap R_2$; $R_1 - R_2$; $R_2 - R_1$;

Lời giải

$$R_1 \cup R_2 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,4), (2,2), (3,3)\}$$

$$R_1 \cap R_2 = \{(1,1)\}$$

$$R_1 - R_2 = \{(2,2), (3,3)\}$$

$$R_2 - R_1 = \{(1,2), (1,3), (1,4)\}$$

QUAN HỆ

3. Biểu diễn quan hệ

3.4. Biểu diễn hợp thành của 2 quan hệ

Giả sử R là một quan hệ từ A đến B và S là một quan hệ từ B đến C .
Giả sử A, B, C tương ứng có m, n, p phần tử.

Gọi ma trận 0-1 cho S^0R, R, S tương ứng là

$$M_{S^0R} = [t_{ij}], MR = M_S = [s_{ij}]$$

Các ma trận có kích thước tương ứng $m \times p, m \times n, n \times p$

Cặp thứ tự $(a_i, c_j) \in S^0$ khi và chỉ khi có 1 phần tử b_k sao cho $(a_i, b_k) \in R$ và $(b_k, c_j) \in S$

$\Rightarrow t_{ij} = 1$ khi và chỉ khi $r_{ik} = s_{kj} = 1$ với giá trị k nào đó.

$$\Rightarrow M_{S^0R} = M_R \otimes M_S$$

QUAN HỆ

3. Biểu diễn quan hệ

3.4. Biểu diễn hợp thành của 2 quan hệ

Ví dụ 1: Giả sử quan hệ R_R và R_S trên một tập A được biểu diễn bởi ma trận

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ và } M_S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tìm ma trận biểu diễn S^0R :

Lời giải

$$\Rightarrow M_{S^0R} = M_R \otimes M_S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ví dụ: vị trí (1,1) trong ma trận M_{S^0R} , $t_{11} = (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0) \vee (1 \wedge 1) = 1$

QUAN HỆ

3. Biểu diễn quan hệ

3.4. Biểu diễn hợp thành của 2 quan hệ

Giả sử R là một quan hệ từ A đến B ; S là một quan hệ từ B đến C . Hợp thành của R và S là một quan hệ từ A đến C chứa cặp (a,c) trong đó $a \in A$, $c \in C$ và tồn tại phần tử $b \in B$ sao cho $(a,b) \in R$ và $(b,c) \in S$

Ký hiệu hợp thành của R và S là S^0R

Ta có $S^0R = \{ (a,c) | \exists b \in B: (a,b) \in R \wedge (b,c) \in S \}$

Việc tính hợp thành của hai quan hệ yêu cầu tìm các phần tử sao cho phần tử thứ 2 trong cặp thứ nhất cũng là phần tử thứ nhất của cặp thứ hai.

QUAN HỆ

3. Biểu diễn quan hệ

3.4. Biểu diễn hợp thành của 2 quan hệ

Ví dụ 2: Tìm hợp thành của quan hệ R và S trong đó R là quan hệ từ $\{1,2,3\}$ vào $\{1,2,3,4\}$ với $R=\{(1,1),(1,4),(2,3),(3,1),(3,4)\}$ và S là quan hệ từ $\{1,2,3,4\}$ vào $\{0,1,2\}$ với $S=\{(1,0),(2,0),(3,1),(3,2),(4,1)\}$

Lời giải:

Áp dụng: $S^0R=\{(a,c)|\exists b\in B: (a,b)\in R \wedge (b,c) \in S\}$

$$R=\{(1,1),(1,4),(2,3),(3,1),(3,4)\}$$

$$S=\{(1,0),(2,0),(3,1),(3,2),(4,1)\}$$

$$S^0R=\{(1,0),(1,1),(2,1),(2,2),(3,0),(3,1)\}$$

QUAN HỆ

3. Hàm là quan hệ

- ✓ Hàm $f: A \rightarrow B$ gán đúng một phần tử của tập B cho mỗi phần tử của tập A
- ✓ Đồ thị của f là các cặp thứ tự (a, b) sao cho $b = f(a)$
- ✓ Đồ thị của f là một tập con của $A \times B$, nó là một quan hệ từ A vào B
- ✓ Ngoài ra đồ thị của một hàm có tính chất rằng mọi phần tử thuộc A là phần tử thứ nhất của đúng một cặp thứ tự của đồ thị.

QUAN HỆ

3. Quan hệ \rightarrow Hàm

- ✓ Nếu R là một quan hệ từ A vào B sao cho mọi phần tử trong A là phần tử thứ nhất của **đúng một cặp thứ tự R** , thì một hàm có thể được định nghĩa bằng R như là đồ thị của nó. Điều này có thể được thực hiện bằng cách gán một phần tử của $a \in A$ với phần tử duy nhất $b \in B$ sao cho $(a, b) \in R$.
- ✓ Một quan hệ có thể được sử dụng để diễn tả một mối liên hệ một – nhiều giữa những phần tử của tập A và tập B ; trong đó một phần tử của tập A có thể liên quan đến nhiều hơn một phần tử của tập B . Quan hệ này không phải là hàm

QUAN HỆ

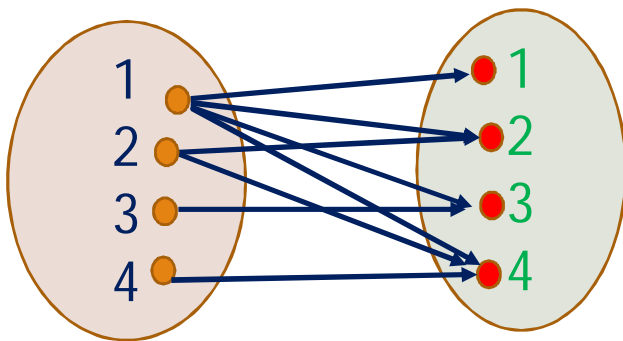
4. Định nghĩa 2 (Quan hệ trên 1 tập)

Một quan hệ trên một tập A là một quan hệ từ tập A đến tập A ; nói cách khác một quan hệ trên một tập là một tập con của $A \times A$

Ví dụ 1: Gọi A là tập $\{1,2,3,4\}$. Những cặp nào thuộc quan hệ $R = \{(a,b) \mid b \text{ chia hết cho } a\}$

Lời giải:

(a,b) thuộc R khi và chỉ khi a, b là các số nguyên dương ≤ 4 sao cho b chia hết cho a



R	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	0	1	0	1
3	0	0	1	0
4	0	0	0	1

QUAN HỆ

4. Định nghĩa 2 (Quan hệ trên 1 tập)

Ví dụ 2: Xét các quan hệ trên tập số nguyên

$$R_1 = \{(a,b) | a \leq b\}$$

$$R_2 = \{(a,b) | a > b\}$$

$$R_3 = \{(a,b) | a = b \text{ hoặc } a = -b\}$$

$$R_4 = \{(a,b) | a = b\}$$

$$R_5 = \{(a,b) | a = b + 1\}$$

$$R_6 = \{(a,b) | a + b \leq 3\}$$

Hỏi quan hệ nào chứa mỗi cặp sau:

$(1,1), (1,2), (2,1), (1,-1), (2,2)$

Lời giải:

$(1,1)$ thuộc R_1, R_3, R_4, R_6

$(1,2)$ thuộc R_1, R_6

$(2,1)$ thuộc R_2, R_5, R_6

$(1,-1)$ thuộc R_2, R_3, R_6

$(2,2)$ thuộc R_1, R_3, R_4

QUAN HỆ

4. Định nghĩa 2 (Quan hệ trên 1 tập)

Ví dụ 3: Có bao nhiêu quan hệ trên một tập có n phần tử

Lời giải:

Một quan hệ trên một tập A là một tập con của $A \times A$. Bởi $A \times A$ có n^2 phần tử khi A có n phần tử

Nếu tập con lại có m phần tử thì có 2^m tập con

→ có 2^{n^2} tập con của $A \times A$

→ có 2^{n^2} quan hệ trên một tập có n phần tử

Ví dụ, tập A có 2 phần tử $\{1,2\} \rightarrow A \times A = \{1,2\} \times \{1,2\} = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$

→ Số các quan hệ trên tập $\{1,2\}$ là $2^{2^2} = 16$ (quan hệ)

QUAN HỆ

4. Các tính chất của quan hệ

Có một số tính chất được dùng để phân loại quan hệ trên một tập. Trong một số quan hệ, một phần tử luôn liên hệ với chính nó.

4.1. Quan hệ phản xạ: Một quan hệ R trên một tập A có tính phản xạ nếu $(a,a) \in R$ với mọi $a \in A$

\Rightarrow Nếu $\forall a \in A$ đều có $(a,a) \in R$ thì R có tính phản xạ

\Rightarrow Nếu $\exists a \in A$ mà $(a,a) \notin R$ thì R không có tính phản xạ

Nói cách khác: R là phản xạ trên tập $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$

Khi và chỉ khi $(a_i, a_i) \in R$ với $i=1, 2, \dots, n$

$$r_{ij}=1 \text{ với } i=1, 2, \dots, n$$

$\Rightarrow R$ là phản xạ nếu tất cả các phần tử trên đường chéo chính của M_R đều bằng 1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

QUAN HỆ

4. Các tính chất của quan hệ

Ví dụ 1: Cho quan hệ R trên một tập $A = \{1,2,3,4\}$ như sau
 $R = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,4),(4,1),(4,4)\}$. Quan hệ R có tính chất phản xạ không?

Lời giải

Để quan hệ R có tính chất phản xạ trên tập $A = \{1,2,3,4\}$ thì quan hệ R phải chứa tất cả các cặp $\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$
Quan hệ $R = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,4),(4,1),(4,4)\}$ không chứa cặp $(3,3)$ nên quan hệ R không có tính chất phản xạ.

QUAN HỆ

4. Các tính chất của quan hệ

Ví dụ 2: Cho quan hệ R trên một tập $A = \{1,2,3,4\}$ như sau
 $R = \{(1,1), (1,2), (1,4), (2,1), (2,2), (3,3), (4,1), (4,4)\}$. Quan hệ R có tính chất phản xạ không?

Lời giải

Để quan hệ R có tính chất phản xạ trên tập $A = \{1,2,3,4\}$ thì quan hệ R phải chứa tất cả các cặp $\{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)\}$

Quan hệ $R = \{(1,1), (1,2), (1,4), (2,1), (2,2), (3,3), (4,1), (4,4)\}$ chứa đủ các cặp $(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)$ nên quan hệ R có tính chất phản xạ.

QUAN HỆ

4. Các tính chất của quan hệ

Ví dụ 3: Cho quan hệ $R = \{(a,b) \mid a \leq b\}$ trên tập số nguyên
Quan hệ R có tính chất phản xạ không?

Lời giải

Với số nguyên tùy ý ta luôn có $a \leq a \Rightarrow (a,a) \in R$ Do vậy quan hệ R có tính chất phản xạ.

Ví dụ 4: Cho quan hệ $R = \{(a,b) \mid a = b + 1\}$ trên tập số nguyên
Quan hệ R có tính chất phản xạ không?

Lời giải

Với số nguyên tùy ý ta luôn có $a = a + 1$ là phát biểu sai $\Rightarrow (a,a) \notin R$ Do vậy quan hệ R không có tính chất phản xạ.

QUAN HỆ

4. Các tính chất của quan hệ

Ví dụ 5: Xét các quan hệ R trên một tập $A = \{1,2,3,4\}$ như sau. Quan hệ R nào có tính chất phản xạ ?

$$R_1 = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,4), (4,1), (4,4)\}$$

$$R_2 = \{(1,1), (1,2), (2,1)\}$$

$$R_3 = \{(1,1), (1,2), (1,4), (2,1), (2,2), (3,3), (4,1), (4,4)\}$$

$$R_4 = \{(2,1), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (4,3)\}$$

$$R_5 = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,3), (2,4), (3,3), (3,4), (4,4)\}$$

$$R_6 = \{(3,4)\}$$

Lời giải:

Để quan hệ R có tính chất phản xạ trên tập $A = \{1,2,3,4\}$ thì quan hệ R phải chứa tất cả các cặp $\{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)\}$

Quan hệ R_3, R_5 thoả mãn nên quan hệ R_3, R_5 không có tính chất phản xạ.

QUAN HỆ

4. Các tính chất của quan hệ

Ví dụ 6: Xét các quan hệ R trên tập số nguyên. Quan hệ R nào có tính chất phản xạ ?

$$R_1 = \{(a,b) | a \leq b\}$$

$$R_2 = \{(a,b) | a > b\}$$

$$R_3 = \{(a,b) | a = b \text{ hoặc } a = -b\}$$

$$R_4 = \{(a,b) | a = b\}$$

$$R_5 = \{(a,b) | a = b + 1\}$$

$$R_6 = \{(a,b) | a + b \leq 3\}$$

Lời giải:

Để quan hệ R có tính chất phản xạ trên tập $A = \{1,2,3,4\}$ thì quan hệ R phải thoả mãn $a=a$. Do vậy Quan hệ R_1, R_3, R_4 thoả mãn nên quan hệ R_1, R_3, R_4 có tính chất phản xạ.

QUAN HỆ

4. Các tính chất của quan hệ

4.2. Quan hệ đối xứng: Một quan hệ R trên một tập A có tính đối xứng “Nếu $(a,b) \in R$ suy ra $(b,a) \in R$ với mọi $a,b \in A$ ”

\Rightarrow Nếu $\forall (a,b) \in R$ đều có $(b,a) \in R$ thì R có tính đối xứng

\Rightarrow Nếu $\exists (a,b) \in R$ mà $(b,a) \notin R$ thì R không có tính đối xứng

Nói cách khác: R là đối xứng trên tập $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ khi và chỉ khi $(a_j, a_i) \in R$ bất cứ khi nào $(a_i, a_j) \in R$

Trong ma trận M_R , R là đối xứng khi và chỉ khi $r_{ji} = 1$ bất cứ khi nào $r_{ij} = 1$ ($r_{ji} = 0$ bất cứ khi nào $r_{ij} = 0$)

$\Rightarrow R$ đối xứng khi và chỉ khi $m_{ji} = m_{ij}$, với mọi cặp số nguyên i và j thoả mãn $i = 1, 2, \dots, n$ và $j = 1, 2, \dots, n$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

QUAN HỆ

4. Các tính chất của quan hệ

Ví dụ 1: Cho quan hệ R trên 1 tập được biểu diễn bởi ma trận

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

R có tính chất gì?

Lời giải:

Tất cả các phần tử trên đường chéo chính = 1 nên R có tính phản xạ
 M_R là đối xứng nên R là đối xứng

QUAN HỆ

4. Các tính chất của quan hệ

Ví dụ 2: Cho quan hệ R trên một tập $A = \{1,2,3,4\}$ như sau
 $R = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,4), (4,1), (4,4)\}$. Quan hệ R có tính chất đối xứng không?

Lời giải

Quan hệ R có chứa cặp $(3,4)$ nhưng không chứa cặp $(4,3)$ nên quan hệ $R = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,4), (4,1), (4,4)\}$ không có tính chất đối xứng.

QUAN HỆ

4. Các tính chất của quan hệ

Ví dụ 3: Cho quan hệ R trên một tập $A = \{1,2,3,4\}$ như sau
 $R = \{(1,1), (1,2), (1,4), (2,1), (2,2), (3,3), (4,1), (4,4)\}$.
Quan hệ R có tính chất đối xứng không?

Lời giải

Xếp lại thứ tự các cặp trong quan hệ R

$R = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,3), (1,4), (4,1), (4,4)\}$.

Vậy $\forall (x,y) \in R$ đều có $(y,x) \in R \Rightarrow R$ có tính chất đối xứng.

QUAN HỆ

4. Các tính chất của quan hệ

Ví dụ 4: Cho quan hệ $R = \{(a,b) | a+b \leq 3\}$ trên tập số nguyên. Quan hệ R có tính chất đối xứng không?

Lời giải

Với mọi số nguyên a,b ; nếu $(a,b) \in R \Rightarrow a+b \leq 3 \Rightarrow b+a \leq 3 \Rightarrow (b,a) \in R \Rightarrow R$ có tính chất đối xứng.

Ví dụ 5: Cho quan hệ $R = \{(a,b) | a > b\}$ trên tập số nguyên. Quan hệ R có tính chất đối xứng không?

Lời giải

Với mọi số nguyên a,b ; nếu $(a,b) \in R \Rightarrow a > b \Rightarrow b > a$ là sai $\Rightarrow (b,a) \notin R \Rightarrow R$ không có tính chất đối xứng.

QUAN HỆ

4. Các tính chất của quan hệ

Ví dụ 6: Xét các quan hệ R trên một tập $A = \{1,2,3,4\}$ như sau. Quan hệ R nào có tính chất đối xứng?

$$R_1 = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,4),(4,1),(4,4)\}$$

$$R_2 = \{(1,1),(1,2),(2,1)\}$$

$$R_3 = \{(1,1),(1,2),(1,4),(2,1),(2,2),(3,3),(4,1),(4,4)\}$$

$$R_4 = \{(2,1),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(4,3)\}$$

$$R_5 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4),(3,3),(3,4),(4,4)\}$$

$$R_6 = \{(3,4)\}$$

Lời giải:

Quan hệ R_2 có các cặp $(1,1),(1,2),(2,1)$

Quan hệ R_3 có các cặp $(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3),(1,4),(4,1),(4,4)$

Quan hệ R_2, R_3 thoả mãn nên quan hệ R_2, R_3 có tính đối xứng

QUAN HỆ

4. Các tính chất của quan hệ

Ví dụ 7: Xét các quan hệ R trên một tập số nguyên. Quan hệ R nào có tính chất đối xứng?

$$R_1 = \{(a,b) | a \leq b\}$$

$$R_2 = \{(a,b) | a > b\}$$

$$R_3 = \{(a,b) | a = b \text{ hoặc } a = -b\}$$

$$R_4 = \{(a,b) | a = b\}$$

$$R_5 = \{(a,b) | a = b + 1\}$$

$$R_6 = \{(a,b) | a + b \leq 3\}$$

Lời giải:

Quan hệ R_3, R_4, R_6 có tính chất đối xứng

QUAN HỆ

4. Các tính chất của quan hệ

4.3. Quan hệ phản đối xứng:

- ✓ Một quan hệ là đối xứng khi a liên quan đến b thì b liên quan đến a
- ✓ Một quan hệ là phản đối xứng khi và chỉ khi “không có cặp các phần tử phân biệt a và b với a liên quan đến b và b liên quan đến a”. Chỉ có một cách để a liên quan đến b và b liên quan đến a là a và b là phần tử giống nhau.
- ✓ Nói cách khác Quan hệ R trên A là phản đối xứng “nếu $(a,b) \in R$ và $(b,a) \in R \Rightarrow a=b$ ”.
- ✓ Ma trận của quan hệ phản đối xứng “Nếu $r_{ij} = 1$ với $i \neq j$ thì $r_{ji} = 0$ ” hoặc “ $r_{ij} = 0, r_{ji} = 0$ khi $i \neq j$ ”

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

QUAN HỆ

4. Các tính chất của quan hệ

4.3. Quan hệ phản đối xứng:

- ✓ Các thuật ngữ đối xứng và phản đối xứng không đối lập nhau, bởi một quan hệ có thể có cả hai tính chất này hoặc không có cả hai.
- ✓ Một quan hệ không thể đồng thời là đối xứng và phản đối xứng nếu nó chứa một số cặp có dạng (a,b) trong đó $a \neq b$.

QUAN HỆ

4. Các tính chất của quan hệ

Ví dụ 1: Xét các quan hệ R trên một tập $A = \{1,2,3,4\}$ như sau. Quan hệ R nào có tính chất phản đối xứng ?

$$R_1 = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,4), (4,1), (4,4)\}$$

$$R_2 = \{(1,1), (1,2), (2,1)\}$$

$$R_3 = \{(1,1), (1,2), (1,4), (2,1), (2,2), (3,3), (4,1), (4,4)\}$$

$$R_4 = \{(2,1), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (4,3)\}$$

$$R_5 = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,3), (2,4), (3,3), (3,4), (4,4)\}$$

$$R_6 = \{(3,4)\}$$

Lời giải:

Quan hệ R_1 , có cặp $(1,2), (2,1)$ đối xứng; $(3,4), (4,1)$ không có cặp $(4,3), (1,4) \rightarrow R_1$ có hai tính chất đối xứng và phản đối xứng

Suy luận tương tự ta có R_4, R_5, R_6 là các quan hệ có tính chất phản đối xứng

QUAN HỆ

4. Các tính chất của quan hệ

Ví dụ 2: Xét các quan hệ R trên một tập số nguyên. Quan hệ R nào có tính chất phản đối xứng?

$$R_1 = \{(a,b) | a \leq b\}$$

$$R_2 = \{(a,b) | a > b\}$$

$$R_3 = \{(a,b) | a = b \text{ hoặc } a = -b\}$$

$$R_4 = \{(a,b) | a = b\}$$

$$R_5 = \{(a,b) | a = b + 1\}$$

$$R_6 = \{(a,b) | a + b \leq 3\}$$

Lời giải:

Quan hệ R_1, R_2, R_4, R_5 có tính chất phản đối xứng

QUAN HỆ

4. Các tính chất của quan hệ

Ví dụ 3: Xét quan hệ “chia hết” trên tập số nguyên dương là đối xứng? phản đối xứng?

Lời giải:

- Quan hệ R trên không có tính chất đối xứng
- Quan hệ R trên có tính chất phản đối xứng

QUAN HỆ

4. Các tính chất của quan hệ

4.4. Tính chất bắc cầu

Một quan hệ trên một tập A được gọi là có tính chất bắc cầu nếu “*Bất cứ khi nào $(x,y) \in R$ và $(y,z) \in R$ thì $(x,z) \in R$ với mọi $(x,y,z) \in A$* ”.

Ví dụ 1: Cho quan hệ $R = \{(3,4)\}$ trên tập $A = \{1,2,3,4\}$. Quan hệ R có tính chất bắc cầu không?

Lời giải:

R chỉ chứa duy nhất cặp $(3,4) \Rightarrow$ phát biểu “ $\forall (x,y,z) \in A, (x,y) \in R$ và $(y,z) \in R$ thì $(x,z) \in R$ ” là đúng $\Rightarrow R$ có tính chất bắc cầu.

Ví dụ 2: Xét quan hệ “chia hết” trên tập số nguyên dương là đối xứng? phản đối xứng?

Lời giải:

Quan hệ R trên có tính chất bắc cầu vì: $a:b; b:c \Rightarrow a:c$

QUAN HỆ

4. Các tính chất của quan hệ

4.4. Tính chất bắc cầu

Ví dụ 3: Cho quan hệ $R_5 = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (2,2), (3,3), (4,1), (4,4)\}$ trên tập $A = \{1,2,3,4\}$. Quan hệ R có tính chất bắc cầu không?

Lời giải:

R chứa cặp $(1,1), (1,2) \rightarrow (1,2)$ đã có

R chứa cặp $(1,1), (1,4) \rightarrow (1,4)$ đã có

R chứa cặp $(1,2), (2,1) \rightarrow (1,1)$ đã có

R chứa cặp $(1,3), (3,3) \rightarrow (1,3)$ đã có

R chứa cặp $(1,4), (4,1) \rightarrow (1,1)$ đã có

R chứa cặp $(2,1), (1,2) \rightarrow (2,2)$ Không có

R chứa cặp $(2,1), (1,3) \rightarrow (2,3)$ Không có

R chứa cặp $(2,1), (1,4) \rightarrow (2,4)$ Không có

$\Rightarrow R$ không có tính chất bắc cầu

QUAN HỆ

4. Các tính chất của quan hệ

4.4. Tính chất bắc cầu

Ví dụ 4: Cho quan hệ $R = \{(2,1), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (4,3)\}$ trên tập $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Quan hệ R có tính chất bắc cầu không?

Lời giải:

Xét các cặp (a,b) trong quan hệ R

$(2,1) \in R$ nhưng không tồn tại $(1,b) \in R$

$(3,1) \in R$ nhưng không tồn tại $(1,b) \in R$

$(3,2) \in R$ và $(2,1) \in R$, ta có $(3,1) \in R$

$(4,1) \in R$ nhưng không tồn tại $(1,b) \in R$

$(4,2) \in R$ và $(2,1) \in R$, ta có $(4,1) \in R$

$(4,3) \in R$ và $(3,1) \in R$, ta có $(4,1) \in R$

$(4,3) \in R$ và $(3,2) \in R$, ta có $(4,2) \in R$

R thỏa mãn điều kiện của tính chất bắc cầu theo định nghĩa

“ $\forall (x,y,z) \in A, (x,y) \in R$ và $(y,z) \in R$ thì $(x,z) \in R$ ”.

$\Rightarrow R$ có tính chất bắc cầu.

QUAN HỆ

4. Các tính chất của quan hệ

4.4. Tính chất bắc cầu

Ví dụ 5: Xét các quan hệ R trên một tập $A = \{1,2,3,4\}$ như sau. Quan hệ R nào có tính chất bắc cầu?

$$R_1 = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,4),(4,1),(4,4)\}$$

$$R_2 = \{(1,1),(1,2),(2,1)\}$$

$$R_3 = \{(1,1),(1,2),(1,4),(2,1),(2,2),(3,3),(4,1),(4,4)\}$$

$$R_4 = \{(2,1),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(4,3)\}$$

$$R_5 = \{(1,1),(1,2), (1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4),(3,3),(3,4),(4,4)\}$$

$$R_6 = \{(3,4)\}$$

Lời giải:

R_4 có cặp $(4,2),(2,1) \rightarrow (4,1)$ có \rightarrow có tính chất bắc cầu

R_5 $(3,1) \in R$ nhưng không tồn tại $(3,b) \in R$; còn lại “ $\forall(x,y,z) \in A, (x,y) \in R$ và $(y,z) \in R$ thì $(x,z) \in R$ ”.
 \rightarrow có tính chất bắc cầu

R_6 chỉ chứa duy nhất cặp $(3,4) \Rightarrow$ phát biểu “ $\forall(x,y,z) \in A, (x,y) \in R$ và $(y,z) \in R$ thì $(x,z) \in R$ ” là đúng.
 \rightarrow có tính chất bắc cầu

QUAN HỆ

4. Các tính chất của quan hệ

4.4. Tính chất bắc cầu

Ví dụ 6: Xét các quan hệ R trên một tập số nguyên. Quan hệ R nào có tính chất bắc cầu?

$$R_1 = \{(a,b) | a \leq b\}$$

$$R_2 = \{(a,b) | a > b\}$$

$$R_3 = \{(a,b) | a = b \text{ hoặc } a = -b\}$$

$$R_4 = \{(a,b) | a = b\}$$

$$R_5 = \{(a,b) | a = b + 1\}$$

$$R_6 = \{(a,b) | a + b \leq 3\}$$

Lời giải:

Quan hệ R_1, R_2, R_3, R_4 có tính chất bắc cầu

QUAN HỆ

4. Các tính chất của quan hệ

4.4. Tính chất bắc cầu

Ví dụ 6: Xét các quan hệ R trên một tập số nguyên. Quan hệ R nào có tính chất bắc cầu?

$$R_1 = \{(a,b) | a \leq b\}$$

$$R_2 = \{(a,b) | a > b\}$$

$$R_3 = \{(a,b) | a = b \text{ hoặc } a = -b\}$$

$$R_4 = \{(a,b) | a = b\}$$

$$R_5 = \{(a,b) | a = b + 1\}$$

$$R_6 = \{(a,b) | a + b \leq 3\}$$

Lời giải:

Quan hệ R_1, R_2, R_3, R_4 có tính chất bắc cầu

QUAN HỆ

4. Tóm tắt các tính chất của quan hệ

□ **Quan hệ trên 2 tập:** Gọi A và B là các tập, một quan hệ hai ngôi R từ S vào B là một tập con của $A \times B$.

Ký hiệu aRb là $(a,b) \in R$ và $\neg(aRb)$ là $(a,b) \notin R$

Nếu $(a,b) \in R$ thì a có quan hệ R với b.

□ **Quan hệ trên 1 tập:** Một quan hệ trên một tập A là một quan hệ từ tập A đến tập A

□ **Các tính chất quan hệ trên 1 tập:** Cho quan hệ R trên tập A

1. R có tính chất phản xạ $\Leftrightarrow \forall x \in A, (x,x) \in R$
2. R có tính chất đối xứng $\Leftrightarrow \forall x,y \in A, (x,y) \in R \rightarrow (y,x) \in R$
3. R có tính chất phản đối xứng $\Leftrightarrow \forall x,y \in A, (x,y) \in R \wedge (y,x) \in R \rightarrow x=y$
4. R có tính chất bắc cầu $\Leftrightarrow \forall x,y,z \in A, (x,y) \in R \wedge (y,z) \in R \rightarrow (x,z) \in R$

QUAN HỆ

5. Quan hệ tương đương

- ❑ **Định nghĩa 1:** Một quan hệ trên tập A được gọi là một quan hệ tương đương nếu nó là phản xạ, đối xứng, bắc cầu.
- ❑ **Định nghĩa 2:**
 - Hai phần tử a và b chúng có liên hệ với nhau bằng một quan hệ tương đương được gọi là tương đương.
 - Ký hiệu $a \sim b$ thường được sử dụng để ký hiệu rằng a và b là các phần tử tương đương đối với một quan hệ tương đương cụ thể.

QUAN HỆ

5. Quan hệ tương đương

Ví dụ 1: Chứng minh rằng quan hệ R trên tập số nguyên sao cho aRb khi và chỉ khi $a=b$ hoặc $a=-b$ là quan hệ tương đương.

Lời giải:

R là phản xạ bởi $a=a$ với $\forall a \in \mathbb{Z}$

R là đối xứng bởi $a=\pm b$ thì $b=\pm a$

R là bắc cầu bởi $a=\pm b$; $b=\pm a$ thì $a=\pm c$

$\Rightarrow R$ là một quan hệ tương đương.

QUAN HỆ

5. Quan hệ tương đương

Ví dụ 2: Gọi R là quan hệ trên tập số thực, sao cho aRb khi và chỉ khi $a-b$ là một số nguyên. R có quan hệ tương đương không?

Lời giải:

Nếu aRb và bRc , thì $a-b$ và $b-c$ là các số nguyên

$\Rightarrow a-c = (a-b) + (b-c)$ cũng là một số nguyên $\Rightarrow aRc$

$\Rightarrow R$ có tính chất bắc cầu $\Rightarrow R$ là một quan hệ tương đương

QUAN HỆ

5. Quan hệ tương đương

Ví dụ 3: Cho tập $A=\{1, 2, 3\}$. Trong các quan hệ trên tập A cho dưới đây, quan hệ nào thỏa mãn cả phản xạ, đối xứng, bắc cầu?

- A. $R=\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 3)\}$
- B. $R=\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (2, 1), (2, 3), (3, 4)\}$
- C. $R=\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1), (2, 3), (3, 2)\}$
- D. $R=\{(1, 1), (3, 3), (2, 3), (2, 1), (3, 2), (4, 3)\}$

Lời giải:

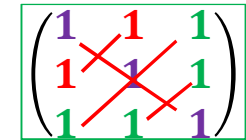
$R=\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1), (2, 3), (3, 2)\}$ thỏa mãn cả 3 tính chất vì:

$R_1=\{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ thỏa mãn tính phản xạ

$R_2=\{(1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1), (2, 3), (3, 2)\}$ thỏa mãn tính đối xứng

$R=R_3=\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1), (2, 3), (3, 2)\}$ thỏa mãn tính bắc cầu

\Rightarrow quan hệ R có tính chất tương đương



QUAN HỆ

5. Quan hệ tương đương

Ví dụ 4: Quan hệ đồng dư mod m . Gọi m là một số nguyên $m > 1$. Chứng minh rằng $R = \{(a, b) | a \equiv b \pmod{m}\}$ là một quan hệ tương đương trên tập số nguyên.

Lời giải:

$a \equiv b \pmod{m}$ khi và chỉ khi $a-b$ chia hết cho m

- Giả sử $a \equiv b \pmod{m}$ thì $a-b$ chia hết cho m nên $a-b=km$, trong đó k là một số nguyên $\Rightarrow b-a=(-k)m$ nên $b \equiv a \pmod{m} \Rightarrow$ quan hệ đồng dư mod m là quan hệ đối xứng.
- Giả sử $a \equiv b \pmod{m}$ và $b \equiv c \pmod{m}$, thì $a-b$ và $b-c$ đều chia hết cho $m \Rightarrow$ Tồn tại các số nguyên k và l sao cho $a-b=km$ và $b-c=lm$.

$$\Rightarrow a-c=(a-b)+(b-c)=km+lm=(k+l)m$$

\Rightarrow nên $a \equiv c \pmod{m} \Rightarrow$ quan hệ đồng dư mod m là bắc cầu.

QUAN HỆ

5. Quan hệ tương đương

□ Định nghĩa 3 (lớp tương đương):

- Nếu R là một quan hệ tương đương trên tập A . Tập tất cả phần tử có quan hệ với phần tử $a \in A$ được gọi là lớp tương đương của a .
- Lớp tương đương của a theo quan hệ R ký hiệu là $[a]_R$
- Khi chỉ có một quan hệ đang được xét, có thể bỏ chỉ số R và viết $[a]$ cho lớp tương đương này.
- Lớp tương đương của phần tử a là $[a]_R = \{s | (a,s) \in R\}$.
- Nếu $b \in [a]_R$, thì b được gọi là một đại diện của lớp tương đương này. Bất kỳ phần tử của một lớp tương đương đều có thể là một đại diện của lớp này. Điều này có nghĩa rằng, không có gì đặc biệt về phần tử được chọn là đại diện của lớp.

QUAN HỆ

5. Quan hệ tương đương

Ví dụ 5: Cho Quan hệ trên tập số nguyên sao cho aRb khi và chỉ khi $a=b$ hoặc $a=-b$. Hãy xác định lớp tương đương của một số nguyên

Lời giải:

Quan hệ tR trên tập số nguyên là một quan hệ tương đương ? bởi một số nguyên là tương đương với chính nó và đối số của nó trong quan hệ tương đương này, suy ra $[a]=\{-a,a\}$

Ví dụ $[5]=\{-5,5\}$

QUAN HỆ

5. Quan hệ tương đương

Ví dụ 6: Tìm các lớp tương đương cho 0 và 1 trong quan hệ đồng dư mod 4?

Lời giải:

Lớp tương đương của 0 bao gồm tất cả các số nguyên a sao cho $a \equiv 0 \pmod{4}$. Các số nguyên trong lớp này đều chia hết cho 4. Do đó lớp tương đương của 0 cho quan hệ này là

$$[0] = \{\dots, -8, -4, 0, 4, 8, \dots\}$$

Lớp tương đương của 1 bao gồm tất cả các số nguyên a sao cho $a \equiv 1 \pmod{4}$. Các số nguyên trong lớp này khi chia cho 4 đều có số dư là 1. Do đó lớp tương đương của 1 cho quan hệ này là

$$[1] = \{\dots, -7, -3, 1, 5, 9, \dots\}$$

QUAN HỆ

6. Các lớp tương đương và phân hoạch

□ **Định lý 1:** Nếu R là một quan hệ tương đương trên một tập A thì các phát biểu sau là tương đương

1. aRb 2. $[a]=[b]$ 3. $[a] \cap [b] = \emptyset$, với $\forall a, b \in A$

Gọi R là một quan hệ tương đương trên một tập A

Hợp của các lớp tương đương của R là tất cả phần tử có trong A , bởi một phần tử thuộc A thuộc lớp tương đương của nó, cụ thể $[a]_R$. Nói cách khác:

$$\bigcup_{a \in R} [a]_R = A$$

Ngoài ra, theo định lý 1, suy ra các lớp tương đương này hoặc là bằng nhau, hoặc là rời nhau nên $[a]_R \cap [b]_R = \emptyset$ khi $[a]_R \neq [b]_R$

\Rightarrow Các lớp tương đương là một phân hoạch của A , chúng chia A thành các tập con rời nhau.

QUAN HỆ

6. Các lớp tương đương và phân hoạch

Ví dụ 1: Giả sử $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Nhóm các tập

$$A_1 = \{1, 2, 3\}$$

$$A_2 = \{4, 5\}$$

$$A_3 = \{6\}$$

Tạo thành một phân hoạch của S bởi chúng là những tập rời nhau và hợp của chúng là S

QUAN HỆ

6. Các lớp tương đương và phân hoạch

- **Định lý 2:** Gọi R là một quan hệ tương đương trên 1 tập S . Các lớp tương đương của R tạo thành một phân hoạch của S . Ngược lại, cho trước 1 phân hoạch $\{A_i, i \in I\}$ của tập S , có một quan hệ tương đương R có các tập $A_i, i \in I$ là các lớp tương đương của nó.

QUAN HỆ

6. Các lớp tương đương và phân hoạch

Ví dụ 2: Liệt kê các cặp thứ tự trong quan hệ tương đương R tạo ra bởi phân hoạch $A_1=\{1,2,3\}$, $A_2=\{4,5\}$ và $A_3=\{6\}$

Lời giải:

Các tập con trong phân hoạch là các lớp tương đương của R .

Các cặp (a,b) thuộc R khi và chỉ khi a và b là cùng tập con của phân hoạch.

Các cặp $(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)$ thuộc R bởi $A_1 = \{1,2,3\}$ là một lớp tương đương.

Các cặp $(4,4),(4,5),(5,4),(5,5)$ thuộc R bởi lớp $A_2=\{4,5\}$ là một lớp tương đương

Cặp $(6,6)$ thuộc R bởi $\{6\}$ là một lớp tương đương.

Vậy không có cặp nào ngoài chúng thuộc R

QUAN HỆ

6. Các lớp tương đương và phân hoạch

Ví dụ 3: Tìm các tập trong phân hoạch số nguyên tạo ra từ quan hệ đồng dư mod 4?

Lời giải:

Có 4 lớp đồng dư tương ứng là $[0]_4$, $[1]_4$, $[2]_4$, $[3]_4$

$$[0]_4 = \{\dots, -8, -4, 0, 4, 8, \dots\}$$

$$[1]_4 = \{\dots, -7, -3, 1, 5, 9, \dots\}$$

$$[2]_4 = \{\dots, -6, -2, 2, 6, 10, \dots\}$$

$$[3]_4 = \{\dots, -5, -1, 3, 7, 11, \dots\}$$

Các lớp đồng dư này là rời nhau và mọi số nguyên thuộc đúng 1 tập trong số chúng.
Nói cách khác, các lớp đồng dư này tạo thành 1 phân hoạch.

QUAN HỆ

6. Các lớp tương đương và phân hoạch

Ví dụ 4: Cho tập $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Cho $A_1 = \{1\}$, $A_2 = \{2\}$, $A_3 = \{3, 4\}$, $A_4 = \{5\}$. Tìm quan hệ tương đương R trên A sinh ra phân hoạch A_1, A_2, A_3 :

Lời giải:

$$R = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (3,4), (4,3)\}$$

Ví dụ 5: Cho tập $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ và quan hệ tương đương R trên A như sau:
 $R = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (4,5), (5,4)\}$. Xác định phân hoạch do R sinh ra:

Lời giải:

$$A_1 = \{1\}, A_2 = \{2\}, A_3 = \{3\}, A_4 = \{4, 5\}$$

QUAN HỆ

6. Các lớp tương đương và phân hoạch

Ví dụ 6: Cho $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Quan hệ R được xác định: $\forall a, b \in A, aRb \Leftrightarrow a+b=2k(k=1,2,3\dots)$. Xác định phân hoạch do R sinh ra

$$A_1 = \{1, 3, 5\}, A_2 = \{2, 4\}$$

Lời giải:

Ví dụ 7: Cho quan hệ $R = \{(a,b) \mid a \equiv b \pmod{5}\}$ trên tập $\{-12, -11, \dots, 11, 12\}$. Hãy xác định $[2]_R$?

$$R = \{-8, -3, 2, 7, 12\}$$

Lời giải:

Ví dụ 8: Cho quan hệ $R = \{(a,b) \mid a \equiv b \pmod{6}\}$ trên tập $\{-15, -11, \dots, 11, 15\}$. Hãy xác định $[5]_R$?

$$R = \{-13, -7, -1, 5, 11\}$$

Lời giải:

QUAN HỆ

7. Quan hệ thứ tự

Thường sử dụng để sắp xếp một số hoặc tất cả các phần tử trong tập.

Ví dụ:

- ✓ Để sắp xếp thứ tự các từ trong từ điển thì một quan hệ chứa các cặp từ (x,y) trong đó x đứng trước y được sử dụng.
- ✓ Để sắp xếp các tập số nguyên thì một quan hệ gồm các cặp (x,y) , trong đó $x < y$ được sử dụng
- ✓ Để lập kế hoạch các dự án thì một quan hệ bao gồm các cặp (x,y) trong đó x và y là các nhiệm vụ trong một dự án mà x phải hoàn thành trước khi y bắt đầu được sử dụng.
- ✓ Khi bổ sung tất cả những cặp có dạng (x,y) vào những quan hệ này, thì thu được một quan hệ nó là phản xạ, phản đối xứng và bắc cầu
- ✓ Những tính chất này là những đặc trưng của quan hệ được sử dụng để sắp xếp các phần tử của tập.

QUAN HỆ

7. Quan hệ thứ tự

□ Định nghĩa 1:

- ✓ Một quan hệ R trên một tập S được gọi là một thứ tự riêng (hoặc sắp xếp riêng) khi và chỉ khi nó là phản xạ, phản đối xứng, bắc cầu.
- ✓ Một tập S cùng với thứ tự riêng R gọi là một tập được sắp thứ tự riêng (poset) và nó được ký hiệu (S, R)
- ✓ Các phần tử trong S được gọi là các phần tử của poset

QUAN HỆ

7. Quan hệ thứ tự

Ví dụ 1: Chỉ ra rằng quan hệ “ \geq ” là thứ tự riêng trên tập số nguyên

Lời giải:

Bởi $a \geq a$ với mọi số nguyên a , vậy \geq là phản xạ

Nếu $a \geq b$ và $b \geq a$ thì $a=b$, vậy \geq có tính phản đối xứng

Nếu $a \geq b$ và $b \geq c$ thì $a \geq c$, vậy \geq có tính bắc cầu

$\Rightarrow \geq$ là một thứ tự riêng trên tập số nguyên và (\mathbb{Z}, \geq) là một poset

QUAN HỆ

7. Quan hệ thứ tự

Ví dụ 2: Cho quan hệ ước số $a|b$, a là ước số của b . Hãy chỉ ra rằng $(\mathbb{Z}^+, |)$ là một tập sắp thứ tự riêng (poset)

Lời giải:

Bởi $a | a$ với a là số nguyên dương tùy ý, vậy quan hệ ước số là phản xạ

Nếu $a | b$ và $b | a$ thì $a=b$, vậy quan hệ ước số là phản đối xứng

Nếu $a | b$ và $b | c$ thì $a | c$, vậy quan hệ ước số là bắc cầu

\Rightarrow Quan hệ ước số là một thứ tự riêng trên tập số nguyên dương bởi nó là phản xạ, phản đối xứng, bắc cầu.

QUAN HỆ

7. Quan hệ thứ tự

Ví dụ 3: Chỉ ra rằng quan hệ tập con \subseteq là một thứ tự riêng trên tập lũy thừa của một tập S

Lời giải:

Bởi $A \subseteq A$ với A là tập con của S , vậy quan hệ \subseteq là phản xạ

Nếu $A \subseteq B$ và $B \subseteq A$ thì $A=B$, vậy quan hệ \subseteq là phản đối xứng

Nếu $A \subseteq B$ và $B \subseteq C$ thì $A \subseteq C$, vậy quan hệ \subseteq là bắc cầu

\Rightarrow Quan hệ \subseteq là một thứ tự riêng trên tập $P(S)$, và $(P(S), \subseteq)$ là một poset.

QUAN HỆ

7. Quan hệ thứ tự

□ Định nghĩa 2:

- ✓ Phần tử a và p của một poset (S, \leq) được gọi là so sánh được nếu hoặc $a \leq b$ hoặc $b \leq a$.
- ✓ Khi a và b là các phần tử của S mà không có $a \leq b$ cũng như $b \leq a$ thì a và b được gọi là không so sánh được.

Ví dụ 4: Trong tập poset $(\mathbb{Z}^+, |)$, các số nguyên 3 và 9 có so sánh được không? 5 và 7 có so sánh được không?

Lời giải:

Số nguyên 3 và 9 là so sánh được vì 3 là ước số của 9

Số nguyên 5 và 7 là không so sánh được, bởi 5 không là ước của 7 và 7 không là ước của 5.

QUAN HỆ

7. Quan hệ thứ tự

□ Định nghĩa 3:

- ✓ Nếu (S, \leq) là một poset và giữa hai phần tử tùy ý của S đều so sánh được thì S được gọi là thứ tự toàn phần (sắp xếp toàn phần), hoặc tập thứ tự tuyến tính, và \leq được gọi là một thứ tự toàn phần hoặc thứ tự tuyến tính.

Ví dụ 5: Chứng minh rằng poset (\mathbb{Z}, \leq) , là thứ tự toàn phần

Lời giải:

poset (\mathbb{Z}, \leq) là thứ tự toàn phần bởi với bất kỳ số nguyên a, b nào ta đều có $a \leq b$ hoặc $b \leq a$.

Ví dụ 6: Poset $(\mathbb{Z}^+, |)$ không là thứ tự toàn phần

Lời giải:

Poset $(\mathbb{Z}^+, |)$ không là thứ tự toàn phần bởi nó chứa những phần tử không so sánh được, chẳng hạn như 5 và 7.

QUAN HỆ

7. Quan hệ thứ tự

□ Định nghĩa 3:

- ✓ Nếu (S, \leq) là một tập sắp xếp tốt nếu nó là một poset sao cho \leq là một thứ tự toàn phần và mọi tập con khác rỗng của S có một phần tử nhỏ nhất

Ví dụ 7:

- Tập các cặp thứ tự gồm các số nguyên dương $\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$, với \leq được xác định $(a_1, a_2) \leq (b_1, b_2)$ nếu $a_1 \leq b_1$ và $a_2 \leq b_2$ là một tập sắp xếp tốt.
- Tập \mathbb{Z} với quan hệ thứ tự \leq thường, không là thứ tự tốt bởi tập số nguyên âm, tập con của \mathbb{Z} không có phần tử nhỏ nhất

QUAN HỆ

7. Quan hệ thứ tự

□ Phần tử maximal và minimal

- ✓ Các phần tử của poset có những tính chất cực kỳ quan trọng trong nhiều ứng dụng.
- ✓ Một phần tử của một poset được gọi là maximal nếu nó không nhỏ hơn bất kỳ phần tử nào của poset. Nghĩa là a là maximal trong poset (S, \leq) nếu nó không có phần tử b nào thuộc S sao cho $a < b$.
- ✓ Tương tự, một phần của poset được gọi là minimal nếu nó không lớn hơn bất kỳ phần tử nào của poset. Nghĩa là, a là minimal nếu không có phần tử b thuộc S sao cho $b < a$.
- ✓ Các phần tử maximal và minimail dễ dàng được chỉ ra khi sử dụng biểu đồ Hasse. Chúng là các phần tử trên và dưới trong biểu đồ.

QUAN HỆ

7. Quan hệ thứ tự

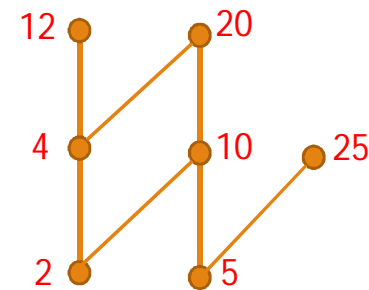
Ví dụ 8: Những phần tử nào của poset $(\{2, 4, 5, 10, 12, 20, 25\}, |)$ là maximal, minimai ?

Lời giải:

Sử dụng biểu đồ Hasse cho poset này chỉ ra:

Các phần tử maximal là 12, 20 và 25

Các phần tử minimal là 2 và 5



QUAN HỆ

7. Quan hệ thứ tự

□ Phần tử lớn nhất max và phần tử nhỏ nhất min

- ✓ Đôi khi có một phần tử trong poset mà nó lớn hơn mọi phần tử khác. Một phần tử như vậy được gọi là phần tử lớn nhất. Nghĩa là a là phần tử lớn nhất của poset (S, \leq) nếu $b \leq a$ với mọi b thuộc S . Phần tử lớn nhất là duy nhất nếu có.
- ✓ Tương tự, một phần tử được gọi là nhỏ nhất nếu nó nhỏ hơn tất cả phần tử khác trong poset. Nghĩa là a là phần tử nhỏ nhất của poset (S, \leq) nếu $a \leq b$ với mọi b thuộc S . Phần tử nhỏ nhất là duy nhất nếu có.

QUAN HỆ

7. Quan hệ thứ tự

Ví dụ 9: Những phần tử nào của poset $(\{2, 4, 5, 10, 12, 20, 25\}, |)$ là maximal, minimai ?

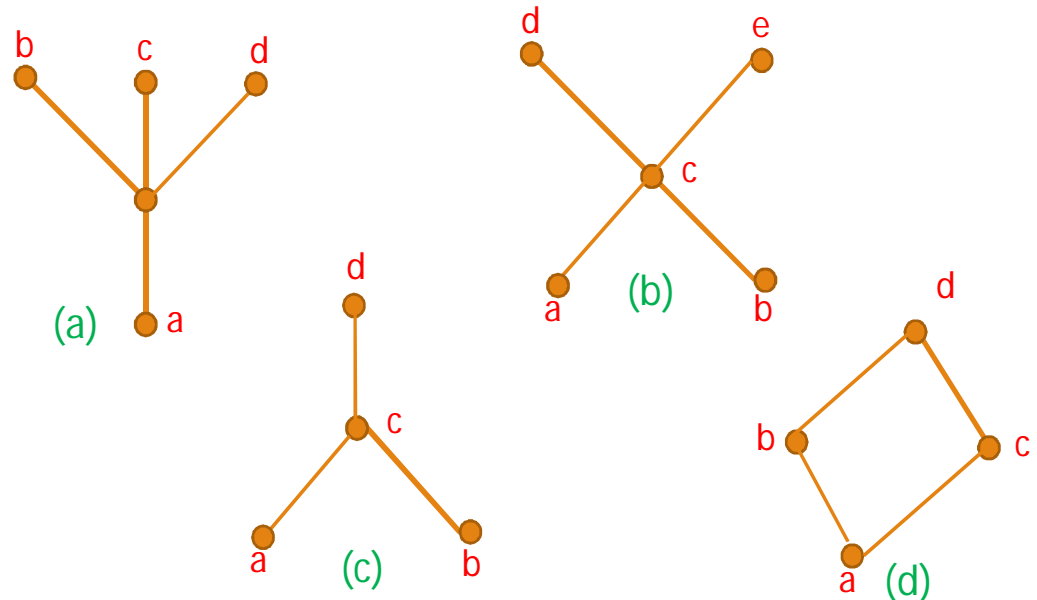
Lời giải:

Hình (a): phần tử nhỏ nhất của poset là a, poset này không có phần tử lớn nhất.

Hình (b): poset này không có phần tử lớn nhất và cũng không có phần tử nhỏ nhất.

Hình (c): poset này không có phần tử nhỏ nhất và phần tử lớn nhất là d

Hình (d): poset này có phần tử nhỏ nhất là a và phần tử lớn nhất là d.



QUAN HỆ

7. Quan hệ thứ tự

□ Cận trên nhỏ nhất và cận dưới lớn nhất.

- ✓ Phần tử x được gọi là cận trên nhỏ nhất của tập con A nếu x là một cận trên mà nó nhỏ hơn mọi cận trên của A . Bởi chỉ có một phần tử như vậy nếu có nên nó được gọi là cận trên nhỏ nhất
- ✓ Tương tự, phần tử y được gọi là cận dưới lớn nhất của A nếu y là một cận dưới của A và nó lớn hơn mọi cận dưới khác của A .
- ✓ Cận trên nhỏ nhất của tập A ký hiệu là $\text{lub}(A)$
- ✓ Cận dưới lớn nhất của tập A ký hiệu là $\text{glb}(A)$

QUAN HỆ

7. Quan hệ thứ tự

Ví dụ 10: Tìm cận trên nhỏ nhất và cận dưới lớn nhất của các tập $\{3,9,12\}$, $\{1,2,4,5,10\}$ nếu có trong poset $(\mathbb{Z}^+, |)$

Lời giải:

Một số nguyên là một cận dưới của tập $\{3,9,12\}$ nếu nó là ước của tất cả 3,9,12. Chỉ có 1 và 3 là các số nguyên như vậy. 1 là ước của 3 nên 3 là cận dưới lớn nhất của $\{3,9,12\}$. Cận dưới tập $\{1,2,4,5,10\}$ đối với quan hệ ước số là 1. Do vậy 1 là cận dưới lớn nhất của tập này.

Một số nguyên là cận trên của $\{3,9,12\}$ nếu tất cả các số 3,9,12 đều là ước của nó. Các số nguyên có tính chất này là những số nguyên có ước là bội chung nhỏ nhất của 3,9,12 là 36. Do vậy 36 là cận trên nhỏ nhất của $\{3,9,12\}$

Tương tự, cận trên nhỏ nhất của $\{1,2,4,5,10\}$ là 20.