TÍCH PHÂN SUY RỘNG

Chú ý về thuật ngữ:

Tích phân suy rộng hội tụ nếu tính được giá trị hữu hạn.

Tích phân suy rộng phân kỳ nếu hoặc tính được giá trị bằng $\pm\infty$ hoặc không thể xác định được giá trị.

I. Tích phân suy rộng loại 1 (hay tích phân với cận vô hạn)

Công cụ bổ trợ: Tính tích phân xác định, tính đạo hàm

• Tính $\boldsymbol{I = \int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x}$

$\boxed{\text{Bước 1:}}$ Tính $\boldsymbol{I(A) = \int_a^{A} f(x)\,\mathrm{d}x}$

$\boxed{\text{Bước 2:}}$ $\boldsymbol{I = \lim\limits_{A\to+\infty} I(A).}$

- Tính $\boldsymbol{I = \int\limits_{-\infty}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x}$

$\boxed{\text{Bước 1:}}$ Tính $\boldsymbol{I(B) = \int\limits_{B}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x}$

$\boxed{\text{Bước 2:}}$ $\boldsymbol{I = \lim\limits_{B\to-\infty} I(B).}$

- Tính $\boldsymbol{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{B\to-\infty}\int\limits_{B}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \lim\limits_{A\to+\infty}\int\limits_{0}^{A} f(x)\,\mathrm{d}x.}$

VD 1. Tính các tích phân suy rộng sau

a) $\boldsymbol{I = \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}}.$ b) $\boldsymbol{I = \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{\mathrm{d}x}{4+x^2}}$

c) $\boldsymbol{I = \int\limits_{e^2}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln^3 x}}.$ d) $\boldsymbol{I = \int\limits_{2}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+x-2}}.$

e) $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + 2x + 5}.$

Giải:

a) Ta có

$$I(A) = \int_1^A \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_1^A = 1 - \frac{1}{A}.$$

Vậy

$$I = \lim_{A \to +\infty} I(A) = \lim_{A \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{A}\right) = 1,$$

vì $\displaystyle\lim_{A \to +\infty} \frac{1}{A} = 0.$

$$\boxed{\textbf{Ghi nhớ: } \int \frac{dx}{x^n} = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} \ (\text{với } n \neq 1)}$$

b) Ta có

$$\boldsymbol{I(B) = \int_{B}^{0} \frac{\mathrm{d}x}{4+x^2} = \arctan\left(\frac{x}{2}\right)\Big|_{B}^{0} = \arctan 0 - \arctan\left(\frac{B}{2}\right)}$$

$$\boldsymbol{= -\arctan\left(\frac{B}{2}\right)} \text{ vì } \boldsymbol{\arctan 0 = 0.}$$

Vậy

$$\boldsymbol{I = \lim_{B\to-\infty} I(B) = \lim_{B\to-\infty}\left(-\arctan\left(\frac{B}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{2}.}$$

$\boxed{\textbf{Ghi nhớ: } \lim_{x\to+\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2} \text{ và } \lim_{x\to-\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}}$

c) Ta có $\boldsymbol{I(A) = \int_{e^2}^{A} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln^3 x}}$. Đặt $\boldsymbol{t = \ln x \to dt = \frac{dx}{x}}$. Đổi cận: $\boldsymbol{x = e^2 \to t = 2}$; $\boldsymbol{x = A \to t = \ln A.}$

$$I(A)=\int_2^{\ln A}\frac{dt}{t^3}=\left(-\frac{1}{2t^2}\right)\Big|_2^{\ln A}=\frac{1}{8}-\frac{1}{2\ln^2 A}.$$

Vậy $I=\lim\limits_{A\to+\infty} I(A)=\lim\limits_{A\to+\infty}\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{2\ln^2 A}\right)=\frac{1}{8}$.

Ghi nhớ: $\lim\limits_{x\to+\infty}\log_a x=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to 0+}\log_a x=-\infty$ (với $a>1$)

Ghi nhớ: $\lim\limits_{x\to+\infty}\log_a x=-\infty$ và $\lim\limits_{x\to 0+}\log_a x=+\infty$ (với $0<a<1$)

Ghi nhớ: $\int\frac{dx}{x^n}=-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$ (với $n\neq 1$)

d) Ta có

$$I(A)=\int_2^{A}\frac{dx}{x^2+x-2}=\int_2^{A}\frac{dx}{(x-1)(x+2)}$$
$$=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|\Big|_2^{A}=-\frac{1}{3}\ln\left(\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{3}\ln\left|\frac{A-1}{A+2}\right|.$$

Vậy

$$I = \lim_{A\to+\infty} I(A) = \lim_{A\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\ln 4 + \frac{1}{3}\ln\left|\frac{A-1}{A+2}\right|\right) = \frac{1}{3}\ln 4$$

vì $\lim\limits_{A\to+\infty} \ln\left|\dfrac{A-1}{A+2}\right| = \ln\left(\lim\limits_{A\to+\infty}\left|\dfrac{A-1}{A+2}\right|\right) = \ln 1 = 0.$

Ghi nhớ: $\boxed{\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0} = \dfrac{a_n}{b_n}}$

Ghi nhớ:

$$\boxed{\ln\left(\frac{1}{A}\right) = -\ln A \text{ và } \ln(u^v) = v\ln u,\ \ln(e^u) = u}$$

$$\boxed{\lim_{x\to a}\ln f(x) = \ln\left(\lim_{x\to a} f(x)\right) \text{ (với } f(x) > 0 \text{ và } a \in \mathbb{R} \text{ hoặc } a = \pm\infty)}$$

Ghi nhớ: $\boxed{\displaystyle\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln|ax+b| \text{ (với } a \neq 0)}$

$$\boxed{\int \frac{dx}{(ax+b)(cx+d)} = \frac{1}{ad-bc}\ln\left|\frac{ax+b}{cx+d}\right| \text{ (với } ad-bc\neq 0)}$$

e) Ta có

$$I = \lim_{B\to-\infty}\int_B^0 \frac{dx}{x^2+2x+5} + \lim_{A\to+\infty}\int_0^A \frac{dx}{x^2+2x+5}$$

$$= \lim_{B\to-\infty}\int_B^0 \frac{dx}{(x+1)^2+2^2} + \lim_{A\to+\infty}\int_0^A \frac{dx}{(x+1)^2+2^2}$$

$$= \lim_{B\to-\infty}\left[\frac{1}{2}\arctan\frac{x+1}{2}\Big|_B^0\right] + \lim_{A\to+\infty}\left[\frac{1}{2}\arctan\frac{x+1}{2}\Big|_0^A\right]$$

$$= \frac{1}{2}\arctan\frac{1}{2} - \lim_{B\to-\infty}\left(\frac{1}{2}\arctan\frac{B+1}{2}\right) +$$

$$+ \lim_{A\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\arctan\frac{A+1}{2}\right) - \frac{1}{2}\arctan\frac{1}{2}$$

$$= -\frac{1}{2}.\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}.\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

$$\boxed{\textbf{Ghi nhớ: } \int \frac{\mathrm{d}x}{(cx+d)^2+a^2} = \frac{1}{ac}\arctan\left(\frac{cx+d}{a}\right) \ \textbf{(với } ac \neq 0\textbf{)}}$$

VD 2. Tính tích phân suy rộng

$$I = \int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}, \quad a > 0,\ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Giải. Nếu $\alpha = 1$, ta có

$$I = \int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \lim_{A\to+\infty} \int_a^{A} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \lim_{A\to+\infty} \ln x \Big|_a^A = \lim_{A\to+\infty} (\ln A - \ln a) = +\infty,$$

tích phân phân kỳ.

Nếu $\alpha \neq 1$, ta có

$$I(A) = \int_a^{A} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_a^A = \frac{A^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{a^{1-\alpha}}{1-\alpha},$$

suy ra

$$I = \lim_{A\to+\infty} I(A) = -\frac{a^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \frac{1}{1-\alpha} \lim_{A\to+\infty} A^{1-\alpha}.$$

Vậy

$$\boldsymbol{I} = \begin{cases} -\dfrac{\boldsymbol{a^{1-\alpha}}}{\boldsymbol{1-\alpha}} & \text{khi} \quad \boldsymbol{1-\alpha < 0 \Leftrightarrow \alpha > 1,} \\ \\ +\infty & \text{khi} \quad \boldsymbol{1-\alpha > 0 \Leftrightarrow \alpha < 1.} \end{cases}$$

Tóm lại $\boldsymbol{I = \int\limits_a^{+\infty} \frac{\mathbf{d}x}{x^\alpha}}$ hội tụ khi $\boldsymbol{\alpha > 1}$ và phân kỳ khi $\boldsymbol{\alpha \leq 1}$.

II. Tích phân suy rộng loại 2 (hay tích phân của hàm không bị chặn)

Để thuận tiện, nếu $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ thì ta viết $f(a) = \pm\infty$ (hàm số ko bị chặn tại a).

- Tính $I = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ (với $f(b) = \pm\infty$)

$\boxed{\text{Bước 1:}}$ Tính $I(c) = \int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$

$\boxed{\text{Bước 2:}}$ $I = \lim\limits_{c \to b^-} I(c).$

- Tính $I = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ (với $f(a) = \pm\infty$)

$\boxed{\text{Bước 1:}}$ Tính $\boldsymbol{I(c) = \int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x}$

$\boxed{\text{Bước 2:}}$ $\boldsymbol{I = \lim\limits_{c \to a^+} I(c).}$

• Tính $\boldsymbol{I = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}$ (với $\boldsymbol{f(b) = \pm\infty}$ và $\boldsymbol{f(a) = \pm\infty}$). Lấy $\boldsymbol{d \in (a, b)}$, chẳng hạn $\boldsymbol{d = \dfrac{a+b}{2}}$.

$$\boldsymbol{I = \lim_{A \to a^+} \int\limits_A^d f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{B \to b^-} \int\limits_d^B f(x)\,\mathrm{d}x.}$$

- Tính $\boldsymbol{I} = \int\limits_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$ (với $c \in (a, b)$ sao cho $f(c) = \pm\infty$).

$\boldsymbol{I} = \int\limits_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{a}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{c}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$. Tính $\int\limits_{a}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x$ và $\int\limits_{c}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$ và suy ra kết quả về $\boldsymbol{I}$.

- **Chú ý:** **Nếu tích phân suy rộng chứa cả hai loại suy rộng 1 và 2 thì ta tách thành tổng các tích phân mà các tích phân suy rộng này thuộc một loại.** Chẳng hạn $\boldsymbol{I} = \int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ (với $f(a) = \pm\infty$). Ta lấy $d \in (a, +\infty)$.

$\boldsymbol{I} = \int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{a}^{d} f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{d}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$. Tính $\int\limits_{a}^{d} f(x)\,\mathrm{d}x$ và $\int\limits_{d}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ và suy ra kết quả về $\boldsymbol{I}$.

VD 3. Tính các tích phân suy rộng sau:

a) $\boldsymbol{I = \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}}$.

b) $\boldsymbol{I = \int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}}$.

c) $\boldsymbol{I = \int\limits_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)\arctan x}}$.

Giải:

a) (chú ý: Ta thấy $\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{1-x} \to +\infty}$ khi $\boldsymbol{x \to 1-}$ và $\boldsymbol{f(x)}$ liên tục trên $\boldsymbol{[0,1)}$)

Ta có

$$I(c) = \int_0^c \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \left(-2\sqrt{1-x}\right)\Big|_0^c = 2 - 2\sqrt{1-c}.$$

Vậy

$$I = \lim_{c\to 1-} I(c) = \lim_{c\to 1-} \left(2 - 2\sqrt{1-c}\right) = 2.$$

Ghi nhớ: $\boxed{\int \frac{dx}{\sqrt{ax+b}} = \frac{2}{a}\sqrt{ax+b} \text{ (với } a \neq 0)}$

b) (chú ý: Hàm số $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}} \to +\infty$ khi $x \to 2-$ và $f(x)$ liên tục trên $[0, 2)$)

Ta có

$$I(c) = \int_0^c \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \int_0^c \frac{dx}{\sqrt{2^2-x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{2}\right)\Big|_0^c$$

$$= \arcsin\left(\frac{c}{2}\right) - \arcsin 0 = \arcsin\left(\frac{c}{2}\right) \text{ vì } \arcsin 0 = 0.$$

Vậy

$$I = \lim_{c \to 2-} I(c) = \lim_{c \to 2-} \arcsin\left(\frac{c}{2}\right) = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}.$$

c) (chú ý: Hàm số $f(x) = \dfrac{1}{(1+x^2)\arctan x} \to +\infty$ khi $x \to 0+$ và $f(x)$ liên tục trên $(0,1]$)

Ta có

$$I(c) = \int_c^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)\arctan x}$$

Đặt $t = \arctan x \Rightarrow dt = \dfrac{dx}{1+x^2}$. Đổi cận: $x = c \to t = \arctan c$; $x = 1 \to t = \dfrac{\pi}{4}$ (vì $\arctan 1 = \dfrac{\pi}{4}$).

$$I(c) = \int\limits_{\arctan c}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{t} = (\ln|t|)\Big|_{\arctan c}^{\frac{\pi}{4}} = \ln\left(\frac{\pi}{4}\right) - \ln|\arctan c|.$$

Vậy $I = \lim\limits_{c\to 0+} I(c) = \lim\limits_{c\to 0+} \left[\ln\left(\frac{\pi}{4}\right) - \ln|\arctan c|\right] = +\infty,$

vì $\lim\limits_{c\to 0+} \arctan c = \arctan 0 = 0$ nên $\lim\limits_{c\to 0+} \ln|\arctan c| = -\infty$. Suy ra tích phân suy rộng phân kỳ.

Ghi nhớ (kết quả sau vẫn đúng cho giới hạn một phía):

$$\boxed{\text{Nếu } \lim\limits_{x\to a} u(x) = 0 \text{ và } u(x) \neq 0, \forall x \neq a \text{ thì } \lim\limits_{x\to a} \ln|u(x)| = -\infty.}$$

VD 4. Tính tích phân

$$I = \int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}.$$

Giải. (hàm $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$ có $f(0) = +\infty$, cận suy rộng là $\mathbf{0}$)

Ta có $\boldsymbol{I = \lim\limits_{c\to 0^+} I_c = \lim\limits_{c\to 0^+} \int\limits_{c}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}}$.

Đổi biến $\boldsymbol{u = \sqrt{x}}$ thì $\boldsymbol{du = \frac{dx}{2\sqrt{x}}}$ và

$$\boldsymbol{I_c = 2\int\limits_{\sqrt{c}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = 2\arcsin u\Big|_{\sqrt{c}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 2\left(\frac{\pi}{4} - \arcsin\sqrt{c}\right),}$$

vì $\boldsymbol{\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}}$. Suy ra $\boldsymbol{I = \lim\limits_{c\to 0^+} I_c = \frac{\pi}{2}}$.

VD 5. Tính tích phân suy rộng

$$\boldsymbol{I = \int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}, \qquad \alpha > 0.}$$

Giải. (chú ý: cận suy rộng là **0**)

• Với $\alpha = 1$ thì I phân kỳ vì

$$I_c = \int_c^1 \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln x\Big|_c^1 = -\ln c \to +\infty \text{ khi } c \to 0^+.$$

• Với $\alpha \neq 1$ thì

$$I = \lim_{c\to 0^+}\left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_c^1\right] = \lim_{c\to 0^+}\frac{1-c^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha} & \text{khi } \alpha < 1, \\ +\infty & \text{khi } \alpha > 1. \end{cases}$$

Vậy TPSR I hội tụ khi và chỉ khi $0 < \alpha < 1$, phân kỳ khi $\alpha \geq 1$.

III. Bài tập: 1. Tính các tích phân suy rộng sau:

1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$ 2) $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln^2 x}$ 3) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+1}}$

4) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} xe^x\,\mathrm{d}x$ 5) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+9}$ 6) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x\,\mathrm{d}x}{x^2+1}$.

Hướng dẫn tính các tích phân bài 1: 1) đổi biến $\boldsymbol{t = \arctan x}$*; 2) đổi biến* $\boldsymbol{t = \ln x}$*; 3) đổi biến* $\boldsymbol{t = \sqrt{x^2+1}}$**;** *4) tích phân từng phần; 5) phân tích* $\boldsymbol{x^2 + 4x + 9 = (x+2)^2 + 5}$**;** *6) đổi biến* $\boldsymbol{t = x^2 + 1}$**.**

2. Tính các tích phân suy rộng sau:

1) $\displaystyle\int_0^2 \frac{\sqrt{2+x}}{\sqrt{2-x}}\,dx$ 2) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$ 3) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

4) $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^3\,dx}{\sqrt{4-x^2}}$ 5) $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{x\ln x}$ 6) $\displaystyle\int_0^2 \frac{x\,dx}{\sqrt{4-x^2}}$

7) $\displaystyle\int_{-1}^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$ 8) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x\ln^2 x}$ 9) $\displaystyle\int_0^1 x\ln x\,dx$.

Hướng dẫn tính các tích phân bài 2: 1) đổi biến $\boldsymbol{t = \sqrt{2+x}}$*; 2) đổi biến* $\boldsymbol{t = \sqrt{x}}$*; 3) nguyên hàm hàm* $\boldsymbol{\arcsin x}$*; 4) đổi biến* $\boldsymbol{t = \sqrt{4-x^2}}$*; 5) đổi* *biến* $\boldsymbol{t = \ln x}$*; 6) đổi biến* $\boldsymbol{t = \sqrt{4 - x^2}}$*; 7) đổi biến* $\boldsymbol{t = \sqrt[3]{x - 1}}$*; 8) đổi biến* $\boldsymbol{t = \ln x}$*; 9) tích phân từng phần.*