PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN TUYẾN TÍNH CẤP 1

PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN TUYẾN TÍNH

Dạng $y' + p(x)y = q(x)$,

trong đó $p(x), q(x)$ liên tục trên khoảng $I \subset \mathbb{R}$.

★ Nghiệm tổng quát (NTQ) luôn có dạng $y = H(x, C)$, với C là hằng số.

★ Nếu $q(x) \equiv 0$ thì ta được phương trình:$y' + p(x)y = 0$, được gọi là **phương trình vi phân thuần nhất**.

★ **Cách giải**

• PTVP thuần nhất $y' + p(x)y = 0$ có NTQ là $y = Ce^{-\int p(x)dx}$.

• PTVP $y' + p(x)y = q(x)$ có NTQ là

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left(C + \int q(x).e^{\int p(x)dx}dx\right).$$

Ghi nhớ các bước giải PTVP $y' + p(x)y = q(x)$:

- Bước 1: Xác định $p = p(x), q = q(x)$.

- Bước 2: Tính $A = \int p\, dx$. (Chú ý linh hoạt: Kết quả không cộng thêm hằng số C, nếu có liên quan kết quả ra $\ln|u|$, ta có thể viết $\ln u$ (tức là bỏ dấu trị tuyệt đối)

- Bước 3: Tính $B = \int q.e^A\, dx$. (Chú ý: Kết quả không cộng thêm hằng số C, nếu có liên quan kết quả ra $\ln|u|$, thì vẫn giữ nguyên và không được bỏ dấu trị tuyệt đối)

- Bước 4: NTQ là

$$y = e^{-A}(C + B),$$

với C là hằng số bất kỳ.

★ Cách giải dạng phương trình vi phân tuyến tính $\boxed{a(x)y' + b(x)y + c(x) = 0.}$

→ Chuyển vế $c(x)$ sang phải và chia cả hai vế cho $a(x)$, ta nhận được

$$y' + \frac{b(x)}{a(x)}y = -\frac{c(x)}{a(x)}.$$

→ Áp dụng công thức nghiệm tổng quát cho phương trình trên với $p = \frac{b(x)}{a(x)}$ và $q = -\frac{c(x)}{a(x)}$.

★ Quy trình giải phương trình vi phân tuyến tính $\boxed{a(x)y' + b(x)y + c(x) = 0}$, với điều kiện đầu $y(x_0) = y_0$ (hoặc viết là $y|_{x=x_0} = y_0$)

→ Tìm NTQ của PTVP: $y = h(x, C)$, C là hằng số bất kỳ.

→ Tính $y(x_0) = h(x_0, C)$. Cho $h(x_0, C) = y_0$, tìm được $C = C_0$. Nghiệm là $y = h(x, C_0)$.

VD 1. Giải phương trình vi phân tuyến tính

$$\boxed{y' + \frac{y}{x} = \frac{\sin x}{x}, \quad (x > 0)}.$$

Giải. PT đã cho là PTTT cấp một với $p = \dfrac{1}{x}$ và $q = \dfrac{\sin x}{x}$. Ta có:

$$A = \int p(x)\, dx = \int \frac{1}{x}\, dx = \ln x$$

$$B = \int q.e^{A}\, dx = \int \frac{\sin x}{x}.e^{\ln x}\, dx = \int \frac{\sin x}{x}.x\, dx = \int \sin x\, dx = -\cos x$$

Vậy NTQ của pt này là

$$y = e^{-\int p\, dx}\left(C + \int q.e^{\int p\, dx}\, dx\right)$$

$$= e^{-\ln x}(C - cosx)$$

$$= \frac{1}{x}(C - cosx) = \frac{C - \cos x}{x}.$$

Ghi nhớ: $e^{m\ln A} = A^m$ và $e^{-m\ln A} = \dfrac{1}{A^m}$

VD 2. Giải bài toán giá trị ban đầu

$$\boxed{y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3, \quad y(0) = \frac{1}{2}, \quad (x \neq 1)}.$$

Giải. PT trên là tuyến tính cấp một với $p = -\dfrac{2}{x+1}$ và $q = (x+1)^3$.

Ta có: $A = \int p\, dx = \int -\frac{2}{x+1} dx = -2\ln(x+1)$

$B = \int q.e^A\, dx = \int (x+1)^3.e^{-2\ln(x+1)}\, dx = \int (x+1)\, dx = \dfrac{x^2}{2} + x$

NTQ của PT là

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int p\, dx}\left(C + \int q.e^{\int p\, dx}\, dx\right) \\ &= e^{2\ln(x+1)}\left(C + \frac{x^2}{2} + x\right) = (x+1)^2\left(C + \frac{x^2}{2} + x\right). \end{aligned}$$

Do $y(0) = C$ nên $C = \dfrac{1}{2}$. Vậy nghiệm riêng cần tìm là

$$y = \left(\frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2}\right)(x+1)^2 = \frac{(x+1)^4}{2}.$$

Ghi nhớ: $\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln |ax+b|.$

VD 3. Giải phương trình $\boxed{(x+y^2)dy = ydx}$.

Giải. Nếu ta xem y là hàm số cần tìm, x là biến số độc lập thì phương trình đã cho không là PTTT.

Ta coi x là hàm số cần tìm, y là biến số độc lập, khi đó phương trình có thể viết thành

$$y\frac{dx}{dy} = x + y^2 \quad \text{hay} \quad yx' - x = y^2 \quad \text{hay} \quad x' - \frac{x}{y} = y.$$

Đây là PTTT theo biến y. Giải tương tự ta có NTQ cần tìm là

$$x = Cy + y^2.$$

Sinh viên tự giải

Giải các phương trình sau:

1. $y' - y\cot x = 2x\sin x.$

   ĐS: $y = x^2\sin x + C\sin x.$

2. $xy' - 3y = x^2,$ thỏa mãn $y(1) = 1.$

   ĐS: $y = Cx^3 - x^2,\ y(1) = 1 \Rightarrow C = 2 \rightarrow y = 2x^3 - x^2.$

3. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x\cos y + \sin 2y}.$

   HD: Coi x *là hàm số cần tìm,* y *là biến số. ĐS:* $x = Ce^{\sin y} - 2\sin y - 2.$