BÀI GIẢNG TOÁN CAO CẤP

MỘT SỐ ĐỊNH LÝ KHẢ VI - CÔNG THỨC TAYLOR - QUI TẮC L'HOSPITAL

I. MỘT SỐ ĐỊNH LÝ KHẢ VI CỦA HÀM SỐ MỘT BIẾN

1. Định lý Rolle. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trong $[a, b]$ và khả vi trong (a, b). Nếu $f(a) = f(b)$ thì tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a, b)$ sao cho $f'(c) = 0$.

2. Định lý giá trị trung bình (Lagrange). Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trong $[a, b]$ và khả vi trong (a, b) thì tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a, b)$ sao cho

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \quad (\text{hay } f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)).$$

Đặc biệt, ta có định lý giá trị trung bình cho tích phân như sau: Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trong $[a, b]$ thì tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a, b)$ sao cho

$$f(c) = \frac{\int\limits_a^b f(x)\, dx}{b - a} \quad \left(\text{hay } \int\limits_a^b f(x)\, dx = f(c)(b - a) \right).$$

II. CÔNG THỨC TAYLOR

Định lý (Công thức Taylor): Giả sử hàm số $f(x)$ khả vi n lần trong khoảng $(a-\delta, a+\delta)$ với $\delta > 0$ nào đó. Khi đó, với h bất kỳ thỏa mãn $|h| < \delta$, luôn tồn tại số $\theta \in (0,1)$ sao cho

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + \frac{h}{1!}f'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a) + R_n \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(a) + R_n, \end{aligned}$$

ở đây

$$R_n = \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a+\theta h).$$

- **Trong định lý trên, nếu thay $a + h$ bởi x thì với mỗi x thỏa mãn $|x - a| < \delta$, tồn tại $\theta \in (0, 1)$ sao cho**

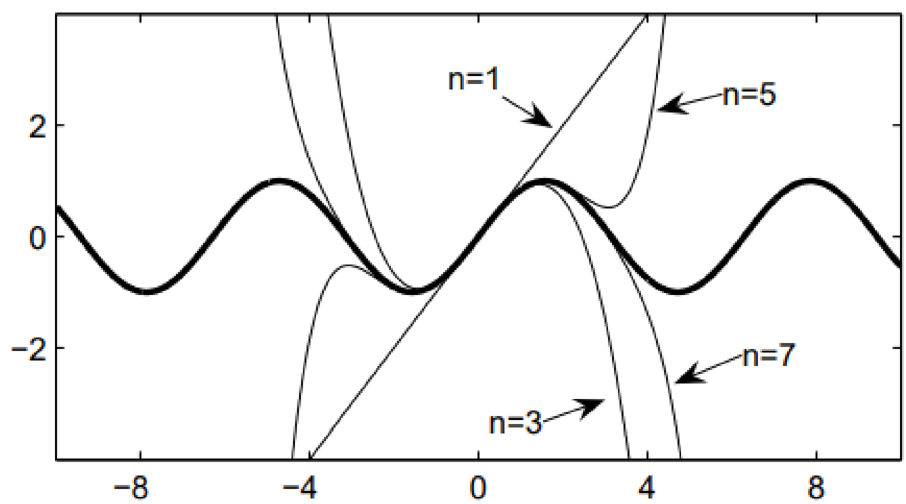
$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!}f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a) + R_n$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + R_n,$$

ở đây $R_n = \dfrac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a + \theta \cdot (x-a))$.

Chú ý: • R_n trong định lý trên được gọi là phần dư của khai triển.

• Công thức Taylor cho phép ta xấp xỉ hàm $f(x)$ bởi một đa thức trong một lân cận của a. Đa thức $f(a) + \frac{x-a}{1!}f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)$ được gọi là đa thức Taylor bậc n và khi đó R_{n+1} được gọi là sai số của xấp xỉ này. Tính chính xác của xấp xỉ phụ thuộc vào độ lớn của R_{n+1} trong lân cận của a.



• Nếu $f(x)$ có đạo hàm mọi cấp và các đạo hàm bị chặn trong $(a-\delta, a+\delta)$ thì $R_n \to 0$ khi $n \to \infty$. Khi đó, với mọi h sao cho $|h| < \delta$, ta có

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + \frac{h}{1!}f'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a) + \cdots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(a). \end{aligned}$$

Đây được gọi là chuỗi Taylor của f tại a. Trong trường hợp $a = 0$, ta nhận được

$$\begin{aligned} f(h) &= f(0) + \frac{h}{1!}f'(0) + \frac{h^2}{2!}f''(0) + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(0) + \cdots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(0). \end{aligned}$$

Đây được gọi là chuỗi Maclaurin của f.

Chú ý: Trong trường hợp tổng quát (xét hàm số $f(x)$ có các đạo hàm có thể không bị chặn trong lân cận của điểm a), chuỗi Taylor $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(a)$ có thể không bằng $f(a+h)$, nghĩa là

$$f(a+h) \neq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(a),$$

với h nào đó.

III. QUI TẮC L'HOSPITAL (Lô-pi-tan)

Qui tắc L'Hospital

Giả sử $f(x), g(x)$ là hai hàm số khả vi trong lân cận V của a (có thể trừ ra điểm $a \in (c, d)$) sao cho $g'(x) \neq 0$, với mọi $x \in V \backslash \{a\}$ và $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$ (hoặc $\pm\infty$).

Nếu $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$, với L hữu hạn hoặc $L = \pm\infty$, thì

$$I = \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L.$$

Chú ý 1:

★ **Quy tắc L'Hospital vẫn đúng khi thay $x \to a$ bởi $x \to a^+$, $x \to a^-$ và $x \to \pm\infty$.**

★ **Quy tắc Lô-pi-tan có thể được áp dụng để khử dạng $\frac{0}{0}$ hoặc dạng $\frac{\infty}{\infty}$.**

★ **Chúng ta có thể áp dụng liên tiếp Lô-pi-tan (nếu vẫn đúng dạng), tức là**

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} \underset{\frac{0}{0}(\frac{\infty}{\infty})}{\overset{(L)}{=}} \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} \underset{\frac{0}{0}(\frac{\infty}{\infty})}{\overset{(L)}{=}} \lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)} = \cdots$$

VD 1. $I = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{3x}$ (dạng $\frac{0}{0}$)

$$\boldsymbol{I} \overset{(L)}{=} \lim_{x \to 0} \frac{2\cos 2x}{3} = \frac{2}{3}.$$

VD 2. $\boldsymbol{I} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin 9x - \sin 11x}$ (dạng $\frac{0}{0}$)

$$\boldsymbol{I} \overset{(L)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{5\cos 5x - 3\cos 3x}{9\cos 9x - 11\cos 11x}$$
$$= \frac{5-3}{9-11} = -1.$$

VD 3. $\boldsymbol{I} = \lim_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x - 2x}{x^3}$ (dạng $\frac{0}{0}$)

$$\boldsymbol{I \overset{(L)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2\cos 2x - 2}{3x^2}} \quad (\text{dạng } \tfrac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}})$$

$$\boldsymbol{\overset{(L)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-4\sin 2x}{6x} \overset{(L)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-8\cos 2x}{6} = -\frac{4}{3}}.$$

VD 4. $\boldsymbol{I = \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(x + 2^x)}{x}}$ (dạng $\frac{\infty}{\infty}$)

$$\boldsymbol{I} \overset{(L)}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1+2^x \ln 2}{x+2^x}}{1}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1+2^x \ln 2}{x+2^x} \ \left(\text{dạng } \frac{\infty}{\infty}\right) \overset{(L)}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{2^x (\ln 2)^2}{1+2^x \ln 2} \ \left(\text{dạng } \frac{\infty}{\infty}\right)$$

$$\overset{(L)}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{2^x (\ln 2)^3}{2^x (\ln 2)^2} = \lim_{x\to+\infty} \ln 2 = \ln 2.$$

Chú ý 2:

Nếu $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ không tồn tại (hiểu theo nghĩa là: Lấy hai dãy số $\{x_n\}$ và $\{y_n\}$ thỏa mãn $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} y_n = a$ nhưng $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{f'(x_n)}{g'(x_n)} \neq \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{f'(y_n)}{g'(y_n)}$) thì chưa thể khẳng định được điều gì về $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, nó có thể tồn tại hoặc không tồn tại. Trong trường hợp này, ta tuyệt đối không áp dụng quy tắc L'hospital.

VD 5. Tìm $I = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin x + 2x}{x + \cos x}$ (dạng $\dfrac{\infty}{\infty}$).

Giải. Ta có $\boldsymbol{A(x) = \dfrac{(\sin x + 2x)'}{(x + \cos x)'} = \dfrac{2 + \cos x}{1 - \sin x}.}$

Xét hai dãy $\boldsymbol{\{x_n\}}$ với $\boldsymbol{x_n = 2n\pi}$ và $\boldsymbol{\{y_n\}}$ với $\boldsymbol{y_n = \pi + 2n\pi.}$ Ta thấy $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} y_n = +\infty.}$

Ta lại có $\boldsymbol{A(x_n) = 3}$ và $\boldsymbol{A(y_n) = 1}$ với mọi $\boldsymbol{n \geq 1.}$ Suy ra $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty} A(x_n) \neq \lim\limits_{n\to+\infty} A(y_n).}$ Do đó $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to+\infty} A(x)}$ không tồn tại.

Tuy nhiên, vì $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\cos x}{x} = 0 = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin x}{x},}$ nên

$$\boldsymbol{I = \lim_{x\to+\infty} \frac{2 + \frac{\sin x}{x}}{1 + \frac{\cos x}{x}} = 2.}$$

Chú ý 3:

$$\textit{Khi gặp các dạng vô định} \begin{cases} 0.\infty \\ \infty - \infty \\ \infty^0 \\ 1^\infty \\ 0^0 \end{cases} \rightarrow \textit{đưa về dạng } \frac{0}{0} \textit{ hoặc } \frac{\infty}{\infty}.$$

VD 6. Tính giới hạn $I = \lim\limits_{x \to 0^+} x^3 \ln x$ (dạng $0.\infty$)

Chú ý rằng: $0.\infty = \dfrac{\infty}{\frac{1}{0}}$ **(dạng** $\dfrac{\infty}{\infty}$**)** **hoặc** $0.\infty = \dfrac{0}{\frac{1}{\infty}}$ **(dạng** $\dfrac{0}{0}$**)**

Giải. **Ta có**

$$I = \lim_{x\to 0^+} x^3 \ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\dfrac{1}{x^3}} \quad (\text{dạng } \tfrac{\infty}{\infty})$$

$$\overset{(L)}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{-3}{x^4}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^3}{-3} = \ \ldots$$

VD 7. Tính giới hạn

$$I = \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right) \qquad (\text{dạng ???})$$

Giải. **Ta có**

$$\boldsymbol{I} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x\sin x}\ (\text{dạng } \tfrac{0}{0})$$
$$\overset{(L)}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{\sin x + x\cos x}\ (\text{dạng } \tfrac{0}{0})$$
$$\overset{(L)}{=} \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2\cos x - x\sin x} = 0.$$

VD 8. Tính giới hạn

$$\boldsymbol{I} = \lim_{x\to 0^+}(\tan x)^{2x} \qquad (\text{dạng ???})$$

Chú ý: $\lim\limits_{x\to x_0} u^v = \lim\limits_{x\to x_0} e^{\ln u^v} = e^{\lim\limits_{x\to x_0} v\ln u} = \cdots$

Giải. $I = \lim\limits_{x\to 0^+} (\tan x)^{2x}$ (dạng 0^0)

Ta có:

$$I = \lim_{x\to 0} e^{\ln(\tan x)^{2x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0} 2x \ln\tan x} = e^{2\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln\tan x}{\frac{1}{x}}} \qquad (\text{dạng } \tfrac{\infty}{\infty})$$

$$\overset{(L)}{=} e^{2\lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x \tan x}}{\frac{-1}{x^2}}} = e^{2\lim\limits_{x\to 0} \frac{-2x^2}{\sin 2x}} \qquad (\text{dạng } \tfrac{0}{0})$$

$$\overset{(L)}{=} e^{2\lim\limits_{x\to 0} \frac{-4x}{2\cos 2x}} = e^{???} = ???.$$

VD 9. Tính giới hạn

$$I = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2}{\pi} \arctan x\right)^x \qquad (\text{dạng } ???)$$

Giải. **Tính giới hạn**

$$I = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)^{x} \qquad (\text{dạng } 1^{\infty})$$

Ta có:

$$I = e^{\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)}{\frac{1}{x}}} \qquad \left(\text{dạng } \tfrac{0}{0}\right)$$

$$\overset{(L)}{=} e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{(1+x^2).\arctan x}}{\frac{-1}{x^2}}} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-x^2}{(1+x^2).\arctan x}} \qquad \left(\text{dạng } \tfrac{\infty}{\infty}\right)$$

$$\overset{(L)}{=} e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-2x}{2x\arctan x+1}} \qquad \left(\text{dạng } \tfrac{\infty}{\infty}\right)$$

$$\overset{(L)}{=} e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-2}{2\arctan x+\frac{2x}{1+x^2}}} = e^{???}.$$

VD 10. Tính giới hạn

$$I = \lim_{x\to0^+}(\cot x)^{\frac{1}{\ln x}} \qquad (\text{dạng } ???)$$

Giải. **Tính giới hạn**

$$I = \lim_{x\to 0^+} (\cot x)^{\frac{1}{\ln x}} \qquad (\text{dạng } \infty^0)$$

Ta có:

$$I = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{\ln x}.\ln\cot x} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln\cot x}{\ln x}} \qquad (\text{dạng } \tfrac{\infty}{\infty})$$

$$\stackrel{(L)}{=} e^{\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\frac{-1}{\sin^2 x\cot x}}{\frac{1}{x}}} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{-2x}{\sin 2x}} \qquad (\text{dạng } \tfrac{0}{0})$$

$$\stackrel{(L)}{=} e^{???} = ???$$