5.5. Phương pháp Gauss để giải hệ phương trình tuyến tính

Ví dụ 1. Xét hệ phương trình: $\begin{cases} 4x + 3y = -1 \\ 2y = 10 \end{cases}$

Tính y = 5, thay vào phương trình đầu $x = \frac{-1-3y}{4} = -4$

$\bar{A} = \left[\begin{array}{cc|c} 4 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 10 \end{array}\right] \rightarrow$ Hình thang

Ví dụ 2.

Xét hệ phương trình 3 ẩn
$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ \quad\;\; -2y + z = 2 \\ \qquad\quad\;\; 2z = -4. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y + z + 1 \\ y = \dfrac{z}{2} - 1 \\ z = -2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \\ z = -2. \end{cases}$$

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{array}\right] \uparrow \to \text{Hình thang}$$

Ví dụ 4:

$$(*)\begin{cases} x+3y-z=2 \\ y+2z=1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \bar{A}=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

Xem y là ẩn, z là tham số

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2-3y+z = 2-3(1-2z)+z = -1+7z \\ y = 1-2z \end{cases}$$

Nghiệm của hệ pt: $\begin{cases} x=-1+7z \\ y=1-2z \\ z\in\mathbb{R} \end{cases}$ hoặc viết $(x,y,z)=(-1+7z,1-2z,z)$

với $z\in\mathbb{R}$.

Hệ hình thang, $\bar{A} = \left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots a_1 & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ & a_{22} & \cdots a_{2m} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ 0 & & \ddots & & & \vdots \\ & & a_{mm} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right] \begin{array}{c} (1) \\ (2) \\ \\ (m) \end{array}$ $(m \le n)$

P² giải: (m): Xem 1 biến là ẩn và các biến còn lại là tham số
(hệ số của nó $\neq 0$)

Chẳng hạn: $a_{mm} \neq 0$, xem $\begin{cases} x_m \text{ là ẩn} \\ x_{m+1}, \ldots, x_n \text{ là tham số} \end{cases}$

(m) $\Rightarrow$ Biểu diễn x_m theo $x_{m+1}, \ldots, x_n$

(m−1) $\Downarrow$ Biểu diễn x_{m-1} theo $x_{m+1}, \ldots, x_n$

(m−2) $\Downarrow$ .... (1) $\Rightarrow$ B.diễn x_1 theo $x_{m+1}, \ldots, x_n$.

Ví dụ. Xét hệ phương trình $\begin{cases} 3x - 2y = 3 \\ -x + 3y = 13 \end{cases}$

$\bar{A} = \left[\begin{array}{cc|c} 3 & -2 & 3 \\ -1 & 3 & 13 \end{array}\right]$

Nhân 3 với pt thứ hai, rồi cộng với pt thứ nhất:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 3 \\ 7y = 42 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2y+3}{3} \\ y = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 6 \end{cases}$$

$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & -2 & 3 \\ 0 & 7 & 42 \end{array}\right]$

Các phép biến đổi **dòng** của ma trận đầy đủ $\bar{A}$:

+ Bỏ đi một trong hai dòng tỉ lệ hoặc một dòng mà tất cả các phần tử bằng 0.

+ Nhân các phần tử của cùng một dòng với một số $k \neq 0$.

+ Đổi chỗ hai dòng cho nhau.

+ Cộng vào một dòng với k lần dòng khác.

$\Longrightarrow$ Đưa $\bar{A}$ *về dạng hình thang* $\bar{A}'$.

$\Longrightarrow$ Hệ phương trình ban đầu tương đương đương với hệ phương trình có ma đầy đủ là $\bar{A}'$.

(Phương pháp Gauss)

Ví dụ . Xét hệ (*) $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 2 \end{cases}$

Giải: Ma trận đầy đủ

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -2 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right]$$

$a_{11} \neq 0$ (nếu $a_{11} = 0$ $\Rightarrow$ đổi chỗ dòng dưới cho d_1)

Biến đổi các phần tử dưới $a_{11} = 0$

B đổi theo d_1, cố định d_1

$$\xrightarrow{d_2 - d_1 \to d_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

$$\text{Hệ } (*) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1 \\ x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4}{2} = \\ x_2 = 1 + 2x_3 - 3x_4 \end{cases}$$

Hệ (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1 \\ x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4}{2} = \\ x_2 = 1 + 2x_3 - 3x_4 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{1 + 2(1 + 2x_3 - 3x_4) - 3x_3 + x_4}{2} = \dfrac{3 + x_3 - 5x_4}{2} \\ x_2 = 1 + 2x_3 - 3x_4 \end{cases}$$

Vậy $(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(\dfrac{3 + x_3 - 5x_4}{2}, 1 + 2x_3 - 3x_4, x_3, x_4 \right)$

với $x_3, x_4 \in \mathbb{R}$.

Ví dụ: Giải hệ sau bằng phương pháp Gauss
$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + 3z = -1 \\ x + 4y + 9z = -9 \end{cases}$$

Giải: Ma trận đầy đủ

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 9 & -9 \end{array}\right] \xrightarrow[d_3 - d_1 \to d_3]{d_2 - d_1 \to d_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & 8 & -10 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{d_3 - 3d_2 \to d_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{array}\right]$$

Hệ pt $\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 1 \\ y + 2z = -2 \\ 2z = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - y - z = 1 - 2 + 2 = 1 \\ y = -2 - 2z = -2 - 2\cdot(-2) = 2 \\ z = -2 \end{cases}$

Vậy $(x, y, z) = (1; 2; -2)$.

VD Giải hệ pt

$$\begin{cases} x - y + z + t = 2 \\ 2x + y - 2z - t = 1 \\ -x + 3y + z + 2t = 1. \end{cases}$$

Chương 2.
Không gian vectơ

§1. Không gian vectơ

1.1. Định nghĩa

Cho tập hợp $V \neq \emptyset$ và tập các số thực $\mathbb{R}$. Xét hai phép toán cộng và nhân ngoài như sau:

Với $\forall\, x, y \in V, \forall\, k \in \mathbb{R}$: $x + y \in V, kx \in V$ và $x + y, kx$ là duy nhất.

V được gọi là một ***không gian vectơ trên*** $\mathbb{R}$ hay $\mathbb{R}$-***không gian vectơ*** (viết tắt $\mathbb{R}$-kgvt) nếu với $\forall\, x, y, z \in V, \forall\, k, l \in \mathbb{R}$, thì:

1) $x + y = y + x.$

2) $x + (y + z) = (x + y) + z.$

3) Tồn tại $\theta \in V\ sao\ cho\ x + \theta = x$.

(Kí hiệu: $\theta = 0$ gọi là phần tử không của *V*)

4) Tồn tại $-x \in V$ sao cho: $x + (-x) = 0$.

($-x$ được gọi là phần tử đối của x)

5) $k(x + y) = kx + ky$.

6) $(k + l)x = kx + lx$.

7) $k(lx) = (kl)x$.

8) $1.x = x$.

Mỗi phần tử của *V* được gọi là một vectơ.

Ví dụ.

Cho $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) | x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$. Xét hai phép toán:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

$$k(x_1, x_2, \dots, x_n) = (kx_1, kx_2, \dots, kx_n),$$

với $\forall (x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, $\forall$k $\in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ $\mathbb{R}^n$ là một $\mathbb{R}$-kgvt.

VD: $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}\}$

$(1, 2) + (3, 4) = (4, 6)$

$3(1, 2) = (3, 6)$

$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) | x, y, z \in \mathbb{R}\}$

$(1, 2, 3) + (4, 5, 6) = (5, 7, 9)$

1.2. Không gian vectơ con

Định nghĩa. Cho $\mathbb{R}$ $-$kgvt V và $\emptyset \neq W \subset V$. Khi đó W được gọi là một ***không gian vectơ con*** của V nếu W cùng với các phép toán trên V thu hẹp trên W tạo thành một kgvt.

Định lý. Tập con W khác rỗng của kgvt V là một kgvt con của V nếu và chỉ nếu $ax + by \in W$, với $\forall x, y \in W, \forall a, b \in \mathbb{R}$

(tức là $x + y, ax \in W$, với $\forall x, y \in W, \forall a \in \mathbb{R}$)

Ví dụ. Xét các tập con sau của $\mathbb{R}^3$, tập nào là $\mathbb{R}$ -kgvt con của $\mathbb{R}^3$?

a) $A=\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}\}$.

b) $B=\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$.

Giải a) $\cdot A \subset \mathbb{R}^3$, $A \neq \emptyset$ vì $(0,0,0) \in A$

$\cdot\ \forall u, v \in A$, $k \in \mathbb{R}$: $u = (x_1, x_2, x_3)$

$v = (y_1, y_2, y_3)$ với $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{Z}$

$u + v = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) \in A$

$ku = (kx_1, kx_2, kx_3) \notin A$ vì chọn $\begin{cases} u = (1,1,1) \\ k = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow ku = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

$\Rightarrow$ A không là kgvt con của $\mathbb{R}^3$.

b) $B=\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$.

Giải: * $B \subset \mathbb{R}^3$ và $B \neq \emptyset$ vì $(0,0,0) \in B$

* $\forall u, v \in B$, $k \in \mathbb{R}$: $u = (x_1, x_2, x_3)$ với $x_1 + x_2 + x_3 = 0$

$v = (y_1, y_2, y_3)$ với $y_1 + y_2 + y_3 = 0$.

$u + v = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) \in B$ vì

$(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + (x_3 + y_3) = (x_1 + x_2 + x_3) + (y_1 + y_2 + y_3) = 0$

$ku = (kx_1, kx_2, kx_3) \in B$ vì

$kx_1 + kx_2 + kx_3 = k(x_1 + x_2 + x_3) = 0$

$\Rightarrow B$ là một kgvt con của $\mathbb{R}^3$.

1.3. Hệ sinh

Cho V là một $\mathbb{R}$-kgvt và $\emptyset \neq S \subset V$. Tổng dạng

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n,$$

với $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}, x_1, x_2, \dots, x_n \in S$, được gọi là một tổ hợp tuyến tính của $x_1, x_2, \dots, x_n$ trong S.

VD: $V = \mathbb{R}^2$, $S = \{(1,2), (3,4), (0,1)\}$

$\Rightarrow$ Tổ hợp tuyến tính của S có dạng:

$a_1(1,2) + a_2(3,4) + a_3(0,1)$ với $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$.

VD $V = \mathbb{R}^3$, $S = \{(0,1,1), (-1,0,2)\}$

$\Rightarrow$ Tổ hợp tuyến tính của S có dạng: $a(0,1,1) + b(-1,0,2)$ với $a, b \in \mathbb{R}$

$$\mathrm{Span}(S) = \{a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \mid a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}, x_1, \dots, x_n \in S\}$$

Định nghĩa. Nếu Span(S) = V thì S được gọi là một ***hệ sinh*** của V.

NX: S là một hệ sinh của $V \Leftrightarrow \forall x \in V, \exists x_1, \dots, x_n \in S$ và $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ sao cho $x = a_1x_1 + \dots + a_nx_n$.

Đặc biệt: $S = \{x_1, \dots, x_n\}$ là hệ sinh của $V \Leftrightarrow a_1x_1 + \dots + a_nx_n = x$ có nghiệm $(a_1, \dots, a_n)$ với mọi $x \in V$.

VD CM: $S = \{(1,2),(3,4)\}$ là một hệ sinh của $\mathbb{R}^2$.

Giải: $\forall u \in \mathbb{R}^2$, $u = (x, y)$:

$u = a \cdot (1,2) + b(3,4) \Leftrightarrow (x,y) = (a, 2a) + (3b, 4b) = (a+3b, 2a+4b)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a + 3b = x \\ 2a + 4b = y \end{cases}$, Ma trận hệ số $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, $\det A = -2 \neq 0$

$\Rightarrow$ Hệ luôn có no (a, b)

Bài tập ôn tập Chương 1

Bài 1. Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} 2x - 2y - z = -1 \\ y + z = 1 \\ -x + y + z = -1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + y + z = 2 \\ 3x + y + 2z = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - y + 2z - t = 2 \\ 2x + y + z + t = 1 \\ x - y + z + t = 0 \\ -x - 2y + z - 2t = 1. \end{cases}$

e) $\begin{cases} x + y - z = -5 \\ -x + 2y = 3 \\ 2x - y + 3z = 0 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x + y - 2z - t + u = 1 \\ x + 5y - 9z - 8t + u = 0 \\ 3x - y + z + 4t + 3u = 4 \end{cases}$

Bài 2. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận A.

b) Tìm ma trận X biết $AX = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.