BÀI GIẢNG TOÁN CAO CẤP

ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN

1. Đạo hàm của hàm số

1.1. Định nghĩa.

Cho hàm số $f(x)$ xác định trong một lân cận của x_0

• Đạo hàm của hàm số $f(x)$ tại điểm x_0 là giới hạn

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

trong trường hợp giới hạn này tồn tại hữu hạn. Khi đó, ta cũng nói rằng $f(x)$ khả vi tại x_0 (hoặc có đạo hàm tại x_0). Đạo hàm của $f(x)$ tại x_0 được ký hiệu bởi

$$f'(x_0) \text{ hoặc } \frac{df}{dx}(x_0).$$

Nếu ta viết x thay cho $x_0 + \Delta x$ thì $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

VD 1. Sử dụng định nghĩa, hãy tính đạo hàm (nếu có) của hàm số $\boldsymbol{f(x) = e^{x}}$ tại $\boldsymbol{x = a} \in \mathbb{R}$.

Giải:

Ta có $f(a+\Delta x) - f(a) = e^{a+\Delta x} - e^a = e^a(e^{\Delta x} - 1)$. Suy ra

$$\frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} = e^a \cdot \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x},$$

với mọi $\Delta x \neq 0$.

Vì $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = 1$ nên

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(e^a \cdot \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} \right) = e^a.$$

Vậy $f(x)$ có đạo hàm tại $x = a$ và

$$f'(a) = e^a.$$

1.2. Đạo hàm một phía

Cho hàm số $f(x)$ xác định trong khoảng $(b, x_0]$.

- **Đạo hàm bên trái** **của $y = f(x)$ tại x_0 được ký hiệu bởi $f'(x_0^-)$ và được xác định như sau:**

$$f'(x_0^-) = \lim_{\Delta x \to 0-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad \left(\text{hoặc } = \lim_{x \to x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right),$$

nếu giới hạn này tồn tại hữu hạn.

Cho hàm số $f(x)$ xác định trong khoảng $[x_0, b)$.

• **Đạo hàm bên phải** **của $y = f(x)$ tại x_0 được ký hiệu bởi $f'(x_0^+)$ và được xác định như sau:**

$$f'(x_0^+) = \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad \left(\text{hoặc } = \lim_{x \to x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right),$$

nếu giới hạn này tồn tại hữu hạn.

VD 2. Hãy tính đạo hàm bên phải (nếu có) của hàm số $\boldsymbol{f(x) = |x-1|}$ tại $\boldsymbol{x = 1}$.

Giải:

Ta có $f(1+\Delta x) - f(1) = |(1+\Delta x) - 1| - |1-1| = |\Delta x|$.

Suy ra $\dfrac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \dfrac{|\Delta x|}{\Delta x}$ với mọi $\Delta x \neq 0$.

Do đó, $\lim\limits_{\Delta x \to 0+} \dfrac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0+} \dfrac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0+} \dfrac{\Delta x}{\Delta x} = 1$.

Vậy $f'(1^+) = 1$.

Định lý

Cho $f(x)$ xác định trong khoảng (a, b) chứa điểm x_0.

Điều kiện cần và đủ để $f(x)$ có đạo hàm tại x_0 là: tồn tại $f'(x_0^+)$, $f'(x_0^-)$ và chúng bằng nhau.

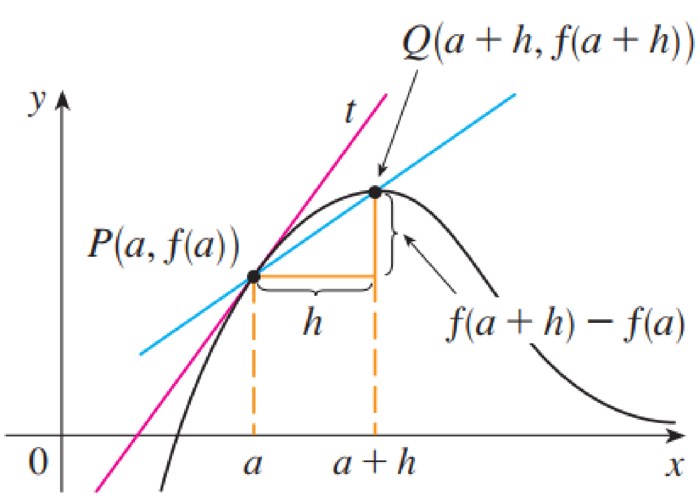
Khi đó, $f'(x_0) = f'(x_0^+) = f'(x_0^-)$.

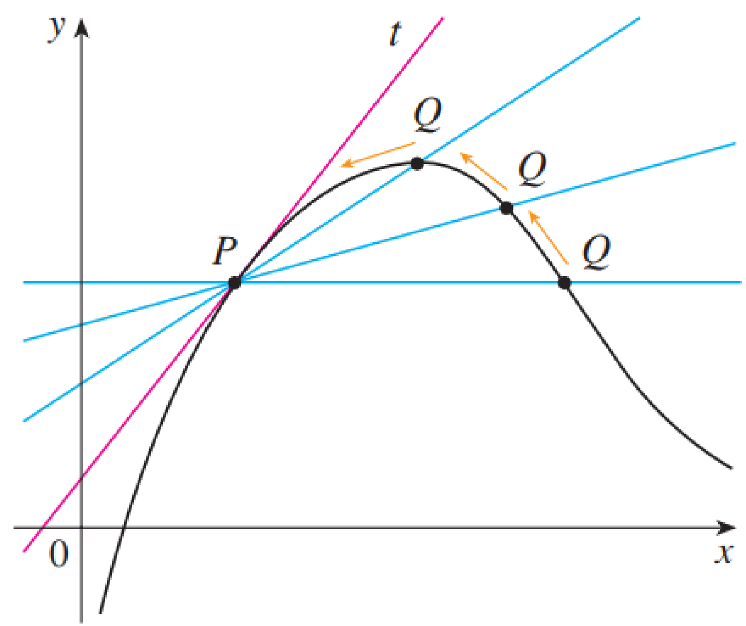
1.3. Đạo hàm trên một khoảng

Định nghĩa: **Hàm số $f(x)$ được gọi là khả vi (hay có đạo hàm) trong khoảng D nếu nó khả vi tại mọi điểm thuộc D.**

Ý nghĩa hình học

Giả sử C là một đường cong cho bởi phương trình $y = f(x)$, trong đó $f(x)$ có đạo hàm tại $x = a$. Khi đó, $f'(a)$ là hệ số góc của đường tiếp tuyến với C tại điểm $P(a, f(a))$ và phương trình tiếp tuyến có dạng $y - f(a) = f'(a)(x - a)$.





Ý nghĩa cơ học

Nếu chất điểm có phương trình chuyển động $s = s(t)$ (phụ thuộc vào biến thời gian t) thì vận tốc đại số tức thời tại thời điểm t được xác định là $v(t) = s'(t)$ và gia tốc đại số tức thời tại t là $a(t) = v'(t)$.

1.4. Một số kết quả liên quan đến đạo hàm

- **Nếu hàm số có đạo hàm tại a thì nó liên tục tại a.**

A. Quy tắc tính đạo hàm

Cho $u = u(x), v = v(x)$ là các hàm số có đạo hàm. Khi đó

1) $(u \pm v)' = u' \pm v'$

2) $(ku)' = ku'$ (k là hằng số)

3) $(uv)' = u'v + uv'$

4) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ tại các điểm thỏa mãn $v \neq 0$

Đạo hàm của hàm số hợp

Nếu hàm số $u = g(x)$ có đạo hàm theo x, hàm số $y = f(u)$ có đạo hàm theo u thì hàm số hợp $y = f(g(x))$ có đạo hàm theo x và

$$y'(x) = f'_u(u) \cdot u'(x).$$

B. Đạo hàm của một số hàm cơ bản

	Hàm số hợp
$C' = 0, x' = 1$ (C là hằng số)	
$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(u^\alpha)' = \alpha \cdot u' \cdot u^{\alpha-1}$ $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$ $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$(a^x)' = a^x \ln a$ $(a > 0,\ a \neq 1)$ $(e^x)' = e^x$	$(a^u)' = u' \cdot a^u \ln a$ $(e^u)' = u'e^u$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$ $(x > 0)$ $(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$ $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

	Hàm số hợp
$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = u' \cos u$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -u' \sin u$
$(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$(\tan u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$
$(\cot x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$(\cot u)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$
$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arcsin u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arccos u)' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$	$(\arctan u)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$
$(\text{arccot} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$	$(\text{arccot} u)' = -\dfrac{u'}{1+u^2}$

VD 3.

Tính đạo hàm của các hàm số sau

a) $y = x + \arcsin x$.

b) $y = \sqrt{x + \ln x}$

c) $y = \sin x \cdot \arctan 3x$.

Giải:

a) $\boldsymbol{y' = x' + (\arcsin x)' = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$, với $\boldsymbol{x \in (-1, 1).}$

b) Ta có

$$\boldsymbol{y' = \frac{(x+\ln x)'}{2\sqrt{x+\ln x}} = \frac{[x' + (\ln x)']}{2\sqrt{x+\ln x}} = \frac{1+\frac{1}{x}}{2\sqrt{x+\ln x}} = \frac{x+1}{2x\sqrt{x+\ln x}}}$$

c) $\boldsymbol{y' = (\sin x)' \cdot \arctan 3x + \sin x \cdot (\arctan 3x)'}$

$$\boldsymbol{= \cos x \cdot \arctan 3x + \sin x \cdot \frac{(3x)'}{1+(3x)^2}}$$

$$\boldsymbol{= \cos x \cdot \arctan 3x + \sin x \cdot \frac{3}{1+9x^2}},$$

với mọi $\boldsymbol{x.}$

VD 4.

Cho hàm số $\boldsymbol{y = x^2 + e^{-x}\sin x}$.

a) Tìm $\boldsymbol{y'(x)}$ với mọi $\boldsymbol{x \in \mathbb{R}}$.

b) Đặt $\boldsymbol{h(x) = y'(x)}$. Liệu có thể xác định được đạo hàm của $\boldsymbol{h(x)}$ hay không?

Giải:

a) $\boldsymbol{y' = 2x - e^{-x}\sin x + e^{-x}\cos x}$**,** với mọi $\boldsymbol{x}$**.**

b) Do $\boldsymbol{h(x) = 2x - e^{-x}\sin x + e^{-x}\cos x}$ nên $\boldsymbol{h'(x) = 2 - 2e^{-x}\cos x}$ với mọi $\boldsymbol{x}$**.**

1.4. Đạo hàm cấp cao

Cho $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng D. Khi đó $y = f'(x)$ là một hàm số trên khoảng D.

⊳⊳ Nếu $f'(x)$ có đạo hàm trên khoảng D thì ta nói $f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên khoảng D. Ký hiệu đạo hàm cấp của $f(x)$ là $f''(x)$ hoặc $\dfrac{d^2 f}{dx^2}(x)$. Vậy, $f''(x) = [f'(x)]'$.

⊳⊳ Cứ tiếp tục như vậy, đạo hàm đến cấp $n \geq 1$ của $f(x)$ trên khoảng D được ký hiệu bởi $f^{(n)}(x)$ $\left(\text{hoặc } \dfrac{d^n f}{dx^n}(x)\right)$ và xác định như sau

$$f^{(n)}(x) = [f^{(n-1)}(x)]'.$$

Quy ước: $f^{(0)}(x) = f(x)$, ở đây $f^{(0)}(x)$ là ký hiệu của đạo hàm cấp không của $f(x)$ và $f(x)$ là một hàm liên tục.

VD 5. Tính đạo hàm cấp bốn của hàm số $\boldsymbol{y = \sin 2x}$.

Giải:

Ta có: $\boldsymbol{y' = 2\cos 2x.}$

$\boldsymbol{y'' = (y')' = -4\sin 2x.}$

$\boldsymbol{y^{(3)} = (y'')' = -8\cos 2x.}$

$\boldsymbol{y^{(4)} = (y^{(3)})' = 18\sin 2x.}$

1.5. Đạo hàm của hàm số cho bởi phương trình tham số

• **Biểu diễn tham số của hàm số:** Cho biểu diễn x và y theo một tham số nào đó.

Nếu x, y phụ thuộc tham số t thì ta viết biểu diễn tham số dạng

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \end{cases}$$

với $t \in I = \{t \in \mathbb{R} \ : \ x(t) \text{ và } y(t) \text{ có nghĩa}\}$.

Ví dụ: Một biểu diễn tham số của hàm số $y = \sqrt{1 - x^2}$ là

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t, \end{cases}$$

với $t \in [0, \pi]$.

Giả sử hàm số có biểu diễn tham số dạng

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \end{cases}$$

trong đó, $x(t)$ và $y(t)$ có đạo hàm tại t. Khi đó,

$$\frac{dy}{dx} = y'_x = \frac{y'(t)}{x'(t)},$$

tại các điểm t mà $x'(t) \neq 0$.

VD 6. Cho hàm số có biểu diễn tham số dạng

$$\begin{cases} x = \sin t + 2t \\ y = te^{-2t}. \end{cases}$$

Tính $\dfrac{dy}{dx}$ theo t.

Giải:

Ta có $x'(t) = \cos t + 2$ và $y'(t) = (1 - 2t)e^{-2t}$.

Do đó $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y'(t)}{x'(t)} = \dfrac{(1 - 2t)e^{-2t}}{\cos t + 2}$, với mọi t.

1.6. Đạo hàm của hàm số ẩn

• **Hàm số ẩn:** **Cho biểu diễn x và y thỏa mãn phương trình dạng $A(x, y) = 0$.**

• **Tính đạo hàm: Xét $y = y(x)$, và lấy đạo hàm hai vế theo x của phương trình $A(x, y) = 0$, và sau đó tính được y'_x.**

VD 7. Cho hàm số có phương trình dạng ẩn $x^2 + x^3y^3 + 2y - 1 = 0$.

Tính y'_x.

Giải:

Lấy đạo hàm hai vế theo $\boldsymbol{x}$ của phương trình $\boldsymbol{x^2+x^3y^3+2y-1=0,}$ trong đó $\boldsymbol{y=y(x),}$ ta được

$$\boldsymbol{2x+3x^2y^3+3x^3y^2\cdot y'_x+2y'_x=0.}$$

Suy ra $\boldsymbol{y'_x=-\dfrac{2x+3x^2y^3}{3x^3y^2+2},}$ trong đó $\boldsymbol{x,y}$ thỏa mãn phương trình $\boldsymbol{x^2+x^3y^3+2y-1=0.}$

VD 8. Tính đạo hàm của hàm số $\boldsymbol{y = x^{\sin x}}$, với $\boldsymbol{x > 0}$.

Giải:

Lấy **ln** hóa, ta được:

$$\ln y = \sin x \cdot \ln x.$$

Đạo hàm hai vế của biểu thức trên theo x, ta nhận được:

$$(\ln y)'_x = (\sin x \cdot \ln x)'_x$$

Suy ra $\dfrac{y'_x}{y} = \cos x \cdot \ln x + \dfrac{\sin x}{x}.$

Do đó $y'_x = x^{\sin x} \cdot \left(\cos x \cdot \ln x + \dfrac{\sin x}{x}\right)$, với mọi $x > 0.$

2. Vi phân của hàm số

2.1. Định nghĩa

Cho hàm số $y = f(x)$ khả vi tại x_0. Khi đó ta có

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Ta có viết dưới dạng: $\dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) + h(\Delta x)$, khi $\Delta x \to 0$, trong đó $\lim\limits_{\Delta x \to 0} h(\Delta x) = 0$.

Suy ra $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + h(\Delta x) \cdot \Delta x$, khi $\Delta x \to 0$.

⊳⊳ Số hạng $f'(x_0)\Delta x$ được gọi là vi phân của $f(x)$ tại x_0, và được ký hiệu bởi $df(x_0)$. Vậy

$$df(x_0) = f'(x_0)\Delta x.$$

Nếu $f(x) = x$ thì $dx = df(x) = (x)' \cdot \Delta x = \Delta x$. Do đó ta viết vi phân dưới dạng

$$df(x) = f'(x)dx.$$

VD 9. Tính $df(x)$ biết rằng $f(x) = \sin x + \ln x$.

Giải:

Ta có $df(x) = f'(x)dx$.

Tính $f'(x) = \cos x + \dfrac{1}{x}$. Suy ra $df(x) = \left(\cos x + \dfrac{1}{x}\right) dx$, với $x > 0$.

Ứng dụng xấp xỉ của vi phân

Nếu hàm số $f(x)$ đã biết $f(x_0)$ và $f'(x_0)$ thì ta có công thức tính gần đúng:

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x,$$

khi $|\Delta x|$ khá nhỏ.

VD 10. Áp dụng ứng dụng xấp xỉ của vi phân để tính gần đúng $\sqrt[4]{15,8}$.

Hướng dẫn:

Tính gần đúng giá trị của $y = f(x) = x^{\frac{1}{4}}$ tại $15,8 = 16 - 0,2.$

Đặt $x_0 = 16, \Delta x = -0,2.$ Ta có $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x.$

Tính được $f(x_0) = f(16) = 2$ và $f'(x) = \dfrac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}} = \dfrac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}.$

Suy ra $f'(x_0) = f'(16) = \dfrac{1}{32}.$

Vậy $\sqrt[4]{15,8} \approx 2 + \dfrac{1}{32} \cdot (-0,2) \approx 1,994.$

2.2. Vi phân cấp cao

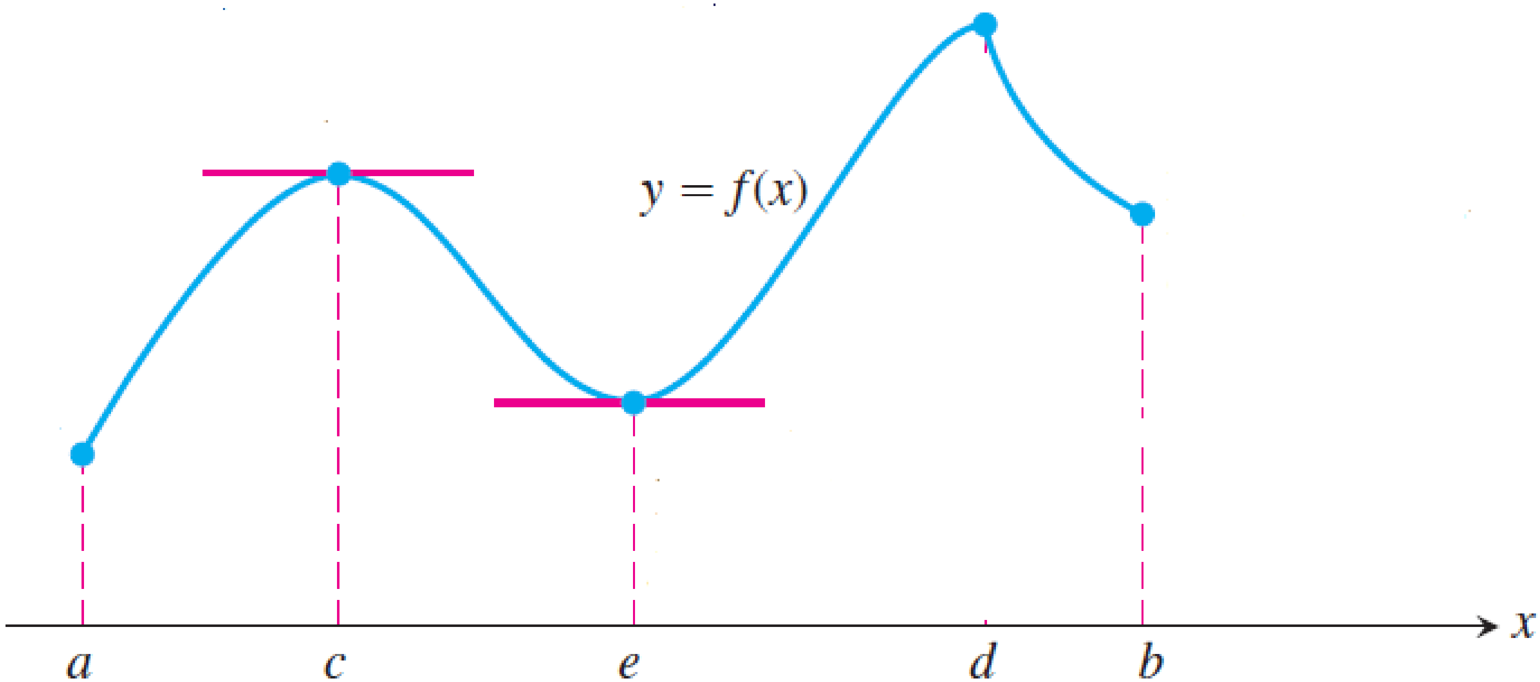
Cho $f(x)$ là hàm số có vi phân tại mọi $x \in D$. Khi đó $df(x)$ được gọi là vi phân cấp 1 của $f(x)$ trên D và $df(x) = f'(x)dx$.

• Nếu $df(x)$ có vi phân tại $x \in D$ thì ta nói $f(x)$ có vi phân cấp 2 và được ký hiệu bởi $d^2f(x)$. Vậy $d^2f(x) = d[df(x)]$.

Kết Quả 1: $d^2f(x) = f''(x)dx^2$ (hoặc $= f''(x)(dx)^2$).

• Cứ tiếp tục như vậy, ta nhận được vi phân cấp n của $f(x)$. Nó được ký hiệu là $d^nf(x)$ và được xác định như sau $d^nf(x) = d[d^{n-1}f(x)]$.

Kết Quả 2: $d^nf(x) = f^{(n)}(x)dx^n$ (hoặc $= f^{(n)}(x)(dx)^n$).


y = f(x)
x
a
c
e
d
b

3. Cực trị của hàm số

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên D và $x_0 \in D$.

• Ta nói $f(x)$ đạt cực đại tại x_0 nếu tồn tại khoảng (a, b) chứa x_0 sao cho

$$(a, b) \subset D \text{ và } f(x) < f(x_0), \forall x \in (a, b) \backslash \{x_0\}.$$

Khi đó, ta gọi x_0 là điểm cực đại của $f(x)$ và $f(x_0)$ gọi là giá trị cực đại của $f(x)$ tại x_0.

- **Ta nói $f(x)$ đạt cực tiểu tại x_0 nếu tồn tại khoảng (a, b) chứa x_0 sao cho**

$$(a, b) \subset D \text{ và } f(x) > f(x_0), \forall x \in (a, b)\backslash\{x_0\}.$$

Khi đó, ta gọi x_0 là điểm cực tiểu của $f(x)$ và $f(x_0)$ gọi là giá trị cực tiểu của $f(x)$ tại x_0.

- **Điểm cực đại và điểm cực tiểu gọi chung là điểm cực trị. Giá trị cực đại và giá trị cực tiểu gọi chung là giá trị cực trị.**

Điều kiện cần

Định lý: **Cho $f(x)$ có tập xác định D chứa điểm x_0.**

Nếu x_0 là một điểm cực trị của $f(x)$ và tồn tại $f'(x_0)$ thì $f'(x_0) = 0$.

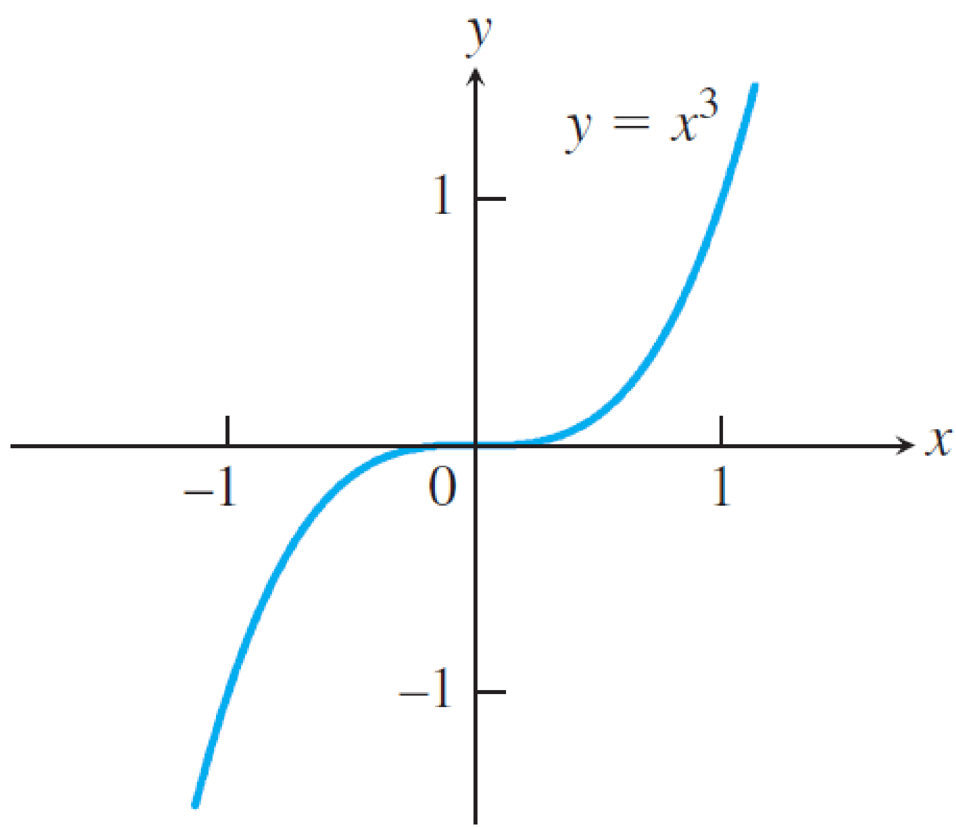
Nhận xét

1) **Định lý trên cho phép ta thu hẹp việc tìm điểm cực trị của hàm số $f(x)$ tại các điểm x_0 (thuộc tập xác định của hàm số) mà $f'(x_0) = 0$ hoặc không tồn tại đạo hàm của $f(x)$ tại x_0.**

   Các điểm x_0 có tính chất như trên được gọi là các điểm tới hạn.

2) **Điều kiện trên chỉ là điều kiện cần, điều ngược lại có thể không đúng.**

VD 11. Hàm số $y = f(x) = x^3$ có $x = 0$ là điểm tới hạn vì $y'(0) = 0$. Tuy nhiên $x = 0$ không phải điểm cực trị của hàm số này vì ta thấy $f(x) > f(0) = 0$ khi $x > 0$ và $f(x) < f(0)$ khi $x < 0$.



Điều kiện đủ

Định lý 1: **Giả sử hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại các điểm $x \in (a, b)$ (có thể trừ ra $x_0 \in (a, b)$) và x_0 là một điểm tới hạn của $f(x)$. Khi đó:**

- **Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm khi x đi qua x_0 (đi từ trái sang phải) thì $f(x)$ đạt cực đại tại x_0.**
- **Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương khi x đi qua x_0 (đi từ trái sang phải) thì $f(x)$ đạt cực tiểu tại x_0.**

Điều kiện đủ

Định lý 2: Giả sử hàm số $f(x)$ có đạo hàm trong khoảng (a, b) chứa điểm x_0 và tồn tại $f''(x_0)$. Khi đó:

• Nếu $f'(x_0) = 0$ và $f''(x_0) < 0$ thì $f(x)$ đạt cực đại tại x_0.

• Nếu $f'(x_0) = 0$ và $f''(x_0) > 0$ thì $f(x)$ đạt cực tiểu tại x_0.

VD 12. Tìm các điểm cực trị và giá trị cực trị tương ứng (nếu có) của hàm số $y = e^{1-x^2}$.

Giải:

Tập xác định của hàm số: $\mathbb{R}$.

$y' = -2xe^{1-x^2}$, với mọi $x \in \mathbb{R}$. Suy ra $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

$y'' = -2e^{1-x^2} + 4x^2e^{1-x^2}$, với mọi $x \in \mathbb{R}$. Ta có $y''(0) = -2e < 0$.

Do đó $x = 0$ là điểm cực đại của hàm số và giá trị cực đại là $y(0) = e$.