

**Bài 1.** Tính các giới hạn của các hàm số sau:

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \cos x}{x^2 + 2}$

c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(2 + x^2) \arcsin x^2}{\sqrt{1 + x^2}}$

e)  $\lim_{x \rightarrow 0} (\arctan 2x + \ln(1 - x^2))$

b)  $\lim_{x \rightarrow 2} e^{x^2-1} \sin \pi x$

d)  $\lim_{x \rightarrow 0} x \arctan(x^2 + 1)$

f)  $\lim_{x \rightarrow 1} (\arcsin(1 - x^2) + \arctan 2x)$

**Bài 2.** Sử dụng kỹ thuật tách và rút gọn để khử các giới hạn có dạng vô định  $\frac{0}{0}$  sau:

Ý tưởng: Gặp  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{T}{M}$  với  $T(a) = M(a) = 0$ , ta phân tích  $T = (x - a)^p \cdot A(x)$  và  $M = (x - a)^q \cdot B(x)$  trong đó  $A(a) \neq 0$  và  $B(a) \neq 0$ . Sau đó rút gọn nhân tử chung và đưa ra kết quả.

a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^2}{x^3 - 1}$

c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^3 - 2x}{2x^2 + 3x}$

e)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^3 - 8}$

g)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 + 3x + 2}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^2}{x^2 + 3x - 4}$

d)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4}$

f)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + 1}{2x^2 + x - 1}$

h)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x + 4}{x^4 - 16}$

**Bài 3.** Sử dụng kỹ thuật nhân liên hợp, tách và rút gọn để khử các giới hạn có dạng vô định  $\frac{0}{0}$  sau:

Ý tưởng: Gặp  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{T}{M}$  trong đó  $T(a) = M(a) = 0$  và  $T$  hoặc  $M$  chứa căn thức, ta trực căn thức, tách và sau đó rút gọn.

Chú ý:  $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$  và  $A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$  và  $A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$

Gặp  $\sqrt{A} - B$ , sử dụng  $\sqrt{A} + B$  để trực căn thức. Gặp  $\sqrt{A} + B$ , sử dụng  $\sqrt{A} - B$  để trực căn thức. Với  $\sqrt[3]{C} - D$  và  $\sqrt[3]{C} + D$ , dựa vào  $A^3 \pm B^3$  để xác định biểu thức sử dụng cho trực căn.

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x^2 - 4x^4}$

c)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{2x^2 - 1} + x}{2x + 2}$

e)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x + 7} - 3}{2x^2 - 3x + 1}$

g)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{2x - 1} - 1}{2x - 2}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + 3} - 2x}{1 - x^2}$

d)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x + 2} - x}$

f)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x^2 + 3} + 2x}{1 - x^4}$

h)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{\sqrt[3]{3x + 2} - x}$

**Bài 4.** Sử dụng kỹ thuật thêm bớt và giới hạn đặc biệt để khử các dạng  $\frac{0}{0}$  sau:

Ý tưởng: Gặp  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{T}{M}$  trong đó  $T(a) = M(a) = 0$  và  $T$  hoặc  $M$  là hàm đặc biệt như sau:  $\sin u, \tan u, e^u - 1, \ln(1 + u), (1 + u)^p - 1$  với  $u \rightarrow 0$  khi  $x \rightarrow a$ , ta thêm bớt thừa số để sử dụng được các giới hạn đặc biệt.

- Ta sử dụng các nhân tử thêm bớt đặc biệt sau:

$$\sin u = \frac{\sin u}{u} \cdot u; \quad \frac{1}{\sin u} = \frac{u}{\sin u} \cdot \frac{1}{u}; \quad \tan u = \frac{\tan u}{u} \cdot u; \quad \frac{1}{\tan u} = \frac{u}{\tan u} \cdot \frac{1}{u};$$

$$\ln(1 + u) = \frac{\ln(1 + u)}{u} \cdot u; \quad \frac{1}{\ln(1 + u)} = \frac{u}{\ln(1 + u)} \cdot \frac{1}{u}; \quad e^u - 1 = \frac{e^u - 1}{u} \cdot u; \quad \frac{1}{e^u - 1} = \frac{u}{e^u - 1} \cdot \frac{1}{u};$$

$$(1 + u)^p - 1 = \frac{(1 + u)^p - 1}{u} \cdot u.$$

Ví dụ:  $\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{\sin A}{A} \cdot \frac{B}{\sin B} \cdot \frac{A}{B}$

- Các giới hạn đặc biệt cần ghi nhớ:

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{\sin u} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\tan u}{u} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{\sin u} = 1;$$

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{e^u - 1}{u} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{e^u - 1} = 1;$$

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\ln(1+u)}{u} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{\ln(1+u)} = 1;$$

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{(1+u)^p - 1}{u} = p.$$

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$

c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\tan 2x}$

e)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{\sin 5x}$

g)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x \cdot \tan 5x}{\sin 6x^2}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 4x}$

d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x^2)}{\tan 4x^2}$

f)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x^2}{\sin 6x^2}$

h)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-4x^2)}{(e^{5x}-1) \sin 2x}$

**Bài 5.** Tính  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{T}{M}$  trong trường hợp thuộc dạng vô định  $\frac{\infty}{\infty}$  và  $T$  và  $M$  là các đa thức hoặc chứa căn đa thức.

Ý tưởng: Phân tích  $T = x^n \cdot A\left(\frac{1}{x}\right)$  và  $M = x^m \cdot B\left(\frac{1}{x}\right)$  và sử dụng giới hạn  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$  để tính giới hạn yêu cầu.

Chú ý: Khi đưa thừa số ra khỏi căn thức, ta cần chú ý đó là căn bậc chẵn hay bậc lẻ và chú ý quá trình  $x \rightarrow +\infty$  (xem xét  $x > 0$ ) hay  $x \rightarrow -\infty$  (xem xét  $x < 0$ ).

Ví dụ:

$$\frac{x^3 - 2x + 1}{2x^3 + 4x + 1} = \frac{x^3 \left(1 - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)}{x^3 \left(2 + \frac{4}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)} = \frac{1 - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}}{2 + \frac{4}{x^2} + \frac{1}{x^3}} \quad (\text{đẳng thức cuối xảy ra do ta triệt tiêu } x^3 \text{ ở cả tử và mẫu; ghi nhớ: nếu biểu thức } A \text{ là đa thức thì ta phân tích } A = x^n \cdot M(x) \text{ trong đó } x^n \text{ là lũy thừa có bậc cao nhất trong } A.)$$

$$\text{Xem xét } x > 0, \frac{\sqrt{x^2 + 1} + 3x}{4x + 1} = \frac{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} + 3x}{x \left(4 + \frac{1}{x}\right)} = \frac{x \sqrt{\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} + 3x}{x \left(4 + \frac{1}{x}\right)} = \frac{x \left(\sqrt{\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} + 3\right)}{x \left(4 + \frac{1}{x}\right)} = \frac{\sqrt{\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} + 3}{\left(4 + \frac{1}{x}\right)}$$

$$\text{Xem xét } x < 0, \frac{\sqrt{x^2 + 1} + 3}{4x + 1} = \frac{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} + 3}{x \left(4 + \frac{1}{x}\right)} = \frac{(-x) \sqrt{\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} + 3}{x \left(4 + \frac{1}{x}\right)} = \frac{x \left(-\sqrt{\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} + \frac{3}{x}\right)}{x \left(4 + \frac{1}{x}\right)} = \frac{-\sqrt{\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} + \frac{3}{x}}{\left(4 + \frac{1}{x}\right)}$$

Ghi nhớ: Nếu biểu thức  $A$  có căn thức thì ta đưa lũy thừa bậc cao nhất trong các căn thức ra ngoài căn và sau đó phân tích  $A = x^n \cdot M(x)$ . Chú ý về loại căn thức khi đưa lũy thừa ra ngoài căn:  $\sqrt{A^2} = |A|$ ,  $\sqrt[3]{A^3} = A$ ....

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x - 1}{2x + 3}$

c)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x - 1}{2x - 1}$

e)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} + 3x}{4x + 1}$

g)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 - 2x} + x}{-4x + 1}$

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 1}{-2x^2 + 3x}$

d)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + x - 1}{1 + 2x^2 + 2x - x^3}$

f)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} + 3}{4x + 1}$

h)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2x^2 + 1} + 3}{\sqrt{3x^2 - 1} + 1}$

**Bài 6.** Tính các giới hạn bằng các dùng kỹ thuật trực căn thức và vận dụng kỹ thuật khử dạng  $\frac{\infty}{\infty}$  để

khủ dạng vô định  $\infty - \infty$ .

Ý tưởng: Gặp giới hạn  $\lim_{x \rightarrow \infty} T$  thuộc dạng  $\infty - \infty$  và  $T$  chứa căn thức, ta trực cẩn thức để đưa về dạng  $\frac{\infty}{\infty}$ , sau đó sử dụng kỹ thuật khử cho  $\frac{\infty}{\infty}$  để tìm giới hạn.

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 1} + x) \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + x} - 2x) \quad \text{d) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{1 - x^3} + x)$$

**Bài 7.** Tính các giới hạn thuộc dạng vô định  $1^\infty$  sau:

Ý tưởng: Gặp  $\lim_{x \rightarrow a} u^v$  dạng  $1^\infty$  (tức  $u \rightarrow 1$  và  $v \rightarrow \infty$  khi  $x \rightarrow a$ ), ta phân tích theo trình tự như sau:

$$\lim_{x \rightarrow a} u^v = \lim_{x \rightarrow a} \left( [1 + (u - 1)]^{\frac{1}{u-1}} \right)^{v(u-1)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} v(u-1)},$$

Tính  $\lim_{x \rightarrow a} v(u-1)$  và thu được kết quả.

Ý tưởng này chỉ sử dụng cho dạng  $1^\infty$  và không dùng cho các dạng vô định khác.

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{1}{x+2} \right)^{3x} & \text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2x+1}{2x+3} \right)^{1-3x} & \text{e) } \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin 3x)^{\frac{1}{2x}} \\ \text{b) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( 1 - \frac{2}{x+2} \right)^{3x} & \text{d) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{1-x}{3-x} \right)^{2+x} & \text{f) } \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \tan x^2)^{\frac{-3}{2x^2}} \end{array}$$

**Bài 8.** Tìm đạo hàm của các hàm số sau:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } y = x^2 - \sin 2x & \text{d) } y = \arcsin^3(x^2 - 1) & \text{g) } y = (x^2 + 1)^{x-2} \\ \text{b) } f(x) = x \arcsin 2x & \text{e) } f(x) = \frac{x}{\arctan x - x} & \text{h) } y = (x+1)(x+2) \cdots (x+2022) \\ \text{c) } y = \ln(1 + x^2) + \arctan 4x & \text{f) } y = \frac{\sin x - x}{\ln(1 + x)} \end{array}$$

**Bài 9.** Tìm đạo hàm cấp hai, cấp 3, cấp 4, cấp  $n \geq 1$  của các hàm số sau:

$$\text{a) } y = \cos 2x \quad \text{b) } y = e^{-2x} \quad \text{c) } y = \frac{1}{x+2} \quad \text{d) } y = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+2}$$