§3. Ma trận nghịch đảo

3.1. Định nghĩa.

Cho A là ma trận vuông cấp n. Nếu tồn tại ma trận vuông B cấp n sao cho $A \cdot B = B \cdot A = I$ thì

- A là ma trận khả nghịch.
- B là ma trận nghịch đảo của ma trận A, ký hiệu là $B = A^{-1}$.

Ví dụ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ thì } A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} \text{ vì}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}^{I} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

3.2. Tính chất

Định lí.

Nếu ma trận nghịch đảo A^{-1} *của A tồn tại thì nó là duy nhất.*

3.2. Tính chất

Định lí.

Nếu ma trận nghịch đảo A^{-1} của A tồn tại thì nó là duy nhất.

Hệ quả. *Nếu ma trận vuông A cấp n có ma trận nghịch đảo A^{-1} thì*

a) $(A^{-1})^{-1} = A$.

b) $(A^m)^{-1} = (A^{-1})^m$, *với m là số nguyên dương.*

c) $(kA)^{-1} = \frac{1}{k} A^{-1}$, *với mọi* $k \neq 0$.

d) $A.X = B \Leftrightarrow \quad X = A^{-1}.B$.

e) $X.A = B \Leftrightarrow \quad X = B.A^{-1}$.

$$\underbrace{A^{-1}A}X = A^{-1}B$$
$$\underbrace{I\,X} = A^{-1}B$$
$$X = A^{-1}B$$

Định lí. (Điều kiện tồn tại ma trận nghịch đảo). *Nếu ma trận vuông A cấp n khả nghịch thì det(A)* $\neq 0$.

$\exists A^{-1}$

Chứng minh. Nếu A khả nghịch thì tồn tại ma trận A^{-1} sao cho $A \cdot A^{-1} = I$. Theo tính chất của định thức $\det(A \cdot A^{-1}) = \det I$, tức là $\det A \cdot \det A^{-1} = \det I = 1$.

Vậy $\det(A) \neq 0$ và $\det(A^{-1}) \neq 0$.

Lưu ý: $\det(A) = 0 \Rightarrow \nexists A^{-1}$

3.3. Một số phương pháp tính ma trận nghịch đảo

a) Phương pháp dùng phần bù đại số

Định lí. *Nếu* det(*A*) ≠ 0 *thì A khả nghịch và*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}{\underbrace{\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}}_{A}}^{c} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

$A_{ij} = (-1)^{i+j} \det(M_{ij})$ là phần phụ đại số của phần tử a_{ij},

M_{ij} = ma trận A sau khi bỏ đi dòng i và cột j, với mọi i, j=1,…, n.

Ví dụ

$$A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 0\\ 3 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}$$ Ta có det(A)=15

$$A_{11}=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=3,\quad A_{12}=-\begin{vmatrix}3 & 1\\ 0 & 2\end{vmatrix}=-6,\quad A_{13}=\begin{vmatrix}3 & 2\\ 0 & 1\end{vmatrix}=3$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}-2 & 0\\ 1 & 2\end{vmatrix}=4,\quad A_{22}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{vmatrix}=2,\quad A_{23}=-\begin{vmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{vmatrix}=-1,$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}-2 & 0\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-2,\quad A_{32}=-\begin{vmatrix}1 & 0\\ 3 & 1\end{vmatrix}=-1,\quad A_{33}=\begin{vmatrix}1 & -2\\ 3 & 2\end{vmatrix}=8$$

$$A^{-1} = \frac{1}{15}\begin{bmatrix} 3 & 4 & -2 \\ -6 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{4}{15} & \frac{-2}{15} \\ \frac{-2}{5} & \frac{2}{15} & \frac{-1}{15} \\ \frac{1}{5} & \frac{-1}{15} & \frac{8}{15} \end{bmatrix}$$

$$A= \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\det(A) = 2 + 6 + 2 - 6 = 4$

$A_{11} = -2,\ A_{12} = -(-6) = 6,\ A_{13} = -2,$

$A_{21} = -2,\ A_{22} = 4,\qquad A_{23} = 0,$

$A_{31} = 4,\ A_{32} = -6,\qquad A_{33} = 2$

$$A^{-1} = 1/4 \begin{bmatrix} -2 & -2 & 4 \\ 6 & 4 & -6 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

VD: Tìm A^{-1}, biết

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

VD: Tìm ma trận X biết

a) $AX = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, với $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) $XA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, với $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

b) Phương pháp Gauss-Jordan

Cho A là ma trận vuông có det(A) $\neq$ 0. Các bước tìm ma trận nghịch đảo của A như sau:

Bước 1: Lập ma trận [A:I] cấp n x 2n bằng cách ghép ma trận A với ma trận đơn vị I.

Bước 2: Thực hiện các phép biến đổi trên dòng của [A:I] như sau:

+ Nhân hay chia các phần tử của cùng 1 dòng với 1 số khác 0

+ Đổi chỗ 2 dòng cho nhau

+ Cộng các phần tử của một dòng với các phần tử tương ứng của dòng khác cùng nhân với 1 số.

Phép biến đổi kết thúc khi ma trận [A:I] được biến đổi thành [I:B]

Bước 3: Kết luận $A^{-1} = B$

Chú ý: Không được thực hiện các phép biến đổi với cột

§4. Hạng của ma trận

4.1. Định nghĩa. Cho A là ma trận cấp m x n.

Ma trận vuông cấp p ($p \leq \min\{m,n\}$) nhận được từ A bằng cách xoá đi m-p dòng và n-p cột được gọi là *ma trận con cấp p* của A.

Định thức của ma trận này được gọi là *định thức con cấp p* của A.

Hạng của ma trận A là cấp cao nhất của các định thức con khác 0 của A, kí hiệu là r(A).

Nhận xét: $r(A) \leq \min\{m,n\}$ và $r(A) = 0$ khi và chỉ khi A là ma trận [0]

Ví dụ 1.

Tính hạng của ma trận $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

Vì $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$

nên r(A) ≥ 2. Do r(A) ≤ min {2,3} nên r(A)=2.

Ví dụ 2. Tìm hạng của A theo a: $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$

Ta có det(A)=a nên r(A)=3 nếu $a \neq 0$

r(A)=2 nếu a=0.

4.2. Cách tính hạng của ma trận

Ma trận bậc thang

Các phép biến đổi sau đây đối với ma trận (được gọi là các phép biến đổi sơ cấp) không làm thay đổi hạng của ma trận:

1. Bỏ đi một trong 2 dòng (cột) giống nhau hoặc dòng (cột) mà tất cả các phần tử bằng 0.

2. Nhân các phần tử của cùng 1 dòng (cột) với 1 số khác 0

3. Đổi 2 dòng (cột) cho nhau

4. Cộng vào 1 dòng (cột) những dòng (cột) khác nhân với 1 số.

Ví dụ

Tìm hạng của ma trận $B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

1. Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 3 & 11 & 8 \\ -1 & 2 & 9 \end{pmatrix}.$$

2. Cho ma trận:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 0 \\ -3 & -5 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Tìm ma trận nghịch đảo của A.

b) Tìm ma trận X thoả mãn XA=B, biết $B = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 5 & 1 & -6 \end{bmatrix}$.