Học phần: Đại số (2 Tín chỉ)

Giảng viên: Phan Thị Thủy – SĐT: 0979082729

Nội dung:

Chương 1. Ma trận – Định thức – Hệ phương trình tuyến tính

Chương 2. Không gian vectơ

Chương 3. Ánh xạ tuyến tính

Chương 4. Dạng toàn phương

Tài liệu tham khảo: Toán học cao cấp (Tập 1: Đại số và Hình học giải tích) – Nguyễn Đình Trí

Chương 1.
Ma trận-Định thức-Hệ phương trình tuyến tính

§1. Ma trận

1.1. Một số khái niệm

Định nghĩa. Một ***ma trận*** cấp (hay cỡ) *m* x *n* là một bảng hình chữ nhật gồm *m* dòng, *n* cột như sau:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Các số a_{ij} (ở dòng i cột j) được gọi là các ***phần tử*** của A, kí hiệu

$$A = (a_{ij})_{m \times n} = [a_{ij}]_{m \times n}.$$

VD: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & \frac{1}{2} & -2 \end{bmatrix}_{2\times 3}$, $a_{12} = 2$, $a_{23} = -2$

$a_{21} = 0$, $a_{13} = 3$

$B = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \\ -1 & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}_{3\times 2}$, $b_{12} = \frac{1}{2}$ $b_{21} = 0$

$b_{32} = \frac{-2}{3}$

- Ma trận cấp m x 1 được gọi là ***ma trận cột***: $\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$

- Ma trận cấp 1x n được gọi là ***ma trận dòng:*** $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix}$

- Nếu $m = n$ thì A được gọi là ***ma trận vuông cấp n***. Đường nối các phần tử a_{11}, a_{22}, …, a_{nn} được gọi là ***đường chéo chính***.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Ma trận tam giác trên

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n\,1} & a_{n\,2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Ma trận tam giác dưới

. Ma trận đường chéo cấp n: $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

. Ma trận đơn vị cấp n: $I_n = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}_{n \times n}$

VD:

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -3 & -5 & -1 \end{bmatrix}$

dòng, cột, vuông cấp 3, △ trên, △ dưới

$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

đường chéo

- Hai ma trận $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ và $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ được gọi là bằng nhau nếu

$$a_{ij} = b_{ij}, \text{ với mọi i, j.}$$

Viết $A = B$.

VD $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 3}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 2}$ $C = \begin{bmatrix} a & 2 & 0 \\ 0 & b & c \end{bmatrix}_{2\times 3}$

Tìm a, b, c để a) $A = C$ b) $B = C$.

* $A = C \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \\ c = 1. \end{cases}$

* $B \neq C$ $\forall a, b, c$ vì cấp B $\neq$ cấp C.

- **Ma trận chuyển vị** của $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ là ma trận nhận được từ A bằng cách đổi dòng thành cột, kí hiệu A^c, A^t, A^T.

Ví dụ: $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix} \Longrightarrow A^c = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$

- ***Ma trận đối xứng*** là ma trận vuông A thoả mãn $A^c = A$. (tức là $a_{ij} = a_{ji}$)

Ví dụ: $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 5 \\ 4 & 5 & 3 \end{bmatrix}$ là ma trận đối xứng vì $A^c = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 5 \\ 4 & 5 & 3 \end{bmatrix} = A$

- Ma trận ***không*** cấp *m* x *n* là ma trận mà mọi phần tử bằng 0, kí hiệu là [0] hay (0).

Ví dụ: $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$

1.2. Các phép toán về ma trận

1.2.1. Phép cộng ma trận

Định nghĩa. Cho hai ma trận cùng cấp $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ và $B = [b_{ij}]_{m \times n}$. ***Tổng*** của hai ma trận A và B:

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n}.$$

VD
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+(-2) & 2+1 & 0+1 \\ 3+0 & 1+(-2) & 2+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ví dụ.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2 & -2+1 \\ -4+5 & 3-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

Tính chất.

1) A + B = B + A.

2) A + [0] = [0] + A = A.

3) (A + B) + C = A + (B + C)

4) Nếu đặt $-A = [-a_{ij}]_{m\times n}$ thì A + (-A) = (-A) + A = [0].

-A : đgl ma trận đối của A.

VD : $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow -A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$

1.2.2. Phép nhân ma trận với một số

Định nghĩa. Giả sử $A = [a_{ij}]_{m\,x\,n}$. ***Tích*** của một số thực k với ma trận A:

$$k.A = [ka_{ij}]_{m\,x\,n}.$$

Ví dụ. 1 $2.\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 6 & 2 & 8 \end{bmatrix}$

2 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$. Tính $3A + 2I$

Lưu ý: * $-1.A = -A$

* $A = (a_{ij})_{m\times n}$ và $B = (b_{ij})_{m\times n}$: $A + (-B)$ đgl hiệu của của A và B, kí hiệu $A - B$

Tính chất. Với k, h là các số thực, ta có:

1) $k.(A + B) = k.A + k.B$.

2) $(k + h).A = k.A + h.A$.

3) $k.(h.A) = (k.h).A$.

4) $1.A = A$.

5) $0.A = [0]$.

1.2.3. Phép nhân hai ma trận

Định nghĩa. Cho hai ma trận $A = [a_{ij}]_{m \times n}$; $B = [b_{ij}]_{n \times p}$. Tích của hai ma trận A và B:

$$AB = A.B = [c_{ij}]_{m \times p} \text{ với}$$

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \cdots + a_{in} \cdot b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \,.$$

dòng thứ i của A × cột j của B

VD

$$\underset{2 \times 3}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}} \times \underset{3 \times 2}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 1.1 + 2.3 + 1.2 & 1.0 + 2.1 + 1.2 \\ 0.1 + 1.3 + 1.2 & 0.0 + 1.1 + 1.2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

VD

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 3 + 1\cdot 2 & 1\cdot 0 + 2\cdot 1 + 1\cdot 2 \\ 0\cdot 1 + 1\cdot 3 + 1\cdot 2 & 0\cdot 0 + 1\cdot 1 + 1\cdot 2 \end{bmatrix}$$

2×3 $\qquad$ 3×2

$$= \begin{bmatrix} 9 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

1

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 1 + 0\cdot 0 & 1\cdot 2 + 0\cdot 1 & 1\cdot 1 + 0\cdot 1 \\ 3\cdot 1 + 1\cdot 0 & 3\cdot 2 + 1\cdot 1 & 3\cdot 1 + 1\cdot 1 \\ 2\cdot 1 + 2\cdot 0 & 2\cdot 2 + 2\cdot 1 & 2\cdot 1 + 2\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 7 & 4 \\ 2 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

2 $\quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Tính AB, BA

$\Rightarrow AB = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $\nexists\, BA$

Ví dụ.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.2 + 2.1 + 3.0 & 1.3 + 2.2 + 3.4 \\ 4.2 + 1.1 + 2.0 & 4.3 + 1.2 + 2.4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 19 \\ 9 & 22 \end{bmatrix}$$

Chú ý.

- Nếu có tích AB thì chưa chắc đã có tích BA.
- Nếu có tích AB và BA thì chưa chắc đã có AB = BA.

(tích hai ma trận nói chung không giao hoán)

- Có những ma trận $A \neq 0$, $B \neq 0$, nhưng AB=[0].

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = [0]$$

Tính chất.

1) $A(B + C) = AB + AC$,
2) $(B + C)A = BA + CA$,
3) $k(BC) = (kB)C = B(kC)$, với số thực k
4) $(AB)^c = B^c A^c$

Lưu ý: A vuông cấp n,

$$A^k := \underbrace{A \cdot A \cdots A}_{k \text{ ma trận } A}$$

VD $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\to A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$A^4 = A^3 \cdot A$

Bài 1

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

Tính AB, $3A^2 + 2A + I$; $A^3 + A^2 + I$; A^5; $4A^2 - 3A + I$;