BÀI GIẢNG TOÁN CAO CẤP

HÀM SỐ VÀ DÃY SỐ

I. Các khái niệm

- Mỗi hàm số $\boldsymbol{u} : \mathbb{N}^*(\text{hoặc } \mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ được gọi là **một dãy số vô hạn** (hay **dãy số**).

  Tập giá trị của hàm $\boldsymbol{u}$ là tập $\{u(1), \cdots, u(n), \cdots\}$.

  Với $n \geq 1$, ta đặt $u_n = u(n)$. Do đó, **dãy số được viết tắt là** $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ **hoặc $\{u_n\}$.**

- **Cho dãy số $\{u_n\}$. Khi đó, $u_1, u_2, \ldots$ là các số hạng của dãy số.**

  Số hạng u_n được gọi là số hạng thứ n hay số hạng tổng quát của dãy số.

• Cố định số tự nhiên $m \geq 1$. Mỗi hàm số $u : \{1, 2, \ldots, m\} \to \mathbb{R}$ được gọi là **một dãy số hữu hạn.**

Dãy số này được viết dưới dạng $\{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$, trong đó $u_i = u(i)$, với mọi $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$.

VD 1.

a) Dãy số $\{2, 4, 6, \ldots, 2n, \ldots\}$ có số hạng đầu là $u_1 = 2$ và số hạng thứ n là $u_n = 2n$.

b) Cho dãy số $\{a_n\}$ có $a_n = \dfrac{1}{n^2}$ với $n \geq 1$.

Số hạng thứ nhất là $a_1 = \dfrac{1}{1^2} = 1$ và số hạng thứ 3 là $a_3 = \dfrac{1}{3^2} = \dfrac{1}{9}$.

VD 2. Bài toán tiết kiệm:

Một người gửi vào một ngân hàng $\boldsymbol{A}$ đồng, với lãi suất hàng năm là $\boldsymbol{r}$**.** Hãy xác định:

a) Số tiền cả vốn lẫn lãi mà người đó nhận được sau 1 năm?

b) Số tiền cả vốn lẫn lãi mà người đó nhận được sau $\boldsymbol{n}$ năm?

Giải:

a) Sau một năm với lãi suất $\boldsymbol{r}$ một năm, người đó có một khoản tiền gộp cả lãi lẫn gốc bằng $\boldsymbol{A}$ + số tiền lãi = $\boldsymbol{A + rA = (1 + r)A.}$

b) Gọi $\boldsymbol{T_n}$ là số tiền cả vốn lẫn lãi mà người đó nhận được sau $\boldsymbol{n}$ năm. Đặt $\boldsymbol{T_0 = A.}$

Sau 1 năm, ta có $\boldsymbol{T_1 = (1 + r)A.}$

Sau 2 năm, ta có $\boldsymbol{T_2 = T_1 + rT_1 = (1 + r)T_1.}$ Suy ra $\boldsymbol{T_2 = (1 + r)^2 \cdot A.}$

Sau 3 năm, ta có $\boldsymbol{T_3 = T_2 + rT_2 = (1 + r)T_2.}$ Suy ra $\boldsymbol{T_3 = (1 + r)^3 \cdot A.}$

Do đó, sau $\boldsymbol{n}$ năm, ta có $\boldsymbol{T_n = T_{n-1} + rT_{n-1} = (1 + r)T_{n-1}.}$ Suy ra $\boldsymbol{T_n = (1 + r)^n \cdot A.}$

Từ ví dụ trên, **ta có thể nhận được một dãy số $\{T_n\}$ mà các số hạng của nó thỏa mãn hệ thức**

$$\boldsymbol{T_n = (1+r)T_{n-1},} \text{ với mọi } \boldsymbol{n \geq 1.}$$

Hệ thức này được gọi là một hệ thức truy hồi đối với dãy số $\{T_n\}$.

Ta cũng có: **dãy số $\{T_n\}$ với $T_n = A(1+r)^n$, thỏa mãn hệ thức truy hồi trên. Khi đó, dãy số này được gọi là một nghiệm của hệ thức hồi trên.**

II. Hệ thức truy hồi

1. Tổng quan

• **Hệ thức truy hồi (hay công thức truy hồi) đối với dãy số $\{u_n\}$ là công thức biểu diễn u_n qua một hay nhiều số hạng đi trước của dãy.**

Một dãy số được gọi là lời giải hay nghiệm của hệ thức truy hồi nếu các số hạng của nó thỏa mãn hệ thức truy hồi này.

VD 3. Cho $r > 0$. Hệ thức truy hồi

$$u_{n+1} = (1+r)u_n, \text{ với mọi } n \geq 0,$$

có một nghiệm là dãy số $\{C(1+r)^n\}$ với C là hằng số nào đó.

• Một **hệ thức truy hồi tuyến tính bậc $k \geq 1$ với hệ số hằng số** là **hệ thức truy hồi có dạng:**

$$u_{n+k} = c_1 u_{n+k-1} + c_2 u_{n+k-2} + \cdots + c_k u_n + b_n, \text{ với mọi } n \geq 0,$$

trong đó $c_1, c_2, \ldots, c_k$ là các hằng số thực, $c_k \neq 0$ và $\{b_n\}$ là một dãy số đã biết.

• Khi $b_n = 0$, với mọi n, ta nhận được hệ thức truy hồi dạng

$$u_{n+k} = c_1 u_{n+k-1} + c_2 u_{n+k-2} + \cdots + c_k u_n, \text{ với mọi } n \geq 0.$$

Hệ thức này được gọi là **hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất** bậc k với hệ số hằng số.

• **Chú ý:** Hệ thức truy hồi tuyến tính bậc $k \geq 1$ với hệ số hằng số có thể viết dạng sau:

$$c_0 u_{n+k} + c_1 u_{n+k-1} + c_2 u_{n+k-2} + \cdots + c_k u_n = b_n, \forall n \geq 0,$$

trong đó $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_k$ là các hằng số thực, $c_0 \cdot c_k \neq 0$ và $\{b_n\}$ là một dãy số đã biết.

VD 4.

a) Hệ thức truy hồi tuyến tính bậc 1 với hệ số hằng có dạng

$$u_{n+1} = au_n + b_n,$$

với mọi $n \geq 0$, trong đó a là hằng số khác không và $\{b_n\}$ là dãy số đã biết.

b) Hệ thức truy hồi tuyến tính bậc 2 với hệ số hằng có dạng

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n + c_n,$$

với mọi $n \geq 0$, trong đó a, b là các hằng số, $b \neq 0$ và $\{c_n\}$ là dãy số đã biết.

2. Hệ thức truy hồi tuyến tính cấp 1 với hệ số hằng

- *Dạng tổng quát là*

$$u_{n+1} = au_n + b_n, \forall n \geq 0, \qquad (1.1)$$

trong đó $a \neq 0$ *và dãy số* $\{b_n\}$ *đã biết.*

Chú ý: *Nếu hệ thức truy hồi tuyến tính cấp 1 có thể cho dưới dạng*

$$au_{n+1} + bu_n = b_n, \forall n \geq 0,$$

trong đó $ab \neq 0$ *và dãy số* $\{b_n\}$ *đã biết, thì ta chuyển về dạng (1.1), tức là*

$$u_{n+1} = -\frac{b}{a}u_n + \frac{1}{a}b_n, \forall n \geq 0.$$

- *Hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất của hệ truy hồi (1.1) là*

$$u_{n+1} = au_n, \forall n \geq 0.$$

- *Giải hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất*

$$u_{n+1} = au_n, \forall n \geq 0, \text{ với } a \neq 0.$$

Tất cả các nghiệm $\{u_n\}$ của hệ truy hồi thuần nhất này có dạng

$$u_n = Ca^n, \forall n,$$

với C là hằng số bất kỳ. Đây được gọi là **nghiệm tổng quát** của hệ truy hồi thuần nhất.

VD 5. Tìm nghiệm tổng quát của hệ truy hồi tuyến tính thuần nhất sau

$$u_{n+1} = 4u_n, \forall n \geq 0.$$

Sau đó, hãy tìm một nghiệm $\{p_n\}$ của hệ thức truy hồi này biết rằng $p_0 = -1$.

Giải:

Nghiệm tổng quát là các dãy số $\{u_n\}$ với $u_n = C4^n$, với mọi $n \geq 0$ và C là hằng số bất kỳ.

Tìm $\{p_n\}$ biết $p_0 = -1$. Ta có $p_n = C4^n$ với mọi $n \geq 0$, trong đó C là hằng số nào đó. Suy ra $p_0 = C4^0 = C = -1$. Suy ra $p_n = -4^n$.

Vậy $\{p_n\}$ là dãy số $\{-4^n\}$.

VD 6. Cho hệ truy hồi tuyến tính thuần nhất sau

$$2u_{n+1} + u_n = 0, \forall n \geq 1.$$

Tìm một nghiệm $\{a_n\}$ của hệ truy hồi này biết $a_1 = 2$.

Giải:

Ta viết lại hệ thức thành

$$u_{n+1} = \left(-\frac{1}{2}\right) u_n, \forall n \geq 1.$$

Nghiệm tổng quát là các dãy số $\{u_n\}$ với $u_n = C\left(-\frac{1}{2}\right)^n$, với mọi $n \geq 1$ và C là hằng số bất kỳ.

Tìm nghiệm $\{a_n\}$ thỏa mãn $a_1 = 2.$ Ta có $a_n = C\left(-\frac{1}{2}\right)^n$, với mọi $n \geq 1.$ Suy ra $a_1 = C\left(-\frac{1}{2}\right) = 2$. Ta tìm được $C = -4.$

Dó đó, $a_n = (-4)\left(-\frac{1}{2}\right)^n = \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n-2}}$, với $n \geq 1.$

Nghiệm cần tìm là $\left\{\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n-2}}\right\}_{n=1}^{+\infty}.$

Giải hệ thức truy hồi tuyến tính cấp 1 hệ số hằng tổng quát

$$\boldsymbol{u_{n+1} = a u_n + b_n, \forall n \geq 0,} \qquad (1.1)$$

trong đó $\boldsymbol{a \neq 0}$ và dãy số $\boldsymbol{\{b_n\}}$ đã biết.

Kết quả: *Giả sử* $\boldsymbol{\{p_n\}}$ *là một nghiệm của* **(1.1).** *Khi đó, tất cả các nghiệm* $\boldsymbol{\{u_n\}}$ *của (1.1) đều có dạng*

$$\boldsymbol{u_n = C a^n + p_n, \forall n \geq 0,}$$

với $\boldsymbol{C}$ *là hằng số bất kỳ. Đây được gọi là nghiệm tổng quát của (1.1).*

Như vậy, **nghiệm tổng quát của (1.1) là tổng giữa nghiệm tổng quát của hệ thức truy hồi thuần nhất ứng với (1.1) và một nghiệm cụ thể $\{p_n\}$ nào đó của (1.1). Nghiệm $\{p_n\}$ thường gọi là một nghiệm riêng của (1.1).**

Quy trình tìm nghiệm tổng quát của hệ thức truy hồi

$$u_{n+1} = au_n + b_n, \forall n \geq 0. \qquad (1.1)$$

Bước 1: Tìm nghiệm tổng quát của hệ thức truy hồi thuần nhất ứng với (1.1). Giả sử nghiệm tổng quát là $\{q_n\}$.

Bước 2: Tìm một nghiệm riêng $\{p_n\}$ của (1.1).

Bước 3: Nghiệm tổng quát của (1.1) có dạng $\{q_n + p_n\}$.

Chú ý:

Kết quả 1.

Nghiệm tổng quát của hệ thức truy hồi $u_{n+1} = u_n + b, \forall n \geq 1$, có dạng

$$u_n = C + (n-1)b,$$

với mọi $n \geq 1$ và C là hằng số bất kỳ.

Kết quả 2.

Nghiệm tổng quát của hệ thức truy hồi $u_{n+1} = au_n + b, \forall n \geq 0$, với $a \neq 1$, có dạng

$$u_n = Ca^n + \left(\frac{a^n - 1}{a - 1}\right) b,$$

với mọi $n \geq 0$ và C là hằng số bất kỳ.

VD 7. Tìm nghiệm tổng quát của hệ tuy hồi sau

$$\boldsymbol{u_{n+1} = u_n + 4, \forall n \geq 1.}$$

Giải:

Nghiệm tổng quát có dạng

$$\boldsymbol{u_n = C + (n-1)4}$$

với mọi $\boldsymbol{n \geq 1}$ và $\boldsymbol{C}$ là hằng số bất kỳ.

VD 8. Tìm nghiệm tổng quát của hệ tuy hồi sau

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 2, \forall n \geq 0.$$

Sau đó, tìm một nghiệm $\{p_n\}$ của hệ truy hồi biết rằng $p_0 = -1.$

Giải: *Công thức của nghiệm tổng quát là*

$$u_n = Ca^n + \frac{a^n - 1}{a - 1}b,$$

với mọi $n \geq 0$ *và* C *là hằng số bất kỳ.*

Ta có $a = \dfrac{1}{2}, b = -1.$

- Nghiệm tổng quát của hệ truy hồi có dạng

$$u_n = C\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\frac{1}{2} - 1}(-1) = (C+2)\left(\frac{1}{2}\right)^n - 2,$$

với mọi $n \geq 0$ và C là hằng số bất kỳ.

- Ta có $p_n = (C+2)\left(\dfrac{1}{2}\right)^n - 2,$ với C là hằng số nào đó. Suy ra $p_0 = C = -1.$

Do đó, $p_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n - 2,$ với mọi $n.$

Dãy số cần tìm là $\left\{\left(\dfrac{1}{2}\right)^n - 2\right\}.$

3. Hệ truy hồi tuyến tính cấp 2 với hệ số hằng

- *Dạng tổng quát là*

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n + c_n, \forall n \geq 0, \qquad (1.2)$$

trong đó a, b *là các hằng số,* $b \neq 0$ *và dãy số* $\{c_n\}$ *đã biết.*

Chú ý: *Nếu hệ thức truy hồi tuyến tính cấp 2 có thể cho dưới dạng*

$$au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = d_n, \forall n \geq 0,$$

trong đó $ac \neq 0$ *và dãy số* $\{d_n\}$ *đã biết, thì ta chuyển về dạng (1.2), tức là*

$$u_{n+2} = -\frac{b}{a}u_{n+1} - \frac{c}{a}u_n + \frac{1}{a}d_n, \forall n \geq 0.$$

- *Hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất của hệ truy hồi (1.2) là*

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n, \forall n \geq 0.$$

VD 9. Xét hệ truy hồi tuyến tính cấp 2 sau

$$u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n, \forall n \geq 0.$$

Tìm nghiệm $\{u_n\}$ thỏa mãn $u_n = \lambda^n$, với λ là một số thực khác không nào đó.

Giải:

Thay $u_n = \lambda^n, u_{n+1} = \lambda^{n+1}$ và $u_{n+2} = \lambda^{n+2}$ vào hệ truy hồi, ta nhận được

$$\lambda^{n+2} = 2\lambda^{n+1} + 3\lambda^n,$$

với mọi $n \geq 0.$

Do $\lambda \neq 0$ nên ta nhận được

$$\lambda^2 = 2\lambda + 3.$$

Phương trình có hai nghiệm $\lambda_1 = -1$ và $\lambda_2 = 3.$

Ta tìm được hai dãy số $\{(-1)^n\}$ và $\{3^n\}.$

Dễ dàng kiểm tra lại được hai dãy số này là nghiệm của hệ truy hồi đã cho.

Chú ý: Phương trình $\lambda^2 = 2\lambda + 3$ được gọi là phương trình đặc trưng của hệ truy hồi tuyến tính cấp 2 thuần nhất $u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n, \forall n \geq 0$.

Trong trường hợp hệ truy hồi đã cho, người ta chỉ ra rằng tất cả các nghiệm của hệ truy hồi có dạng

$$u_n = C_1(\lambda_1)^n + C_2(\lambda_2)^n = C_1 \cdot (-1)^n + C_2 \cdot 3^n, \forall n \geq 0,$$

với C_1, C_2 là các hằng số thực bất kỳ. Đây được gọi là nghiệm tổng quát của hệ này.

- *Giải hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất*

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n, \forall n \geq 0, \text{ với } b \neq 0.$$

Nghiệm tổng quát $\{u_n\}$ của hệ truy hồi thuần nhất được tìm như sau:

Bước 1: Phương trình đặc trưng dạng

$$\lambda^2 = a\lambda + b.$$

Ta tìm được λ_1, λ_2 là hai nghiệm của phương trình.

Bước 2: Nghiệm tổng quát của hệ truy hồi. Ta xét ba trường hợp:

Trường hợp 1. Phương trình đặc trưng có hai nghiệm thực phân biệt.

$$u_n = C_1(\lambda_1)^n + C_2(\lambda_2)^n, \forall n \geq 0,$$

với C_1, C_2 là các hằng số bất kỳ.

Trường hợp 2. Phương trình đặc trưng có nghiệm kép, tức $\lambda_1 = \lambda_2$.

$$u_n = C_1(\lambda_1)^n + nC_2(\lambda_1)^n, \forall n \geq 0,$$

với C_1, C_2 là các hằng số bất kỳ.

Trường hợp 3. Phương trình đặc trưng có nghiệm phức , tức $\lambda_1 = x_1 + y_1 i, \lambda_2 = x_1 - y_1 i$ (với $y_1 > 0$).

$$u_n = r^n(C_1 \cos n\theta + C_2 \sin n\theta), \forall n \geq 0,$$

với C_1, C_2 là các hằng số bất kỳ, trong đó $r = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$ là modun của λ_1 và $\theta \in (-\pi, \pi]$ là argument chính của λ_1.

Chú ý: **Nếu hệ truy hồi tuyến tính cấp 2 có dạng**

$$au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0, \forall n \geq 0,$$

với $ac \neq 0$, thì phương trình đặc trưng có dạng

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0.$$

VD 10. Tìm nghiệm tổng quát của hệ thức truy hồi tuyến tính cấp 2 sau

$$u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n, \forall n \geq 0.$$

Sau đó, tìm một nghiệm $\{p_n\}$ của hệ truy hồi thỏa mãn $p_0 = 1$ và $p_1 = -2$.

Giải:

- Phương trình đặc trưng có dạng

$$\boldsymbol{\lambda^2 = 5\lambda - 6.}$$

Phương trình có hai nghiệm thực $\boldsymbol{\lambda_1 = 2}$ và $\boldsymbol{\lambda_2 = 3.}$

- Nghiệm tổng quát có dạng

$$\boldsymbol{u_n = C_1(\lambda_1)^n + C_2(\lambda_2)^n = C_1 2^n + C_2 3^n, \forall n \geq 0,}$$

với $\boldsymbol{C_1, C_2}$ là các hằng số tùy ý.

- Ta có $\boldsymbol{p_n = C_1 2^n + C_2 3^n}$ với mọi $\boldsymbol{n}$. Tìm $\boldsymbol{C_1, C_2}$ sao cho $\boldsymbol{p_0 = 1, p_1 = -2.}$

$\boldsymbol{p_0 = C_1 2^0 + C_2 3^0 = C_1 + C_2.}$ Suy ra $\boldsymbol{C_1 + C_2 = 1.}$

$\boldsymbol{p_1 = C_1 2^1 + C_2 3^1 = 2C_1 + 3C_2.}$ Suy ra $\boldsymbol{2C_1 + 3C_2 = -2.}$

Ta nhận hệ phương trình $\begin{cases} \boldsymbol{C_1 + C_2 = 1} \\ \boldsymbol{2C_1 + 3C_2 = -2} \end{cases}$

Giải hệ, ta nhận được $\boldsymbol{C_1 = 5, C_2 = -4.}$

Do đó $\boldsymbol{p_n = 5 \cdot 2^n + (-4) \cdot 3^n}$ với mọi $\boldsymbol{n}$

Nghiệm cần tìm là $\boldsymbol{\{5 \cdot 2^n + (-4) \cdot 3^n\}.}$

VD 11. Tìm nghiệm tổng quát của hệ thức truy hồi tuyến tính cấp 2 sau

$$4u_{n+2} - 4u_{n+1} + u_n = 0, \forall n \geq 0.$$

Giải:

- Phương trình đặc trưng có dạng

$$4\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0.$$

Phương trình có nghiệm kép $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}$.

- Nghiệm tổng quát có dạng

$$u_n = C_1(\lambda_1)^n + nC_2(\lambda_1)^n = C_1\left(\frac{1}{2}\right)^n + nC_2\left(\frac{1}{2}\right)^n, \forall n \geq 0,$$

với C_1, C_2 là các hằng số tùy ý.

VD 12. Tìm nghiệm tổng quát của hệ thức truy hồi tuyến tính cấp 2 sau

$$u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n, \forall n \geq 0.$$

Giải:

- Phương trình đặc trưng có dạng

$$\boldsymbol{\lambda^2 = 2\lambda - 2.}$$

Phương trình có hai nghiệm phức $\boldsymbol{\lambda_1 = 1 + i}$ và $\boldsymbol{\lambda_2 = 1 - i.}$

Ta có modun của $\boldsymbol{\lambda_1}$ là $\boldsymbol{r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.}$

Phần thực của $\boldsymbol{\lambda_1}$ là $\boldsymbol{x = 1}$. Phần ảo của $\boldsymbol{\lambda_1}$ là $\boldsymbol{y = 1.}$ Arcgument chính $\boldsymbol{\theta}$ của $\boldsymbol{\lambda_1}$ thỏa mãn $\boldsymbol{\tan\theta = \dfrac{y}{x} = 1}$ và $\boldsymbol{0 < \theta \leq \pi}$ (vì $\boldsymbol{\theta}$ và $\boldsymbol{y}$ cùng dấu). Ta chọn được $\boldsymbol{\theta = \dfrac{\pi}{4}.}$

- Nghiệm tổng quát có dạng

$$\boldsymbol{u_n = r^n(C_1\cos n\theta + C_2\sin n\theta) = (\sqrt{2})^n\left(C_1\cos\frac{n\pi}{4} + C_2\sin\frac{n\pi}{4}\right), \forall n \geq 0,}$$

với $\boldsymbol{C_1, C_2}$ là các hằng số tùy ý.

Giải hệ truy hồi tuyến tính cấp 2 tổng quát dạng

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n + c_n, \forall n \geq 0, \qquad (1.2)$$

trong đó a, b là các hằng số, $b \neq 0$ và dãy số $\{c_n\}$ đã biết.

Kết quả: *Giả sử* $\{p_n\}$ *là một nghiệm của* **(1.2).** *Khi đó, tất cả các nghiệm* $\{u_n\}$ *của (1.2) đều có dạng*

$$u_n = q_n + p_n, \forall n \geq 0,$$

trong đó $\{q_n\}$ *là nghiệm tổng quát của hệ truy hồi tuyến tính thuần nhất tương ứng với (1.2). Đây được gọi là nghiệm tổng quát của (1.2).*

Như vậy, **nghiệm tổng quát của (1.2) là tổng giữa nghiệm tổng quát của hệ thức truy hồi thuần nhất ứng với (1.2) và một nghiệm cụ thể $\{p_n\}$ nào đó của (1.2). Nghiệm $\{p_n\}$ thường gọi là một nghiệm riêng của (1.2).**

Quy trình tìm nghiệm tổng quát của hệ thức truy hồi

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n + c_n, \forall n \geq 0, \qquad (1.2)$$

Bước 1: Tìm nghiệm tổng quát của hệ thức truy hồi thuần nhất ứng với (1.2). Giả sử nghiệm tổng quát là $\{q_n\}$.

Bước 2: Tìm một nghiệm riêng $\{p_n\}$ của (1.2).

Bước 3: Nghiệm tổng quát của (1.2) có dạng $\{q_n + p_n\}$.

Dự đoán nghiệm riêng của hệ truy hồi trong một vài trường hợp

Dạng 1: $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n + c$ **có 1 không phải là nghiệm của phương trình đặc trưng của hệ truy hồi thuần nhất tương ứng.**

Ta tìm nghiệm riêng $\{p_n\}$ thỏa mãn $p_n = A$ với mọi n và A là hằng số cần tìm.

Cụ thể, ta thay $p_n = A, p_{n+1} = A, p_{n+2} = A$ vào hệ truy hồi đã cho để tìm A; ở đây p_n thay cho u_n, p_{n+1} thay cho u_{n+1} và p_{n+2} thay cho u_{n+2}.

VD 13. Tìm nghiệm tổng quát của hệ truy hồi tuyến tính cấp hai sau

$$u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n + 4, \forall n \geq 0.$$

Giải:

- Hệ truy hồi thuần nhất tương ứng có dạng

$$u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n, \forall n \geq 0.$$

Phương trình đặc trưng có dạng

$$\lambda^2 = 2\lambda + 3.$$

Phương trình có hai nghiệm là $\lambda_1 = -1$ và $\lambda_2 = 3.$

Nghiệm tổng quát của hệ truy hồi thuần nhất có dạng $q_n = C_1(-1)^n + C_2 3^n$ với mọi $n,$ và C_1, C_2 là các hằng số bất kỳ.

- Tìm nghiệm riêng $\{p_n\}$ thỏa mãn $p_n = A$ với mọi n.

Thay $p_n = A, p_{n+1} = A, p_{n+2} = A$ vào hệ truy hồi ban đầu, ta được

$$A = 2A + 3A + 4 \Rightarrow A = -1.$$

Vậy $\{p_n\}$ với $p_n = -1$ là một nghiệm riêng của hệ truy hồi ban đầu.

- Nghiệm tổng quát của hệ quy hồi trong bài toán có dạng $u_n = q_n + p_n = C_1(-1)^n + C_2 3^n + (-1),$ với mọi n và C_1, C_2 là các hằng số bất kỳ.

Dự đoán nghiệm riêng của hệ truy hồi trong một vài trường hợp

Dạng 2: $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n + cn + d$ **có 1 không phải là nghiệm của phương trình đặc trưng của hệ truy hồi thuần nhất tương ứng.**

Ta tìm nghiệm riêng $\{p_n\}$ thỏa mãn $p_n = An + B$ với mọi n và A, B là các hằng số cần tìm.

Cụ thể, ta thay $p_n = An + B, p_{n+1} = A(n+1) + B, p_{n+2} = A(n+2) + B$ vào hệ truy hồi đã cho để tìm A, B; ở đây p_n thay cho u_n, p_{n+1} thay cho u_{n+1} và p_{n+2} thay cho u_{n+2}.

VD 14. Tìm một nghiệm của hệ truy hồi tuyến tính cấp hai sau

$$u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n + 4n, \forall n \geq 0,$$

biết rằng $u_0 = 1, u_1 = 3.$

Giải:

- Ta tìm nghiệm tổng quát của hệ truy hồi trong bài toán:

+ Hệ truy hồi thuần nhất tương ứng có dạng

$$\boldsymbol{u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n, \forall n \geq 0.}$$

Phương trình đặc trưng có hai nghiệm là $\boldsymbol{\lambda_1 = -1}$ và $\boldsymbol{\lambda_2 = 3.}$

Nghiệm tổng quát của hệ truy hồi thuần nhất có dạng $\boldsymbol{q_n = C_1(-1)^n + C_2 3^n}$ với mọi $\boldsymbol{n,}$ và $\boldsymbol{C_1, C_2}$ là các hằng số bất kỳ.

+ Tìm nghiệm riêng $\{p_n\}$ thỏa mãn $p_n = An + B$ với mọi n.

Thay $p_n = An + B, p_{n+1} = A(n+1) + B, p_{n+2} = A(n+2) + B$ vào hệ truy hồi ban đầu, ta được

$$A(n+2) + B = 2(A(n+1) + B) + 3(An + B) + 4n, \forall n \geq 0.$$

Suy ra $(A+4)n + 4B = 0,$ với mọi $n \geq 0.$

Cho $n = 0$, ta nhận được $B = 0$. Cho $n = 1,$ ta nhận được $A = -4.$

Vậy $\{p_n\}$ với $p_n = -4n$ là một nghiệm riêng của hệ truy hồi ban đầu.

+ Nghiệm tổng quát của hệ quy hồi trong bài toán có dạng $u_n = q_n + p_n = C_1(-1)^n + C_2 3^n - 4n,$ với mọi $n,$ trong đó C_1, C_2 là các hằng số bất kỳ.

- Tìm nghiệm theo yêu cầu bài toán, tức là biết $\boldsymbol{u_0 = 1}$ và $\boldsymbol{u_1 = 3.}$

Ta có nghiệm tổng quát có dạng $\boldsymbol{u_n = C_1(-1)^n + C_2 3^n - 4n,}$ với mọi $\boldsymbol{n.}$

Tìm $\boldsymbol{C_1, C_2}$ sao cho $\boldsymbol{u_0 = 1, u_1 = 3.}$

Ta có $\boldsymbol{u_0 = C_1 + C_2.}$ Suy ra $\boldsymbol{C_1 + C_2 = 1.}$

$\boldsymbol{u_1 = -C_1 + 3C_2 - 4.}$ Suy ra $\boldsymbol{-C_1 + 3C_2 = 3.}$

Ta thu được hệ $\begin{cases} \boldsymbol{C_1 + C_2 = 1} \\ \boldsymbol{-C_1 + 3C_2 = 3} \end{cases}$

Hệ có nghiệm $\boldsymbol{C_1 = 0, C_2 = 1.}$

Do đó, $\boldsymbol{u_n = 0(-1)^n + 1 \cdot 3^n - 4n = 3^n - 4n}$ với mọi $\boldsymbol{n.}$

Nghiệm yêu cầu là $\boldsymbol{\{3^n - 4n\}.}$

Dự đoán nghiệm riêng của hệ truy hồi trong một vài trường hợp

Dạng 3: $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n + c \cdot \alpha^n$ có α không phải là nghiệm của phương trình đặc trưng của hệ truy hồi thuần nhất tương ứng.

Ta tìm nghiệm riêng $\{p_n\}$ thỏa mãn $p_n = A\alpha^n$ với mọi n và A là hằng số cần tìm.

Cụ thể, ta thay $p_n = A\alpha^n, p_{n+1} = A\alpha^{n+1}, p_{n+2} = A\alpha^{n+2}$ vào hệ truy hồi đã cho để tìm A; ở đây p_n thay cho u_n, p_{n+1} thay cho u_{n+1} và p_{n+2} thay cho u_{n+2}.

VD 15. Tìm nghiệm tổng quát của hệ truy hồi tuyến tính cấp hai sau

$$u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n + 2^n, \forall n \geq 0.$$

Giải:

- Hệ truy hồi thuần nhất tương ứng có dạng

$$\boldsymbol{u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n, \forall n \geq 0.}$$

Phương trình đặc trưng có hai nghiệm là $\boldsymbol{\lambda_1 = -1}$ và $\boldsymbol{\lambda_2 = 3.}$

Nghiệm tổng quát của hệ truy hồi thuần nhất có dạng $\boldsymbol{q_n = C_1(-1)^n + C_2 3^n}$ với mọi $\boldsymbol{n,}$ và $\boldsymbol{C_1, C_2}$ là các hằng số bất kỳ.

- Tìm nghiệm riêng $\{p_n\}$ thỏa mãn $p_n = A \cdot 2^n$ với mọi n.

Thay $p_n = A \cdot 2^n, p_{n+1} = A \cdot 2^{n+1}, p_{n+2} = A \cdot 2^{n+2}$ vào hệ truy hồi ban đầu, ta được

$$A \cdot 2^{n+2} = 2A \cdot 2^{n+1} + 3A \cdot 2^n + 2^n, \forall n \geq 0.$$

Suy ra $A = -\dfrac{1}{3}$.

Vậy $\{p_n\}$ với $p_n = \left(-\dfrac{1}{3}\right) \cdot 2^n$ là một nghiệm riêng của hệ truy hồi ban đầu.

- Nghiệm tổng quát của hệ quy hồi trong bài toán có dạng $u_n = q_n + p_n = C_1(-1)^n + C_2 3^n + \left(-\dfrac{1}{3}\right) \cdot 2^n$, với mọi n và C_1, C_2 là các hằng số bất kỳ.

III. Giới hạn của dãy số

1. Các khái niệm cơ bản

• Dãy số $\{u_n\}$ được gọi là có giới hạn l (với $l \in \mathbb{R}$) hay hội tụ về l khi n dần đến vô cực nếu với $\varepsilon > 0$ tùy ý cho trước, tồn tại số $N \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|u_n - l| < \varepsilon, \forall n > N.$$

Khi đó, ta ký hiệu $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = l$ hoặc viết $u_n \to l$ khi $n \to \infty$.

• Nếu dãy số $\{u_n\}$ không hội tụ thì ta nói nó phân kỳ.

VD 16. Cho dãy số $\{u_n\}$ với $u_n = \dfrac{n}{n+1}$. Chứng minh rằng $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$.

Giải:

- Cố định số $\varepsilon > 0$. Tìm tập điều kiện của n sao cho

$$|u_n - 1| < \varepsilon.$$

Ta có $|u_n - 1| = \left|\dfrac{n}{n+1} - 1\right| = \dfrac{1}{n+1}$.

Do đó, $|u_n - 1| < \varepsilon \Leftrightarrow \dfrac{1}{n+1} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \dfrac{1}{\varepsilon} - 1$. Ta thấy, với mọi $n > \dfrac{1}{\varepsilon} - 1$, ta luôn có $|u_n - 1| < \varepsilon$.

Chọn N là số tự nhiên nhỏ nhất thỏa mãn $N > \dfrac{1}{\varepsilon} - 1$. Khi đó $|u_n - 1| < \varepsilon, \forall n > N$.

- Như vậy, với số $\varepsilon > 0$ tùy ý cho trước, luôn tìm được số tự nhiên N (cụ thể $N > \dfrac{1}{\varepsilon} - 1$) sao cho

$$|u_n - 1| < \varepsilon, \forall n > N.$$

Do đó $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = 1$.

1. Các khái niệm cơ bản

• Dãy số $\{u_n\}$ được gọi là có giới hạn $+\infty$ khi n dần đến vô cực nếu với mọi $M > 0$ tùy ý cho trước, tồn tại số $N \in \mathbb{N}$ sao cho

$$u_n > M, \forall n > N.$$

Khi đó, ta ký hiệu $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$ hoặc viết $u_n \to +\infty$ khi $n \to \infty$.

• Dãy số $\{u_n\}$ được gọi là có giới hạn $-\infty$ khi n dần đến vô cực nếu với mọi $M > 0$ tùy ý cho trước, tồn tại số $N \in \mathbb{N}$ sao cho

$$u_n < -M, \forall n > N.$$

Khi đó, ta ký hiệu $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = -\infty$ hoặc viết $u_n \to -\infty$ khi $n \to \infty$.

Chú ý

Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \pm\infty$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{u_n} = 0$.

Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} (-u_n) = -\infty$.

Một số giới hạn đặc biệt

$\lim\limits_{n\to\infty} a^n = +\infty, \forall a > 1$	$\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ (với $\lvert q\rvert < 1$)
$\lim\limits_{n\to\infty} n^p = +\infty \ (p > 0)$	$\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e(\simeq 2,7183)$
$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^p} = 0$ (với $p > 0$)	

2. Một số tính chất

• Nếu dãy số $\{u_n\}$ hội tụ thì giới hạn của nó là duy nhất.

• Nếu dãy số $\{u_n\}$ hội tụ thì nó bị chặn, tức là, tồn tại số $M > 0$ sao cho $|u_n| < M$ với mọi n.

• $\lim\limits_{n\to\infty} C = C$, với C là hằng số.

• Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = u$ và $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = v$ thì

$\lim\limits_{n\to\infty}(u_n \pm v_n) = u \pm v$	$\lim\limits_{n\to\infty} u_n v_n = uv$	$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{u}{v}$ (với $v_n, v \neq 0$)

• Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = u$ và $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = v$ và $u_n \leq v_n$, với mọi $n > n_0$ thì $u \leq v$.

• **Nguyên lý kẹp.** Giả sử $w_n \leq u_n \leq v_n$, với mọi $n > n_0$ và $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = \lim\limits_{n\to\infty} v_n = l$. Khi đó $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = l$.

VD 17. Tính giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^3 - n + 1}{-n^3 + 2}$.

Giải:

Đặt $\boldsymbol{u_n = \dfrac{2n^3 - n + 1}{-n^3 + 2}}$. Chia cả tử và mẫu của $\boldsymbol{u_n}$ cho $\boldsymbol{n^3}$ ta được,

$$\boldsymbol{u_n = \frac{2 - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}}{-1 + \frac{2}{n^3}}}.$$

Ta có $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to\infty} \left(2 - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}\right) = 2}$ và $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to\infty} \left(-1 + \frac{2}{n^3}\right) = -1}$. Do đó,

$$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2 - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}}{-1 + \frac{2}{n^3}} = \frac{2}{-1} = -2}.$$

Sự hội tụ của dãy số đơn điệu.

Dãy số $\{u_n\}$ được gọi là **đơn điệu tăng** nếu $u_n \leq u_{n+1}$, với mọi n.

Dãy số $\{u_n\}$ được gọi là **đơn điệu giảm** nếu $u_n \geq u_{n+1}$, với mọi n.

Một dãy số được gọi là **đơn điệu** nếu nó hoặc đơn điệu tăng hoặc đơn điệu giảm.

Dãy số $\{u_n\}$ được gọi là **bị chặn trên** nếu $u_n \leq M$, với mọi n, trong đó M là số hữu hạn nào đó.

Dãy số $\{u_n\}$ được gọi là **bị chặn dưới** nếu $m \geq u_n$, với mọi n, trong đó m là số hữu hạn nào đó.

Kết quả: Mọi dãy số đơn điệu tăng và bị chặn trên (tương ứng đơn điệu giảm và bị chặn dưới) đều hội tụ