XÁC SUẤT THỐNG KÊ

Giảng viên: Ths. Võ Duy Hoàng

GIỚI THIỆU CHUNG VỀ HỌC PHẦN

1.Tên và mã học phần: MI1216 XÁC SUẤT THỐNG KÊ
2. Số tín chỉ: 2 TC (20 tiết lý thuyết + 10 tiết bài tập)
3. Hình thức đánh giá học phần:

- Chuyên cần: 10%
- Quá trình: 20%
- Cuối kì: 70%

4. Giáo trình

1. PGS.TS Nguyễn Văn Cao (Chủ biên), *Giáo trình lý thuyết xác suất và thống kê toán*, NXB ĐH Kinh tế quốc dân, 2008
2. PGS.TS Nguyễn Văn Cao (Chủ biên), TS. Trần Thái Ninh, TS Nguyễn Thế Hệ, *Bài tập Xác suất và thống kê toán*, NXB ĐH Kinh tế quốc dân, 2009

Thông tin giảng viên

- VÕ DUY HOÀNG
- Sđt: 0982325080

NỘI DUNG MÔN HỌC

PHẦN 1: XÁC SUẤT

PHẦN 2: THỐNG KÊ

PHẦN 1. XÁC SUẤT

CHƯƠNG 1. BIẾN CỐ NGẪU NHIÊN VÀ XÁC SUẤT

CHƯƠNG 2. BIẾN NGẪU NHIÊN VÀ QUY LUẬT PHÂN PHỐI XÁC SUẤT

CHƯƠNG 3. MỘT SỐ QUY LUẬT PHÂN PHỐI XÁC SUẤT THÔNG DỤNG

CHƯƠNG 4. BIẾN NGẪU NHIÊN HAI CHIỀU

CHƯƠNG 5. LUẬT SỐ LỚN VÀ ĐỊNH LÝ GIỚI HẠN TRUNG TÂM

PHẦN 2. THỐNG KÊ

CHƯƠNG 1. CƠ SỞ LÝ THUYẾT MẪU

CHƯƠNG 2. ƯỚC LƯỢNG CÁC THAM SỐ CỦA BIẾN NGẪU NHIÊN

CHƯƠNG 3. KIỂM ĐỊNH GIẢ THIẾT THỐNG KÊ

PHẦN 1. LÝ THUYẾT XÁC SUẤT

Lý thuyết xác suất là bộ môn toán học xác lập những quy luật tất nhiên ẩn giấu sau những hiện tượng mang tính ngẫu nhiên khi nghiên cứu một số lớn lần lặp lại cùng các hiện tượng ấy.

Việc nắm bắt quy luật sẽ cho phép dự báo các hiện tượng ngẫu nhiên đó sẽ xảy ra như thế nào.

Để xác lập các quy luật của hiện tượng ngẫu nhiên, lý thuyết xác suất sử dụng phương pháp suy diễn bằng cách thiết lập các mô hình lý thuyết mang tính khái quát và xem xét các điều kiện cụ thể các quy luật đó được bộc lộ trên các hiện tượng cụ thể.

Thực hiện 2 hành động sau:

1. Gửi 100 triệu đồng vào ngân hàng để lấy lãi sau 1 tháng

- Kết quả: sau 1 tháng sẽ nhận được khoản tiền: gốc + lãi (theo quy định của ngân hàng)

2. Đầu tư 100 triệu đồng vào một dự án

- Kết quả: Chưa biết được khoản tiền nhận được sau dự án là bao nhiêu (tùy thuộc dự án lãi hay lỗ)

Nhận xét:

- Trường hợp 2: hiện tượng ngẫu nhiên

Lý thuyết xác suất nghiên cứu các quy luật của các hiện tượng ngẫu nhiên, từ đó ta có thể dự báo được các hiện tượng ngẫu nhiên đó sẽ xảy ra như thế nào.

Chương 1:
Biến cố và xác suất của biến cố

Nội dung

1. Phép thử ngẫu nhiên và biến cố

2. Mối quan hệ giữa các biến cố

3. Xác suất của biến cố

4. Các công thức tính xác suất

Bài 1: Phép thử ngẫu nhiên và biến cố

1. Khái niệm phép thử ngẫu nhiên
2. Khái niệm biến cố
3. Phân loại biến cố

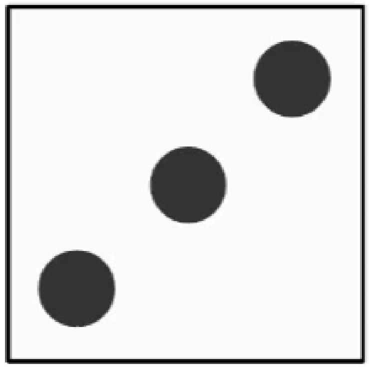
I. Khái niệm phép thử ngẫu nhiên

Ví dụ 1:

Thực hiện tung 1 con xúc sắc

- Số chấm nhận được thuộc tập:

$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$



Ví dụ 2:

Lấy 1 viên bi từ 1 hộp gồm 10 viên bi (3 trắng và 7 đen)

Màu của viên bi lấy ra thuộc tập:

$\Omega = \{trắng; đen\}$

I. Khái niệm phép thử ngẫu nhiên

Định nghĩa:

Phép thử ngẫu nhiên (phép thử) là một thí nghiệm hay một hành động để xem xét một hiện tượng(khả năng) nào đó có xảy ra hay không.

Kí hiệu: T

Ví dụ

Phép thử:

- Xạ thủ bắn 1 viên đạn vào mục tiêu

- Một người đi bán 5 sản phẩm trong 1 ngày
- Đầu tư tiền vào một dự án

- Chọn một viên bi từ hộp gồm 10 viên bi (3 đỏ, 7 đen)
- …

II. Khái niệm biến cố

Định nghĩa: Các hiện tượng (khả năng) có thể xảy ra hay không xảy trong kết quả của phép thử T gọi là ***biến cố (event)***

Kí hiệu: A, B, C,…

Biến cố sơ cấp: là biến cố không thể phân tích thành các biến cố nhỏ hơn.

Biến cố phức hợp: là biến cố có thể phân tích thành các biến cố nhỏ hơn.

Không gian mẫu Ω: là tập hợp toàn bộ các biến cố sơ cấp của phép thử.

Ví dụ

1. Phép thử T: Xạ thủ bắn 1 viên đạn vào mục tiêu

- A: Biến cố xạ thủ bắn trúng mục tiêu
- B: Biến cố xạ thủ bắn trượt mục tiêu

2. Phép thử: Một người đi bán 5 sản phẩm trong 1 ngày

- A: Người đó bán được 1 sản phẩm
- B: Người đó bán hết 5 sản phẩm
- C: Người đó bán được ít nhất 3 sản phẩm

III. Phân loại biến cố

- Biến cố chắc chắn : Là biến cố nhất định sẽ xảy ra khi thực hiện phép thử, Kí hiệu: U
- Biến cố không thể có : Là biến cố nhất định không xảy ra khi thực hiện phép thử, Kí hiệu: V
- Biến cố ngẫu nhiên : Là biến cố có thể xảy ra hay không xảy ra khi thực hiện phép thử, Kí hiệu: A, B, C, …

Ví dụ

Ví dụ 1. Phép thử T: tung 1 con xúc sắc

U: Biến cố "tung được mặt có số chấm lớn hơn hoặc bằng 1 và nhỏ hơn hoặc bằng 6"

V: Biến cố "tung được mặt 0 chấm"

A_i: Biến cố "tung được mặt i chấm" (i = 1, 2, 3,…6) là biến cố ngẫu nhiên

Ví dụ 2. Phép thử T: Một khách hàng đến rút tiền tại một máy ATM

- A: Biến cố "khách hàng rút được tiền" là biến cố ngẫu nhiên

Bài 2: Mối quan hệ giữa các biến cố

1. Biến cố kéo theo (sv tự đọc)
2. Biến cố tương đương (sv tự đọc)
3. Biến cố tổng (hợp)
4. Biến cố tích (giao)
5. Biến cố đối
6. Biến cố xung khắc

I. Biến cố kéo theo

- Định nghĩa:

Nếu biến cố A xảy ra thì biến cố B cũng xảy ra, ta nói A kéo theo B.

Kí hiệu: $A \subset B$

- Ví dụ:

Phép thử T: tung 1 con xúc sắc

A: Biến cố “Tung được mặt 2 chấm”

B: Biến cố “ra số chấm chẵn”

$A \subset B$

II. Biến cố tương đương

Định nghĩa: Nếu biến cố A kéo theo biến cố B, và biến cố B kéo theo biến cố A, ta nói A và B tương đương. Kí hiệu: A = B

Ví dụ:

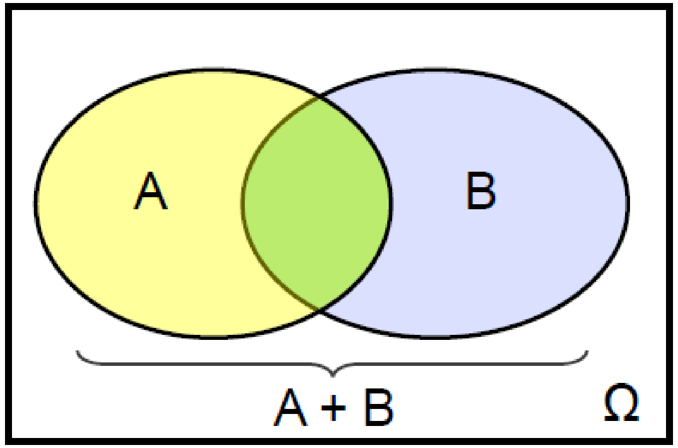
Phép thử T: tung 1 con xúc sắc

A: Biến cố “ra số chấm chẵn”

B: Biến cố “ra số chấm chia hết cho 2”

A = B

III. Biến cố tổng



Định nghĩa 1: Biến cố C gọi là tổng của hai biến cố A và B nếu C chỉ xảy ra khi có ít nhất một trong hai biến cố A hoặc B xảy ra.

Kí hiệu: C = A + B

Định nghĩa 2: Tổng của các biến cố: $A_1; A_2; \ldots; A_n$ là biến cố xảy ra nếu có ít nhất một trong các biến cố đó xảy ra. Kí hiệu: $A_1 + A_2 + \cdots + A_n$.

Ví dụ

- Ví dụ 1:

Phép thử T: tung 1 con xúc sắc

$A_2 + A_4 + A_6$ = A

A: Biến cố "ra số chấm chẵn"

- Ví dụ 2:

Phép thử T: Một người tham gia đấu thầu 2 dự án

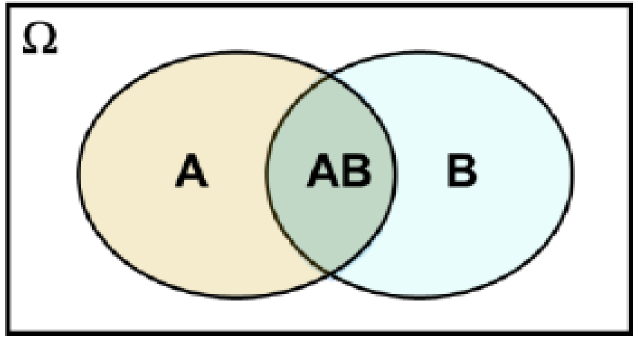
A: Biến cố người đó trúng thầu ít nhất một dự án

A_1: Biến cố người đó trúng thầu dự án thứ nhất

A_2: Biến cố người đó trúng thầu dự án thứ hai

$A = A_1 + A_2$

IV. Biến cố tích (intersection)



Biến cố tích AB

Định nghĩa 1: Cho 2 biến cố A, B. Biến cố "A và B cùng xảy ra" gọi là biến cố tích của A và B.

Kí hiệu: A.B

Định nghĩa 2: Tích của các biến cố: $A_1; A_2; \ldots; A_n$ là biến cố xảy ra đồng thời các biến cố đó. Kí hiệu: $A_1.A_2 \ldots A_n$

Ví dụ

- Ví dụ 1:

Phép thử T: tung 1 con xúc sắc

$A_3.A_6$= B

B = V: biến cố "không thể có"

- Ví dụ 2:

Phép thử T: Một người đầu tư vào 2 loại cổ phiếu A và B"

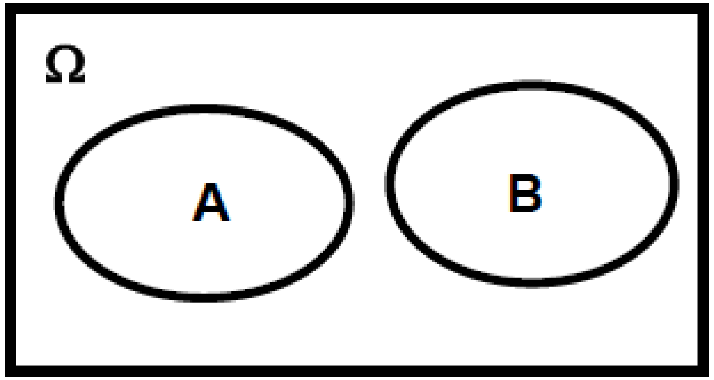
A: Biến cố "cổ phiếu A có lãi"

B: Biến cố "cổ phiếu B có lãi"

C: Biến cố "cả hai cổ phiếu đều có lãi"

C = A.B

V: Biến cố xung khắc (mutually exclusive)



Định nghĩa 1: Hai biến cố A, B gọi là xung khắc nếu chúng không cùng xảy ra khi thực hiện phép thử

Tức là: A.B = V

Định nghĩa 2: Các biến cố: $A_1; A_2; \ldots; A_n$ gọi là biến cố xung khắc từng đôi một nếu 2 biến cố bất kì trong đó là xung khắc nhau.

Ví dụ

- Ví dụ 1:

Phép thử T: tung 1 con xúc sắc

$A_2; A_6$: hai biến cố xung khắc

$A_1; A_2; \dots; A_6$: Nhóm xung khắc từng đôi một

- Ví dụ 2:

Phép thử T: Một thí sinh tham gia kì thi có 2 môn Toán và Văn

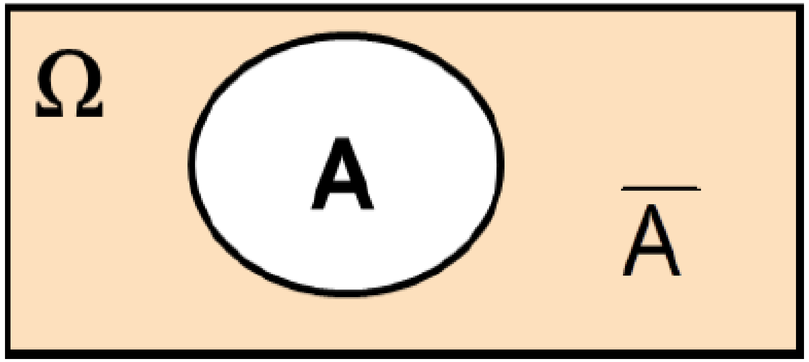
A_1: Thí sinh đó thi đỗ ít nhất một môn

A_2: Người đó thi đỗ môn Toán

A_3: Người đó không thi đỗ môn nào

$A_1; A_2$: không xung khắc; $A_1; A_3$: xung khắc, …

V. Biến cố đối (complement)



Hai biến cố đối nhau A và $\overline{A}$

Định nghĩa: Cho A là một biến cố, khi đó biến cố "không xảy ra A", gọi là biến cố đối của A.

Kí hiệu: $\overline{A}$

Ví dụ 1: V là biến cố đối của U, và ngược lại

Ví dụ 2:Phép thử T: Một người tham gia đấu thầu 2 dự án

A_1: Người đó trúng thầu ít nhất 1 dự án

$\overline{A_1}$: Người đó không trúng thầu dự án nào

Nhận xét

1. $\bar{\bar{A}} = A$
2. A.$\bar{A}$ = V; A+$\bar{A}$ = U
3. A = A.$\bar{B}$ + A.B
4. $\overline{A_1 + A_2 + \cdots + A_n} = \overline{A_1}.\overline{A_2}.\overline{A_3} \ldots \overline{A_n}$
5. $\overline{A_1.A_2 \ldots A_n} = \overline{A_1} + \overline{A_2} + \overline{A_3} + \cdots + \overline{A_n}$.

Bài tập

Ba người cùng bắn vào một mục tiêu. Gọi A_k là biến cố người thứ k bắn trúng mục tiêu (k=1,2,3). Hãy biểu thị các biến cố sau:

a, chỉ có người thứ 1 bắn trúng mục tiêu

b, chỉ có một người bắn trúng mục tiêu

c, chỉ có hai người bắn trúng mục tiêu

d, có người bắn trúng mục tiêu.

Đáp án

a, A – biến cố chỉ có người thứ 1 bắn trúng mục tiêu

$$A = A_1.\overline{A_2}\,.\overline{A_3}$$

b, B – biến cố chỉ có một người bắn trúng mục tiêu

$$B = A_1.\overline{A_2}\,.\overline{A_3} + A_2.\overline{A_1}\,.\overline{A_3} + A_3.\overline{A_1}\,.\overline{A_2}$$

c, C – biến cố chỉ có 2 người bắn trúng mục tiêu

$$C = A_1.A_2\,.\overline{A_3} + A_2.\overline{A_1}\,.A_3 + A_3.A_1.\overline{A_2}$$

d, D – biến cố có người bắn trúng mục tiêu

$$D = A_1 + A_2 + A_3$$

Bài 3: Xác suất của biến cố

1. Khái niệm xác suất của biến cố

2. Định nghĩa cổ điển của xác suất

3. Định nghĩa thống kê của xác suất

4. Nguyên lý xác suất lớn và nguyên lý xác suất nhỏ

I. Khái niệm xác suất của biến cố

Định nghĩa:

Xác suất *(probability)* của biến cố là đại lượng bằng số đặc trưng cho khả năng xuất hiện của biến cố đó trong phép thử và được qui ước là số nằm trong [0,1].

Kí hiệu: Xác suất của biến cố A: **P(A)**

$$0 \le P(A) \le 1$$

1. Định nghĩa cổ điển về xác suất

a. Định nghĩa

Xác suất của biến cố A là tỉ số giữa số kết cục thuận lợi cho biến cố A và số kết cục duy nhất đồng khả năng có thể xảy ra khi thực hiện phép thử.

$$P(A) = \frac{m_A}{n}$$

m_A : số kết cục thuận lợi cho biến cố A

n: số kết cục duy nhất đồng khả năng

P(A): Xác suất của biến cố A

b. Các phương pháp tính xác suất bằng định nghĩa cổ điển

PP1: Suy luận trực tiếp

PP2: Dùng sơ đồ Venn

PP3: Dùng các công thức của giải tích tổ hợp

PP1: Suy luận trực tiếp

Ví dụ 1

Trong một hộp có 6 chính phẩm, 4 phế phẩm. Lấy ngẫu nhiên một sản phẩm. Tìm xác suất để lấy được chính phẩm.

Giải

- Gọi A là biến cố: “Lấy được chính phẩm”
- Khi lấy ngẫu nhiên từ hộp 1 sản phẩm, ta có thể lấy bất kì một sản phẩm nào trong 10 sản phẩm.

Như vậy, số kết cục duy nhất đồng khả năng có thể xảy ra trong phép thử là n = 10.

Biến cố A sẽ xảy ra khi lấy được 1 chính phẩm.
Như vậy số kết cục thuận lợi là m = 6
Khi đó: $P(A) = \frac{m_A}{n} = \frac{6}{10} = 0,6$

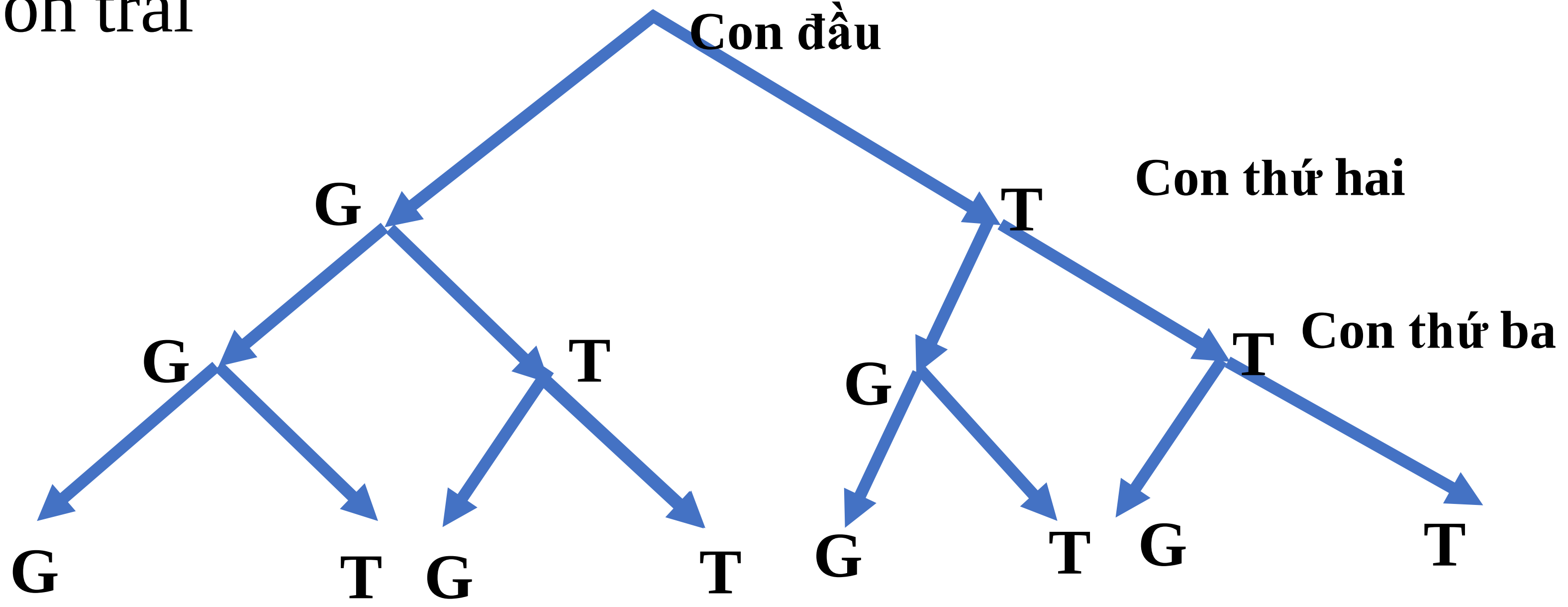
PP2: Dùng sơ đồ Venn

Ví dụ 2 Giả sử xác suất sinh con trai và con gái như nhau. Một gia đình có ba con. Tính xác suất để gia đình đó có 2 con trai.

Giải Ω ={GGG, GGT, GTG, GTT, TGG, TGT, TTG, TTT}

A: "Gia đình có 2 con trai"

Vậy P(A) = $\frac{3}{8}$



Ví dụ 3

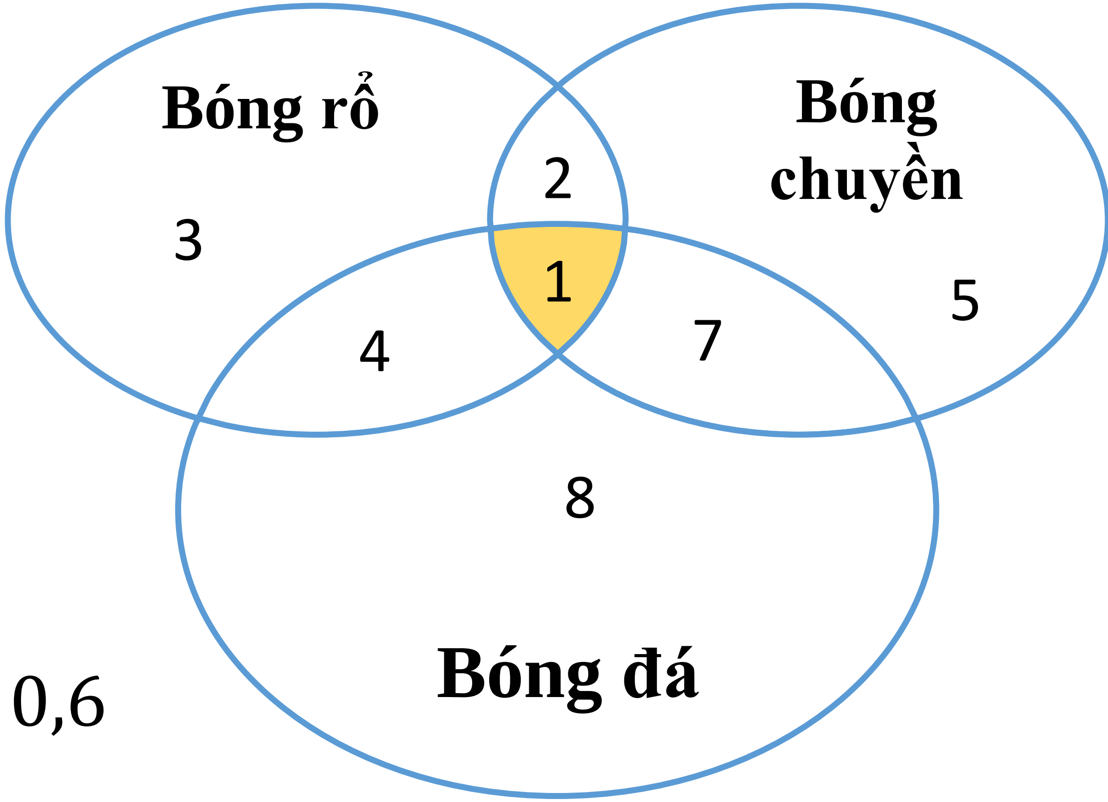
Trong một lớp có 50 học sinh, trong đó có: 20 người chơi bóng đá; 15 người chơi bóng chuyền;10 người chơi bóng rổ; 8 người chơi bóng đá và bóng chuyền; 5 người chơi bóng đá và bóng rổ; 3 người chơi bóng chuyền và bóng rổ; 1 người chơi cả ba môn. Lấy ngẫu nhiên một học sinh. Tìm xác suất để người đó chơi ít nhất một môn bóng.

Giải

Gọi A là biến cố:
"Học sinh được chọn chơi ít nhất một môn bóng"

$$P(A) = \frac{m_A}{n}$$

$$= \frac{3+5+8+2+7+4+1}{50} = \frac{30}{50} = 0{,}6$$



PP3: Dùng các công thức của giải tích tổ hợp

Xét một tập hợp gồm n phần tử

a) Chỉnh hợp: Chỉnh hợp chập k của n phần tử là một nhóm có thứ tự gồm k phần tử lấy ra từ n phần tử đã cho $(k \leq n)$

$$A_n^k = n(n-1)\dots(n-k-1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

b) Chỉnh hợp lặp: Chỉnh hợp lặp chập k của n phần tử là một nhóm có thứ tự gồm k phần tử có thể giống nhau lấy ra từ n phần tử đã cho $(k \leq n)$

$$\overline{A_n^k} = n^k$$

c) Hoán vị: Hoán vị của n phần tử là một nhóm n phần tử được sắp xếp theo một thứ tự nào đó

$$P_n = n! = A_n^n$$

d) Tổ hợp: Tổ hợp chập k của n phần tử là một nhóm (không phân biệt thứ tự) gồm k phần tử khác nhau lấy ra từ n phần tử đã cho ($k \leq n$)

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Ví dụ 4 Tính xác suất để người mua xổ số Miền Bắc trúng giải đặc biệt. Biết rằng giải đặc biệt là 1 số có 6 chữ số.

Giải

Gọi B là biến cố "người đó trúng giải đặc biệt"

Tính xem có bao nhiêu vé số có 6 chữ số?

Đó cũng là số kết cục duy nhất đồng khả năng : n = $\bar{A}_{10}^{6} = 10^6$

Chỉ có 1 giải đặc biệt là kết cục thuận lợi: m = 1

Vậy $P(B) = \frac{1}{10^6}$

Ví dụ 5

Một người khi gọi điện thoại quên mất 2 số cuối của điện thoại và chỉ nhớ rằng chúng khác nhau. Tìm xác suất để bấm ngẫu nhiên một lần được đúng số cần gọi.

Giải

Gọi C biến cố “bấm ngẫu nhiên một lần được đúng số cần gọi”

Số kết cục duy nhất đồng khả năng : n = $A_{10}^{2} = 90$

Số kết cục thuận lợi cho biến cố C là: m = 1

Vậy $P(C) = \frac{1}{90}$

Ví dụ 6

Một lô hàng có 15 sản phẩm tốt, 5 sản phẩm xấu. Lấy ngẫu nhiên từ lô hàng ra 2 sản phẩm. Tính xác suất để:

a. Có 2 sản phẩm tốt.

b. Có 1 sản phẩm tốt, 1 sản phẩm xấu

Giải

Lô hàng: 15 tốt, 5 xấu

a. Gọi A: “ Lấy được 2 sản phẩm tốt”

$$P(A) = \frac{m_A}{n} = \frac{C_{15}^2}{C_{20}^2} = \frac{105}{190} \approx 0,55$$

b. Gọi B: “Lấy được 1 sản phẩm tốt, 1 sản phẩm xấu”

$$P(B) = \frac{m_B}{n} = \frac{C_{15}^1 \cdot C_5^1}{C_{20}^2} = \frac{75}{190} \approx 0,39$$

d. Ưu điểm và hạn chế của định nghĩa xác suất cổ điển

- Ưu điểm: + Tìm được xác suất của biến cố mà không phải thực hiện phép thử

+ Tìm một cách chính xác giá trị của xác suất.

- Hạn chế: + Đòi hỏi số kết cục duy nhất đồng khả năng có thể xảy ra trong phép thử phải là hữu hạn.

+ Trong thực tế nhiều khi không biểu diễn kết quả của phép thử dưới dạng tập hợp các kết cục duy nhất và đồng khả năng.

Nếu số các kết quả có thể là vô hạn hoặc hữu hạn nhưng không đồng khả năng, cách tính xác suất cổ điển như trên không còn được sử dụng. Khi đó ta dùng thống kê để định nghĩa như sau:

2. Định nghĩa thống kê về xác suất

a. Tần suất xuất hiện biến cố A:

Tần suất xuất hiện biến cố A trong n phép thử là tỷ số giữa số phép thử trong đó biến cố xuất hiện và tổng số phép thử được thực hiện.

$$f_n(A) = \frac{k}{n}$$

Ví dụ. Để nghiên cứu khả năng xuất hiện mặt sấp khi tung một đồng xu, người ta tiến hành tung một đồng xu nhiều lần và thu được kết quả sau:

Người làm thí nghiệm	Số lần tung(n)	Số lần được mặt sấp (k)	Tần suất
Buffon	4040	2048	0,5069
Pearson	12000	6019	0,5016
Pearson	24000	12012	0,5005

Nhận xét:

Khi phép thử tăng lên thì tần suất xuất hiện mặt sấp sẽ dao động ngày càng ít xung quanh giá trị không đổi 0,5. Điều đó cho phép hi vọng khi phép thử tăng lên vô hạn, tần suất sẽ hội tụ về giá trị 0,5.

b. Định nghĩa

Nếu số phép thử tăng lên vô hạn mà tần suất xuất hiện biến cố A luôn dao động quanh một số dương p nào đó thì p được gọi là xác suất của biến cố A.

$$\boldsymbol{P(A) \approx f_n(A)}$$

Ví dụ

Trong số 240.000 trẻ sơ sinh chào đời người ta thấy có 123.120 bé trai. Như vậy, ta có thể ước lượng xác suất sinh con trai là:

$$P \approx \frac{123120}{240000} = 0{,}513$$

Ví dụ

Quan sát đường Trần Duy Hưng trong một năm 365 ngày ta ghi nhận có 198 ngày bị tắc đường vào lúc 8h sáng. Như vậy có thể ước lượng xác suất tắc đường lúc 8h sáng trên đường Trần Duy Hưng là:

$$P \approx \frac{198}{365} = 0{,}542$$

c. Ưu điểm và hạn chế của định nghĩa thống kê về xác suất

- Ưu điểm:

+ Không đòi hỏi những điều kiện áp dụng như định nghĩa cổ điển

+ Hoàn toàn dựa trên các quan sát thực tế làm cơ sở kết luận về xác suất của biến cố

- Hạn chế:

+ Chỉ áp dụng với hiện tượng ngẫu nhiên mà tần suất của nó tương đối ổn định

+ Để xác định một cách tương đối chính xác giá trị xác suất ta phải tiến hành trên thực tế một số đủ lớn các phép thử

Năm 1933, nhà toán học người Nga lỗi lạc, Viện sĩ Kolmogorov đã xây dựng hệ tiên đề làm cơ sở cho việc định nghĩa một cách hoàn chỉnh khái niệm xác suất về mặt lý thuyết.

Bài 4: Các công thức tính xác suất

1. Công thức cộng xác suất

2. Công thức nhân xác suất

3. Công thức Becnulli

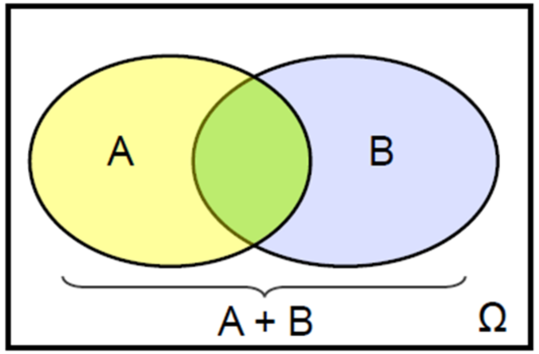
4. Công thức xác suất đầy đủ

5. Công thức Bayes

I. Công thức cộng xác suất

Định lý 1: Cho 2 biến cố A, B bất kì, ta có

P(A+B) = P(A) + P(B) – P(A.B)



Hệ quả:

Nếu A, B là 2 biến cố xung khắc thì

P(A+B) = P(A) + P(B)

Do đó: $\boldsymbol{P(A) + P(\overline{A}) = 1}$

I. Công thức cộng xác suất

Hệ quả:

Nếu $A_1; A_2; \dots; A_n$ là các biến cố xung khắc từng đôi một thì:

$$\boldsymbol{P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) =}$$

$$\boldsymbol{P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \dots + P(A_n)}$$

I. Công thức cộng xác suất

Định lý 2 (công thức cộng xác suất tổng quát):

Cho $A_1; A_2; \dots; A_n$ là các biến cố bất kì, khi đó

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i.A_j) +$$

$$+ \sum_{i<j<k} P(A_i.A_j.A_k) - \dots + (-1)^{n-1} P(A_1.A_2 \dots A_n)$$

Khi n = 3 ta có:

$$P(A_1 + A_2 + A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1.A_2) - P(A_2.A_3) - P(A_1.A_3) + P(A_1.A_2.A_3)$$

Ví dụ

1. Trong 1 hộp có 6 chính phẩm và 4 phế phẩm. Lấy ngẫu nhiên ra 3 sản phẩm. Tính xác suất trong 3 sản phẩm đó có ít nhất 1 phế phẩm

2. Một ngân hàng sử dụng 2 loại thẻ thanh toán M, N. Tỉ lệ khách hàng sử dụng thẻ loại M, N tương ứng là 60%, 55%, và cả hai loại là 30%. Chọn ngẫu nhiên một khách hàng của ngân hàng. Tính xác suất người đó có sử dụng thẻ của ngân hàng?

VD1.

A: Biến cố " trong 3 sản phẩm lấy ra có ít nhất 1 phế phẩm"

$\bar{A}$: Biến cố " cả 3 sản phẩm là chính phẩm"

$$P(A) = 1 - P(\bar{A})$$

$$= 1 - \frac{{C_6}^3}{{C^3}_{10}}$$

- VD2:

A: Biến cố “người đó sử dụng thẻ loại M”

B: Biến cố “người đó sử dụng thẻ loại N”

C: Biến cố “người đó có sử dụng thẻ của ngân hàng”

Ta có:

$C = A + B$

$P(C) = P(A+B)$

$\quad\quad = P(A) + P(B) - P(A.B)$

$\quad\quad = 0{,}6+0{,}55-0{,}3$

II. Công thức nhân

Định nghĩa xác suất có điều kiện:

Xác suất của biến cố A được tính với điều kiện biến cố B đã xảy ra gọi là xác suất có điều kiện của biến cố A. Kí hiệu: **P(A|B)**

Nhận xét:

+) $P(A|A) = 1$

+) $P(\bar{A}|B) = 1 - P(A|B)$

+) $P((A+B)|C) = P(A|C) + P(B|C)$ nếu A, B xung khắc

Ví dụ

Lấy lần lượt 2 quả cầu từ 1 hộp gồm 5 quả cầu trắng, 3 quả cầu đen. Gọi biến cố A, B là lần 1, 2 lấy được quả cầu màu trắng.

Tính P(B|A) khi:

- Lấy có hoàn lại
- Lấy không hoàn lại

Định nghĩa tính độc lập (independent) giữa các biến cố

Hai biến cố A, B gọi là độc lập nếu P(A/B) = p(A) hoặc P(B/A) = P(B) (tức là sự xảy ra hay không của biến cố này không ảnh hưởng đến xác suất của biến cố kia)

Nhận xét:

Việc nhận diện tính độc lập giữa các biến cố đôi khi có thể thông qua "cảm nhận"

Ví dụ

A: Biến cố " xạ thủ thứ 1 bắn trúng mục tiêu"

B: Biến cố " xạ thử thứ 2 bắn trúng mục tiêu"

A, B là 2 biến cố độc lập

2. Phép thử: Lấy lần lượt 2 viên bi từ hộp gồm 3 trắng và 2 đen

A_1: Viên bi lấy ra thứ nhất có màu trắng

A_2: Viên bi lấy ra thứ hai có màu đen

Lấy hoàn lại	**Lấy không hoàn lại**
A_1; A_2 là độc lập	**A_1; A_2 là không độc lập**

II. Công thức nhân

Định lý 1: Với A, B là 2 biến cố bất kì, ta có

P(A.B) = P(A/B).P(B) = P(B/A).P(A)

Nhận xét:

+) $\boldsymbol{P(A/B) = \frac{P(A.B)}{P(B)}}$: công thức tính xác suất có điều kiện

+) Hai biến cố A, B độc lập khi và chỉ khi

P(A.B) = P(A).P(B)

+) Nếu A, B là 2 biến cố độc lập thì các cặp (A, $\bar{B}$); ($\bar{A}$, B); và ($\bar{A}$; $\bar{B}$) cũng độc lập

II. Công thức nhân

Định lý 2 (công thức nhân xác suất tổng quát)

- Với $A_1; A_2; \dots; A_n$ là các biến cố bất kì, ta có:

$$\mathbf{P}(\boldsymbol{A_1.A_2 \dots A_n}) = \mathbf{P}(\boldsymbol{A_1}).\mathbf{P}(\boldsymbol{A_2/A_1}).\mathbf{P}(\boldsymbol{A_3/A_1.A_2})\dots\mathbf{P}(\boldsymbol{A_n/A_1.A_2\dots A_{n-1}})$$

- Các biến cố $A_1; A_2; \dots; A_n$ độc lập toàn phần khi và chỉ khi:

$$\mathbf{P}(\boldsymbol{A_1.A_2 \dots A_n}) = \mathbf{P}(\boldsymbol{A_1}).\mathbf{P}(\boldsymbol{A_2}).\mathbf{P}(\boldsymbol{A_3})\dots\mathbf{P}(\boldsymbol{A_n})$$

Ví dụ

VD1. Một người có 9 chiếc chìa khóa, trong đó chỉ có mọt chiếc mở được cửa. Anh ta thử từng chìa một, chiếc nào đã thử thì không thử lại nữa. Tính xác suất để anh ta mở được cửa ở lần thử thứ 4.

VD2. Một công ty có 3 ô tô hoạt động độc lập. Xác suất để 3 ô tô thứ 1, 2, 3 bị hỏng trong ngày tương ứng là 0,2; 0,1; 0,15. Tính xác suất để trong 1 ngày có:

a, đúng một ô tô bị hỏng

b, có ít nhất một ô tô bị hỏng

c, Sau ngày làm việc thấy có 1 ô tô bị hỏng. Tính xác suất để ô tô bị hỏng đó là ô tô thứ 2.

- VD2:

Gọi A_i là biến cố ô tô thứ i bị hỏng

(i = 1, 2,3);

P(A_1) =0,2; P(A_2) =0,1; P(A_3) $= 0,15$

a, Gọi A là biến cố có đúng 1 ô tô bị hỏng

A$= A_1.\overline{A_2}\,.\overline{A_3} + A_2.\overline{A_1}\,.\overline{A_3} + A_3.\overline{A_1}\,.\overline{A_2}$

P(A)$= P(A_1.\overline{A_2}\,.\overline{A_3} + A_2.\overline{A_1}\,.\overline{A_3} + A_3.\overline{A_1}\,.\overline{A_2})$

= P($A_1.\overline{A_2}\,.\overline{A_3}$) + P($A_2.\overline{A_1}\,.\overline{A_3}$) + P($A_3.\overline{A_1}\,.\overline{A_2}$)

= P(A_1)$.P(\overline{A_2})$.P($\overline{A_3}$) +…

b, Gọi B là biến cố có ít nhất một ô tô bị hỏng

$\bar{B}$ là biến cố không có ô tô nào bị hỏng

P($\bar{B}$) $= P(\overline{A_1}\,.\overline{A_2}.\overline{A_3})$=P($\overline{A_1}$) . P($\overline{A_2}$) .P($\overline{A_3}$)

P(B) = 1- P($\bar{B}$)

c, Xác suất cần tính:

$P(A_2|\mathrm{A}) = \frac{P(A.A_2)}{P(A)}$

$$= \frac{P(A_2.\overline{A_1}\,.\overline{A_3})}{P(A)}$$

III. Công thức Becnulli

Xét n phép thử Becnuli thỏa mãn:

1) Các phép thử độc lập với nhau
2) Trong mỗi phép thử chỉ xảy ra 2 biến cố A hoặc $\bar{A}$
3) P(A) (hoặc P($\bar{A}$)) không đổi trong mọi phép thử

Ví dụ:

- Tung đồng xu n lần
- Lấy lần lượt 10 viên bi theo phương thức hoàn lại từ một hộp 50 viên bi (20 trắng, 30 đen)

III. Công thức Becnulli

Xác suất để trong n phép thử Becnulli biến cố A xuất hiện k lần:

$$\boldsymbol{P_n(k) = C_n{}^k . p^k . (1-p)^{n-k}}$$

(Công thức Becnulli)

trong đó, p = P(A)

Ví dụ

1. Xác suất để 1 xạ thủ bắn trúng mục tiêu là 0,6. Xạ thủ bắn 10 lần. Tính xác suất để xạ thủ bắn trúng 7 lần.

$$P_{10}(7) = {C_{10}}^{7}.\,0.6^{7}.\,(1-0.6)^{3}$$

2. Tỉ lệ người mắc bệnh lao ở một vùng là 10%, kiểm tra ngẫu nhiên 100 người ở vùng đó, tính xác suất để:

a, không có người nào bị bệnh lao

b, có ít nhất hai người bị bệnh lao

IV. Công thức xác suất đầy đủ

Định nghĩa:

Nhóm các biến cố $H_1; H_2; \dots; H_n$ gọi là nhóm đầy đủ các biến cố của một phép thử nếu trong kết quả của phép thử chỉ xảy ra một và chỉ một trong các biến cố đó. Tức là:

+) $H_1; H_2; \dots; H_n$ xung khắc từng đôi một

+) $H_1 + H_2 + \cdots + H_n = U$

Hệ quả: $\boldsymbol{P(H_1) + P(H_2) + \cdots + P(H_n) = 1}$

IV. Công thức xác suất đầy đủ

Ví dụ:

Phép thử T: Tung 1 con xúc sắc

- $A_1; A_2; \dots; A_6$ là nhóm đầy đủ các biến cố
- A: Biến cố ra số chấm chẵn; $\bar{A}$: Biến cố ra số chấm lẻ

  A, $\bar{A}$: Nhóm đầy đủ

Nhận xét: 1 phép thử có thể có nhiều nhóm đầy đủ

IV. Công thức xác suất đầy đủ

Định lý: (công thức xác suất đầy đủ)

Giả sử $H_1; H_2; \ldots; H_n$ là nhóm đầy đủ các biến cố của phép thử T, và A là một biến cố bất kì thì:

$$\boldsymbol{P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A/H_i).P(H_i)}$$

$$\boldsymbol{= P(A|H_1).P(H_1) + \cdots + P(A|H_n).P(H_n)}$$

Áp dụng:

+) Xác định phép thử để xây dựng nhóm đầy đủ của bài toán

+) Cần chọn nhóm đầy đủ để việc tính $P(A/H_i)$; $P(H_i)$ dễ ràng

Ví dụ

Cho 3 hộp sản phẩm:

Hộp 1: 5 chính phẩm, 4 phế phẩm

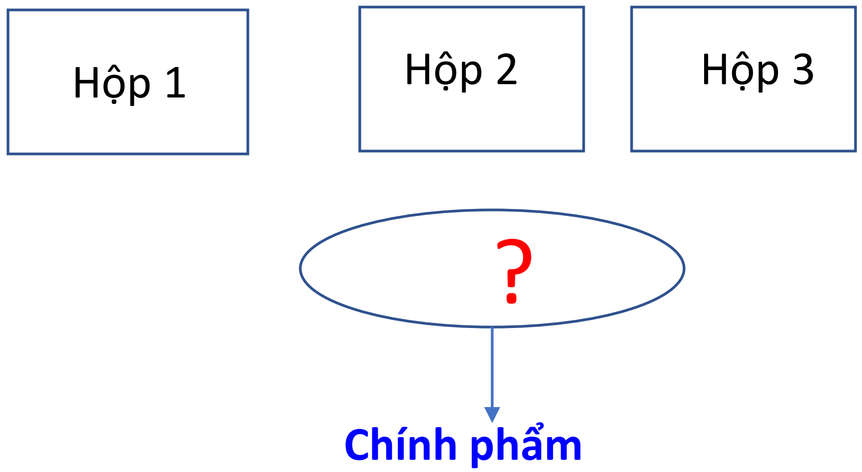
Hộp 2: 7 chính phẩm, 3 phế phẩm

Hộp 3: 10 chính phẩm, 6 phế phẩm

Lấy ngẫu nhiên 1 hộp, từ đó lấy ra một sản phẩm. Tính xác suất để lấy được chính phẩm

Bước 1: Chọn 01 hộp

Bước 2: Chọn sản phẩm



Ví dụ

- A: Biến cố “sản phẩm lấy ra là chính phẩm”
- H_i: Biến cố “lấy được hộp thứ i”, i = 1,2,3

Nhận thấy, H_1, H_2, H_3 là một nhóm đầy đủ

Áp dụng công thức xác suất đầy đủ

$$P(A) = \sum_{i=1}^{3} \mathrm{P}(\mathrm{A}/H_i).\mathrm{P}(H_i)$$

Ta có:

$\mathrm{P}(H_1) = \mathrm{P}(H_2) = \mathrm{P}(H_3) = \frac{1}{3}$

$\mathrm{P}(\mathrm{A}/H_1) = \frac{5}{9}$; $\mathrm{P}(\mathrm{A}/H_2) = \frac{7}{10}$; $\mathrm{P}(\mathrm{A}/H_3) = \frac{10}{16}$

Do đó: $\mathrm{P(A)} = \frac{1}{3}\left(\frac{5}{9} + \frac{7}{10} + \frac{10}{16}\right)$=0,63

Ví dụ

Một người chọn một trong 3 nơi ưa thích như nhau để đến bán hàng. Xác suất bán được hàng ở mỗi nơi tương ứng là 0,2; 0,3; 0,4. Tính xác suất để trong 5 lần đi bán hàng tại nơi đó thì có 2 lần người đó bán được hàng?

Bước 1: chọn nơi bán hàng

Bước 2: đi bán 5 lần tại nơi đó

A – biến cố người bán hàng 5 lần thì có 2 lần bán được hàng

H_i - biến cố người đó chọn bán hàng ở nơi thứ i, i= 1,2,3

Nhận thấy, H_1, H_2, H_3 là một nhóm đầy đủ

Áp dụng công thức xác suất đầy đủ:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{3} \mathrm{P}(\mathrm{A}/H_i).\mathrm{P}(H_i)$$

$$\mathrm{P}(H_1) = \mathrm{P}(H_2) = \mathrm{P}(H_3) = \frac{1}{3}$$

P(A/H_1)=${C_5}^2.0{,}2^2.0{,}8^3$

P(A/H_2)=${C_5}^2.0{,}3^2.0{,}7^3$

P(A/H_3)=${C_5}^2.0{,}4^2.0{,}6^3$

V. Công thức Bayes

Định lý: Giả sử $H_1; H_2; \dots; H_n$ là nhóm đầy đủ các biến cố của phép thử T, và A là một biến cố bất kì, khi đó

$$P(H_i/A) = \frac{P(A/H_i).P(H_i)}{P(A)}$$

$$= \frac{P(A/H_i).P(H_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A/H_i).P(H_i)}$$

Công thức Bayes dùng để tính lại xác suất của biến cố rơi vào nhóm đầy đủ khi biết biến cố A đã xảy ra

Ví dụ

Cho 3 hộp sản phẩm:

Hộp 1: 5 chính phẩm, 5 phế phẩm

Hộp 2: 7 chính phẩm, 4 phế phẩm

Hộp 3: 10 chính phẩm, 6 phế phẩm

Lấy ngẫu nhiên 1 hộp, từ đó lấy ra một sản phẩm.

a, Tính xác suất để sản phẩm lấy ra là chính phẩm

b, Biết sản phẩm lấy ra là chính phẩm. Tính xác suất để sản phẩm đó thuộc hộp thứ 2?

Ví dụ

- A: Biến cố "sản phẩm lấy ra là chính phẩm"
- H_i: Biến cố "lấy được hộp thứ i", i= 1,2,3

a, Tính P(A)

b, Xác suất cần tính:

$$\mathrm{P}(H_2/\mathrm{A}) = \frac{\boldsymbol{P(A|H_2).\mathrm{P}(H_2)}}{\boldsymbol{P(A)}} = 0{,}37$$

Chú ý:

$$P(H_i|\bar{A}) = \frac{P(\bar{A}|H_i).P(H_i)}{P(\bar{A})} = \frac{(1 - P(A|H_i)).P(H_i)}{1 - P(A)}$$

Ví dụ

1. Tại một cửa hàng có 12 sản phẩm gồm 9 sản phẩm loại 1, 3 sản phẩm loại 2. Người ta lấy ngẫu nhiên 1 sản phẩm làm mẫu (không bán). Một người đến mua 1 sản phẩm trong 11 sản phẩm còn lại. Tính xác suất để người đó mua được sản phẩm loại 1?

2. Một công ti bảo hiểm chia dân cư (đối tượng bảo hiểm) làm 3 loại: ít rủi ro; rủi ro trung bình; rủi ro cao. Việc thống kê cho thấy tỉ lệ dân cư gặp rủi ro trong một năm tương ứng với các loại trên là 5%; 15%; 30% và trong toàn bộ dân cư có 20% ít rủi ro; 50% rủi ro trung bình; 30% rủi ro cao.

a) Tính tỉ lệ dân gặp rủi ro trong 1 năm;

b) Nếu một người không gặp rủi ro trong năm, thì xác suất người đó thuộc loại ít rủi ro là bao nhiêu?

VD1:

Bài toán gồm 2 giai đoạn:

+) giai đoạn 1: lấy ngẫu nhiên 1 sản phẩm làm mẫu

+) Giai đoạn 2: Một người đến mua 1 sản phẩm

Gọi A là biến cố người đó mua được sản phẩm loại 1

H_1: Biến cố sản phẩm làm mẫu là loại 1

H_2: Biến cố sản phẩm làm mẫu là loại 2

Nhận thấy, H_1, H_2 là một nhóm đầy đủ

Áp dụng công thức xác suất đầy đủ:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{2} \mathrm{P}(\mathrm{A}/H_i).\mathrm{P}(H_i)$$

$\mathrm{P}(H_1) = \frac{9}{12}$; $\mathrm{P}(H_2) = \frac{3}{12}$

$\mathrm{P}(\mathrm{A}/H_1) = \dfrac{8}{11}$; $\mathrm{P}(\mathrm{A}/H_2) = \dfrac{9}{11}$

VD2:

Gọi A là biến cố người dân gặp rủi ro trong năm

H_1: Biến cố người dân thuộc loại ít rủi ro

H_2: Biến cố người dân thuộc loại rủi ro trung bình

H_3: Biến cố người dân thuộc loại rủi ro cao

Nhận thấy, H_1, H_2, H_3 là một nhóm đầy đủ

$\mathrm{P}(H_1) = 0{,}2$; $\mathrm{P}(H_2) = 0{,}5$; $\mathrm{P}(H_3) = 0{,}3$

$\mathrm{P}(\mathrm{A}|H_1)$=0,05; $\mathrm{P}(\mathrm{A}|H_2)$=0,15; P(A|H_3)= 0,3

Áp dụng công thức xác suất đầy đủ:

$P(A) = \sum_{i=1}^{3} \mathrm{P}(\mathrm{A}/H_i).\mathrm{P}(H_i)$=0,175 b, Xác suất cần tính

$$P(H_1/\bar{A}) = \frac{P(\bar{A}/H_1).\mathrm{P}(H_1)}{P(\bar{A})}$$

$$= \frac{[1 - \mathrm{P}(\mathrm{A}/H_1)].P(H_1)}{1 - P(A)}$$

Bài tập

Người ta phỏng vấn ngẫu nhiên 200 khách hàng về một sản phẩm định đưa ra thị trường và thấy có:

+) 34 người trả lời " sẽ mua"

+) 96 người trả lời "có thể sẽ mua"

+) 70 người trả lời "không mua"

Kinh nghiệm cho thấy tỉ lệ khách hàng thực sự mua sản phẩm tương ứng với những cách trả lời trên là 40%, 20%, và 1%

1, hãy đánh giá thị trường tiềm năng của sản phẩm đó (hay tỉ lệ người thực sự mua sản phẩm đó)

2, Trong số khách hàng thực sự mua sản phẩm thì có bao nhiêu phần trăm đã trả lời "sẽ mua" a, Gọi A là biến cố khách hàng thực sự mua sản phẩm

H_i là biến cố khách hàng trả lời "sẽ mua"; "có thể sẽ mua"; "không mua" (i=1,2,3)

P(H_1) =0,17; P(H_2) =0,48; P(H_3) $= 0,35$

P(A/H_1)=0,4; P(A/H_2)=0,2; P(A/H_3)=0,01

Áp dụng công thức xác suất đầy đủ

$$P(A) = \sum_{i=1}^{3} \mathrm{P}(\mathrm{A}/H_i).\mathrm{P}(H_i)$$

b, Xác suất cần tính:

$$\mathrm{P}(\mathrm{P}(H_1/\mathrm{A}) = \frac{\mathrm{P}(\mathrm{A}/H_1).\mathrm{P}(H_1)}{P(A)}$$

1. Định nghĩa cổ điển

P(A) = $\frac{m}{n}$ (m: số kết cục thuận lợi cho biến cố A

n: Tổng số kết cục)

2. Công thức cộng xác suất:

- Nếu A, B là 2 biến cố bất kì: P(A + B) = P(A) + P(B) – P(A.B)
- Nếu $A_1; A_2; \ldots; A_n$ là các biến cố xung khắc từng đôi một thì:

$$P(\sum_{i=1}^{n} A_i) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \ldots + P(A_n)$$

3. Công thức nhân xác suất

- Nếu A, B là 2 biến cố bất kì: P(A.B) = P(A).P(A/B) = P(B/A).P(A)
- Nếu $A_1; A_2; \ldots; A_n$ độc lập toàn phần thì:

$$P(A_1.A_2 \ldots A_n) = P(A_1).P(A_2).P(A_3) \ldots P(A_n)$$

4. Công thức xác suất đầy đủ, bayes:

Giả sử $H_1; H_2; \ldots; H_n$ là nhóm đầy đủ các biến cố của phép thử T, và A là một biến cố bất kì:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A/H_i).P(H_i)$$

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i).P(A/H_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i).P(A/H_i)}$$

Kiến thức tổ hợp

Qui tắc cộng:

Nếu có m_1 cách chọn đối tượng x_1, m_2 cách chọn đối tượng x_2, …, m_n cách chọn đối tượng x_n. Trong đó, các cách chọn đối tượng x_i không trùng với cách chọn x_j nếu $i \neq j$, thì có $m_1 + m_2 + \cdots + m_n$ cách chọn một trong các đối tượng đó.

Ví dụ: Để biết tổng số sv trong 1 lớp có thể xác định bằng tổng số sv của mỗi tổ do tổ trưởng cung cấp

Qui tắc nhân:

Giả sử công việc H gồm nhiều công đoạn liên tiếp $H_1, H_2, \dots, H_k$

Giả sử có n_1 cách thực hiện công đoạn H_1, n_2 cách thực hiện công đoạn H_2, …, n_k cách thực hiện công đoạn H_k. Vậy có $n_1.n_2 \dots n_k$ cách thực hiện công việc H.

Ví dụ:

Một thanh niên có 4 chiếc quần dài, 3 chiếc áo sơ mi. Vậy anh ta có 3.4 = 12 cách chọn một bộ quần áo

Kiến thức tổ hợp

Hoán vị

Mỗi cách đổi chỗ của n phần tử (hoặc mỗi cách sắp xếp n phần tử vào n vị trí khác nhau) gọi là phép hoán vị n phần tử.

Số hoán vị của n phần tử là: n!

Tổ hợp

Mỗi cách chọn đồng thời ra k phần tử, k ≤ n, (không quan tâm đến thứ tự) từ n phần tử cho trước gọi là một tổ hợp chập k của n phần tử

Số tổ hợp chập k của n phần tử kí hiệu là: ${C_n}^k = \frac{n!}{k!\,.(n-k)!}$

Chỉnh hợp:

Chỉnh hợp chập k của n phần tử (k ≤ n) là một nhóm có thứ tự gồm k phần tử khác nhau chọn từ n phần tử đã cho.

Số chỉnh hợp chập k của n phần tử kí hiệu là: ${A_n}^k = \frac{n!}{(n-k)!}$