BÀI GIẢNG TOÁN CAO CẤP

HÀM SỐ VÀ DÃY SỐ

I. Các khái niệm liên quan đến giới hạn của hàm số

Cho hàm số $f(x)$ xác định ở lận cận điểm a (có thể trừ ra điểm a). Một tập con $V \subset \mathbb{R}$ được gọi là một lân cận của điểm a nếu $(a-\delta, a+\delta) \subseteq V$, với $\delta > 0$ nào đó.

- Ta nói hàm số $f(x)$ có giới hạn là L khi x dần tới a (hoặc tại điểm a) nếu với mọi số $\varepsilon > 0$ cho trước, luôn tìm được một số $\delta > 0$ sao cho với mọi x thỏa mãn

$$0 < |x-a| < \delta \text{ thì } |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Ký hiệu là $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ hay $f(x) \to L$ khi $x \to a$.

- **Ta có khái niệm tương đương như sau:**

$f(x) \to L$ khi $x \to a$ nếu và chỉ nếu với mọi dãy số $\{x_n\}$ thỏa mãn $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, ta có dãy số $\{f(x_n)\}$ hội tụ tới L khi $n \to \infty$.

VD 1. Sử dụng định nghĩa, chứng minh rằng $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$.

Giải:

Đặt $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$. Ta chứng minh $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2.$

Ta có hàm số $f(x)$ xác định tại mọi $x \neq 1.$

Khi $x \neq 1,$ ta có

$$|f(x) - 2| = \left|\frac{x^2 - 1}{x - 1} - 2\right| = \left|\frac{(x+1)(x-1)}{x - 1} - 2\right| = |x - 1|.$$

Cố định số $\varepsilon > 0.$ Với $x \neq 1,$ ta thấy

$$|f(x) - 2| < \varepsilon \Leftrightarrow 0 < |x - 1| < \varepsilon.$$

Nếu ta đặt $\delta = \varepsilon$ (hoặc ta có thể lấy $\delta \in (0, \varepsilon)$) thì ta có khi:

$$0 < |x - 1| < \delta \text{ thì } |f(x) - 2| < \varepsilon.$$

Như vậy, với mọi số $\boldsymbol{\varepsilon > 0,}$ luôn tìm được số $\boldsymbol{\delta > 0}$ sao cho khi:

$$\boldsymbol{0 < |x - 1| < \delta} \text{ thì } \boldsymbol{|f(x) - 2| < \varepsilon.}$$

Vậy $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = 2.}$

Giới hạn một phía của hàm số

- **Khi x dần tới a với điều kiện $x > a$, mà $f(x)$ dần tới L thì ta nói L là giới hạn bên phải của $f(x)$ tại điểm a.**

Ký hiệu là $\lim_{x \to a+} f(x) = L$ hoặc $f(x) \to L$ khi $x \to a+$.

Cụ thể: $\lim_{x \to a+} f(x) = L$ nếu với mọi số $\varepsilon > 0$ cho trước, luôn tìm được một số $\delta > 0$ sao cho với mọi x thỏa mãn

$$0 < x - a < \delta \text{ thì } |f(x) - L| < \varepsilon.$$

• **Khi x dần tới a với điều kiện $x < a$, mà $f(x)$ dần tới L thì ta nói L là giới hạn bên trái của $f(x)$ tại điểm a.**

Ký hiệu là $\lim\limits_{x \to a-} f(x) = L$ hoặc $f(x) \to L$ khi $x \to a-$.

Cụ thể: $\lim\limits_{x \to a-} f(x) = L$ nếu với mọi số $\varepsilon > 0$ cho trước, luôn tìm được một số $\delta > 0$ sao cho với mọi x thỏa mãn

$$-\delta < x - a < 0 \text{ thì } |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Định lý

Điều kiện cần đủ để $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ là: $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = \lim\limits_{x \to a-} f(x) = L$.

Giới hạn vô cực: Cho hàm số $f(x)$ xác định trong một lân cận của x_0 (có thể trừ ra x_0).

• Ta nói $f(x)$ có giới hạn là $+\infty$ khi x dần đến x_0 (hoặc tại x_0) nếu với mọi số $M > 0$, luôn tìm được số $\delta > 0$ sao cho với mọi x thỏa mãn

$$0 < |x - x_0| < \delta \text{ thì } f(x) > M.$$

Ký hiệu là $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ hay $f(x) \to +\infty$ khi $x \to x_0$.

- **Ta nói** $f(x)$ **có giới hạn là** $-\infty$ **khi** x **dần đến** x_0 **(hoặc tại** x_0**) nếu với mọi số** $M > 0$**, luôn tìm được số** $\delta > 0$ **sao cho với mọi** x **thỏa mãn**

$$0 < |x - x_0| < \delta \text{ thì } f(x) < -M.$$

Ký hiệu là $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ **hay** $f(x) \to -\infty$ **khi** $x \to x_0$**.**

Giới hạn của hàm số tại vô cực:

- **Cho hàm số $f(x)$ xác định trong khoảng $(a, +\infty)$. Ta nói $f(x)$ có giới hạn là L khi x dần đến $+\infty$ nếu với mọi số $\varepsilon > 0$, luôn tìm được số $N > 0$ sao cho với mọi x thỏa mãn**

$$x > N \text{ thì } |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Ký hiệu là $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$ hay $f(x) \to L$ khi $x \to +\infty$.

• **Cho hàm số $f(x)$ xác định trong khoảng $(-\infty, a)$. Ta nói $f(x)$ có giới hạn là L khi x dần đến $-\infty$ nếu với mọi số $\varepsilon > 0$, luôn tìm được số $N > 0$ sao cho với mọi x thỏa mãn**

$$x < -N \text{ thì } |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Ký hiệu là $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$ hay $f(x) \to L$ khi $x \to -\infty$.

• **Định nghĩa tương tự với các giới hạn sau:**

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$

II. Một số tính chất của giới hạn của hàm số

Cho $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

- **Nếu hàm số $f(x)$ có giới hạn khi $x \to a$ thì giới hạn đó là duy nhất.**
- **Nếu $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ thì $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{1}{f(x)} = 0$.**
- **$\lim\limits_{x \to a} C = C$, với C là hằng số.**
- **Nguyên lý kẹp. Giả sử $a \in \mathbb{R}$ và $g(x) \le f(x) \le h(x)$ với mọi $x \in V \backslash \{a\}$ (V là một khoảng chứa a).**

Nếu $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = L$ thì $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$.

Trong trường hợp $a = \pm\infty$, ta cũng có kết quả tương tự.

- **Các quy tắc tính giới hạn.**

Cho $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ **và** $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$**. Khi đó:**

1) $\lim\limits_{x\to a} kf(x) = kA$, **với** k **là hằng số.**

2) $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = A \pm B$.

3) $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = AB$.

4) **Nếu** $B \neq 0$ **thì** $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$.

5) $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = |A|$.

6) **Nếu** $A > 0$ **thì** $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)} = A^B$.

Các dạng vô định

Các dạng vô định thường gặp (quy ước hình thức):

$$\frac{0}{0};\quad \frac{\infty}{\infty};\quad 0\cdot\infty;\quad \infty-\infty;\quad 0^0;\quad 1^{\infty};\quad \infty^0.$$

Chú ý: Khi tính giới hạn của hàm số mà gặp phải các dạng vô định trên thì ta cần phải khử các dạng vô định này.

- **Giới hạn của các hàm số sơ cấp.**

Nếu $f(x)$ là một hàm số sơ cấp xác định trong khoảng chứa điểm x_0 thì

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

VD 2.

a) Tính $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3 - 2x + 1}{x^2 + 2}$.

b) Tính $\lim\limits_{x \to 1} [\sin \pi x + \arcsin(x^2 - 1)]$.

Giải:

a) Đặt $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x + 1}{x^2 + 2}$. Hàm số $f(x)$ là một hàm số sơ cấp và có tập xác định là $\mathbb{R}$. Do đó $f(x)$ luôn xác định trong một khoảng chứa 0. Suy ra,

$$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0) = \frac{1}{2}.$$

b)Đặt $g(x) = \sin \pi x + \arcsin(x^2 - 1)$. Hàm số $g(x)$ là một hàm số sơ cấp.

Vì $y = \arcsin x$ xác định tại mọi $x \in [-1, 1]$ và $y = \sin \pi x$ xác định tại mọi $x \in \mathbb{R}$ nên $g(x)$ xác định khi và chỉ khi

$$-1 \leq x^2 - 1 \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq x^2 \leq 2 \Leftrightarrow -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}.$$

Vậy $g(x)$ xác định tại mọi $x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$. Vì $1 \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ nên $g(x)$ luôn xác định trong một khoảng chứa 1. Do đó,

$$\lim_{x \to 1} g(x) = g(1) = \sin \pi + \arcsin(1^2 - 1) = \arcsin 0 = 0.$$

Một số giới hạn đặc biệt

- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sin x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\tan x} = 1$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{e^x - 1} = 1$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\ln(1+x)} = 1$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$
- $\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e$ (*cơ số Nê-pe*)

▷▷ Một vài ý tưởng khử các dạng vô định

Dạng $\frac{0}{0}$ $\longrightarrow$ **(Tách + rút gọn) hoặc (Nhân liên hợp + tách + rút gọn) hoặc (Thêm bớt + sử dụng giới hạn cơ bản)**

VD 3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-5x+3}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(2x+3)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+1}{2x+3}=\dfrac{2}{5}.$

VD 4.
$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+7}-3}{x^2-6x+8}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+7)-9}{(x-2)(x-4)\left(\sqrt{x+7}+3\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{(x-4)\left(\sqrt{x+7}+3\right)}=-\frac{1}{12}.$$

VD 5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 8x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 3x}{3x}.\dfrac{8x}{\sin 8x}.\dfrac{3}{8}\right)=1.1.\dfrac{3}{8}=\dfrac{3}{8}.$

VD 6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x.\left(e^{2x}-1\right)}{\ln\left(7x^2+1\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\tan x}{x}.\dfrac{e^{2x}-1}{2x}.\dfrac{7x^2}{\ln\left(7x^2+1\right)}.\dfrac{2}{7}\right)=\dfrac{2}{7}.$

Dạng $\dfrac{\infty}{\infty}$ $\longrightarrow$ **Chia cả tử và mẫu cho x^n, với n là bậc của mẫu**

VD 7. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x+1}{x-3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2+\dfrac{1}{x}}{1-\dfrac{3}{x}} = 2.$

VD 8. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2+x-1}{3x^3+4x^2+x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}}{3+\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{x^2}} = \dfrac{0}{3} = 0.$

VD 9.

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4x^3+7x}{5x^2+6x-8} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4x+\dfrac{7}{x}}{5+\dfrac{6}{x}-\dfrac{8}{x^2}} = -\infty$ (vì tử dần tới $-\infty$ và mẫu dần tới 5 khi $x \to -\infty$)

VD 10.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+\sqrt{x^2+x}}{2\sqrt{3x^2+1}-5x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3+\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{2\sqrt{3+\frac{1}{x^2}}-5}=\frac{3+1}{2\sqrt{3}-5}=\frac{4}{2\sqrt{3}-5}.$$

VD 11.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x+\sqrt{4x^2+1}}{\sqrt{9x^2-x}-3x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2-\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}}{-\sqrt{9-\frac{1}{x}}-3}=\frac{2-2}{-3-3}=0.$$

(Lưu ý với trường hợp $x\to-\infty$ mà biểu thức có chứa căn bậc chẵn)

VD 12.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x-\sqrt{x^2+3}+\sqrt[3]{8x^3-x}}{\sqrt[3]{x^3+1}-2x+\sqrt[4]{16x^4+7x^2}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1+\sqrt{1+\dfrac{3}{x^2}}+\sqrt[3]{8-\dfrac{1}{x^2}}}{\sqrt[3]{1+\dfrac{1}{x^3}}-2-\sqrt[4]{16+\dfrac{7}{x^2}}}=\frac{1+1+2}{1-2-2}=-\frac{4}{3}.$$

$\boxed{\text{Dạng } \infty - \infty}$ $\longrightarrow$ **Nhân liên hợp, đưa về dạng** $\dfrac{\infty}{\infty}$

VD 13.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+7x}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+7x-x^2}{\sqrt{x^2+7x}+x}=\frac{7}{\sqrt{1+\dfrac{7}{x}}+1}=\frac{7}{2}.$$

VD 14.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(2x+\sqrt{4x^2+3x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^2+3x-(2x)^2}{\sqrt{4x^2+3x}-2x}$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{3}{-\sqrt{4+\dfrac{3}{x}}-2}=-\frac{3}{4}.$$

VD 15.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+2x^2}-x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3+2x^2-x^3}{\sqrt[3]{(x^3+2x^2)^2}+x\sqrt[3]{x^3+2x^2}+x^2}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{\sqrt[3]{\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^2}+\sqrt[3]{1+\dfrac{2}{x}}+1}=\frac{2}{3}.$$

Dạng 1^{∞} $\longrightarrow$ **Tách như sau:**

$$\lim_{x\to x_0} u^v = \lim_{x\to x_0}\left[(1+(u-1))^{\frac{1}{u-1}}\right]^{v(u-1)} = e^{\lim\limits_{x\to x_0} v(u-1)}$$

Chú ý: $u \to 1 \Rightarrow (u-1) \to 0$ và $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$

VD 16.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+3}{x-2}\right)^{7x} = \lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{5}{x-2}\right)^{\frac{x-2}{5}}\right]^{\frac{35x}{x-2}} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{35x}{x-2}} = e^{35}.$$

VD 17.

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin 4x)^{\frac{2}{3x}} = \lim_{x\to 0}\left[(1+\sin 4x)^{\frac{1}{\sin 4x}}\right]^{\frac{2\sin 4x}{3x}}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin 4x}{3x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{4x}\cdot\frac{8}{3}} = e^{\frac{8}{3}} = \sqrt[3]{e^8}.$$

VD 18. Tính giới hạn

$$I = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{2x-5}{2x+7} \right)^{9x}.$$

$\boxed{e^{-54}}$

BT 1. Tính các giới hạn

1) $C = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 2x}{\tan 5x}$

2) $O = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos 2x}{x\left(e^{4x} - 1\right)}$

3) $L = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + 3x} - 1}{2 - \sqrt[3]{8 + x}}$

4) $E = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{5x^2 - 9x + 4}{x^3 + 7x^2 - 8x}$

5) $N = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x + \sqrt{4x^2 - 1}}{1 - x - \sqrt{2x + 3x^2}}$

6) $N = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{\sin(1 - x^2)}{\ln x}$

7) $H = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{5x + 4}{5x - 3}\right)^{3x+4}$

8) $E = \lim\limits_{x \to 0} (1 + \sin 5x)^{\frac{6}{7x}}$

III. Hàm số liên tục

Định nghĩa 1: *Hàm số* $f(x)$ *xác định trong* (a, b) *gọi là liên tục tại điểm* $x_0 \in (a, b)$ *nếu*

$$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \quad \text{hoặc} \quad \exists \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0).$$

Hàm số $f(x)$ *không liên tục tại* x_0 *được gọi là gián đoạn tại* x_0.

Định nghĩa 2: *Hàm số* $\boldsymbol{f(x)}$ *được gọi là liên tục trên* $\boldsymbol{(a, b)}$ *nếu nó liên tục tại mọi điểm thuộc khoảng này.*

Định nghĩa 3: *Hàm số* $\boldsymbol{f(x)}$ *được gọi là liên tục trên* $\boldsymbol{[a, b]}$ *nếu nó liên tục tại mọi điểm* $\boldsymbol{x \in (a, b)}$*, và* $\boldsymbol{\lim_{x \to a+} f(x) = f(a)}$ *và* $\boldsymbol{\lim_{x \to b-} f(x) = f(b)}$.

VD 19. Tìm $\boldsymbol{m}$ để hàm số sau liên tục tại $\boldsymbol{x = 0}$:

$$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin 7x}{\sin 10x} & \text{nếu } x \neq 0 \\ m - 1 & \text{nếu } x = 0. \end{cases}}$$

Giải. Ta có

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{\sin 7x}{7x}}{\frac{\sin 10x}{10x}}\cdot\frac{7}{10}\right) = \frac{7}{10}.$$

Ta cũng có $f(0) = m - 1$. Vậy để hàm số liên tục tại $x = 0$ thì $\dfrac{7}{10} = m - 1$ hay $m = \dfrac{17}{10}$.

Một số tính chất của hàm số liên tục

• **Nếu $f(x)$ và $g(x)$ là hai hàm liên tục trên D thì**

a) **Các hàm số $f(x) \pm g(x)$, $kf(x)$, $f(x)g(x)$, $|f(x)|$ cũng liên tục trên D.**

b) **Hàm số $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại các điểm $x \in D$ mà $g(x) \neq 0$.**

• **Nếu $f(x)$ liên tục tại a và $g(x)$ liên tục tại $f(a)$ thì hàm số $g(f(x))$ liên tục tại a.**

• **Nếu $f(x)$ liên tục tại x_0 và $\lim\limits_{x \to a} u(x) = x_0$ thì**

$$\lim_{x \to a} f(u(x)) = f\left(\lim_{x \to a} u(x)\right) = f(x_0).$$

• **Mọi hàm số sơ cấp đều liên tục trên tập xác định của nó.**

• Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a, b]$ thì

a) **$f(x)$ đạt giá trị lớn nhất trên $[a, b]$, tức là, tồn tại $c_1 \in [a, b]$ sao cho $f(c_1) = \max_{x \in [a,b]} f(x)$.**

b) **$f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên $[a, b]$, tức là, tồn tại $c_2 \in [a, b]$ sao cho $f(c_2) = \min_{x \in [a,b]} f(x)$.**

• Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a, b]$ và $f(a) \neq f(b)$ thì với mọi γ nằm giữa $f(a)$ và $f(b)$, luôn tồn tại $c \in [a, b]$ sao cho $f(c) = \gamma$.

• Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a, b]$ và $f(a)f(b) < 0$ thì tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho $f(c) = 0$.