# PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN TUYẾN TÍNH CẤP 2

## PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN TUYẾN TÍNH HỆ SỐ HẰNG

### Định nghĩa

Là phương trình có dạng $\boldsymbol{a.y'' + b.y' + c.y = f(x)}$ (1)

trong đó $\boldsymbol{a, b, c \in \mathbb{R}}$ cho trước và $\boldsymbol{a \neq 0}$.

### Phương trình vi phân thuần nhất tương ứng

Là phương trình $\boldsymbol{y'' + py' + qy = 0}$ (2)

### Nhắc lại: $\boldsymbol{NTQ(1) = NTQ(2) + NR(1)}$

- NTQ luôn có dạng $\boldsymbol{y = h(x, C_1, C_2)}$ với $\boldsymbol{C_1, C_2}$ là các hằng số bất kỳ.

- Cách giải PTVP $\boldsymbol{a.y'' + b.y' + c.y = f(x)}$ với điều kiện đầu $\boldsymbol{y(x_0) = y_0}$ và

$y'(x_0) = y_1$.

$\longrightarrow$ Tìm NTQ của PTVP: $y = h(x, C_1, C_2)$ với $C_1, C_2$ là các hằng số bất kỳ.

$\longrightarrow$ Tính $y(x_0) = h(x_0, C_1, C_2) = y_0$.

Tính $y' = h'(x, C_1, C_2)$. Suy ra $y'(x_0) = h'(x_0, C_1, C_2) = y_1$.

Giải hệ $\begin{cases} h(x_0, C_1, C_2) = y_0 \\ h'(x_0, C_1, C_2) = y_1 \end{cases}$ có nghiệm $C_1 = A, C_2 = B$.

Nghiệm là $y = h(x, A, B)$

## Nguyên lí chồng nghiệm:

$$\text{Nếu} \begin{cases} y_1 \text{ là một NR của phương trình } \boldsymbol{a.y'' + b.y' + c.y = f_1(x)} \\ y_2 \text{ là một NR của phương trình } \boldsymbol{a.y'' + b.y' + c.y = f_2(x)} \end{cases}$$

*thì* $\boldsymbol{y = y_1 + y_2}$ *là một nghiệm riêng của phương trình*

$$\boldsymbol{a.y'' + b.y' + c.y = f_1(x) + f_2(x).}$$

## Giải phương trình $\boldsymbol{a.y'' + b.y' + c.y = 0} \quad \textbf{(2)}$

Xét phương trình đặc trưng: $\boldsymbol{a.k^2 + b.k + c = 0} \quad (3)$

Xảy ra 3 trường hợp sau:

i) Phương trình đặc trưng (3) có hai nghiệm phân biệt $\boldsymbol{k_1, k_2}$.

Vậy NTQ của (2) là $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$.

ii) Phương trình đặc trưng (3) có nghiệm kép $k = k_0$.

Vậy NTQ của (2) là $y = (C_1 + C_2 x)e^{k_0 x}$.

iii) Phương trình đặc trưng (3) có hai nghiệm phức $k_1 = A+B.i, k_2 = A-B.i$ (với $B > 0$).

Vậy nghiệm tổng quát của (2) là

$$y = e^{Ax}(C_1 \cos Bx + C_2 \sin Bx).$$

**VD 1.** Giải các phương trình:

a) $\boxed{y'' + 3y' - 4y = 0}$ b) $\boxed{y'' + 4y' + 4y = 0}$ c) $\boxed{y'' + 6y' + 13y = 0}$

*Giải.* a) PTĐT: $k^2 + 3k - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = 1 \\ k = -4. \end{array}\right.$

Vậy NTQ của phương trình đã cho là $y = C_1e^x + C_2e^{-4x}$.

b) PTĐT: $k^2 + 4k + 4 = 0 \Leftrightarrow k = -2$ (kép).

Vậy NTQ của phương trình đã cho là $y = (C_1 + C_2x)e^{-2x}$.

c) PTĐT: $k^2 + 6k + 13 = 0 \Leftrightarrow k = -3 \pm 2i = A \pm B.i$. Chọn $A = -3, B = 2.$

Vậy NTQ của phương trình đã cho là $y = e^{-3x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$.

## ★ Sinh viên tự giải các phương trình sau:

1. $y'' - 6y' + 8y = 0.$

2. $y'' + 5y' - 6y = 0.$

3. $y'' - 6y' + 9y = 0.$

4. $y'' + 7y' = 0.$

5. $y'' - 25y = 0.$

6. $y'' - 10y' + 25y = 0.$

7. $y'' + 9y = 0.$

8. $2y'' - 5y' + 2y = 0.$

## GIẢI PHƯƠNG TRÌNH KHÔNG THUẦN NHẤT

$$y'' + py' + qy = f(x) \qquad \textbf{(1)}$$

$$y'' + py' + qy = 0 \qquad \textbf{(2)}$$

$$\text{PTĐT}: \; k^2 + pk + q = 0 \qquad \textbf{(3)}$$

$$\boxed{\text{Nhắc lại: } NTQ(1) = NTQ(2) + NR(1)}$$

### ★ Tìm một NR của (1)

NR **(1)** phụ thuộc vào hàm $f(x)$ ở Vế phải. Xảy ra hai trường hợp:

$\boxed{\textbf{TH1: } f(x) = e^{\alpha x}P_n(x)}$ trong đó $\alpha \in \mathbb{R}$, $P_n(x)$ là đa thức bậc $n$.

$\boxed{\textbf{TH2: } f(x) = e^{\alpha x}\left[P_n(x)\sin\beta x + Q_m(x)\cos\beta x\right]}$ trong đó $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $P_n(x)$ là đa thức bậc $n$, $Q_m(x)$ là đa thức bậc $m$.

Ghi nhớ dạng tổng quát của đa thức:

- Bậc $\mathbf{0}$ : $p = A$ với $A$ là số thực bất kỳ.

- Bậc $\mathbf{1}$ : $p = Ax + B$, với $A, B$ là các số bất kỳ.

- Bậc $\mathbf{2}$ : $p = Ax^2 + Bx + C$, với $A, B, C$ là các số bất kỳ.

$\boxed{\textbf{TH1: } f(x) = e^{\alpha x} P_n(x)}$ trong đó $\alpha \in \mathbb{R}$, $P_n(x)$ là đa thức bậc $n$.

Khi đó NR **(1)** là $y_r$ có một trong ba dạng:

a) $y_r = e^{\alpha x} Q_n(x)$ nếu $\alpha$ không là nghiệm của PTĐT (3); trong đó $Q_n(x)$ là đa thức bậc $n$ ở dạng tổng quát.

b) $y_r = e^{\alpha x} x Q_n(x)$ nếu $\alpha$ là nghiệm đơn của PTĐT (3).

c) $y_r = e^{\alpha x} x^2 Q_n(x)$ nếu $\alpha$ là nghiệm kép của PTĐT (3).

Ghi nhớ về đồng nhất sau:

1) Đồng nhất $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0$, với mọi $x$ xảy ra khi $a_n = b_n, a_{n-1} = b_{n-1}, \ldots, a_1 = b_1, a_0 = b_0$.

2) Đồng nhất $A \sin \beta x + B \cos \beta x = C \sin \beta x + D \cos \beta x$, với mọi $x$, xảy ra khi $A = C$ và $B = D$.

3) Gặp đồng nhất $A(x) \sin \beta x + B(x) \cos \beta x = C(x) \sin \beta x + D(x) \cos \beta x$, với mọi $x$. Từ đồng nhất, ta cho $x$ lần lượt là các giá trị đặc biệt để xác định các hệ số chưa biết.

**VD 2.** Giải phương trình

$$\boxed{y'' + y' - 2y = 1 - x} \quad (1)$$

*Giải.* Xét phương trình $y'' + y' - 2y = 0$ **(2)** có PTĐT $k^2 + k - 2 = 0$ **(3)**

Có **(3)** $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = 1 \\ k = -2 \end{array}\right.$ suy ra NTQ của (2) là $y = C_1e^x + C_2e^{-2x}$.

Do $f(x) = 1 - x = e^{0x}.P_1(x) \Rightarrow \alpha = 0$ không là nghiệm của **(3)** nên

$$y_r = e^{0x}Q_1(x) = Ax + B.$$

Ta có $y_r' = A$, $y_r'' = 0$, thay vào phương trình **(1)** ta có $A - 2(Ax + B) = -x + 1 \Leftrightarrow -2Ax + (A - 2B) = -x + 1$, với mọi $x$.

Đồng nhất hệ số 2 vế ta được $\begin{cases} -2A = -1 \\ A - 2B = 1 \end{cases}$ hay $A = \frac{1}{2}$, $B = -\frac{1}{4}$. Do đó nghiệm riêng là $y_r = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$. Vậy nghiệm tổng quát cần tìm là

$$y = C_1e^x + C_2e^{-2x} + \frac{x}{2} - \frac{1}{4}.$$

**VD 3.** Giải phương trình

$$\boxed{y'' - 4y' + 3y = e^x(x+2)} \qquad (1)$$

*Giải.* Xét pt $y'' - 4y' + 3y = 0$ **(2)** với PTĐT $k^2 - 4k + 3 = 0$ **(3)** có hai nghiệm $k = 1$, $k = 3$.

Suy ra NTQ của **(2)** là $y = C_1e^x + C_2e^{3x}$.

Có $f(x) = e^xP_1(x)$, tức là $\alpha = 1$ và $P_1(x) = x + 2$.

Do $\alpha = 1$ là một nghiệm đơn của PTĐT **(3)** nên ta tìm nghiệm riêng của **(1)** ở dạng

$$y_r = e^x x Q_1(x) = e^x(Ax^2 + Bx).$$

Ta có

$$y_r' = e^x[Ax^2 + (2A + B)x + B], \quad y_r'' = e^x[Ax^2 + (4A + B)x + 2A + 2B],$$

thay vào phương trình ban đầu ta có

$e^x[-4Ax + 2A - 2B] = e^x(x + 2) \Leftrightarrow (-4A)x + (2A - 2B) = x + 2,$ với mọi $x$.

Đồng nhất hệ số 2 vế ta được $\begin{cases} -4A = 1 \\ 2A - 2B = 2 \end{cases} \Leftrightarrow A = -\dfrac{1}{4}, B = -\dfrac{5}{4}.$

Do đó nghiệm riêng của **(1)** là $y_r = -e^x x\dfrac{x+5}{4}$ và nghiệm tổng quát cần tìm là

$$\boldsymbol{y = C_1 e^x + C_2 e^{3x} - \frac{x^2 + 5x}{4} e^x.}$$

**VD 4.** Giải phương trình

$$\boxed{y'' - 2y' + y = xe^x} \qquad \textbf{(1)}$$

*Giải.* Xét pt $y'' - 2y' + y = 0$ **(2)** với PTĐT $k^2 - 2k + 1 = 0$ **(3)** có nghiệm kép $k = 1$.

Suy ra NTQ của **(2)** là $y = (C_1 + C_2x)e^x$.

Ta có $f(x) = xe^x = e^xP_1(x)$, tức là $\alpha = 1$ và $P_1(x) = x$.

Do $\alpha = 1$ là nghiệm kép của PTĐT **(3)** nên

$$y_r = e^x x^2 Q_1(x) = e^x(Ax^3 + Bx^2).$$

Ta có $y_r' = e^x[Ax^3 + (3A + B)x^2 + 2Bx]$ và

$$y_r'' = e^x[Ax^3 + (6A + B)x^2 + 2(3A + 2B)x + 2B].$$

Thay vào phương trình **(1)** ta có

$$e^x(6Ax + 2B) = e^x x \Leftrightarrow (6A)x + 2B = x, \text{ với mọi } x.$$

Đồng nhất hệ số 2 vế ta được $\begin{cases} 6A = 1 \\ 2B = 0 \end{cases}$ hay $A = \frac{1}{6}, B = 0$.

Do đó nghiệm riêng là $y_r = \frac{1}{6}e^x x^3$.

Vậy nghiệm tổng quát cần tìm là

$$y = (C_1 + C_2 x)e^x + \frac{1}{6}e^x x^3.$$

## ★ Sinh viên tự giải các phương trình sau:

1. $y'' - 6y' + 8y = xe^x$. *HD: Dạng nghiệm riêng:* $\boldsymbol{y_r = (Ax + B)e^x}$

2. $y'' + y' = 3x - 7$. *HD: Dạng nghiệm riêng:* $\boldsymbol{y_r = x(Ax + B)}$

3. $y'' - 6y' + 9y = e^{2x}$. *HD: Dạng nghiệm riêng:* $\boldsymbol{y_r = Ae^{2x}}$

4. $y'' + 7y' = x^2 + x$. *HD: Dạng nghiệm riêng:* $\boldsymbol{y_r = x(Ax^2 + Bx + C)}$

5. $y'' - 25y = e^{5x}$. *HD: Dạng nghiệm riêng:* $\boldsymbol{y_r = A.x.e^{5x}}$

6. $y'' - 10y' + 25y = (x + 1)e^{5x}$. *HD: Dạng nghiệm riêng:* $\boldsymbol{y_r = x^2.(Ax + B).e^{5x}}$

## ★ Kết quả:

1. $y = C_1e^{2x} + C_2e^{4x} + e^x\left(\frac{1}{3}x + \frac{4}{9}\right).$
2. $y = C_1 + C_2e^{-x} + \frac{3}{2}x^2 - 10x.$
3. $y = (C_1 + C_2x)e^{3x} + e^{2x}.$
4. $y = C_1 + C_2e^{-7x} + \frac{1}{21}x^3 + \frac{5}{98}x^2 - \frac{5}{343}x.$
5. $y = C_1e^{5x} + C_2e^{-5x} + \frac{1}{10}xe^{5x}.$
6. $y = .$

$\boxed{\textbf{TH2: } f(x) = e^{\alpha x}\left[P_n(x)\sin\beta x + Q_m(x)\cos\beta x\right]}$

trong đó $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $P_n(x)$ là đa thức bậc $n$, $Q_m(x)$ là đa thức bậc $m$.

Khi đó $y_r$ có một trong hai dạng:

★ Nếu $\alpha \pm i\beta$ không là nghiệm của PTĐT **(3)** thì

$$y_r = e^{\alpha x}\left[R_k(x)\cos\beta x + S_k(x)\sin\beta x\right],$$

trong đó $R_k, S_k$ là các đa thức bậc $k = \max(m, n)$ ở dạng tổng quát.

★★ Nếu $\alpha \pm i\beta$ là nghiệm của PTĐT **(3)** thì

$$y_r = xe^{\alpha x}\left[\left[R_k(x)\cos\beta x + S_k(x)\sin\beta x\right]\right],$$

trong đó $R_k, S_k$ là các đa thức bậc $k = \max(m, n)$ ở dạng tổng quát.

**VD 5.** Giải phương trình $\boxed{y'' - 3y' + 2y = 2\sin x}$ **(1)**

$$\boxed{y'' - 3y' + 2y = 2\sin x} \quad (1)$$

*Giải*. Xét pt $y'' - 3y' + 2y = 0$ **(2)** với PTĐT: $k^2 - 3k + 2 = 0$ **(3)** có 2 nghiệm $k = 1,\ k = 2$. Suy ra NTQ của **(2)** là $y = C_1e^x + C_2e^{2x}$.

Ta có $f(x) = 2\sin x = P_0(x)\sin\beta x$, với $P_0(x) = 2$, $\beta = 1$. Vì $\pm i\beta = \pm i$ không là nghiệm của PTĐT, ta tìm 1 nghiệm riêng dạng $y_r = A\cos x + B\sin x$.

Có $\begin{cases} y_r' = -A\sin x + B\cos x \\ y_r'' = -A\cos x - B\sin x. \end{cases}$ Thế vào pt ban đầu được

$$(A - 3B)\cos x + (3A + B)\sin x = 2\sin x, \text{ với mọi } x.$$

Đồng nhất hệ số, ta được $\begin{cases} A - 3B = 0 \\ 3A + B = 2 \end{cases}$ hay $A = \frac{3}{5}, B = \frac{1}{5}$. Vậy NTQ của

**(1)** là

$$y = C_1e^x + C_2e^{2x} + \frac{3}{5}\cos x + \frac{1}{5}\sin x.$$

**VD 6.** Giải phương trình $\boxed{y'' + y = x\cos x}$ **(1)**

*Giải.* Xét pt $y'' + y = 0$ **(2)** với PTĐT $k^2 + 1 = 0$ **(3)** $\Leftrightarrow k = \pm i$.

Suy ra NTQ của **(2)** là $y = C_1\cos x + C_2\sin x$.

Vế phải $f(x) = x\cos x = P_1(x)\cos\beta x$, với $P_1(x) = x, \beta = 1$. Vì $\pm i\beta = \pm i$ là nghiệm của PTĐT, ta tìm 1 nghiệm riêng dạng

$$y_r = x\left[(Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x\right] = (Ax^2 + Bx)\cos x + (Cx^2 + Dx)\sin x.$$

Có $y_r' = [Cx^2 + (2A + D)x + B]\cos x + [-Ax^2 + (2C - B)x + D]\sin x,$

$$y_r'' = [-Ax^2 + (4C - B)x + 2D + 2A]\cos x + [-Cx^2 - (D + 4A)x + 2C - 2B]\sin x.$$

Thế vào pt ban đầu được

$$(4Cx + 2D + 2A)\cos x + (-4Ax + 2C - 2B)\sin x = x\cos x.$$

Đồng nhất hệ số được hệ $\begin{cases} 4Cx + 2D + 2A = x \\ -4Ax + 2C - 2B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = D = 0 \\ B = C = \frac{1}{4}. \end{cases}$

Vậy NTQ của **(1)** là

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x + \frac{x}{4}(x\sin x + \cos x).$$

**VD 7.** Giải bài toán giá trị ban đầu

$$\boxed{y'' + 4y = 5\sin 3x, \qquad y(0) = 1,\ y'(0) = 1}.$$

*Hướng dẫn.* PTĐT $\Leftrightarrow k = \pm 2i$, suy ra NTQ của pt thuần nhất tương ứng là

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x.$$

Tìm nghiệm riêng $y_r = A \sin 3x + B \cos 3x$. Tính $y_r', y_r''$ và thay tất cả vào phương trình vi phân ban đầu, tìm được $A = -1$, $B = 0$. Suy ra $y_r = -\sin 3x$. Do đó NTQ của pt ban đầu là

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x - \sin 3x.$$

Ta có $y(0) = C_1 = 1$

$y' = -2C_1 \sin 2x + 2C_2 \cos 2x - 3 \cos 3x$. Suy ra $y'(0) = 2C_2 - 3 = 1$. Ta tìm được $C_2 = 2$.

Nghiệm riêng cần tìm

$$y = \cos 2x + 2\sin 2x - \sin 3x.$$

## ★ Sinh viên tự giải các phương trình sau:

1. $y'' - y' - 2y = \cos 2x$. *HD: Dạng nghiệm riêng:* $y_r = A\cos 2x + B\sin 2x$
2. $y'' + y = 3\sin x - 2\cos x$. *HD: Dạng nghiệm riêng:* $y_r = x(A\cos x + B\sin x)$
3. $y'' - 6y' + 9y = (x-1)\sin x$. *HD: Dạng nghiệm riêng:* $y_r = (Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x$
4. $y'' - 2y' = \sin 2x$. *HD: Dạng nghiệm riêng:* $y_r = A\cos 2x + B\sin 2x$

5. $y'' + 4y = x\cos 2x$. *HD: Dạng nghiệm riêng:* $y_r = x[(Ax + B)\cos 2x + (Cx + D)\sin 2x)$

## ★ Kết quả:

1. $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} - \frac{3}{20}\cos 2x - \frac{1}{20}\sin 2x$.
2. $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x + x\left(-\sin x - \frac{3}{2}\cos x\right)$.
3. $y =$.
4. $y =$.
5. $y =$.