§5. Hệ phương trình tuyến tính

Bài toán 1.

Hai tổ sản xuất A và B làm được 500 sản phẩm trong tháng 1. Sang tháng 2 do sự thay đổi nhân sự nên số sản phẩm của tổ A bằng 80% số sản phẩm của họ trong tháng 1, số sản phẩm của tổ B bằng 120% số sản phẩm của họ trong tháng 1. Vì vậy trong tháng 2 tổng số sản phẩm của cả hai tổ là 520 sản phẩm. Hỏi trong tháng 1 mỗi tổ sản xuất được bao nhiêu sản phẩm?

Giải. Gọi x là số sản phẩm của tổ A và y là số sản phẩm của tổ B trong tháng 1 (điều kiện x, y là các số nguyên dương . Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x+y=500 \\ 0,8x+1,2y=520. \end{cases}$$

Bài toán 2

Tổng số học sinh của 3 lớp 12A, 12B, 12C là 105 em cùng tham gia trồng cây. Mỗi em lớp 12A trồng được 3 cây bạch đàn và 4 cây bàng. Mỗi em lớp 12B trồng được 2 cây bạch đàn và 5 cây bàng. Mỗi em lớp 12C trồng được 5 cây bạch đàn và 1 cây bàng. Cả 3 lớp trồng được 340 cây bạch đàn và 365 cây bàng. Hỏi mỗi lớp có bao nhiêu học sinh.

Giải. Gọi số học sinh các lớp 12 A, 12B, 12C lần lượt là x, y, z (điều kiện x, y, z nguyên dương).

Ta có hệ

$$\begin{cases} x+y+z=105 \\ 3x+2y+5z=340 \\ 4x+5y+z=365 \end{cases}$$

Bài toán 3

Bạn Lan có 300 đồng. Bạn Lan muốn mua thịt và cá. Biết rằng giá thịt là 140 đồng/kg, giá cá là 60 đồng/kg. Hỏi bạn Lan có thể mua được bao nhiêu thịt và cá.

Giải. Gọi số kg thịt có thể mua là x và số kg cá là y (với x, y là các số dương). Ta có:

$$140x + 60y = 300.$$

Bài toán 4

Trăm trâu trăm cỏ,
Trâu đứng ăn năm,
Trâu nằm ăn ba,
Lụ khụ trâu già,
Ba con một bó.

Có bao nhiêu trâu đứng, bao nhiêu trâu nằm, bao nhiêu trâu già?

Giải. Gọi x là số trâu đứng, y là số trâu nằm, z là số trâu già (với x, y, z là các số nguyên dương).

$$\begin{cases} x + y + z = 100 \\ 5x + 3y + \dfrac{1}{3}z = 100. \end{cases}$$

5.1. Định nghĩa

Hệ phương trình tuyến tính cỡ $m \times n$ là hệ có dạng như sau:

(5.1)
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = b_m, \end{cases}$$

trong đó các a_{ij} và b_i là các số thực, còn $x_1, \ldots, x_n$ là các ẩn số.

5.1. Định nghĩa

Hệ phương trình tuyến tính cỡ $m \times n$ là hệ gồm m phương trình bậc nhất của n ẩn, có dạng như sau:

(5.1)
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \dots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = b_m, \end{cases}$$

trong đó các a_{ij} và b_i là các số thực, còn $x_1, \dots, x_n$ là các ẩn số.

Nếu $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$, thì hệ (5.1) được gọi là *hệ phương trình tuyến tính thuần nhất.*

5.1. Định nghĩa

Hệ phương trình tuyến tính cỡ $m \times n$ là hệ gồm m phương trình bậc nhất của n ẩn, có dạng như sau:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \cdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = b_m, \end{cases} \tag{5.1}$$

(5.1)

trong đó các a_{ij} và b_i là các số thực, còn $x_1, \dots, x_n$ là các ẩn số.

Nếu $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$, thì hệ (5.1) được gọi là *hệ phương trình tuyến tính thuần nhất.*

Một nghiệm của (5.1) là một bộ n số thực $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ thỏa mãn các phương trình của hệ.

Hệ phương trình cũng được viết lại dưới dạng ma trận như sau:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}}_{b},$$

Đặt

Ma trận liên kết　　Cột ẩn　　Cột tự do

Hệ phương trình cũng được viết lại dưới dạng ma trận như sau:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}}_{b},$$

Đặt

Ma trận liên kết (hệ số) Cột ẩn Cột tự do

Ta được:

$$AX = b$$

(Dạng ma trận của hệ phương trình (5.1))

Đặt

$$\overline{A} = (A \mid b) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

ma trận bổ sung (đầy đủ)

VD: $\begin{cases} x + 3y - z = 2 \\ 2x + y + z = 1 \end{cases}$

Ma trận liên kết $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

Ma trận đầy đủ $\overline{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$

Ví dụ 1.

Xét hệ phương trình ở Bài toán 1

$$\begin{cases} x+y=500 \\ 0,8x+1,2y=520. \end{cases}$$

Ma trận liên kết của hệ là $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0,8 & 1,2 \end{pmatrix}$

Ma trận bổ sung của hệ là $\overline{A}=\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 500 \\ 0,8 & 1,2 & 520 \end{array}\right)$

Ví dụ 2.

Xét hệ phương trình ở Bài toán 2

$$\begin{cases} x+y+z=105 \\ 3x+2y+5z=340 \\ 4x+5y+z=365 \end{cases}$$

Ma trận liên kết của hệ là $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

Ma trận bổ sung của hệ là $\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 105 \\ 3 & 2 & 5 & 340 \\ 4 & 5 & 1 & 365 \end{array}\right)$

Ví dụ 3

Xét hệ phương trình ở Bài toán 4

$$\begin{cases} x + y + z = 100 \\ 5x + 3y + \dfrac{1}{3}z = 100. \end{cases}$$

Ma trận liên kết của hệ là $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & \dfrac{1}{3} \end{pmatrix}$

Ma trận đầy đủ của hệ là $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 5 & 3 & \dfrac{1}{3} & 100 \end{array}\right)$

5.2. Định lý Kronecker-Capelli

Hệ phương trình tuyến tính (5.1) có nghiệm khi và chỉ khi $r(A) = r(\overline{A})$

Ví dụ. Xét hệ pt:
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 = 2 \\ 3x_1 - x_2 - 5x_3 - 3x_4 - x_5 = 6 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 - 3x_5 = 8 \end{cases}$$

Bài tập. Hệ phương trình có nghiệm không?

a) $$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 1 \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 3 \\ -4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = -5 \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$$

c) $$\begin{cases} x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = -1 \\ x_1 - x_2 = 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 7. \end{cases}$$

5.3. Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất n phương trình, n ẩn

Dạng ma trận của hệ AX = 0, với

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

Định lý.

- Nếu det(A) ≠ 0 thì hệ có nghiệm duy nhất X = 0.
- Nếu det (A) = 0 thì hệ có vô số nghiệm.

5.4. Hệ Cramer

a) **Định nghĩa.** Nếu ma trận liên kết *A* của hệ (5.1) là một ma trận vuông không suy biến (tức là $\det(A) \neq 0$) thì hệ (5.1) được gọi là *hệ Cramer*.

5.4. Hệ Cramer

a) **Định nghĩa.** Nếu ma trận liên kết *A* của hệ (5.1) là một ma trận vuông không suy biến (tức là det(A) ≠ 0) thì hệ (5.1) được gọi là *hệ Cramer*.

Ví dụ.

(i)

$$\begin{cases} x + y + z = 10 \\ 3x + 2y + 5z = 15 \\ 4x + 5y + z = 2 \end{cases}$$

Hệ Cramer

(ii)

$$\begin{cases} x - 3y + 2z = 1 \\ 2x - 5y + z = -1 \end{cases}$$

(iii)

$$\begin{cases} x - 3y + 5z = 1 \\ 2x - y - 2z = 0 \\ x + 2y - 7z = -1 \end{cases}$$

Không phải là hệ Cramer

(i)
$$\begin{cases} x + y + z = 10 \\ 3x + 2y + 5z = 15 \\ 4x + 5y + z = 2 \end{cases}$$

(ii)
$$\begin{cases} x - 3y + 2z = 1 \\ 2x - 5y + z = -1 \end{cases}$$

(iii)
$$\begin{cases} x - 3y + 5z = 1 \\ 2x - y - 2z = 0 \\ x + 2y - 7z = -1 \end{cases}$$

(i) Ma trận liên kết

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \\ 4 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = 2 + 20 + 15 - 8 - 3 - 25$$

$$= 1 \neq 0$$

$\Rightarrow$ Hệ là hệ Cramer

(ii) Ma trận liên kết $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & -5 & 1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow$ không vuông $\Rightarrow$ hệ k° là hệ Cramer

(iii) Ma trận liên kết $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -7 \end{bmatrix}$

$$\det(A) = 0$$

$\Rightarrow$ Hệ không là hệ Cramer

Ví dụ. Tìm a để hệ sau là hệ Cramer.

$$\begin{cases} ax + 3y = 1 \\ 2x - y = 3. \end{cases}$$

Giải: * Ma trận liên kết $A = \begin{bmatrix} a & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

* Hệ là hệ Cramer $\Leftrightarrow \det A \neq 0$

$\Leftrightarrow -a - 6 \neq 0$

$\Leftrightarrow a \neq -6.$

b) Công thức nghiệm

Xét hệ phương trình tuyến tính gồm *n* phương trình *n* ẩn:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Khi đó hệ trở thành: $AX = b$, $\exists A^{-1} \Rightarrow X = A^{-1}.b$.

Định lý Cramer

Hệ phương trình Cramer có nghiệm duy nhất $X = A^{-1}b$.

Hay $$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}, \forall i = 1, 2, \dots, n,$$

A_i = ma trận nhận được từ A bằng cách thay cột thứ i bởi cột hệ số tự do b.

VD: $\begin{cases} x - 3y = 5 \\ 2x + y = 1. \end{cases}$

Ma trận liên kết $A = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cc} x & y \end{array} \end{array}$

* $\det A = 7.$

$A_x = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A_x) = 8$, cột thứ nhất là b

$A_y = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A_y = -9$

Vậy nghiệm của hệ pt:

$$\begin{cases} x = \dfrac{\det(A_x)}{\det A} = \dfrac{8}{7} \\ y = \dfrac{\det(A_y)}{\det A} = \dfrac{-9}{7} \end{cases}$$

Ví dụ. Giải các hệ phương trình Cramer sau.

a) $\begin{cases} x - 3y = 5 \\ 5x + 4y = 2. \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ 2x - 3y + z = 2 \\ 3x - y - z = 1. \end{cases}$

Giải

a) Ma trận liên kết $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$

* $\det(A) = 19.$

* $\det(A_x) = \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 26$

* $\det(A_y) = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -23$

No của hệ

$$\begin{cases} x = \dfrac{26}{19} \\ y = -\dfrac{23}{19} \end{cases}$$

b) Ma trận liên kết $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

* $\det A = -7.$

* $\det A_x = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 7$

* $\det A_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 14$

* $\det A_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 14$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{7}{-7} = -1 \\ y = 14/-7 = -2 \\ z = 14/-7 = -2. \end{cases}$$

Ví dụ 1

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x+y=500 \\ 0,8x+1,2y=520. \end{cases}$

Ta có:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0,8 & 1,2 \end{pmatrix} \qquad A_1=\begin{pmatrix} 500 & 1 \\ 520 & 1,2 \end{pmatrix} \qquad A_2=\begin{pmatrix} 1 & 500 \\ 0,8 & 520 \end{pmatrix}$$

det(A)= 0,4; det(A_1)=80; det(A_2)=120

$$x=\frac{\det(A_1)}{\det(A)}=\frac{80}{0,4}=200, y=\frac{\det(A_2)}{\det(A)}=\frac{120}{0,4}=300$$

Ví dụ 2

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x+y+z=105 \\ 3x+2y+5z=340 \\ 4x+5y+z=365 \end{cases}$

Ta có

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_1=\begin{pmatrix} 105 & 1 & 1 \\ 340 & 2 & 5 \\ 365 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_2=\begin{pmatrix} 1 & 105 & 1 \\ 3 & 340 & 5 \\ 4 & 365 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_3=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 105 \\ 3 & 2 & 340 \\ 4 & 5 & 365 \end{pmatrix}$$

det(A) = 1, det(A_1) = 40, det(A_2) = 35, det(A_3) = 30

x = 40, y = 35, z = 30

Bài tập

Bài 1. Dùng định lý Cramer để giải các hệ sau:

a) $\begin{cases} 2x + 5y = 1 \\ 4x + 5y = -5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x - 2y - z = -1 \\ y + z = 1 \\ -x + y + z = -1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + y + z = 2 \\ 3x + y + 2z = 0 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 2x - y - z = 4 \\ 3x + 4y - 2z = 11 \\ 3x - 2y + 4z = 11 \end{cases}$

Bài 2. Tìm a để các hệ sau là hệ Cramer:

a) $\begin{cases} x - 2y = 5 \\ 3x + ay = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y + 2z = 3 \\ 2x + ay + 3z = 1 \\ 3x + 3y + z = 4 \end{cases}$