

# Bài toán đường đi ngắn nhất

# Bài toán người chòe hàng

Travelling Salesman Problem



Hoàng Văn Thủ

# Bài toán tìm đường đi ngắn nhất

## Finding Shortest Path

**1 Nguyen Thi Minh Khai**

<b>A</b>	Cach Mang Thang 8	
	Cach Mang Thang 8	464 m
	Vong Xoay Cong Truong Dan Chu	153 m
	Cach Mang Thang 8	901 m
	Nguyen Thi Minh Khai	2 Km 466 m

**B Nguyen Thi Minh Khai**

Đi: : 16 Phút - 4 Km 8 m

**A**

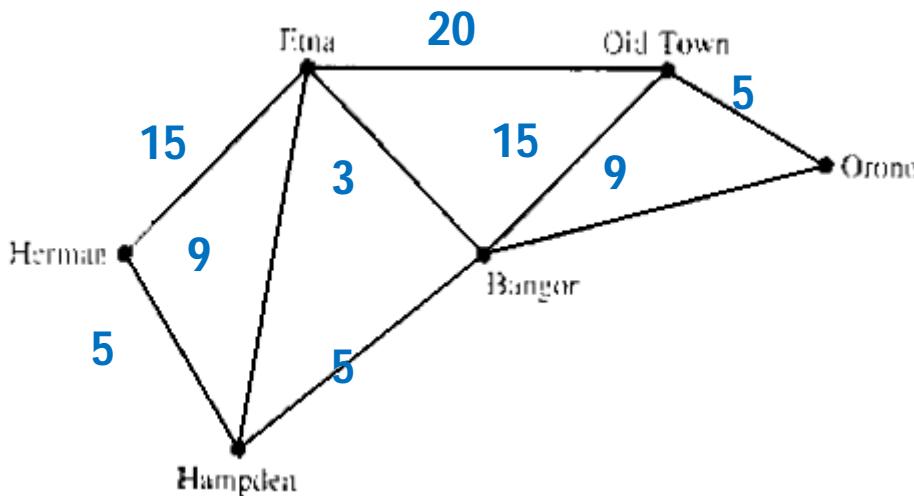
**B**

**www.diadiem.com**

Graph Theory

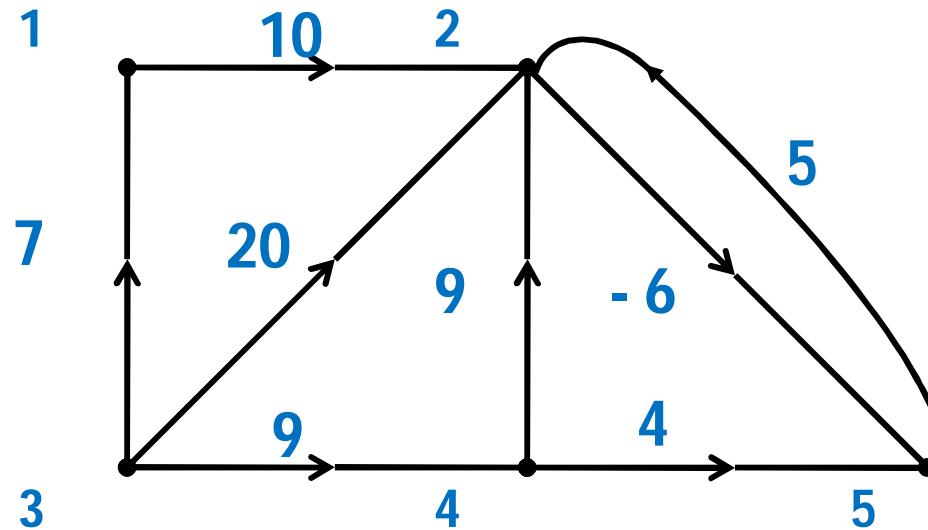
# Các khái niệm mở đầu

- **Bài toán:** Cho  $G = \langle V, E \rangle$  là đồ thị có trọng số.  $s$  và  $t$  là 2 đỉnh của đồ thị. Hãy tìm đường đi có tổng trọng số nhỏ nhất từ  $s$  đến  $t$ .
- **VD:**



- Đường đi ngắn nhất từ Etna đến Oldtown là:  
Etna – Bangor – Orono – OldTown
- Đường đi ngắn nhất từ Hermae đến Etna là:  
Hermae – Hampdea – Bangor - Etna

# Các khái niệm mở đầu (tt)

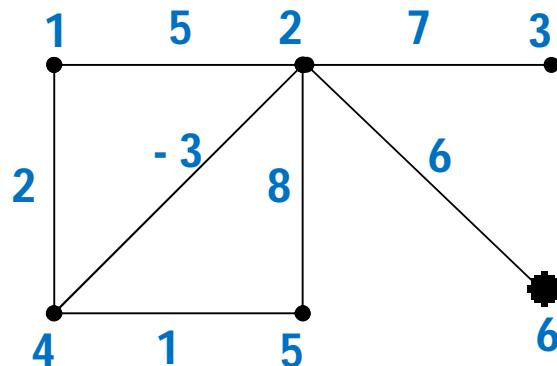


- Tìm đường đi ngắn nhất từ đỉnh 3 đến đỉnh 5
  - Trả lời:  $3 - 4 - 2 - 5$  ??? Độ dài 11 là ngắn nhất ???
  - Đường đi này thì sao? Độ dài là bao nhiêu?  
 $3 - 4 - 2 - 5 - 2 - 5$
  - Đường đi trên đã ngắn nhất chưa???

# Các khái niệm mở đầu (tt)

- Điều kiện để bài toán có lời giải:

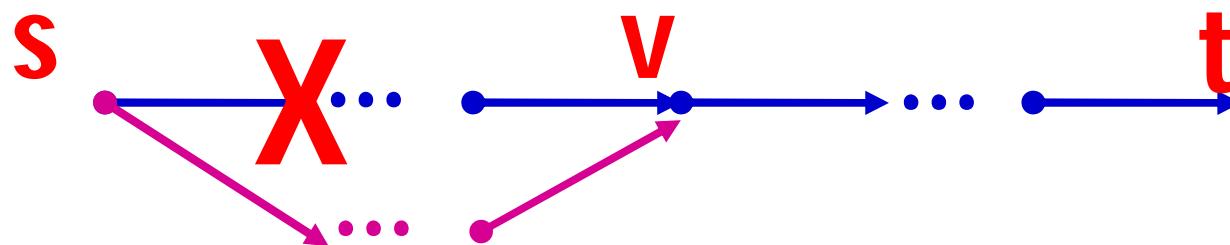
- Phải tồn tại đường đi từ s đến t:
  - Đồ thị vô hướng liên thông
  - Đồ thị có hướng liên thông mạnh
  - Đồ thị vô hướng, s và t nằm trong cùng một thành phần liên thông
  - Đồ thị có hướng, có tồn tại đường đi từ s đến t
- Trong đồ thị không tồn tại chu trình âm
  - Đồ thị có hướng: không tồn tại chu trình âm.
  - Đồ thị vô hướng: không tồn tại cạnh âm.



# Đường đi ngắn nhất xuất phát từ 1 đỉnh

- Nhận xét:

- Nếu  $v$  là đỉnh trung gian trên đường đi ngắn nhất từ  $s$  đến  $t$  thì đường đi từ  $s$  đến  $v$  phải là ngắn nhất và đường đi từ  $v$  đến  $t$  cũng phải là ngắn nhất.



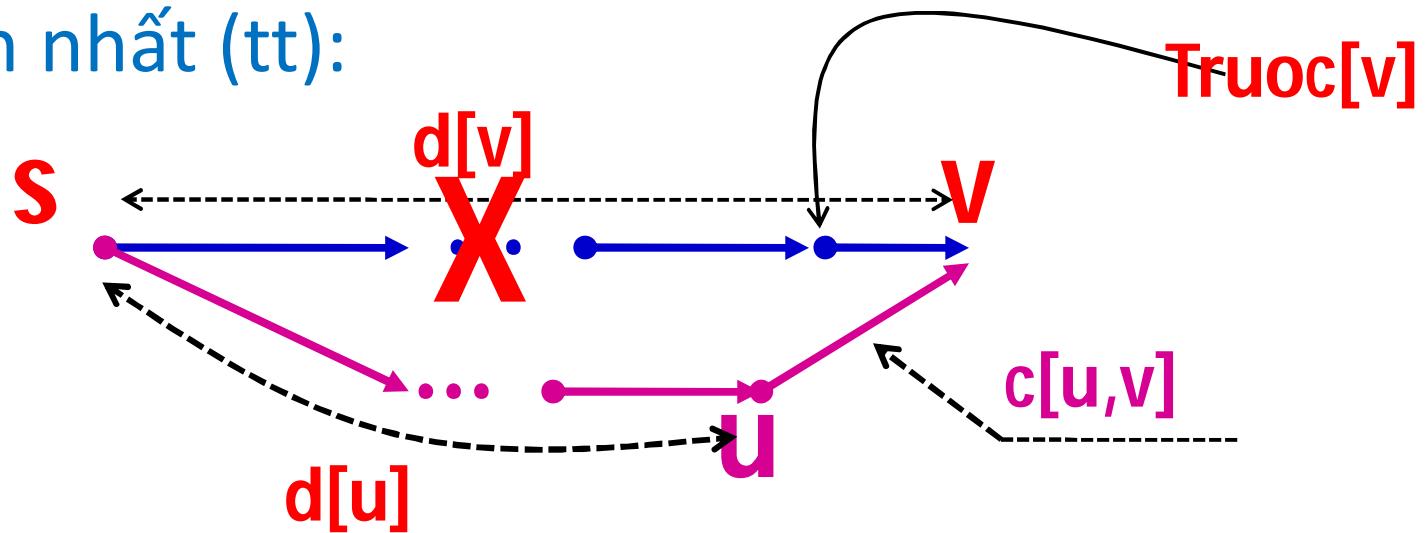
- Do đó, để tối ưu, người ta mở rộng bài toán **tìm đường đi ngắn nhất từ một đỉnh đến tất cả các đỉnh còn lại** của đồ thị.

## Đường đi ngắn nhất xuất phát từ 1 đỉnh (tt)

- Ý tưởng chung của các thuật toán tìm đường đi ngắn nhất.
  - Dò tìm bằng cách thử đi qua các đỉnh trung gian
  - Nếu phát hiện đường đi qua đỉnh trung gian ngắn hơn đường đi hiện tại thì sẽ cập nhật đường đi mới, đồng thời chỉnh sửa các thông tin liên quan.
  - Sử dụng hai mảng để lưu trữ tạm thời:
    - Mảng  $d[v]$ : Lưu trữ độ dài đường đi ngắn nhất hiện tại từ  $s$  đến  $v$ .
    - Mảng  $T[v]$ : Lưu trữ đỉnh nằm trước  $v$  trên đường đi ngắn nhất hiện tại.

# Đường đi ngắn nhất xuất phát từ 1 đỉnh (tt)

- Ý tưởng chung của các thuật toán tìm đường đi ngắn nhất (tt):



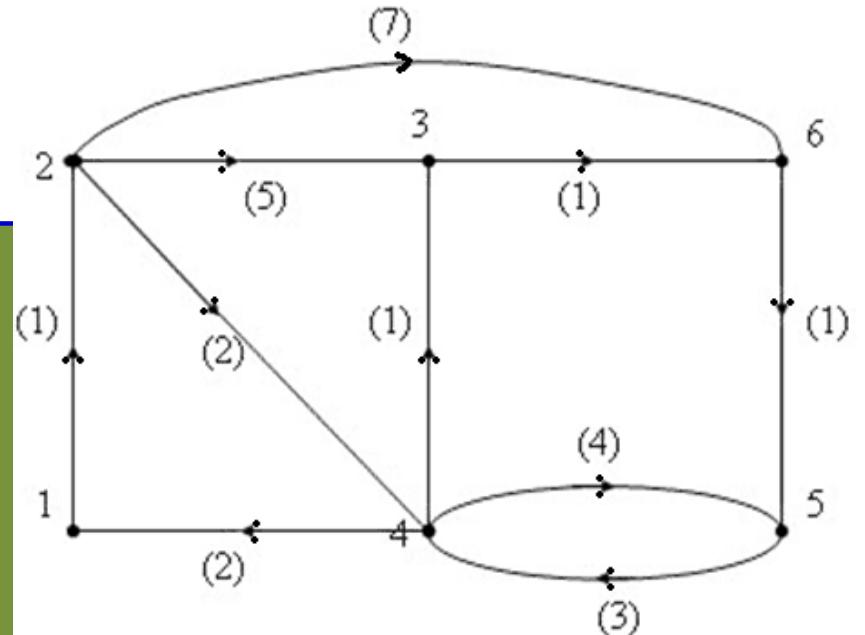
```
if  $d[v] > d[u] + c[u,v]$  then  
{        $d[v] = d[u] + c[u,v];$   
       $\text{Truoc}[v] = u;$       }
```

# Thuật toán Dijkstra

- Chú ý: thuật toán này chỉ dùng cho đồ thị không có cạnh âm.
- Ý tưởng:
  - Do không có cạnh âm nên tại mỗi bước, sẽ có một đỉnh mà thông tin về nó sẽ không thay đổi về sau
  - Tại mỗi bước, ta không cần phải kiểm tra qua tất cả các đỉnh trung gian, mà chỉ thực hiện như sau:
    - Chọn một đỉnh  $u$  có giá trị  $d[u]$  nhỏ nhất
    - Chọn  $u$  làm đỉnh trung gian để xác định các bước kế tiếp

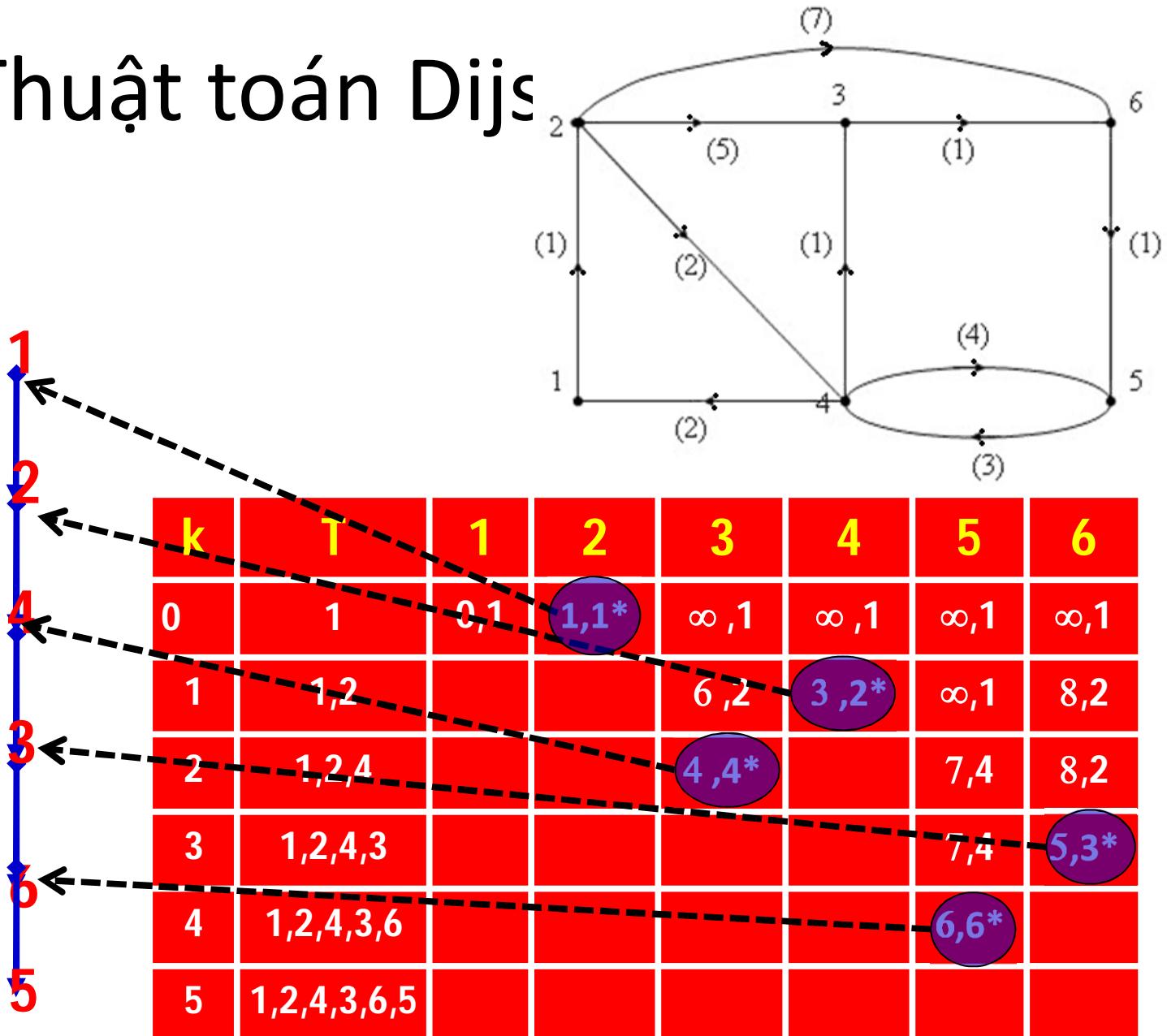
# Thuật toán Dijkstra (tt)

```
(* Khởi tạo *)
for v ∈ V do
    Begin
        d[v]:=a[s,v];
        Truoc[v]:=s;
    End;
d[s]:=0; T:=V\{s}; (* T là tập các đỉnh chưa cố định *)
(* Bước lặp *)
while T <> ∅ do
    Begin
        Tìm đỉnh u ∈ T thoả mãn d[u]=min{d[z]:z∈
        T:=T\{u}; (* Cố định nhãn của đỉnh u*)
        For v∈ T do
            If d[v]>d[u]+a[u,v] then
                Begin
                    d[v]:=d[u]+a[u,v];
                    Truoc[v]:=u;
                End;
    End;
```



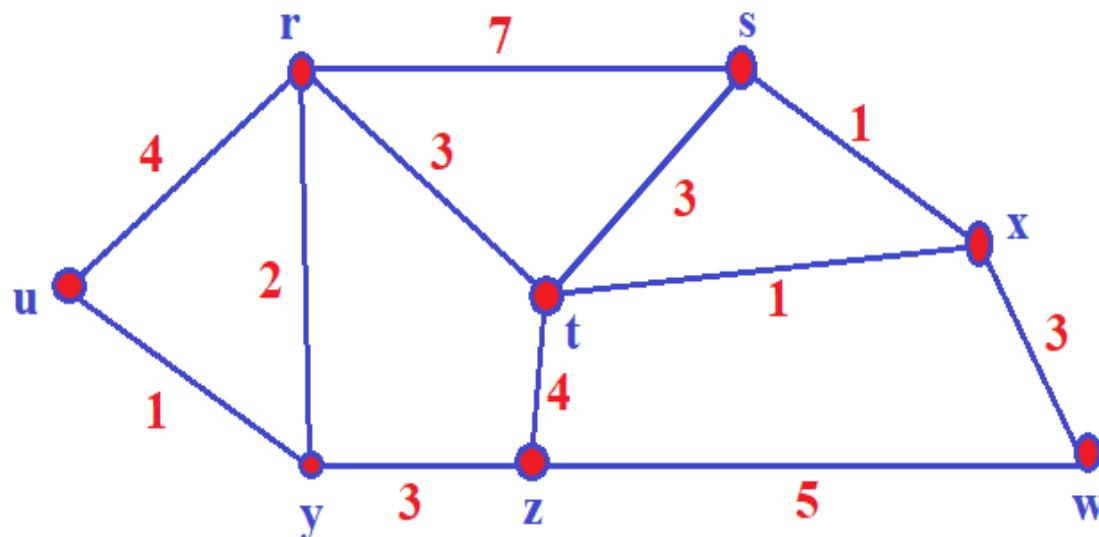
k	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						

# Thuật toán Dijk

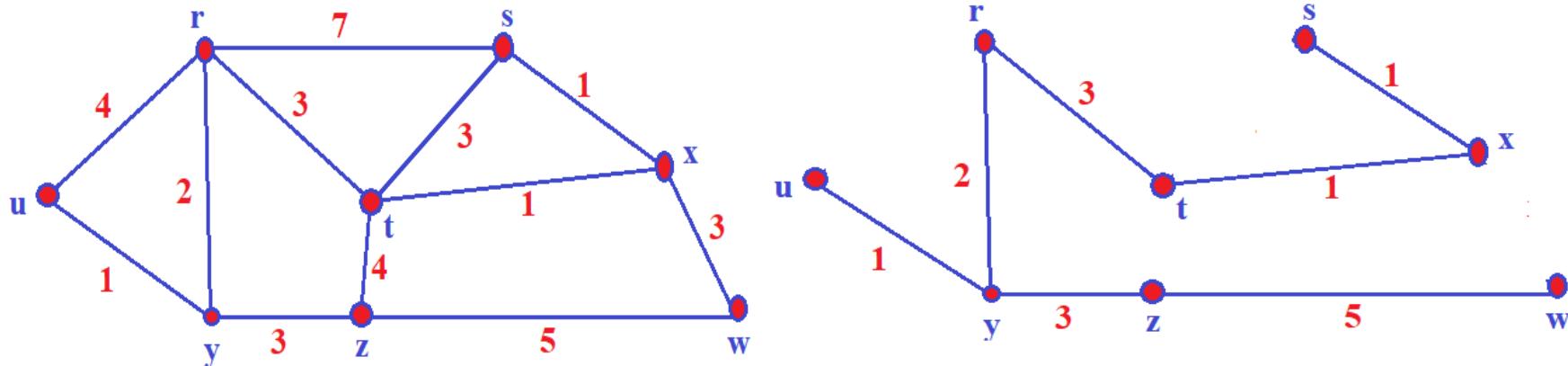


# Ví dụ 1: Thuật toán Dijkstra

Tìm đường đi ngắn nhất từ đỉnh u đến các đỉnh còn lại

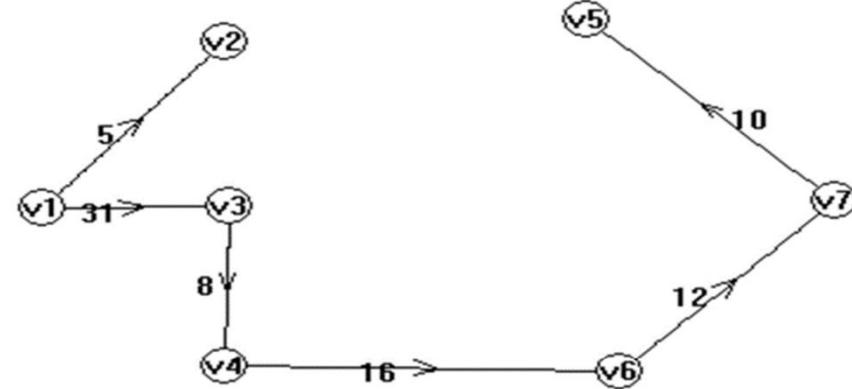
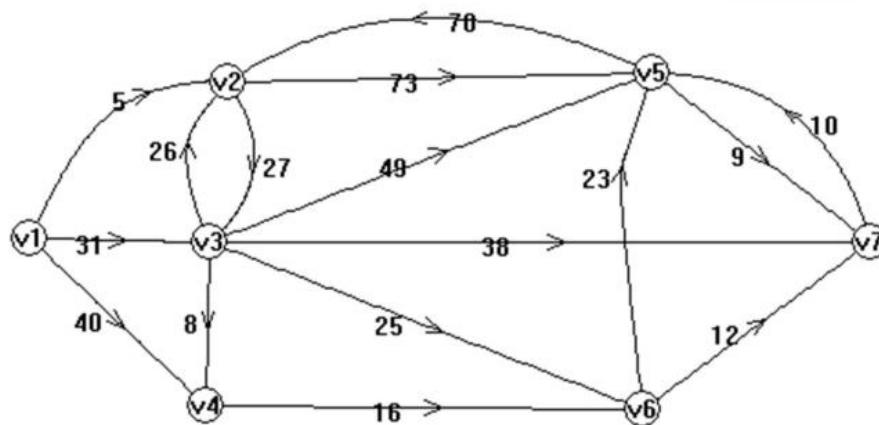


# Ví dụ 1



Bước	T	u	r	y	s	t	z	x	w
0	u	(0,u)	(4,u)	(1,u)*	(∞,u)	(∞,u)	(∞,u)	(∞,u)	(∞,u)
1	u,y	-	(3,y)*	-	(∞,u)	(∞,u)	(4,y)	(∞,u)	(∞,u)
2	u,y,r	-	-	-	(10,r)	(6,r)	(4,y)*	(∞,u)	(∞,u)
3	u,y,r,z	-	-	-	(10,r)	(6,r)*	-	(∞,u)	(9,z)
4	u,y,r,z,t	-	-	-	(9,t)	-	-	(7,t)*	(9,z)
5	u,y,r,z,t,x	-	-	-	(8,x)*	-	-	-	(9,z)
6	u,y,r,z,t,x,s	-	-	-	-	-	-	-	(9,z)*
7	u,y,r,z,t,x,s,w	-	-	-	-	-	-	-	-

## Ví dụ 2



Bước	T	v1	v2	v3	v4	v5	v6	v7
0	v1	(0,v1)	(5,v1)*	(31,v1)	(40,v1)	(∞,v1)	(∞,v1)	(∞,v1)
1	v1,v2	-	-	(31,v1)*	(40,v1)	(78,v2)	(∞,v1)	(∞,v1)
2	v1,v2,v3	-	-	-	(39,v3)*	(78,v2)	(56,v3)	(69,v3)
3	v1,v2,v3,v4	-	-	-	-	(78,v2)	(55,v4)*	(69,v3)
4	v1,v2,v3,v4,v6	-	-	-	-	(78,v2)	-	(67,v6)*
5	v1,v2,v3,v4,v6,v7	-	-	-	-	(77,v7)*	-	-
6	v1,v2,v3,v4,v6,v7,v5	-	-	-	-	-	-	-

## Thuật toán Ford – Bellman

Tìm đường đi ngắn nhất từ  $u_0$  đến các đỉnh hoặc chỉ ra đồ thị có mạch âm.

Bước 1.  $L_0(u_0) = 0$  và  $L_0(v) = \infty \quad \forall v \neq u_0$ . Đánh dấu đỉnh  $v$  bằng  $(\infty, -)$ ;  $k=1$ .

Bước 2.  $L_k(u_0) = 0$  và

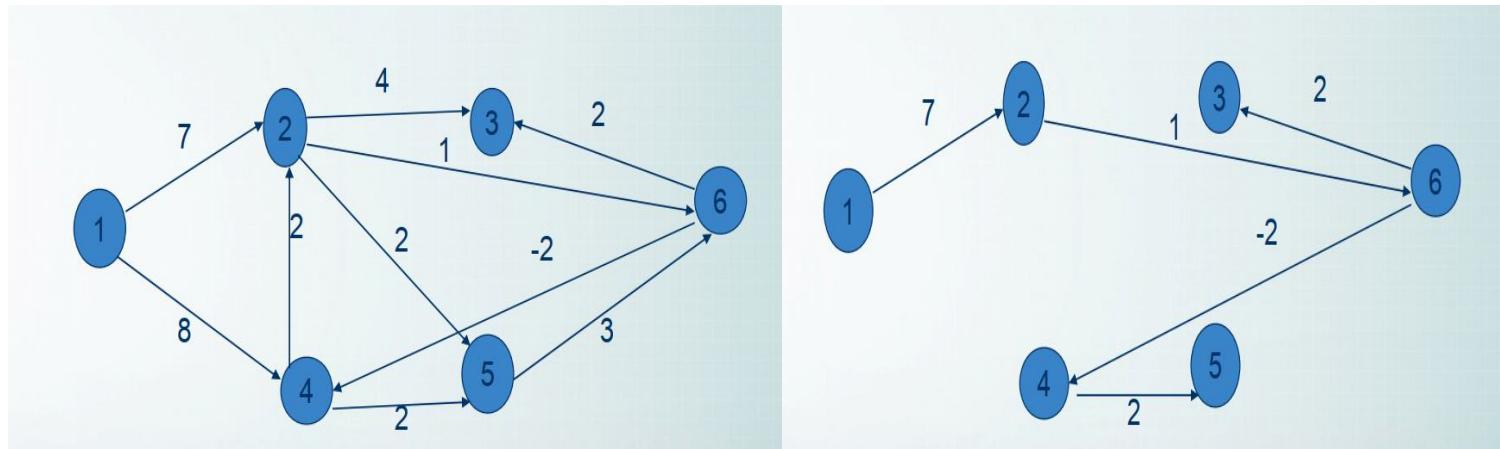
$L_k(v) = \min\{L_{k-1}(u) + w(uv) \mid u \text{ là đỉnh trước của } v\}$

Nếu  $L_k(v) = L_{k-1}(y) + w(yv)$  thì đánh dấu đỉnh  $v$  bởi  $(L_k(v), y)$

Bước 3. Nếu  $L_k(v) = L_{k-1}(v)$  với mọi  $v$ , tức  $L_k(v)$  ổn định thì dừng. Ngược lại đến bước 4.

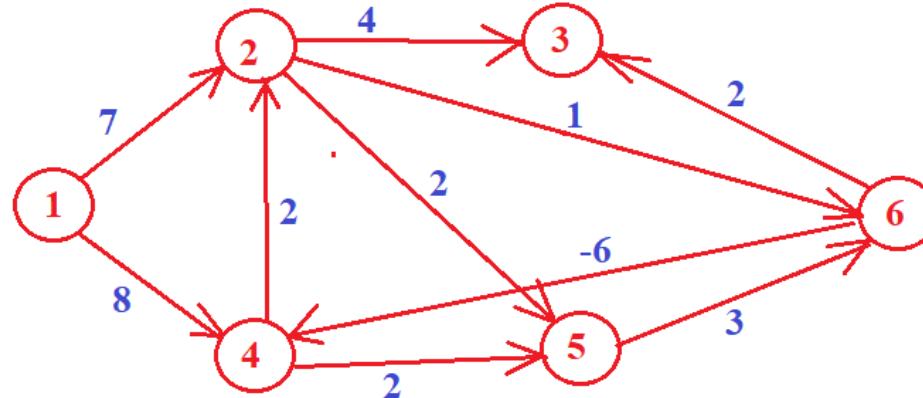
Bước 4. Nếu  $k = n$  thì dừng. G có mạch âm. Nếu  $k \leq n-1$  thì trở về bước 2 với  $k := k+1$

## Ví dụ 3



BƯỚC	1	2	3	4	5	6
0	(0,1)	(∞,1)	(∞,1)	(∞,1)	(∞,1)	(∞,1)
1	-	(7,1)	(∞,1)	(8,1)	(∞,1)	(∞,1)
2	-	(7,1)	(11,2)	(8,1)	(9,2)	(8,2)
3	-	(7,1)	(10,6)	(6,6)	(9,2)	(8,2)
4	-	(7,1)	(10,6)	(6,6)	(8,4)	(8,2)
5	-	(7,1)	(10,6)	(6,6)	(8,4)	(8,2)

## Ví dụ 4



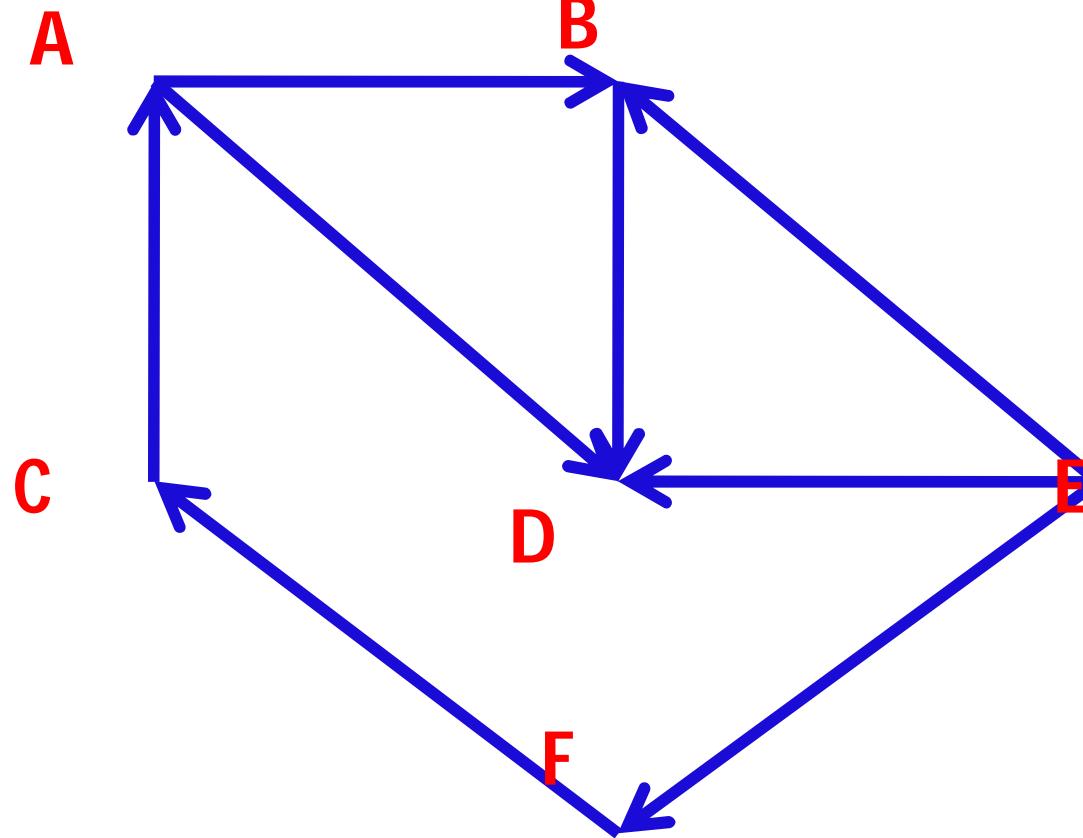
Bước	1	2	3	4	5	6
0	(0,1)	( $\infty$ ,1)				
1	-	(7,1)	( $\infty$ ,1)	(8,1)	( $\infty$ ,1)	( $\infty$ ,1)
2	-	(7,1)	(11,2)	(8,1)	(9,2)	(8,2)
3	-	(7,1)	(10,6)	(2,6)	(9,2)	(8,2)
4	-	(4,4)	(10,6)	(2,6)	(4,4)	(8,2)
5	-	(4,4)	(8,2)	(2,6)	(4,4)	(5,2)
6	-	(4,4)	(7,6)	(-1,6)	(4,4)	(5,2)

$k=n=6$ .  $L_k(i)$  chưa ổn định nên đồ thị có mạch âm chẵng hạn:  $4 \rightarrow 2 \rightarrow 6 \rightarrow 4$  có độ dài -3

# Bài toán giao việc

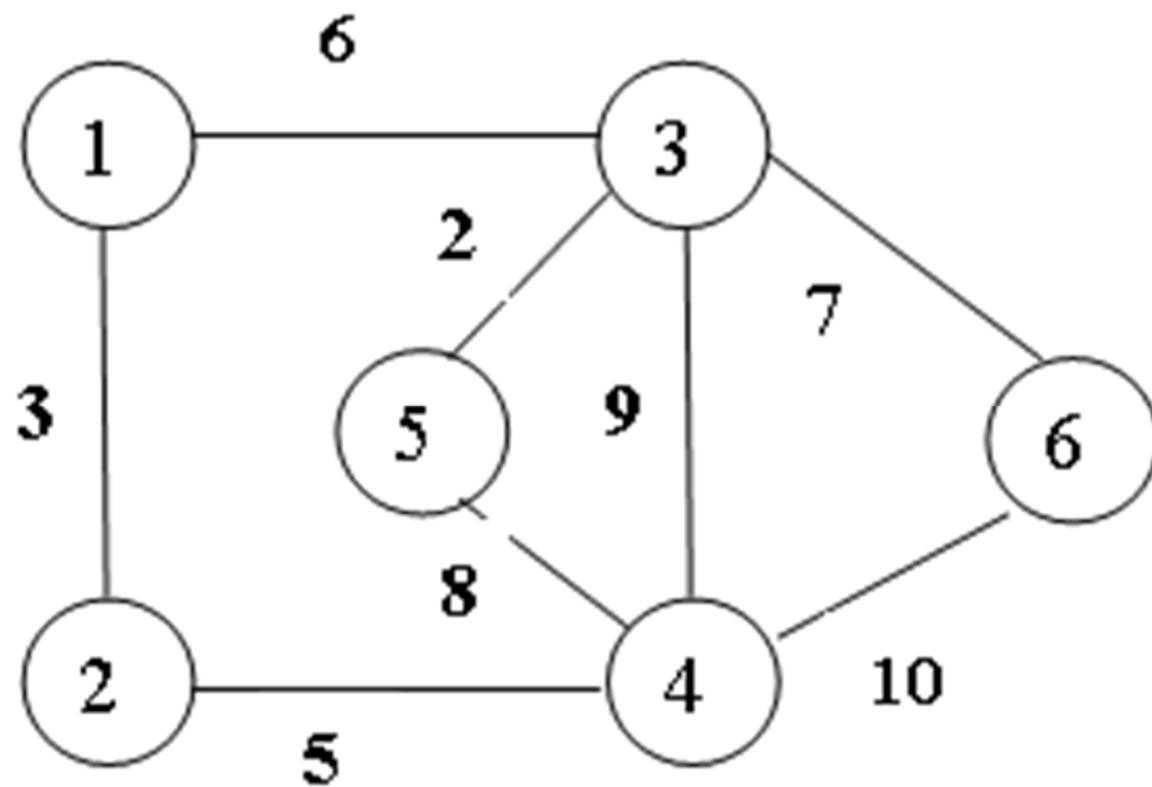
- Giả sử có 6 công việc cần làm: A, B, C, D, E, F
  - Công việc A: Phải làm trước các công việc B, D
  - Công việc B: Phải làm trước công việc D
  - Công việc C: Phải làm trước A và sau công việc F
  - Công việc D: Phải làm sau các công việc A, B, E
  - Công việc E: Phải làm trước các công việc B, D, F
- Hãy tìm một thứ tự thực hiện các công việc sao cho thỏa mãn các yêu cầu trên.

# Bài toán giao việc (tt)

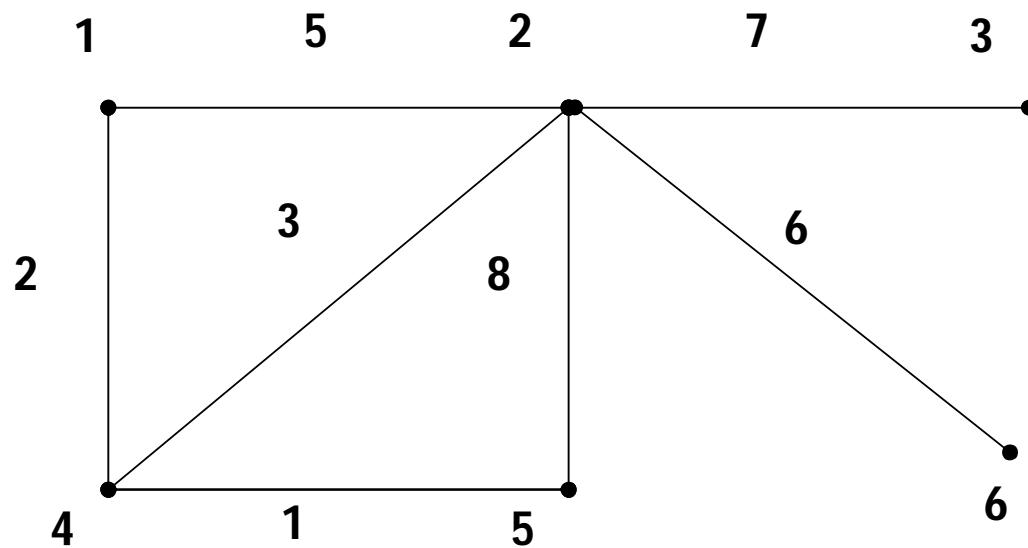


E    F    C    A    B    D

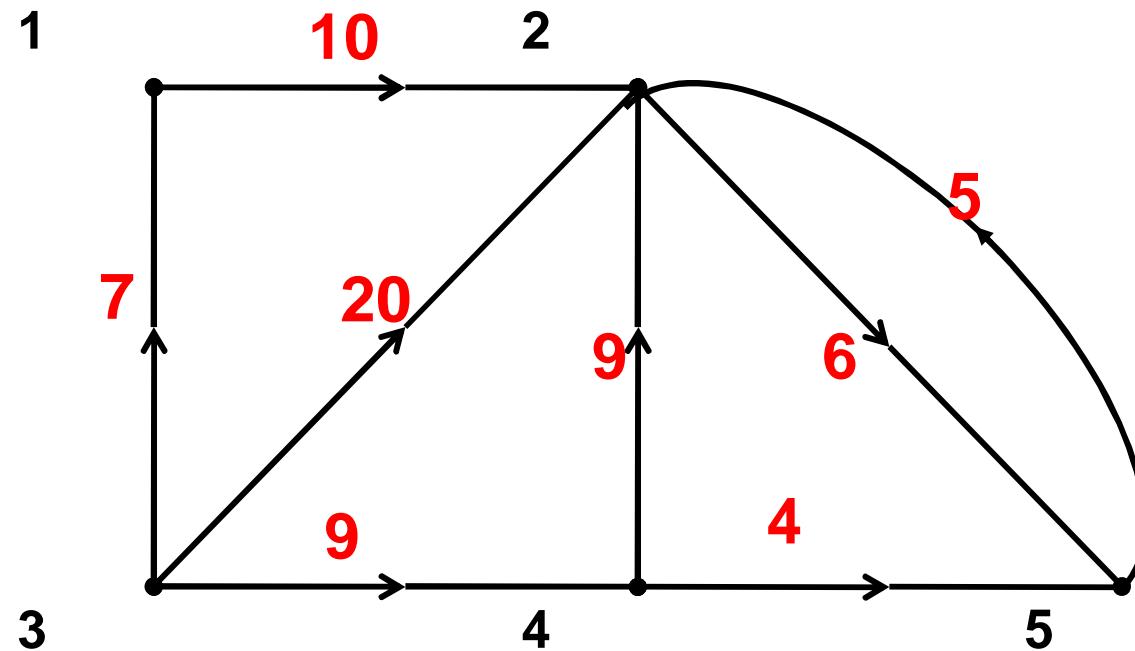
# Bài tập



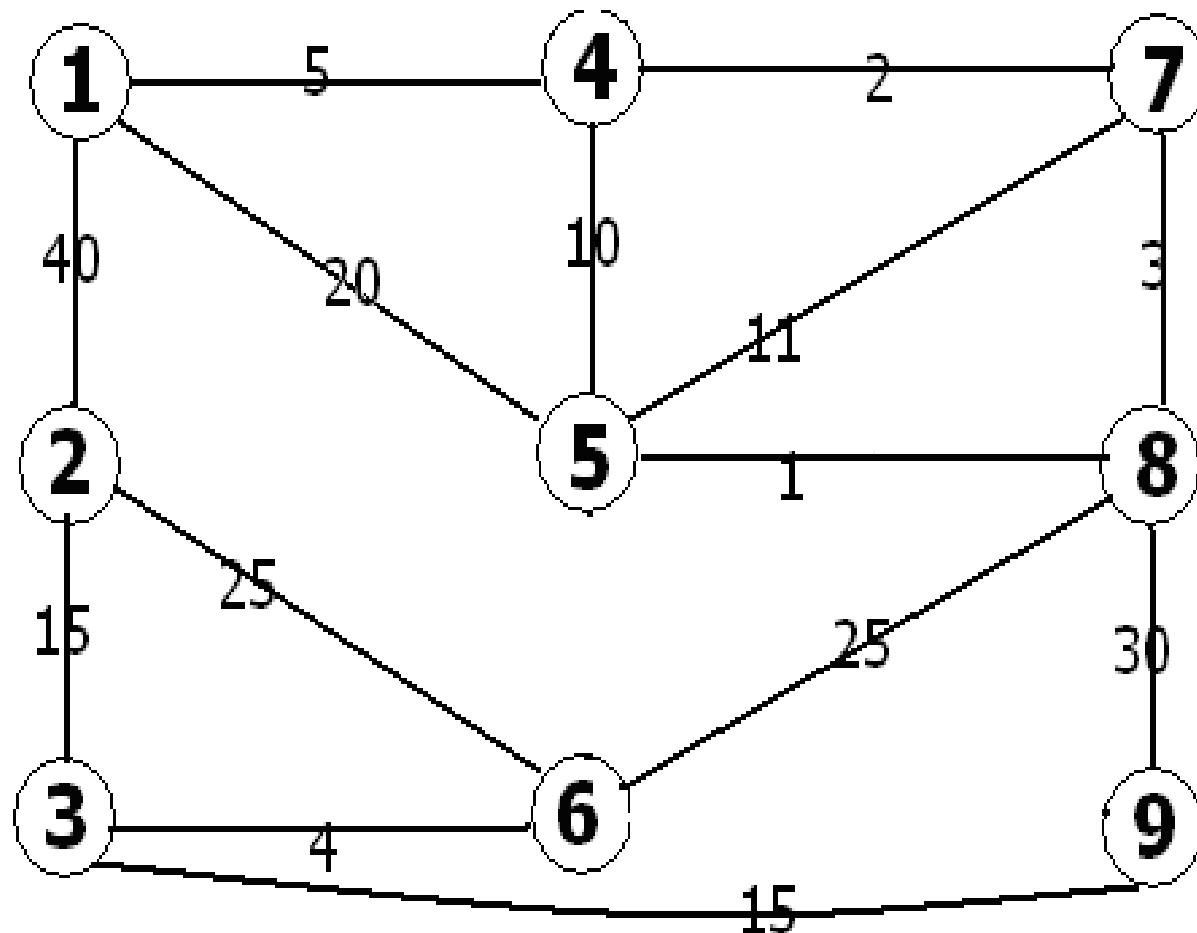
# Bài tập



# Bài tập



# Bài tập



# Bài tập

	1	2	3	4	5	6
1	0	2	1	5	0	3
2	2	0	0	3	0	0
3	1	0	0	4	1	9
4	5	3	4	0	0	5
5	0	0	1	0	0	0
6	3	0	9	5	0	0