

BÀI GIẢNG TOÁN CAO CẤP

TÍCH PHÂN (BẤT ĐỊNH, XÁC ĐỊNH)

I. TÍCH PHÂN BẤT ĐỊNH

- Hàm số $F(x)$ được gọi là một **nguyên hàm** của hàm số $f(x)$ trên D nếu $F'(x) = f(x), \forall x \in D$.
- **Định lý:** Nếu $F(x), H(x)$ là các nguyên hàm của $f(x)$ trên D thì $H(x) = F(x) + C, \forall x \in D$, trong đó C là hằng số nào đó.
- Họ tất cả các nguyên hàm của $f(x)$ trên D được gọi là **tích phân bất định** của f đối với biến x trên D và được ký hiệu bởi

$$\int f(x) dx,$$

trong đó, dấu \int là ký hiệu tích phân; hàm số f là hàm dưới dấu tích phân và x là biến của tích phân.

$$\int f(x) \, dx = F(x) + C$$

Trong đó: $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$, và C là hằng số thực bất kỳ.

VD 1. Do $(x^3)' = 3x^2$ nên $\int x^2 \, dx = \frac{x^3}{3} + C$.

Do $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ nên $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$.

Do $(\ln |x|)' = \frac{1}{x}$ nên $\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C$.

Do $(e^x)' = e^x$ nên $\int e^x \, dx = e^x + C$.

Tính chất của tích phân bất định

1. $\int k f(x) dx = k \int f(x) dx$, k là hằng số khác không.

2. $\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx.$

3. Nếu $\int f(x) dx = F(x) + C$ thì $\int f(u) du = F(u) + C.$

VD 2. Ta có $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$ nên

$$\int \sin^2 x \cos x dx = \int (\sin x)^2 d(\sin x) = \frac{\sin^3 x}{3} + C;$$

$$\int \frac{\ln^2 x}{x} dx = \int (\ln x)^2 d(\ln x) = \frac{\ln^3 x}{3} + C;$$

$$\int \frac{\arctan^2 x}{1+x^2} dx = \int (\arctan x)^2 d(\arctan x) = \frac{\arctan^3 x}{3} + C.$$

CÔNG THỨC TÍCH PHÂN BẤT ĐỊNH

$$1. \int a \, dx = ax + C$$

$$2. \int x^\alpha \, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \text{ với mọi } \alpha \neq -1$$

$$3. \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$4. \int \frac{1}{x^2} \, dx = -\frac{1}{x} + C$$

$$5. \int \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx = 2\sqrt{x} + C$$

$$6. \int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0, a \neq 1)$$

đặc biệt $\int e^x \, dx = e^x + C$

$$7. \int \cos x \, dx = \sin x + C$$

$$8. \int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

$$9. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$$

$$10. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$$

$$11. \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$$

đặc biệt $\int \frac{dx}{1 + x^2} = \arctan x + C$

$$12. \int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C$$

đặc biệt $\int \frac{dx}{1 - x^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C$

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$

đặc biệt $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + C$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + b}} = \ln |x + \sqrt{x^2 + b}| + C$

15. $\int \tan x dx = -\ln |\cos x| + C$

16. $\int \cot x dx = \ln |\sin x| + C.$

VD 3. Tính các tích phân:

$$I = \int \frac{dx}{16 + x^2}$$

$$J = \int \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}}$$

$$K = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2}}$$

$$H = \int \frac{dx}{9 - x^2}$$

CÁC PHƯƠNG PHÁP TÍNH TÍCH PHÂN BẤT ĐỊNH

1. Phương pháp đổi biến

Dạng 1 Đặt $x = g(t) \Rightarrow dx = g'(t) dt$

Dạng 2 Đặt $t = h(x) \Rightarrow dt = h'(x) dx$

Chú ý Nếu $g(t) = h(x)$ thì $g'(t) dt = h'(x) dx$.

VD 4. Tính $I = \int \frac{\sin \sqrt[3]{x} dx}{\sqrt[3]{x^2}}$.

$$I = \int \frac{\sin \sqrt[3]{x} dx}{\sqrt[3]{x^2}}$$

Giải.

Đặt $x = t^3 \Rightarrow dx = 3t^2 dt$, ta có

$$I = \int \frac{3t^2 \sin t dt}{t^2} = 3 \int \sin t dt = -3 \cos t + C.$$

Trở về biến cũ, ta được

$$\int \frac{\sin \sqrt[3]{x} dx}{\sqrt[3]{x^2}} = -3 \cos \sqrt[3]{x} + C.$$

VD 5. Tính $I = \int x^2 \sqrt{1-x} dx$.

$$I = \int x^2 \sqrt{1-x} dx$$

Giải.

Đặt $t = \sqrt{1-x} \Rightarrow t^2 = 1-x \Leftrightarrow x = 1-t^2 \Rightarrow dx = -2t dt$, ta có

$$\begin{aligned} I &= \int (1-t^2)^2 t(-2t) dt \\ &= \int (-2t^2 + 4t^4 - 2t^6) dt \\ &= -\frac{2}{3}t^3 + \frac{4}{5}t^5 - \frac{2}{7}t^7 + C \\ &= -2\sqrt{(1-x)^3} \left[\frac{1}{3} - \frac{2}{5}(1-x) + \frac{1}{7}(1-x^2) \right] + C \\ &= -\frac{2}{105}\sqrt{(1-x)^3} (8+12x+15x^2) + C. \end{aligned}$$

VD 6. Tính $I = \int \sin x \cos x \sqrt{1+\sin^2 x} dx$.

$$I = \int \sin x \cos x \sqrt{1 + \sin^2 x} dx$$

Giải.

Đặt $t = 1 + \sin^2 x \Rightarrow dt = 2 \sin x \cos x dx$, ta có

$$I = \int \sqrt{t} \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{3} (1 + \sin^2 x)^{\frac{3}{2}} + C.$$

Cách 2. Đặt $t = \sqrt{1 + \sin^2 x} \Rightarrow t^2 = 1 + \sin^2 x \Rightarrow 2t dt = 2 \sin x \cos x dx$

hay $t dt = \sin x \cos x dx$. Khi đó

$$I = \int t \cdot t dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{1}{3} (1 + \sin^2 x)^{\frac{3}{2}} + C.$$

VD 7. Tính $I = \int \frac{dx}{x(2 + \ln^2 x)}$.

$$I = \int \frac{dx}{x(2 + \ln^2 x)}$$

Giải.

Đặt $t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{dx}{x}$, ta có

$$I = \int \frac{dt}{2 + t^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{t}{\sqrt{2}} + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{\ln x}{\sqrt{2}} + C.$$

▷ Sinh viên tự giải:

VD 8. Tính $I = \int \frac{x^2 dx}{1 - x^6}$.

VD 9. Tính $I = \int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 5}}$.

VD 10. Tính $I = \int \frac{e^x(x+1)}{xe^x(xe^x+1)} dx$.

VD 11. Tính $I = \int \frac{dx}{x\sqrt{2x-9}}$.

VD 12. Tính $I = \int \frac{x dx}{x^4 - x^2 + 1}$.

VD 13. Tính $I = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2}, \quad a > 0$.

2. Phương pháp tích phân từng phần

Công thức

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du.$$

Sử dụng phương pháp này khi

1. có TÍCH hai loại hàm khác nhau
2. CHỈ CÓ $\log_a x$ hoặc các hàm LG ngược

Hướng ưu tiên đặt u

1. $\log_a x, \arcsin x, \arccos x, \arctan x, \text{arccot} x.$
2. đa thức

VD 14. Tính $I = \int (x^2 + 2x) \ln x \, dx.$

$$I = \int (x^2 + 2x) \ln x \, dx$$

Giải. Đặt $\begin{cases} u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x} \\ dv = (x^2 + 2x) \, dx \Rightarrow v = \frac{x^3}{3} + x^2. \end{cases}$

Khi đó

$$\begin{aligned} I &= \left(\frac{x^3}{3} + x^2 \right) \ln x - \int \left(\frac{x^2}{3} + x \right) \, dx \\ &= \left(\frac{x^3}{3} + x^2 \right) \ln x - \frac{x^3}{9} - \frac{x^2}{2} + C. \end{aligned}$$

VD 15. Tính $I = \int x \arctan x \, dx.$

$$I = \int x \arctan x \, dx$$

Giải. Đặt $\begin{cases} u = \arctan x \Rightarrow du = \frac{dx}{1+x^2} \\ dv = x \, dx \Rightarrow v = \frac{x^2}{2}. \end{cases}$

Khi đó

$$\begin{aligned} I &= \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2 \, dx}{x^2 + 1} \\ &= \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2 + 1 - 1}{x^2 + 1} \, dx \\ &= \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2 + 1} \\ &= \frac{x^2}{2} \arctan x + \frac{1}{2} \arctan x - \frac{x}{2} + C. \end{aligned}$$

VD 16. Tính $I = \int \arcsin x \, dx$.

$$I = \int \arcsin x \, dx$$

Giải. Đặt $\begin{cases} u = \arcsin x \Rightarrow du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ dv = dx \Rightarrow v = x. \end{cases}$

Khi đó

$$\begin{aligned} I &= x \arcsin x - \int \frac{x \, dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= x \arcsin x + \int \frac{-2x \, dx}{2\sqrt{1-x^2}} \\ &= x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C. \end{aligned}$$

VD 17. Tính $I = \int (3x-2)e^{2x} \, dx.$

$$I = \int (3x - 2)e^{2x} dx$$

Giải. Đặt $\begin{cases} u = 3x - 2 \\ dv = e^{2x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 3 \\ v = \frac{e^{2x}}{2}. \end{cases}$ Suy ra

$$I = \frac{(3x - 2)e^{2x}}{2} - \frac{3}{2} \int e^{2x} dx = \frac{(3x - 2)e^{2x}}{2} - \frac{3}{4}e^{2x} + C.$$

VD 18. Tính $I = \int (2x^2 + 6x) \cos^2 x dx.$

$$I = \int (2x^2 + 6x) \cos^2 x \, dx$$

Giải. Do $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$ nên

$$\begin{aligned} I &= \int (x^2 + 3x)(1 + \cos 2x) \, dx \\ &= \int (x^2 + 3x) \, dx + \int (x^2 + 3x) \cos 2x \, dx = I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Ta có $I_1 = \int (x^2 + 3x) \, dx = \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}$. Đổi với I_2 ta đặt

$$\begin{cases} u = x^2 + 3x \\ dv = \cos 2x \, dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = (2x + 3) \, dx \\ v = \frac{\sin 2x}{2}, \end{cases}$$

suy ra

$$I_2 = \frac{(x^2 + 3x) \sin 2x}{2} - \frac{1}{2} \int \sin 2x \, dx = \frac{(x^2 + 3x) \sin 2x}{2} - I_3.$$

Dối với I_3 , đặt

$$\begin{cases} u_1 = 2x + 3 \\ dv = \sin 2x \, dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2 \, dx \\ v = -\frac{\cos 2x}{2}, \end{cases}$$

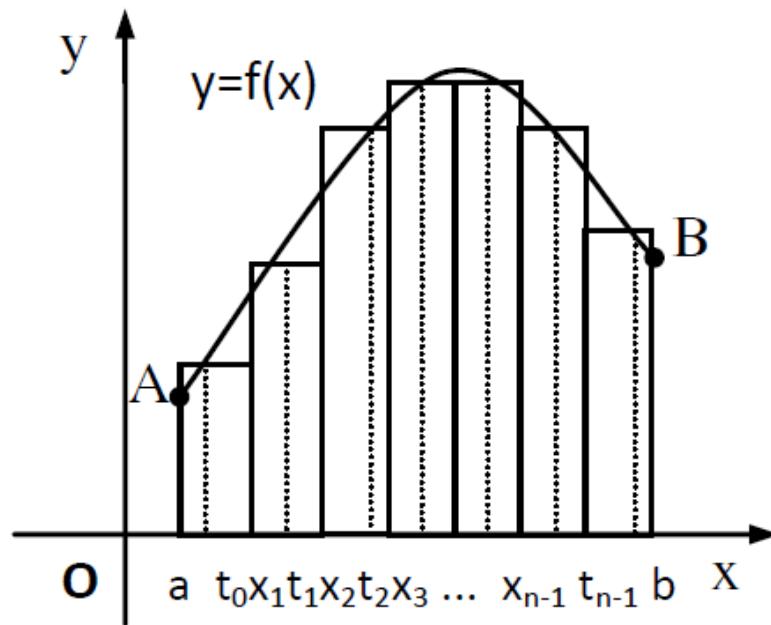
ta có

$$\begin{aligned} I_3 &= \frac{1}{2} \left[-\frac{(2x-3) \cos 2x}{2} + \int \cos 2x \, dx \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[-\frac{(2x-3) \cos 2x}{2} + \frac{\sin 2x}{2} \right] + C. \end{aligned}$$

Vậy

$$I = \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + \frac{(x^2 + 3x) \sin 2x}{2} + \frac{(2x-3) \cos 2x - \sin 2x}{4}.$$

II. TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH



- **Định nghĩa:** Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $[a, b]$. Chia đoạn $[a, b]$ bởi $n + 1$ điểm: $x_0 = a < x_1 < \dots < x_i < \dots < x_{n-1} < x_n = b$.

Đặt $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i, \forall i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Với mỗi $0 \leq i \leq n-1$,
lấy $t_i \in [x_i, x_{i+1}]$ bất kỳ. **Lập tổng:** $I_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i) \Delta x_i$.

Khi $n \rightarrow \infty$ với điều kiện $\max_{0 \leq i \leq n-1} \Delta x_i \rightarrow 0$ mà $I_n \rightarrow I$, trong đó
 I là một số hữu hạn không phụ thuộc vào cách chia đoạn $[a, b]$ và
cách lấy các điểm t_i , thì I được gọi là tích phân xác định của f
từ a đến b và được ký hiệu bởi

$$I = \int_a^b f(x) dx := \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max_{0 \leq i \leq n-1} \Delta x_i \rightarrow 0}} \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i) \Delta x_i,$$

trong đó, dấu \int là ký hiệu tích phân; a, b lần lượt là cận dưới và
cận trên của tích phân; $f(x)$ là hàm lấy tích phân; x là biến của
tích phân). Khi đó, ta nói $f(x)$ là khả tích trên $[a, b]$.

Tính chất của tích phân xác định

- Nếu $f(x)$ khả tích trên $[a, b]$ thì $f(x)$ bị chặn trên $[a, b]$.
- Nếu $f(x)$ liên tục trên $[a, b]$ thì $f(x)$ khả tích trên $[a, b]$.
- $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(u) du$ (tích phân xác định chỉ phụ thuộc vào hàm lấy tích phân và các cận, không phụ thuộc vào biến).
- $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$ và $\int_a^a f(x) dx = 0$.
- $\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$, k là hằng số.

- $\int_a^b [f(x) \pm g(x)] \, dx = \int_a^b f(x) \, dx \pm \int_a^b g(x) \, dx.$
- $\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx$, với mọi c nằm giữa a và b .
- Nếu $f(x)$ khả tích trên $[a, b]$ thì hàm số

$$F(x) = \int_a^x f(t) \, dt$$

xác định và liên tục tại mọi $x \in [a, b]$. Hơn nữa, nếu $f(x)$ liên tục tại $x_0 \in [a, b]$ thì $F'(x_0) = f(x_0)$.

Công thức Newton - Leibnitz

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

trong đó, $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$.

Hai phương pháp tính Tích phân xác định

★ Đổi biến:
$$\begin{cases} x = g(t) \Rightarrow dx = g'(t) dt \\ t = h(x) \Rightarrow dt = h'(x) dx \end{cases}$$
 (nhớ đổi cận)

★ Từng phần:
$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$$

VD 19. Tính tích phân

$$I = \int_0^1 x^{15} \cdot \sqrt{1 + 3x^8} dx.$$

$$I = \int_0^1 x^{15} \cdot \sqrt{1 + 3x^8} \, dx$$

Giải. Đặt $t = \sqrt{1 + 3x^8} \Rightarrow t^2 = 1 + 3x^8 \Rightarrow \begin{cases} t \, dt = 12x^7 \, dx \\ x^8 = \frac{t^2 - 1}{3}. \end{cases}$

Đổi cận:

x	0	1
t	1	2

 Thay vào $I = \int_0^1 x^8 \sqrt{1 + 3x^8} \cdot x^7 \, dx$ ta được:

$$I = \frac{1}{36} \int_1^2 (t^4 - t^2) \, dt = \frac{1}{36} \left(\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_1^2 = \frac{29}{270}.$$

VD 20. Tính tích phân

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x \, dx}{6 - 5 \sin x + \sin^2 x}.$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x \, dx}{6 - 5 \sin x + \sin^2 x}$$

Giải. Đặt $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x \, dx$ và cận mới $t \in [0, 1]$.

Do đó

$$I = \int_0^1 \frac{dt}{6 - 5t + t^2} = \int_0^1 \frac{dt}{(t-2)(t-3)} = \ln \left| \frac{t-3}{t-2} \right| \Big|_0^1 = \ln \frac{4}{3}.$$

VD 21. Tính tích phân

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{4 \sin^2 x - 5 \sin x \cos x + \cos^2 x}.$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{4 \sin^2 x - 5 \sin x \cos x + \cos^2 x}$$

Giải. Đặt $t = \tan x \Rightarrow dt = \frac{dx}{\cos^2 x}$, ta có cận mới $t \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$.

Do đó

$$I = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{dt}{(t-1)(4t-1)} = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{t-1}{4t-1} \right| \Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{1}{3} \ln \frac{\sqrt{3}-1}{4-\sqrt{3}}.$$

VD 22. Tính tích phân

$$I = \int_1^e x \ln x dx.$$

$$I = \int_1^e x \ln x \, dx$$

Giải. Sử dụng tích phân từng phần ta có

$$I = \frac{1}{2} \int_1^e \ln x \, d(x^2) = \frac{1}{2} \left[x^2 \ln x \Big|_1^e - \int_1^e x^2 \, d(\ln x) \right] = \frac{e^2 + 1}{4}.$$

★ Bài tập tự làm: Tính các tích phân sau

$$1. \ I = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^{2x} dx}{e^x - 1 + \sqrt{e^x - 2}}$$
 $2 \ln 3 - 1$

$$2. \ I = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 \frac{\arctan x}{x^2} dx$$
 $\frac{1}{2} \ln \frac{5}{2}$

$$3. \ I = \int_0^{\frac{1}{8}} \arccos(4x) dx$$
 $\frac{\pi}{24} + \frac{1}{4} \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$$4. \ I = \int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{x+1}} dx$$
 $\pi\sqrt{2} - 4$

$$5. \ I = \int_0^{\sqrt{3}} x \arctan x dx$$
 $\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$